ОТЗЫВ НАУЧНОГО РУКОВОДИТЕЛЯ
на диссертационную работу
Гаража Александры Андреевны
«Инварианты Жордана–Кронекера
пары элементов алгебры Ли»,
представленную на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 1.1.5 «Математическая логика,
алгебра, теория чисел и дискретная математика»

Диссертация А.А. Гаража относится к области пуассоновой алгебры и геометрии. Одна из основных задач в этой области — интегрирование гамильтоновых динамических систем в явном виде, т.е. нахождение полного набора первых интегралов, составляющих полную систему функций в инволюции относительно скобки Пуассона. Многие естественные и важные в приложениях гамильтоновы системы возникают на пространствах, двойственных конечномерным алгебрам Ли, с канонической пуассоновой структурой. Особенно важен случай полупростых (или редуктивных) алгебр Ли, которые можно отождествить со своими двойственными пространствами с помощью формы Киллинга.

Давно обнаружено, что многие гамильтоновы системы имеют бигамильтонову природу, т.е. существуют полные системы функций в инволюции относительно не одной, а пары согласованных скобок Пуассона. Наличие второй скобки Пуассона, согласованной с исходной, существенно упрощает исследование гамильтоновых систем и построение полных инволютивных наборов функций. На пространствах, двойственных алгебрам Ли, в качестве второй скобки Пуассона, согласованной с канонической скобкой Пуассона–Ли, естественно рассматривать постоянную скобку Пуассона, получаемую из скобки Пуассона–Ли «замораживанием аргумента».

В диссертации А.А. Гаража рассматривается задача построения полных наборов многочленов в биинволюции на классических простых алгебрах Ли. Для этой цели используется алгебро-геометрический метод, описанный А.В. Болсиновым и П. Чжан. Он основан на рассмотрении двух вышеупомянутых скобок Пуассона как кососимметрических билинейных форм на пространстве рациональных векторных полей на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. С этой точки зрения многочлены на $\mathfrak{g}^*$ образуют полный набор в биинволюции тогда и только тогда, когда их дифференциалы образуют базис билагранжева подпространства относительно вышеупомянутой пары форм.

Из классической линейной алгебры хорошо известна структурная теория пар кососимметрических билинейных форм: они распадаются в прямую сумму блоков двух типов — жордановых и кронекеровых. Численные инварианты этих блоков — *инварианты Жордана–Кронекера* — несут важную информацию о свойствах алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В частности, в терминах разложения на блоки и инвариантов Жордана–Кронекера описывается структура билагранжева подпространства: оно разбивается в прямую сумму билагранжевых подпространств для каждого блока.

Таким образом, изучаемая в диссертации задача разбивается на три части:

вычисление инвариантов Жордана–Кронекера, нахождение базиса билагранжева подпространства, «интегрирование» этого базиса и нахождение полного набора многочленов в биинволюции. Все эти подзадачи полностью решены в диссертации для любого «замороженного аргумента» $A \in \mathfrak{g}$ в алгебрах Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n, \mathfrak{sl}_n, \mathfrak{sp}_{2n}$. Тем самым, в указанных случаях полностью решена задача построения биинволютивных наборов функций. Что касается ортогональной серии $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n$, то здесь ситуация принципиально сложнее, но тем не менее удалось получить аналогичные результаты для некоторых классов элементов $A \in \mathfrak{g}$ необщего положения («хороших» и «исправимых», в терминологии диссертации).

Отметим, что в случае, когда элемент $A \in \mathfrak{g}$ находится в общем положении, результаты диссертации можно интерпретировать как классический метод сдвига аргумента Мищенко–Фоменко. Максимальные коммутативные (относительно скобки Пуассона–Ли) подалгебры в алгебре многочленов на $\mathfrak{g}$, порождённые построенными этим методом полными инволютивными наборами, известны как подалгебры Мищенко–Фоменко. В диссертации исследовано предельное поведение подалгебр Мищенко–Фоменко и доказано, что для полупростого элемента необщего положения A («хорошего» в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n$) подалгебра, порождённая биинволютивным набором многочленов, построенным в диссертации, является пределом подалгебр Мищенко–Фоменко. Тем самым, результаты диссертации обобщают и развивают метод Мищенко–Фоменко.

Ещё одним важным вкладом диссертационной работы является исследование вариации инвариантов Жордана–Кронекера при изменении «замороженного аргумента». А.А. Гаража доказала, что для алгебр Ли $\mathfrak{gl}_n, \mathfrak{sl}_n, \mathfrak{sp}_{2n}$ инварианты постоянны внутри пластов, а для $\mathfrak{so}_n$ могут меняться внутри пластов, что ещё раз подчёркивает сложность ортогонального случая.

Таким образом, диссертация А.А. Гаража представляет собой законченное исследование высокого научного уровня, в котором решены актуальные задачи теории пуассоновых структур и интегрируемых систем на алгебрах Ли. Результаты диссертации являются новыми, получены автором полностью самостоятельно и прошли всестороннюю апробацию на научных семинарах и конференциях. Они изложены в трёх статьях, опубликованных в рецензируемых научных изданиях, определённых п. 2.3 Положения о присуждении учёных степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, и в двух заметках, опубликованных в сборниках тезисах докладов научных конференций. Указанные публикации по теме диссертации дают полное представление о проведённых исследованиях и полученных результатах, которые уже вызвали значительный интерес у специалистов.

В своей работе А.А. Гаража продемонстрировала отличное знание таких областей математики как структурная теория полупростых алгебр Ли, теория пуассоновых структур, линейная алгебра и теория матриц, творческое владение методами перечисленных математических теорий, научную фантазию и изобретательность.

Считаю, что диссертация Гаража Александры Андреевны «Инварианты Жордана–Кронекера пары элементов алгебры Ли» полностью соответствует критериям, установленным в «Положении о присуждении учёных степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова», и рекомендую её к защите в диссертационном совете МГУ МГУ.011.4 ФГБОУ ВО МГУ по специальности 1.1.5 «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика».

Научный руководитель,
доцент кафедры высшей алгебры
механико-математического факультета
МГУ имени М. В. Ломоносова, к.ф.-м.н.

Д. А. Тимашев

Дата

Подпись доцента Д. А. Тимашева удостоверяю.

Декан механико-математического факультета
МГУ имени М. В. Ломоносова
член-корр. РАН, доктор физико-математических наук, профессор

А. И. Шафаревич

Дата