

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
Физический факультет

На правах рукописи

Кузнецов Никита Юрьевич

**ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ
НЕПАРАКСИАЛЬНЫХ СВЕТОВЫХ ПОЛЕЙ
В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФРАКЦИИ**

Специальность 1.3.19 —
«Лазерная физика»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор
Макаров Владимир Анатольевич

Москва — 2023

Оглавление

Введение	4
1 Систематика, обнаружение и визуализация топологических особенностей электромагнитных полей	13
1.1 Математическое описание, систематика и обнаружение топологических особенностей электромагнитных полей: Обзор литературы	13
1.2 Построение сингулярных линий электромагнитного поля, полученного в численном эксперименте	23
1.3 Эволюция сингулярных линий непараксиальных электромагнитных полей при варьировании параметра задачи	30
Основные результаты первой главы	33
2 Топологические особенности светового поля, рассеянного объектами субволновых размеров	34
2.1 Топологические особенности светового поля в задачах рассеяния: Обзор литературы	34
2.2 Топологические особенности светового поля, рассеянного кремниевой сферической частицей	44
2.3 Топологические особенности светового поля, рассеянного золотым эллипсоидом	54
2.4 Топологические особенности светового поля, рассеянного планарным метаматериалом	64
Основные результаты второй главы	70
3 Узлы и зацепления топологического каркаса светового поля в задаче острой фокусировки лазерного излучения параболическим зеркалом	72
3.1 Узлы и зацепления в картинах фазы и поляризации электромагнитного излучения: Обзор литературы	72
3.2 Постановка задачи острой фокусировки, приводящей к формированию узлов и зацеплений сингулярных линий	75
3.3 Топологический каркас электрического поля при острой фокусировке низших пространственных мод лазерного излучения	77
3.4 Оптические ленты электрического поля при острой фокусировке низших пространственных мод лазерного излучения	87
Основные результаты третьей главы	89
4 Особенности протекания процессов нелинейной дифракции и удвоения частоты световых пучков и импульсов, содержащих сингулярности поляриза-	

ции, и их использование в задачах, решаемых с помощью методов глубокого машинного обучения	91
4.1 Фазовые и поляризационные сингулярности и методы машинного обучения в нелинейной оптике: Обзор литературы	91
4.2 Решение обратной задачи самофокусировки сингулярного светового пучка в изотропной гиротропной среде с использованием методов глубокого машинного обучения	94
4.3 Генерация второй оптической гармоники в объёме изотропной гиротропной среды сингулярным световым пучком	101
Основные результаты четвёртой главы	106
Заключение	108
Основные используемые обозначения	111
Литература	132

Введение

Попытки описания пространственной структуры приливных волн, подступающих к разным побережьям в не связанные очевидными закономерностями моменты времени предпринимались со времён Галилея и в основном терпели неудачу. Сегодня известно, что их структура обусловлена многократной интерференцией первичных волн с рассеянными от изрезанной береговой линии, а также воздействием кориолисовых сил. Значительный прогресс в этом вопросе был достигнут Уильямом Хьюэллом благодаря введению понятия амфидромических точек [233] — таких точек в мировом океане, в которых амплитуда приливной волны обращается в нуль, а вблизи которых волновой фронт совершает круговое движение. Понимание этих особенностей позволило составить точные карты приливных систем. Это открытие, сделанное ещё в 1833 году, можно считать первым свидетельством научного интереса к топологическим особенностям (фазовым сингулярностям) волновых полей. Работа Хьюэлла ограничена топологией двумерного скалярного волнового поля. Топологическая значимость областей нулевой амплитуды (узловых линий) в трёхмерной волне впервые отмечена Полем Дираком [52]. Их структура оказалась важна в дискуссии о непротиворечивости существующей квантовой теории гипотетических магнитных монополей [94].

В 1951 году [59] узловые линии регистрируются в волновом поле отражённой от ионосферы радиоволны, однако в отсутствие подробной теории наблюдение проходит достаточно малозамеченным. Однако с середины 1960-ых годов интерес к данной работе начинает быстро расти и новые исследования [186—188] обращаются к роли сингулярностей фазы волновой функции в различных квантовых системах. Такого рода структуры описываются при отражении частицы от прямоугольного потенциального барьера [95] (либо при полном внутреннем отражении световой волны) и двухчастичных взаимодействиях [96], разрабатывается классификация узловых линий на основе поведения фазы волновой функции в их окрестности [94].

В том же году работа Джона Ная и др. [149] впервые ставит топологические особенности волнового поля (обнаруженные в интерференционной картине отражённого от границы почвы и льда ультразвукового сигнала) во главу угла. Авторы указывают, что для волн большой длины, фаза которых может быть исследована подробно, сингулярности фазы играют ту же роль, какая в случае коротких волн свойственна каустическим поверхностям. Исследованию последних, образующих в приближении геометрической оптики своеобразный «топологический каркас» в описываемый период посвящено большое число работ [23; 24; 26; 145]. Эта работа провоцирует лавину дальнейших исследований, в которых акцент быстро смещается с акустики на радиофизику и оптику. Оформляется новая ветвь физики — сингулярная оптика. С 1980-ых годов в свет выходят многочисленные работы, посвящённые статистике фазовых сингулярностей [14; 43; 77; 227] в случайных полях, условиям их возникновения [43] и динамике распространения [97; 146; 235; 244] в полях общего вида; закономерностям в распределении топологических типов [76].

Большинство приведённых работ носит теоретический характер, либо посвящены экспериментальному обнаружению фазовых сингулярностей, непреднамеренно обнаруживаемым в лазерных резонаторах [43], а также турбулентной атмосфере [227; 247] и схожих случайно рассеивающих средах [77]. Но к концу 1990-ых годов и в особенности с началом XXI века растёт число работ, посвящённых разработке методов генерации сингулярных пучков, содержащих заранее определённый набор сингулярностей необходимого топологического типа. Приобретает актуальность задача построения лазерного пучка с произвольно заданным распределением интенсивности в поперечном сечении [239]. При помощи цилиндрических линз осуществляется генерация [2; 162], преобразование топологии [166] и измерение спектра соответствующих топологических характеристик [131; 132]. Получение сингулярных пучков с заданными свойствами осуществлено при помощи спиральных фазовых пластин [116], конических линз [9] и зеркал [128]. Продвинутое методы с использованием сегментированных адаптивных зеркал [223; 232] позволяют динамически переключаться между топологическими типами оптических вихрей. Большую популярность получили методы конструирования топологически нетривиальных световых пучков, при помощи голографически протравленных фазовых [88; 90] и амплитудных [58] пластин и зеркал [203]. Наиболее развитыми из существующих на сегодняшний день можно считать методы генерации световых пучков с нетривиальной топологией, основанные на жидкокристаллических масках [160], при помощи которых можно генерировать сингулярные пучки высочайшего качества [163] и перестраивать их тип с рекордной скоростью [7; 108]. Обзорные работы [254], посвящённые генерации и практическому применению оптических пучков, содержащих фазовые сингулярности, продолжают выходить и в самые последние годы.

Сингулярности фазы, соответствующие строгим нулям интенсивности волны, могут устойчиво существовать только в скалярных полях; для векторных полей, включая электромагнитные, их место занимают сингулярности поляризации. Поляризационные сингулярности представляют из себя точки, в которых одно из характерных направлений, связанных с эллипсом поляризации электромагнитной волны, теряет смысл. Простейшим примером таких сингулярностей служат C -точки — точки в сечении параксиальных пучков, поляризация в которых оказывается строго циркулярной. Предсказанные теоретически в 1980-ых годах [147], к началу 1990-ых они экспериментально обнаруживаются в микроволновом излучении [87]. C -точки могут рассматриваться как фазовые сингулярности одной из циркулярно поляризованных компонент электромагнитной волны [211], поэтому многие экспериментальные методы получения пучков с заданной структурой таких точек базируются на простом наложении регулярного и сингулярного пучков с противоположными циркулярными поляризациями [12; 33; 171], либо сингулярных пучков различных топологических типов [190]. Двойные аксиконы [4], конические зеркала [5] и жидкокристаллические маски с наведённым двулучепреломлением [8; 30; 79; 130; 173] также продемонстрировали свою эффективность в качестве инструмента получения излучения, содержащего поляризационные сингулярности. Большой точности при его получении можно достичь с использованием адаптивных микрзеркальных приборов [91; 172]. Сингулярности поляризации образуются в интерференционной картине при различных схемах наложения нескольких плоских волн [196; 249].

С конца 1980-ых годов вышло большое число работ, посвящённых роли поляризацион-

ных сингулярностей в формировании общей структуры поляризации излучения [143; 150], динамике их распространения в оптических волокнах [229—231], лазерных пучках [62; 119] и двулучепреломляющих кристаллах [20], морфологии и статистике поляризационных сингулярностей в случайных полях [18; 48], методам их регистрации [61; 98; 103] и приведённым выше схемам генерации.

Большая часть упомянутых исследований проведена в параксиальном приближении: трёхмерный вид областей поляризационных сингулярностей (C -линий) рассматривался в них исключительно с позиций медленного дрейфа сингулярной точки в поперечном сечении пучка по мере его распространения вдоль выделенной оси, а продольная компонента излучения, никогда не равная нулю в неплоских волнах, опускалась. В последние годы наметился рост интереса [67; 141] к существенно трёхмерным топологическим особенностям электромагнитных полей. В точках сингулярности, по определению являющихся областями вырождения одной из поляризационных компонент, величина продольной компоненты вектора напряжённости электрического поля уже не может считаться малой, а эффективная скорость «дрейфа» сингулярных точек в поперечном сечении становится бесконечной вблизи точек рождения и аннигиляции сингулярностей [149]. Особый интерес привлекают оптические ленты — поверхности, отражающие ключевые особенности распределения поляризации в трёхмерном случае. Подробный анализ трёхмерного поля эллипсов поляризации [65] показывает, что существующие в параксиальной теории методы классификации сингулярных точек не вполне применимы при учёте продольной компоненты поля; предлагаются [50; 69; 70] основы новых классификаций. Эти классификации пока нельзя считать исчерпывающими, а выработка полной систематики оптических лент остаётся актуальным вопросом.

Выходят работы, указывающие на возможность генерации состояний света, в которых сингулярные линии оказываются завязаны в узлы [39; 153; 189] и сложные тороидальные зацепления (хопфионы) [168], образуя более высокий порядок топологических особенностей. Топологические особенности фазы и поляризации, включая как простые сингулярности, так и узлы и зацепления фазовых сингулярностей, играют большую роль [240] в устойчивости и динамике лазерных солитонов. Предлагаются методы использования данных конфигураций оптического излучения в качестве носителей информации [153]. Интерес ко всё более сложным топологическим особенностям электромагнитного поля продолжает расти, что указывает на **актуальность** настоящего исследования.

Цели работы

1. Разработка эффективных алгоритмов обнаружения и визуализации линий сингулярности поляризации электромагнитного поля и оптических лент поляризации в численном эксперименте.
2. Исследование топологии линий сингулярности поляризации и оптических лент, возникающих при рассеянии монохроматической эллиптически поляризованной волны на структурах субволнового масштаба и при фокусировке лазерного излучения.
3. Определение наиболее устойчивых при варьировании параметров падающего излуче-

ния топологических инвариантов, характеризующих структуру и свойства линий сингулярности поляризации и оптических лент.

4. Исследование перспектив применения электромагнитных полей, обладающих сингулярностями поляризации, для определения характеристик вещества, демонстрирующего нелинейный оптический отклик на световое поле.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования является поляризационная структура электрических полей, возникающих при дифракции и рассеянии лазерного квазимонохроматического излучения на структурах субволнового масштаба, в том числе при наличии у этих структур нелинейно-оптического отклика. Предметом исследования являются топологические особенности полей эллипсов поляризации квазимонохроматического излучения, возникающие при его дифракции и рассеянии на структурах субволнового масштаба: сингулярности фазы и поляризации, а также оптические ленты.

Научная новизна полученных результатов

1. Разработан алгоритм, позволяющий обнаруживать и отслеживать изменения геометрии линий сингулярности поляризации электромагнитного поля с рекордной на момент первого применения вычислительной эффективностью.
2. Впервые обнаружена и описана структура линий сингулярности поляризации электрического поля монохроматической плоской волны, рассеянной металлическими и диэлектрическими частицами субволнового размера, и установлено существование в нём оптических лент поляризации различного типа.
3. Понятие числа перекручиваний оптической ленты впервые обобщено на случай непланарных контуров построения.
4. Впервые зафиксировано наличие нетривиальных узлов и зацеплений линий истинно циркулярной и истинно линейной поляризации и описаны их возможные конфигурации при рассеянии плоской монохроматической электромагнитной волны на частицах субволнового масштаба и при острой фокусировке параболическим зеркалом лазерных пучков.
5. Впервые продемонстрирована применимость алгоритмов глубокого машинного обучения к задачам нелинейной поляризационной оптики и показано качественное преимущество использования для этих целей лазерных пучков с сингулярностями фазы и поляризации электрического поля.

Практическая значимость работы

Проведённый в работе анализ условий возникновения, геометрии и распределения типов поляризационных сингулярностей при рассеянии и острой фокусировке света позволяет кон-

струировать электромагнитные поля с топологически нетривиальными и устойчивыми к помехам конфигурациями. Оригинальный алгоритм прослеживания поляризационных сингулярностей в численном эксперименте, предложенный в работе, также позволит эффективно обнаруживать подобные топологические особенности в других полях, что может быть важным элементом решения задач оптической информатики; в частности, уже описанные в работе [157] подходы к кодированию информации при помощи сингулярных линий фазы с геометрией сложных узлов могут быть обобщены на случай проявляющих большее разнообразие топологических типов поляризационных сингулярностей. Наконец, приведённый анализ влияния наличия в поляризационном профиле излучения сингулярностей на протекание некоторых нелинейно-оптических процессов, в том числе задействующих методы глубокого машинного обучения, может быть использован для конструирования состояний света, для которых возрастает порог нежелательных в эксперименте явлений, таких как нелинейно-оптический коллапс в ходе самофокусировки.

Методология исследования

Основным методом исследования в настоящей диссертационной работе является численный эксперимент. При помощи численного интегрирования уравнений Максвелла (задачи, рассмотренные в параграфе 2.2 и главе 3), волнового уравнения (параграф 2.4), либо параболического уравнения оптики с использованием метода комплексных амплитуд (глава 4) рассчитывались распределения комплексных амплитуд электрической компоненты электромагнитной волны в ряде задач линейной и нелинейной дифракции лазерного излучения; исключением является параграф 2.3, распределение комплексной амплитуды в котором было получено аналитически. Детальное описание численных методов и значения их параметров, использованные в каждой задаче, даны в начале соответствующих параграфов.

В случае задачи, рассмотренной в главе 3, распределение комплексной амплитуды поля верифицировано сравнением его структуры с результатами независимого численного моделирования и экспериментального измерения, проведённых другой группой исследователей [152]. В задаче, рассмотренной в параграфе 2.2 для верификации результатов произведено их сравнение с распределениями степени поляризации излучения в аналогичной задаче, опубликованными в работе [35].

При помощи численного метода решения задачи Коши, подробно описанного в параграфах 1.2, 1.3 по полученным распределениям комплексных амплитуд электрического поля рассчитывалось точное положение и топологические характеристики сингулярных линий поляризации. Данный метод представляет собой модификацию явного метода Рунге–Кутты четвёртого порядка с адаптивным шагом [182]. В параграфе 4.2 анализ электромагнитного поля, претерпевшего нелинейную дифракцию в изотропной гиротропной среде производится при помощи алгоритма глубокого машинного обучения (искусственной нейронной сети) со свёрточной архитектурой. Данные, необходимые для обучения и оценки качества работы искусственной нейронной сети, получены при помощи численного решения параболического уравнения оптики методом Кранка–Николсона.

Положения, выносимые на защиту

1. В электрическом поле монохроматической эллиптически поляризованной волны, рассеянной металлической или диэлектрической сфероидальной частицей субволнового размера, на расстояниях порядка нескольких её характерных радиусов присутствуют линии круговой (C^T -линии) и линейной (L^T -линии) поляризации. Размеры занимаемой ими области пространства и их форма зависят от степени эллиптичности падающего излучения: при приближении его поляризации к круговой размеры области локализации C^T -линий увеличиваются, а при приближении к линейной — уменьшаются. Существующее зацепление L^T -линий с C^T -линиями не исчезает при любом изменении формы и ориентации эллипса поляризации падающего излучения. Инвариантом при изменении степени эллиптичности падающей волны является чётность индекса зацепления между совокупностями линий строго циркулярной и строго линейной поляризации.
2. При падении плоской монохроматической линейно поляризованной электромагнитной волны на планарный нелинейный метаматериал, базовый элемент которого содержит две тонкие металлические пластины, формируются две пересекающиеся линии циркулярной поляризации. Положение точки их пересечения в пространстве устойчиво к изменению длины падающей волны и её интенсивности и неустойчиво к изменению состояния её поляризации.
3. При острой фокусировке ($NA = 0.9$) эллиптически поляризованных Гауссовых и Лагерр–Гауссовых пучков, а также пучков Пуанкаре, падающих на параболическое зеркало вдоль его оси, вблизи его геометрического фокуса существует по крайней мере одна L^T -линия с топологией простого кольца, около которой C^T -линии образуют $(m; n)$ –торические узлы или зацепления, которые всегда m –кратно сцеплены с осью зеркала и n –кратно с вышеупомянутой L^T -линией. При изменении состояния поляризации падающего излучения неизменной оказывается чётность индекса зацепления между системами линий строго циркулярной и строго линейной поляризации.
4. Вблизи линий строго циркулярной поляризации электрического поля излучения, рассеянного частицей субволнового размера или жестко сфокусированного параболическим зеркалом, индексы внутреннего перекручивания оптических лент поляризации принимают целые значения тогда и только тогда, когда индекс зацепления контура их построения со всей совокупностью линий циркулярной поляризации излучения является чётным. Знаки индексов внутреннего перекручивания лент большой и малой осей эллипса поляризации, прослеженных на одном контуре, противоположны.
5. Нахождение параметров изотропной гиротропной среды с кубической нелинейностью, определяющих в ней режим самовоздействия лазерного излучения, осуществляется искусственной нейронной сетью со свёрточной архитектурой на порядок точнее в процентном выражении, если при её обучении используются пучки, содержащие на своей оси сингулярности фазы или поляризации, по сравнению с результатами, получаемыми при использовании однородно поляризованных Гауссовых и Супергауссовых пучков.

Апробация работы и публикации по теме диссертации

Результаты работы опубликованы в 9 рецензируемых международных научных журналах [60; 106; 112; 114; 115; 138; 139; 192; 213] и доложены на Всероссийской школе-семинаре «Волны в неоднородных средах» имени профессора А.П. Сухорукова (Можайск – 2017), XI Всероссийской школе для студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов по лазерной физике и лазерным технологиям (Саров – 2018), международных конференциях Advanced Laser Technologies ALT'16 (Голуэй, Ирландия – 2016), ALT'18 (Таррагона, Испания – 2018) и ALT'21 (Москва – 2021), XI Международной конференции «Фундаментальные проблемы оптики» ФПО-2019 (Санкт-Петербург – 2019), конференции «Нейронные сети и их применение в научных исследованиях» (Москва – 2021) некоммерческого фонда развития науки и образования «Интеллект», XII Международной конференции по фотонике и информационной оптике (Москва – 2023).

Личный вклад автора

Результаты диссертации получены автором лично. Работа выполнена под руководством доктора физико-математических наук профессора В. А. Макарова, с которым определялось направление исследований и проводилось обсуждение полученных результатов. На всех этапах выполнения работы научную консультацию по вопросам сингулярной поляризационной оптики автору оказывал кандидат физико-математических наук К. С. Григорьев. Все алгоритмы автоматического обнаружения, визуализации и классификации по топологическим характеристикам линий сингулярности поляризации и оптических лент поляризации созданы и реализованы автором на основе теоретических работ, ранее выполненных доктором физико-математических наук В. А. Макаровым и кандидатами физико-математических наук К. С. Григорьевым, Ю. В. Владимировой и Н. Н. Потравкиным, результаты которых с их участием были адаптированы и применены автором для достижения целей диссертационной работы. Численное решение задачи об острой фокусировке лазерных пучков параболическим зеркалом, необходимое для реализации алгоритмов автоматического построения и классификации по топологическим характеристикам оптических лент, осуществлено кандидатом физико-математических наук Н. А. Пановым и А. Е. Рядченко. Отдельные вопросы численного решения этой задачи обсуждались с докторами физико-математических наук В. П. Кандидовым и О. Г. Косаревой и кандидатом физико-математических наук Д. Е. Шипило.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы и списка используемых обозначений. Объём работы составляет 132 страницы, в том числе 46 рисунков и 1 таблицу. Главы разбиты на параграфы, первый параграф каждой главы содержит краткий обзор литературы по тематике изложенных в ней исследований. Остальные параграфы содержат оригинальные результаты. В конце каждой главы они сформулированы в сжатой

форме. В электронной версии диссертации все выделенные цветом ссылки на формулы, разделы, литературу и т.п., а также пункты оглавления являются активными.

В начале **первой главы** даётся обзор публикаций, содержащих математическое описание, систематику и способы обнаружения линий сингулярности поляризации электромагнитного поля. В §1.2 изложен используемый далее метод построения этих линий на основе известных благодаря аналитическим формулам или данным численного эксперимента значениям компонент вектора комплексной амплитуды напряженности электрического поля в различных точках пространства. В §1.3 показана возможность его обобщения для анализа трансформации топологического каркаса при плавном изменении параметров излучения или среды.

Вторая глава посвящена описанию топологических особенностей электрического поля электромагнитной волны, рассеянной на наноразмерных частицах при падении на них монохроматической эллиптически поляризованной плоской волны. В §2.1 приведён обзор существующих методов систематизации распределений эллипсов поляризации вблизи точки сингулярности электрического поля и ключевых топологических характеристик оптических лент поляризации. Эти методы далее применяются для исследования особенностей линий сингулярностей поляризации и оптических лент световых полей, рассеянных диэлектрической (§2.2) и металлической (§2.3) наночастицами. В §2.3 проанализированы свойства оптических лент вблизи диэлектрической и металлической наночастиц в случае их построения вдоль не лежащих в одной плоскости контуров построения. Параграф 2.4 посвящён рассмотрению сингулярностей поляризации более сложного электрического поля, образующегося при прохождении плоской электромагнитной волны через планарный метаматериал, базовый элемент которого проявляет нелинейность оптического отклика.

Третья глава посвящена топологическим особенностям поляризации электрических полей остро сфокусированных параболическим зеркалом низших пространственных мод лазерного излучения. В §3.1 приведён обзор немногочисленных работ, посвящённых узлам и зацеплениям линий сингулярностей поляризации оптического поля. В §3.2 описаны условия возникновения узловых и сцепленных линий сингулярности поляризации электрического поля при острой фокусировке Гауссовых и Лагерр–Гауссовых пучков, а также пучков Пуанкаре, параболическим зеркалом. В §3.3 приведены результаты исследований многочисленных узлов и зацеплений линий сингулярности поляризации светового поля, возникающих в результате такой фокусировки. В §3.4 описаны геометрия и топология оптических лент, возникающих в этом случае вблизи линий сингулярности поляризации, и продемонстрировано сходство их характеристик с характеристиками окружающих ленты узлов, образуемых C^T - и L^T -линиями.

Четвёртая глава посвящена некоторым особенностям распространения световых пучков и импульсов, обладающих сингулярностями поляризации на входе в среду, демонстрирующую нелинейный оптический отклик. В §4.1 содержится краткий обзор работ по нелинейной сингулярной оптике. Параграф 4.2 посвящён описанию и применению разработанного оригинального алгоритма нахождения параметров, определяющих характер самовоздействия све-

та в изотропной гиротропной среде, на основе анализа поперечного пространственного распределения амплитуды и состояния поляризации прошедшего через нее пучка искусственной нейронной сетью. Здесь же показано, что обучение и работа нейронной сети в этом алгоритме протекают значительно эффективнее при использовании пучков с сингулярностью фазы или поляризации, чем при использовании регулярных пучков. В §4.3 показано, что генерация второй гармоники в изотропной гиротропной среде может быть осуществлена если используемый световой пучок или импульс основного излучения неоднородно поляризован, в частности, обладает сингулярностями поляризации.

Список обозначений содержит основные обозначения, встречающиеся на протяжении всей работы. Некоторые дополнительные обозначения могут действовать в пределах главы или параграфа. Каждый раз, когда обозначение вводится или заменяется это указывается в тексте.

Глава 1

Систематика, обнаружение и визуализация топологических особенностей электромагнитных полей

§ 1.1 Математическое описание, систематика и обнаружение топологических особенностей электромагнитных полей: Обзор литературы

1.1.1 Фазовые сингулярности

В статье [144] Дж. Наем и М. Берри был предложен метод высокоточного измерения толщины льда, основанный на изучении фазовой структуры ультразвукового импульса, отражённого от его границы. В ходе развития данной методики той же командой двумя годами позже была опубликована работа [149], посвящённая обнаруженным в отражённой волне особым точкам волнового фронта. Эта статья стала первым исследованием, систематически посвящённым топологическим особенностям волновых полей и явно указывающим на их потенциальную важность в качестве устойчивых в процессе дифракции волны маркеров свойств отражающей поверхности.

При интерференции двух амплитудно-модулированных волновых импульсов в их сечении могут присутствовать точки, в которых две непрерывные огибающие амплитудных профилей волн совпадают *точно*, а значит локальная видимость интерференционной картины оказывается равна единице и минимум интенсивности световой волны превращается в истинный нуль. Наблюдение таких точек требует выполнения двух условий (одновременного равенства нулю вещественной и мнимой составляющих комплексной амплитуды излучения), а потому устойчиво реализуется в пространствах, имеющих размерность на 2 ниже, чем пространство задачи: в изолированных точках на освещённом экране или на линиях в объёме поля.

Наиболее полное выражение эта идея получит в анализе *коразмерностей* различных типов оптических сингулярностей, проведённом [18; 22] тридцатью годами позже работы [149]. Поясним данный термин, поскольку он будет использоваться в дальнейшем: коразмерностью некоторого подпространства (здесь — области, в которой состояние поляризации света имеет топологическую особенность) называется разница между размерностью объемлющего пространства и размерностью соответствующего подпространства. В устойчивых случаях она

равна числу независимых вещественных скалярных уравнений, ограничивающих свойства поля в соответствующих областях.

Особенность точек истинно нулевой интенсивности, качественно отличающая их от частично ослабленных деструктивной интерференцией областей излучения состоит в неопределённости фазы волны, которая в произвольно малой их окрестности может проявлять нетривиальное поведение. Из-за близкой аналогии с топологией атомных плоскостей в кристаллах вблизи соответствующих дефектов в работе [149] данные точки (в сечении пучка) и линии (в его объёме) были названы «дислокациями волнового фронта»; позже для этих объектов также закрепились названия *фазовые сингулярности*, *узловые линии*, либо *оптические вихри*.

Несмотря на локальный характер дефектов и трудности в определении их точного местоположения, связанные с большой ролью шумов вблизи точек нулевой интенсивности, а также фундаментальной неопределённостью в разделении неоднородного импульса на несущую волну и медленную огибающую, наличие дислокаций внутри замкнутого контура произвольных размеров может быть установлено при помощи вычисления интегральных характеристик волнового поля вдоль этого контура. На основании изменения фазы поля вдоль такого контура вводится основная характеристика подобных дефектов: *топологический заряд*, равный числу полных оборотов фазы волны при обходе точки сингулярности по замкнутому контуру. В нашей работе мы будем использовать вместо этого термин *топологический индекс*, подчёркивая связь данной величины с индексом Пуанкаре–Хопфа для особых точек фазовых пространств [170]; в актуальной литературе по сингулярной оптике на равных правах используются оба термина. Дислокации волнового фронта могут распространяться в сечении волнового поля независимо от направления распространения несущей волны, отталкиваться, возникать и аннигилировать парами с противоположными индексами, образуя таким образом линейные дефекты в объёме волны. Винтовые дислокации с большим, чем единица модулем топологического индекса имеют коразмерность 4 и поэтому оказываются в трёхмерном пространстве фундаментально неустойчивы: при добавлении к содержащему их полю произвольно малых шумов такие дислокации «распадаются» на несколько элементарных. Структура дефектов волнового поля не аддитивна: сложение двух полей в общем случае не приводит к образованию поля, содержащего в тех же точках сингулярности с суммарными топологическими индексами.

В окрестности фазовой сингулярности завихряется вектор Умова–Пойнтинга, в связи с чем большой интерес к этим особенностям поля наблюдается в контексте исследования световых пучков, обладающих орбитальным угловым моментом [162; 237; 254], а в некоторых работах [134] точки, в которых сходную топологию имеет поперечная проекция вектора плотности потока энергии, выделяются в отдельный вид сингулярностей. Однако, хотя Лагерр–Гауссовы моды, содержащие на своей оси фазовую сингулярность являются каноническим примером как пучков с орбитальным угловым моментом [243], так и оптических вихрей, после более, чем четырёх десятилетий исследований между величинами орбитального момента и топологического индекса не установлено универсальной взаимосвязи [17].

Дальнейший прогресс теории фазовых сингулярностей был в сжатом виде выражен в работе [18]. Стараясь отойти от ограничений параксиального приближения, авторы ввели

выражения для вектора завихрённости, ассоциированного с каждой точкой фазовой сингулярности, касательного к узловой линии и обобщающего понятие топологического индекса, значение которого, вообще говоря, зависит от угла обзора данной сингулярности. Принятый в параксиальной теории топологический индекс определяется знаком проекции данного вектора на ось распространения пучка. С использованием этого вектора и других функций комплексной амплитуды поля и её первых производных детально описана тонкая структура распределения фазы и амплитуды электромагнитного поля вблизи линии сингулярности: форма изолиний амплитуды и фазы, степень завихрённости ассоциированного с полем потока энергии. Основные положения этой теории будут приведены ниже.

В работе [18] также проведён детальный анализ дифференциальной геометрии узловых линий: даны выражения для длины, кривизны, скорости деформации (для немонахроматических волн линии сингулярностей в общем случае нестационарны) данных особенностей и проанализирована статистика распределений этих особенностей в Гауссовых случайных полях. Большое число работ, посвящённых динамике и условиям образования фазовых сингулярностей, краткий обзор которых был проведён во введении, продолжает выходить по сей день, однако для целей настоящей работы данные особенности поля представляют не столько самостоятельный, сколько исторический интерес в контексте их связи с сингулярностями поляризации.

1.1.2 Поляризационные сингулярности

В 1983 году в свет выходит работа [148] Дж. Ная, посвящённая особым точкам электрического поля параксиальных световых пучков, которые были названы автором, по аналогии с дислокациями волнового фронта, *дисклинациями электромагнитного поля*. Пятью месяцами позже тем же автором была опубликована ещё одна статья [147], в которой феномен дисклинаций был описан на языке распределения эллипсов поляризации и комплексных медленно меняющихся амплитуд и получил новые названия: *поляризационных сингулярностей* или *C-(циркулярных) линий*.

C-линии сингулярны в том смысле, что в них теряет своё определённое значение ориентация осей эллипса поляризации, а в устойчивых конфигурациях существует такая малая окрестность каждой сингулярной точки, в которой оси эллипса поляризации имеют все возможные (в параксиальном приближении) направления. Как и сингулярности фазы в скалярных полях, C-линии имеют коразмерность 2. В работе [147] выделены следующие их свойства:

- **Линейность:** вблизи C^T-линий пространственные производные поля в общем случае не обращаются в нуль и для анализа их топологических свойств достаточно первого слагаемого в степенном разложении комплексной амплитуды.
- **Универсальность:** для возникновения в поле C^T-линий не требуется выполнения никаких дополнительных условий симметрии. Напротив, в полях с симметрией высокого порядка поляризационные сингулярности могут возникать в областях более высокой размерности.

- **Устойчивость:** малая добавка к полю в окрестности C^T -линии не уничтожает её и не изменяет её топологический тип, но лишь приводит к её пропорционально малому смещению.

Набор и топологический тип поляризационных сингулярностей содержит ключевую информацию о поляризации излучения во всём окружающем пространстве, предоставляя способ описания сложнейших распределений поляризации относительно малым набором её особенностей. В связи с этим далее мы будем использовать термин *топологический каркас* для обозначения всей совокупности сингулярностей поляризации исследуемого поля.

Распределения эллипсов поляризации в малой окрестности устойчивой C -линии могут близко аналогичны точкам округления (умбиликами) криволинейных поверхностей, вложенных в трёхмерное евклидово пространство [13], поскольку локальная кривизна таких поверхностей и эллипс поляризации электромагнитной волны могут быть описаны с использованием одинакового класса (симметричных второго ранга) тензоров. На основе этого сходства строится классификация распределений (паттернов) эллипсов поляризации вблизи устойчивой C -точки по четырём основным типам (рисунок 1.1). Топологический индекс C -точки определяется как число полных оборотов, совершаемых большой осью эллипса поляризации в некотором направлении при обходе точки сингулярности по малому контуру в том же направлении. Поскольку данная ось имеет направление, определённое лишь с точностью до поворота на π , в устойчивых случаях данный индекс оказывается равным $\pm 1/2$. В зависимости от знака индекса и числа исходящих из точки сингулярности *сепаратрис* — линий, сонаправленных с большими осями расположенных на этих линиях оси эллипсов поляризации электрического поля, каждая устойчивая сингулярность поляризации может быть однозначно отнесена к одному из трёх топологических типов, получивших названия *лимон* (англ. lemon; индекс $+1/2$; 1 сепаратриса), *монстар* (англ. monstar; индекс $+1/2$; 3 сепаратрисы) и *звезда* (англ. star; индекс $-1/2$; 3 сепаратрисы).

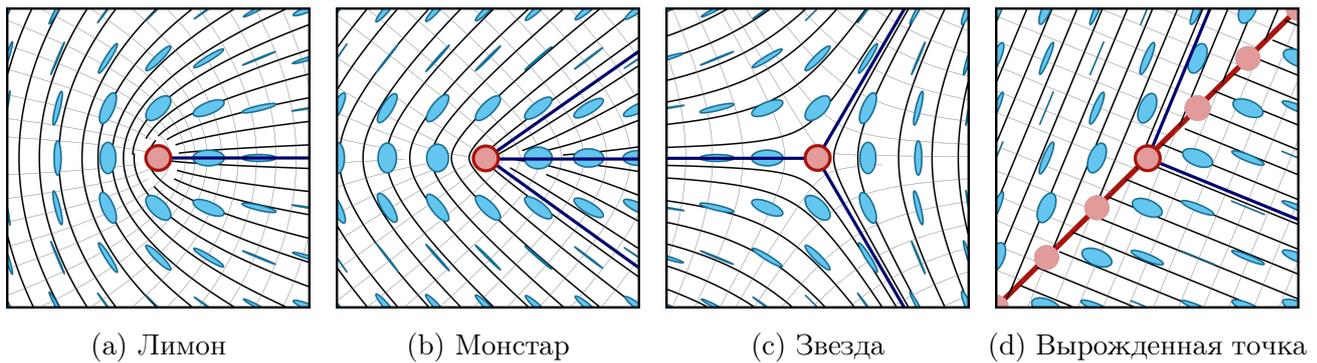


Рис. 1.1: Примеры распределений эллипсов поляризации вблизи C -точек различных типов. Голубым цветом изображены невырожденные эллипсы поляризации, красным — вырожденные в окружность, чёрные линии касаются больших осей эллипса поляризации в каждой своей точке, серые тонкие линии — малых осей. Выделенные тёмно-синие прямые на переднем плане изображения — сепаратрисы. Вырожденная картина 1.1d возникает если C -линия (тёмно-красная) касается плоскости проекции.

Направление вращения большой оси эллипса поляризации при обходе сингулярности по

замкнутому контуру и направление вращения вектора электрической напряжённости с течением времени в этой области поля в общем случае независимы друг от друга. В [147] выявлена связь между направлениями этих вращений и топологическим типом сингулярности и, показано, что поляризационная сингулярность может рассматриваться как фазовая одной из двух ортогонально циркулярно поляризованных волн, а также выведены условия, при которых данная дислокация является чисто винтовой и чисто краевой. Эти предельные случаи имеют коразмерность 3, то есть в плоском сечении являются вырожденными и не устойчивыми, но в объёме поля они могут возникать в изолированных точках устойчиво к малым шумам. Чистые винтовые дислокации характеризуются равномерным вращением оси эллипса поляризации по мере обхода поляризационной сингулярности по малой окружности с центром в сингулярной точке, а в чисто краевых направление вращения оси поляризационного эллипса и, следовательно, топологический тип сингулярности определены быть не могут, поскольку изменение ориентации данного эллипса происходит скачком на $\pm\pi/2$. В рамках параксиального приближения точки такого типа трактуются как точки рождения или аннигиляции поляризационных сингулярностей противоположных топологических индексов по мере распространения пучка. В настоящей работе такое описание лишено смысла, поскольку мы главным образом будем рассматривать поля, в которых преимущественное направление распространения излучения отсутствует или выделено слабо.

1.1.3 Особенности поляризационных сингулярностей в непараксиальных полях

Уже в работе [147], посвящённой сингулярностям поляризации в параксиальных электромагнитных полях, отмечены отличия S -линий, соответствующих областям, в которых поляризация представляется круговой лишь в выделенной проекции, и S^T -линий, в которых она истинно (индекс true) является таковой. В 1987 году работа [150] закладывает основы математического описания поляризационных сингулярностей в непараксиальных полях, а более поздний обзор [22] обобщает и подытоживает основные положения этой теории, проводя также разбор квантовомеханической интерпретации данных особенностей поля. Используемый нами в дальнейшей работе математический формализм описания топологических особенностей электромагнитных полей в основном опирается на подход этих двух статей с некоторыми обобщениями, сделанными более поздними исследователями, включая вклад нашей лаборатории.

Вектор напряжённости $\mathcal{E}(\mathbf{r}, \tau)$ электрического поля произвольной квазимонохроматической электромагнитной волны может быть представлен в виде

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, \tau) = \operatorname{Re}(\mathbf{E}(\mathbf{r}, \tau) \exp(-i\omega\tau)), \quad (1.1)$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор, τ — время, ω — циклическая частота, \mathbf{E} — комплексная амплитуда напряжённости поля. Вектор \mathbf{E} может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации двух вещественных векторов \mathbf{p}, \mathbf{q} :

$$\mathbf{E} = \mathbf{p} + i\mathbf{q}. \quad (1.2)$$

С течением времени конец вектора \mathcal{E} описывает в плоскости, задаваемой векторами \mathbf{p} и \mathbf{q} , эллипс, параметры которого могут быть однозначно определены через значение \mathbf{E} в центре соответствующего эллипса. Аналогичное поведение проявляет вектор напряжённости магнитного поля \mathcal{H} , но поскольку его значение в любой точке пространства определяется пространственными и временными производными \mathcal{E} , мы ограничимся рассмотрением пространственной структуры \mathcal{E} и его поляризационных характеристик.

Ориентация эллипса поляризации в пространстве однозначно задаётся двумя направлениями: вектором нормали к плоскости эллипса

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{q} = \frac{1}{2} \text{Im}[\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}] \quad (1.3)$$

и двунаправленным вектором (далее мы будем называть такие объекты *директорами*) большой полуоси

$$\vec{\mathbf{A}} = \pm \text{Re} \left(\mathbf{E}^* \sqrt{\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}}{\|\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}\|}} \right). \quad (1.4)$$

Мы подчёркиваем символом \leftrightarrow невозможность физически обоснованно выбрать один из двух корней в выражении (1.4), играющую ключевую роль в понимании топологии распределения эллипсов поляризации.

Аналогичным образом задаётся директор малой полуоси

$$\vec{\mathbf{B}} = \pm \text{Im} \left(\mathbf{E}^* \sqrt{\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}}{\|\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}\|}} \right). \quad (1.5)$$

Вектор \mathbf{E} может быть представлен в виде линейной комбинации как векторов \mathbf{p} и \mathbf{q} , в общем случае не ортогональных друг другу и соответствующих двум произвольным сопряжённым радиусам эллипса поляризации, так и взаимно ортогональных директоров $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{B}}$ (рисунок 1.2):

$$\mathbf{E} = \mathbf{p} + i\mathbf{q} = (\vec{\mathbf{A}} + i\vec{\mathbf{B}})e^{i\kappa}, \quad (1.6)$$

где величина κ , в терминологии [48] называемая *выпрямляющей фазой*, определяет фазовый сдвиг, необходимый для ортогонализации базиса $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$.

Выпрямляющая фаза может быть найдена [15] как

$$\kappa = \frac{1}{2} \arg(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (1.7)$$

Основанием для отнесения C^Γ -точек к поляризационным сингулярностям является невозможность определить в этих точках направления (даже с точностью до поворота на π) директоров $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{B}}$, обусловленную обращением в нуль комплексной величины $\psi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$, входящей в выражения (1.4), (1.5). Как следует из (1.7), выпрямляющая фаза также лишается смысла в нулях ψ .

В работе [15] показано, что величина κ играет для C^Γ -линий ту же роль, какую для оптических вихрей выполняет фаза волны, а для C -линий угол ориентации большой оси эллипса поляризации: она принимает все возможные значения (в диапазоне $[0; \pi)$) в произвольно

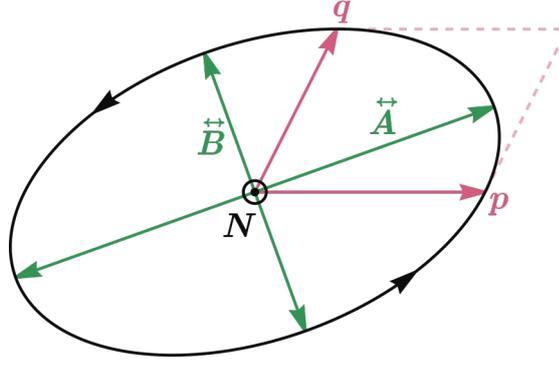


Рис. 1.2: Эллипс поляризации и основные ассоциированные с ним векторы: \mathbf{p} и \mathbf{q} образуют пару сопряжённых радиусов (касательная, проведённая к эллипсу в точке, в которую опущен один из них, параллельна второму); $\vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{B}}$ — директоры большой и малой полуосей соответственно. Направление вращения вектора \mathcal{E} указано стрелками на эллипсе и связано правилом правой руки с выходящим из плоскости рисунка вектором \mathbf{N} .

малой окрестности устойчивых C^T -точек, а её полный набег при обходе сингулярности по малому замкнутому контуру определяет топологический индекс \mathcal{I}_C :

$$\mathcal{I}_C = \frac{1}{2\pi} \operatorname{sgn} \oint \nabla \kappa \cdot d\mathbf{r}, \quad (1.8)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор, оббегающий в положительном направлении произвольный замкнутый контур, охватывающий характеризующую сингулярность поляризации и только её.

Важно отметить, однако, что определённый таким способом топологический индекс зависит от выбора ориентации плоскости, в которой расположен контур, по которому производится интегрирование, в то время как связанный с этим индексом топологический тип является внутренней характеристикой сингулярности [27]. В работе [15] показано, что это видимое противоречие может быть разрешено введением *вектора завихренности* (англ. vorticity vector) Ω_C , однозначно связанного с направлением закрученности паттерна поляризационных эллипсов вблизи сингулярной точки:

$$\Omega_C = \operatorname{Re}(\nabla\psi) \times \operatorname{Im}(\nabla\psi). \quad (1.9)$$

Если топологический индекс определяется в плоскости Π_C , совпадающей с плоскостью центрального эллипса (круга) поляризации C^T -точки (рисунок 1.3а), между этим индексом и типом окружающего сингулярную точку распределения эллипсов поляризации можно установить аналогичное параксиальному случаю соответствие, а сам индекс может быть найден при помощи выражения

$$\mathcal{I}_C = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\Omega_C \cdot \mathbf{N}), \quad (1.10)$$

где все величины вычислены в точке сингулярности. Хотя существуют работы [65], интересующиеся распределением топологических характеристик, вычисленных для произвольных проекций и контуров обхода, и даже демонстрирующие [66], что в этом обобщённом смысле любая точка электромагнитной волны может быть рассмотрена как сингулярность, мы будем говорить о топологических индексах далее только в узком смысле (1.10), поскольку

более общий взгляд на поляризационные сингулярности в значительной степени лишает их ключевой роли топологического каркаса, в сжатой форме содержащего информацию о всей поляризационной структуре поля.

Другим структурно устойчивым типом поляризационных сингулярностей, возникающим в непараксиальных полях, являются области строго линейной поляризации (L^T -линии). Их сингулярный характер объясняется невозможностью определения в них направления вектора нормали \mathbf{N} к эллипсу поляризации в связи с коллинеарностью векторов \mathbf{p} и \mathbf{q} , а также директора $\vec{\mathbf{B}}$ малой полуоси того же эллипса. Условие коллинеарности \mathbf{p} и \mathbf{q} может быть сведено к двум скалярным уравнениям, следовательно, как и S^T -линии, области линейной поляризации имеют коразмерность 2 и действительно представляют собой изолированные линии в устойчивых случаях. Это отличает их от областей линейной поляризации в проекции на выделенную плоскость, имеющих коразмерность 1 и не являющихся сингулярными в смысле вырождения какого-либо ассоциированного с эллипсом поляризации направления.

Как и для S^T -точек, фундамент теории сингулярностей линейной поляризации был заложен в работе [150], в которой было указано на сам факт существования данных линий, обоснована их устойчивость и размерность, а также рассмотрены основные топологические типы распределения нормалей к поляризационным эллипсам вблизи L^T -линии.

В работе [22] было приведено выражение, позволяющее определить направление касательной в произвольной точке L^T -линии, а в [15] предложены выражения для определения топологического индекса \mathcal{G}_L данных особенностей, в данном случае соответствующего числу оборотов в положительном направлении, совершаемых проекцией вектора \mathbf{N} на плоскость Π_L (рисунок 1.3b), ортогональную к направлению колебаний электрического поля в L^T -точке при обходе данной точки по малому контуру, лежащему в этой плоскости, в том же направлении:

$$\mathcal{G}_L = \text{sgn}(\partial_p N_p \partial_q N_q - \partial_p N_q \partial_q N_p), \quad (1.11)$$

где p, q — произвольная система координат в плоскости Π_L , $\partial_{p,q}$ — производные по соответствующим координатам, $N_{p,q}$ — соответствующие проекции вектора нормали к эллипсу поляризации. Однако, в отличие от случая S^T -линий, эти выражения не удалось привести к бескоординатным функциям комплексной амплитуды и её производных.

Поскольку направление вектора \mathbf{N} может быть однозначно установлено благодаря его связи с направлением вращения \mathcal{E} по правилу правой руки (кроме L^T -точек), индекс \mathcal{G}_L может принимать только целочисленные значения, чем обусловлено отличие топологических типов устойчивых L^T -точек от аналогичных типов S^T -точек и тождественность классификации первых с классификацией особых точек фазовых пространств в теории дифференциальных уравнений [150].

Важно также отметить, что неизвестно комплексной функции, такой, чтобы её нули первого порядка взаимно однозначно соответствовали L^T -точкам, на основании фазы которой анализ топологического типа распределения эллипсов поляризации вблизи L^T -точки мог бы быть проведён так же, как в случае S^T -точек, что значительно усложняет выражения для топологических индексов [15].

Для количественной характеристики близости поляризационного состояния к чисто линейному или чисто циркулярному случаю, мы будем использовать скалярную степень эл-

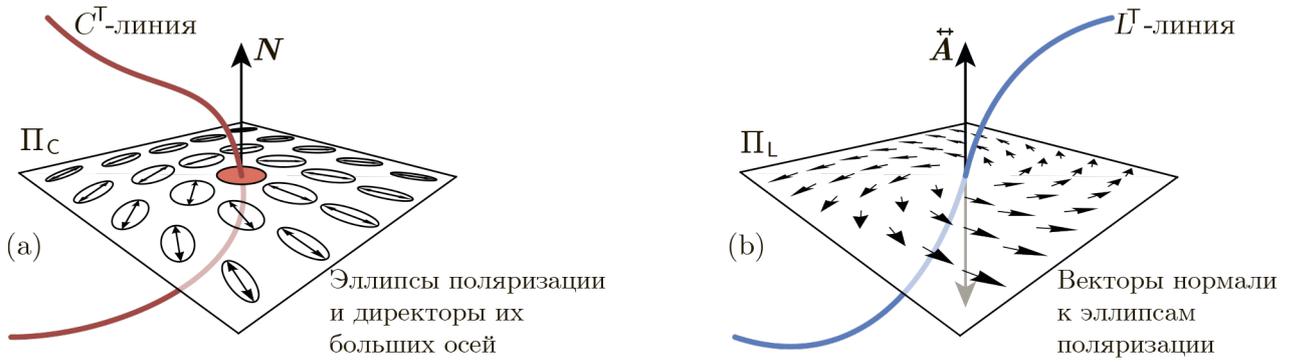


Рис. 1.3: Π_C - (a) и Π_L - (b) плоскости вблизи C^T - и L^T -линий соответственно. В этих выделенных плоскостях изображены примеры распределений эллипсов поляризации вблизи точек сингулярностей (пересечения плоскости и линии). Плоскости определяются вектором нормали к эллипсу поляризации (для Π_C) и направлением колебаний электрического поля (для Π_L) в точке сингулярности и в общем случае не ортогональны содержащей её сингулярной линии.

липтичности M , определяемую в каждой точке поля выражением

$$M = \frac{\|\mathbf{E} \times \mathbf{E}^*\|}{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*}. \quad (1.12)$$

Для параксиального случая, выражение (1.12) равно модулю отношения параметров Стокса $M = |S_3/S_0|$. В частности, C^T -точкам соответствуют значения $M = 1$, а L^T -точкам — $M = 0$.

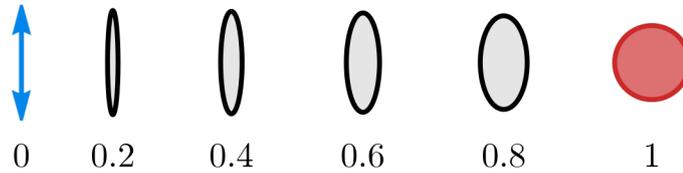


Рис. 1.4: Эллипсы поляризации, соответствующие равной интенсивности и разным значениям M (указаны в нижнем ряду). Во всей дальнейшей работе циркулярная поляризация будет изображаться в красно-жёлтых тонах, а линейная — в сине-зелёных.

1.1.4 Методы обнаружения сингулярных точек и линий электромагнитных полей

В пионерских работах, посвящённых теоретическому описанию сингулярностей фазы и поляризации, преимущественно рассматривались аналитические выражения для сравнительно простых полей, специально сконструированных для иллюстрации тех или иных топологических особенностей волнового поля. Многие более поздние работы посвящены обнаружению этих особенностей в полях, полученных в ходе лабораторного или численного эксперимента.

При этом зачастую авторы данных работ либо не уделяют внимания точному определению местоположения сингулярностей того или иного класса¹, либо не описывают методы,

¹Мы будем говорить о разных *классах* сингулярностей, различая C -, C^T -, L^T - и фазовые сингулярности, и о разных *типах*, говоря о различной топологии паттернов поляризации или фазы вблизи сингулярности.

при помощи которых оно определяется, либо используют методы, представляющиеся неоптимальными с точки зрения точности и вычислительной сложности.

Во многих работах [105; 133; 236], посвящённых оптическим полям, содержащим фазовую сингулярность, основное внимание уделено распределению энергии в таких полях, а не определению точного положения топологической особенности. Наличие фазовой сингулярности определяется по нулевой величине интенсивности волны в соответствующей точке. Хотя такое рассмотрение вполне соответствует целям данных работ, изучение профиля интенсивности не может служить точным методом определения местоположения фазовой сингулярности, поскольку нуль интенсивности совпадает с нулём её пространственных производных, что существенно ухудшает точность любых методов его обнаружения по сравнению с изучением поведения фазы той же волны. Тем более не могут быть эффективными подходы, основанные на распределении интенсивности, для обнаружения поляризационных сингулярностей. Хотя в параксиальных полях C -точки являются нулями интенсивности одной из циркулярно поляризованных компонент, для трёхмерных полей общего вида прямая связь между интенсивностью и поляризацией пропадает.

Полученная при помощи компьютерной симуляции информация о конфигурации электромагнитного поля оказывается представлена в виде распределения комплексных амплитуд на дискретной, чаще всего, прямоугольной, сетке. Разумеется, обнаружение сингулярных состояний фазы или поляризации строго на узлах подобной сетки представляется исчезающе редким событием, поэтому исследование сингулярной структуры излучения требует определённой интерполяции этих данных и решения уравнений, определяющих условия сингулярности в той или иной системе параметров. При этом если поле рассматривается в объёмной области и допускает вариацию дополнительных параметров задачи в достаточно высоком для точного и гладкого построения топологического каркаса разрешении, обнаружение сингулярностей может оказаться вычислительно затратным.

Классическое решение задачи поиска сингулярностей поляризации основано на анализе распределения в сечении поля параметров Стокса. Так в поперечном сечении параксиального пучка C -точки являются одновременными нулями параметров $S_{1,2}$. Поскольку параметры Стокса являются наиболее широко распространённым набором характеристик, описывающих поляризацию электромагнитного излучения, отыскание их нулей используется во многих работах [142; 165; 176] как критерий обнаружения поляризационных сингулярностей. В своей оригинальной форме параметры Стокса характеризуют только двумерное распределение поля и непригодны для анализа поляризационных распределений в непараксиальных задачах. Существуют работы [1; 83], посвящённые обобщению этих параметров на случай трёхмерного распределения поляризации, а также использующие для описания таких полей матрицу когерентности. Были предложены [47; 64] методы анализа сингулярной структуры излучения основанные на обнаружении точек вырождения этой матрицы. Хотя такой способ поиска C^T - и L^T -точек полностью применим к произвольным трёхмерным распределениям поляризации и не ограничен параксиальным приближением, его недостатком является большая вычислительная сложность, становящаяся серьёзным затруднением при переходе от анализа двумерных поперечных сечений к рассмотрению полной структуры поляризационных сингулярностей электромагнитного поля в объёме.

Обнаружение сингулярных точек электромагнитного поля, заданного на плоскости, представляет собой тривиальную задачу, поскольку все рассматриваемые типы фазовых и поляризационных сингулярностей имеют коразмерность 2 и их поиск сводится к решению систем из двух (как правило, линейных) уравнений с двумя неизвестными в каждой элементарной ячейке вычислительной сетки. При построении трёхмерного топологического каркаса электромагнитного излучения, этот шаг представляет лишь небольшую часть общей задачи. Для определения детальных геометрических и топологических характеристик особых линий поляризации важно проследить форму сингулярностей в объёме. Простейшим подходом к этой задаче является обнаружение сингулярных точек на последовательности близко лежащих срезов и дальнейшее объединение этих точек по методу ближайшего соседства. Такой метод используется в ряде работ [126; 164; 165] и может быть удовлетворительным для простой демонстрации генеральных закономерностей распространения сингулярных точек вдоль сравнительно простых траекторий.

При рассмотрении полей, в которых выделенное направление отсутствует, задач, содержащих сингулярные линии с большими значениями кривизны, например, на границах раздела сред, а также топологические особенности, близко подходящие друг к другу, для эффективного применения метода ближайшего соседства требуется очень высокое пространственное разрешение d сетки срезов. Поскольку вычислительная сложность алгоритмов, основанных на соединении точек, построенных в серии плоскостей, пропорциональна $(L/d)^3$, где L — характерный размер области построения, с уменьшением d машинное время исполнения этих алгоритмов очень быстро возрастает. При решении задач с переменными параметрами, требующими анализа большого числа топологических каркасов и событий, обуславливающих изменения в их топологии, эта проблема встаёт особенно остро.

Нами был предложен алгоритм, основанный на обнаружении нулей функции $\psi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$, определённой как для двумерных, так и для трёхмерных полей и очень простой в вычислении, и интегрировании дифференциального уравнения, решением которого является параметризация линии сингулярной поляризации. Вычислительная сложность последнего оказывается пропорциональна первой степени L/d , что даёт значительный прирост скорости в сравнении с методом ближайшего соседства.

Описание и анализ эффективности этого алгоритма опубликованы в работе [139], а практическим результатом его использования являются материалы глав 2 и 3.

§ 1.2 Построение сингулярных линий электромагнитного поля, полученного в численном эксперименте

Прежде всего, рассмотрим методику обнаружения сингулярных точек монохроматической электромагнитной волны, заданной в узлах двумерной прямоугольной сетки векторами своей комплексной амплитуды. В настоящей работе поиск S^T -точек на таких сетках производился при помощи следующего алгоритма:

1. Исследуемое сечение разбивалось на треугольники с вершинами в узлах решётки. Для каждого треугольника проверялись знаки $\operatorname{Re} \psi$ и $\operatorname{Im} \psi$. Если для обоих выражений знаки не совпадали во всех трёх вершинах треугольника (либо хотя бы в одной вершине выражение обращалось в строгий нуль) — середина гипотенузы соответствующего треугольника использовалась как затравочная точка для поиска строгого одновременного нуля ψ .
2. С использованием двумерного метода Ньютона уточняется нуль бикубического или трикубического [118] интерполянта ψ , построенного на узлах рассматриваемой сетки.
3. Из рассмотрения выбрасываются нули, найденные за пределами области, покрытой исходной сеткой (кубическая экстраполяция может приводить иногда к обнаружению таких ложных нулей), а также расположенные друг к другу ближе, чем треть бóльшей стороны ячейки (изредка возможно нахождение одной и той же S^T -точки от двух различных затравочных).
4. При помощи того же кубического интерполянта в найденных S^T -точках вычисляются производные ψ , на основании которых определяется топологический тип точки из уравнений (1.10), (1.9) и, при необходимости более тонкие параметры распределения поляризованных эллипсов (см. параграф 2.1).

Поскольку неизвестно непрерывное комплексное поле, нули первого порядка которого однозначно соответствовали бы L^T -точкам, непосредственное перенесение описанной процедуры на сингулярности линейной поляризации невозможно. Схожую роль может выполнять функция $\xi_{xy} = N_x + iN_y$, однако её нули соответствуют не только точкам истинно линейной поляризации, но и тем точкам поля, в которых эллипс поляризации излучения ориентирован строго вдоль $0z$. Поскольку оба этих класса точек имеют одинаковую размерность (2), удобно использовать распределение функции ξ_{xy} в пространстве для поиска точек, подозрительных на сингулярность, проводя дополнительную проверку превышения степенью эллиптичности поля M некоторого порогового значения. Теоретическое значение M в L^T -точках равно нулю, однако использование этой величины непосредственно для обнаружения точек линейной поляризации неудобно, поскольку пространственные производные M также необходимо обращаются в нуль в этих точках, что снижает точность и увеличивает вычислительную сложность отыскания данных нулей. Проверка эллиптичности на превышение порога может осуществляться как до, так и после уточнения затравочных точек, при этом в первом случае достигается лучшее быстроедействие, а во втором — лучшая точность, поэтому в наших вычислениях для предварительной фильтрации заведомо далёких от линейной поляризации точек использовалось пороговое значение $M_1 = 0.1$, а после уточнения координаты — пороговое значение $M_2 = 10^{-4}$.

1.2.1 Прослеживание сингулярных линий поляризации при помощи решения дифференциального уравнения

Пусть C^Γ -линия задана вектор-функцией $\mathbf{r}_C(s)$, параметризованой некоторым параметром s . На C^Γ -линиях (и только на них) обращается в нуль функция ψ :

$$\psi(\mathbf{r}_C(s)) \equiv 0. \quad (1.13)$$

Дифференцирование этого выражения даёт

$$\frac{d\psi(\mathbf{r}_C(s))}{ds} = \nabla\psi \cdot \frac{d\mathbf{r}_C(s)}{ds}, \quad (1.14)$$

что возможно лишь при одновременной ортогональности касательного к этой кривой вектора $d\psi(\mathbf{r}_C(s))/ds$ вещественной и мнимой компонентам градиента $\nabla\psi$. Из этого следует, что касательным к C^Γ -линии в каждой её точке является определённое соотношением (1.9) вектор завихренности $\text{Re}(\nabla\psi) \times \text{Im}(\nabla\psi)$.

Тогда после обнаружения одной затравочной C^Γ -точки \mathbf{r}_0 , дальнейшее построение линии сингулярности может быть эффективно проведено при помощи решения задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}_C(s)}{ds} = \mathbf{\Omega}_C(s) \\ \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0. \end{cases} \quad (1.15)$$

При этом точки \mathbf{r}_0 могут быть найдены в плоских срезах поля методом, описанным в начале параграфа², но поскольку необходимое разрешение D в этом случае определяется характерным размером (диаметром) сингулярной линии, а не минимальным масштабом d особенностей её формы, которые необходимо различить в данной задаче, требуемое количество срезов весьма мало в сравнении с их числом, необходимым для полного «сканирования» сингулярной линии. Число операций, требуемых для решения задачи Коши (1.15), в свою очередь, линейно по L/d . Сама задача (1.15) может быть решена любым из классических методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. В нашей работе использовался явный метод Рунге–Кутты четвёртого порядка с адаптивной величиной шага [182].

1.2.2 L^Γ -линии

Для построения линий линейной поляризации может быть использован аналогичный подход, однако выражение для касательного вектора в этом случае оказывается существенно более сложным. L^Γ -линии являются областями поля, в которых тождественно равна нулю нормаль к плоскости эллипса (1.3):

$$\mathbf{N}(\mathbf{r}_L(s)) \equiv 0. \quad (1.16)$$

Дифференцированием (1.16) получим

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -2 \text{Im} \left[\mathbf{E} \times \mathbf{G}^* \frac{d\mathbf{r}_L}{ds} \right] = 0, \quad (1.17)$$

²см. стр. 23

где \mathbf{G} — тензор градиента поля, определяемый соотношениями $G_{ij} = \partial_i E_j|_{\mathbf{r}_{\mathbf{L}(s)}}$, $i, j \in \{x, y, z\}$, все векторы и тензоры вычислены в точке сингулярности. Поскольку в точках линейной поляризации \mathbf{p} и \mathbf{q} коллинеарны, комплексная амплитуда \mathbf{E} может быть переписана в форме $\mathbf{E} = \vec{\mathbf{e}}\sqrt{\psi}$, где $\vec{\mathbf{e}}$ — единичный вещественный директор в направлении колебаний \mathcal{E} : для линейной поляризации невозможно выбрать физически обусловленное направление \mathbf{E} однозначно. Это позволяет переписать (1.17) в форме

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \vec{\mathbf{e}} \times \mathbf{T} \frac{d\mathbf{r}_{\mathbf{L}}}{ds} = 0, \quad (1.18)$$

где введён вещественный оператор $\mathbf{T}(s) = -2 \operatorname{Im}(\sqrt{\psi} \mathbf{G}^*)$.

Из выражения (1.18) следует, что векторы $\vec{\mathbf{e}}$ и $\mathbf{T} d\mathbf{r}_{\mathbf{L}}/ds$ коллинеарны. Это позволяет определить касательный к $L^{\mathbf{T}}$ -линии директор $\vec{\Omega}_{\mathbf{L}}$ через обратную или присоединённую к \mathbf{T} матрицу. Поскольку построение транспонированной обратной матрицы \mathbf{T}^{-1} вычислительно затратнее, чем присоединённой $\mathbf{A} = \operatorname{adj}(\mathbf{T})$, в то время как они отличаются только транспонированием и скалярным коэффициентом, не имеющим значения для касательного вектора, мы используем выражение, записанное при помощи последней; кроме того, присоединённая матрица хорошо определена даже для сингулярных матриц, что позволяет избежать возможных сложностей, связанных с делением на машинный ноль:

$$\vec{\Omega}_{\mathbf{L}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{L}}}{ds} = \pm \sqrt{\psi} \operatorname{adj} \left(\mathbf{G}^* - \frac{\psi^*}{\|\mathbf{E}\|^2} \mathbf{G} \right) \mathbf{E}. \quad (1.19)$$

Подстановка (1.19) в (1.18) обращает последнее уравнение в тождество:

$$\vec{\mathbf{e}} \times \mathbf{T} \frac{d\mathbf{r}_{\mathbf{L}}}{ds} = \vec{\mathbf{e}} \times \mathbf{T} \mathbf{A} \vec{\mathbf{e}} = \det \mathbf{T} [\vec{\mathbf{e}} \times \vec{\mathbf{e}}] = 0, \quad (1.20)$$

Выражение (1.18) может быть использовано для построения $L^{\mathbf{T}}$ -линии путём решения соответствующей задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}_{\mathbf{L}}(s)}{ds} = \mathcal{J} \vec{\Omega}_{\mathbf{L}}(s) \\ \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \end{cases} \quad (1.21)$$

где \mathcal{J} — дискретная переменная (сигнатура), принимающая значения ± 1 , \mathbf{r}_0 — некоторая затравочная $L^{\mathbf{T}}$ -точка, найденная способом, описанным в параграфе 1.2. Важной особенностью выражения (1.19) является его знаконеопределённость. При практическом расчёте $\vec{\Omega}_{\mathbf{L}}$ в большинстве реальных задач будет испытывать разрывы, меняющие направление вычисленного вектора на π . Это поведение должно быть учтено при написании алгоритма численного интегрирования задачи (1.21) и в частности не позволяет использовать для построения $L^{\mathbf{T}}$ -линий большинство встроенных в распространённые математические пакеты методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

При реализации алгоритма Рунге–Кутты с адаптивным шагом в случае линий линейной поляризации нами использовался следующий подход. На первом шаге явного метода Рунге–Кутты значение \mathcal{J} в выражении (1.21) выбиралось равным $+1$. Далее, на каждом шаге (и каждом из семи подшагов) адаптивного алгоритма [182] находилось скалярное произведение $\Omega_{\mathbf{L},i} \cdot \Omega_{\mathbf{L},i-1}$, где i — номер текущего шага, а выражение в нижнем индексе задаёт шаг, на котором значение вектора $\Omega_{\mathbf{L}}$ было вычислено. Если знак этого произведения оказывался

отрицательным — сигнатура \mathcal{s} менялась на противоположную: $\mathcal{s} \leftarrow -\mathcal{s}^3$ и интегрирование уравнения продолжалось. Для некоторых задач, содержащих сингулярные линии сложной формы (см. главу 3) на одной L^Γ -линии такая смена сигнатуры происходила несколько десятков раз.

Описанный метод вычисления касательного к L^Γ -линии направления является вычислительно эффективным, но не вполне математически строгим из-за неопределённости направления $\vec{\Omega}_L$. Оператор \mathbf{A} определён однозначно, поскольку для матриц 3×3 $\text{adj}(\mathbf{T}) = \text{adj}(-\mathbf{T})$. Таким образом, строгое математическое описание касательной к L^Γ -линиям может быть проведено при помощи тензорного произведения

$$\mathbf{D}_L = \vec{\Omega}_L \otimes \vec{\Omega}_L = \mathbf{A} \mathbf{P}_E \mathbf{A}^\Gamma, \quad (1.22)$$

где $\mathbf{P}_E = (\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}^*) / \|\mathbf{E}\|^2$ — оператор проецирования на линию колебаний \mathcal{E} в L^Γ -точке.

Векторы, касательные к L^Γ -линии являются собственными векторами оператора (1.22), поэтому для их построения также могут быть использованы численные методы, применяемые для визуализации касательных линий тензорных полей [45; 209; 234].

Таким образом, полный алгоритм построения сингулярного каркаса электромагнитного поля выглядит следующим образом:

1. Исследуемая область поля разбивается небольшим ($\approx L/D$, где L — линейный размер области, а D — минимальный диаметр сингулярной линии, которую необходимо обнаружить) числом плоских срезов вдоль каждой из трёх координатных осей.
2. На выбранных срезах методом, описанным в начале параграфа⁴, ищутся затравочные точки циркулярной и линейной поляризации.
3. От первой из найденных сингулярных точек каждого типа строятся при помощи решения задач Коши (1.15), (1.21) C^Γ - и L^Γ -точки соответственно. Решение дифференциальных уравнений производится явным методом Рунге–Кутты четвёртого порядка; для L^Γ -точек метод модифицируется вводом переменной сигнатуры, принимающей значения ± 1 , на которую умножается текущее значение касательного вектора линии таким образом, чтобы скалярное произведение направлений двух последовательных шагов интегрирования всё время оставалось положительным. Поскольку векторы $\Omega_C, \vec{\Omega}_L$ определены с точностью до скалярного коэффициента, при численном интегрировании производится нормировка их длины.
4. Если сингулярная линия проходит через одну из найденных затравочных точек (расстояние до этой точки не превышает $2h$, где h — шаг численного интегрирования) — данная затравочная точка удаляется из списка.
5. Если сингулярная линия проходит через своё начало (расстояние до начальной точки не превышает $3h$, а номер шага от начала интегрирования соответствующей линии не ниже 4), линия считается замкнутой, и интегрирование прекращается.

³Знаком \leftarrow обозначен оператор присвоения

⁴см. стр. 23

6. Если сингулярная линия доходит до границы области построения — интегрирование прекращается, после чего пункт 3 повторяется от этой же затравочной точки с начальной сигнатурой -1 , пока линия не дойдёт до границ поля с обеих сторон.
7. Использованная для построения линии затравочная точка удаляется из списка и пункты 3–6 последовательно повторяются для следующей затравочной точки, пока список не останется пуст.

1.2.3 Сопоставление эффективности

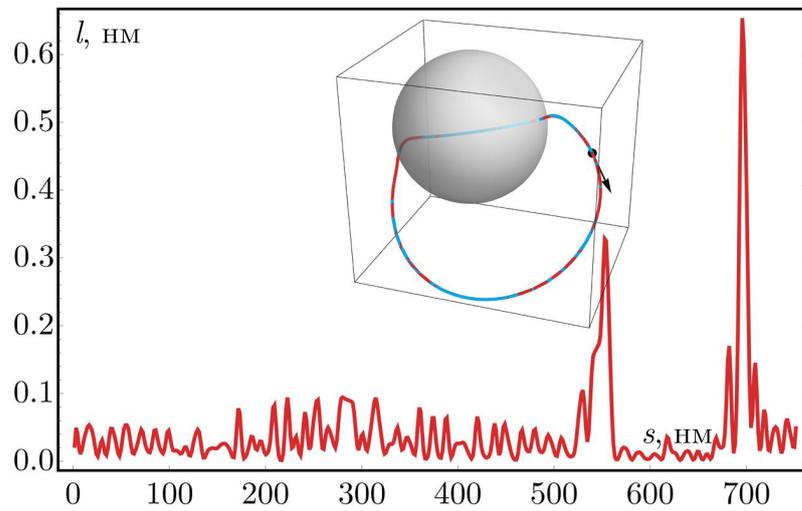
Для сопоставления точности и вычислительной эффективности предложенного дифференциального метода с аналогичными характеристиками наивного метода обнаружения сингулярных точек на срезах поля с последующим их соединением по ближайшему соседству, нами использовалась топологическая структура электромагнитного поля плоской монохроматической световой волны, рассеянной на кремниевой сфере субволновых размеров, подробно рассмотренная в параграфе 2.2.

Для установления схожести результатов и проверки общего соответствия между сингулярными линиями, построенными обоими методами, от каждой точки линии, построенной дифференциальным методом, находилось минимальное расстояние l до линии, построенной наивным методом (ближайшего соседства). Полученные графики $l(s)$, где s — параметр длины дуги, отмеренный вдоль сингулярной линии, начиная от затравочной точки ($s = 0$) представлены на рисунке 1.5.

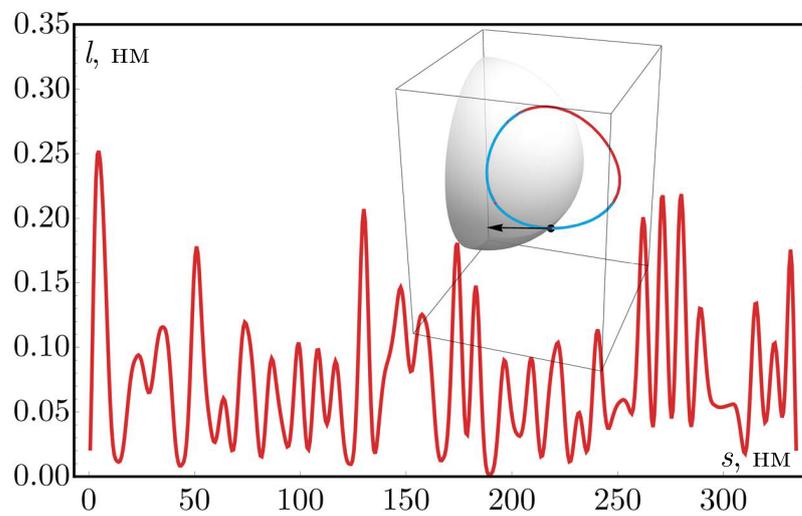
Можно видеть, что визуально линии, построенные обоими методами практически неразличимы при допуске печати разрешения. Радиус рассеивающей частицы в рассматриваемом поле $R = 90$ нм, характерные диаметры сингулярных линий также составляют десятки нанометров. При этом максимальное удаление между линиями, построенными двумя методами, составляет менее нанометра и наблюдается на границе раздела кремний — вакуум, где S^T -линия имеет значительную кривизну. В остальных областях расстояние между построенными разными методами сингулярными линиями не превосходит 0.25 нм, что составляет менее 0.3% от радиуса рассеивающей частицы.

Таким образом, можно уверенно утверждать, что оба рассматриваемых метода дают чрезвычайно близкие результаты, что свидетельствует в пользу их корректности. Для определения точности обоих методов, мы вычисляли значения показателя эллиптичности M вдоль найденных кривых. Теоретическое значение эллиптичности M_L вдоль L^T -линии равно 0, таким образом само это значение служит мерой ошибки метода. Для S^T -линии теоретическое значение M_S равно 1, поэтому в качестве меры ошибки использована величина $\Delta M_S = 1 - M_S$. Значения этих величин вдоль линий, построенных обоими методами, представлены на графиках 1.6.

Как можно видеть из графиков на рисунке 1.6, дифференциальный метод при использованных параметрах позволяет добиться точности на 3 – 4 порядка выше, чем наивный, при том, что на одной и той же машине его выполнение заняло приблизительно в 100 раз меньше вычислительного времени. При этом использовался компьютер с четырёхъядерным



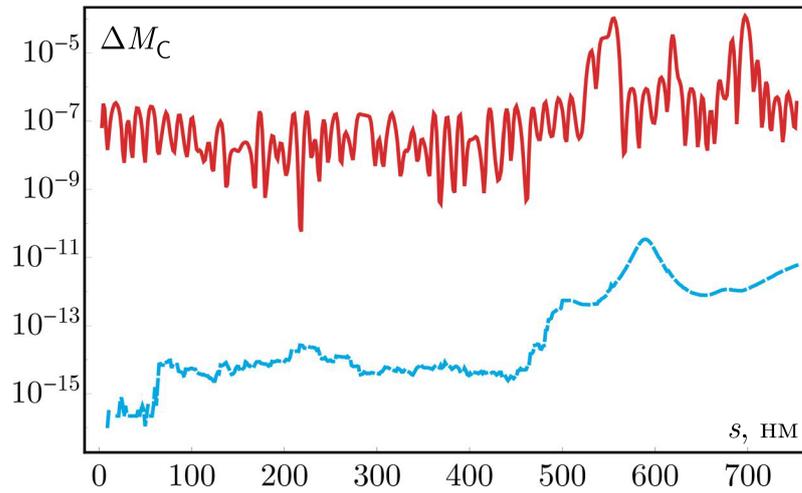
(a)



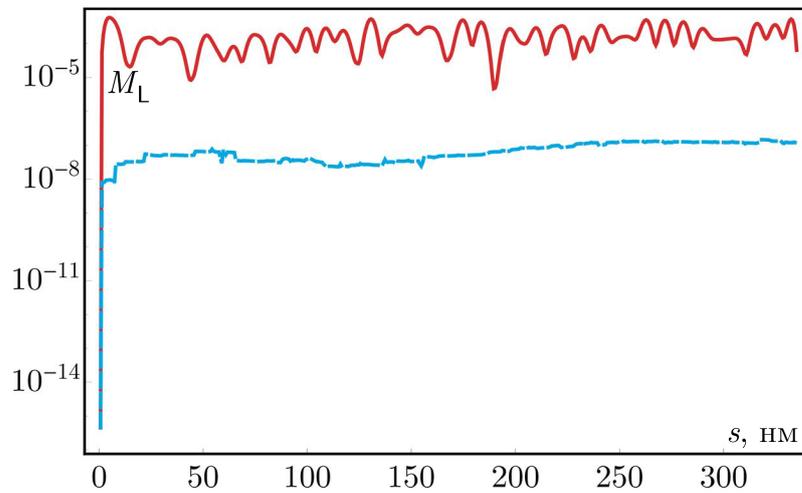
(b)

Рис. 1.5: Расстояние l между сингулярностями циркулярной (a) и линейной (b) поляризации, построенными при помощи наивного (красная линия) и дифференциального (голубая линия) методов. s — координата вдоль линии, считая от затравочной точки. На врезке изображена геометрия обеих линий относительно рассеивающей кремниевой частицы. Затравочная точка и начальное направление интегрирования указаны точкой и начинающимся в ней вектором соответственно.

процессором с тактовой частотой 1.8 ГГц и 16 ГБ оперативной памяти, методы графического ускорения не использовались.



(a)



(b)

Рис. 1.6: Отличия степени эллиптичности электромагнитного излучения от теоретических значений для линий циркулярной (a) и линейной (b) поляризации, построенных с помощью двух методов: красные (сплошные) графики соответствуют наивному алгоритму, голубые (пунктирные) линии — дифференциальному. По оси абсцисс отложена координата s вдоль линии, начиная от затравочной точки. На оси ординат используется логарифмический масштаб.

§ 1.3 Эволюция сингулярных линий непараксиальных электромагнитных полей при варьировании параметра задачи

Структура поляризации электромагнитного поля в любой практической задаче зависит от множества параметров, характеризующих начальное состояние поляризации и геометрию падения волны, её спектральные характеристики, отклик и геометрию среды или рассеивающих частиц и так далее. Важнейшим свойством топологических особенностей поля является их устойчивость к непрерывным изменениям, в связи с чем в широком диапазоне

изменения данных параметров основные черты топологического каркаса электромагнитного поля, такие как число и сцепленность сингулярных линий должны оставаться неизменными. При этом значительно может изменяться точная форма и положение этих линий: так ожидается, что для задач рассеяния излучения с начальной поляризацией, близкой к линейной, доминирующую роль в топологическом каркасе будут играть L^\top -линии, а для начального состояния поляризации, близкого к циркулярной — C^\top -линии. Поэтому важную роль играет исследование изменения формы сингулярных линий при варьировании параметров задачи.

Как и в случае построения топологического каркаса одной конфигурации поля, простейшим методом подобного исследования является простое построение нескольких «кадров» — каркасов поля, соответствующего разным значениям параметров задачи. Однако, в ряде случаев большей точности и вычислительной эффективности можно добиться с использованием дифференциального метода, обобщающего приведённый в параграфе 1.2. Этот метод менее универсален, поскольку требует вычисления производных комплексных амплитуд поля по варьируемому параметру задачи, что в случае задач, имеющих только численное решение для \mathbf{E} , может требовать таких же вычислительных затрат, как и полное перестроение всего рассматриваемого поля. Но в тех случаях, в которых задача допускает аналитическое решение, либо численное моделирование может быть проведено изолированно для малой области поля, содержащей интересующие исследователя топологические особенности, а не для всего поля в целом, такой подход оказывается эффективным.

Рассмотрим поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \mu)$, где μ — произвольный вещественный скалярный параметр. Связь смещения $d\mathbf{r}$ C^\top -точек поля с дифференциальным $d\mu$ соответствующего параметра описывается уравнением

$$\nabla\psi \cdot d\mathbf{r} + \partial_\mu\psi d\mu = 0. \quad (1.23)$$

Здесь и далее все величины вычисляются в одной C^\top -точке.

При этом для данного $d\mu$ существует бесконечно много $d\mathbf{r}$, удовлетворяющих этому уравнению и однозначный выбор одного из них требует введения дополнительного ограничения. В качестве такового естественно выбрать условие ортогональности сдвига C^\top -точки к содержащей её C^\top -линии: $d\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega}_C = 0$. С этим дополнительным условием (1.23) имеет единственное решение, которое может быть выражено как вектор \mathbf{u}_C

$$\mathbf{u}_C = \frac{d\mathbf{r}}{d\mu} = \frac{\text{Im}(\partial_\mu\psi \times d\boldsymbol{\Omega}_C)}{\|d\boldsymbol{\Omega}_C\|^2}, \quad (1.24)$$

Модуль вектора \mathbf{u}_C соответствует «скорости» движения конкретной C^\top -точки по мере изменения параметра μ .

Аналогично, чтобы проследить динамику L^\top -линии, необходимо решить вытекающее из (1.17), (1.18) уравнение

$$\vec{\mathbf{e}} \times \left(\mathbf{T}d\mathbf{r} - 2 \text{Im}(\sqrt{\psi} \partial_\mu \mathbf{E}^*) d\mu \right) = 0. \quad (1.25)$$

Учитывая вновь дополнительное ограничение ортогональности вектора смещения $d\mathbf{r}$ к L^\top -линии $d\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega}_L = 0$, получим единственное решение (1.25):

$$\mathbf{u}_L = \frac{d\mathbf{r}}{d\mu} = \left(\frac{\mathbf{D}_L}{\text{Tr}(\mathbf{D}_L)} - \mathbf{I} \right) \left(\mathbf{G}^* - \frac{\psi^*}{\|\mathbf{E}\|^2} \mathbf{G} \right)^{-1} \left(\partial_\mu \mathbf{E}^* - \frac{\psi^*}{\|\mathbf{E}\|^2} \partial_\mu \mathbf{E} \right), \quad (1.26)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица и все значения вычисляются в L^T -точке.

Для иллюстрации предложенного метода удобно использовать задачу рассеяния плоской монохроматической волны ($\lambda = 600$ нм) на металлическом сфероиде субволновых размеров; её подробная постановка приведена в параграфе 2.3. Достаточно сложная структура поляризации электромагнитного поля рассеяния, содержащая оба типа поляризационных сингулярностей в этой задаче сочетаются с возможностью аналитического решения [35], допускающего явное вычисление производных по параметрам эллипса поляризации падающей волны без полного пересчёта комплексных амплитуд во всём исследуемом объёме. Результаты численного решения уравнений (1.24), (1.26) (также с использованием явного метода Рунге–Кутты четвёртого порядка) продемонстрированы на рисунке 1.7.

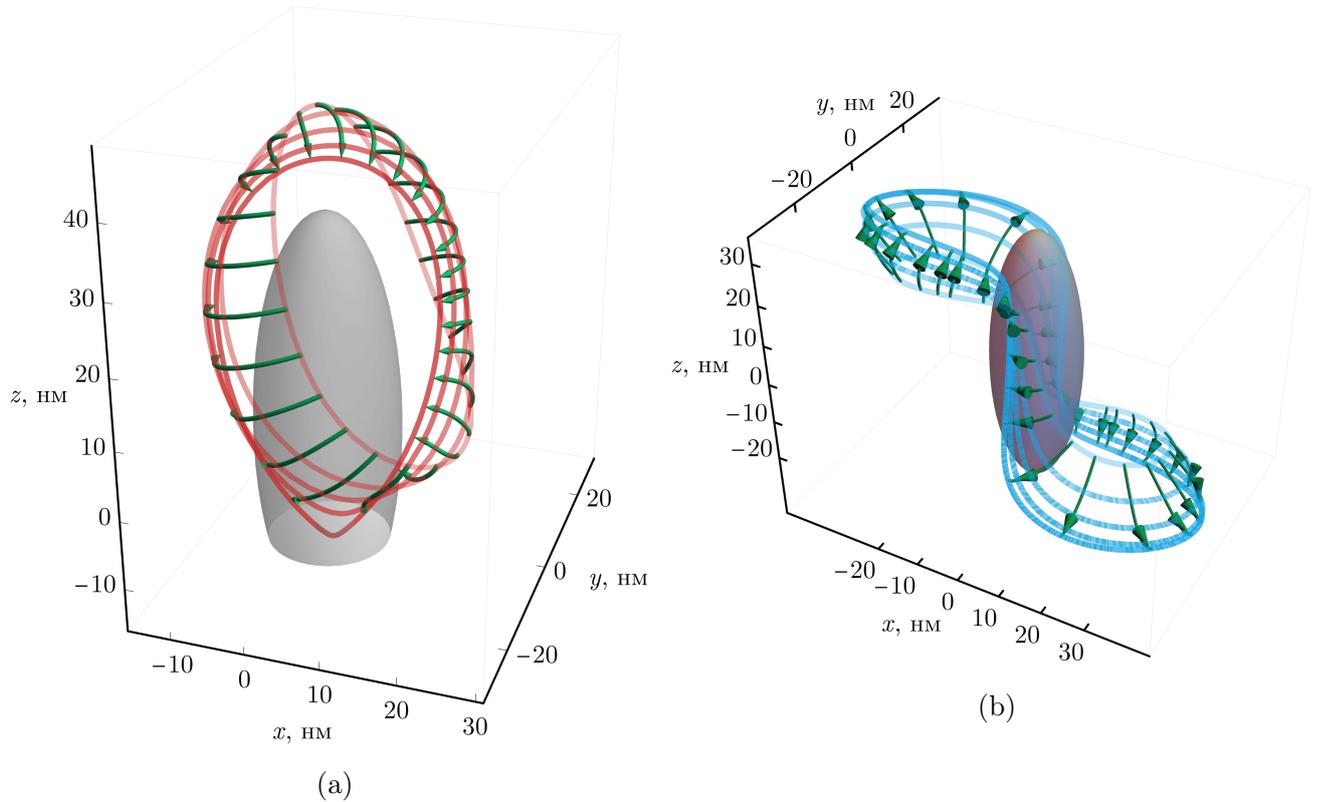


Рис. 1.7: Форма C^T (a) и L^T (b) линий вблизи золотого наносфероида при облучении его плоской монохроматической волной при различных углах Ψ поляризации падающей волны. Угол Ψ измерен между большой осью эллипса поляризации и осью Oz . Красные замкнутые линии различной насыщенности изображают C^T -линии при значениях $\Psi = 0^\circ; 5^\circ; 10^\circ; 15^\circ; 20^\circ$; голубые замкнутые линии изображают L^T -линии при значениях $\Psi = 10^\circ; 20^\circ; 30^\circ; 40^\circ; 50^\circ$ (в порядке увеличения насыщенности). Зелёные стрелки являются результатом интегрирования уравнений (1.24) (a), (1.26) (b) при использовании угла Ψ наклона направления поляризации излучения в плоскости падения в роли параметра μ .

Можно видеть, что динамика сингулярных линий обоих классов, рассчитанная интегрированием по параметру задачи (углу Ψ поляризации падающей на частицу световой волны) в точности повторяет их динамику, рассчитанную непосредственным интегрированием картины сингулярных линий при разных значениях данного параметра.

Основные результаты первой главы

Разработан эффективный численный алгоритм обнаружения обоих классов сингулярных линий поляризации электрического поля электромагнитного излучения, а также визуализации их формы и распределения топологических индексов для произвольных полей, допускающих задание вектора комплексных амплитуд на сетке, либо при помощи аналитических выражений. Показано значительное превосходство данного метода в точности и быстродействии в сравнении с наивным методом обнаружения данных линий в сечениях. Также продемонстрирована работа модификации данного алгоритма, позволяющей отслеживать эволюцию сингулярных линий при вариации параметра в задачах, допускающих вычисление производных комплексных амплитуд поля по этому параметру.

Глава 2

Топологические особенности светового поля, рассеянного объектами субволновых размеров

§ 2.1 Топологические особенности светового поля в задачах рассеяния: Обзор литературы

2.1.1 Параметры изотропии

В 2008 году в свет выходит статья М. Денниса [49], посвящённая тонкой классификации C -точек в парааксиальных полях. Введённая в ней величина $\sigma = S_1 + iS_2$, совпадает с ψ в малой окрестности C -точки, но отлична от неё в более общем случае. Критерии принадлежности точки циркулярной поляризации к одному из трёх основных топологических типов выражаются в виде неравенств для σ и её пространственных производных — более подробный способ классификации данных точек, чем позволяет провести единственная дискретная величина \mathcal{I}_C . При этом знак топологического индекса \mathcal{I}_C всегда совпадает со знаком выражения

$$\Upsilon = \frac{\text{Im}[\nabla\sigma^* \times \nabla\sigma]}{\|\nabla\sigma\|^2}, \quad (2.1)$$

характеризующего степень изотропии C -точки. При $\Upsilon = \pm 1$ выпрямляющая фаза κ (а также угол ориентации большой оси эллипса поляризации в парааксиальном приближении) изменяется равномерно с обходом сингулярности по малому замкнутому контуру:

$$\kappa(r, \varphi) = \kappa_0 \pm \frac{1}{2}\varphi, \quad (2.2)$$

где r, φ — полярная система координат с центром в C -точке в плоскости, нормальной к направлению распространения пучка. Этот тип сингулярностей поляризации соответствует чисто винтовым дислокациям волнового фронта одной из двух циркулярно поляризованных компонент поля, образующих базис в парааксиальных полях [148].

Напротив, при $\Upsilon = 0$ выпрямляющая фаза и ориентация вектора $\vec{\mathbf{A}}$ изменяются скачком на $\pi/2$, что не позволяет установить топологический индекс и тип сингулярности. Эта топология поляризационных сингулярностей соответствует чисто краевым дислокациям волнового фронта одной из двух поляризационных компонент. Исключая изолированные точки, на C -линиях полей общего вида реализуются промежуточные случаи $0 < |\Upsilon| < 1$.

Благодаря работам нашей лаборатории [60], ведущая роль в которых принадлежит кандидату физико-математических наук Григорьеву К. С. и получила окончательное оформление в его диссертационной работе [250], топологическая классификация C^T - и L^T -точек была обобщена на случай непараксиальных полей. В этих работах были получены явные выражения для параметров изотропии $\Upsilon_{C,L}$ обоих типов сингулярностей трёхмерных распределений эллипсов поляризации электрического поля, которые активно будут использоваться в дальнейшем, а также более строго формализовано само понятие параметра изотропии.

Рассмотрим сперва случай C^T -точки. Введём в плоскости Π_C полярную систему координат r, φ с центром в самой сингулярности. При помощи разложения в ряд Тейлора с точностью до линейных по декартовым координатам слагаемых распределение функции ψ в малой окрестности устойчивой сингулярности в этой плоскости может быть представлено в виде линейной комбинации двух чисто вихревых сингулярностей

$$\psi(r, \varphi) = \frac{r}{2}(\Lambda_+^C e^{i\varphi} + \Lambda_-^C e^{-i\varphi}), \quad (2.3)$$

где коэффициенты Λ_{\pm}^C определяют вклад в поле эллипсов поляризации электрического поля сингулярностей, соответствующих чисто вихревым дислокациям фазы одной из циркулярно поляризованных в плоскости Π_C компонент излучения с разными направлениями вращения директора \vec{A} :

$$\Lambda_{\pm}^C = (\mathbf{e}_x \mp i\mathbf{e}_y) \cdot \nabla\psi, \quad (2.4)$$

где $\mathbf{e}_{x,y}$ — орты соответствующих декартовых осей.

Параметром изотропии Υ_C мы будем называть величину

$$\Upsilon_C = \frac{|\Lambda_+^C|^2 - |\Lambda_-^C|^2}{|\Lambda_+^C|^2 + |\Lambda_-^C|^2}. \quad (2.5)$$

Эта величина наследует перечисленные выше для Υ свойства, обобщая их на случай непараксиальных сингулярностей: принимает значения в диапазоне $[-1; +1]$, где случаи $\Upsilon_C = \pm 1$ соответствуют равномерному вращению эллипса поляризации в плоскости Π_C при обходе сингулярной точки, а $\Upsilon_C = 0$ — скачкообразному изменению ориентации эллипсов в этой плоскости; а также выполняющемуся для всех устойчивых C^T -точек равенству

$$\mathcal{I}_C = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\Upsilon_C). \quad (2.6)$$

В [60] было показано, что параметр изотропии произвольной C^T -точки может быть найден как

$$\Upsilon_C = \frac{|\mathbf{E}^* \cdot \nabla\psi|^2 - |\mathbf{E} \cdot \nabla\psi|^2}{|\mathbf{E}^* \cdot \nabla\psi|^2 + |\mathbf{E} \cdot \nabla\psi|^2}. \quad (2.7)$$

Знание значения Υ_C достаточно для отделения C^T -точек с топологией типа «звезда», но для различения типов «лимон» и «монстар» необходимо вычисление ещё одного параметра, выражения для которого также были даны в [250]. Однако, для целей настоящей работы мы ограничимся анализом только параметра Υ_C как однозначно связанного с наиболее сильным топологическим инвариантом поляризационной сингулярности — её топологическим индексом.

Аналогичный подход может быть использован для классификации L^Γ -точек. В сингулярностях этого типа обращаются в нуль одновременно поля нормалей \mathbf{N} и малых полуосей $\vec{\mathbf{B}}$ к эллипсам поляризации; это делает невозможным выбор физически обусловленного локального базиса в плоскости Π_\perp , однако такой базис всегда можно выбрать произвольно. Пусть \mathbf{e}_a — единичный вектор, направленный вдоль направления колебаний \mathcal{E} в L^Γ -точке, а $\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_q$ — произвольная пара единичных векторов, такая, что $\mathbf{e}_p \times \mathbf{e}_q = \mathbf{e}_a$ и a, p, q — соответствующие этой тройке векторов координаты. $\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_q$ образуют базис в плоскости Π_\perp , позволяющий рассматривать L^Γ -точку как нуль комплексной функции $\xi_{pq} = N_p + iN_q$, которая может быть разложена так же, как (2.3), в ряд Тейлора до линейного слагаемого, и представлена в виде суперпозиции двух противоположно закрученных вихрей

$$\xi_{pq}(r, \varphi) = \frac{r}{2}(\Lambda_+^L e^{i\varphi} + \Lambda_-^L e^{-i\varphi}), \quad (2.8)$$

где r, φ — полярная система координат в плоскости Π_\perp с центром в точке сингулярности. Коэффициенты в этом разложении будут иметь [60] вид

$$\Lambda_\pm^L = \partial_p N_p \pm \partial_q N_q + i(\partial_p N_q \mp \partial_q N_p). \quad (2.9)$$

В полной аналогии с (2.5), параметр изотропии Υ_L L^Γ -точки определяется как

$$\Upsilon_L = \frac{|\Lambda_+^L|^2 - |\Lambda_-^L|^2}{|\Lambda_+^L|^2 + |\Lambda_-^L|^2}. \quad (2.10)$$

В [60] показано, что этот параметр может быть вычислен как

$$\Upsilon_L = \frac{2(\partial_p N_p \partial_q N_q - \partial_p N_q \partial_q N_p)}{\sum_{i,j \in \{p,q\}} (\partial_i N_j)^2}. \quad (2.11)$$

Так же, как и Υ_C , Υ_L принимает значения в диапазоне $[-1; +1]$, имеет тот же знак, что и топологический индекс \mathcal{G}_L и характеризует близость L^Γ -точки к одному из «чистых» типов: при $|\Upsilon_L| = 1$ вращение рассматриваемой проекции \mathbf{N}_{Π_\perp} вектора нормали равномерно при обходе точки сингулярности в плоскости Π_\perp по замкнутому контуру, в то время как при $\Upsilon_L = 0$ оно происходит скачком. Также, в некоторой аналогии со случаем C^Γ -точек, отрицательным значениям Υ_L соответствует только один топологический тип — «седло» (седловая точка) в распределении \mathbf{N}_{Π_\perp} , в то время как для $\Upsilon_L > 0$ существует два невырожденных типа: «фокус» и «узел» и тип «центр», неустойчивый к малым изменениям поля (см. рисунок 2.1). Для различения этих типов может использоваться ещё один вспомогательный параметр [250].

Параметр изотропии L^Γ -точки также может быть связан с введёнными в параграфе 1.2¹ тензорами $\mathbf{A}, \mathbf{\Pi}_E, \mathbf{T}$, использующимися для вычисления касательной к линии линейной поляризации:

$$\Upsilon_L = \frac{2 \operatorname{Tr}(\mathbf{A} \mathbf{\Pi}_E)}{\operatorname{Tr}(\mathbf{T}_\perp^\top \mathbf{T}_\perp)}, \quad (2.12)$$

где $\mathbf{T}_\perp = (1 - \mathbf{\Pi}_E) \mathbf{T} (1 - \mathbf{\Pi}_E)$ и все тензоры вычислены в L^Γ -точке.

¹см. стр. 26

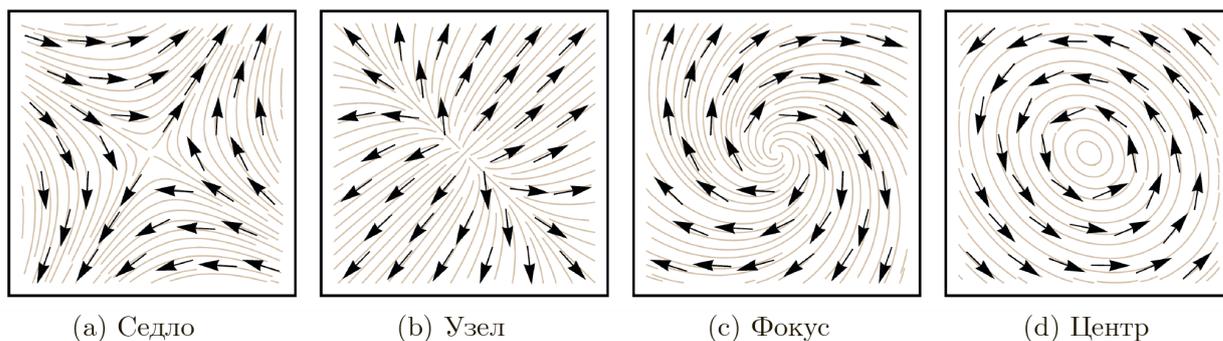


Рис. 2.1: Примеры распределений векторов нормали к эллипсу поляризации вблизи L -точек различных типов. Топологические типы точек линейной поляризации в выделенной проекции совпадают с типами особых точек фазовых портретов обыкновенных дифференциальных уравнений.

2.1.2 Оптические ленты

Исследование сингулярных точек поляризации электрического поля при помощи параметров изотропии S^{Γ} - и L^{Γ} -точек позволяет указать для каждой непараксиальной сингулярности ближайший аналог среди топологических типов особых точек поляризации параксиальных полей, а также количественно охарактеризовать близость конфигурации поляризационных эллипсов в окрестности этой точки к вырождению. Тем не менее, ограничение рассмотрения топологии непараксиальных поляризационных сингулярностей свойствами окружающих её эллипсов поляризации в проекции на выделенные Π_C и Π_L плоскости упускает из вида некоторые существенные детали их полного трёхмерного распределения.

В работе [67] было показано, что в трёхмерной структуре поляризации света могут возникать интересные топологически нетривиальные конфигурации, образуемые векторами \vec{A} , \vec{B} , \vec{N} , связанными с эллипсом поляризации, при прослеживании этих векторов вдоль малой окружности. Ленты, заметаемые данными векторами при таком обходе могут иметь перекручивания и в частности быть гомеоморфными² листам Мёбиуса. Самим автором этой работы был введён термин «оптические ленты Мёбиуса», используемый им в дальнейшем при рассмотрении более широкого класса объектов такого рода [69; 70] даже в тех случаях, в которых образование неориентируемой топологии листа Мёбиуса невозможно [69]. Мы будем использовать более общий термин «оптические ленты», говоря о любой конфигурации замкнутой полосы, заметаемой одним из векторов \vec{A} , \vec{B} , \vec{N} при его прослеживании в электромагнитном поле вдоль произвольного замкнутого контура, а «оптические ленты Мёбиуса» — только для неориентируемых разновидностей данных лент.

Исследование оптических лент в последнее десятилетие представляет одно из активно развивающихся направлений сингулярной оптики. Публикуются теоретические работы [72; 74], посвящённые тонкой структуре и условиям возникновения нетривиальных оптических лент, квантовомеханическому описанию соответствующих топологических особенностей [158], геометрии оптических лент, прослеженных вдоль эллиптических контуров [75], условиям существования неустойчивых оптических лент с большим числом перекручиваний [137;

²гомеоморфизм — непрерывное обратимое отображение, обратное к которому также непрерывно.

152]. Развитие техник структурирования лазерного излучения позволило получать пучки, содержащие оптические ленты Мёбиуса [136; 152; 158] и точно измерять геометрию последних. Излучение, содержащее нетривиальные оптические ленты, может резонансно взаимодействовать с обладающими такой же топологией микрорезонаторами, что открывает новые возможности для фотоники [57].

Единая классификация оптических лент на данный момент не выработана. И. Фройндом, автором первых работ, посвящённых этому классу объектов, была предложена [67; 69; 70] система из нескольких десятков топологических индексов, приводящая к формированию десятков тысяч различных топологических типов и рассмотрена статистика распределения данных индексов в случайных электромагнитных полях; хотя большая часть из десятков тысяч комбинаций индексов так или иначе запрещена по топологическим соображениям, доступное их число по-прежнему превышает тысячу. В более поздних исследованиях [72; 74; 75] большая часть этих индексов, за исключением числа перекручиваний, не рассматривается даже самим автором.

Другая система топологической классификации была предложена в работе [50] под названием «О-классификации». Эта классификация приписывает каждой S^1 -точке индекс, равный числу исходящих из неё направлений, в которых оси поляризационного эллипса лежат в плоскости Π_C , в некоторой аналогии с известным для топологии S -точек числом сепаратрис. О-классификация связана с числом перекручиваний оптической ленты, построенной на малом замкнутом контуре, окружающем данную точку. В системе обозначений Фройнда это число называется индексом τ , поэтому далее мы будем ссылаться на эту величину как на τ_F .

Среди всех параметров оптической ленты число перекручиваний — единственный, широко употребляемый всеми авторами в приведённых выше и смежных с ними работах. Опишем метод определения этого индекса, предложенный в работе [70]: Рассмотрим описанную в интересующей нас области поля окружность и будем обходить её, прослеживая проекцию одного из трёх векторов $\vec{A}, \vec{B}, \vec{N}$ на ортогональную к данной окружности плоскость Π_τ , естественный базис в которой задают векторы $\mathbf{a}, \mathbf{r}, \mathbf{a} \times \mathbf{r}$, где \mathbf{r} — единичный вектор, коллинеарный радиус-вектору рассматриваемой точки окружности, \mathbf{a} — ось симметрии данной окружности. Конец изучаемого вектора, связанного с эллипсом поляризации, будет прочерчивать на Π_τ некоторую замкнутую кривую (рисунок 2.2). Индекс (порядок) данной кривой относительно начала координат, то есть число её полных оборотов вокруг этой точки [255], — и есть число перекручиваний τ_F .

Наиболее твёрдой закономерностью, обнаруженной в предшествующих исследованиях оптических лент является неориентируемость лент, построенных на окружностях, охватывающих линии циркулярной поляризации. Подобный результат был получен при исследовании статистики оптических лент в случайных полях [69; 70], а в [72] было уточнено, что число перекручиваний ленты как правило равно половине числа охватываемых ей сингулярных линий. В последних разделах параграфов 2.3, 2.2 мы проводим аналогичный анализ для оптических лент в ближнем поле рассеяния.

Вариации определения приведённого определения τ_F широко употребимы в теории лент, находящей применения, помимо недавно возникших оптических, в чистой математике, и

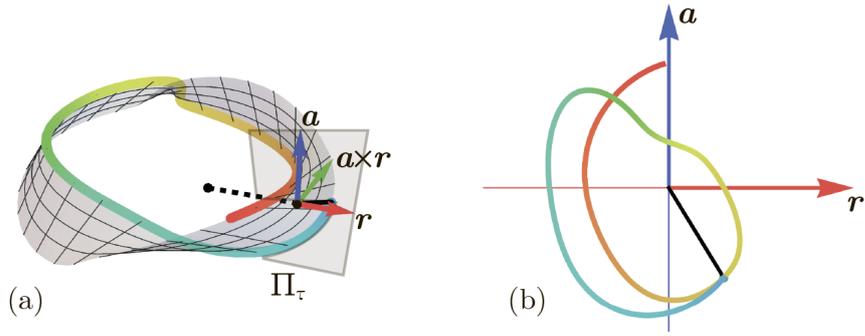


Рис. 2.2: Процедура определения индекса τ_F . а: пример оптической линзы и обход контура её построения. Заметающий линзу вектор изображён чёрным сплошным отрезком, связанный с контуром построения базис $\{\mathbf{a}, \mathbf{r}, \mathbf{a} \times \mathbf{r}\}$ — цветными стрелками, разноцветная кривая изображает край оптической линзы. б: Проекция края линзы на плоскость Π_τ . Число его оборотов вокруг начала координат при полном обходе линзы равно τ_F .

более всего — в теории суперспирализации ДНК [121], получившей развитие в последние десятилетия. Во многом благодаря задачам последней известно, что понятие числа перекручиваний «разделяется» на несколько взаимосвязанных, но не тождественных индексов при переходе к рассмотрению лент, построенных на не плоских замкнутых кривых общего вида [151]. Хотя теория этих индексов была исследована математически ещё в середине прошлого века [32], до сих пор нам не известно работ, применяющих её для описания оптических лент. В связи с этим в параграфе 2.3 проведён подробный анализ различия этих индексов для контуров более общего типа. Приведём здесь наиболее важные в дальнейшем положения данной теории.

2.1.3 Топологические характеристики лент общего вида

Будем обозначать $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ любой, в том числе двунаправленный, вектор электромагнитного поля, используемый для построения оптических лент. В нашем исследовании в роли таковых будут выступать векторы \mathbf{N} , $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{B}}$.

Классическое математическое определение ленты, используемое в соответствующих разделах топологии и дифференциальной геометрии [151], состоит в следующем: рассмотрим гладкую замкнутую пространственную кривую, параметрически заданную вектор-функцией $\mathbf{g}(s)$ и векторное поле $\mathbf{v}_\perp(\mathbf{g})$, определённое в каждой точке этой кривой, всюду ортогональное ей и имеющее единичный модуль. Совокупность $\{\mathbf{g}(s); \mathbf{v}_\perp(\mathbf{g})\}$ будем называть *лентой*, *заметаемой вектором \mathbf{v}_\perp вдоль контура \mathbf{g}* . В дальнейшем мы будем во всех формулах использовать так называемую естественную параметризацию, то есть считать, что $s \in [0; l]$ — длина дуги кривой, заданной уравнением $\mathbf{g}(s)$, отсчитанная от точки $\mathbf{g}(0)$. Гладкая кривая, заданная любым другим параметрическим уравнением $\mathbf{g}(t), t \in [0; t_{max}]$ может быть репараметризована длиной:

$$s(t) = \int_0^t \left| \frac{\partial \mathbf{g}(t')}{\partial t'} \right| dt' \leq s(t_{max}) = l. \quad (2.13)$$

Содержательный смысл таких топологических характеристик ленты как число перекручиваний и коэффициент зацепления её краёв существенно не зависит от требований единич-

ности и ортогональности \mathbf{v}_\perp , а требует от данного поля только нигде не обращаться в нуль и иметь достаточно малый модуль, чтобы проведённый вдоль вектора \mathbf{v}_\perp отрезок нигде не пересекал $\mathbf{g}(s)$. Действительно, при выполнении этих условий преобразование

$$\mathbf{v}_\perp = \frac{\mathbf{v}|\dot{\mathbf{g}}|^2 - \dot{\mathbf{g}}(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{g}})}{\|\mathbf{v}|\dot{\mathbf{g}}|^2 - \dot{\mathbf{g}}(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{g}})\|}, \quad (2.14)$$

ортогонализирующее по отношению к \mathbf{g} и нормализующее \mathbf{v} является гомотопией (непрерывной деформацией) ленты и, следовательно, полностью сохраняет как её внутреннюю топологию (ориентируемость), так и способ её размещения в объемлющем трёхмерном пространстве (число полных перекручиваний). Таким образом, с топологической точки зрения рассмотрение лент \mathbf{v} и \mathbf{v}_\perp тождественно, но использование последних позволяет существенно упростить интегральные выражения для основных топологических характеристик ленты, а также увеличить наглядность изображения лент в случае большого диапазона изменения $\|\mathbf{v}\|$ вдоль контура построения. В связи с этим мы как правило будем использовать выражения с индексом \perp : $\vec{\mathbf{A}}_\perp, \vec{\mathbf{B}}_\perp, \mathbf{N}_\perp$, обозначая таким образом процедуру ортогонализации и нормировки (2.14) соответствующего вектора. Теми же соображениями упрощения уравнений обусловлено не ограничивающее общности требование естественной параметризации $\mathbf{g}(s)$.

Коэффициентом перекручивания \mathcal{I}_W ленты $\{\mathbf{g}(s); \mathbf{v}_\perp(\mathbf{g})\}$ называется [151] интеграл

$$\mathcal{I}_W(\mathbf{g}; \mathbf{v}_\perp) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \left(\left[\frac{\partial \mathbf{v}_\perp}{\partial s} \times \mathbf{v}_\perp \right] \cdot \dot{\mathbf{g}} \right) ds, \quad (2.15)$$

значения которого для контуров в виде окружностей всегда совпадают с числом перекручиваний τ_F . Для переноса процедуры вычисления τ_F , описанной в [70], на кривые общего вида, в каждой точке этих кривых должен быть выбран базис в плоскости, локально ортогональной данной кривой. Одним из естественных выборов такого базиса является широко используемый в дифференциальной геометрии базис (трёхгранник) Френе [252], использование которого обеспечивает (в тех случаях, в которых этот базис однозначно определён в каждой точке $\mathbf{g}(s)$) совпадение τ_F и \mathcal{I}_W [151]. Однако, такой выбор базиса приводит к возникновению ситуаций, в которых лента может иметь ненулевое значение коэффициента перекручивания, не связанное с вращением вектора \mathbf{v}_\perp , даже для полностью однородного поля последнего, поскольку базис Френе сам может иметь ненулевую проекцию угловой скорости на касательное к кривой $\mathbf{g}(s)$ направление, интеграл которой

$$\mathcal{I}(\mathbf{g}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{(\dot{\mathbf{g}}(s) \times \ddot{\mathbf{g}}(s)) \cdot \ddot{\mathbf{g}}(s)}{|\dot{\mathbf{g}} \times \ddot{\mathbf{g}}|^2} ds \quad (2.16)$$

при полном обходе может принимать ненулевые и в общем случае нецелые значения [201]. Число \mathcal{I} не зависит от выбора векторного поля \mathbf{v}_\perp и называется *полным геометрическим кручением* контура.

В результате значения \mathcal{I}_W для кривых общего вида оказываются не всегда обусловленными вращением именно вектора \mathbf{v}_\perp и не дискретными, что лишает данную величину значения топологического индекса.

Другим естественным выбором базиса в ортогональной к контуру построения ленты плоскости Π_τ является минимизирующий вращение базис Бишопа [29]. Его преимуществами являются определённость в любой точке любой гладкой кривой и отсутствие вращения вокруг кривой по мере её обхода. Базис Бишопа имеет нулевую проекцию на касательное к кривой направление в каждой её точке, но при этом, контринтуитивно, не обязательно возвращается к исходной ориентации при полном обходе кривой. Определённое с использованием базиса Бишопа значение числа перекручиваний носит название *индекса внутреннего перекручивания* $\mathcal{N}(\mathbf{g}(s); \mathbf{v}_\perp(\mathbf{g}))$ и может быть вычислено [151] как разность

$$\mathcal{N}(\mathbf{g}; \mathbf{v}_\perp) = \mathcal{F}_W(\mathbf{g}; \mathbf{v}_\perp) - \mathcal{F}(\mathbf{g}). \quad (2.17)$$

В отличие от \mathcal{F}_W , \mathcal{N} принимает всегда целочисленные значения для лент полностью определённых векторов и целые либо полуцелые — для лент двунаправленных векторов.

Однако, \mathcal{N} — не единственный дискретный индекс, обобщающий понятие числа перекручиваний. Ещё в работах [69; 70] указывается, что зачастую удобнее, чем рассматривать вращение образующего ленту вектора, бывает проследить за взаимной сцепленностью краёв этой ленты $\mathbf{g} = \mathbf{g}(s) + \epsilon \mathbf{v}(\mathbf{g}(s)); \mathbf{h} = \mathbf{g}(s) - \epsilon \mathbf{v}(\mathbf{g}(s))$, где ϵ — малый коэффициент, обеспечивающий согласование размерностей векторов \mathbf{g} и \mathbf{v} и отсутствие взаимных пересечений линий, определяемых векторами \mathbf{g} и \mathbf{h} . В работах [69; 70] такой подход упоминается с точки зрения простоты визуального восприятия данной характеристики на диаграммах, отражающих геометрию оптических лент (рисунок 2.3), однако она же может быть превращена в однозначно определённый топологический индекс, носящий название *индекса зацепления* краёв ленты при помощи Гауссова интеграла зацепления [151]:

$$\mathcal{L}_e(\mathbf{g}, \mathbf{v}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \frac{\mathbf{g}(s_1) - \mathbf{h}(s_2)}{|\mathbf{g}(s_1) - \mathbf{h}(s_2)|} \cdot [\dot{\mathbf{g}}(s_1) \times \dot{\mathbf{h}}(s_2)] ds_1 ds_2, \quad (2.18)$$

где $s_1 \in [0; l_1], s_2 \in [0; l_2]$ — естественные параметры кривых \mathbf{g}, \mathbf{h} соответственно.

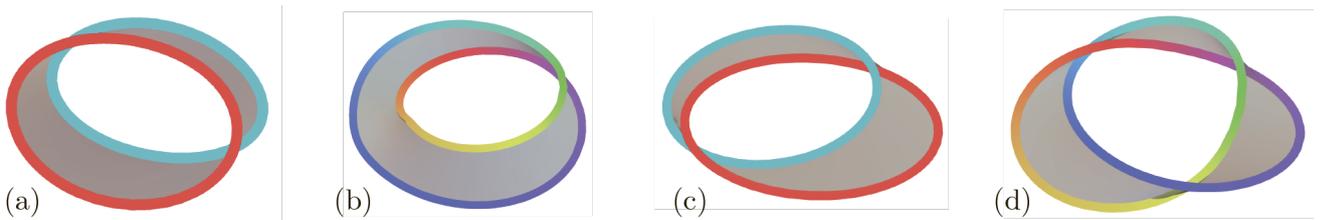


Рис. 2.3: Примеры оптических лент с различными значениями индекса зацепления краёв. а: $\mathcal{L}_e = 0$, б: $\mathcal{L}_e = 1/2$, в: $\mathcal{L}_e = 1$, г: $\mathcal{L}_e = 3/2$. Ленты а и в являются ориентируемыми, б и г — нет.

Для лент, имеющих только один край (оптические ленты Мёбиуса), \mathcal{L}_e не является, строго говоря, коэффициентом зацепления краёв. Но для них его также можно формально ввести с помощью формулы (2.18), представив край такой ленты как две независимые (не замкнутые) кривые, соответствующие выбору разного знака образующего ленту вектора \mathbf{v} . Как и \mathcal{N} , коэффициент \mathcal{L}_e принимает только целые значения для лент полностью определённых векторов (поскольку является индексом зацепления двух замкнутых кривых), но может принимать также полуцелые для лент директоров.

Все введённые индексы связывает теорема Кэлулгэрянэ [32]

$$\mathcal{L}_e = \mathcal{T}_W + \mathcal{W} = n + \mathcal{T} + \mathcal{W}, \quad (2.19)$$

устанавливающая связь между коэффициентами \mathcal{L}_e , \mathcal{T}_W и коэффициентом скрюченности контура построения [151]

$$\mathcal{W}(\mathbf{g}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^l \int_0^l \frac{\mathbf{g}(s_1) - \mathbf{g}(s_2)}{|\mathbf{g}(s_1) - \mathbf{g}(s_2)|^3} \cdot [\dot{\mathbf{g}}(s_1) \times \dot{\mathbf{g}}(s_2)] ds_1 ds_2. \quad (2.20)$$

Последний, как и \mathcal{T} , является характеристикой этого контура, независимой от построенной на нём ленты. Интуитивно \mathcal{W} соответствует числу петель на этой кривой и может быть строго определён как сумма индексов точек самопересечения проекции кривой, равных $+1$ если верхний виток пересекает нижний слева направо и -1 в обратном случае, усреднённая по всем возможным плоскостям проецирования. В следствие этой процедуры усреднения \mathcal{W} не всегда принимает целочисленные значения.

2.1.4 Сингулярная оптика полей рассеяния

Основная масса работ, посвящённых обнаружению сингулярностей поляризации [18; 22; 48; 53; 61; 63; 77; 202], а также смежных топологических особенностей, таких, как оптические ленты [67; 69; 70], рассматривает сингулярную структуру стохастических полей, как правило, полученных наложением большого числа плоских волн с тем или иным случайным распределением амплитуд и волновых векторов.

В последнее десятилетие выходит также существенное число исследований [86; 124; 125; 174; 204; 226], посвящённых описанию условий возникновения, динамике распространения и взаимодействию сингулярных линий поляризации в задачах нелинейной оптики, примеры которых будут также рассмотрены в главе 4. Однако, поскольку в большинстве случаев характерной особенностью лазерных пучков, использование которых необходимо для получения когерентного светового поля и наблюдения нелинейно-оптических эффектов, является узкий пространственный спектр, такие работы в основном рассматривают только существующие в параксиальном приближении S -линии, не уделяя внимания сингулярностям более общего типа (S^T - и L^T -линиям), многообразии топологических конфигураций которых существенно выше.

Некоторым исключением в данном случае являются работы И. Фройнда [68; 71], в которых автор предложил схему наблюдения оптических лент Мёбиуса в скрещенных лазерных пучках и её последующие экспериментальные реализации [137; 199], а также возникшая в самые последние годы серия исследований, посвящённых структуре оптических лент в остро сфокусированном лазерном излучении [136; 152; 157; 158; 210].

Малоисследованной остаётся сингулярная структура поляризации в рассеянном электромагнитном излучении, сложная пространственная структура которого даёт основания ожидать наличия в нём большого числа топологических особенностей поляризации. Стоит вспомнить, что историческая работа [149], фактически приведшая к возникновению такой дисциплины как сингулярная оптика, равно как и первые известные человечеству волновые сингулярности — амфидромические точки [233] Хьюэлла — обязаны своим возникновением

интерференции волн, падающей и рассеянной от границы раздела сред со сложной геометрией.

Многие существующие работы, посвящённые сингулярностям поляризации в рассеянном свете, рассматривают также стохастические среды [53; 155], включая такие как человеческая кожа [177] и турбулентная атмосфера [120]. Интересна выделяющаяся из данного, преимущественно статистического, подхода работа [21], демонстрирующая необходимое существование по меньшей мере четырёх поляризационных сингулярностей в свете, рассеянном земной атмосферой вне зависимости от наличия в ней турбулентности, обусловленное сферической формой последней, а не многократной интерференцией рассеянных волн.

В настоящей главе мы детально исследуем сингулярную структуру рассеянного света в трёх задачах. В двух случаях рассеяния света на единичных частицах субволновых размеров: диэлектрической (параграф 2.2) и металлической (параграф 2.3); исследования в этой области сингулярной оптики стали появляться в последние два-три года, и многие публикации, рассматривающие сингулярности поляризации, образующиеся при рассеянии электромагнитного излучения на единичных субволновых частицах работы ссылаются на наши результаты [156; 169; 216]. А также задачу рассеяния на планарном периодическом метаматериале (параграф 2.4). В последнее десятилетие этот тип задач сингулярной оптики привлекал большее внимание [154; 206], чем рассеяние на единичных частицах, но всё же оставался исследован значительно хуже, чем сингулярности остро сфокусированных и скрещенных лазерных пучков, а также случайных полей. Значительный рост интереса к сингулярностям поляризации, возникающим при рассеянии света упорядоченными планарными структурами такого рода возник в последние два-три года [55; 217; 219; 238] и, вероятно, связан с совершенствованием экспериментальных техник поляриметрии.

Основные результаты этой главы опубликованы в статьях [60; 112; 115; 138; 213], и сборниках тезисов конференций [113; 205; 241; 253].

§ 2.2 Топологические особенности светового поля, рассеянного кремниевой сферической частицей

2.2.1 Постановка задачи

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну длины λ , падающую на однородную диэлектрическую сферу субволнового радиуса $R < \lambda$. В силу сферической симметрии задачи варьирование углов падения и поляризации излучения не может приводить к какому-либо существенному изменению его структуры, отличному от пространственного вращения, поэтому будем для определённости считать, что падающая волна распространяется вдоль оси Oz и поляризована так, что большая ось эллипса её поляризации направлена вдоль Ox . Единственным существенным параметром поляризации падающего излучения остаётся степень его эллиптичности M_0 , при помощи которой вектор комплексной амплитуды \mathbf{E}_0 этого излучения может быть выражен в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_0 &= E_0(\mu_+ \mathbf{e}_x + \mu_- \mathbf{e}_y), \\ \mu_{\pm} &= \sqrt{1 - M_0} \pm \sqrt{1 + M_0}.\end{aligned}\tag{2.21}$$

Поскольку в данной задаче мы не рассматриваем влияние нелинейно-оптических эффектов, скалярный параметр E_0 также не оказывает воздействия на состояние поляризации и не играет роли в дальнейшем. Диэлектрическая частица расположена таким образом, что один из её полюсов совпадает с началом координат, а центр расположен в точке $\{x, y, z\} = \{R, 0, 0\}$, где R — радиус частицы.

Рассеяние света на сферической частице представляет собой классическую задачу оптики, аналитическое решение которой существует, строго говоря, для любого отношения R/λ [36]. Наиболее интересное взаимодействие наблюдается для отношения $R/\lambda \approx 0.1$ [224], так как дипольный момент частицы в этом случае осциллирует практически на частоте падающей волны. В связи с большой сложностью аналитического решения, в этой секции мы решаем задачу рассеяния численным моделированием при помощи пакета COMSOL Multiphysics методом конечных элементов. Моделируемая частица имела радиус $R = 90$ нм, а длина падающей волны составляла $\lambda = 710$ нм. На границах области построения использовались периодические граничные условия, дополненные «Идеально Подобранными Слоями» (Perfectly Matched Layers), предотвращающими отражение волны от границ построения [208]. Расчётное пространство было разбито на 50 000 конечных элементов.

При помощи численного решения уравнений Максвелла нами непосредственно вычислялись значения комплексной амплитуды \mathbf{E} суперпозиции падающей и рассеянной волн для случая линейной поляризации вдоль Ox в узлах трёхмерной кубической сетки. Для вычисления значений комплексной амплитуды поля в других точках использовалась трикубическая интерполяция. В силу аксиальной симметрии задачи картина рассеяния поляризованной вдоль Oy волны получается простым поворотом вычисленного распределения на $\pi/2$, а трёхмерное распределение комплексной амплитуды для любого отличного от 0 значения M_0 вычисляется затем линейной комбинацией вида (2.21) двух этих полей без значительных

дополнительных вычислительных затрат. Таким образом было возможно наблюдать плавное изменение картины распределения поляризации рассеянной волны по мере изменения эллиптичности M_0 падающей.

Для обнаружения сингулярностей поляризации излучения использовались методы, детально описанные в 1.2: как дифференциальные, так и наивные; во всех конфигурациях поля, в которых использовались оба метода, они показали полное соответствие результатов с погрешностью определения положения сингулярных линий менее 1 нм, поэтому для получения большого числа топологических каркасов предпочтение отдавалось более быстрому дифференциальному методу.

2.2.2 Общая структура поля

На рисунке 2.4 представлены распределения основных энергетических и поляризационных характеристик излучения рассеянной кремниевой сферой плоской волны в плоскости $z = R$, проходящей через центр рассеивающей частицы нормально волновому вектору падающей волны для состояния поляризации падающей волны, очень близкого к линейному (начальная степень эллиптичности $M_0 = 0.02$). Квадратными маркерами на рисунке отмечены L^T -точки.

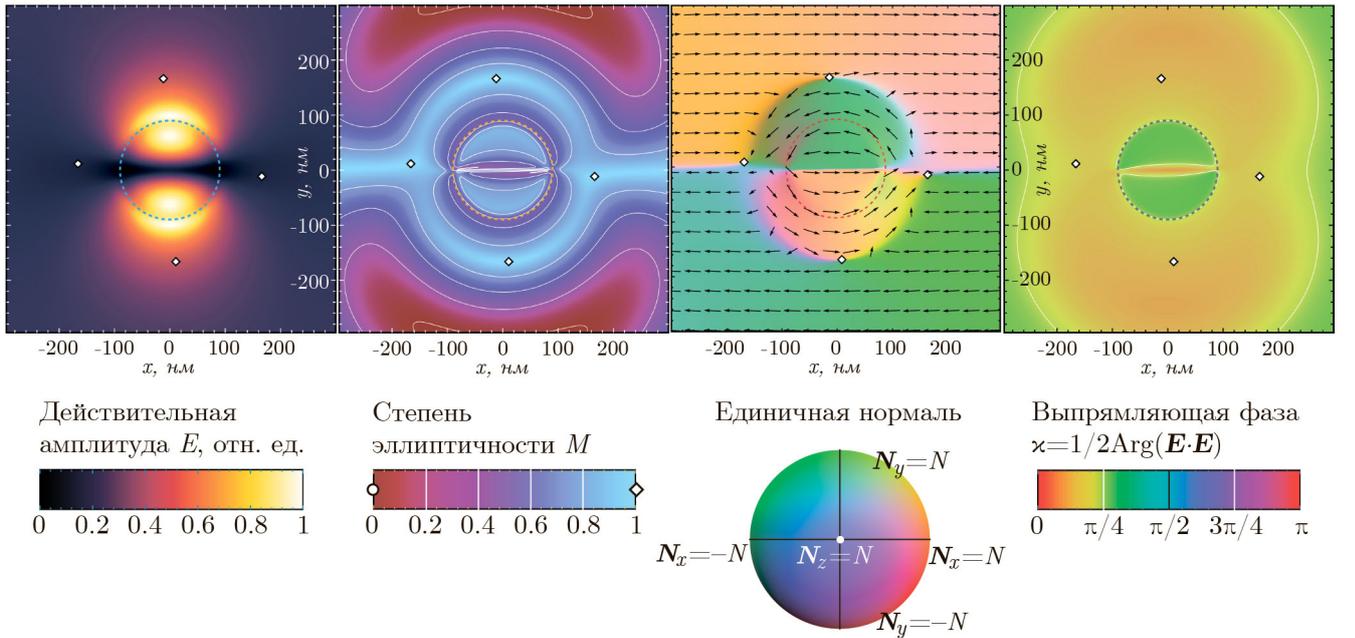


Рис. 2.4: Распределение основных характеристик излучения рассеянной волны в центральном сечении при начальном состоянии поляризации, близком к линейному ($M_0 = 0.02$). Частица на всех распределениях изображена пунктиром.

Можно видеть, что основная энергия волны фокусируется вблизи полюсов частицы, ориентированных перпендикулярно направлению колебаний вектора \mathbf{E} , в то время как вдоль этого вектора снаружи частицы возникает область малой интенсивности и почти линейной поляризации. Близкая к линейной поляризация также имеет место вокруг частицы на расстояниях около $1.5R$, и в большей части внутренней области частицы. Однако, вдоль оси $0y$ внутри частицы и на более значительном удалении снаружи от неё проявляются и области

близкой к циркулярной поляризации. В данном сечении точки строго циркулярной поляризации в пределах области построения отсутствуют, зато присутствуют четыре точки строго линейной поляризации, отмеченные на рисунке 2.4 квадратными маркерами. С этим можно связать значительную неоднородность в распределении векторов единичных нормалей \mathbf{N}/N к плоскости эллипса поляризации, но сравнительно небольшой разброс выпрямляющей фазы. Важно отметить, что изображённые на рисунке векторы показывают лишь проекцию нормали к плоскости эллипса поляризации на плоскость рисунков $0xy$, поэтому не каждое видимое завихрение поля этих векторов соответствует L^T -точке. Значительная неоднородность данного поля вблизи точек пересечения $0x$ с поверхностью сферы обусловлена коллинеарностью векторов нормали с $0z$ и малой амплитудой поля в этой области. L^T -точки, лежащие в области малой амплитуды (вблизи $0x$) служат фокусами поля вектора нормалей, в то время как сингулярности в области большой амплитуды (вблизи $0y$) играют в этом поле роль седловых точек.

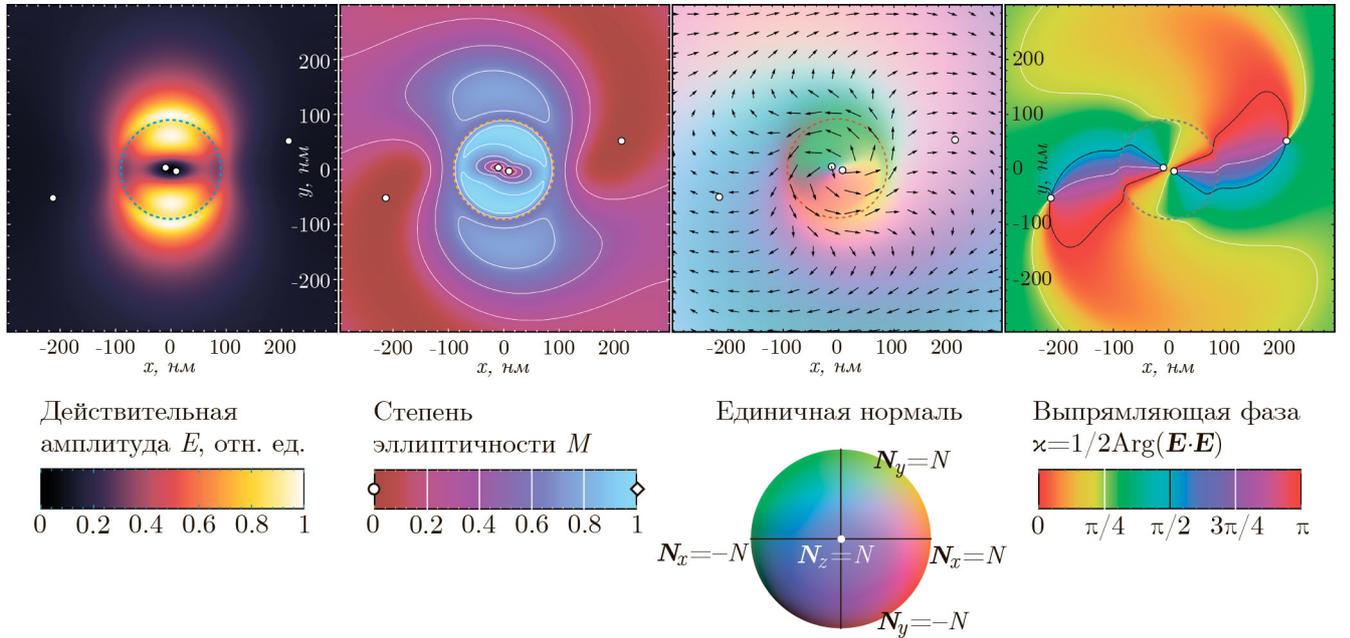


Рис. 2.5: Распределение основных характеристик излучения рассеянной волны в центральном сечении при начальном состоянии поляризации, близком к циркулярному ($M_0 = 0.8$). Частица на всех распределениях изображена пунктиром. Круглыми маркерами отмечены точки C^T -точки.

Распределения поляризационных характеристик значительно меняются при рассмотрении сильно эллиптической поляризации падающей волны (рисунок 2.5). Области, поляризация электрического поля волны, в которых поляризация близка к линейной, резко уменьшаются и остаются главным образом внутри сферы, строгие L^T -точки в центральном $0xy$ -сечении полностью исчезают, но появляются четыре отмеченных круглыми маркерами C^T -точки. Можно видеть, что поле нормалей не всегда искажается вблизи них (его завихрение в центре сферы обусловлено малой интенсивностью и неполнотой информации в проекции), но существенно искажается выпрямляющая фаза. Чёрные контуры на рисунке 2.5 показывают области чисто вещественных значений ψ , белые — чисто мнимых. C^T -точки, являю-

щиеся пересечениями этих контуров, служат центрами завихрения выпрямляющей фазы, причём направление этого завихрения, как можно видеть из рисунка 2.5, противоположно для сингулярностей, лежащих внутри и снаружи рассеивающей сферы: данные точки имеют противоположные значения топологических индексов \mathcal{I}_C .

2.2.3 Топологический каркас

Изображённые нами распределения могут дать хорошее представление о тонкой поляризационной структуре излучения в плоском срезе поля, однако изображение подобных картин на достаточном числе срезов для получения трёхмерной картины невозможно сделать наглядным. Тем более если возникает необходимость проследить их эволюцию с изменением параметра M_0 . Хорошее решение этой проблемы даёт построение топологического каркаса поля, поскольку, как было показано, линии этого каркаса ассоциированы с вихрями в распределениях нормалей к эллипсам поляризации (L^T -линии), выпрямляющей фазы и директоров полуосей данных эллипсов (C^T -линии), а также служат глобальными максимумами и минимумами в картине изоповерхностей степени эллиптичности соответственно.

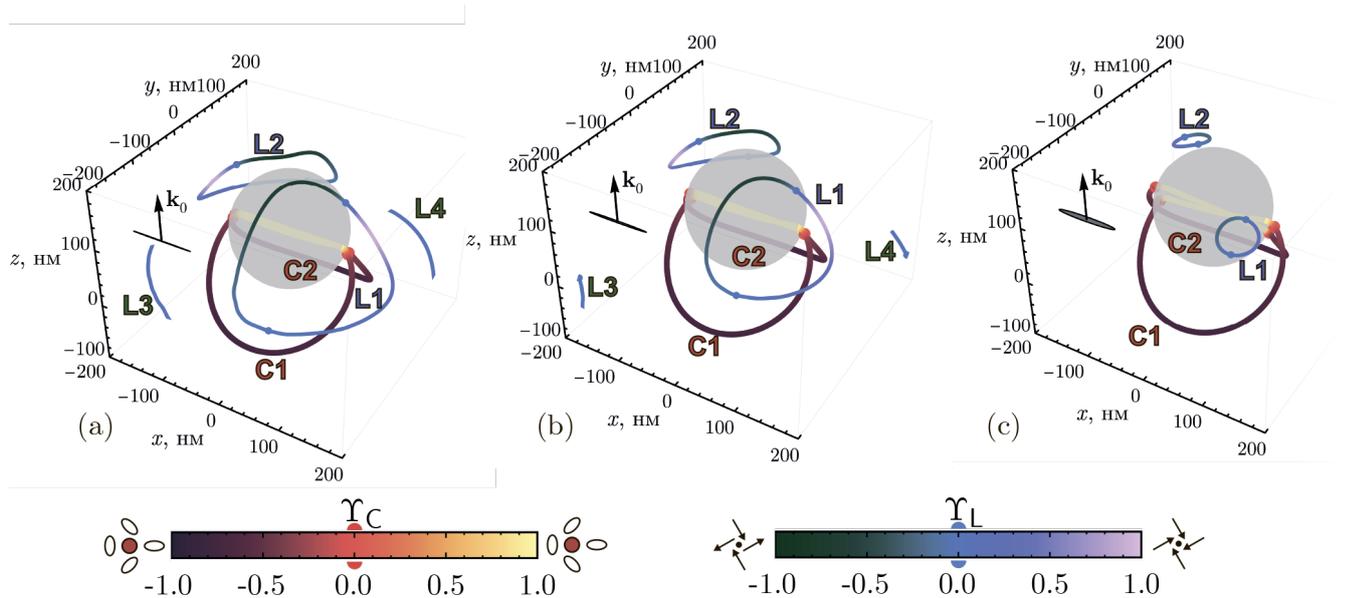


Рис. 2.6: Примеры топологических каркасов поля рассеянной диэлектрической сферой плоской монохроматической волны при малых значениях её начальной степени эллиптичности: (a) $M_0 = 0.02$, (b) $M_0 = 0.07$, (c) $M_0 = 0.2$. Более толстые линии в тёплых тонах — C^T -линии, более тонкие в холодных — L^T -линии. В углу рисунков отмечена ориентация и форма эллипса поляризации падающей волны и её волновой вектор \mathbf{k}_0 .

На рисунке 2.6а изображён топологический каркас поля рассеянной на сферической частице (изображена серым кругом) плоской волны с изначальной поляризацией, очень близкой к линейной ($M_0 = 0.02$), такой же как и на рисунке 2.4. Он состоит из двух замкнутых C^T -линий, обозначенных на рисунке C1, C2 и четырёх L^T -линий, из которых L1, L2 замыкаются в области построения, а L3, L4 выходят за её границы. Все сингулярные линии состоят из двух частей с противоположными знаками параметра изотропии и, следовательно, топологическими типами (L^T -точки фокус и седло, проявлявшие разное поведение в сечении

на рисунке 2.4). Для C^T -линий разделение на различные топологические типы практически точно совпадает с границами сферы: внутренние по отношению к частице участки C^T -линий имеют положительный топологический индекс (тип «лимон»), а внешние — отрицательный (тип «звезда»).

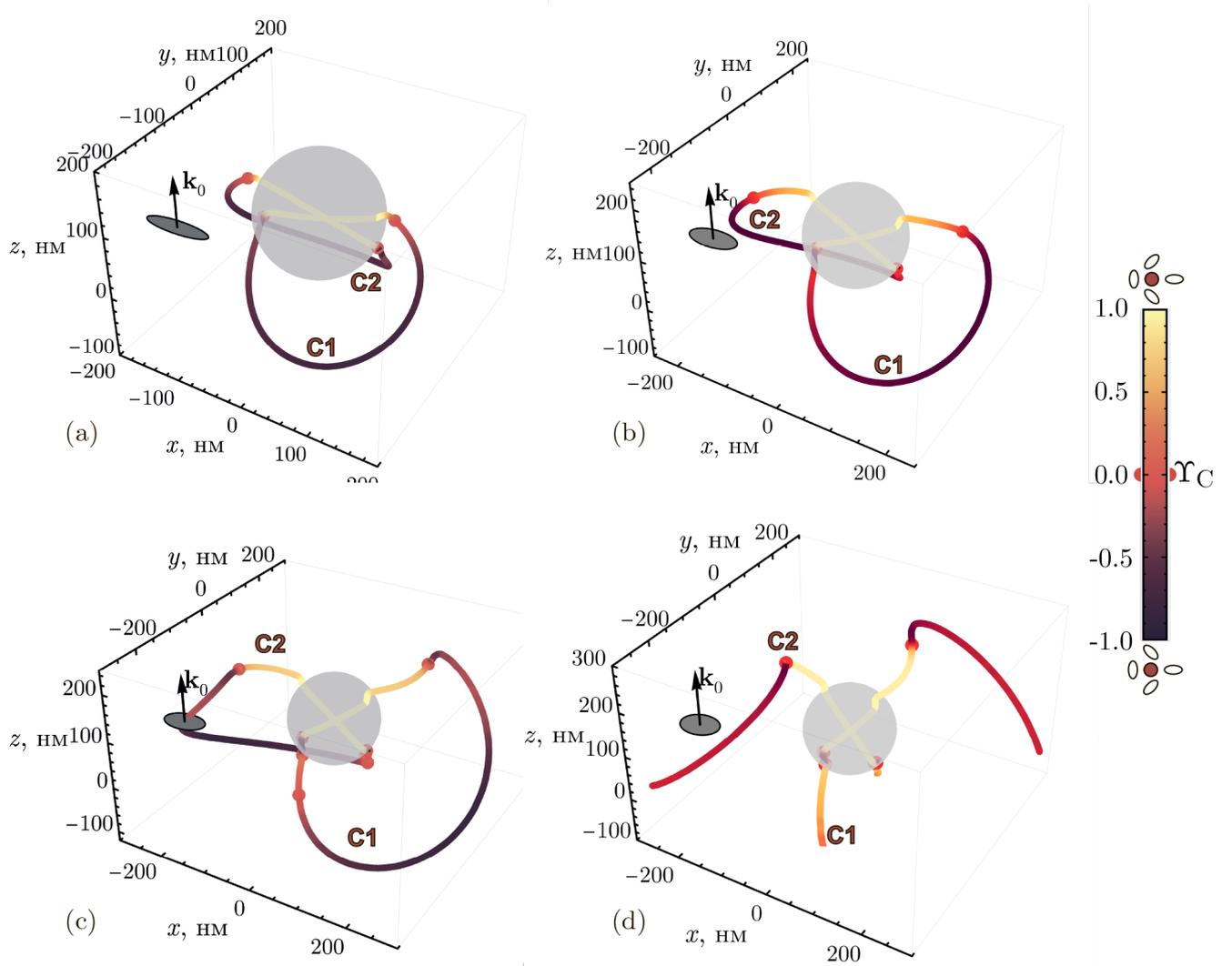


Рис. 2.7: Примеры топологических каркасов поля рассеянной диэлектрической сферой плоской монохроматической волны при средних и больших значениях её начальной степени эллиптичности: (a) $M_0 = 0.5$, (b) $M_0 = 0.8$, (c) $M_0 = 0.9$, (d) $M_0 = 0.97$. В данных конфигурациях существуют только C^T -линии. В углу рисунков отмечена ориентация и форма эллипса поляризации падающей волны и её волновой вектор \mathbf{k}_0 .

Важной особенностью линий линейной поляризации в исследуемом поле оказывается их чрезвычайная неустойчивость к увеличению M_0 . Уже при $M_0 = 0.07$ (рисунок 2.6b) можно видеть как линии L3, L4 значительно уменьшаются в размерах и при $M_0 \approx 0.08$, стягиваясь в точки, полностью исчезают. Линии L1, L2 стягиваются медленнее: на рисунке 2.6c можно видеть, что они ещё продолжают существовать, значительно уменьшившись, при $M_0 = 0.2$. При $M_0 \approx 0.22$ эти линии также полностью исчезают, стянувшись в точки. В то же время изменения формы C^T -линий в этом диапазоне эллиптичности падающего излучения минимальны.

Для $M_0 < 0.5$ C^T -линии представляют собой слабо деформированные кольца, внутренняя (относительно рассеивающей частицы) область которых сплюснута и вытянута вдоль Ox , а внешняя немного не планарна. С ростом M_0 внутренние области этих линий несколько наклоняются вблизи плоскости Oxz , однако до $M_0 \approx 0.5$ этот наклон очень слабо заметен. При бóльших значениях эллиптичности падающей волны деформация линий циркулярной поляризации ускоряется; помимо наклона внутреннего участка становится видно (рисунок 2.7) также увеличение размеров внешнего, а кроме того — отделение точки смены топологического типа от поверхности сферы. При $M_0 > 0.8$ наклон линий приводит к ориентации их внутреннего участка ближе к Oz , чем к Ox (рисунок 2.7с, d) и их дальнейшему приближению к оси пучка Oz . Симметрия строго циркулярной поляризации $M_0 = 1$ неизбежно приводит к тому, что при бóльших значениях степени начальной эллиптичности C^T -линии распрямляются и приближаются к оси пучка. Этот процесс также несколько усложняет распределение топологических типов вдоль линии: при $M_0 \approx 0.85$ на каждой линии циркулярной поляризации появляется дополнительная пара точек смены знака индекса изотропии.

2.2.4 Оптические ленты

Для построения оптических лент в данной работе мы ограничимся рассмотрением классических контуров в виде окружностей. Каждый такой контур можно задать с помощью трёх параметров: радиус-вектора \mathbf{r}_0 центральной точки, радиуса контура ρ и единичного вектора нормали к плоскости контура \mathbf{n} . Параметрически такой контур задаётся выражением

$$\mathbf{g}(s) = \mathbf{r}_0 + \rho \left[\mathbf{e} \cos \left(\frac{s}{\rho} \right) + \mathbf{e} \times \mathbf{n} \sin \left(\frac{s}{\rho} \right) \right], \quad (2.22)$$

где \mathbf{e} — произвольный единичный вектор, ортогональный \mathbf{n} , $s \in [0, 2\pi\rho)$. Выбор вектора \mathbf{e} не влияет на форму ленты.

При выполнении условия $\rho \ll \lambda$ топология ленты зависит только от вектора \mathbf{E} электромагнитного поля и его первых производных по пространственным координатам в точке \mathbf{r}_0 и может считаться локальной характеристикой этого поля. В то же время, для точного вычисления топологических характеристик ленты, величина ρ , очевидно, должна превосходить шаг h расчётной сетки. Поскольку теоремы топологии гарантируют, что для плоских контуров построения ленты её коэффициент перекручивания \mathcal{T}_W принимает целые, либо полуцелые значения, требования к точности вычисления интеграла (2.15) не превышают ± 0.25 , что позволяет рассматривать контуры, размеры которых незначительно превосходят h . В случае рассматриваемой задачи $h = 4$ нм, а радиус рассматриваемых контуров $\rho = 10$ нм везде, где не указано обратное. Описанные в секции 2.1.3 топологические характеристики τ_F , \mathcal{T}_W , \mathcal{N} и \mathcal{L}_e для лент, построенных на контурах в виде окружностей, тождественны. В данном исследовании мы будем обозначать их \mathcal{T}_W , поскольку определение интеграла (2.15) наименее вычислительно затратно.

Наше исследование показало, что непараксиальное электрическое поле света, рассеянного диэлектрической сферой, содержит ленты с различными значениями \mathcal{T}_W . Ленты векторов \mathbf{N} , $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ и $\overleftrightarrow{\mathbf{B}}$, построенные вдоль плоских контуров малых размеров, которые не охватывают линии сингулярности поляризации, почти всегда являются тривиальными ($\mathcal{T}_W = 0$). Исключение

составляют случаи, когда отслеживаемый вдоль контура вектор практически параллелен касательной к контуру в некоторой его точке. На рис. 2.8a и 2.8c красным цветом (толстые линии) изображены C^T , а синим цветом (тонкие линии) — L^T -линии, находящиеся вблизи поверхности сферы при падении на нее слабо эллиптически поляризованной волны ($M_0 = 0.1$). Типичный пример ленты, образованной движением вектора \mathbf{N}_\perp , показан на рис. 2.8a. Её края обозначены розовым и зеленым цветами. На рис. 2.8b эта лента изображена крупным планом. Чтобы обеспечить наглядность на фоне сферы для построения ленты был выбран контур радиусом $\rho = 30$ нм. При уменьшении ρ производная $d\mathbf{N}_\perp/ds$ в подынтегральном выражении (2.15) стремится к нулю, и для окружности достаточно малого радиуса ρ данный интеграл неминуемо обращается в нуль.

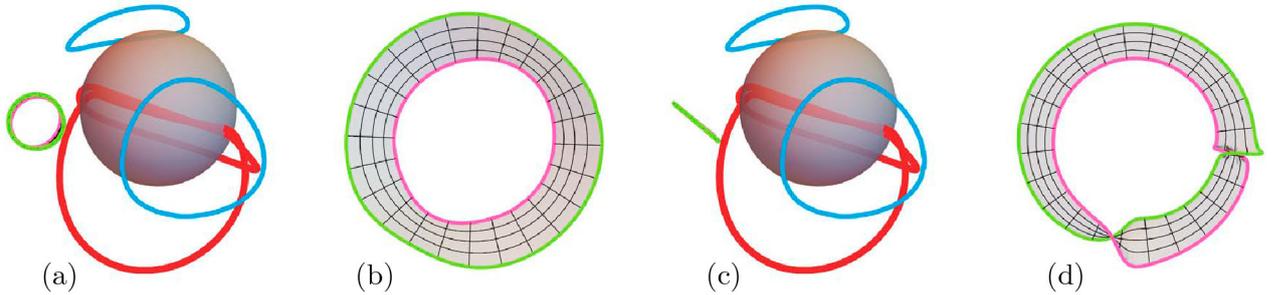


Рис. 2.8: Лента, заметаемая вектором \mathbf{N}_\perp , целиком лежащая в регулярной области электрического поля, вблизи наночастицы (a) и крупным планом (b) в случае регулярной структуры ($\mathcal{J}_W = 0$) и с одним перекручиванием (c, d) ($\mathcal{J}_W = 1$). Степень эллиптичности падающей волны $M_0 = 0.1$.

В отдельных случаях лента, построенная вдоль малого замкнутого контура, не охватывающего линию сингулярности поляризации, может быть нетривиальной (2.8c и 2.8d). В малой окрестности регулярной точки светового поля векторы \mathbf{N} , $\vec{\mathbf{A}}$ и $\vec{\mathbf{B}}$ практически не меняют свою ориентацию, и если нормаль к контуру обхода перпендикулярна к направлению одного из этих векторов в точке \mathbf{r}_0 , на контуре будут существовать по крайней мере две точки, в которых упомянутый вектор будет практически коллинеарен касательной к контуру. В этом случае топология соответствующей ленты будет определяться поведением первых пространственных производных этого вектора, которые описывают его отклонение от направления в \mathbf{r}_0 . Даже вблизи регулярной точки распределение этих малых компонент, как правило, сингулярно [73], в результате чего коэффициент перекручивания рассматриваемой ленты может быть отличным от нуля. Нам удалось обнаружить в ближнем поле наночастицы ленты с коэффициентом перекручивания $\mathcal{J}_W = \pm 1$, не охватывающие линии сингулярности поляризации. В качестве примера на рис. 2.8c изображена целиком лежащая в регулярной области поля лента заметаемая вектором \mathbf{N} при его движении по окружности, нормаль к плоскости которой перпендикулярна направлению \mathbf{N} в центре окружности. На рис. 2.8d эта лента изображена крупным планом. Если отслеживаемый вектор в какой-то точке контура строго коллинеарен касательной к нему, коэффициент перекручивания ленты не может быть определён. Однако такая ситуация исчезает при произвольно малом смещении или наклоне контура обхода или возмущении электрического поля.

Для оценки частоты встречаемости нетривиальных лент в регулярных областях светово-

го поля мы построили и проанализированы 2916 лент, заметаемых векторами \mathbf{N} , $\vec{\vec{\mathbf{A}}}$ и $\vec{\vec{\mathbf{B}}}$ при движении по окружностям радиусом $\rho = 10$ нм в малой окрестности 27 случайным образом выбранных точек, находящихся как внутри, так и вне наночастицы на расстоянии порядка нескольких ρ от ближайшей линии сингулярности поляризации. Строились три группы лент, заметаемых соответственно векторами \mathbf{N} , $\vec{\vec{\mathbf{A}}}$ и $\vec{\vec{\mathbf{B}}}$, при движении каждого из них по 36 различно ориентированным в пространстве контурам. Направление нормали к плоскости этих контуров менялось в одной плоскости с шагом 5° . В результате только у 184 лент, контуры которых были практически компланарны с отслеживаемым вектором, коэффициент перекручивания был отличен от нуля, при этом положительные и отрицательные значения коэффициента \mathcal{J}_W встречались приблизительно в равной пропорции.

Анализ результатов численного моделирования подтвердил, что как и в работах [136; 152; 158], рассматривающих специально спроектированные лазерные поля, в задаче рассеяния плоской электромагнитной волны на наноразмерной диэлектрической частице ленты директоров осей эллипса поляризации $\vec{\vec{\mathbf{A}}}$ и $\vec{\vec{\mathbf{B}}}$, построенные вдоль малых контуров, охватывающих C^T -линии, являются нетривиальными. В случаях, когда центральная точка \mathbf{r}_0 контура построения ленты соответствует строго круговой поляризации, распределение директоров $\vec{\vec{\mathbf{A}}}$ и $\vec{\vec{\mathbf{B}}}$ вблизи неё не имеет преимущественного направления, поскольку в самой точке \mathbf{r}_0 эти директоры не определены. В результате, заметаемая ими лента оказывается не только нетривиальной ($\mathcal{J}_W \neq 0$), но и неориентируемой ($\mathcal{J}_W \notin \mathbb{Z}$).

Мы рассмотрели конфигурации поля вблизи наночастицы для широкого диапазона значений степени эллиптичности M_0 падающей на частицу плоской волны. При фиксированном M_0 на каждой из двух существующих вблизи диэлектрической сферы C^T -линий сингулярности поляризации электрического поля выбиралось 100 равномерно расположенных на ней точек, вокруг которых строились ленты, заметаемые директорами $\vec{\vec{\mathbf{A}}}$ и $\vec{\vec{\mathbf{B}}}$. Для построения лент использовались контуры, плоскости которых были локально ортогональны к рассматриваемой C^T -линии: $\mathbf{n} = \mathbf{\Omega}_C(\mathbf{r}_0)$. Также анализировалась топология лент, заметаемых векторами \mathbf{N} . Практически все ленты вектора \mathbf{N} оказались тривиальными, поскольку C^T -точки не являются топологическими особенностями для распределения этих векторов. Исключение составили те контуры, плоскость которых практически совпадала с направлением вектора \mathbf{N} вблизи \mathbf{r}_0 . В данном отношении картина распределения топологических типов лент вектора нормали к плоскости эллипса поляризации полностью тождественна наблюдаемой в регулярной области поля.

В то же время, ленты, заметаемые директорами $\vec{\vec{\mathbf{A}}}$ и $\vec{\vec{\mathbf{B}}}$, обладали коэффициентом перекручивания $\mathcal{J}_W = \pm 1/2$. Исключением являлись ленты, построенные вокруг точек, около которых происходит максимальное сближение двух C^T -линий, и контур, используемый для построения ленты, охватывает сразу обе линии сингулярности поляризации. В этом случае наблюдались ленты с коэффициентом перекручивания $\mathcal{J}_W = -1$. Ленты с полуцелым коэффициентом перекручивания топологически являются лентами Мёбиуса. При этом наблюдались ленты с полуоборотом как в положительном ($\mathcal{J}_W = +1/2$), так и в отрицательном ($\mathcal{J}_W = -1/2$) направлениях по мере обхода охватывающего C^T -линию контура в положительном направлении. Знаки коэффициентов перекручивания лент $\vec{\vec{\mathbf{A}}}$ и $\vec{\vec{\mathbf{B}}}$, построенных на одних и тех же контурах, были преимущественно противоположны. При этом отсутствовала види-

мая связь между знаками коэффициентов перекручивания оптических лент и значениями индексов изотропии в соответствующей области C^T -линии, что соответствует предсказаниям работы [50], указывающей на ключевую роль малой компоненты директоров \vec{A} , \vec{B} , ортогональной к плоскости Π_C в определении числа и направления перекручиваний оптической ленты Мёбиуса. Эта компонента никак не учитывается при вычислении параметров изотропии Υ_C . На рис. 2.9 и 2.10 показаны распределения значений коэффициентов перекручивания у лент векторов \vec{A} , \vec{B} и \mathbf{N} , построенных вокруг изображенных C^T -линий в их различных точках.

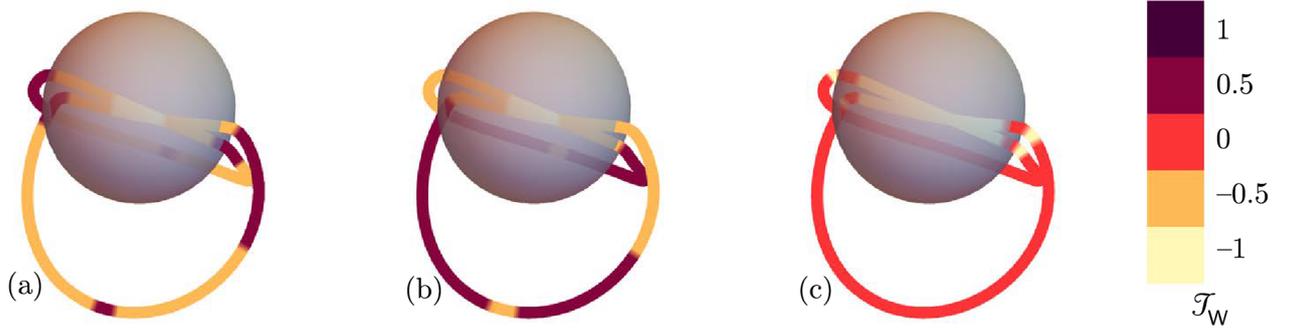


Рис. 2.9: Величина коэффициентов зацепления охватывающих C^T -линии лент векторов \vec{A} (a), \vec{B} (b) и \mathbf{N} (c) при падении на сферу волны со степенью эллиптичности $M = 0.25$.

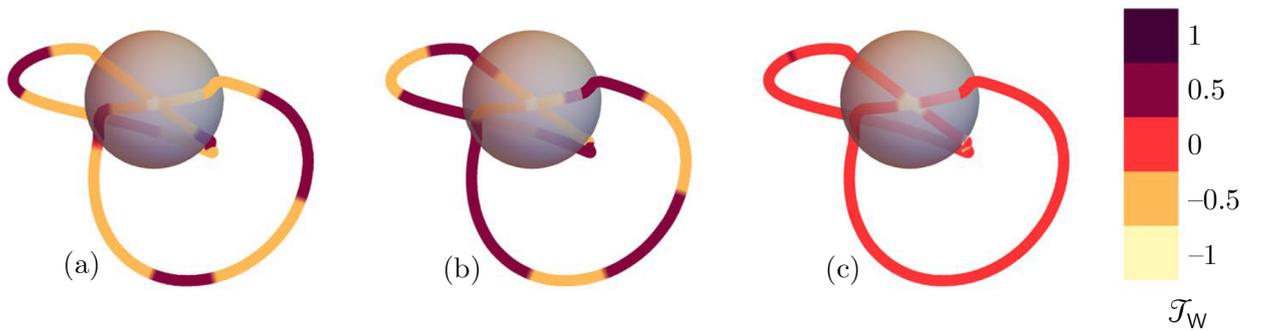


Рис. 2.10: Величина коэффициентов зацепления охватывающих C^T -линии лент векторов \vec{A} (a), \vec{B} (b) и \mathbf{N} (c) при падении на сферу волны со степенью эллиптичности $M = 0.75$.

Аналогичным образом в работе исследовались ленты, заметаемые векторами \vec{A} , \vec{B} и \mathbf{N} вдоль контуров, охватывающих линии сингулярности линейной поляризации. Для построения лент использовались плоские контуры в форме окружностей малого радиуса, локально ортогональные к L^T -линии: $\mathbf{n} = \vec{\Omega}_L$. Почти все построенные ленты оказались тривиальными ($\mathcal{T}_W = 0$). Исключение составляют ленты, построенные вблизи точек смены знака параметра изотропии Υ_L . Эти ленты имеют коэффициент зацепления $\mathcal{T}_W = \pm 1$, то есть перекручены на один полный оборот по часовой или против часовой стрелки, и, в отличие от лент Мёбиуса, являются ориентируемыми. Изменение наклона контура построения лент в данной области позволяет установить, что особые свойства этих лент обусловлены не спецификой распреде-

ления эллипсов поляризации вблизи рассматриваемых точек линии, а ориентацией контура построения ленты. Причина их нетривиальной топологии заключается в том, что вблизи точек смены знака параметра изотропии контур, плоскость которого ортогональна L^T -линии, становится практически компланарен с вектором \mathbf{N} , заметающим ленту, так как для этого случая $\mathbf{N} \perp \vec{\Omega}_L$. Такие нетривиальные ленты аналогичны тем, которые наблюдались и в регулярной области поля в случае специальным образом выбранных контуров. На рис. 2.11 показано изменение значений коэффициентов зацепления у лент векторов $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{B}}$ и \mathbf{N} , построенных вокруг L^T -линий в её различных точках. Следует отметить, что не наблюдается топологически нетривиальных особенностей в распределении лент директоров в том числе малых осей эллипса поляризации вблизи L^T -линий, несмотря на то, что в отличие от $\vec{\mathbf{A}}$, поле директоров $\vec{\mathbf{B}}$ не определено в точках линейной поляризации.

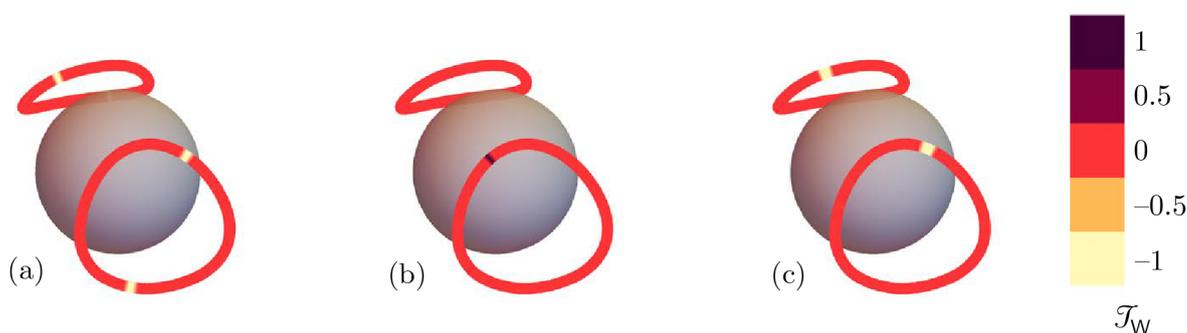


Рис. 2.11: Распределения вдоль линий сингулярности поляризации коэффициентов зацепления охватывающих L^T -линии лент векторов $\vec{\mathbf{A}}$ (a), $\vec{\mathbf{B}}$ (b) и \mathbf{N} (c) при падении на сферу волны со степенью эллиптичности $M_0 = 0.1$.

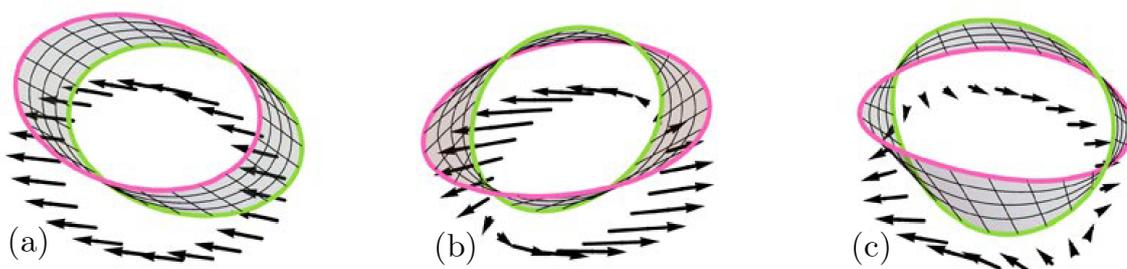


Рис. 2.12: Ленты, заметаемые вектором нормали \mathbf{N} к эллипсу поляризации и составляющие образующих их векторов в плоскости контура вблизи точки, в которой отсутствуют сингулярности электрического поля (a), вблизи точек L^T -линий с положительным (b) и отрицательным (c) индексом изотропии.

Несмотря на тривиальность топологии, ленты векторов $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{B}}$ и \mathbf{N} имеют свою специфику. Покажем её на примере образованных вектором \mathbf{N} лент, построенных в различных точках пространства и изображённых на рис. 2.12. На нём чёрными стрелками показаны распределения проекций рассматриваемого вектора на плоскость контура. Лента на рис. 2.12a построена в области пространства, где сингулярности поляризации отсутствуют, а две другие

ленты окружают точки L^T -линии с положительным (рис. 2.12b) и отрицательным (рис. 2.12c) значениями параметра изотропии. Несмотря на то, что все три ленты являются топологически тривиальными (могут быть получены непрерывной деформацией обычного кольца), и их края не зацеплены друг с другом, распределения лежащих в плоскости контура, вдоль которого строилась лента, составляющих векторов \mathbf{N} существенно различаются. Вблизи точки пространства, где электрическое поле не имеет сингулярностей поляризации, все векторы направлены практически в одну сторону (рис. 2.12a). Около точек сингулярностей поляризации такие распределения имеют структуру вихря (рис. 2.12b) или седловой точки (2.12c) в зависимости от знака параметра изотропии охваченной лентой точки сингулярности, что, однако, не меняет топологии поверхности ленты.

§ 2.3 Топологические особенности светового поля, рассеянного золотым эллипсоидом

В работе [35] было показано, что поляризация изначально монохроматического плоского однородно поляризованного излучения после его рассеяния сфероидальной золотой частицей имеет весьма сложную пространственную структуру, существенно зависящую от геометрических параметров как частицы, так и эллипса поляризации, и приведены аналитические выражения, позволяющие рассчитать вектор комплексной амплитуды такого поля рассеяния в любой точке вблизи частицы. На основании этих результатов нами был проведён детальный анализ топологических особенностей распределения поляризации этого поля, включая топологический каркас, распределения индексов изотропии, статистику оптических лент и топологию зацепления сингулярных линий, приводимый в этой секции.

2.3.1 Постановка задачи

Поместим центр сфероида (вытянутого эллипсоида вращения) в начало лабораторной системы координат xyz и направим орт \mathbf{e}_z вдоль его большой оси. Из-за симметрии задачи можно без ограничения общности считать, что волновой вектор \mathbf{k} падающей монохроматической волны с частотой ω лежит в плоскости $0xz$. Пусть угол между \mathbf{k} и ортом \mathbf{e}_x равен θ , а большая полуось эллипса поляризации (со степенью эллиптичности M_0) падающего поля составляет с ортом \mathbf{e}_z угол Ψ при $\theta = 0$ (см. рис. 2.13). Вектор комплексной амплитуды падающего поля \mathbf{E}_0 связан с параметрами Ψ , θ и M_0 следующим образом:

$$\mathbf{E}_0 = E_0 \{ \mu_+ (\mathbf{e}_z \cos \theta + \mathbf{e}_x \sin \theta) + i \mu_- \mathbf{e}_y \}, \quad (2.23)$$

где

$$\mu_{\pm} = 0.5 \left[(1 - M_0)^{1/2} \exp(-i\Psi) \pm (1 + M_0)^{1/2} \exp(i\Psi) \right], \quad (2.24)$$

E_0 — амплитуда падающего поля. При определённых соотношениях между длиной волны падающего излучения и размерами наносфероида в последнем возможно возбуждение плазмонного резонанса, вследствие чего электромагнитное поле вблизи частицы существенно искажается. Полученные в [35] условия возбуждения резонанса и аналитические выражения

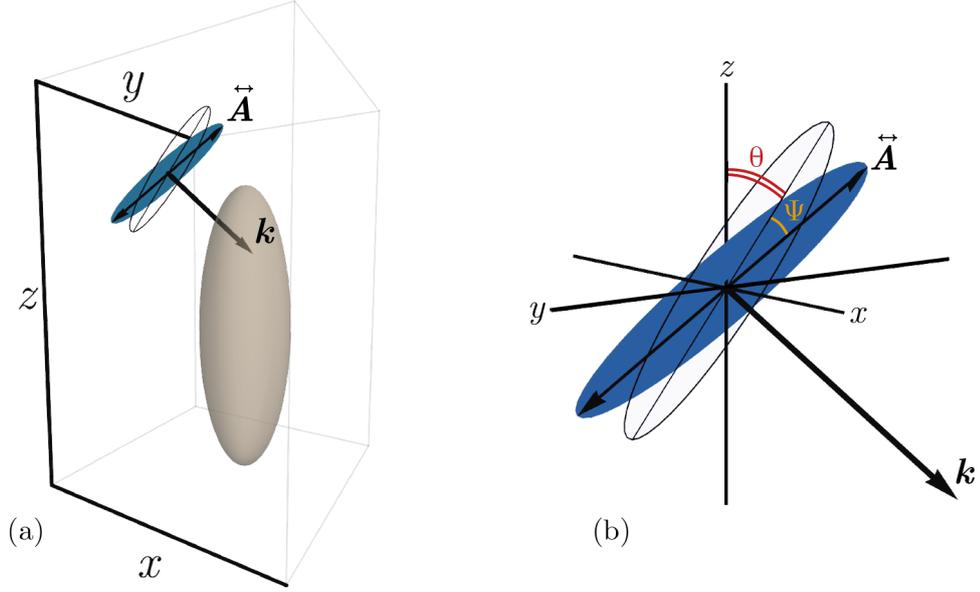


Рис. 2.13: а: Форма золотой частицы и геометрия падения волны на неё. б: Углы, определяющие ориентацию эллипса поляризации падающей волны. Эллипс поляризации изображён синим цветом. Для получения финального эллипса поляризации, эллипс ориентированный в плоскости $0zy$ так, что его большая ось параллельна $0z$, необходимо сперва повернуть вокруг оси $0z$ на угол Ψ , получив промежуточный эллипс (изображён чёрным контуром), а затем — вокруг оси $0y$ на угол θ .

для ближнего поля удобно переписать с использованием сфероидальной системы координат $\xi\eta\varphi$, связанной с декартовыми координатами соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= f\sqrt{(1-\eta^2)(\xi^2-1)}\cos\varphi; \\ y &= f\sqrt{(1-\eta^2)(\xi^2-1)}\sin\varphi; \\ z &= f\xi\eta, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где $2f = 60$ нм — расстояние между фокусами сфероида. Поверхности постоянного значения ξ являются сфероидами, в частности, поверхность наночастицы задаётся условием $\xi = \xi_0 > 1$. При фиксированном ξ положение точки на сфероидальной поверхности определяется параметром широты $\eta \in [-1; 1]$ и долготой $\varphi \in [0; 2\pi]$, причем $\eta = \pm 1$ соответствует полюсам сфероидальной поверхности, а $\eta = 0$ — её экватору. В такой системе координат комплексная амплитуда электрического поля вблизи наносфероида может быть представлена в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + f(\mathbf{E}_0 \cdot \nabla) (\mathbf{e}_z \vartheta_{10}(\xi, \eta) + (\mathbf{e}_x \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \varphi) \vartheta_{11}(\xi, \eta)), \quad (2.26)$$

где функции

$$\vartheta_{nm}(\xi, \eta) = \frac{(\tilde{\varepsilon} - 1)P_n^{(m)}(\xi_0)}{(\tilde{\varepsilon}_{nm} - \tilde{\varepsilon})Q_n^{(m)}(\xi_0)} P_n^{(m)}(\eta) Q_n^{(m)}(\xi). \quad (2.27)$$

В (2.27) $P_n^{(m)}$ и $Q_n^{(m)}$ — присоединенные функции Лежандра первого и второго рода, $\tilde{\varepsilon}$ — комплексная диэлектрическая проницаемость золота на частоте ω , а $\tilde{\varepsilon}_{nm}$ — собственные значения мод плазмонных колебаний (подробнее см. в [35]). Поскольку длина падающей волны

$\lambda = 600 \text{ нм} \gg f$, формула (2.26) выведена в квазистатическом приближении, которое пренебрегает изменением фазы падающего поля на масштабах порядка размера наносфероида.

2.3.2 Топологический каркас

Классификацию найденных вблизи наносфероида C^T -линий и L^T -линий мы начнем с рассмотрения случая, когда падающая волна эллиптически поляризована, вектор напряжённости электрического поля не имеет y -составляющей ($\Psi = 0$) и падает на наносфероид под некоторым углом $\theta > 0$. В случае линейной поляризации ($M_0 = 0$) возле полюсов наносфероида существуют две несцепленные кольцеобразные C^T -линии ($C1, C2$), в каждой точке которых топологический индекс $\mathcal{G}_C = -1/2$, а значение параметра Υ_C очень близко к -1 . Поле вблизи наносфероида также содержит две несцепленных между собой линии сингулярности линейной поляризации ($L1, L2$), которые проходят сквозь искривлённые C^T -линии и лежат в плоскости xz . L^T -линии касаются поверхности наносфероида вблизи полюсов и имеют вблизи него отрицательный топологический индекс $\mathcal{G}_L = -1$, причем параметр Υ_L близок к -1 . По мере удаления от поверхности сфероида, Υ_L возрастает и меняется практически до 1, поэтому каждая L^T -линия имеет участок с положительным значением топологического индекса $\mathcal{G}_L = 1$ и две точки смены знака топологического индекса.

При малых значениях эллиптичности M_0 падающей волны линии $L1, L2$ имеют существенные размеры и форму, близкую к окружностям (рисунок 2.14а) большого в сравнении с f радиуса. С увеличением M_0 они быстро деформируются, меняя направление изгиба, и соединяются друг с другом, образуя единую линию $L1$, существующую практически при любых других значениях параметров падающей волны (рисунок 2.14б). Для случая $\Psi = 0$ линия $L1$ лежит в плоскости $0yz$, однако даже незначительный поворот большой оси эллипса приводит к выходу $L1$ из этой плоскости и значительной деформации (рисунок 2.14с). Поскольку при малых значениях M_0 в поле преобладают области с поляризацией, близкой к линейной, L^T -линии оказываются очень чувствительными к малым изменениям параметров падающей волны, что усложняет точное определение их формы. Форма L^T -линии, наблюдаемая на рисунке (рисунок 2.14с) более устойчива, чем наблюдающаяся при $\Psi = 0$: в довольно широком диапазоне параметров поля геометрия L^T -линии состоит из трёх участков: двух внешних по отношению к сфероиду петель, практически лежащих в плоскости $0xy$, и внутренних, соединяющих их участков, проходящих между осью $0z$ и поверхностью сфероида. Важно отметить, что как в конфигурации с двумя L^T -линиями, так и в конфигурации с одной L^T -линией эти линии линейной поляризации оказываются сцеплены с C^T -линиями, причём дважды: либо образуя две пары «двузвенных цепей»: $C1$ сцеплена с $L1$, $C2$ — с $L2$ (рисунок 2.14а), либо одну «трёхзвенную»: $L1$ сцеплена с обеими C^T -линиями.

Некоторая особенность топологического каркаса возникает при нормальном падении ($\theta = 0$) линейно поляризованной волны, когда её волновой вектор \mathbf{k} направлен вдоль оси $0x$, а вектор напряжённости электрического поля \mathbf{E} колеблется в направлении параллельном большой оси наносфероида, совпадающей с осью $0z$. В этом случае C^T -линии принимают форму окружностей. Их центры находятся на оси $0z$, а плоскости, в которых они лежат, перпендикулярны большой оси наносфероида. L^T -линия в этом случае совпадает с осью $0z$ и проходит

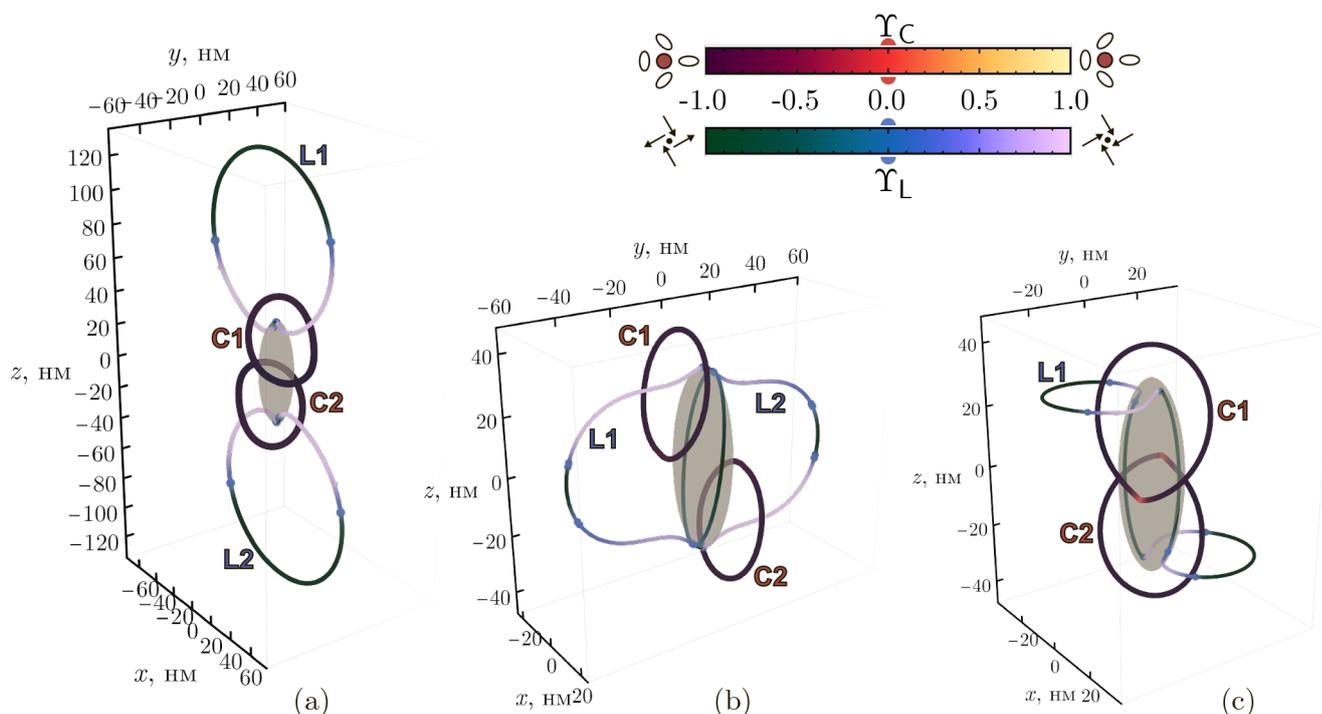


Рис. 2.14: Топологический каркас поля, рассеянного золотым сфероидом для различных параметров падающей волны. а: $M_0 = 0$; $\Psi = 0^\circ$; $\theta = 10^\circ$; б: $M_0 = 0.2$; $\Psi = 10^\circ$; $\theta = 0^\circ$; в: $M_0 = 0.2$; $\Psi = 10^\circ$; $\theta = 10^\circ$. C^T -линии показаны в жёлто-красно-фиолетовых цветах, L^T -линии — в фиолетово-сине-зелёных. Цвета отражают значения коэффициентов изотропии в разных точках линии. Рассеивающая частица показана полупрозрачным серым.

сквозь две C^T -линии. При этом поле в любой точке экваториальной плоскости $z = 0$ наносфероида становится линейно поляризованным. Однако такая конфигурация электрического поля оказывается неустойчивой и разрушается при произвольно малых отклонениях угла падения от нуля. В связи с этим далее мы будем считать $\theta > 0$.

С увеличением угла падения кольцеобразные, слегка деформированные и почти плоские C^T -линии наклоняются к экваториальной плоскости наносфероида. Этот процесс происходит неравномерно. Уже при $\theta = 10^\circ$ C^T -линии отклоняются более чем на 45° от своего первоначального положения. Уменьшаясь в размерах, они стремительно приближаются к поверхности наносфероида при дальнейшем увеличении угла θ . Увеличение обоих углов θ, Ψ также приводит к приближению C^T -линий к поверхности сфероида. В точках касания рассеивающей частицы на C^T -линиях образуется касп — заострение, вблизи которого индекс изотропии линии приближается к нулевому значению. Ранний этап формирования этой точки хорошо видно на рисунке 2.14с; на всех фигурах рисунка 2.15 C^T -линия уже частично лежит внутри сфероида, и в этой области имеет ярко выраженный полностью сформированный касп, в котором обращается в ноль индекс изотропии.

Изменение степени эллиптичности падающей на наносфероид электромагнитной волны серьёзно сказывается на геометрии L^T -линий. При увеличении M_0 две петли L^T -линий (рис. 2.15а) могут перестать пересекать поверхность наносфероида, образуя более гладкую, чем в случае малой начальной эллиптичности, замкнутую кривую, аналогичную показанной на

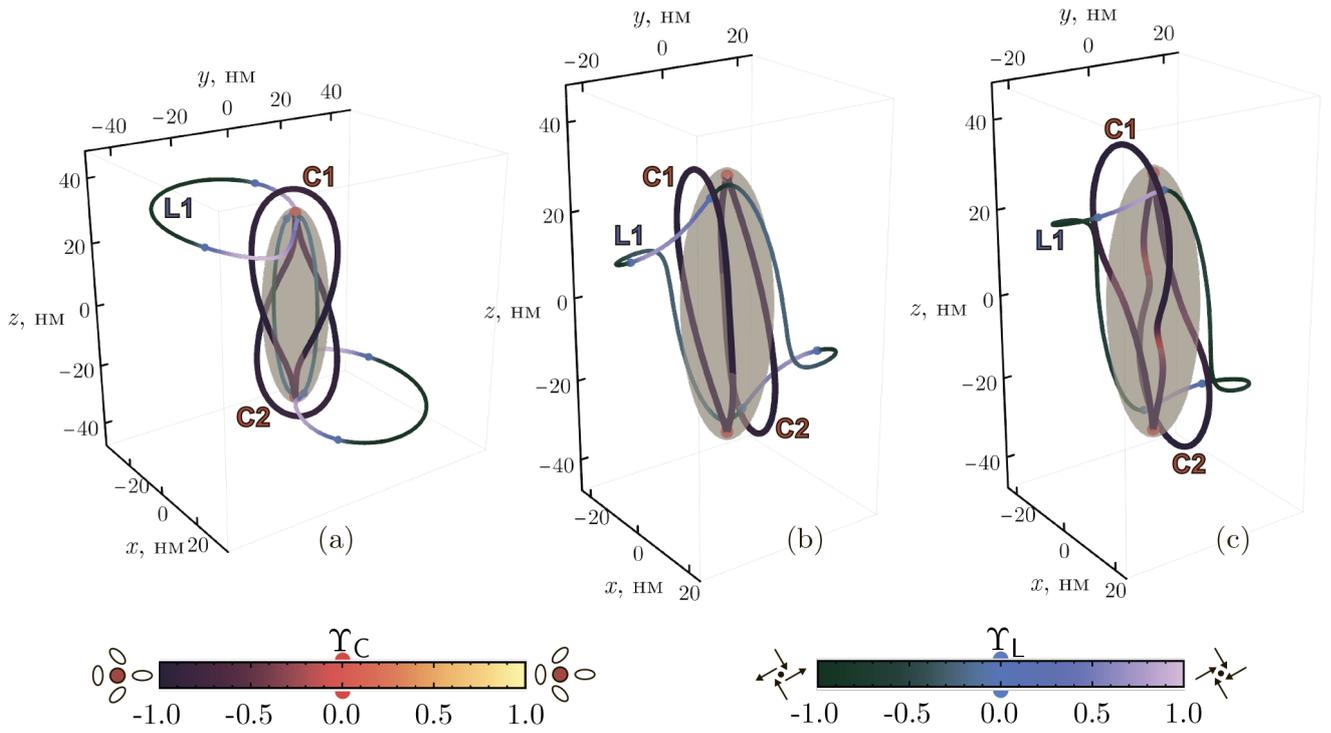


Рис. 2.15: Топологический каркас поля, рассеянного золотым сфероидом для различных параметров падающей волны. а: $M_0 = 0.1; \theta = 20^\circ; \Psi = 20^\circ$; б: $M_0 = 0.5; \theta = 10^\circ; \Psi = 10^\circ$; в: $M_0 = 0.8; \theta = 30^\circ; \Psi = 10^\circ$. C^Γ -линии показаны в жёлто-красно-фиолетовых цветах, L^Γ -линии — в фиолетово-сине-зелёных. Цвета отражают значения коэффициентов изотропии в разных точках линии. Рассеивающая частица показана полупрозрачным серым.

рис. 2.15b,c. Поворот эллипса поляризации падающей волны вокруг её волнового вектора (изменение угла Ψ) меняет вид как L^Γ -линий, так и C^Γ -линий связанным образом: если мысленно построить поверхность минимальной площади, ограниченную C^Γ -линиями, можно заметить, что вблизи области её пересечения с L^Γ -линиями последние почти всегда сохраняют направление, близкое к нормали к этой поверхности.

Значения параметра изотропии Υ_C остаются в основном отрицательными на C^Γ -линиях, исключая непосредственную окрестность каспа. Параметр изотропии Υ_L может изменяться по-разному вдоль L^Γ -линий. Существуют конфигурации ближнего поля, в которых участки L^Γ -линий с положительным и отрицательным Υ_L имеют примерно равные длины (рис. 2.14, 2.15a). В в других конфигурациях Υ_L принимает преимущественно отрицательные значения (рис. 2.15b, c).

При сравнительно больших значениях параметров M_0, θ, Ψ L^Γ -линия в топологическом каркасе поля рассеяния уменьшается в размерах и оказывается практически целиком лежащей вблизи поверхности наносфероида, но ни при одном рассмотренном сочетании этих параметров не исчезает полностью. Это поведение существенно контрастирует с наблюдавшимся в разделе 2.2.3 для рассеяния плоской электромагнитной волны на диэлектрической частице. В этой задаче L^Γ -линии L1 и L2 обнаруживались только при состоянии поляризации падающей волны, близком к линейному ($M_0 < 0.22$), а при увеличении параметра M_0 непрерывно стягивались в точки и исчезали. Такого рода непрерывная деформация невоз-

можно для топологического каркаса поля рассеяния на золотой частице, поскольку сквозь каждую L^Γ -линию проходит нетривиально сцепленная с ней C^Γ -линия, пересечение которых возможно только при строго нулевом значении амплитуды электрического поля. Точки нулевой амплитуды в векторном волновом поле имеют коразмерность 6 [18] и крайне редко возникают в полях общего типа. Таким образом зацепление сингулярных линий разного класса гарантирует стабильность как L^Γ -, так и C^Γ -линий, принимающих в нём участие.

2.3.3 Оптические ленты

Наличие аналитического решения для рассматриваемого поля делает его удобным для исследования оптических лент, обычно требовательного к разрешению модели, в особенности в случае сложных контуров построения. В то же время, сложная структура поляризации, содержащая сингулярности обоих классов с нетривиальной топологией взаимного зацепления, нетипичная для аналитически разрешимых задач, позволяет наблюдать нетривиальные оптические ленты с большим числом перекручиваний.

Нами была поставлена задача обобщения существующего подхода к описанию оптических лент, построенных на контурах в виде окружностей и эллипсов, на случай произвольных пространственных кривых и определения характеристики, поведение которой для таких лент наиболее близко аналогично числу перекручиваний τ_F для плоских контуров. В подсекции 2.1.2 было показано, что основными кандидатами на эту роль являются коэффициент перекручивания \mathcal{T}_W , индекс внутреннего перекручивания \mathcal{N} и индекс зацепления краёв \mathcal{L}_e , тождественные друг другу и величине τ_F в случае планарных контуров построения. При этом только два последних принимают дискретные значения, в связи с чем могут рассматриваться как полноправные топологические индексы. Эти два индекса связаны теоремой Кэлулгэряню (2.19), поэтому для различения их поведения необходимо рассматривать ленты, построенные на контурах, содержащих выраженные петли (ненулевой коэффициент W).

В качестве таких контуров $\mathbf{g}(t)$, $t \in [0; 1]$ будут использоваться кривые, параметрически задаваемые вектор-функцией

$$\mathbf{g}_w(t) = \rho \{ [1 + a \sin(2\pi t)] [\mathbf{e}_p \cos(2\pi(|w| + 1)t) + \mathbf{e}_q \sin(2\pi(|w| + 1)t)] + h \operatorname{sgn}(w) \mathbf{n} \cos(2\pi t) \}. \quad (2.28)$$

Здесь параметры ρ и a могут рассматриваться как «усреднённый радиус» кривой и «относительная амплитуда» его изменения (наличие a в (2.28) необходимо для избежания самопересечений линии). Единичные векторы \mathbf{e}_p , \mathbf{e}_q и $\mathbf{n} = \mathbf{e}_p \times \mathbf{e}_q$ определяют направления осей системы координат pqn , причём \mathbf{n} задаёт усреднённое направление бинормали к контуру. Параметр h равен максимальному отклонению точек кривой от плоскости $0pq$, а индекс w , принимающий целочисленные значения, совпадает с числом петель линии, получающейся при проецировании определяемой функцией $\mathbf{g}_w(t)$ кривой на плоскость $0pq$. При $h = a = 0$ кривая, определяемая функцией $\mathbf{g}_0(t)$ превращается в лежащую в плоскости $0pq$ окружность радиусом ρ с центром в начале координат. Трёхмерные изображения соответствующих значений $w \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$ кривых, построенных при $\rho = 1$, $a = h = |w|/5$, приведены на рис. 2.16.

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением «почти плоских» контуров построения ($h, a \ll 1$) для минимизации влияния нецелочисленного коэффициента полного геометрического кручения \mathcal{T} и сосредоточимся на различии между значениями индекса внутреннего перекручивания \mathcal{N} и индекса зацепления краев ленты \mathcal{L}_e .

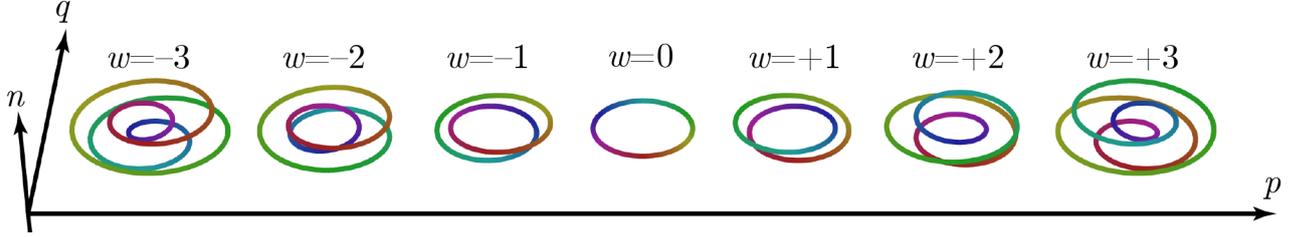


Рис. 2.16: Примеры контуров построения лент \mathbf{g}_w при $\rho = 1$, $a = h = |w|/5$ и $w \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$.

Поскольку векторы \mathbf{N} нормали к плоскости эллипса поляризации имеют точно определённое направление, разнообразие их возможной топологии меньше, чем для директоров $\vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{B}}$ его полуосей: прежде всего, такие ленты не могут быть неориентируемыми. В связи с этим, в данной части работы мы рассматриваем только ленты, заметаемые $\vec{\mathbf{A}}$ и $\vec{\mathbf{B}}$.

Для трёх различных наборов параметров M_0 , θ и Ψ (первого — $M_0 = 0$, $\theta = 0$, $\Psi = 1^\circ$, второго — $M_0 = 0.2$, $\theta = 0$, $\Psi = 10^\circ$ и третьего — $M_0 = 0.8$, $\theta = 20^\circ$, $\Psi = 30^\circ$), задающих поляризацию падающей волны, нами было построено в общей сложности более 20 000 лент на контурах, определяемых формулой (2.28), со значениями $\rho = 0.1f$, $a = h = |w|/10$ и $w \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$ вдали и в непосредственной близости от линий сингулярности поляризации электрического поля рассеянного частицей излучения. Вычисленные при помощи численного интегрирования значения геометрических коэффициентов \mathcal{T} и \mathcal{W} для этих контуров при $w = \pm 1$ соответственно равны ± 0.004 и ± 0.996 , при $w = \pm 2$ они равны ± 0.018 и ± 1.982 и, наконец, при $w = \pm 3$ эти параметры равны ± 0.045 и ± 2.955 , таким образом всегда выполняется тождество $\mathcal{T} + \mathcal{W} = w$. Для каждого контура строились ленты векторов $\vec{\mathbf{A}}$ и $\vec{\mathbf{B}}$. При этом использовалось $n = 500 \cdot (|w| + 3)$ точек вдоль контура, в которых на основе известных формул (2.26), (2.27) для напряжённости электрического поля рассчитывались значения $\vec{\mathbf{A}}$ и $\vec{\mathbf{B}}$. Коэффициент перекручивания ленты \mathcal{T}_w , находился численным интегрированием (2.15), индекс её внутреннего перекручивания \mathcal{N} определялся как разность $\mathcal{T}_w - \mathcal{T}$, а индекс зацепления её краев \mathcal{L}_e вычислялся, в соответствии с теоремой Кэлугэрян (2.19), как сумма $\mathcal{T}_w + \mathcal{W}$.

Анализ построенных лент и вычисленных коэффициентов \mathcal{T} , \mathcal{W} , \mathcal{T}_w и индексов \mathcal{N} и \mathcal{L}_e позволяет утверждать, что индексы внутреннего перекручивания и зацепления краёв ленты определяются в первую очередь зацеплением между контуром построения ленты и сингулярной линией циркулярной поляризации. В то время как для плоских контуров достаточно малого радиуса это зацепление обычно легко характеризовать в качественных терминах (контур построения либо охватывает сингулярную линию, либо нет), для контуров, имеющих множественные петли, должны использоваться количественные характеристики — коэффициенты зацепления $\mathcal{L}_{C,L}$ с C^T - и L^T -линиями соответственно, определяемые при помощи Гауссова

интеграла

$$\mathcal{L}_{C,L} = \frac{1}{4\pi} \int_0^l \int_0^{l_{1,2}} \frac{\mathbf{g}(s) - \mathbf{h}_{C,L}(s_{1,2})}{|\mathbf{g}(s) - \mathbf{h}_{C,L}(s_{1,2})|} \cdot \left[\dot{\mathbf{g}}(s) \times \dot{\mathbf{h}}_{C,L}(s_2) \right] ds ds_{1,2}, \quad (2.29)$$

где $\mathbf{h}_{C,L}(s_{1,2})$, $s_{1,2} \in [0, l_{1,2}]$ — естественная параметризация рассматриваемой C^Γ - (индекс 1) или L^Γ - (индекс 2) линии. Знак индексов $\mathcal{L}_{C,L}$ для нас безразличен, поскольку невозможно задать физически связанные направления обхода контура построения ленты и сингулярной линии.

С использованием этих индексов может быть сформулирована наиболее сильная закономерность в структуре оптических лент изученного поля рассеяния: для всех оптических лент осей эллипса поляризации индекс внутреннего перекручивания n принимает целочисленные значения тогда и только тогда, когда зацепление их контуров построения с C^Γ -линией имеет чётный индекс \mathcal{L}_C , и полуцелые, соответствующие неориентируемой топологии ленты, когда индекс \mathcal{L}_C нечётный.

Около 60% построенных лент имеют значения $|n| = |\mathcal{L}_C|/2$. Для приблизительно 40% выполняется неравенство $|n| < |\mathcal{L}_C|/2$. Детальный анализ показал, что перекручивание оптической ленты при движении вдоль контура её построения происходит неравномерно. Резкие перекручивания ленты происходят в точках контура построения, наиболее приближенных к трём близко лежащим поверхностям, сходящимся в C^Γ -линии. Для лент, обладающих $|n| = |\mathcal{L}_C|/2$, перекручивания вблизи двух из этих поверхностей происходят в одном направлении, а вблизи третьей поверхности — в противоположном направлении (см., например, рис. 2.17а и с). Более редким является случай, когда вблизи двух из этих поверхностей направления перекручивания ленты противоположны, а вблизи третьей поверхности присутствуют перекручивания и в том, и в другом направлениях (рис. 2.17 b и d). Менее чем для 0.2% построенных лент направления перекручиваний вблизи двух поверхностей совпадают, а вблизи третьей смешаны: $|n| > |\mathcal{L}_C|/2$.

Коэффициент зацепления \mathcal{L}_L контура построения оптической ленты с L^Γ -линией не оказывает видимого влияния на коэффициенты \mathcal{F}_W , n и \mathcal{L}_e ни для лент большой, ни для лент малой полуосей эллипса поляризации несмотря на то, что для распределения последних L^Γ -линии являются сингулярными.

Как и в подсекции 2.2.4, существенных отличий в статистике топологических типов лент малых осей эллипса поляризации \vec{B} от аналогичной статистики для лент больших осей \vec{A} замечено не было. Единственным различием, которое можно здесь отметить, является преобладание положительных значений индекса внутреннего перекручивания для лент вектора \vec{A} , построенных вблизи C^Γ -линий ($n > 0$ в 56% случаев, $n < 0$ в 29% случаев и $n = 0$ в 15% случаев) и отрицательных — для лент вектора \vec{B} ($n > 0$ в 30% случаев, $n < 0$ в 54% случаев и $n = 0$ в 16% случаев). Более того, практически точное совпадение долей лент \vec{A} и \vec{B} , имеющих противоположные индексы внутреннего перекручивания, не является артефактом статистического обобщения. Как и в случае планарных контуров построения при рассеянии на диэлектрической частице, для подавляющего большинства контуров построения ленты векторов \vec{A} и \vec{B} имеют противоположные знаки n .

На рисунке 2.17 в качестве примера изображены четыре ленты, заметаемые нормиро-

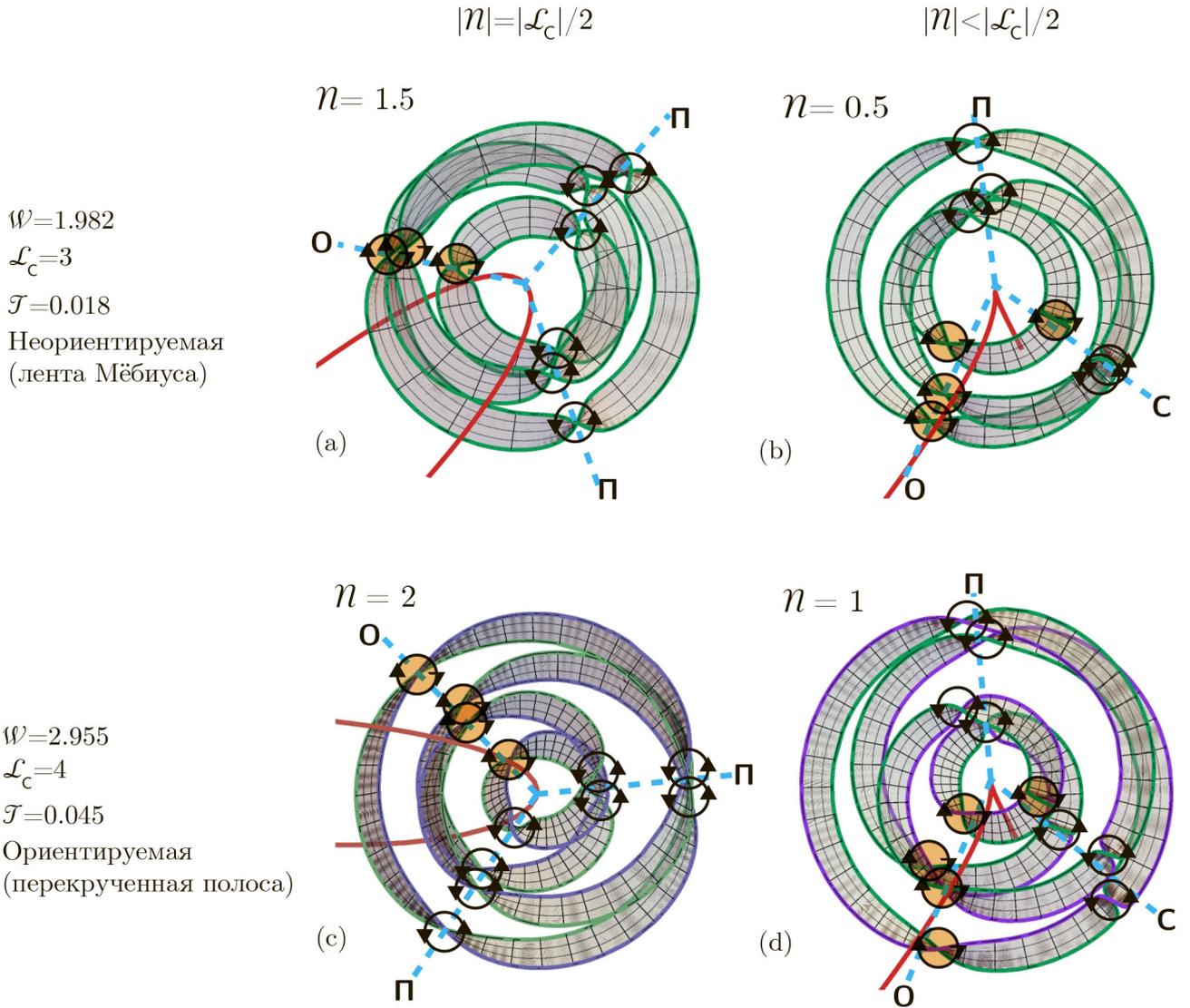


Рис. 2.17: Ленты, заметаемые нормированной проекцией \vec{A}_\perp директора большой полуоси эллипса поляризации на ортогональную направлению обхода ленты плоскость. Фигуры а и в построены при $w = 2$ и $n = 1.5$ (а), 0.5 (б), а фигуры с и d при $w = 3$ и $n = 2.0$ (с), 1.0 (д). Красным цветом изображена сцепленная с лентой C^T -линия.

ванной проекцией \vec{A}_\perp директора большой полуоси эллипса поляризации на ортогональную направлению обхода ленты плоскость, при движении вдоль контура (2.28). Фигуры а и в на нём построены при $w = 2$ и соответствуют значениям $n = 1.5$ (а), 0.5 (б), а фигуры с и d — при $w = 3$ и соответствуют значениям $n = 2.0$ (с), 1.0 (д). Соответственно, ленты на фигурах а и в являются неориентируемыми, а на фигурах с и d — ориентируемыми. Красным цветом изображена сцепленная с изображённой лентой C^T -линия. Незакрашенными окружностями выделены точки положительного перекручивания ленты, закрашенными оранжевым цветом — отрицательного перекручивания (направление перекручивания показано чёрными стрелками). Голубым пунктиром отмечены лучи (проекции соответствующих поверхностей на плоскость рисунка), вблизи точек которых ленты наиболее существенно перекручиваются. Буквой П (О) отмечены те лучи, вблизи которых сгруппированы области положительного (отрицательного) перекручивания. Вблизи лучей, отмеченных буквой С,

наблюдаются перекручивания обоих направлений. Зелёным и фиолетовым цветом отмечены различные края изображённой ленты (неориентируемые ленты имеют только один край). У лент а и с $|n| = |\mathcal{L}_c|/2$, а у лент b и d — $|n| < |\mathcal{L}_c|/2$.

Для оптических лент, контур построения которых центрирован на линии круговой поляризации, существует взаимно однозначная связь между числом w петель на ленте и её индексом зацепления \mathcal{L}_c с C^T -линией: $|\mathcal{L}_c| = |w| + 1$. Чтобы различить влияние этих коэффициентов на топологию ленты, разумно рассмотреть ленты, сцепленные с C^T -линией, но не центрированные на ней. Такие оптические ленты могут иметь любое значение \mathcal{L}_c , по модулю не превосходящее $|w| + 1$.

Для этого рассмотрим изменение топологии оптической ленты директора большой полуоси \vec{A} эллипса поляризации при параллельном переносе контура построения перпендикулярно охватываемой лентой C^T -линии без изменения его геометрии и ориентации в пространстве. Такой перенос приводит к $|w| + 1$ последовательным пересечениям C^T -линией витков ленты, в ходе каждого из которых индекс внутреннего перекручивания n изменяется на $\pm 1/2$ и, следовательно, меняется ориентируемость ленты. «Чистый» пример такого поведения приведён в верхнем ряду (a–c) рисунка 2.18.

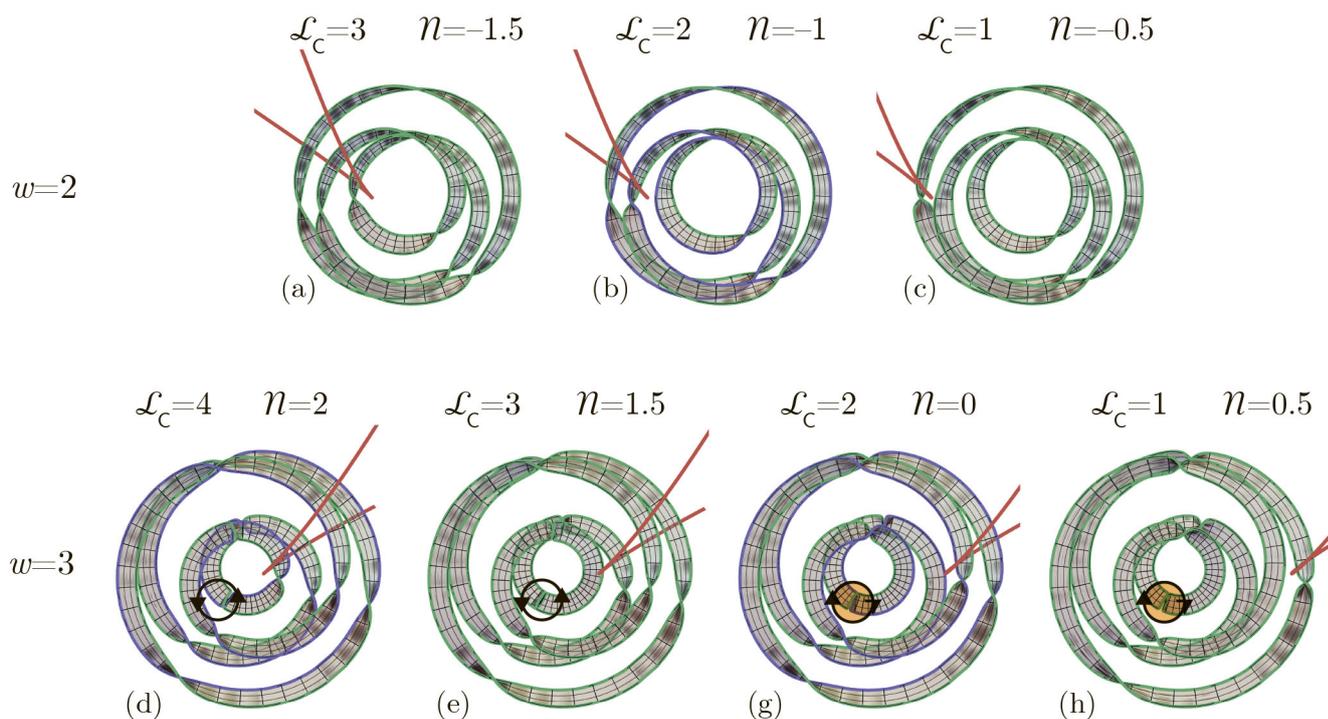


Рис. 2.18: Изменение топологии лент, замечаемых нормированной проекцией директора большой оси эллипса поляризации на плоскость, ортогональную направлению обхода ленты \vec{A}_\perp при изменении коэффициента зацепления объёмного контура g_w с C^T -линией (отмечена красным). (a–c): Контур с $w = 2$, (d–h): контур с $w = 3$. Значения коэффициентов внутреннего перекручивания и зацепления краёв указаны над лентой. Окружностью со стрелками отмечено перекручивание ленты, сохраняющееся, но меняющее своё направление при смещении контура.

Это поведение может быть осложнено изменениями направления одного или несколь-

ких из перекручиваний ленты, которые могут происходить при любых изменениях контура построения, даже не связанных с пересечением топологических особенностей поля: поворотах, произвольно малых смещениях, изменениях параметров ρ, h, a контура построения (2.28). Подобные зависимости от непрерывных параметров геометрии контура известны и для плоских контуров [75]. Из-за возможности таких изменений в нижнем ряду рисунка 2.18 при переходе от фигуры *e* к *g* значение \mathcal{N} изменяется на $3/2$; это изменение происходит в двух близко лежащих точках: сперва, при смещении контура без пересечения S^Γ -линии, изменяется направление перекручивания выделенного на рисунках окружностью участка ленты без изменения ориентируемости, затем, в момент пересечения контуром сингулярности, распрямляется ближайшее к ней перекручивание, приводя к переходу ленты от неориентируемой (*e*) к ориентируемой (*g*) топологии.

Для не меняющих ориентируемость ленты изменений нам не удалось выявить универсальных законов. В частности, не обнаруживается устойчивой сходимости индексов \mathcal{N} к каким-либо значениям по мере уменьшения ρ , подобных тому, как в работе [68] описывалось исчезновение лент с $3/2$ перекручиваниями по мере стягивания контуров в виде окружности в точку при большинстве ориентаций контура построения.

Индексы \mathcal{N} и \mathcal{L}_e принимают целые и полуцелые значения синхронно, однако диапазоны встречающихся в наших расчётах значений \mathcal{N} и \mathcal{L}_e заметно отличаются. Для индекса внутреннего перекручивания диапазоны обнаруживаемых значений всегда имеют центр в нуле, в то время как для индекса зацепления краёв они смещены относительно нуля на величину w . При этом ненулевые значения \mathcal{L}_e могут наблюдаться и в регулярном поле \mathbf{v} , в том числе, в полностью однородном, если контур построения имеет отличную от нуля скрюченность \mathcal{W} . Последнее делает осмысленным рассматривать индекс зацепления краёв \mathcal{L}_e как «вторичный» по отношению к \mathcal{N} параметр и утверждать, что основной топологической характеристикой ленты, построенной вдоль неплоского контура вида (2.28), следует считать именно индекс внутреннего перекручивания \mathcal{N} . Для контуров типа (2.28) индекс зацеплений краёв ленты при этом всегда может быть найден как $\mathcal{L}_e = \mathcal{N} + w$.

§ 2.4 Топологические особенности светового поля, рассеянного планарным метаматериалом

2.4.1 Постановка задачи

Нами было рассмотрено распространение изначально плоской монохроматической световой волны с длиной λ , выступавшей в роли параметра задачи, через планарный метаматериал, базовый элемент которого представляет собой пару металлических пластин толщины $D = 20$ нм и ширины $w = 65$ нм со слегка отличающимися длинами $l_1 = 150$ нм и $l_2 = 135$ нм, расположенных с зазором $b = 70$ нм так, как это изображено на рисунке 2.19а в объёме линейного изотропного диэлектрика. Период метаматериала одинаков в направлениях x и y , и составляет $L = 520$ нм, ось z перпендикулярна плоскости рисунка и бо́льших измерений пластин.

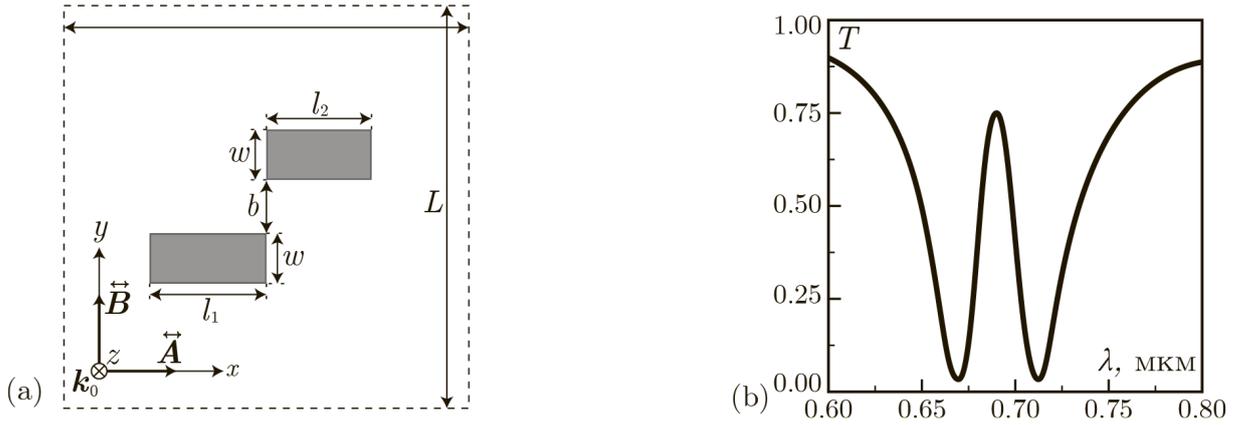


Рис. 2.19: а: Элементарная ячейка рассматриваемого метаматериала и ориентация осей эллипса поляризации падающей волны. б: зависимость показателя пропускания метаматериала от длины волны падающего излучения.

Линейный оптический отклик металла пластинок характеризуется комплексной диэлектрической проницаемостью $\tilde{\varepsilon} = 1 - \omega_p^2 / (\omega(\omega - i\delta))$, где $\omega_p = 1.366 \cdot 10^{16}$ рад/с — плазменная частота, $\delta = 3.07 \cdot 10^{13}$ с⁻¹ — коэффициент поглощения. Материал полосок также обладает нелинейным оптическим откликом, описываемым изотропным тензором локальной кубической восприимчивости $\mathbf{X}^{(3)}(\omega; -\omega, \omega, \omega)$, все ненулевые компоненты которого выражаются при помощи двух констант: $\chi_1 = \chi_{xxxy}^{(3)}$ и $\chi_2 = \chi_{xyxy}^{(3)}$. Диэлектрическая проницаемость окружающего пластинки линейного диэлектрического материала считалась равной единице.

Моделирование распространения волны в метаматериале осуществлялось решением уравнения

$$\text{rot rot } \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} (\tilde{\varepsilon} + 6\pi\chi_2 \|\mathbf{E}\|^2 \mathbf{E} + 3\pi\chi_1 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E}^*) = 0, \quad (2.30)$$

являющегося прямым следствием уравнений Максвелла [181]. На материал нормально падало (волновой вектор \mathbf{k}_0 сонаправлен с $0z$) эллиптически поляризованное излучение, характеризуемое вектором комплексной амплитуды \mathbf{E}_0 .

Для численного решения уравнения (2.30) использовалась расчётная область в форме прямоугольного параллелепипеда, ограниченного плоскостями $x = \pm 260$ нм; $y = \pm 260$ нм; $z = \pm 1000$ нм, обусловленными периодом метаматериала по x, y и достаточным удалением от метаматериала по $0z$, чтобы прошедшая и отражённая волны могли считаться плоскими на соответствующих границах. Соответственно, на ограничивающих плоскостях, ортогональных к $0x, 0y$ использовались периодические, а на плоскостях, ортогональных к $0z$ — рассеивающие граничные условия [135]. На границе $z = -1000$ нм граничное условие принимает вид

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} + i\omega \mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] / c = 2i\omega \mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] / c, \quad (2.31)$$

где \mathbf{n} — внешняя нормаль к границе расчётной области, а на границе $z = 1000$ нм — более простую (поскольку в этой области существует только прошедшая волна) форму

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} + i\omega \mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] / c = 0. \quad (2.32)$$

Численное решение уравнения (2.30) в применении к плазмонным метаматериалам осложняется сильным различием характерных пространственных масштабов изменения векторов

поля в металле и окружающей его среде. Для точного построения и определения топологических типов сингулярных линий поляризации излучения требуется высокая точность определения малых изменений комплексных амплитуд и, следовательно, значительное уменьшение размера расчётных ячеек сетки, а значит увеличения их числа в расчётной области. Ещё больше это требование усиливается необходимостью учесть поляризационные нелинейные эффекты, возникающие в таких структурах, что приводит к значительной вычислительной сложности решаемой задачи.

Для частичного преодоления описанных трудностей мы использовали метод краевых элементов высшего порядка (higher-order edge elements method) [117], позволяющий контролировать качество и вычислительную затратность решения локальным дроблением сетки и локальным изменением порядка аппроксимации за счёт использования иерархического набора базисных функций. Таким образом обеспечивалось рациональное расходование вычислительных ресурсов при моделировании физических процессов, одновременно протекающих на сильно различающихся пространственно-временных масштабах [46]. Более того, краевые элементы требовали непрерывности только тангенциальной компоненты векторного поля и таким образом верно соотносились со свойствами непрерывности электрического поля, устраняя появление не имеющих физического смысла решений [42; 221].

Для решения системы нелинейных алгебраических выражений, возникающих в результате дискретизации (2.30) использовался итерационный процесс, на каждом шаге которого решалась система линейных алгебраических уравнений, получаемая в результате переноса всех нелинейных слагаемых, возникающих при дискретизации (2.30) в правую часть, и вычисления их значений с использованием соответствующей системы линейных алгебраических уравнений, полученной на предыдущем шаге итерации. Решение систем линейных алгебраических уравнений прямым методом производилось с использованием Intel MKL PARDISO package [191], благодаря чему наиболее вычислительно затратная часть решения, связанная с численной факторизацией разреженной матрицы осуществлялась только один раз, а при дальнейшей реализации итерационного процесса менялась только правая часть системы уравнений.

2.4.2 Топологический каркас

Планарный метаматериал с описанной конфигурацией имеет сильно выраженную дисперсию коэффициента пропускания T в диапазоне длин волн $\approx 620 - 780$ нм, обусловленную резонансными [93; 181] свойствами металлических пластин соответствующих геометрических размеров (см. рисунок 2.19b). Между минимумами коэффициента пропускания, обусловленными плазмонными резонансами двух пластин немного разных размеров, присутствует ярко выраженный максимум, обусловленный их взаимодействием. Для длин волн падающего излучения, близких к плазмонным резонансам, поле в объёме метаматериала оказывается сильно локализованным вблизи пластин. Наши расчёты показали, что в этой частотной области даже в случае строго линейной, ориентированной вдоль Ox , поляризации падающего излучения, E_y и E_z компоненты рассеянного поля не равны нулю, а на расстоянии порядка нескольких сот нанометров имеют тот же порядок величины, что и E_x составляющая (см.

рисунок 2.20).

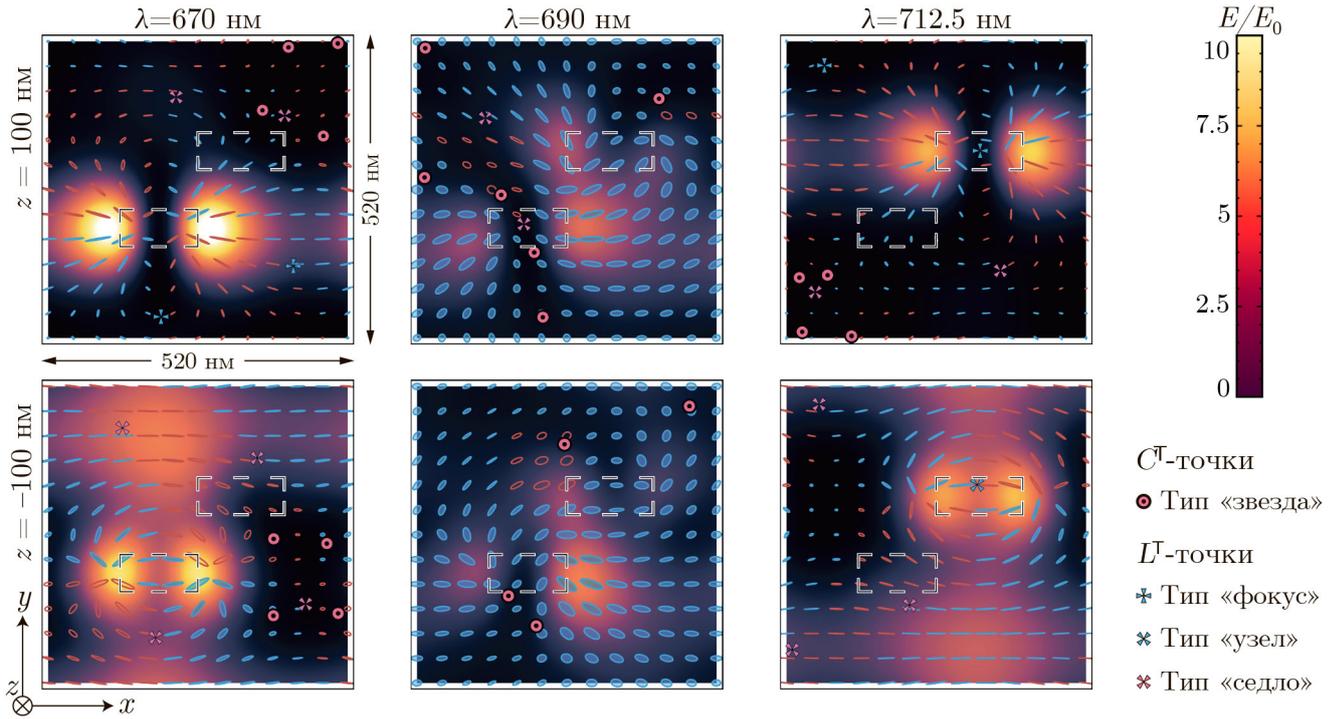


Рис. 2.20: Портреты рассеянного поля в $0xy$ -сечениях метаматериала при различных значениях длины волны падающего излучения (указаны над столбцами); z -координаты срезов указаны в начале строки. Фоновым цветом изображено распределение амплитуды в срезе. Эллипсы поляризации изображены в проекции на плоскость среза, при этом закрашенные голубые эллипсы соответствуют положительному направлению вращения вектора \mathcal{E} (против часовой стрелки), а пустые красные — отрицательному. Маркеры указывают положения и типы сингулярных точек в согласии с легендой в правой части рисунка. Чёрно-белым пунктиром отмечено положение металлических пластин.

Типичная картина топологического каркаса напряжённости электрического поля рассеянного излучения вблизи металлических пластин изображена на рисунке 2.21a. Она включает в себя две C^T -линии, подходящие очень близко друг к другу в одной или двух точках, и две L^T -линии, также чрезвычайно близкие к взаимному пересечению в двух точках. Сингулярные линии обоих классов оказываются сильно деформированы и прослеживание их точной формы представляет нетривиальную задачу. В особенности это касается L^T -линий. Вблизи плоскости $z = 0$ поляризация излучения всегда оказывается близка к линейной, в связи с чем L^T -линии оказываются очень извилистыми, в особенности непосредственно у границ металлических пластин. Для более наглядного представления топологии сингулярных линий электрического поля мы будем использовать *диаграммы зацепления* (рисунок 2.21b). Здесь и далее диаграммой зацепления мы называем упрощённое изображение проекции топологического каркаса на удобную для этого плоскость, сохраняющее топологические характеристики данного каркаса (замкнутость и индексы зацепления линий друг с другом), но сглаживающее геометрию. На обеих фигурах рисунка 2.21 также отмечено положение пластин относительно топологического каркаса.

На приведённой диаграмме можно видеть, что линии $C1$ и $C2$ сцеплены между собой, а также каждая из них сцеплена с линией $L2$. Линия $L1$ сцеплена с $C2$, но не с $C1$. Приведённая на рисунке 2.21 конфигурация сингулярных линий построена для степени эллиптичности падающей волны $M_0 = 0.5$ и сохраняется в широком диапазоне $M_0 > 0.3$. При меньшей степени эллиптичности топология основных C^T -линий сохраняется, но несколько изменяется топология сингулярностей линейной поляризации.

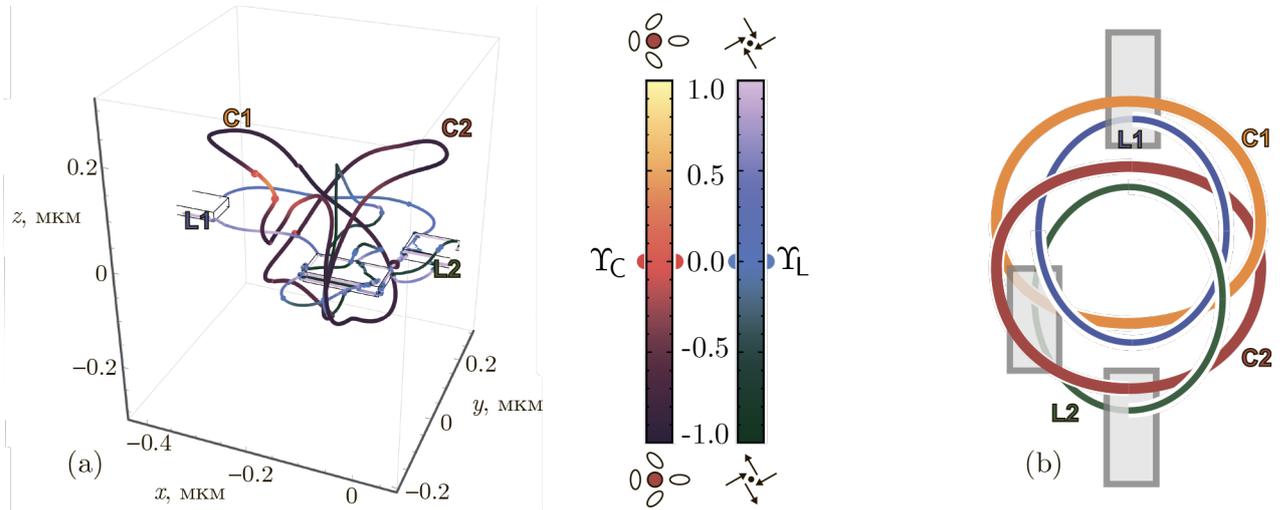


Рис. 2.21: Топологический каркас одной ячейки периодичности (а) электрического поля электромагнитной волны, проходящей через планарный метаматериал, базовый элемент которого содержит две металлические пластины в объёме изотропного диэлектрика. Более толстые линии в тёплых тонах — C^T -линии, более тонкие в холодных тонах — L^T -линии. Цвет линий указывает на значение параметра изотропии соответствующей сингулярной точки. (б) диаграмма зацепления сингулярных линий топологического каркаса. Каждая линия изображена своим цветом. $\lambda = 690$ нм; $M_0 = 0.5$.

С вариацией параметров падающего излучения L^T -линии сильно изменяют свою форму. От них и, реже, от C^T -линий, могут отделяться отдельные петли, образующие независимые замкнутые сингулярные линии. Если эти линии формируются сцепленными с сингулярными линиями противоположного класса — они оказываются устойчивыми к дальнейшим изменениям степени эллиптичности падающего излучения и, уменьшаясь в размерах, не исчезают полностью. Так на рисунке 2.22а изображены основные (наиболее крупные) линии циркулярной поляризации топологического каркаса электрического поля рассеянного метаматериалом излучения при падении на него линейно поляризованной волны, а на рисунке 2.22b — малые линии в том же каркасе, не исчезнувшие полностью благодаря их сцепленности с L^T -линиями. При уменьшении степени эллиптичности падающего на материал излучения, как и в других задачах рассеяния, C^T -линии в целом уменьшаются в размерах, а L^T -линии — увеличиваются. На рисунке 2.22b для наглядности мы показываем только фрагменты линий линейной поляризации, сцепленные с линиями циркулярной.

При $M_0 < 0.3$ тип зацепления сингулярных линий между собой изменяется. Существенное увеличение L^T -линий в размерах сопровождается соединением линий из соседних базовых ячеек, в результате чего в материале образуется «бесконечная цепь» зацепленных C^T -

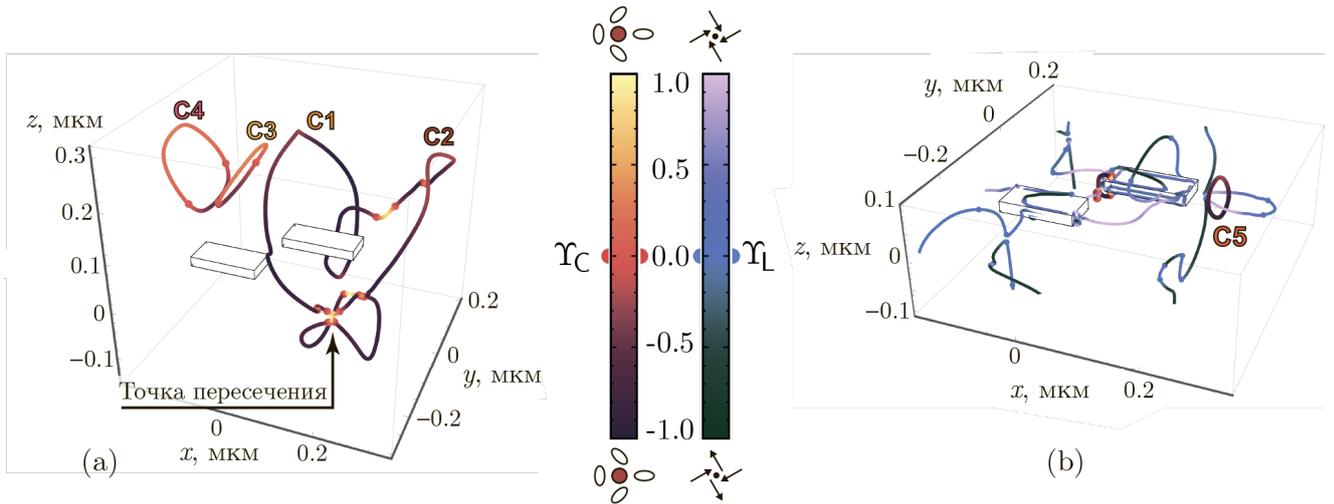


Рис. 2.22: Топологический каркас одной ячейки периодичности (а) электрического поля, электромагнитной волны, проходящей через планарный метаматериал, базовый элемент которого содержит две металлические пластины в объёме изотропного диэлектрика. Более толстые линии в тёплых тонах — C^T -линии, более тонкие в холодных тонах — L^T -линии. Цвет линий указывает на значение параметра изотропии соответствующей сингулярной точки. (б) диаграмма зацепления сингулярных линий топологического каркаса. Каждая линия изображена своим цветом. $\lambda = 690$ нм; $M_0 = 0$.

и L^T -линий. Несмотря на очень сложную геометрию этого зацепления, в пределах каждой элементарной ячейки сохраняется однократное зацепление L^T -линий с линией $C1$ и двукратное — с $L2$. Кроме того, от сингулярных линий циркулярной поляризации электрического поля $C1$ и $C2$ отделяются небольшие петли $C3$ и $C4$ соответственно. При длине волны падающего излучения $\lambda = 690$ нм эти петли оказываются локализованы вблизи более короткой пластины, в то время как наиболее крупные сингулярные линии $C1$ и $C2$ смещены к более длинной.

Характерной особенностью топологического каркаса рассеянного поля для линейной поляризации падающей волны при её длине $\lambda = 690$ нм является наличие у линий $C1$ и $C2$ точки строгого пересечения. Эта особенность поля должна быть неустойчивой в согласии с анализом коразмерностей, и действительно перестаёт существовать в численном эксперименте при любом отклонении M_0 от нуля. Однако, учёт рассмотрения малой кубической по полю нелинейности отклика металлических пластинок, изменение величин $\chi_{1,2}$ или интенсивности падающей волны, смещая сингулярные линии, не изменяет их топологии, в том числе — не устраняет точку пересечения.

Также практически не изменяется топология сингулярных линий и при изменении длины волны падающего излучения. На рисунке 2.23 приведены картины топологического каркаса электрического поля излучения вблизи металлических пластин при их облучении плоскими волнами с линейной поляризацией и длинами волн, соответствующими резонансам отдельных пластин: $\lambda = 670$ нм (фигура а) и $\lambda = 712.5$ нм (фигура б). Можно видеть, что несмотря на существенное перераспределение интенсивностей вблизи этих пластин (см. рисунок 2.20), сопровождающее подобное изменение длины волны, топологический каркас поля изменяется

сравнительно слабо. Наблюдавшиеся для $\lambda = 690$ нм отдельные линии C3 и C4 также существуют отдельно от C1 и C2 для $\lambda = 670$ нм, но сливаются с ними в случае $\lambda = 712.5$ нм, образуя характерные загибы в области $z \approx 0.2$ (рисунок 2.23b). Также, для всех длин волн можно наблюдать сохранение наиболее крупной из побочных C^T -линий C5, сцепленной с L^T -линией. Для длин волн падающего излучения, соответствующих резонансам одной из пластин ($\lambda = 690$ нм, $\lambda = 712.5$ нм) «центр тяжести» линий циркулярной поляризации смещается к пластине, в которой *не возбуждается* резонансный отклик. Точка пересечения линий C1 и C2 сохраняется при изменении длины волны падающего излучения.

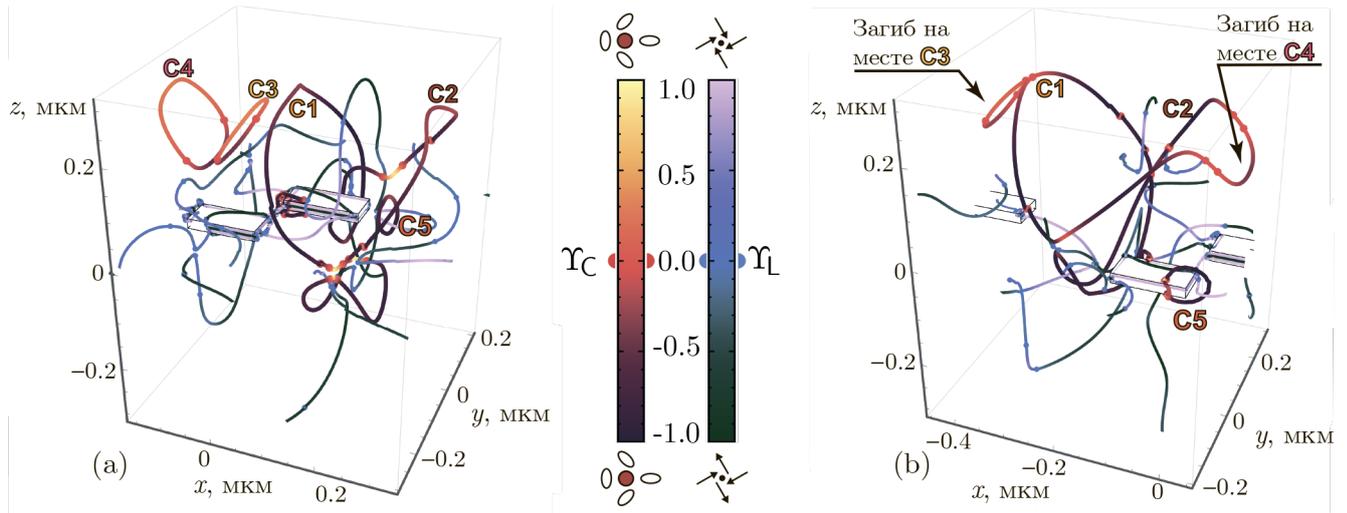


Рис. 2.23: Топологический каркас одной ячейки периодичности электрического поля электромагнитной волны, проходящей через планарный метаматериал, базовый элемент которого содержит две металлические пластины в объёме изотропного диэлектрика. Более толстые линии в тёплых тонах — C^T -линии, более тонкие в холодных тонах — L^T -линии. Цвет линий указывает на значение параметра изотропии соответствующей сингулярной точки. (a) $\lambda = 670$ нм; $M_0 = 0$, (b) $\lambda = 712.5$ нм; $M_0 = 0$.

В рассмотренных конфигурациях поля параметры изотропии сингулярных линий варьируются в широких пределах, преобладают отрицательные значения параметров изотропии, в особенности для линий циркулярной поляризации.

Основные результаты второй главы

Было продемонстрировано, что ближние электрические поля плоских электромагнитных волн с изначально однородным состоянием поляризации, рассеянных сферической кремниевой и сфероидальной золотой частицами субволновых размеров при большинстве параметров поляризации и направления падения волны содержат две линии чисто круговой и две (в случае кремниевой частицы) либо одну (в случае золотой) линии чисто линейной поляризации, как правило, замыкающиеся в окрестности рассеивающих частиц с характерным размером порядка двух-трёх характерных линейных размеров частицы. Форма и размер этих сингулярных линий значительно зависят от параметров падающей волны, при этом с увеличением

степени эллиптичности падающей волны увеличиваются в размерах линии строго циркулярной поляризации и уменьшаются линии линейной, а с уменьшением — увеличиваются линии линейной и уменьшаются циркулярной соответственно. В результате этих деформаций при состоянии поляризации падающей волны, близком к линейному ($M_0 < 0.1$), число линий линейной поляризации удваивается в сравнении с конфигурациями, соответствующими большей эллиптичности падающей волны. В ходе уменьшения размеров линии линейной поляризации могут полностью стягиваться в точки и исчезать из топологического каркаса поля в случае если они не сцеплены с линиями циркулярной поляризации. Если же между линиями циркулярной и линейной поляризации существует зацепление — оно остаётся неизменным в широком диапазоне параметров падающего излучения даже при значительной деформации составляющих его сингулярных линий.

При рассеянии плоской электромагнитной волны планарным метаматериалом, базисный элемент которого содержит две металлических пластины субволновых размеров, в топологическом каркасе электрического поля стабильно существуют две крупные линии циркулярной поляризации, сцепленные с линиями линейной поляризации, форма которых зависит от параметров падающего излучения, но топология неизменна. Особо отмечено, что в случае линейной поляризации падающей волны эти линии имеют точку пересечения, наличие которой устойчиво к изменению длины падающей волны и её интенсивности при учёте кубической по полю нелинейности отклика материала пластин. Во всех рассмотренных задачах рассеяния параметры изотропии сингулярных линий поляризации преимущественно отрицательны, а их основная масса лежит вблизи областей сравнительно малой интенсивности электромагнитного поля.

В указанных задачах рассеяния электромагнитного поля на одиночных частицах наблюдаются оптические ленты Мёбиуса, заметаемые векторами большой и малой осей эллипса поляризации при их прослеживании вокруг замкнутого контура если этот контур охватывает линии строго циркулярной поляризации в том и только том случае, когда суммарный индекс зацепления контура построения со всеми линиями циркулярной поляризации имеет нечётное значение. При этом зацепление контура построения с линиями строго линейной поляризации не оказывает видимого влияния на топологию оптических лент.

Проанализированы возможные обобщения понятия числа оборотов оптической ленты, построенной на круглом контуре, на случай произвольных объёмных контуров и показано, что наиболее полно известные свойства данного числа обобщает понятие индекса внутреннего перекручивания ленты. Приведён пример расчёта этого индекса для контуров со сложной объёмной геометрией. Установлено, что индекс внутреннего перекручивания оптических лент векторов полуосей эллипса поляризации в рассмотренных задачах рассеяния на единичных частицах всегда имеет целочисленные значения если индекс зацепления контура построения ленты (как плоского, так и объёмного) с C^T -линиями поля имеет чётное значение и полуцелые в обратном случае. В значительном большинстве случаев индексы внутреннего перекручивания оптических лент, заметаемых векторами большой и малой осей эллипса поляризации электрического поля при их прослеживании вдоль малого контура (как плоского, так и объёмного), охватывающего линию циркулярной поляризации в этих задачах имеют противоположные знаки.

Глава 3

Узлы и зацепления топологического каркаса светового поля в задаче острой фокусировки лазерного излучения параболическим зеркалом

§ 3.1 Узлы и зацепления в картинах фазы и поляризации электромагнитного излучения: Обзор литературы

3.1.1 Узлы и зацепления в сингулярной оптике

В начале XXI века ещё один класс топологически нетривиальных особенностей электромагнитного поля был предсказан в ряде задач Берри и Деннисом — основоположниками сингулярной оптики. В работе [19] ими было показано, что фазовые сингулярности электромагнитного поля, сами по себе являющиеся топологическими особенностями, могут дополнительно образовывать узлы и зацепления, объединяющие их конфигурацию в топологически нетривиальный объект более высокого порядка. Были описаны [16] процессы пересоединения линий, происходящие в таких конфигурациях при варьировании непрерывных параметров задачи, меняющие топологию наблюдаемых узлов. Подобные структуры были предсказаны в волновой функции электрона в атоме водорода в некоторых суперпозиционных состояниях высших уровней энергии [25].

Как и в случае оптических лент, интерес к этому классу топологических особенностей, в течение двух десятилетий ограничивавшийся сугубо теоретическим анализом [99; 107], значительно вырос в последние годы пропорционально совершенствованию техник микрофотоники, сделавшей возможным экспериментальное обнаружение данных узлов [3; 207]. Выходят работы, устанавливающие связь между конфигурацией фазовых узлов и топологическим индексом породившего их оптического пучка [153], предлагаются техники их использования для кодирования информации в оптических вычислительных системах [157].

В самые последние годы появились работы, в которых рассматривается связь структуры узловых фазовых сингулярностей с поляризацией электромагнитного излучения. В статье [222] предложено устройство, позволяющее изменять топологию оптического узла, варьируя

поляризацию падающего на него света. В [184] предложен метод генерации узловых фигур Лиссажу при помощи пространственного сложения трёх оптических пучков с разными состояниями поляризации, в [167; 168; 218] описаны оптические хопфионы — поляризационно нетривиальные структуры вблизи C -линии, имеющие узловую топологию изолиний поляризации вблизи них; наконец, в [184] показана возможность генерации состояний света, в которых сами C -линии образуют нетривиальные узлы.

3.1.2 Топология узлов и зацеплений

Узлом называется любая простая (лишённая самопересечений и разветвлений) замкнутая кривая в трёхмерном евклидовом пространстве. При этом два узла, параметризованных векторными функциями $\mathbf{g}, \mathbf{g}' : [0, l) \rightarrow \mathbb{R}^3$ считаются *эквивалентными* если в данном пространстве существует гомотопия, переводящая один из этих узлов в другой (семейство непрерывных отображений \mathbf{g}_s , непрерывно зависящее от параметра $s \in [0; 1]$, такое, что $\mathbf{g}_0 = \mathbf{g}$ и $\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}'$). Интуитивно это требование соответствует возможности деформировать один из узлов в другой без разрывов и самопересечений в процессе деформации. *Тривиальным* называется узел, эквивалентный окружности [248].

Зацеплением называется любое счётное множество непересекающихся узлов. Аналогично, два зацепления считаются *эквивалентными* если между ними существует гомотопия в \mathbb{R}^3 : они могут быть переведены друг в друга непрерывным преобразованием в трёхмерном евклидовом пространстве без пересечений и самопересечений входящих в них узлов. *Тривиальным* называется зацепление, эквивалентное счётному множеству непересекающихся окружностей, лежащих в одной плоскости. В частности, два узла называются *сцепленными* если их зацепление друг с другом не тривиально. Для того, чтобы зацепление большего числа узлов было тривиальным, необходимо, но недостаточно, чтобы каждая пара входящих в него узлов была не сцепленной.

Математическая теория узлов чрезвычайно сложна, и однозначное задание узла с помощью малого набора числовых коэффициентов в общем случае невозможно, однако существует ряд выделенных классов узлов, для исчерпывающей классификации которых достаточно указания нескольких целочисленных индексов. Важным примером для нашей работы является класс так называемых *торических узлов* — узлов, которые можно целиком изобразить на поверхности не заузлённого тора. Каждый такой узел может быть однозначно задан парой взаимно простых целых чисел $(m; n)$ (как правило используется нотация $(m; n)$ —торический узел [200]), где m соответствует числу оборотов, которое узел совершает вокруг оси симметрии тора, а n — числу оборотов вокруг его круговой оси (индексу зацепления с ней). Если m и n не являются взаимно простыми числами, то вместо одного узла приведённым требованиям будет удовлетворять зацепление (также называемое торическим) $\gcd(m; n)$ связанных компонент [122] с индексом зацепления

$$l = \frac{m}{2} \left(n - \frac{n}{\gcd(m; n)} \right) \quad (3.1)$$

между каждой их парой (рисунок 3.1a). Здесь $\gcd(m; n)$ — наибольший общий делитель чисел m и n . Важнейшими частными случаями торических узлов и зацеплений являют-

ся трилистниковый узел (рисунок 3.1b), который можно представить в формах $(2; 3)$ – или $(3; 2)$ –торического узла (топологически эквивалентных, но имеющих различную симметрию) [200], зацепление Хопфа (рисунок 3.1c), являющееся $(2; 2)$ –торическим зацеплением с коэффициентом зацепления 1, а также $(4; 2)$ –торическое зацепление с коэффициентом зацепления 2, называемое «печать Соломона» (рисунок 3.1d).

Числа m, n , строго говоря, могут принимать и отрицательные значения, однако одновременная смена знака обоих чисел приводит лишь к смене выбранного направления обхода узла, которая не будет рассматриваться в наших приложениях, а изменение одного из двух знаков переводит узел в его зеркальное отражение; поскольку все обнаруженные в настоящей работе узлы имели одинаковую хиральность, либо совпадали со своими зеркальными копиями, мы будем использовать только положительные значения $(m; n)$.

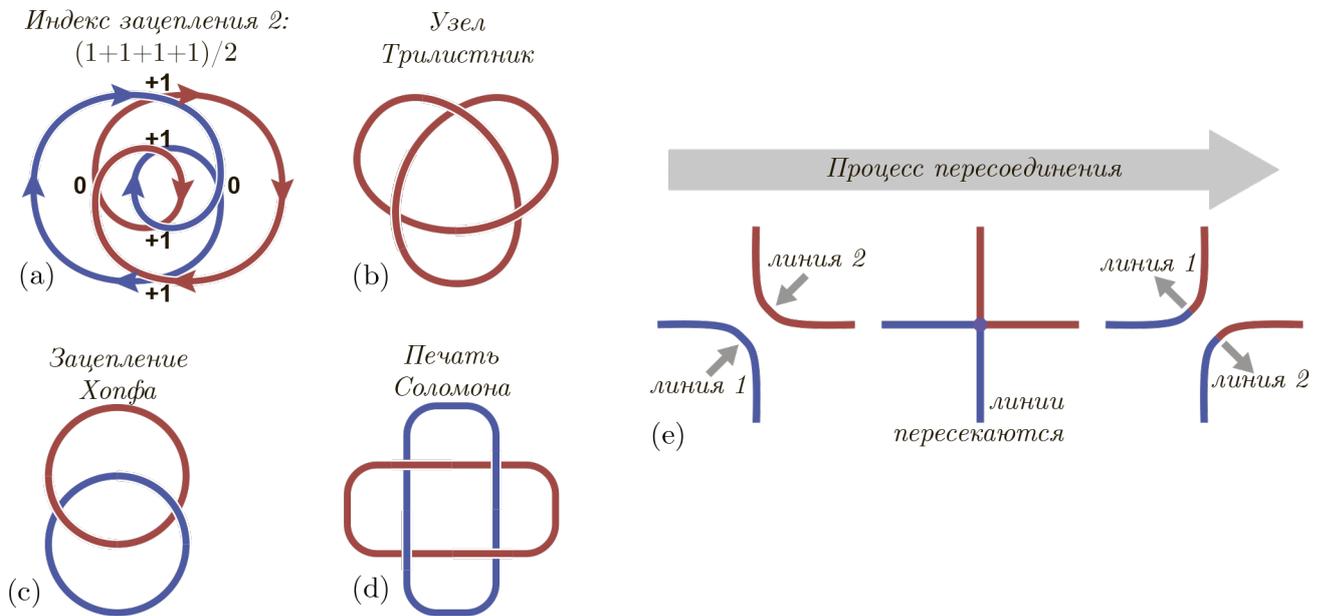


Рис. 3.1: (а): Пример вычисления индекса зацепления двух кривых по диаграмме зацепления. (b–d): Важные узлы и зацепления; трилистник (b), зацепление Хопфа (c), печать Соломона (d). (e): схема протекания пересоединения двух сингулярных линий.

Исследование узлов и зацеплений в структуре сингулярностей электромагнитного поля, как было показано в начале параграфа, набирает популярность, однако, насколько нам известно, на данный момент все такие работы посвящены исследованию узловых структур либо фазовых, либо параксиальных поляризационных сингулярностей, которые, как уже было указано, могут быть рассмотрены как фазовые сингулярности одной из двух компонент круговой поляризации с противоположными направлениями вращения. Публикаций, посвящённых узловым конфигурациям истинно круговой или истинно линейной поляризации (C^T - и L^T -линиям) на момент написания данной работы нам не известно.

Нами было обнаружено, что большое число торических узлов с различной топологией и симметрией, образуемых сингулярными линиями поляризации электрического поля может быть обнаружено в волновом поле острой фокусировки ряда низших пространственных мод лазерного излучения линейным параболическим зеркалом. В работе [245] было продемонстрировано, что при острой фокусировке лазерных пучков, содержащих фазовые и поляри-

зационные сингулярности в своём поперечном сечении значительно усложняется структура поля, в частности, амплитуда в точках бывших фазовых сингулярностей перестаёт быть равной нулю, а вблизи геометрического фокуса возникают области обратного потока световой энергии. Рассматривались, в частности, кратные сингулярности поляризации и фазы, выходящие за пределы нашего исследования как неустойчивые. Однако, структура волнового поля в этой работе была описана только в проекции на поперечную направлению распространения плоскость, в связи с чем фундаментально трёхмерные топологические особенности: узловые структуры и оптические ленты Мёбиуса остались за рамками интереса этой работы. Следующие параграфы настоящей главы посвящены описанию условий их существования и изменения топологических характеристик, а также закономерностям, ограничивающим эти изменения в ходе происходящих при изменении непрерывных параметров излучения пересечений (рисунок 3.1e).

Основные результаты данной главы опубликованы в статье [106] и сборнике тезисов конференции [251].

§ 3.2 Постановка задачи острой фокусировки, приводящей к формированию узлов и зацеплений сингулярных линий

Пусть неоднородно поляризованный лазерный пучок падает параллельно оси z декартовой системы координат xuz из области $z > 0$ на вогнутое параболическое зеркало, фокус и центр которого расположены на оси z , в точках $z = 0$ и $z = -f$ соответственно. Для численного расчёта вектора напряжённости электрического поля отражённого пучка в окрестности геометрического фокуса мы использовали точное решение уравнений Максвелла в квадратурной форме, полученное в классической работе [225] для случая жёсткой осевой фокусировки падающего пучка параболическим зеркалом. Методика вычисления приведённых в ней интегралов апробирована сотрудниками нашей кафедры в работах [183; 215] прямым сравнением результатов численного решения непараксиальных уравнений распространения света с точными решениями уравнений Максвелла в ряде задач линейной оптики. В настоящей работе мы интересовались электрическим полем в небольшой окрестности геометрического фокуса. Использование квадратурного решения [225] задачи о жёсткой осевой фокусировке падающего пучка параболическим зеркалом приводит в этом случае к меньшим вычислительным затратам по сравнению с решением уравнений распространения. Численное моделирование проводилось в условиях, разумно соответствующих эксперименту [152]: лазерный пучок имел радиус $w = 1$ мм и длину волны $\lambda = 530$ нм; фокусное расстояние зеркала $f = 1.128$ мм, числовая апертура, определённая по уровню интенсивности e^{-2} , составляла $NA = 0.9$. Интегрирование [225] проводилось численно по поверхности зеркала от $-5f$ до $5f$ с разрешением $\Delta x = \Delta y = f/10$. Расчётная область представляла собой куб со стороной 4 мкм и центром в фокусе. Разрешение вдоль каждой из осей декартовой системы координат составляло 10 нм.

В настоящей работе анализировались особенности фокусировки в таком зеркале эллиптически поляризованных Гауссова и Лагерр–Гауссова пучков, а также двух разновидностей

пучка Пуанкаре. Поперечная компонента \mathbf{E}_\perp удовлетворяющей уравнению $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ комплексной амплитуды $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp + E_z \mathbf{e}_z$ напряжённости электрического поля первого из них в плоскости $z = -f$ задается формулой:

$$\mathbf{E}_\perp(x, y, z = -f) = E_0 \mathbf{e}_0 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2w^2}\right), \quad (3.2)$$

где единичный комплексный вектор

$$\mathbf{e}_0 = (1 - M_0)^{1/2} \mathbf{e}_+ + (1 + M_0)^{1/2} \mathbf{e}_-. \quad (3.3)$$

В (3.2), (3.3) w — характерный поперечный размер пучка в плоскости перетяжки $z = -f$, $\mathbf{e}_\pm = (\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y)/\sqrt{2}$, единичные векторы $\mathbf{e}_{x,y}$ направлены вдоль осей x и y , E_0 — вещественная константа. В параксиальном приближении (продольная компонента $E_z \approx 0$) параметр M_0 совпадает со степенью эллиптичности $M(x, y)$. Цилиндрическая симметрия без потери общности позволяет при записи (3.3) считать ось x параллельной главной оси эллипса поляризации падающего излучения. При острой фокусировке пучка продольная компонента E_z комплексной амплитуды \mathbf{E} перестаёт быть малой и вносит весомый вклад в картину распределения напряжённости электрического поля в пространстве [101; 185; 212].

Поперечная компонента комплексной амплитуды Лагерр–Гауссова пучка, интенсивность которого в начале координат равна нулю, а фаза в малой окрестности этой точки принимает все возможные значения, задается формулой:

$$\mathbf{E}_\perp(x, y, z = -f) = E_0 \mathbf{e}_0 \frac{x \pm iy}{w} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2w^2}\right). \quad (3.4)$$

Пучки, определяемые различными знаками, являются зеркальными отражениями друг друга относительно любой плоскости, содержащей ось z . При жёсткой фокусировке их поляризация также существенно изменяется, в том числе и благодаря росту исходно малой компоненты E_z [51; 101].

В плоскости перетяжки поперечная компонента комплексной амплитуды пучка Пуанкаре имеет более сложный вид:

$$\mathbf{E}_\perp(x, y, -f) = E_0 \left[\mu \mathbf{e}_+ + \left(\frac{\Lambda_+(x + iy) + \Lambda_-(x - iy)}{w} \right) \mathbf{e}_- \right] \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2w^2}\right). \quad (3.5)$$

Здесь E_0 — константа, μ — положительный параметр, определяющий относительный вклад циркулярно поляризованной Гауссовой составляющей электрического поля. Поляризованная в ортогональном ей направлении составляющая электрического поля (второе слагаемое в квадратной скобке в (3.5)) имеет дислокацию фазы [149]. Её тип зависит от комплексных чисел Λ_+ и Λ_- , связанных соотношением: $|\Lambda_+|^2 + |\Lambda_-|^2 = 1$, и при $|\Lambda_+| = 1$ или $|\Lambda_-| = 1$ является чисто винтовым. В параксиальном приближении в плоскости $z = -f$ эллипсы поляризации электрического поля имеют все возможные отношения осей и любые ориентации относительно оси $0x$. В точке $(0, 0, -f)$ пучок Пуанкаре имеет C^Γ -точку, параметр изотропии которой связан со значениями Λ_\pm соотношением (2.5).

Жёсткая фокусировка пучка Пуанкаре типа «звезда» ($\Lambda_+ = 0$, $\Lambda_- = 1$ в формуле (3.5)) исследовалась в [152]. Ось z в этом случае является не только линией сингулярности поляризации электрического поля, точки которой имеют топологический индекс $-1/2$, но и

осью симметрии третьего порядка распределения эллипсов поляризации в плоскости его перетяжки. В этой работе вблизи $0z$ зафиксировано наличие нетривиальной ленты Мёбиуса с коэффициентом перекручивания $3/2$, заметаемой вектором \vec{A} при движении его начала вдоль окружности малого радиуса. Такие ленты, как правило, неустойчивы [72] и распадаются на три элементарные ленты с коэффициентами перекручивания $1/2$: существование особенности этого типа в рассматриваемом пучке обусловлено его высокой симметрией. При этом в [152] не проводился анализ топологического каркаса поля, тесно взаимосвязанного со структурой оптических лент.

§ 3.3 Топологический каркас электрического поля при острой фокусировке низших пространственных мод лазерного излучения

3.3.1 Гауссов пучок

При острой фокусировке однородно эллиптически поляризованного Гауссова пучка (3.2) единственным параметром, вариация которого качественно меняет пространственную картину линий сингулярности поляризации вблизи фокуса зеркала, является его степень эллиптичности M_0 . При поляризации пучка, близкой к линейной, большая часть этих линий находится около плоскости $z = 0$. Характерный топологический каркас электрического поля в этом случае показан на рисунке 3.2а ($M_0 = 0.05$). Изображённые на нём C^T - и L^T -линии можно считать слегка деформированными в различных направлениях окружностями, центры которых лежат около оси $0z$ достаточно близко друг к другу. Здесь и далее на основных рисунках цвет точек линии задаётся значением параметров изотропии в данных точках. Круглая врезка в верхней части рисунка 3.2а содержит диаграмму зацепления сингулярных линий. Для лучшего восприятия каждая из линий диаграммы зацеплений изображена своим цветом, при этом C^T -линии толще L^T -линий. Коэффициент зацепления линий $C1$ и $C2$ равен 2, их конфигурация эквивалентна $(2; 2)$ –торическому зацеплению. Каждая из них сцеплена с $L1$ линией с коэффициентом зацепления 1.

Численный анализ изменения пространственной картины линий сингулярности поляризации электрического поля с ростом M_0 позволяет утверждать, что точки линий одного класса в области их возможного пересоединения имеют противоположенные знаки топологического индекса. При почти линейной поляризации падающего излучения значения Υ_C точек линий $C1$ и $C2$ в непосредственной близости друг от друга практически совпадают. Поэтому зацепление линий сингулярности поляризации $C1$ и $C2$ с большой вероятностью является устойчивым. Проходящая между ними в значительной части области зацепления линия $L1$ также мешает пересоединениям вышеупомянутых линий, поскольку, как было показано в секции 2.3, пересечения сингулярных линий разных классов структурно неустойчивы.

Линии $C3$ и $L2$ на рисунке 3.2а образуют зацепление Хопфа (коэффициент зацепления 1). Оно устойчиво, так как образовано линиями сингулярности поляризации разных классов. При этом линия $C3$ оказывается разделённой на четыре фрагмента с различными знаками

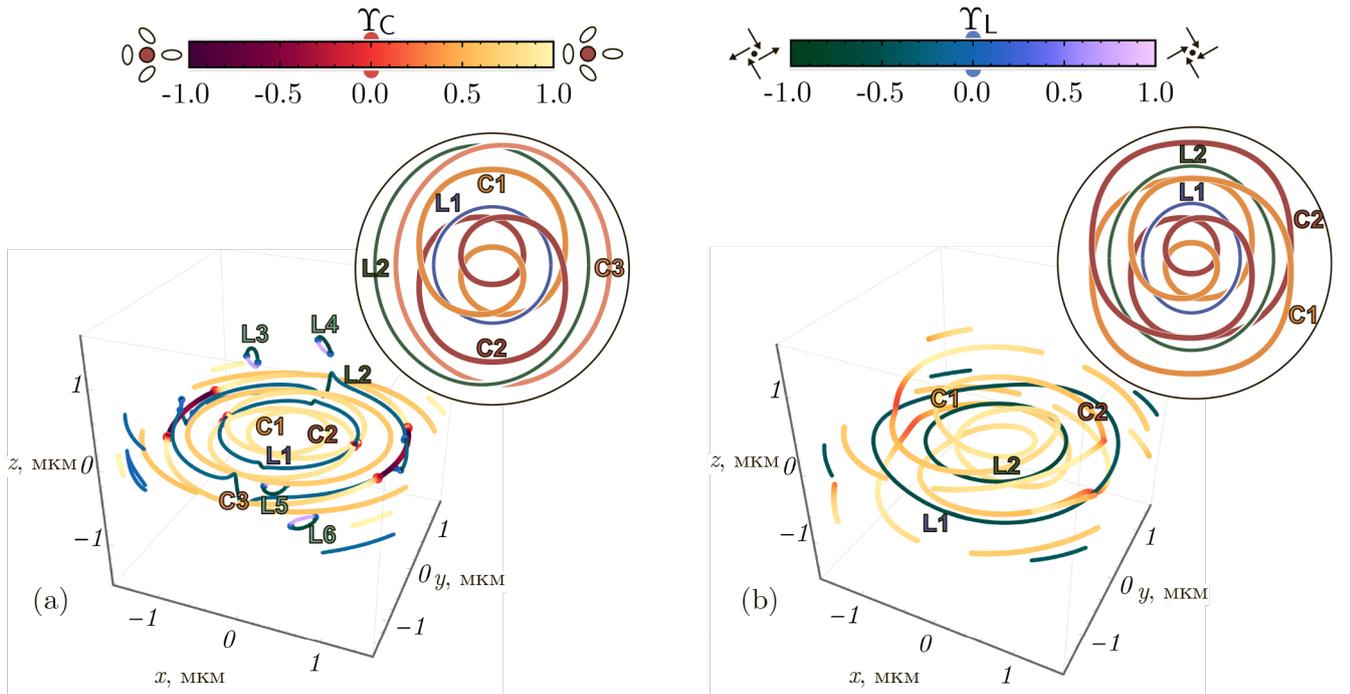


Рис. 3.2: Топологический каркас отражённого параболическим зеркалом остро сфокусированного Гауссова пучка при $M_0 = 0.05$ (a) и $M_0 = 0.9$ (b). Цвет линий соответствует значениям параметров изотропии Υ_C и Υ_L . На круглых врезках, отражающих принципиальную диаграмму зацепления, каждая линия (кроме L3-L6) обозначена своим цветом, при этом L^T -линии более тонкие, чем C^T -линии.

параметра изотропии (в пределах каждого из них знак Υ_C не меняется). На небольшом удалении от фокальной плоскости находятся не сцепленные ни между собой, ни с какими-либо другими линиями, замкнутые кривые L3, L4, L5 и L6. С ростом M_0 они уменьшаются в размерах и при $M_0 = 0.07$ полностью исчезают, подобно L^T -линиям, наблюдавшимся в секции 2.2, что может быть соотнесено с тривиальностью их зацеплений.

Рост M_0 также приводит к тому, что линии сингулярности круговой поляризации отражённого излучения плавно распрямляются вдоль оси $0z$. Характерные для рисунка 3.2a резкие выступы на L^T -линиях сглаживаются, а параметры Υ_C и Υ_L в точках этих линий практически везде становятся положительными. При $M_0 = 0.87$ линии C1, C2 и C3 пересекаются и пересоединяются. Вследствие этого внешнее и внутреннее зацепления оказываются объединенными в единую конфигурацию с геометрией (6;2)-торического зацепления. Это хорошо видно на рисунке 3.2b, построенном при $M_0 = 0.9$. Коэффициент зацепления линий C1 и C2 в этом случае равен 3. Каждая из них также сцеплена с линиями L1 и L2 по отдельности. При этом коэффициент зацепления каждой из четырёх возможных комбинаций этих линий равен 1. Принципиальная схема описанной геометрии зацеплений линий сингулярности поляризации изображена на круглой врезке рисунка 3.2b. Численные исследования позволяют сделать вывод, что при увеличении M_0 происходят изменения коэффициентов зацепления линий сингулярности поляризации одного класса (C^T -линий в случае $M_0 = 0.9$) друг с другом, в то время как суммарный коэффициент зацепления C^T -линий с L^T -линиями не меняется.

При дальнейшем увеличении M_0 описанная конфигурация разрушается каскадом пересоединений C^T -линий с линиями сингулярности поляризации, лежащими вдали от фокуса зеркала. В результате образуются две вытянутые вдоль оси Oz перекрученные спирали, выходящие за расчетную область, и по всей видимости уходящие в бесконечность. При этом основные L^T -линии $L1$, $L2$, не меняющие своей топологии при любых возможных M_0 , оказываются «нанизанными» на эти спирали.

3.3.2 Лагерр–Гауссов пучок

Как и в предыдущем разделе, единственным параметром, изменение которого качественно меняет пространственную картину линий сингулярности поляризации отражённого излучения вблизи фокуса параболического зеркала, является степень эллиптичности M_0 падающего Лагерр–Гауссова пучка (3.4). При $M_0 \leq 0.3$ (рисунок 3.3а) в топологическом каркасе электрического поля отражённого излучения проявляются особенности центральной области Лагерр–Гауссова пучка. Структура C^T - и L^T -линий в этом случае визуальна очень сложна, $L1$ и более далёкие от оси Oz L^T -линии сильно выступают за пределы фокальной области. С ростом M_0 топологическая картина линий сингулярности поляризации остается неизменной (рисунок 3.3б, с, и d), но меняются размеры и кривизна их отдельных частей. Замкнутые C^T - и L^T -линии оказываются как бы расположенными внутри тора, ось симметрии которого совпадает с Oz . Они образуют часть топологического каркаса электрического поля отражённой волны, визуальна схожую со структурой C^T - и L^T -линий в случае падения на зеркало Гауссова пучка (рисунок 3.2).

Важной специфической особенностью топологического каркаса электрического поля отражённой волны при падении пучка (3.4) является наличие вытянутых вдоль оси Oz в пределах фокальной области линий сингулярности поляризации $L2$, $C2$ и $C3$ (рисунок 3.3а, б, с и d), которые изображены точками на диаграммах зацеплений, показанных на рисунке 3.3е, f и g. Параметр изотропии точек линий $C2$ и $C3$ преимущественно положителен при $M_0 > 0.3$ и преимущественно отрицателен при $M_0 < 0.3$. Линии сингулярности поляризации $L2$, $C2$ и $C3$ являются продуктом распада неустойчивой линии нулевой интенсивности светового поля падающего пучка, существующей при описании Лагерр–Гауссовой моды излучения в параксиальном приближении. Их число в топологическом каркасе электрического поля отражённого излучения обусловлено требованием сохранения суммарного топологического индекса.

При различных значениях M_0 вблизи фокуса зеркала линии сингулярности поляризации образуют зацепления, включающие три замкнутые C^T -линии: $C1$, $C4$ и $C5$, параметр изотропии точек которых преимущественно положителен, и одну $L1$ линию, в точках которой параметр изотропии преимущественно отрицателен. При всех значениях M_0 суммарный коэффициент зацепления всех C^T -линий с линией $L1$ равен 2. При $M_0 < 0.3$ это реализуется благодаря зацеплению $C1$ и $L1$ с коэффициентом зацепления 2 и отсутствию зацепления между другими замкнутыми линиями сингулярности поляризации. В диапазоне $0.3 < M_0 < 0.8$ это значение достигается за счёт зацеплений с коэффициентом зацепления 1 между тремя возможными парами из линий $C1$, $C5$ и $L1$, а также отсутствию зацепления между линией $L1$ и линией

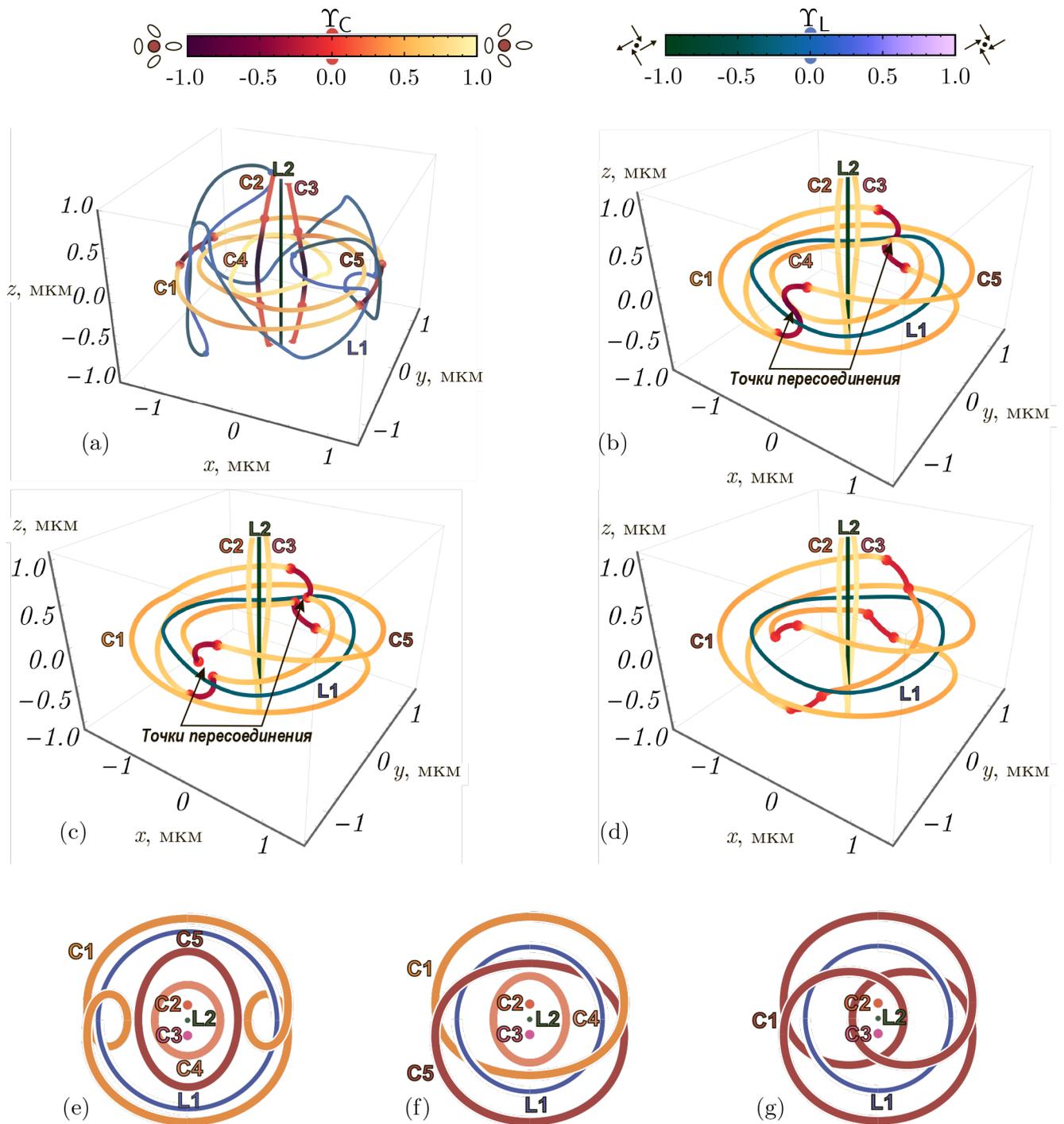


Рис. 3.3: Структура линий сингулярности поляризации отражённого излучения (а–d) и диаграмма их зацеплений (е–g) при острой фокусировке Лагерр–Гауссова пучка при $M_0 = 0.25$ (а и е), $M_0 = 0.82$ (b и f), $M_0 = 0.83$ (c и f) и $M_0 = 0.9$ (d и g).

С4. Каждая из линий L2, С2 и С3 сцеплена с каждой из оставшихся линий. Коэффициент зацепления любой пары этих линий равен 1.

Наиболее заметное изменение топологического каркаса электрического поля отражённой волны происходит при поляризации падающего излучения, близкой к циркулярной. При $M_0 = 0.82$ (рисунок 3.3f) он ещё напоминает каркас электрического поля, характерный для значений $M \approx 0.5$, но на линиях С1 и С5 имеются сильно изогнутые участки, в точках которых параметр изотропии электрического поля отрицателен. Эти участки расположены близко к линии С4 (рисунок 3.3b). Небольшое увеличение M_0 приводит к пересоединению кривых в этой области пространства (рисунок 3.3c), в результате которого три вышеупомянутые замкнутые C^T -линии объединяются в одну, далее обозначаемую как С1. Последняя имеет топологию трилистникового узла (рисунок 3.3g) и геометрию (3; 2)-торического узла. Благодаря этому коэффициент её зацепления с линиями С2, С3 и L2 оказывается равным 3, т.е. сохраняется суммарный коэффициент зацепления вытянутых вдоль оси Oz в фокальной области линий сингулярности поляризации с совокупностью замкнутых линий, образовавшихся в результате пересоединения узел С1. Его коэффициент зацепления с линией L1 равен 2. Дальнейший рост M_0 сопровождается разглаживанием этого узла (рисунок 3.3d) и увеличением его размеров. При этом линия L1 превращается в слегка деформированную окружность, а линии С2, С3 и L1 оказываются лежащими практически в одной плоскости (рисунок 3.3d, g).

3.3.3 Пучок Пуанкаре типа «звезда»

Перейдём к описанию топологического каркаса электрического поля волны, отражённой от параболического зеркала, если на него падает пучок Пуанкаре типа «звезда» ($\Lambda_+ = 0$, а $\Lambda_- = 1$ в формуле (3.5)). Данное поле содержит большое количество сингулярных линий обоих типов, из которых мы ограничимся описанием той их части, которая находится вблизи геометрического фокуса зеркала и образует наиболее сложное зацепление. В широком диапазоне значений μ в этой области пространства присутствует линия сингулярности поляризации С2, а при $0 < \mu < 3$ ещё три L^T -линии: L2, L3 и L4. Эти линии имеют преимущественно отрицательный параметр изотропии. Все кривые в окрестности фокуса вытянуты вдоль оси Oz и расположены от неё на минимальном расстоянии. На диаграммах зацеплений на рисунках 3.4 и 3.5 они показаны точками. На расстоянии около 1 мкм от фокальной плоскости линии сингулярности поляризации закручиваются и приобретают положительный параметр изотропии, причём чем больше μ , тем дальше они расположены от оси Oz и сильнее деформированы.

При $\mu \ll 1$ вблизи линий L2, L3 и L4 также присутствуют три вытянутые вдоль оси Oz C^T -линии. С ростом μ на них образуются ориентированные навстречу друг другу витки, точки которых характеризуются отрицательными значениями параметра изотропии. В результате, при $\mu \approx 0.87$ происходит пересоединение разделённых фокальной плоскостью витков и образуется линия сингулярности поляризации С1, изображённая на рисунке 3.4а, построенном при $\mu = 1$. Эта линия имеет топологию (4; 3)-торического узла, который дополнительно сцеплен с коэффициентом зацепления 3 с замкнутой линией L1 и с коэффициентом

зацепления 4 с каждой из расположенных вдоль оси Oz линий сингулярности поляризации электрического поля отражённой волны. Последние также сцеплены с линией L1 (коэффициент зацепления 1), имеющей форму слегка деформированной окружности.

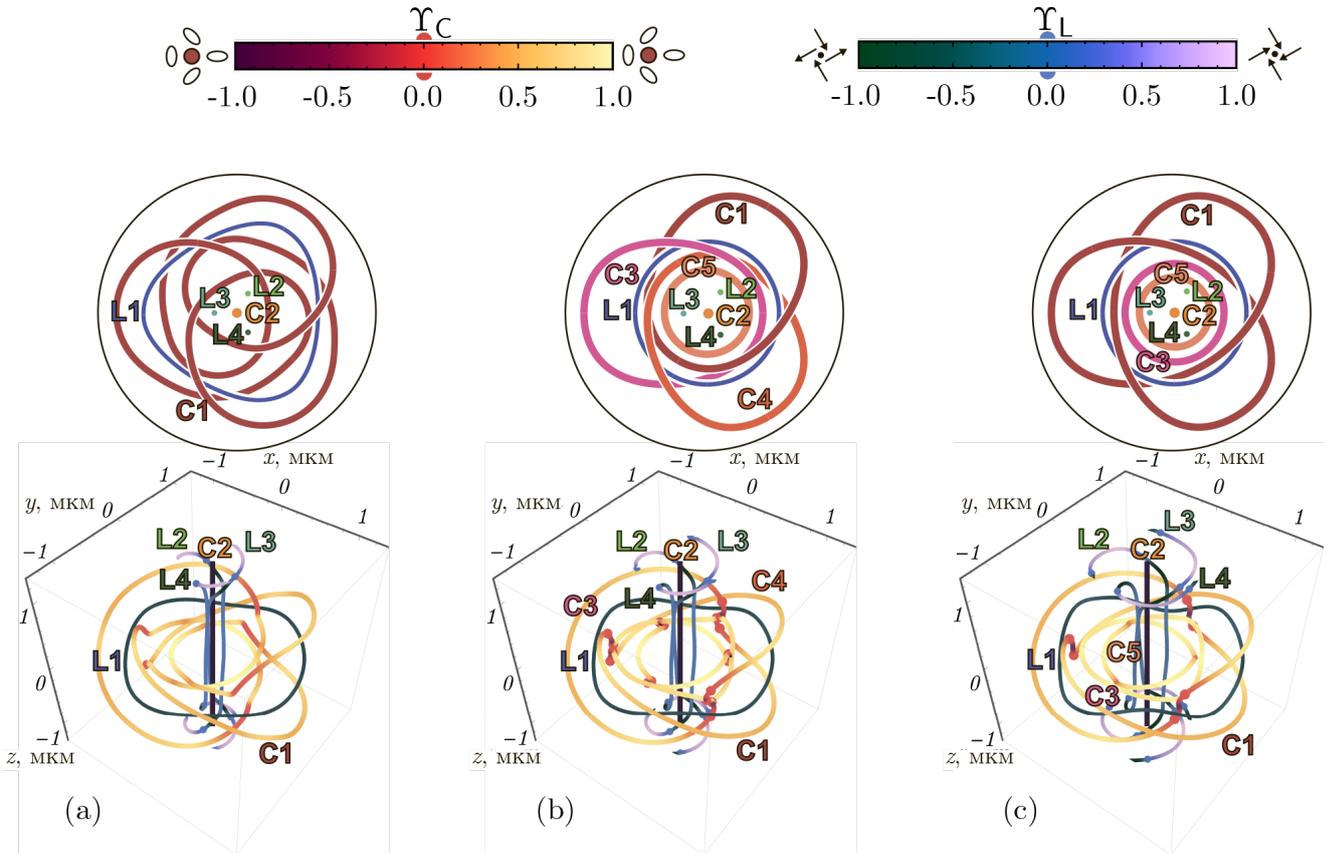


Рис. 3.4: Центральная часть топологического каркаса отражённого зеркалом остро сфокусированного пучка Пуанкаре типа «звезда» при $\mu = 1$ (a), 1.3 (b), 1.8 (c). На круглых врезках приведены диаграммы зацеплений, на которых каждая линия изображена своим цветом, при этом L^T -линии более тонкие, чем C^T -линии.

Дальнейшее увеличение μ сопровождается значительным усложнением структуры топологического каркаса электрического поля отражённой волны. При $\mu \approx 1.2$ происходит ещё одно пересоединение линий сингулярности поляризации, в результате которого линия C1 распадается на три попарно сцепленных друг с другом с коэффициентом зацепления 1 C^T -линии (на рисунке 3.4b, построенном при $\mu = 1.3$, они обозначены C1, C3, и C4) и линию C5, не сцепленную ни с одной из изображённых на рисунке 3.4b кривых. Каждая из линий C1, C2 и C3 также сцеплена с каждой из вытянутых вдоль оси Oz в фокальной области линий сингулярности поляризации C2, L2, L3 и L4 с коэффициентом зацепления 1. При $\mu \approx 1.4$ происходит новое пересоединение изображённых на рисунке 3.4b линий. Его результатом является узел, являющийся трилистником (в наиболее известной его реализации (2; 3)–торического узла), дополненный двумя тривиальными C^T -линиями (C3 и C5). На рисунке 3.4c, построенном при $\mu = 1.8$, он обозначен C1. Подчеркнём, что в процессе всех описанных выше пересоединений сохраняется суммарный коэффициент зацепления между линиями сингулярности поляризации различных классов. В результате пересоединений происходят принципиальные изменения топологии линий сингулярности поляризации при минимальном изменении их

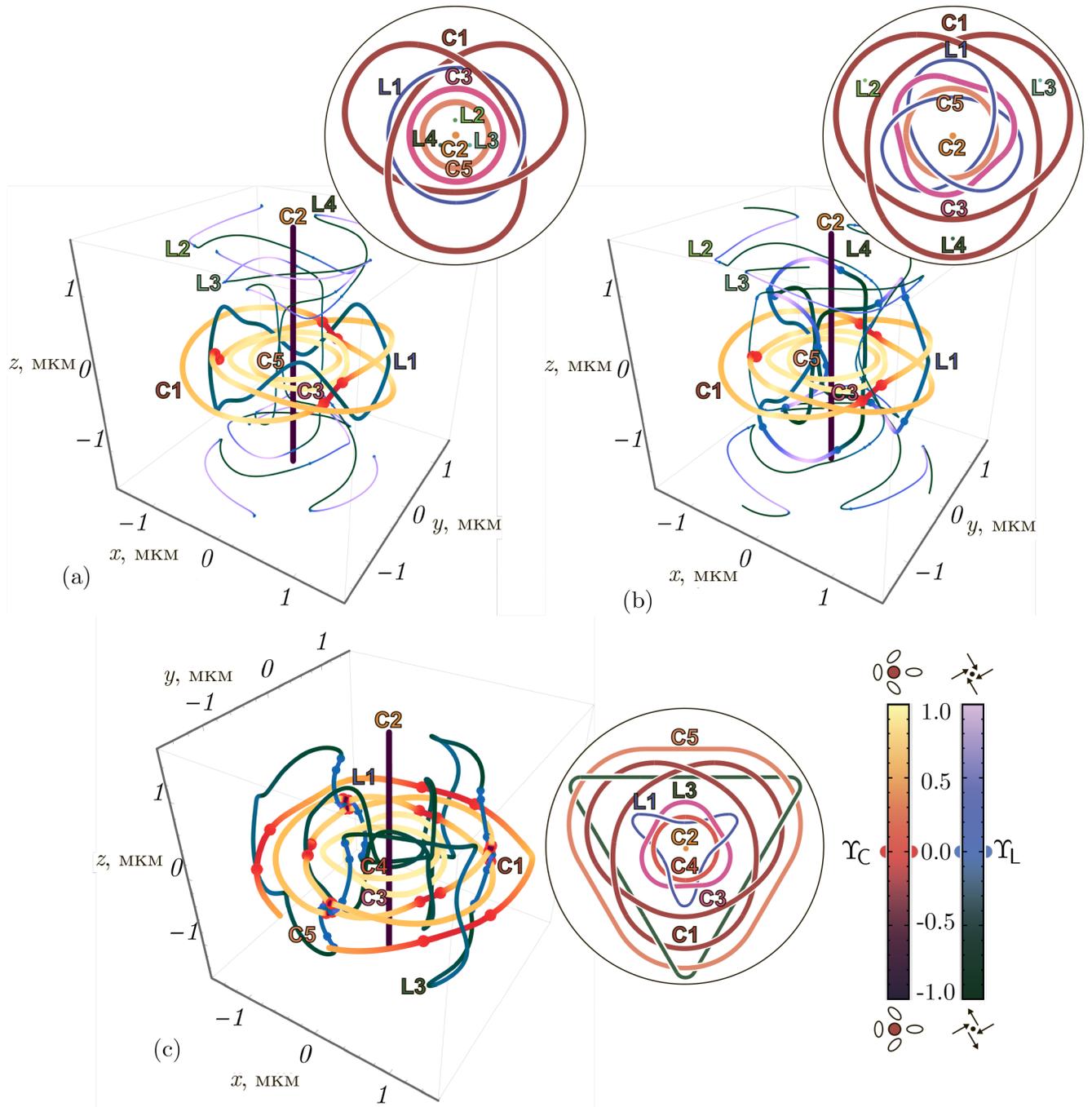


Рис. 3.5: Центральная часть топологического каркаса остро сфокусированного пучка Пуанкаре типа «звезда» при $\mu = 3$ (a), 3.6 (b), 5 (c) На круглых врезках к рисункам а–с изображены соответствующие им диаграммы зацеплений линий сингулярности поляризации электрического поля. Для лучшей видимости незамкнутые в области построения L^T -линии изображены более тонкими кривыми.

геометрии. При этом после «прохождения точки пересечения», вызванной увеличением μ , C^T -линии отходят друг от друга на очень малое по сравнению с характерными размерами зацепления расстояние. Перед пересоединением линий сингулярности поляризации происходит изменение знака (с положительного на отрицательный) их параметра изотропии в тех точках одной из участвующих в пересоединении линий, которые находятся вблизи области пространства, где это пересоединение произойдет.

При дальнейшем увеличении μ (рисунок 3.5) все C^T -линии, исключая $C2$, не изменяя своей топологии прижимаются к фокальной плоскости, а незамкнутые L^T -линии становятся более вытянутыми вдоль оси $0z$ и удаленными от неё в окрестности фокуса зеркала. Вдали от него участки этих L^T -линий выгибаются в сторону фокальной плоскости, а параметр изотропии вблизи изгибов меняется с отрицательного на положительный. Концы таких L^T -линий на рисунке 3.5а ($\mu = 3$) имеют фиолетовый цвет. Одновременно с этим на замкнутой линии $L1$ появляются почти симметричные относительно фокальной плоскости гребни. В результате с ростом μ L^T -линии изменяются по схожему с проиллюстрированным рисунком 3.4 сценарию изменения C^T -линий, и при $\mu \approx 3.3$ происходит их пересоединение, в результате которого возникает трилистниковый узел $L1$, изображённый на рисунке 3.5b, построенном при $\mu = 3.6$. Он оказывается сцепленным с коэффициентом зацепления 3 с линиями $C3$ и $C5$ по отдельности, но не образует зацепления с узлом $C1$ (см. врезку к рисунку 3.5b).

Пересоединение при $\mu \approx 3.3$ является единственным обнаруженным нами пересоединением, происходящим с изменением суммарного коэффициента зацепления между линиями разных классов. Узел $C1$, существующий при $\mu < 3.3$, сцеплен с каждой из вытянутых вдоль оси $0z$ в фокальной области линий $L2$, $L3$, $L4$ с коэффициентом зацепления 2 и с замкнутой линией $L1$ с коэффициентом зацепления 3 (рисунок 3.4а). При этом суммарный коэффициент зацепления $\mathcal{L}_1 = 3 \times 2 + 1 \times 3 = 9$. При $\mu > 3.3$ узел $C1$ оказывается сцепленным с коэффициентом зацепления 1 с каждой из линий $L2$, $L3$ и $L4$, проходящих через образованные им «проушины» (а не его центральную область), и не сцепленным с линией $L1$ (рисунок 3.4b). В итоге суммарный коэффициент зацепления становится меньше: $\mathcal{L}_2 = 3 \times 1 + 1 \times 0 = 3$.

Такое изменение связано с невозможностью однозначного определения направлений обходов линий сингулярности линейной поляризации, а следовательно и знаков коэффициентов их зацепления. Поэтому в ходе пересоединения двух линий одного класса коэффициент зацепления может меняться на кратную 2 величину, если участвующие в нём линии взаимодействуют как ориентированные противоположно. Падающий на зеркало пучок Пуанкаре типа звезда обладает осью симметрии третьего порядка для распределения эллипсов поляризации в плоскости перетяжки. При этом в пересоединении одновременно принимают участие три линии. Это приводит к изменению коэффициента зацепления между $C1$ и L^T -линиями при таком пересоединении на минимальную допустимую симметрией и чётностью величину, равную 6. Однако равный 3 коэффициент зацепления L^T -линий с имеющей тривиальную топологию линией $C3$ ($C5$) в этом случае не меняется. Если бы в результате пересоединения коэффициент зацепления этих линий также уменьшился на 6, то он стал бы равным -3 . При этом новое зацепление оказалось бы неотличимо от зацепления с коэффициентом 3 в силу упомянутой неопределённости знака. Последнее может служить объяснением изменения суммарного коэффициента зацепления при одном пересоединении и его постоянства при

другом, несмотря на обусловленность обоих этих процессов изменением геометрии одних и тех же линий сингулярности поляризации.

Отметим особо, что благодаря однозначной определенности вектора Ω_C , для пар двух C^T -линий взаимная ориентация определима, поэтому не любые две линии круговой поляризации могут изменить описанным образом свой индекс зацепления с L^T -линиями в процессе пересоединения. Нами не было обнаружено ни одного подобного пересоединения, хотя при некоторых взаимных ориентациях C^T -линий они теоретически возможны. В описанном выше пересоединении принимают участие L^T -линии, неопределенность направления касательного директора Ω_L к которым была обоснована в подсекции 1.2.1¹.

При относительно большом вкладе Гауссовой компоненты в полную напряжённость электрического поля падающего на зеркало пучка ($\mu \approx 3.7$) происходит новое пересоединение, в результате которого изображённый на рисунке 3.5b L^T -узел распадается на две замкнутые тривиальные линии L1 и L3 (рисунок 3.5c). Первая из них по отдельности сцеплена с линиями C3 и C4 с коэффициентом зацепления 3 и с линией C2 с коэффициентом зацепления 1. Вторая (L3) оказывается сцепленной с коэффициентом зацепления 3 с линией C1 и ещё одной тривиальной замкнутой C^T -линией большего радиуса, ранее не являвшейся частью того же зацепления. Эта линия не показана на диаграмме зацеплений на врезке к рисунку 3.5c. Описанное зацепление, как и большинство встреченных нами в настоящей работе, происходит с сохранением суммарного коэффициента зацепления C^T - и L^T -линий, несмотря на изменение их числа.

3.3.4 Пучок Пуанкаре типа «лимон»

В плоскости перетяжки распределение эллипсов поляризации электрического поля падающего на параболическое зеркало пучка Пуанкаре типа «лимон» ($\Lambda_+ = 1$, $\Lambda_- = 0$ в выражении (3.5)) не обладает осью симметрии. В точке $(0, 0, -f)$ поле имеет сингулярность поляризации с индексом $+1/2$. При $\mu \ll 1$ в формуле (3.5) топологический каркас электрического поля отражённого излучения содержит вытянутую вдоль оси $0z$ вблизи фокуса C^T -линию, рядом с которой также расположена сложенная втрое L^T -линия, ориентированная в фокальной плоскости вдоль оси $0z$. На удалении от последней находятся три спиралевидных C^T -линии. Наконец, при таких μ две замкнутые L^T -линии окружают ось $0z$, образуя слегка деформированные окружности. Из-за отсутствия симметрии в распределении эллипсов поляризации в падающем пучке параметры изотропии C^T - и L^T -линий меняются в широком диапазоне при движении вдоль линий.

Начиная с $\mu \approx 0.1$, с ростом этого параметра происходит существенное усложнение описанного выше каркаса электрического поля, сопровождающееся последовательностью многочисленных пересоединений и расщеплений линий сингулярности поляризации. Так при $\mu = 1.5$ образуются зацепления с коэффициентом зацепления 1 между двумя линиями различного класса. Далее C^T -линия ранее образовавшегося зацепления дополнительно сцепляется с ещё одной замкнутой C^T -линией. Это происходит при $\mu = 2$, а при $\mu = 3$ эти две C^T -линии уже расщепляются, но одна из них остается сцепленной с круговой L^T -линией.

¹см. стр. 26

Кроме этого появляется C^T -линия, сцепленная со всеми остальными замкнутыми линиями топологического каркаса с коэффициентом зацепления 1.

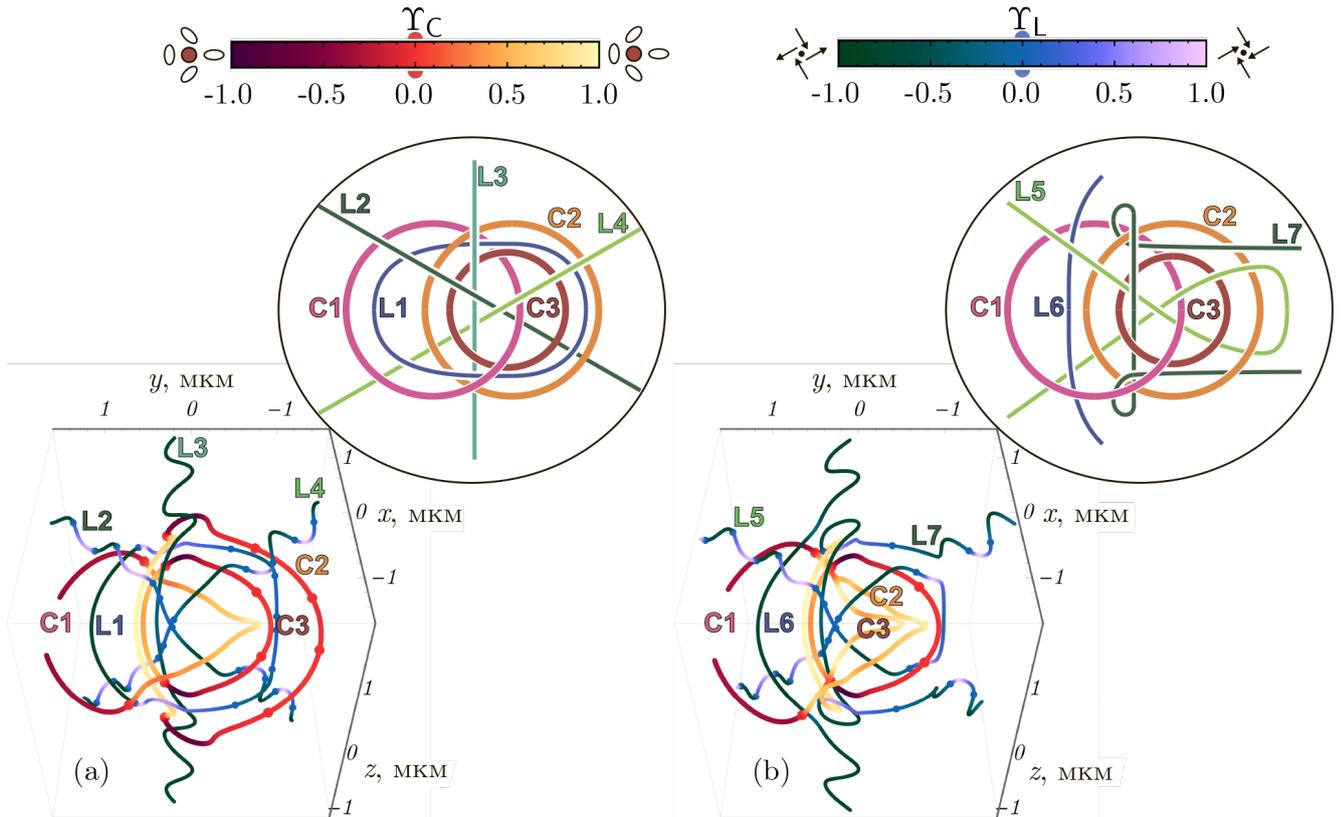


Рис. 3.6: Центральная часть топологического каркаса отражённого параболическим зеркалом пучка Пуанкаре типа «лимон» при $\mu = 3.5$ (a) и 4 (b). На овальных врезках приведены соответствующие диаграммы зацеплений, где каждая линия обозначена своим цветом.

Детальное описание всех происходящих при увеличении μ изменений картины многочисленных переплетений линий сингулярности поляризации электрического поля едва ли возможно. Поэтому ограничимся формулировкой основных закономерностей трансформации топологического каркаса электрического поля отражённого излучения, происходящей в этом случае. Во-первых, в тех диапазонах значений μ , в которых число замкнутых линий сингулярности поляризации остается постоянным, не меняются значения коэффициентов зацепления между любыми двумя линиями различного класса. Во-вторых, если в ходе пересоединений происходит размыкание линий сингулярности поляризации, то сохраняется суммарный коэффициент зацепления каждой из сохранившихся замкнутых C^T - (L^T -) линий со всей системой L^T - (C^T -) линий.

Эту закономерность иллюстрируют рисунки 3.6a и 3.6b, построенные, соответственно, до ($\mu = 3.5$) и после ($\mu = 4$) пересоединения линий сингулярности поляризации электрического поля, происходящего при $\mu \approx 3.7$. В ходе последнего кольцевая линия L1 на рис. 3.6a размыкается, соединяясь с аксиальными линиями L2, L3 и L4. Коэффициенты зацепления между парами линий сингулярности поляризации электрического поля разных классов до и после этого пересоединения сведены в таблицу 3.1. В ней они находятся на пересечениях строк, обозначенных соответственно принимающим в этих зацеплениях участие C^T -линиям C1, C2

$\mu = 3.5$						$\mu = 4$				
Линии	L1	L2	L3	L4	сумма	Линии	L5	L6	L7	сумма
C1	1	1	1	1	4	C1	2	1	1	4
C2	1	1	1	1	4	C2	2	0	2	4
C3	0	1	1	1	3	C3	2	0	1	3

Таблица 3.1: Коэффициенты зацепления между различными типами линий сингулярности поляризации электрического поля отражённого излучения при падении на него пучка Пуанкаре типа «лимон» при $\mu = 3.5$ и $\mu = 4$.

и C3, со столбцами, обозначенными соответственно принимающим в них участие L^T -линиям: L1, L2, L3 и L4 при $\mu = 3.5$, и L5, L6 и L7 при $\mu = 4$. В ячейках столбцов «сумма» приведён суммарный коэффициент зацепления конкретной C^T -линии со всей совокупностью L^T -линий до и после пересоединения. Видно, что при нём сохраняется не только полный коэффициент зацепления всех C^T -линий со всеми L^T -линиями, но и суммарный коэффициент зацепления каждой из C^T -линий с L^T -линиями. Первый в рассмотренном случае равен 11. При этом конкретный набор образующих его слагаемых меняется.

§ 3.4 Оптические ленты электрического поля при острой фокусировке низших пространственных мод лазерного излучения

В работе [152] было отмечено, что вблизи оси пучка Пуанкаре типа «звезда» можно наблюдать нетривиальные оптические ленты: ленты векторов большой и малой полуосей эллипсов поляризации, прослеженные вдоль контуров в виде окружностей, целиком лежащих в фокальной плоскости и имеющих малый (в сравнении с f, w) радиус. Наблюдавшиеся как в лабораторном, так и в численном эксперименте, эти ленты имели коэффициент перекручивания, равный $3/2$ в описанной задаче. Как уже упоминалось выше, ленты этого типа являются сравнительно редкими и асимптотически неустойчивыми [72] даже среди лент, описанных вблизи сингулярной линии: в большинстве случаев, оптические ленты Мёбиуса, описанные вокруг C^T -линии на круговых контурах, имеют $\mathcal{F}_W = \pm 1/2$.

Различие между этими двумя типами оптических лент Мёбиуса может быть также проведено на языке узлов: любая неориентируемая лента (обладающая полуцелым индексом перекручивания) имеет только один край, образующий замкнутую кривую (узел). Однако, только для лент с $\mathcal{F}_W = \pm 1/2$ этот узел будет гомотопически эквивалентен окружности [255]. Для более сложных реализаций ленты Мёбиуса её край оказывается завязан в нетривиальный узел, в частности, для лент с индексами перекручивания $\pm 3/2$ — в трилистниковый узел. Таким образом, интересной особенностью данной оптической ленты Мёбиуса является тот факт, что топология её края повторяет топологию узла C1, присутствующего в топологическом каркасе содержащего описываемую ленту поля.

В [152] оптическая лента строилась вдоль окружности фиксированного радиуса $R_0 =$

150 нм. Наша симуляция показывает, однако, что топология оптической линты значительно зависит от радиуса R контура построения, поскольку определяется числом C^T -линий, с которыми сцеплен данный контур. Форма топологического каркаса поля остро сфокусированного пучка Пуанкаре типа «звезда», как было показано в подсекции 3.3.3, такова, что центрированный на геометрическом фокусе контур в виде окружности, лежащей в фокальной плоскости, охватывает аксиальную линию круговой поляризации $C2$ при любом значении его радиуса. Поэтому, в пределе $R \rightarrow 0$ оптические линты как вектора \vec{A} , так и вектора \vec{B} , имеют неориентируемую топологию с $\mathcal{T}_W = 3/2$. Пример такой линты изображён на рисунке 3.7а (внутренняя линта). Важно отметить, что знаки индекса перекручивания для линт обеих полуосей эллипса поляризации совпадают, что статистически редко наблюдалось в задачах, описанных в главе 2.

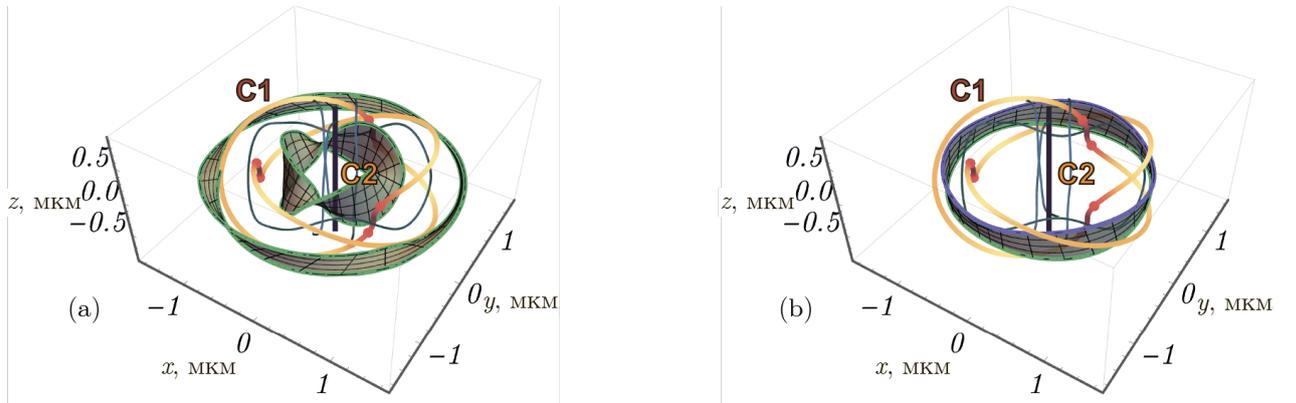


Рис. 3.7: Примеры ориентируемой (b) и неориентируемых (a) оптических линт директоров большой оси эллипса поляризации, наблюдаемых вдоль круглых контуров в фокальной плоскости при острой фокусировке пучка Пуанкаре типа «звезда» ($\mu = 3$). C^T -линии изображены толстыми кривыми в тёплых тонах, L^T -линии — тонкими в холодных тонах.

Если увеличивать R , не меняя ориентации и центра контура построения, то при превышении им некоторого значения R_1 контур пересекает внутренние витки узловой C^T -линии $C1$, причём в следствие симметрии поля одновременно в трёх точках. В следствие этого коэффициент зацепления \mathcal{L}_C контура построения с системой C^T -линий становится чётным, а следовательно оптические линты директоров \vec{A} , \vec{B} приобретают ориентируемую топологию с $\mathcal{T}_W = 0$ (рисунок 3.7b). С дальнейшим увеличением радиуса контура построения им достигается значение R_2 , при котором контур вновь пересекает линию $C1$ в трёх точках внешних витков, в результате чего значение \mathcal{L}_C становится снова равным единице, и линта опять приобретает неориентируемую топологию с $\mathcal{T}_W = 3$ (рисунок 3.7а, внешняя линта). Точные значения $R_{1,2}$ зависят от параметра μ . Так для изображённых на рисунке 3.7 случаев $\mu = 3$ $R_1 \approx 0.96$ мкм, $R_2 \approx 1.34$ мкм.

В электрическом поле излучения моды Пуанкаре типа «лимон», остро сфокусированной таким же параболическим зеркалом, при сравнительно малых значениях μ также присутствует аксиальная линия, значительно деформирующаяся с ростом этого параметра. В её окрестности могут аналогичным образом наблюдаться оптические линты Мёбиуса директоров \vec{A} и \vec{B} (рисунок 3.8а), однако в данной моде излучения их индекс перекручивания

равен $1/2$, что соответствует статистически более устойчивой конфигурации, ожидаемой в условиях отсутствия у поля специальных симметрий. Тем не менее, и в этом случае для контуров построения, целиком лежащих в одной плоскости, оптические ленты обеих полуосей эллипса поляризации имеют одинаковые знаки индекса перекручивания. Как и в случае моды Пуанкаре типа «звезда», увеличение радиуса построения ленты приводит к изменению её топологии (рисунок 3.8b) при каждом пересечении контуром новой C^T -линии, однако в отсутствие дополнительных симметрий, эти пересечения происходят по одному, а не по три одновременно, как это наблюдалось в поле остро сфокусированного пучка типа «звезда».

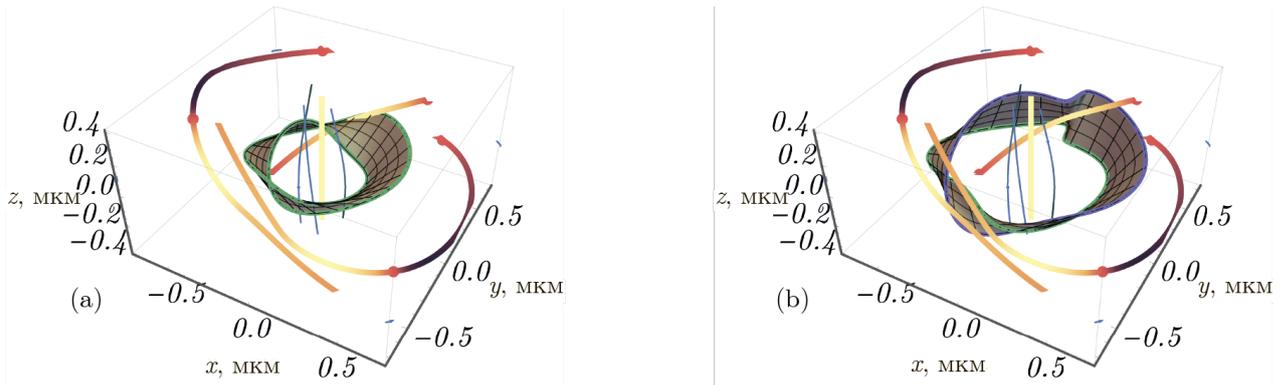


Рис. 3.8: Примеры ориентируемой (b) и неориентируемых (a) оптических лент директоров большой оси эллипса поляризации, наблюдаемых вдоль круглых контуров в фокальной плоскости при острой фокусировке пучка Пуанкаре типа «лимон» ($\mu = 1$). C^T -линии изображены толстыми кривыми в тёплых тонах, L^T -линии — тонкими в холодных тонах.

Резюмируя эти наблюдения, можно отметить, что в обеих вариациях остро сфокусированного пучка Пуанкаре в фокальной плоскости наблюдаются неориентируемые оптические ленты двунаправленных векторов большой и малой полуосей эллипса поляризации с равными значениями индексов перекручивания и краем, топологически эквивалентным наиболее протяжённой замкнутой C^T -линии в прифокальной области поля.

Основные результаты третьей главы

Установлено, что при острой фокусировке низших пространственных мод лазерного излучения линейным параболическим зеркалом вблизи фокуса возникает электрическое поле, топологический каркас которого включает нетривиальные узлы и зацепления: если в плоскости перетяжки распределение эллипсов поляризации поперечной компоненты электрического поля падающего на зеркало пучка имеет ось симметрии, то в широком диапазоне характеризующих его поляризацию параметров в отраженном излучении около фокуса зеркала существует по крайней мере одна замкнутая L^T -линия с топологией простого кольца, около которой C^T -линии образуют $(m; n)$ -торический узел, где числа m и n определяются параметрами падающего пучка. Этот узел всегда m -кратно сцеплен с осью, вдоль которой пучки падают на зеркало, и n -кратно сцеплен с вышеупомянутой L^T -линией, в точках которой параметр изотропии электрического поля отрицателен.

При изменении степени эллиптичности Гауссова и Лагерр–Гауссова пучков и параметров, определяющих поляризацию пучка Пуанкаре, происходит трансформация находящейся вблизи фокуса части топологического каркаса электрического поля, сопровождающаяся множеством различных пересоединений и расщеплений C^T - и L^T -линий. Как правило, вблизи точки пространства, где ожидается пересоединение линий сингулярности поляризации, происходит их значительное искривление. Кроме того, параметр изотропии электрического поля в точках одной из этих линий вблизи области возможного пересоединения отличается знаком от параметра изотропии в точках другой линии, находящейся вблизи первой.

Практически при всех состояниях поляризации падающего на зеркало пучка торические узлы образуются только C^T -линиями, в точках которых параметр изотропии электрического поля преимущественно положителен. При этом коэффициенты m и n не превосходят 3. Однако для специальных состояний поляризации падающего на зеркало пучка Пуанкаре возможно существование в электрическом поле отраженного излучения более сложных узлов C^T -линий, а также завязанной в трилистниковый узел L^T -линии.

Установлено, что в тех диапазонах значений степени эллиптичности Гауссова и Лагерр–Гауссова пучков и параметров, определяющих поляризацию пучка Пуанкаре, в которых число замкнутых C^T - и L^T -линий в отражённом зеркалом излучении не меняется, значения коэффициентов зацепления между любыми линиями сингулярности поляризации различных типов остаются постоянными. Пересоединения между сингулярными линиями, возникающие в результате изменений распределений эллипсов поляризации в плоскости перетяжки падающих на зеркало пучков происходят с сохранением суммарного коэффициента зацепления между C^T - и L^T -линиями. Редкие исключения из этого правила, при которых суммарный коэффициент зацепления в результате пересоединения меняется на четное число, объясняются тем, что коэффициент зацепления для неориентированных кривых определяется с точностью до знака.

Продемонстрировано, что вблизи линий сингулярности поляризации отражённого излучения существует большое число оптических лент, образуемых в результате движения по окружностям малого радиуса вектора, задающего направление главной оси эллипса поляризации электрического поля. Среди них встречаются ленты с различным значением коэффициента перекручивания, в том числе ленты Мёбиуса, причем для пучков Пуанкаре топология и симметрия края этих лент совпадает с топологией и симметрией наиболее протяженной C^T -линии топологического каркаса из числа не вытянутых вдоль оси симметрии зеркала.

Показано, что при увеличении контура построения оптической ленты Мёбиуса в фокальной плоскости пучка Пуанкаре её топология может меняться на ориентируемую и обратно в зависимости от зацепления между контуром построения ленты и сингулярностями циркулярной поляризации в топологическом каркасе электрического поля. Подтверждено, что в полях острой фокусировки таким образом продолжает выполняться введённое в главе 2 правило ориентируемости оптических лент векторов осей эллипса поляризации в том и только том случае, когда суммарный индекс зацепления контура построения с C^T -линиями имеет чётное значение.

Глава 4

Особенности протекания процессов нелинейной дифракции и удвоения частоты световых пучков и импульсов, содержащих сингулярности поляризации, и их использование в задачах, решаемых с помощью методов глубокого машинного обучения

§ 4.1 Фазовые и поляризационные сингулярности и методы машинного обучения в нелинейной оптике: Обзор литературы

Значительное количество работ, посвящённых динамике топологических особенностей света в нелинейно-оптических процессах, выходит с девяностых годов прошлого века [109]. Большая их часть, однако, посвящена фазовым сингулярностям. Среди них нужно выделить работы, указывающие на возможность образования фазовых сингулярностей при нелинейной дифракции оптического излучения в газах [6] и кристаллах [28; 127], большое число статей посвящённых распространению в нелинейных средах стабильных импульсов, содержащих фазовую сингулярность, получивших название «тёмных» или «вихревых» солитонов [34; 100; 105], включая также последние работы, посвящённые вихревым солитонам, линии сингулярности фазы в которых могут образовывать нетривиальные узлы и зацепления [240]. Выходят работы, посвящённые особенностям протекания таких классических нелинейных процессов как самофокусировка [180; 236], фазовая самомодуляция [140] генерация второй гармоники [193], при которой происходит характерное удвоение топологического индекса в сигнальном пучке [140; 161]; четырёхволновое смешение [40; 133] и генерация гармоник высших порядков [38; 80]. Показано, что при нелинейном взаимодействии сингулярные пучки могут обмениваться топологическими индексами как между несколькими оптическими [159], так и между оптической и акустической волнами [220]. Нелинейно-оптические процес-

сы также позволяют осуществлять эффективную генерацию сингулярных пучков с тонкой модуляцией их топологических характеристик [54; 92]. При помощи нелинейного взаимодействия акустических сингулярных пучков экспериментально продемонстрирован [129] метод осуществления арифметических операций.

Менее изучена нелинейно-оптическая роль поляризационных сингулярностей. Исследование этой области началось только в первое десятилетие текущего века с работ, посвящённых возникновению поляризационных сингулярностей в процессе генерации второй гармоники [62]. Большое число режимов генерации возможно при генерации второй гармоники и суммарной частоты в зависимости от углов падения и начальных состояний поляризации оптического излучения, а также свойств нелинейной среды [86; 125; 197]. Для двуцветных полей, возникающих в процессе генерации второй гармоники [102], и более сложных полихроматических полей [63] предложены свои способы классификации сингулярных состояний, соответствующих в данном случае вырождению фигур Лиссажу, описываемых концом вектора электрической напряжённости в таких полях. Схожие процессы образования поляризационных сингулярностей наблюдаются при генерации третьей гармоники [204] и самофокусировке [82]; образование поляризационных сингулярностей может являться характерной особенностью распространения света через жидкие кристаллы [124] и наноструктурированные метаматериалы [138; 238].

В последние годы сингулярная нелинейная оптика начинает оформляться как отдельное направление в нелинейной электродинамике, о чём свидетельствуют обзорные исследования, выходящие с соответствующими заголовками [111; 126; 178]. Значительный прогресс в этой области был достигнут благодаря работам [82; 86; 125; 197; 204] сотрудников нашей лаборатории и кафедры.

В то же время, роль поляризационных сингулярностей в нелинейно-оптических процессах остаётся исследованной существенно хуже, чем фазовых. В данной главе будут рассмотрены две задачи, касающиеся классических нелинейных эффектов: самофокусировки и генерации второй гармоники. В отличие от предыдущих глав, мы ограничимся здесь рассмотрением сингулярностей поляризации в параксиальном приближении.

Параграф 4.2 посвящён самофокусировке пучков, содержащих поляризационную сингулярность. Это классический пример нелинейно-оптического эффекта, исследование влияния поляризационных и энергетических свойств излучения в ходе которого привлекает большое внимание исследователей [41; 175], включая работы нашей кафедры [82; 195]. В этих работах, в частности, было показано, что в ходе самофокусировки пучков с изначально однородным поляризационным профилем, могут возникать нетривиальные распределения поляризации, содержащие в том числе сингулярные линии.

Развитие методов численного моделирования и, в первую очередь, рост вычислительных мощностей сделали сравнительно легко реализуемой точную симуляцию взаимодействия электромагнитного излучения с веществом в большом числе задач, в том числе требующих для своего описания решения систем сложных нелинейных дифференциальных уравнений в трёх и более измерениях. Однако, экспериментальное определение характеристик нелинейного отклика сред, необходимых для соотнесения теоретических результатов с прикладными может во многих случаях быть весьма непростым. В работе [242] показано, что характер

изменения световых пучков, содержащих сингулярности фазы и поляризации, по мере их распространения через нелинейно-оптический кристалл может использоваться для исследования свойств этого кристалла.

Одним из перспективных подходов к решению подобных обратных задач нелинейной оптики, является [198] чрезвычайно бурно развивающееся в последние годы семейство алгоритмов, основанных на использовании искусственных нейронных сетей. Активно проникая во все научные области, включая также и нелинейную оптику [31; 78; 198], эти методы регулярно показывают неожиданно хорошие результаты в задачах, ранее казавшихся практически неразрешимыми алгоритмически. Насколько нам известно, до сих пор ни в одной работе решение задач нелинейной оптики методами глубокого машинного обучения не осуществлялось с учётом поляризационного профиля электромагнитной волны. Задачей нашего исследования стало изучение перспектив данного класса алгоритмов при решении обратной задачи самофокусировки светового пучка в изотропной гиротропной среде: определения параметров нелинейно-оптического отклика среды, отвечающих за этот процесс по амплитудно-поляризационному профилю излучения, прошедшего данную среду.

Параграф 4.3 посвящён генерации второй гармоники. Хотя этот эффект знаменит, в частности, своим «первенством» среди всех явлений лазерной эры нелинейной оптики [81] и был исследован в глубочайших подробностях, по-прежнему выходят в свет работы, предлагающие новые схемы реализации и уточняющие особенности протекания данного явления. Так представляет интерес влияние поляризации излучения на эффективность этого процесса [56; 179]. Актуальные работы выходят также по вопросу возможности формирования разного типа топологических особенностей излучения в этом процессе [11; 85], а также механизмов нелинейного отклика, позволяющих обойти классический запрет на генерацию второй оптической гармоники в объёме изотропной среды [89], в том числе с использованием пучков электромагнитного излучения, содержащих сингулярность фазы [37; 38].

Мы показываем, что пучки с сингулярным распределением поляризации также позволяют обойти этот запрет и демонстрируем два различных механизма нелинейного отклика среды, позволяющих наблюдать такую генерацию.

Основные результаты этой главы опубликованы в статьях [114; 192] и тезисах конференций [123; 246], а также доложены на XXIV Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов – 2017» и конкурсе курсовых работ курса «Нейронные сети и их применение в научных исследованиях» 2021 некоммерческого фонда развития науки и образования «Интеллект».

§ 4.2 Решение обратной задачи самофокусировки сингулярного светового пучка в изотропной гиротропной среде с использованием методов глубокого машинного обучения

4.2.1 Постановка задачи

Изотропия исследуемой среды означает симметрию её отклика вдоль декартовых координат x и y , но не гарантирует одинакового отклика на излучение с противоположными направлениями вращения вектора \mathcal{E} . Поэтому при математической постановке задачи удобно использовать базис циркулярно поляризованных волн $E_{\pm} = (E_x \pm iE_y)/\sqrt{2}$.

Отделяя поляризационные эффекты от амплитудных, нам также будет удобно рассматривать комплексную амплитуду пучка E_{\pm} в форме

$$E_{\pm}(x, y, z) = E_0 \mathcal{A}_{\pm}(x/w, y/w, z/l_{df}), \quad (4.1)$$

где E_0 — общая амплитуда светового пучка, \mathcal{A} — безразмерная амплитуда в данной точке, w — параметр ширины, l_{df} — дифракционная длина в свободном пространстве. Для простоты обозначений, мы будем также использовать безразмерные координаты $x = x/w, y = y/w, z = z/l_{df}$. Самофокусировка и нелинейная дифракция пучка в изотропной среде с кубической нелинейностью может быть описана параболическими уравнениями

$$\partial_z \mathcal{A}_{\pm} - \frac{i}{4} \nabla_{\perp}^2 \mathcal{A}_{\pm} = i(\alpha_{\pm} |\mathcal{A}_{\pm}|^2 + \beta_{\pm} |\mathcal{A}_{\mp}|^2) \mathcal{A}_{\pm}, \quad (4.2)$$

где $\nabla_{\perp} = \{\partial_x, \partial_y\}$, константы $\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}$ пропорциональны E_0^2 и зависят от тензора нелинейной диэлектрической восприимчивости, исчерпывающе характеризующая кубический отклик в случае изотропной гиротропной среды.

Задача разработанной нейронной сети состояла в определении четвёрки параметров $\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}$, анализируя поперечное распределение интенсивности и поляризации светового пучка, прошедшего через данную среду (в координате $z = 1$) для пучков, на входной плоскости $z = 0$ принадлежащих к одному из четырёх фиксированных типов:

- Эллиптически поляризованный Гауссов пучок:

$$\begin{cases} \mathcal{A}_+(x, y, 0) = \exp(-x^2 - y^2) \\ \mathcal{A}_-(x, y, 0) = 2^{-1/2} \exp(-x^2 - y^2) \end{cases} \quad (4.3)$$

- Эллиптически поляризованный Супергауссов пучок:

$$\begin{cases} \mathcal{A}_+(x, y, 0) = \exp(-2(x^2 - y^2)^2) \\ \mathcal{A}_-(x, y, 0) = 2^{-1/2} \exp(-2(x^2 - y^2)^2) \end{cases} \quad (4.4)$$

- Линейно поляризованный Лагерр-Гауссов пучок:

$$\begin{cases} \mathcal{A}_+(x, y, 0) = \sqrt{e(x^2 + y^2)} \exp(-x^2 - y^2) \\ \mathcal{A}_-(x, y, 0) = \sqrt{e}(x + iy) \exp(-x^2 - y^2) \end{cases} \quad (4.5)$$

- Пучок Пуанкаре:

$$\begin{cases} \mathcal{A}_+(x, y, 0) = \sqrt{2}(x + iy) \exp(-x^2 - y^2) \\ \mathcal{A}_-(x, y, 0) = \exp(-x^2 - y^2) \end{cases} \quad (4.6)$$

Амплитуды всех пучков нормализованы таким образом, что максимальные интенсивности на входе в среду ($z = 0$) у них совпадают. Два последних пучка в этом наборе являются сингулярными: Лагерр–Гауссов содержит на своей оси фазовую, а пучок Пуанкаре — поляризационную особенности.

Распространение пучков в среде моделировалось конечно-разностным методом на прямоугольной сетке с пространственным разрешением $900 \times 900 \times 100$ точек на диапазоне $z \in [0; 1]$. Параметры α_{\pm} и β_{\pm} для этих симуляций выбирались случайным образом из диапазонов $[0; 2]$ и $[0; 10]$ соответственно. Из полученного таким образом набора данных исключались симуляции, в которых интенсивность пучка в процессе распространения возросла более, чем в 100 раз хотя бы в одной точке поперечного сечения. Такие случаи рассматривались как нелинейный коллапс, типичный для задачи самофокусировки, который более не может быть корректно описан системой (4.2). Примеры распределения амплитуды и поляризации в падающем на среду и прошедшем через неё излучении изображены на рисунке 4.1.

Для каждого из пучков (4.3) – (4.6) производилось 2048 численных симуляций с различными комбинациями параметров нелинейного отклика. Полученные данные случайным образом разбивались на три набора: тренировочный, содержащий результаты 1280 симуляций, валидационный, содержащий результаты 512 и тестовый, содержащий результаты 256. Для каждой симуляции сохранялась центральная область поперечного сечения сфокусированного пучка размером 256×256 точек, содержащих по четыре вещественных (32–битовых) числа, соответствующих вещественной и мнимой компонентам \mathcal{A}_{\pm} . Задачей нейронной сети было определение по этим данным четвёрки параметров $\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}$, изначально использованных для получения соответствующей картины самофокусировки.

Для оценки качества предсказаний нами использовались два показателя: средняя относительная ошибка $\epsilon_r = \langle \delta / \sigma \rangle$ и ошибка относительно среднего $\epsilon_m = \langle \delta \rangle / \langle \sigma \rangle$, где

$$\begin{aligned} \delta &= ((\alpha_+ - \alpha'_+)^2 + (\alpha_- - \alpha'_-)^2 + (\beta_+ - \beta'_+)^2 + (\beta_- - \beta'_-)^2)^{1/2}, \\ \sigma &= (\alpha_+^2 + \alpha_-^2 + \beta_+^2 + \beta_-^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

а угловые скобки означают усреднение по всем значениям параметров среды рассматриваемой выборки, $\alpha'_{\pm}, \beta'_{\pm}$ — значения, предсказанные нейронной сетью, $\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}$ — истинные значения. Ошибки в тренировочной, валидационной и тестовой выборке определялись отдельно. Два коэффициента ϵ_r и ϵ_m отличны тем, что вклад ошибок нейронной сети в ϵ_m не зависит от величины нелинейности в конкретной симуляции, в то время как для величины ϵ_r наиболее существенны вклады ошибок, сделанных при предсказании параметров слабо нелинейных сред.

4.2.2 Архитектура и эффективность нейронной сети

Данные, кодирующие конфигурацию электромагнитного поля на выходе из нелинейной среды структурно схожи с данными, которые приходится обрабатывать в классических задачах

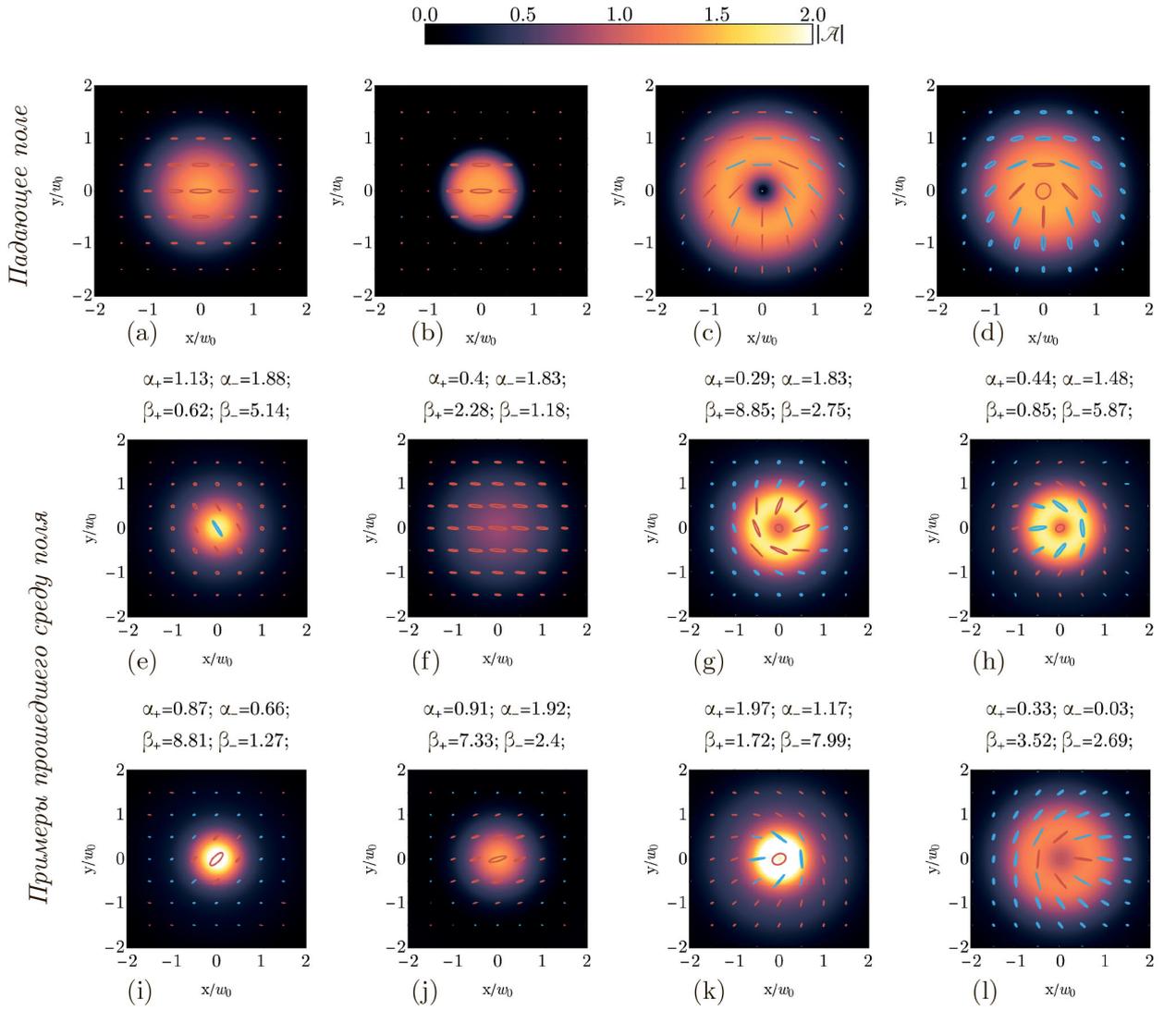


Рис. 4.1: Распределения амплитуды (фонный цвет) и поляризации (эллипсы) в пучках четырёх используемых мод до (верхний ряд) и после (средний и нижний ряды) прохождения через нелинейно-оптическую среду при различных значениях параметров $\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}$ (указаны над соответствующими распределениями). а, е, і — Гауссова мода излучения; b, f, j — Супергауссова мода; c, g, k — Лагерр–Гауссова мода; d, h, l — Мода Пуанкаре. Красные контурные эллипсы соответствуют вращению вектора электрической напряжённости \mathcal{E} против часовой стрелки (компонента \mathbf{E}_+), голубые закрашенные эллипсы — вращению \mathcal{E} по часовой стрелке (компонента \mathbf{E}_-).

анализа растровых изображений: подобно последним, они представляют четыре достаточно больших (256×256) массива вещественных чисел с сильной пространственной корреляцией между соседними элементами. В связи с этим, представляется разумным использовать для первых слоёв нейронной сети свёрточную [10] архитектуру, хорошо зарекомендовавшую себя в задачах машинного зрения. Однако, финальным результатом работы сети должна являться четвёрка независимых чисел $\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}$, в следствие чего для заключительных слоёв нейронной сети предпочтительной представляется полносвязная архитектура.

В ходе сравнения с использованием метода лассо [214] Python-библиотеки Optuna эффективностей большого числа удовлетворяющих этим общим идеям сетей, нами была выбрана

архитектура, использующая три свёрточных слоя с ядром 4×4 и шагом 4 вдоль обеих координат, уменьшающих разрешение поля в последовательности

$$256^2 \rightarrow 64^2 \rightarrow 16^2 \rightarrow 4^2.$$

Полученный в результате этих преобразований тензор разворачивался в одномерный вектор из 16 элементов, после чего передавался последовательно полносвязному звену сети, состоящему из слоёв с 40, 60 и наконец 4 (выходной слой) нейронов. С использованием алгоритма лассо также были выбраны функции активации в виде гиперболического тангенса для свёрточных слоёв и функции линейного выпрямления (Rectified Linear Unit) для скрытых полносвязных слоёв; для выходного слоя функция активации не использовалась (рисунок 4.2).

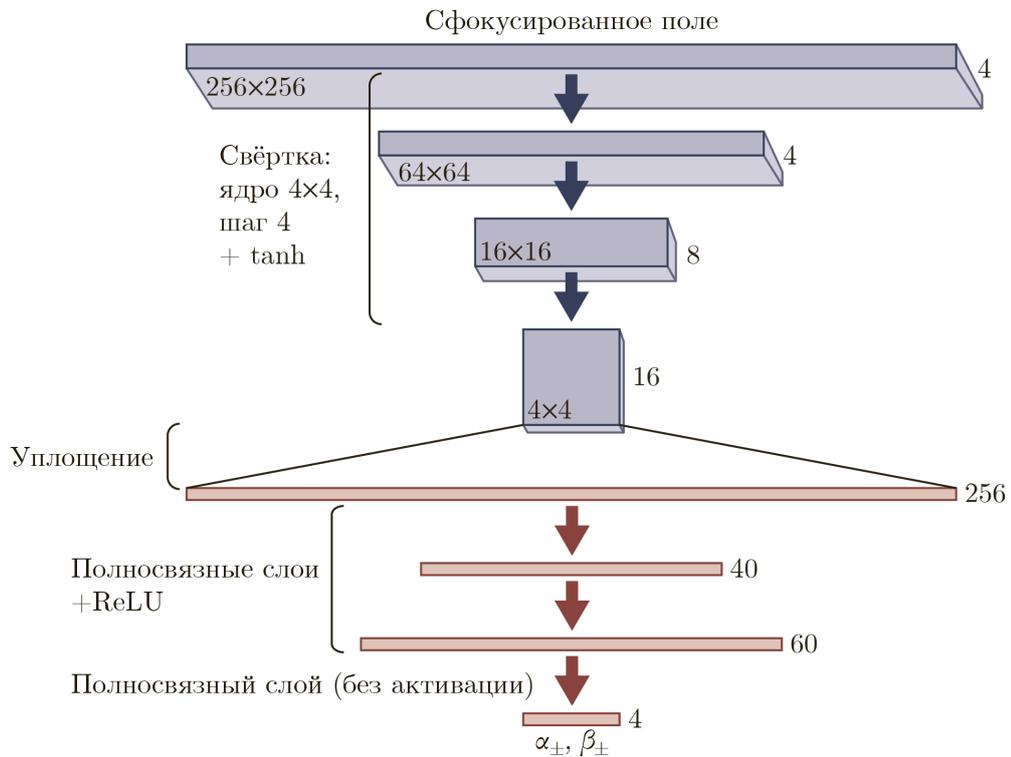


Рис. 4.2: Схема используемой нейронной сети. Синим цветом выделены свёрточные слои, красным — полносвязные. Числа в их нижней части указывают на пространственное разрешение соответствующих слоёв, а числа в верхней части — на число каналов для свёрточных слоёв или общее число нейронов для полносвязных.

Обучение нейронных сетей проводилось с использованием вычислительных мощностей (графических процессоров) Google Colaboratory при помощи оптимизационного алгоритма Adam [104]. По окончании цикла обучения (на тренировочной выборке) качество предсказаний каждой сети проверялось на валидационной выборке. Сеть с наиболее удачной архитектурой, найденной таким образом и описанной выше, затем проверялась на тестовой выборке, данные которой не использовались ни напрямую в обучении, ни косвенно при отборе оптимальной архитектуры, и таким образом могли дать наиболее точное представление о качестве предсказательной модели нейронной сети. Результаты обучения нейронных сетей по этому алгоритму на четырёх световых модах (4.3) – (4.6) представлены на рисунке 4.3

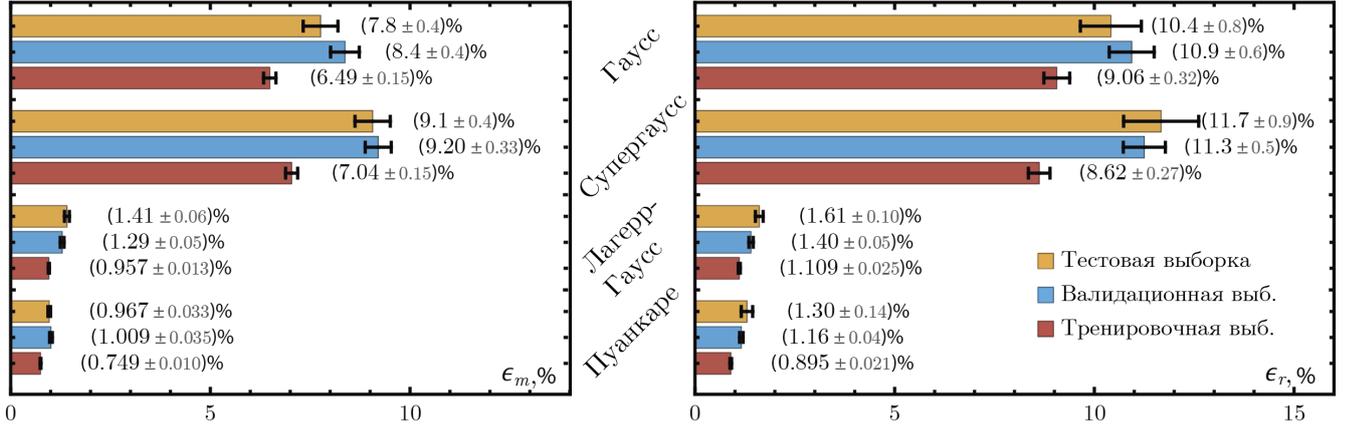


Рис. 4.3: Средние относительные ошибки $\epsilon_m = \langle \delta \rangle / \langle \sigma \rangle$ (слева) и $\epsilon_r = \langle \delta / \sigma \rangle$ (справа) предсказаний нейронной сети для различных выборок и мод падающего на среду излучения.

Из данных гистограмм можно видеть, что точность предсказания параметров нелинейно-оптического отклика для нейронной сети, обученной с использованием Гауссовой и Супергауссовой мод излучения оказалась достаточно невысокой (ошибка порядка единиц-десятка процентов) и не очень существенно (на 10 – 20% относительно друг друга для тестовой выборки) отличается для Гауссовой и Супергауссовой мод с одинаковыми состояниями поляризации, но различными энергетическими профилями. В то же время, использование сингулярных Лагерр–Гауссовой и Пуанкаре-мод излучения позволяют существенно (практически на порядок) уменьшить ошибки предсказательной модели относительно однородно поляризованных пучков, а результаты, полученные с использованием содержащей поляризационную сингулярность моды Пуанкаре оказываются на 20 – 30% лучше (для тестовой выборки), чем аналогичные результаты для содержащей фазовую сингулярность вихревой моды (Лагерр–Гаусса).

Наиболее вероятное объяснение этого различия следующее: для однородно поляризованного излучения во всём сечении пучка отношение $\mu = |\mathcal{A}_+| / |\mathcal{A}_-|$ постоянно в плоскости $z = 0$. Следовательно, правая часть выражения (4.2) может быть в этом случае переписана в виде

$$i(\alpha_{\pm}|\mathcal{A}_{\pm}|^2 + \beta_{\pm}|\mathcal{A}_{\mp}|^2)_{z=0} \mathcal{A}_{\pm} = i((\mu^{\pm 2}\alpha_{\pm} + \beta_{\pm})|\mathcal{A}_{\mp}|^2)_{z=0} \mathcal{A}_{\pm}, \quad (4.8)$$

в результате чего изменение β_{\pm} на некоторую величину $\Delta\beta_{\pm}$ и изменение α_{\pm} на $\Delta\alpha_{\pm} = \mu^{\pm 2}\Delta\beta_{\pm}$ приведут к полностью тождественным эффектам на начальном этапе распространения пучка. Отношение правых частей уравнения (4.2) для \mathcal{A}_+ и \mathcal{A}_- компонент излучения при этом задаётся выражением

$$\frac{\alpha_+|\mathcal{A}_+|^2 + \beta_+|\mathcal{A}_-|^2}{\alpha_-|\mathcal{A}_-|^2 + \beta_-|\mathcal{A}_+|^2} = \frac{\mu^2\alpha_+ + \beta_+}{\alpha_- + \mu^2\beta_-} \quad (4.9)$$

В результате, если это отношение оказывается равно μ :

Таким образом, при $\mu^2(\alpha_+ - \beta_-) = \alpha_- - \beta_+$ отношение правых частей уравнения (4.2) для противоположно вращающихся поляризационных компонент оказывается равно $\mathcal{A}_+ / \mathcal{A}_-$ и однородный характер поляризации сохраняется по мере всего распространения пучка. Следовательно, $\Delta\beta_{\pm}$ и $\Delta\alpha_{\pm}$ также остаются не различимы на всей длине распространения. В

результате существуют такие сочетания параметров нелинейности, достаточно близкие к требованиям этих равенств, для которых по общему ходу самофокусировки принципиально невозможно определить, какая именно из компонент нелинейного отклика ответственна за наблюдаемое изменение формы пучка, и ошибки нейронной сети могут оказываться весьма значительны. По мере удаления параметров от этой области ошибки будут снижаться, однако эффект, оказываемый данной двусмысленностью на обучение искусственной нейронной сети может сказываться и на других сочетаниях параметров.

В противовес, поляризация сингулярных пучков чрезвычайно неоднородна. В частности, демонстрирующий лучшие результаты пучок Пуанкаре, имеет в своём сечении все возможные (для параксиального приближения) состояния поляризации, что делает невозможной ситуацию, в которой эффекты различных коэффициентов нелинейного отклика среды окажутся неразличимыми одновременно во всех областях пучка. Результатом наличия и устойчивости в сечении пучка областей разной поляризации становится существенный рост точности, который можно видеть на рисунке 4.3.

Для проверки данного объяснения наблюдаемых различий в точности мы также построили диаграммы рассеяния ошибок в пространствах $\alpha_+\alpha_-$ и $\beta_+\beta_-$, изображённые на рисунках 4.4 (для Гауссовой моды) и 4.5 (для моды Пуанкаре).

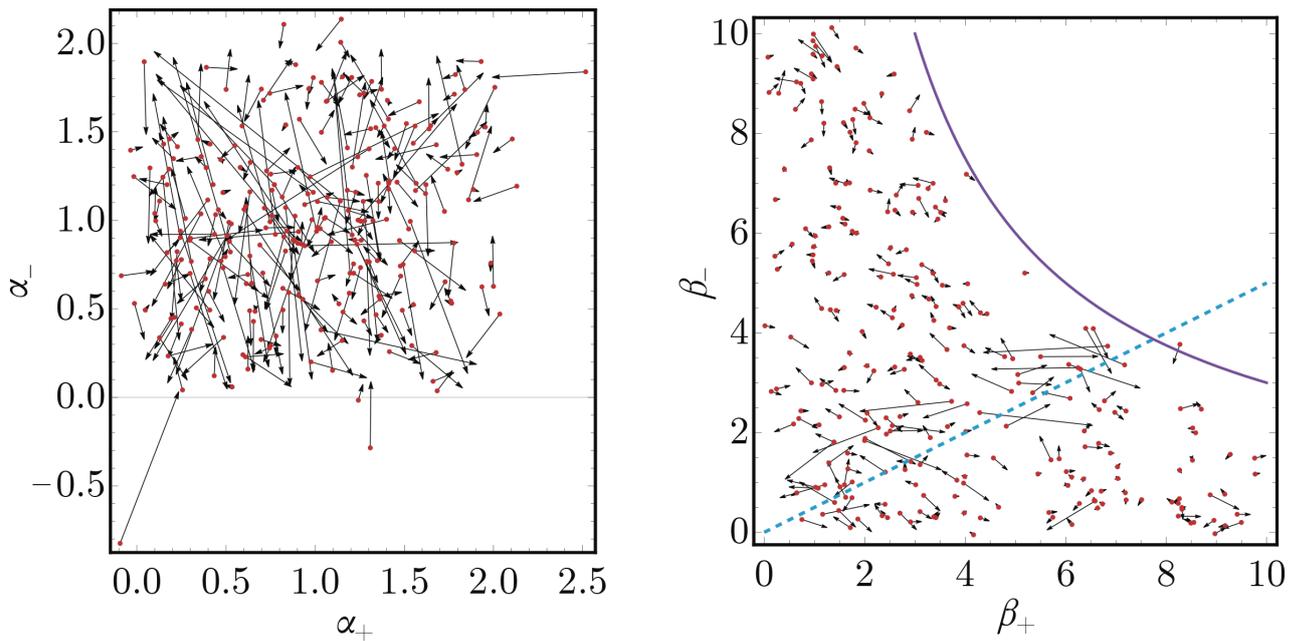


Рис. 4.4: Диаграммы рассеяния ошибок в пространствах параметров отклика нелинейной среды для тестовой выборки падающего Гауссова пучка. Красные точки соответствуют параметрам нелинейной среды, предсказанным нейронной сетью. Концы стрелок (чёрные) показывают соответствующие этим предсказаниям истинные значения $\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}$. Голубым пунктиром обозначена прямая $\beta_- = 2\beta_+$. Фиолетовая линия соответствует условию $\beta_+\beta_- = \vartheta_g$

Длина стрелки на этих диаграммах прямо пропорциональна величине абсолютной ошибки в определении соответствующих параметров. На рисунке 4.4 хорошо видно, что наиболее значительные ошибки в определении β_{\pm} группируются вблизи области $\beta_- = 2\beta_+$, что обу-

словлено отношением $|\mathcal{A}_+|/|\mathcal{A}_-| = \sqrt{2}$ для этого пучка (уравнение (4.3)) и механизмом, описанным выше. Ошибки определения параметров самовоздействия α_{\pm} в среднем выше, поскольку абсолютные значения этих параметров во всех выборках были меньше, что характерно для большинства нелинейных сред. Полностью аналогичная картина наблюдается и для Супергауссовой моды излучения. В противовес, картины распределения ошибок для моды Пуанкаре (рисунок 4.5) и моды Лагерр–Гаусса отличаются как значительно меньшей величиной самих ошибок, так и отсутствием выделенных «проблемных» областей в их распределении.

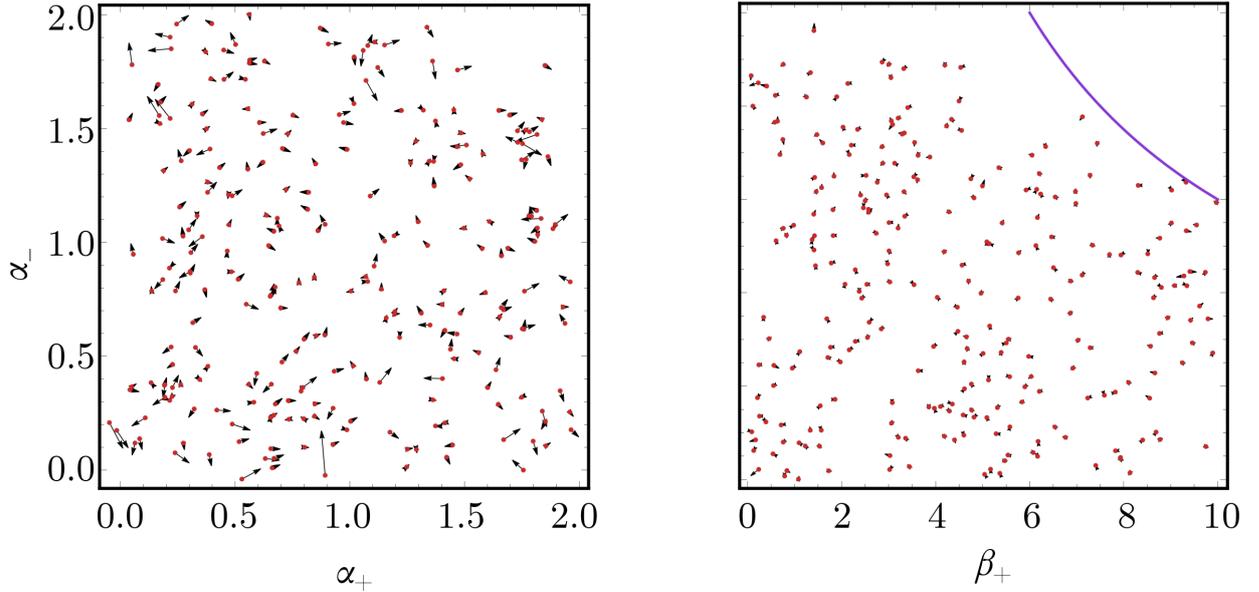


Рис. 4.5: Диаграммы рассеяния ошибок в пространствах параметров отклика нелинейной среды для тестовой выборки падающего пучка Пуанкаре. Красные точки соответствуют параметрам нелинейной среды, предсказанным нейронной сетью. Концы стрелок (чёрные) показывают соответствующие этим предсказаниям истинные значения $\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}$. Фиолетовая линия соответствует условию $\beta_+ \beta_- = \vartheta_p$

Ещё одно важное отличие рассматриваемых пучков, которое можно отметить на диаграммах рассеяния ошибок, обусловлено различием в порогах нелинейного коллапса для разных мод излучения. Так на рисунке 4.4 можно видеть, что точки истинных значения β_{\pm} практически отсутствуют в области $\beta_+ \beta_- > \vartheta_g \approx 30$, поскольку при бóльших значениях параметров нелинейного отклика пучок Гауссовой моды практически гарантированно достигает коллапса при $0 < \zeta < 1$, в результате чего соответствующие значения $\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}$ исключаются из дальнейшего рассмотрения.

В случае пучка Пуанкаре область отсутствия стрелок на диаграмме 4.5 занимает существенно меньшую часть диаграммы, приблизительно соответствующую $\beta_+ \beta_- > \vartheta_p \approx 60$. Для рассмотренного нами пучка Супергауссовой моды точки на диаграмме рассеяния пропадают при $\beta_+ \beta_- > \vartheta_s \approx 40 \sim 50$, но более высокий, чем в случае Гауссова пучка порог коллапса обусловлен в этом случае тем, что в выражении (4.4) для Супергауссовой моды нами была выбрана полуширина пучка в $\sqrt{2}$ раза меньше, чем у остальных трёх мод. В противном слу-

чае коллапс данной моды излучения наступал практически при всех значениях параметров $\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}$ благодаря широкому плато в энергетическом профиле Супергауссова пучка. Наконец, самый высокий порог коллапса $\beta_+\beta_- > \vartheta_l \approx 80$ наблюдался для Лагерр–Гауссовой моды. Более высокие значения порога нелинейно-оптического коллапса для сингулярных пучков — известная [110] особенность их самофокусировки, обусловленная деструктивной интерференцией различных компонент пучка вблизи его оси; для фазовых сингулярностей этот эффект выражен, разумеется, сильнее, но как можно видеть из сравнения приведённых мод, присутствует и для поляризационных. Таким образом, сингулярные пучки не только дают возможность более точного определения параметров среды по особенностями их распространения в ней, но и обеспечивают возможность подобного исследования в более широком диапазоне этих параметров.

§ 4.3 Генерация второй оптической гармоники в объёме изотропной гиротропной среды сингулярным световым пучком

4.3.1 Постановка задачи

Как и в секции 4.2, мы будем рассматривать пучок света, распространяющийся вдоль Oz с использованием параксиального приближения и базиса циркулярно поляризованных волн, но в этот раз также учтём его временную огибающую. Для перехода к безразмерным координатам используем обозначения

$$\begin{aligned} l_{df}^{(\omega)} &= \frac{k_{\omega} w^2}{2}, & l_{df}^{(2\omega)} &= \frac{k_{2\omega} w^2}{2}, \\ l_{ds}^{(\omega)} &= \frac{\tau_0^2}{2k_{\omega}''}, & l_{ds}^{(2\omega)} &= \frac{\tau_0^2}{2k_{2\omega}''}, \\ l_{gr}^{(\omega)} &= u_{\omega} \tau_0, & l_{gr}^{(2\omega)} &= u_{2\omega} \tau_0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где ω — циклическая частота основного импульса, k, u, k'' — волновое число, групповая скорость и её дисперсия соответственно, индексы $\omega, 2\omega$ указывают на отношение величины к основному и сигнальному импульсам соответственно, w, τ_0 — ширина Гауссова волнового пакета в пространстве и времени соответственно. Хотя параметры ширины сигнального пучка меньше, чем основного, мы используем одинаково нормированные безразмерные координаты $x = x/w, y = y/w, \xi = z/l_{df}, t = \tau/\tau_0$ в обоих случаях для удобства. Безразмерные координаты используются нами для медленно меняющихся амплитуд, в то время как выражения для «быстрых» векторов \mathcal{E}, \mathcal{P} по-прежнему удобнее записывать с использованием физических координат и времени x, y, z, τ . В безразмерных координатах параболическое уравнение для пучка на основной частоте принимает вид

$$\left[\left(\partial_{\xi} + \frac{l_{df}^{(\omega)}}{l_{gr}^{(\omega)}} \partial_t \right) - \frac{i}{4} \left(\nabla_{\perp}^2 - \frac{l_{df}^{(\omega)}}{l_{ds}^{(\omega)}} \partial_t^2 \right) \right] E_{\pm}^{(\omega)} = 0. \quad (4.11)$$

Аналогичное уравнение для пучка на удвоенной частоте имеет вид

$$\left[\left(\partial_s + \frac{l_{df}^{(2\omega)}}{l_{gr}^{(2\omega)}} \partial_t \right) - \frac{i}{4} \left(\nabla_{\perp}^2 - \frac{l_{df}^{(2\omega)}}{l_{ds}^{(2\omega)}} \partial_t^2 \right) \right] E_{\pm}^{(2\omega)} = 2\pi i \frac{k_{2\omega} l_{df}^{(2\omega)}}{\varepsilon_{2\omega}} P_{\pm}^{(2\omega)} \exp(-i\Delta k z), \quad (4.12)$$

где $\varepsilon_{2\omega}$ — линейная диэлектрическая проницаемость на удвоенной частоте, $\Delta k = 2k_{\omega} - k_{2\omega}$ — фазовая расстройка, $\nabla_{\perp} = \{\partial_x, \partial_y\}$, а $P^{(2\omega)}$ — комплексная амплитуда квадратичной поляризации $\mathcal{P}^{(2)}$:

$$\mathcal{P}^{(2)} = \left(P_{s+}^{(2\omega)} \mathbf{e}_+ + P_{s-}^{(2\omega)} \mathbf{e}_- \right) \exp(-2i\omega\tau + 2ik_{\omega}z). \quad (4.13)$$

Индекс s здесь означает «соленоидальный», поскольку в общем случае для изотропной гиротропной среды квадратичная по полю поляризация может быть выражена как

$$\mathcal{P}^{(2)} = \gamma_1 \boldsymbol{\varepsilon} (\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{1}{2} \gamma_2 \nabla (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \gamma_3 (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \nabla) \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.14)$$

где $\gamma_1 = \gamma_{ijij}^{(2)}$, $\gamma_2 = \gamma_{ijji}^{(2)}$, $\gamma_3 = \gamma_{ijjj}^{(2)}$, а $i, j \in \{x, y, z\}; i \neq j$. Однако, первое слагаемое (4.14) обращается в нуль в приближении постоянной накачки в следствие уравнения Максвелла $\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0$; второе слагаемое данного уравнения представляет собой потенциальное поле (градиент скалярного поля) и может приводить к генерации второй гармоники только на границе нелинейной среды [194], поэтому при рассмотрении объёмной генерации мы ограничимся третьим, соленоидальным слагаемым $\mathcal{P}_s^{(2)}$.

Будем рассматривать импульсы электромагнитных волн с Гауссовой временной огибающей и многомодовой поперечной структурой

$$E_{\pm}^{(\omega)}(\boldsymbol{r}_{\perp}, \delta, t) = \zeta_{\pm}(\boldsymbol{r}_{\perp}, \delta) \mathcal{G}(\boldsymbol{r}_{\perp}, \delta, t), \quad (4.15)$$

где $\boldsymbol{r}_{\perp} = \{x, y\}$ — поперечный радиус-вектор, а функция \mathcal{G} описывает Гауссов волновой пакет с шириной w в перетяжке и минимальной длительностью τ_0 . Выбор функций ζ_{\pm} , разумеется, не произволен, поскольку (4.15) является решением уравнения распространения (4.11).

4.3.2 Нелокальность нелинейного отклика и требования к фундаментальным импульсам

Наиболее общее выражение для декартовых компонент квадратичной по полю составляющей $\mathcal{P}^{(2)}$ вектора нелинейной поляризации среды может быть дано в виде

$$\mathcal{P}_i^{(2)}(\mathbf{r}, \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\tau} d\tau_2 \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \chi_{ijk}^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau_1, \tau_2) \varepsilon_j(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \tau - \tau_1) \varepsilon_k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2, \tau - \tau_2), \quad (4.16)$$

где $\chi_{ijk}^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau_1, \tau_2)$ — компоненты тензора $\mathbf{X}^{(2)}$ квадратичной восприимчивости. Здесь и далее индексы i, j, k, l принимают значения x, y, z .

При этом широко известно [194], что генерация второй оптической гармоники за счёт локальной нелинейной восприимчивости запрещена в изотропных средах соотношениями симметрии последних. Поэтому мы будем рассматривать нелокальный нелинейный отклик двух типов: чисто пространственный

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau_1, \tau_2) = \chi_{ijk}^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \delta(\tau_1) \delta(\tau_2), \quad (4.17)$$

где $\delta(\tau)$ — дельта-функция Дирака, и чисто временной

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau_1, \tau_2) = \chi_{ijk}^{(2)}(\tau_1, \tau_2)\delta(\mathbf{r}_1)\delta(\mathbf{r}_2). \quad (4.18)$$

Хорошая оценка нелинейно-оптического отклика в этих случаях, в силу малых характерных пространственных и временных масштабов его нелокальности может быть получена разложением (4.16) в ряд Тейлора и сохранением только первого слагаемого в этих разложениях. Получим таким образом для пространственной нелокальности

$$\mathcal{P}_i^{(2)} \approx \gamma_{ijkl}^{(2)} \mathcal{E}_j \partial_l \mathcal{E}_k, \quad (4.19)$$

где все производные поля рассматриваются в точке $\{\mathbf{r}, \tau\}$, а $\gamma_{ijkl}^{(2)}$ — компоненты тензора нелокальной квадратической диэлектрической восприимчивости; а для временной

$$\mathbf{P}^{(2\omega)} \approx i\mathbf{\Gamma}_\tau [\partial_\tau \mathbf{E}^{(\omega)} \times \mathbf{E}^{(\omega)}], \quad (4.20)$$

где $\mathbf{\Gamma}_\tau = 2\partial\tilde{\mathbf{X}}/\partial\omega_1|_{\omega_1=\omega_2=\omega}$, $\tilde{\mathbf{X}}$ — Фурье-образ тензора \mathbf{X} . Здесь также учтено, что в силу изотропии среды тензор $\tilde{\mathbf{X}}^{(2)}$ должен быть пропорционален тензору Леви-Чивиты: $\tilde{\chi}_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = \chi(\omega_1, \omega_2)e_{ijk}$ [84].

С учётом (4.19), (4.20) нелинейная поляризация принимает вид

$$\mathbf{P}_s^{(2\omega)} = i\gamma_3 [\mathbf{e}_z \times (\zeta_+ \nabla_\perp \zeta_- - \zeta_- \nabla_\perp \zeta_+)] \quad (4.21)$$

в случае пространственной нелокальности отклика. Можно видеть, что чтобы выражение (4.21) не обращалось в нуль, необходимо выполнение двух условий:

- ζ_+ и ζ_- не должны быть одновременно константами, то есть в поперечной структуре пучка накачки должны присутствовать моды выше Гауссовой.
- ζ_+ и ζ_- не должны быть пропорциональны друг другу, то есть поляризационная структура излучения должна быть неоднородной.

Обоим этим условиям хорошо удовлетворяют сингулярные пучки, простейшим примером которых являются моды Пуанкаре, функции ζ_\pm для которых имеют вид

$$\zeta_\pm(\mathbf{r}_\perp, z) = \frac{E_L}{\sqrt{2}(1 + iz)} (\Lambda_+(x + iy) + \Lambda_-(x - iy)), \quad \zeta_\mp(\mathbf{r}_\perp, z) = E_G, \quad (4.22)$$

где $E_G, E_L, \Lambda_-, \Lambda_+$ — комплексные константы и $|\Lambda_-|^2 + |\Lambda_+|^2 = 1$. Поскольку при $x = y = 0$ Лагерр-Гауссова (первая в (4.22)) составляющая пучка обращается в нуль, излучение имеет на оси C -линию, поляризация которой определяется поляризацией Гауссовой компоненты излучения, а топологический индекс равен

$$\mathcal{G}_C = \pm \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(|\Lambda_+|^2 - |\Lambda_-|^2), \quad (4.23)$$

где знак совпадает со знаком индекса ζ в первом выражении (4.22).

Генерация второй гармоники в объёме изотропной гиротропной среды за счёт временной нелокальности нелинейного отклика накладывает ещё одно дополнительное ограничение.

Как можно видеть из (4.20), для получения ненулевой нелинейной поляризации в этом случае векторы $\mathbf{E}^{(\omega)}$ и $\partial_\tau \mathbf{E}^{(\omega)}$ должны быть не коллинеарны, что означает, что поляризация излучения основной частоты должна быть неоднородной во времени (и, следовательно, в пространстве вдоль направления распространения пучка). Для удовлетворения этому условию, мы рассматривали импульсы, состоящие из двух быстро следующих друг за другом подимпульсов $\mathbf{E}_{1,2}^{(\omega)}$, разделённых задержкой $2\delta_\tau$, из которых первый удовлетворяет форме (4.15), (4.22), а второй получается из первого его пропусканием через четвертьволновую пластинку:

$$E_{\Sigma\pm}^{(\omega)}(\mathbf{r}, \zeta, t) = E_{1\pm}^{(\omega)}(\mathbf{r}, \zeta, t - \delta_\tau) + E_{2\pm}^{(\omega)}(\mathbf{r}, \zeta, t + \delta_\tau) \quad (4.24)$$

Подставляя (4.24) в (4.20) и выделяя соленоидальную компоненту нелинейной поляризации, получим

$$\mathbf{P}_s^{(2\omega)} = \frac{2\delta_\tau \Gamma_\tau}{k_\omega k''(l_{ds} - i\zeta l_{df})} \left[\mathbf{e}_z \times \left((\zeta_2 + \partial_+ \zeta_{1+} - \zeta_{1+} \partial_+ \zeta_{2+}) \mathbf{e}_+ + (\zeta_2 - \partial_- \zeta_{1-} - \zeta_{1-} \partial_- \zeta_{2-}) \mathbf{e}_- + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} (\zeta_2 - \nabla \zeta_{1+} - \zeta_{1-} \nabla \zeta_{2+} + \zeta_{2+} \nabla \zeta_{1-} + \zeta_{1+} \nabla \zeta_{2-}) \right) \right] \mathcal{G}^2 \exp\left(-\frac{\delta_\tau^2}{k''(l_{ds} - i\zeta l_{df})}\right), \quad (4.25)$$

где $\partial_\pm = (\partial_x \mp i\partial_y)/\sqrt{2}$.

4.3.3 Структура сигнальных импульсов

В результате подстановки (4.22) в (4.21), получим выражение

$$\mathbf{P}_s^{(2\omega)} = \pm \gamma_3 \frac{E_G E_L}{1 + i\zeta} (\Lambda_+ \mathbf{e}_- - \Lambda_- \mathbf{e}_+) \mathcal{G}^2, \quad (4.26)$$

которое может быть использовано в роли нелинейной части (4.12). Решение данного уравнения мы проводили численным методом Кранка-Николсона [44].

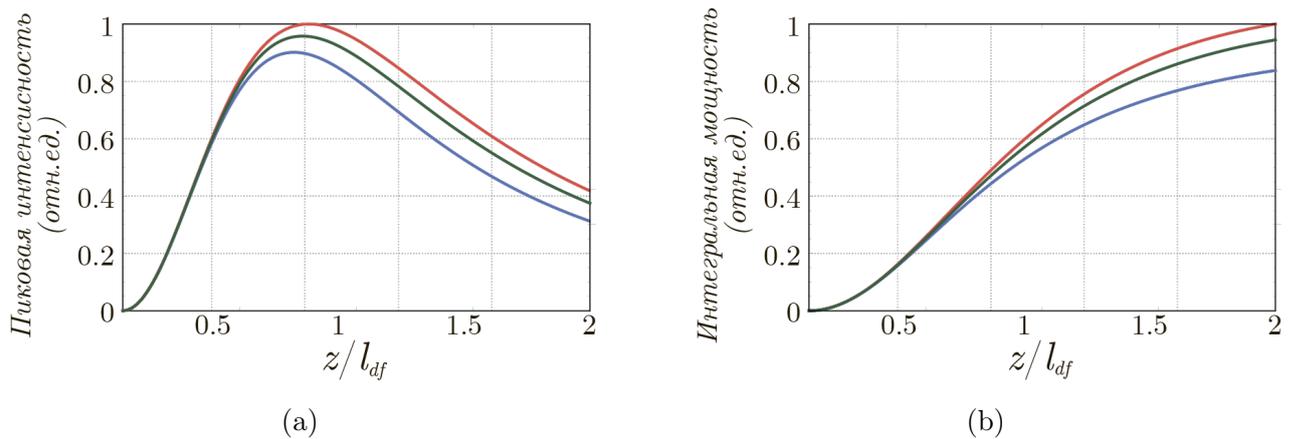


Рис. 4.6: Пиковая интенсивность (а) и интегральная мощность (б) в $0xy$ сечении сигнального пучка в зависимости от координаты распространения z для значений фазовой расстройки $\Delta k = 0.5/l_{df}$ (красная линия), $k = 0$ (зелёная линия) и $k = -0.5/l_{df}$ (синяя линия).

Графики пиковой интенсивности и интегральной мощности излучения на сигнальной частоте для разных значений групповой расстройки Δk , полученные этим методом, приведены

на рисунке 4.6. Можно наблюдать явление квазисинхронизма, описывавшееся ранее в концептуально схожей схеме генерации второй гармоники в изотропной среде остро сфокусированным пучком [228] и состоящее в достижении максимальной интенсивности генерации при положительном значении фазовой расстройки Δk .

Наиболее интересной характерной особенностью генерации второй гармоники сингулярным пучком, помимо самого факта нарушения классического запрета на генерацию чётных оптических гармоник в среде, обладающей изотропией оптических свойств, является явление «сглаживания поляризации»: неоднородно поляризованный пучок на основной частоте приводит к генерации однородно поляризованного излучения на сигнальной (рисунок 4.7), причём степень эллиптичности $M_{2\omega}$ последнего совпадает (с точностью до знака) с параметром изотропии сингулярности на оси первого:

$$M_{2\omega} = \frac{S_3^{(2\omega)}}{S_0^{(2\omega)}} = \frac{|\Lambda_-|^2 - |\Lambda_+|^2}{|\Lambda_+|^2 + |\Lambda_-|^2} = \mp \Upsilon_C^{(\omega)}. \quad (4.27)$$

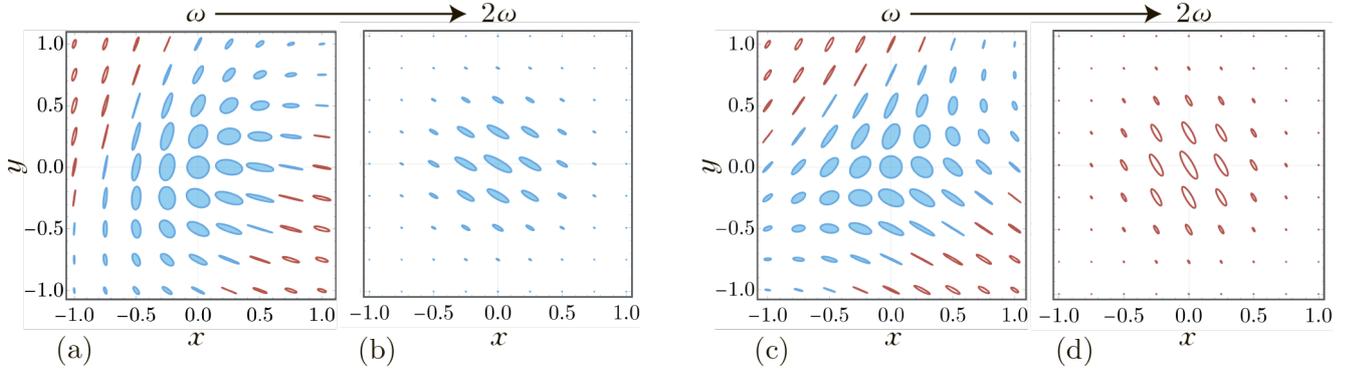


Рис. 4.7: Распределения эллипсов поляризации в сечении $z = 0$ пучков основного излучения (a, c) и соответствующих им сигнальных (b, d) пучков. (a, b): $\Lambda_+ = \sqrt{3}/2$; $\Lambda_- = 1/2 \exp(i\pi/3)$; (c, d): $\Lambda_+ = 1/2$; $\Lambda_- = \sqrt{3}/2 \exp(2i\pi/3)$; Первый знак в выражении (4.22) положительный. Красные контурные эллипсы соответствуют вращению вектора электрической напряжённости \mathcal{E} против часовой стрелки (компонента \mathbf{E}_+), голубые закрашенные эллипсы — вращению \mathcal{E} по часовой стрелке (компонента \mathbf{E}_-).

Знак выражения (4.27) противоположен первому знаку в выражении (4.22), в результате чего направление вращения вектора \mathcal{E} в сигнальном пучке (определяемое знаком второй, не обращающейся в нуль, компоненты (4.22)) совпадает с направлением вращения \mathcal{E} в S -точке основного пучка если топологический индекс последней положителен (рисунок 4.7a, b) и противоположно ему если топологический индекс отрицателен (рисунок 4.7c, d). Поскольку для Лагерр–Гауссовых пучков существует связь между направлением вращения фазы в центральной сингулярности (однозначно определяющим топологический индекс составленного с их использованием пучка Пуанкаре (4.22)) и величиной их орбитального углового момента [162; 243], эффект сглаживания поляризации также может быть истолкован как конверсия орбитального углового момента в спиновый.

Аналогичное явление может наблюдаться и в случае генерации за счёт временной нелокальности нелинейного отклика. Подстановка (4.24) в (4.25) даёт для нелинейной поляриза-

ции

$$\mathbf{P}_s^{(2\omega)} = \pm i\omega\delta_\tau\Gamma_\tau E_G E_L \frac{(\Lambda_+ \mathbf{e}_+ + \Lambda_- \mathbf{e}_-) \mathcal{G}^2}{l_{df}(l_{ds} - i\zeta l_{df})(1 + i\zeta)} \exp\left(-\frac{\delta_\tau^2}{k''(l_{ds} - i\zeta l_{df})}\right), \quad (4.28)$$

где знак перед всем выражением определяется выбором первого знака в (4.22).

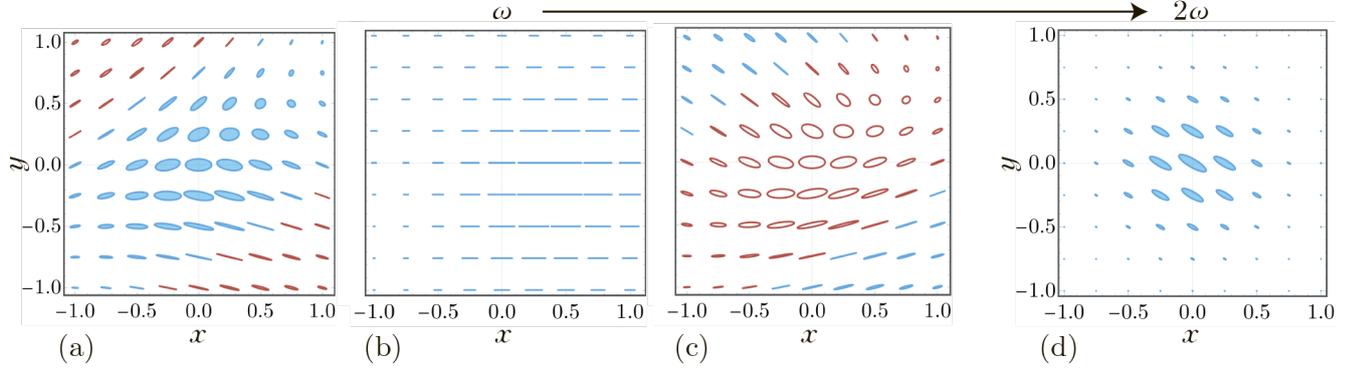


Рис. 4.8: Распределения эллипсов поляризации в сечении $\zeta = 0$ пучков основного излучения (a – c) для трёх моментов времени а: $t = -1$, b: $t = 0$, c: $t = 1$ и соответствующего им сигнального пучка (d). $\Lambda_+ = 1/2$; $\Lambda_- = \sqrt{3}/2 \exp(2i\pi/3)$; Первый знак в выражении (4.22) положительный. Красные контурные эллипсы соответствуют вращению вектора электрической напряжённости \mathcal{E} против часовой стрелки (компонента \mathbf{E}_+), голубые закрашенные эллипсы — вращению \mathcal{E} по часовой стрелке (компонента \mathbf{E}_-).

Решение уравнения (4.12) с нелинейной поляризацией (4.28) может быть получено тем же способом, что и для пространственной нелокальности. Как можно непосредственно видеть из (4.28), сигнальный импульс должен иметь, так же, как и в пространственном случае, однородную поляризацию, степень эллиптичности которой совпадает по модулю с параметром изотропии подимпульса фундаментального импульса (после совмещения данного подимпульса с его копией, прошедшей через четвертьволновую пластинку, параметр изотропии полного импульса оказывается переменным вдоль координаты распространения):

$$M_{2\omega} = \frac{S_3^{(2\omega)}}{S_0^{(2\omega)}} = \frac{|\Lambda_+|^2 - |\Lambda_-|^2}{|\Lambda_+|^2 + |\Lambda_-|^2} = \pm \Upsilon_C^{(\omega)}, \quad (4.29)$$

но на сей раз его знак совпадает со знаком первого выражения (4.22). В результате, направление вращения вектора \mathcal{E} в сигнальном пучке совпадает с направлением вращения \mathcal{E} в C -точке основного пучка если топологический индекс последней отрицателен и противоположно ему если топологический индекс положителен (рисунок 4.8). При этом следует учитывать, что на переднем и заднем фронтах импульса, из-за действия четвертьволновой пластины, противоположны как направления вращения \mathcal{E} , так и топологические индексы.

Основные результаты четвёртой главы

Предложена и реализована работа алгоритма глубокого машинного обучения для решения обратной задачи самофокусировки излучения в изотропной гиротропной среде; показано, что на модельных средах ошибка этого алгоритма не превосходит полутора процентов, при этом

точность метода, а также диапазон параметров, допускающих его применение существенно возрастают при использовании для обучения и работы искусственной нейронной сети сингулярных пучков. Такое различие эффективности может быть объяснено множественностью различных комбинаций параметров нелинейно-оптического отклика среды, приводящих к одинаковому совокупному эффекту при фокусировке излучения с однородным состоянием поляризации. Использование пучков, содержащих фазовую сингулярность, даёт лучшие результаты в отношении диапазона допустимых параметров, а содержащих поляризационную сингулярность — в отношении точности их предсказания.

Показана возможность осуществления генерации второй оптической гармоники в объёме изотропной среды за счёт пространственной и временной нелокальностей нелинейно-оптического отклика. При этом происходит «сглаживание поляризации»: конверсия параметра изотропии поляризационных сингулярностей основного импульса в степень эллиптичности импульса на удвоенной частоте. Продемонстрировано равенство модулей данных коэффициентов и указана связь их знаков, противоположная для разных механизмов генерации.

Заключение

К основным результатам диссертационного исследования можно отнести следующие положения:

1. Разработан алгоритм построения трёхмерных линий сингулярности поляризации электрического поля по известным значениям декартовых компонент меняющейся в пространстве комплексной амплитуды монохроматической электромагнитной волны произвольного вида, вычислительная сложность которого значительно ниже сложности прежде опубликованных подходов к этой задаче, а точность может быть динамически адаптирована к установленному порогу допустимой ошибки.
2. Исследованы топологические каркасы электрических полей электромагнитного излучения, рассеянного на одиночных сферической кремниевой и сфероидальной золотой частицах при падении на них плоских монохроматических волн. Показано, что при любых состояниях поляризации падающей волны вблизи частиц присутствуют одна или две S^T -линии, а также до четырёх L^T -линий, геометрия которых определяется степенью эллиптичности падающего излучения. Показана определяющая роль зацеплений между линиями сингулярности поляризации различных классов в их устойчивости к вариациям параметров падающего излучения.
3. Исследован топологический каркас плоской электромагнитной волны, нормально падающей на планарный метаматериал, базовый элемент которого содержит две металлические пластины. Установлено, что в объёме метаматериала может существовать точка взаимного пересечения S^T -линий, устойчивая к изменению длины волны и интенсивности падающего излучения и неустойчивая к отклонению его поляризации от линейной.
4. В излучении, рассеянном сфероидальной золотой частицей, проведён анализ топологических индексов, характеризующих пространственную геометрию оптических лент, заметаемых одним из ассоциированных с эллипсом поляризации векторов при его движении вдоль замкнутых контуров различного типа, находящихся вдали от линий сингулярности поляризации излучения и непосредственно их окружающих. Показано, что индекс внутреннего перекручивания ленты однозначно характеризует её топологию не только в случае её построения вдоль планарных контуров, но и когда для этого используются произвольные трёхмерные контуры.
5. Проанализирован топологический каркас лазерного излучения, жёстко сфокусированного параболическим зеркалом. Обнаружено, что вблизи его фокуса расположено значительное число линий сингулярности поляризации, образующих нетривиальные торические узлы и зацепления, геометрия и топология которых определяется состоянием поляризации падающего пучка. При изменении поляризации падающего излучения

неизменной оказывается чётность индекса зацепления между системами линий строго циркулярной и строго линейной поляризации.

6. Исследована связь топологии оптических лент, образуемых задающими эллипс поляризации векторами, с расположением и ориентацией контура их построения относительно топологического каркаса лазерного излучения, рассеянного металлической и диэлектрической частицами, а также жестко сфокусированного параболическим зеркалом. Использовались как плоские, так и трёхмерные контуры построения, в том числе содержащие петли и охватывающие несколько раз одну и ту же C^T -линию. Установлено, что ориентируемость этих лент однозначно определяется чётностью их зацепления с совокупностью C^T -линий и не зависит от её зацепления с L^T -линиями. При этом направления перекручивания построенных на одном и том же контуре оптических лент векторов двух главных осей эллипса поляризации, как правило, противоположны.
7. Разработана искусственная нейронная сеть, позволяющая предсказывать с ошибкой не выше полутора процентов значения коэффициентов объёмного нелинейно-оптического отклика изотропной хиральной среды по профилю комплексной амплитуды излучения, претерпевшего в ней нелинейную дифракцию. Применение для её обучения световых пучков, содержащих фазовую или поляризационную сингулярность, обеспечивает на порядок большую точность определения этих коэффициентов по сравнению с использованием однородно поляризованного излучения.
8. Описаны два возможных механизма генерации второй оптической гармоники в объёме изотропной хиральной среды одним пучком основного излучения, содержащим фазовые и поляризационные сингулярности, за счёт пространственной и временной нелокальности её нелинейного оптического отклика. Показано, что сигнальный пучок на удвоенной частоте однородно поляризован и модуль его степени эллиптичности совпадает с параметром изотропии сингулярности поляризации основного излучения.

На основании сказанного можно судить, что сингулярности и оптические ленты поляризации представляют собой разнообразные и малоизученные особенности электромагнитных полей, которым свойственны своеобразные законы сохранения и правила отбора. Возникая практически в любом сложном поле, они образуют характеристические «топологические каркасы», задающие поляризацию в окружающем их пространстве. Некоторые закономерности в их поведении проявляются достаточно ярко, но причина их остаётся не до конца понятной: так нет окончательного объяснения причинам преимущественно противоположного направления вращения векторов большой и малой осей эллипса поляризации вокруг контура построения оптической ленты. Неизвестно, возможно ли пересечение сингулярных линий в точке, в которой обе эти линии имеют одинаковый знак параметра изотропии, а также нет понимания причин обнаруженной устойчивости точки пересечения линий циркулярной поляризации при рассеянии электромагнитного излучения планарным метаматериалом, описанной в параграфе 2.4. Все эти особенности заслуживают дальнейшего исследования.

В заключение я хотел бы выразить глубочайшую благодарность своему научному руководителю, профессору Макарову В.А., а также научному сотруднику лаборатории нелинейной

поляризационной оптики Григорьеву К.С. Без их наставничества, поддержки, глубоких познаний в нашей академической области и широкого кругозора как в смежных, так и в весьма удалённых от основного предмета исследования направлениях написание этой работы было бы невозможным. Полученные ими результаты заложили фундамент всех проведённых исследований, а созданная рабочая атмосфера определила мой собственный научный путь.

Также хотелось бы особо поблагодарить сотрудников и аспирантов кафедры Общей физики и волновых процессов: Владимирову Ю.В, Панова Н.А., Потравкина Н.Н., Рыжикова П.С., Шишкова Г.М., Задкова В.Н. за плодотворное сотрудничество и неоценимую помощь в написании вошедших в состав диссертации работ, ценные замечания и дискуссии, отзывчивость и обязательность; а также весь преподавательский состав кафедры Общей физики и волновых процессов и физического факультета Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова, благодаря которым я смог сделать свои первые шаги в науке.

Наконец, хотелось бы выразить глубокую благодарность моим родителям, подготовившим меня к этому пути с самых юных лет и всегда наставлявшим добрым словом и делом, а также школьным учителям, ни на минуту не дававшим угаснуть детскому интересу и всегда направлявшим его в верное русло.

Список используемых обозначений

Начертания:		Основные величины:	
x	скалярная величина, кроме	m	произвольное целое число
i	мнимая единица	i, j	итеративные индексы
e	число Эйлера	\mathbb{R}^n	n -мерное Евклидово пространство
\mathbf{x}	вектор, в т. ч.	\mathbb{Z}	множество целых чисел
\mathbf{e}_x	орт вдоль $0x$	\mathbf{I}	единичная матрица
\mathcal{X}	быстро меняющийся вектор	h	шаг численного интегрирования
\vec{x}	директор	τ	время
v_x	проекция \mathbf{v} на x	t	безразмерное время
\mathbf{X}	матрица	x, y, z	декартовы координаты
		x, y, ξ	безразмерные декартовы координаты
			локальные декартовы координаты
		p, q, a	координаты, связанные с L^T -точкой
			локальные полярные координаты
		r, φ	координата вдоль линии
		s	параметр отображения
		t	параметр отображения
		\mathbf{e}_x	базисный вектор вдоль оси x
		\mathbf{r}	радиус-вектор
		c	скорость света в вакууме
		\mathcal{E}	электрическая напряжённость
		\mathcal{H}	магнитная напряжённость
		\mathcal{P}	поляризация среды
		ω	циклическая частота
		\mathbf{k}	волновой вектор
Основные операции:			
	скалярное произведение без		
$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$	комплексного сопряжения (указывается особо)		
$\mathbf{x} \times \mathbf{y}$	векторное произведение		
$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$	тензорное произведение		
$(\cdot)^*$	комплексное сопряжение		
$(\cdot)^\top$	транспонирование		
$\ \cdot\ , \cdot $	Евклидова норма вектора		
$(\cdot)_\perp$	проекция на $0xy$		
$(\cdot)_\pm$	$((\cdot)_x \pm i(\cdot)_y)/\sqrt{2}$		
$\langle \cdot \rangle$	усреднение		
\dot{x}	производная x по единственному параметру		
∂_x	частная производная по x		
d	полный дифференциал		
∇	оператор набла		
adj	присоединённая матрица		
$\delta(x)$	дельта-функция Дирака		
e_{ijk}	символ Леви-Чивиты		
gcd	наибольший общий делитель		

Характеристики эллипса поляризации (ЭП):

\mathbf{E}	комплексная амплитуда \mathcal{E}
\mathbf{P}	комплексная амплитуда \mathcal{P}
M	степень эллиптичности
$S_{0,1,2,3}$	параметры Стокса
\mathbf{p}, \mathbf{q}	$\text{Re}(\mathbf{E}), \text{Im}(\mathbf{E})$
\mathbf{N}	нормаль к ЭП
$\vec{\mathbf{A}}$	директор большой оси ЭП
$\vec{\mathbf{B}}$	директор малой оси ЭП
ψ	$\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$
κ	выпрямляющая фаза $1/2 \arg(\psi)$
σ	функция Денниса $S_1 + iS_2$

Характеристики оптических лент, узлов и зацеплений:

\mathbf{g}, \mathbf{h}	параметрически заданные кривые
l	длина параметризованной кривой
\mathbf{v}	произвольный вектор/директор
\mathbf{v}_\perp	нормированная проекция \mathbf{v} на плоскость, перпендикулярную \mathbf{g}
τ_F	число перекручиваний по И. Фройнду
\mathcal{T}_W	коэффициент перекручивания
n	индекс внутреннего перекручивания
\mathcal{L}	индекс зацепления, в т.ч.
\mathcal{L}_e	\mathcal{L} краёв оптической ленты и
$\mathcal{L}_{c,L}$	\mathcal{L} с сингулярными линиями
\mathcal{T}	полное геометрическое кручение
\mathcal{W}	коэффициент скрюченности

Характеристики сингулярностей
(индексы C, L соответствуют C^T - и L^T -точкам соответственно):

$\mathcal{I}_{C,L}$	топологический индекс точки
$\Upsilon, \Upsilon_{C,L}$	параметр изотропии точки
Ω_C	вектор завихренности
$\vec{\Omega}_L$	касательный директор L^T -линии
$\Pi_{C,L}$	локально выделенная плоскость
\mathbf{N}_{Π_L}	проекция \mathbf{N} на Π_L
ξ_{pq}	$N_p + iN_q$
$\Lambda_{\pm}^{C,L}$	коэффициенты в разложении поля по чистым сингулярностям
\mathbf{G}	тензор градиента поля \mathbf{E}
$\vec{\mathbf{e}}$	единичный директор вдоль \mathbf{E}
\mathbf{T}	$\text{Im}(\sqrt{\psi}\mathbf{G}^*)$
\mathbf{A}	$\text{adj } \mathbf{T}$
Π_E	проектор на \mathbf{E}
\mathbf{D}_L	$\vec{\Omega}_L \otimes \vec{\Omega}_L$

Параметры сред и пучков излучения:

λ	длина волны
u_ω	групповая скорость
μ_\pm, μ_G	отн. амплитуда одной поляризационной компоненты излучения
$\varepsilon, \tilde{\varepsilon}$	вещественная/комплексная диэлектрическая проницаемость
\mathcal{G}	Гауссова мода излучения
w_0, τ_0	минимальная ширина и длительность Гауссова пакета
$\mathbf{E}_0, \mathbf{k}_0, M_0$	параметры $\mathbf{E}, \mathbf{k}, M$ падающей волны
θ	угол падения волны
\mathbf{X}	тензор локальной восприимчивости
$\mathbf{\Gamma}$	тензор нелокальной восприимчивости
χ_{\dots}	компоненты \mathbf{X}
γ_{\dots}	компоненты $\mathbf{\Gamma}$

Список литературы

1. 3D Stokes parameters for vector focal fields / A. V. Andreev [и др.] // J. Opt. Soc. Am. B. — 2022. — Июль. — Т. 39, № 7. — С. 1775—1782. — DOI: 10.1364/JOSAB.455841.
2. *Abramochkin E., Volostnikov V.* Beam transformations and nontransformed beams // Optics Communications. — 1991. — Т. 83, № 1. — С. 123—135. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0030-4018\(91\)90534-K](https://doi.org/10.1016/0030-4018(91)90534-K).
3. Accurate and rapid measurement of optical vortex links and knots. / J. Zhong [и др.] // Optics Letters. — 2019. — Т. 44, № 15. — С. 3849—3852. — DOI: 10.1364/ol.44.003849.
4. Achromatic orbital angular momentum generator / F. Bouchard [и др.] // New Journal of Physics. — 2014. — Дек. — Т. 16, № 12. — С. 123006. — DOI: 10.1088/1367-2630/16/12/123006.
5. Achromatic vector vortex beams from a glass cone / N. Radwell [и др.] // Nature Communications. — 2016. — Февр. — Т. 7, № 1. — С. 10564. — DOI: 10.1038/ncomms10564.
6. *Ackemann T., Kriege E., Lange W.* Phase singularities via nonlinear beam propagation in sodium vapor // Optics Communications. — 1995. — Т. 115, № 3/4. — С. 339—346. — DOI: 10.1016/0030-4018(95)00038-a.
7. Arbitrary and reconfigurable optical vortex generation: a high-efficiency technique using director-varying liquid crystal fork gratings / P. Chen [и др.] // Photon. Res. — 2015. — Авг. — Т. 3, № 4. — С. 133—139. — DOI: 10.1364/PRJ.3.000133.
8. Arbitrary optical wavefront shaping via spin-to-orbit coupling / H. Larocque [и др.] // Journal of Optics. — 2016. — Нояб. — Т. 18, № 12. — С. 124002. — DOI: 10.1088/2040-8978/18/12/124002.
9. *Arlt J., Dholakia K.* Generation of high-order Bessel beams by use of an axicon // Optics Communications. — 2000. — Т. 177, № 1. — С. 297—301. — DOI: [https://doi.org/10.1016/S0030-4018\(00\)00572-1](https://doi.org/10.1016/S0030-4018(00)00572-1).
10. Backpropagation Applied to Handwritten Zip Code Recognition / Y. LeCun [и др.] // Neural Computation. — 1989. — Дек. — Т. 1, № 4. — С. 541—551. — DOI: 10.1162/neco.1989.1.4.541.
11. *Bahabad A., Arie A.* Generation of optical vortex beams by nonlinear wave mixing // Optics express. — 2008. — Янв. — Т. 15. — С. 17619—24.
12. *Beckley A. M., Brown T. G., Alonso M. A.* Full Poincaré beams // Opt. Express. — 2010. — Май. — Т. 18, № 10. — С. 10777—10785. — DOI: 10.1364/OE.18.010777.
13. *Berry M., Hannay J.* Umbilic points on Gaussian random surfaces // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1977. — Янв. — Т. 10, № 11. — С. 1809. — DOI: 10.1088/0305-4470/10/11/009.

14. *Berry M. V.* Disruption of wavefronts: statistics of dislocations in incoherent Gaussian random waves // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 1978. — ЯНВ. — Т. 11, № 1. — С. 27. — DOI: 10.1088/0305-4470/11/1/007.
15. *Berry M. V.* Index formulae for singular lines of polarization // *J. Opt. A*. — 2004. — Май. — Т. 6, № 7. — С. 675—678. — DOI: 10.1088/1464-4258/6/7/003.
16. *Berry M. V., Dennis M. R.* Knotting and unknotting of phase singularities: Helmholtz waves, paraxial waves and waves in 2+1 spacetime // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 2001. — ОКТ. — Т. 34, № 42. — С. 8877—8888. — DOI: 10.1088/0305-4470/34/42/311.
17. *Berry M. V., Liu W.* No general relation between phase vortices and orbital angular momentum // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2022. — АВГ. — Т. 55, № 37. — С. 374001. — DOI: 10.1088/1751-8121/ac80de.
18. *Berry M. V., Dennis M. R.* Phase singularities in isotropic random waves // *Proceedings of the Royal Society A*. — 2000. — Т. 456, № 2001. — С. 2059—2079. — DOI: 10.1098/rspa.2000.0602.
19. *Berry M. V., Dennis M. R.* Knotted and linked phase singularities in monochromatic waves // *Proceedings of the Royal Society A*. — 2001. — Т. 457, № 2013. — С. 2251—2263. — DOI: 10.1098/rspa.2001.0826.
20. *Berry M. V., Dennis M. R.* The optical singularities of birefringent dichroic chiral crystals // *Proceedings of the Royal Society A*. — 2003. — Т. 459, № 2033. — С. 1261—1292. — DOI: 10.1098/rspa.2003.1155.
21. *Berry M. V., Dennis M. R., Jr. R. L. L.* Polarization singularities in the clear sky // *New J. Phys.* — 2004. — Т. 6, № 1. — С. 162.
22. *Berry M., Dennis M.* Polarization singularities in isotropic random vector waves // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 2001. — Т. 457, № 2005. — С. 141—155. — DOI: 10.1098/rspa.2000.0660.
23. *Berry M.* Waves and Thom's theorem // *Advances in Physics*. — 1976. — Т. 25, № 1. — С. 1—26. — DOI: 10.1080/00018737600101342.
24. *Berry M., Upstill C.* IV Catastrophe Optics: Morphologies of Caustics and Their Diffraction Patterns // Т. 18. — Elsevier, 1980. — С. 257—346. — DOI: [https://doi.org/10.1016/S0079-6638\(08\)70215-4](https://doi.org/10.1016/S0079-6638(08)70215-4).
25. *Berry M.* Knotted Zeros in the Quantum States of Hydrogen // *Foundations of Physics*. — 2001. — Т. 31, № 4. — С. 659—667. — DOI: 10.1023/a:1017521126923.
26. *Berry M. V., Nye J. F., Wright F. J.* The elliptic umbilic diffraction catastrophe // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. — 1979. — Т. 291, № 1382. — С. 453—484. — DOI: 10.1098/rsta.1979.0039.

27. *Berry M.* Much ado about nothing: optical dislocation lines (phase singularities, zeros, vortices...) // Unknown. T. 3487. — 1998. — С. 1–5. — Conference Proceedings/Title of Journal: Singular Optics.
28. Birth and evolution of wave-front dislocations in a laser beam passed through a photorefractive LiNbO₃: Fe crystal / A. V. Pilyonov [и др.] // Applied Physics B. — 1996. — Т. 62, № 5. — С. 465–471. — DOI: 10.1007/bf01081045.
29. *Bishop R. L.* There is More than One Way to Frame a Curve // The American Mathematical Monthly. — 1975. — Т. 82, № 3. — С. 246–251.
30. *Bomzon Z., Kleiner V., Hasman E.* Pancharatnam–Berry phase in space-variant polarization-state manipulations with subwavelength gratings // Opt. Lett. — 2001. — Сентябрь. — Т. 26, № 18. — С. 1424–1426. — DOI: 10.1364/OL.26.001424.
31. *Boscolo S., Finot C.* Artificial neural networks for nonlinear pulse shaping in optical fibers // Opt. Laser Technol. — 2020. — Ноябрь. — Т. 131. — С. 106439. — DOI: 10.1016/j.optlastec.2020.106439.
32. *Călugăreanu G.* Sur les classes d'isotopie des noeuds tridimensionnels et leurs invariants // Czechoslovak Mathematical Journal. — 1961. — Т. 11, № 4. — С. 588–625.
33. Characterization and manipulation of full Poincaré beams on the hybrid Poincaré sphere / X. Ling [и др.] // J. Opt. Soc. Am. B. — 2016. — Ноябрь. — Т. 33, № 11. — С. 2172–2176. — DOI: 10.1364/JOSAB.33.002172.
34. *Chen Z., Segev M., Christodoulides D. N.* Optical spatial solitons: historical overview and recent advances // Reports on Progress in Physics. — 2012. — Т. 75, № 8. — С. 086401. — DOI: 10.1088/0034-4885/75/8/086401.
35. *Chubchev E. D., Vladimirova Y. V., Zadkov V. N.* Controlling near-field polarization distribution of a plasmonic prolate nanospheroid by its aspect ratio and polarization of the incident electromagnetic field // Opt. Express. — 2014. — Август. — Т. 22, № 17. — С. 20432–20445. — DOI: 10.1364/OE.22.020432.
36. *Chýlek P., Zhan J.* Absorption and scattering of light by small particles: the interference structure // Appl Opt. — United States, 1990. — Октябрь. — Т. 29, № 28. — С. 3984.
37. *Coles M. M., Williams M. D., Andrews D. L.* Second harmonic generation in isotropic media: six-wave mixing of optical vortices // Opt. Express. — 2013. — Май. — Т. 21, № 10. — С. 12783–12789. — DOI: 10.1364/OE.21.012783.
38. *Coles M. M., Williams M. D., Andrews D. L.* Optical vortices in six-wave mixing // Complex Light and Optical Forces VIII. T. 8999. — International Society for Optics, Photonics. SPIE, 2014. — С. 120–127. — DOI: 10.1117/12.2036767.
39. Color-selective three-dimensional polarization structures / Y. Intaravanne [и др.] // Light: Science & Applications. — 2022. — Октябрь. — Т. 11, № 1. — С. 302. — DOI: 10.1038/s41377-022-00961-y.

40. Computation of topological charges of optical vortices via nondegenerate four-wave mixing / W. Jiang [и др.] // *Phys. Rev. A.* — 2006. — Окт. — Т. 74, вып. 4. — С. 043811. — DOI: 10.1103/PhysRevA.74.043811.
41. *Copie F., Randoux S., Suret P.* The Physics of the one-dimensional nonlinear Schrödinger equation in fiber optics: Rogue waves, modulation instability and self-focusing phenomena // *Reviews in Physics.* — 2020. — Т. 5. — С. 100037. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.revip.2019.100037>.
42. *Costabel M., Dauge M.* Singularities of Electromagnetic Fields in Polyhedral Domains // *Archive for Rational Mechanics and Analysis.* — 2000. — Апр. — Т. 151, № 3. — С. 221—276. — DOI: 10.1007/s002050050197.
43. *Couillet P., Gil L., Rocca F.* Optical vortices // *Optics Communications.* — 1989. — Т. 73, № 5. — С. 403—408. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0030-4018\(89\)90180-6](https://doi.org/10.1016/0030-4018(89)90180-6).
44. *Crank J., Nicolson P.* A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* — 1947. — Т. 43, № 1. — С. 50—67. — DOI: 10.1017/S0305004100023197.
45. *Delmarcelle T., Hesselink L.* Visualization of second order tensor fields and matrix data // *Proceedings Visualization '92.* — 1992. — С. 316—323. — DOI: 10.1109/VISUAL.1992.235193.
46. *Demkowicz L., Vardapetyan L.* Modeling of electromagnetic absorption/scattering problems using hp-adaptive finite elements // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* — 1998. — Т. 152, № 1. — С. 103—124. — DOI: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(97\)00184-9](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00184-9) ; — Containing papers presented at the Symposium on Advances in Computational Mechanics.
47. *Dennis M. R.* Geometric interpretation of the three-dimensional coherence matrix for non-paraxial polarization // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics.* — 2004. — Февр. — Т. 6, № 3. — S26—S31. — DOI: 10.1088/1464-4258/6/3/005.
48. *Dennis M.* Polarization singularities in paraxial vector fields: morphology and statistics // *Optics Communications.* — 2002. — Т. 213, № 4—6. — С. 201—221. — DOI: 10.1016/s0030-4018(02)02088-6.
49. *Dennis M. R.* Polarization singularity anisotropy: determining monstardom // *Opt. Lett.* — 2008. — Нояб. — Т. 33, № 22. — С. 2572—2574. — DOI: 10.1364/OL.33.002572.
50. *Dennis M. R.* Fermionic out-of-plane structure of polarization singularities // *Opt. Lett.* — 2011. — Окт. — Т. 36, № 19. — С. 3765—3767. — DOI: 10.1364/OL.36.003765.
51. Diffractive properties of obstructed vector Laguerre–Gaussian beam under tight focusing condition / S. Vyas [и др.] // *J. Opt. Soc. Am. A.* — 2011. — Июль. — Т. 28, № 7. — С. 1387—1394. — DOI: 10.1364/JOSAA.28.001387.

52. *Dirac P. A. M.* Quantised singularities in the electromagnetic field, // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. — 1931. — Т. 133, № 821. — С. 60—72. — DOI: 10.1098/rspa.1931.0130.
53. *Dupont J., Orlik X.* Polarized vortices in optical speckle field: observation of rare polarization singularities // Opt. Express. — 2015. — Март. — Т. 23, № 5. — С. 6041—6049. — DOI: 10.1364/OE.23.006041.
54. Dynamically tunable vortex four-wave mixing in a six-level system / N. Ba [и др.] // Appl. Opt. — 2022. — Февр. — Т. 61, № 6. — С. 1569—1576. — DOI: 10.1364/AO.447779.
55. Engineering phase and polarization singularity sheets / S. W. D. Lim [и др.] // Nature Communications. — 2021. — Июль. — Т. 12, № 1. — С. 4190. — DOI: 10.1038/s41467-021-24493-y.
56. Enhancement of second-harmonic generation with femtosecond laser pulses near the photonic band edge for different polarizations of incident light / A. V. Balakin [и др.] // Opt. Lett. — 1999. — Июнь. — Т. 24, № 12. — С. 793—795. — DOI: 10.1364/OL.24.000793.
57. Experimental observation of Berry phases in optical Möbius-strip microcavities / J. Wang [и др.] // Nature Photonics. — 2022. — Дек. — DOI: 10.1038/s41566-022-01107-7.
58. Far field diffraction of an optical vortex beam by a fork-shaped grating / L. Stoyanov [и др.] // Optics Communications. — 2015. — Т. 350. — С. 301—308. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2015.04.020>.
59. *Findlay J.* The phase and group paths of radio waves returned from region E of the ionosphere // Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics. — 1951. — Т. 1, № 5. — С. 353—366. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9169\(51\)90010-4](https://doi.org/10.1016/0021-9169(51)90010-4).
60. Fine characteristics of polarization singularities in a three-dimensional electromagnetic field and their properties in the near field of a metallic nanospheroid / K. S. Grigoriev [и др.] // Phys. Rev. A. — 2018. — Дек. — Т. 98, вып. 6. — С. 063805. — DOI: 10.1103/PhysRevA.98.063805.
61. *Freund I.* Poincare vortices. // Optics Letters. — 2001. — Т. 26, № 24. — С. 1996—8. — DOI: 10.1364/ol.26.001996.
62. *Freund I.* Second-harmonic generation of polarization singularities // Opt. Lett. — 2002. — Сент. — Т. 27, № 18. — С. 1640—1642. — DOI: 10.1364/OL.27.001640.
63. *Freund I.* Polychromatic polarization singularities // Opt. Lett. — 2003. — Нояб. — Т. 28, № 22. — С. 2150—2152. — DOI: 10.1364/OL.28.002150.
64. *Freund I.* Coherency matrix description of optical polarization singularities // Journal of Optics A: Pure and Applied Optics. — 2004. — Апр. — Т. 6, № 5. — S229. — DOI: 10.1088/1464-4258/6/5/015.
65. *Freund I.* Polarization singularity anarchy in three dimensional ellipse fields // Optics Communications. — 2004. — Т. 242, № 1—3. — С. 65—78. — DOI: 10.1016/j.optcom.2004.08.040.

66. *Freund I.* Polarization singularity democracy: WYSIWYG // Opt. Lett. — 2004. — Август. — Т. 29, № 15. — С. 1715—1717. — DOI: 10.1364/OL.29.001715.
67. *Freund I.* Cones, spirals, and Möbius strips, in elliptically polarized light // Optics Communications. — 2005. — Т. 249, № 1. — С. 7—22. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2004.12.052>.
68. *Freund I.* Multitwist optical Möbius strips // Opt. Lett. — 2010. — ЯНВ. — Т. 35, № 2. — С. 148—150. — DOI: 10.1364/OL.35.000148.
69. *Freund I.* Optical Möbius strips in three dimensional ellipse fields: II. Lines of linear polarization // Optics Communications. — 2010. — Т. 283, № 1. — С. 16—28. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2009.09.037>.
70. *Freund I.* Optical Möbius strips in three-dimensional ellipse fields: I. Lines of circular polarization // Optics Communications. — 2010. — Т. 283, № 1. — С. 1—15. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2009.09.042>.
71. *Freund I.* Möbius strips and twisted ribbons in intersecting Gauss-Laguerre beams // Optics Communications. — 2011. — Т. 284, № 16. — С. 3816—3845. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2011.04.032>.
72. *Freund I.* Optical Möbius strips, twisted ribbons, and the index theorem // Opt. Lett. — 2011. — Дек. — Т. 36, № 23. — С. 4506—4508. — DOI: 10.1364/OL.36.004506.
73. *Freund I.* Ordinary polarization singularities in three-dimensional optical fields // Opt. Lett. — 2012. — Июнь. — Т. 37, № 12. — С. 2223—2225. — DOI: 10.1364/OL.37.002223.
74. *Freund I.* Optical Möbius strips and twisted ribbon cloaks // Opt. Lett. — 2014. — Февр. — Т. 39, № 4. — С. 727—730. — DOI: 10.1364/OL.39.000727.
75. *Freund I.* Polarization Möbius strips on elliptical paths in three-dimensional optical fields // Opt. Lett. — 2020. — Июнь. — Т. 45, № 12. — С. 3333—3336. — DOI: 10.1364/OL.392331.
76. *Freund I., Shvartsman N.* Wave-field phase singularities: The sign principle // Phys. Rev. A. — 1994. — Дек. — Т. 50, вып. 6. — С. 5164—5172. — DOI: 10.1103/PhysRevA.50.5164.
77. *Freund I., Shvartsman N., Freilikher V.* Optical dislocation networks in highly random media // Optics Communications. — 1993. — Т. 101, № 3. — С. 247—264. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0030-4018\(93\)90375-F](https://doi.org/10.1016/0030-4018(93)90375-F).
78. *Gautam N., Choudhary A., Lall B.* Neural networks for modelling nonlinear pulse propagation // Applications of Machine Learning 2021. Т. 11843. — International Society for Optics, Photonics. SPIE, 2021. — С. 151—155. — DOI: 10.1117/12.2596460.
79. Generation and dynamics of optical beams with polarization singularities / F. Cardano [и др.] // Opt. Express. — 2013. — Апрель. — Т. 21, № 7. — С. 8815—8820. — DOI: 10.1364/OE.21.008815.
80. Generation of Intense High-Order Vortex Harmonics / X. Zhang [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2015. — Апрель. — Т. 114, вып. 17. — С. 173901. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.173901.

81. Generation of Optical Harmonics / P. A. Franken [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 1961. — Август. — Т. 7, вып. 4. — С. 118—119. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.7.118.
82. Generation of polarization singularities in the self-focusing of an elliptically polarized laser beam in an isotropic Kerr medium / N. A. Panov [и др.] // Physica D: Nonlinear Phenomena. — Netherlands, 2016. — Т. 332. — С. 73—78. — DOI: 10.1016/j.physd.2016.06.006.
83. *Gil J.* Intrinsic Stokes parameters for 3D and 2D polarization states // Journal of the European Optical Society - Rapid publications. — 2015. — Т. 10.
84. *Giordmaine J. A.* Nonlinear Optical Properties of Liquids // Phys. Rev. — 1965. — Июнь. — Т. 138, 6A. — A1599—A1606. — DOI: 10.1103/PhysRev.138.A1599.
85. *Grigoriev K. S., Makarov V. A., Perezhogin I. A.* Formation of the lines of circular polarization in a second harmonic beam generated from the surface of an isotropic medium with nonlocal nonlinear response in the case of normal incidence // Journal of Optics. — 2015. — Ноябрь. — Т. 18, № 1. — С. 014004. — DOI: 10.1088/2040-8978/18/1/014004.
86. *Grigoriev K. S., Makarov V. A., Perezhogin I. A.* Polarization singularities in a sum-frequency light beam generated by a bichromatic singular beam in the bulk of an isotropic nonlinear chiral medium // Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics. — United States, 2015. — Т. 92. — С. 023814. — DOI: 10.1103/PhysRevA.92.023814.
87. *Hajnal J. V.* Observations of singularities in the electric and magnetic fields of freely propagating microwaves // Proceedings of the Royal Society A. — 1990. — Т. 430, № 1879. — С. 413—421. — DOI: 10.1098/rspa.1990.0097.
88. *He H., Heckenberg N., Rubinsztein-Dunlop H.* Optical particle trapping with higher-order doughnut beams produced using high efficiency computer generated holograms // Journal of Modern Optics. — 1995. — Т. 42, № 1. — С. 217—223. — DOI: 10.1080/09500349514550171.
89. High average power second harmonic generation in air / M. Beresna [и др.] // Applied Physics Letters. — 2009. — Т. 95, № 12. — С. 121502. — DOI: 10.1063/1.3232235.
90. High-power efficient multiple optical vortices in a single beam generated by a kinoform-type spiral phase plate / K. J. Moh [и др.] // Appl. Opt. — 2006. — Февр. — Т. 45, № 6. — С. 1153—1161. — DOI: 10.1364/AO.45.001153.
91. High-speed spatial control of the intensity, phase and polarisation of vector beams using a digital micro-mirror device / K. J. Mitchell [и др.] // Opt. Express. — 2016. — Дек. — Т. 24, № 25. — С. 29269—29282. — DOI: 10.1364/OE.24.029269.
92. Highly efficient vortex four-wave mixing in asymmetric semiconductor quantum wells / J. Qiu [и др.] // Opt. Express. — 2020. — Февр. — Т. 28, № 3. — С. 2975—2986. — DOI: 10.1364/OE.379245.
93. Highly-dispersive transparency at optical frequencies in planar metamaterials based on two-bright-mode coupling / X.-R. Jin [и др.] // Opt Express. — United States, 2011. — Окт. — Т. 19, № 22. — С. 21652—21657.

94. *Hirschfelder J. O., Christoph A. C., Palke W. E.* Quantum mechanical streamlines. I. Square potential barrier // *The Journal of Chemical Physics*. — 1974. — Т. 61, № 12. — С. 5435—5455. — DOI: 10.1063/1.1681899.
95. *Hirschfelder J. O., Goebel C. J., Bruch L. W.* Quantized vortices around wavefunction nodes. II // *The Journal of Chemical Physics*. — 1974. — Т. 61, № 12. — С. 5456—5459. — DOI: 10.1063/1.1681900.
96. *Hirschfelder J. O., Tang K. T.* Quantum mechanical streamlines. III. Idealized reactive atom– diatomic molecule collision // *The Journal of Chemical Physics*. — 1976. — Т. 64, № 2. — С. 760—785. — DOI: 10.1063/1.432223.
97. *Indebetouw G.* Optical Vortices and Their Propagation // *Journal of Modern Optics*. — 1993. — Т. 40, № 1. — С. 73—87. — DOI: 10.1080/09500349314550101.
98. Interferometric methods in diagnostics of polarization singularities / О. V. Angelsky [и др.] // 19th Congress of the International Commission for Optics: Optics for the Quality of Life. — 2002. — С. 479—480. — DOI: 10.1117/12.525469.
99. Isolated optical vortex knots / M. R. Dennis [и др.] // *Nature Physics*. — 2010. — Февр. — Т. 6, № 2. — С. 118—121. — DOI: 10.1038/nphys1504.
100. *Jr. G. A. S., Law C. T.* The Optical Vortex Soliton // *Opt. Photon. News*. — 1993. — Дек. — Т. 4, № 12. — С. 10—10. — DOI: 10.1364/OPN.4.12.000010.
101. *Kang H., Jia B., Gu M.* Polarization characterization in the focal volume of high numerical aperture objectives // *Opt. Express*. — 2010. — Май. — Т. 18, № 10. — С. 10813—10821. — DOI: 10.1364/OE.18.010813.
102. *Kessler D. A., Freund I.* Lissajous singularities // *Opt. Lett.* — 2003. — Янв. — Т. 28, № 2. — С. 111—113. — DOI: 10.1364/OL.28.000111.
103. *Khonina S. N., Savelyev D. A., Kazanskiy N. L.* Vortex phase elements as detectors of polarization state // *Optics Express*. — 2015. — Т. 23, № 14. — С. 17845—17859. — DOI: 10.1364/oe.23.017845 ; — <https://doi.org/10.1364/oe.23.017845>.
104. *Kingma D. P., Ba J.* Adam: A Method for Stochastic Optimization. — 2017.
105. *Kivshar Y.* Dark solitons in nonlinear optics // *IEEE Journal of Quantum Electronics*. — 1993. — Т. 29, № 1. — С. 250—264. — DOI: 10.1109/3.199266.
106. Knots and links of polarization singularity lines of light under tight focusing with a parabolic mirror / N. Y. Kuznetsov [и др.] // *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*. — United States, 2023. — Т. 107, № 6. — С. 063506. — DOI: 10.1103/PhysRevA.107.063506.
107. Knotted threads of darkness / J. Leach [и др.] // *Nature*. — 2004. — Нояб. — Т. 432, № 7014. — С. 165—165. — DOI: 10.1038/432165a.
108. *Kobashi J., Yoshida H., Ozaki M.* Polychromatic Optical Vortex Generation from Patterned Cholesteric Liquid Crystals // *Phys. Rev. Lett.* — 2016. — Июнь. — Т. 116, вып. 25. — С. 253903. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.253903.

109. *Korolenko P. V., Tikhomirov V. N.* Structure of the wavefront of coupled mode systems // Soviet Journal of Quantum Electronics. — 1991. — Сент. — Т. 21, № 9. — С. 1032. — DOI: 10.1070/QE1991v021n09ABEH004071.
110. *Kruglov V., Logvin Y., Volkov V.* The Theory of Spiral Laser Beams in Nonlinear Media // Journal of Modern Optics. — 1992. — Ноябрь. — Т. 39. — С. 2277–2291. — DOI: 10.1080/09500349214552301.
111. *Kuratsuji H., Tsuchida S.* Evolution of the Stokes parameters, polarization singularities, and optical skyrmion // Phys. Rev. A. — 2021. — Февр. — Т. 103, вып. 2. — С. 023514. — DOI: 10.1103/PhysRevA.103.023514.
112. *Kuznetsov N. Y., Grigoriev K. S., Makarov V. A.* Topological features of polarization ellipse strips built on non-planar contours in the light scattered on a metal nanospheroid // Laser Physics Letters. — 2023. — Июль. — Т. 20, № 8. — С. 085401. — DOI: 10.1088/1612-202X/acde72.
113. *Kuznetsov N. Y., Grigoriev K. S., Makarov V. A.* Polarization singularities of a plane electromagnetic wave scattered on a dielectric spherical nanoparticle // Advanced Laser Technologies ALT'21 Book of abstracts the 28th International Conference. — 2021. — LM-O—15.
114. *Kuznetsov N. Y., Grigoriev K. S., Makarov V. A.* Usage of machine-learning algorithms in inverse problem of light self-focusing in isotropic chiral medium with cubic nonlinearity // Laser Physics Letters. — Germany, 2022. — Т. 19, № 8. — С. 085401. — DOI: 10.1088/1612-202X/ac7135.
115. *Kuznetsov N. Y., Grigoriev K. S., Makarov V. A.* Topology of polarization-ellipse strips in the light scattered by a dielectric nanosphere // Phys. Rev. A. — 2021. — Окт. — Т. 104, вып. 4. — С. 043505. — DOI: 10.1103/PhysRevA.104.043505.
116. Laguerre-Gaussian beam generated with a multilevel spiral phase plate for high intensity laser pulses / K. Sueda [и др.] // Opt. Express. — 2004. — Июль. — Т. 12, № 15. — С. 3548–3553. — DOI: 10.1364/OPEX.12.003548.
117. *Lazarov R.* // Mathematics of Computation. — 2005. — Т. 74, № 250. — С. 1049–1052.
118. *Lekien F., Marsden J.* Tricubic interpolation in three dimensions // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 2005. — Т. 63, № 3. — С. 455–471. — DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.1296>.
119. *Lekner J.* Polarization of tightly focused laser beams // Journal of Optics. — 2002. — Т. 5, № 1. — С. 6. — DOI: 10.1088/1464-4258/5/1/302.
120. *Li J.* Polarization singularities of random partially coherent electromagnetic beams in atmospheric turbulence // Optics & Laser Technology. — 2018. — Т. 107. — С. 67–71. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2018.05.001>.
121. *Lilley D.* DNA Supercoiling // Encyclopedia of Genetics. — New York : Academic Press, 2001. — С. 575–577. — DOI: <https://doi.org/10.1006/rwgn.2001.1255>.

122. Linking Numbers of Klein Links / S. Beres [и др.] // The College Mathematics Journal. — 2021. — Март. — Т. 52. — С. 106–114. — DOI: 10.1080/07468342.2021.1877524.
123. *Makarov V. A., Grigoriev K. S., Kuznetsov N. Y.* Second harmonic generation in isotropic chiral medium by heterogeneously polarized light pulses // ALT Proceedings 2016. — University of Galway, Ireland, 2016. — С. LM-4–7.
124. *Makarov V. A., Grigoriev K. S., Shishkov G. M.* Polarization singularities in the self-focusing of an elliptically polarized laser beam in an isotropic phase of nematic liquid crystal close to the temperature of phase transition // Molecular Crystals and Liquid Crystals. — United Kingdom, 2017. — Т. 650, № 1. — С. 23–31. — DOI: 10.1080/15421406.2017.1319122.
125. *Makarov V. A., Perezhogin I. A., Potravkin N. N.* Polarisation singularities in the electric field at a sum-frequency generated by two collinear elliptically polarised Gaussian beams in the bulk of a nonlinear gyrotropic medium // Quantum Electronics. — United Kingdom, 2011. — Т. 41, № 2. — С. 149–152. — DOI: 10.1070/QE2011v041n02ABEH014481.
126. *Makarov V.* Nonlinear Optics with Elliptically Polarized Singular Beams and Short Pulses in Media with Spatial Dispersion //. — 01.2019. — С. 317–384. — DOI: 10.1007/978-3-319-98402-5_9.
127. *Mamaev A. V., Saffman M., Zozulya A. A.* Propagation of Dark Stripe Beams in Nonlinear Media: Snake Instability and Creation of Optical Vortices // Physical Review Letters. — 1996. — Т. 76, № 13. — С. 2262–2265. — DOI: 10.1103/physrevlett.76.2262.
128. *Mansuripur M., Zakharian A. R., Wright E. M.* Spin and orbital angular momenta of light reflected from a cone // Phys. Rev. A. — 2011. — Сент. — Т. 84, вып. 3. — С. 033813. — DOI: 10.1103/PhysRevA.84.033813.
129. *Marchiano R., Thomas J.-L.* Doing Arithmetic With Nonlinear Acoustic Vortices // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Авг. — Т. 101, вып. 6. — С. 064301. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.064301.
130. *Marrucci L., Manzo C., Paparo D.* Pancharatnam-Berry phase optical elements for wave front shaping in the visible domain: Switchable helical mode generation // Applied Physics Letters. — 2006. — Т. 88, № 22. — С. 221102. — DOI: 10.1063/1.2207993.
131. Measurement of the vortex and orbital angular momentum spectra with a single cylindrical lens / A. Volyar [и др.] // Appl. Opt. — 2019. — Июль. — Т. 58, № 21. — С. 5748–5755. — DOI: 10.1364/AO.58.005748.
132. Measuring Topological Charges of Optical Vortices with Multi-Singularity Using a Cylindrical Lens / Y. Peng [и др.] // Chinese Physics Letters. — 2015. — Февр. — Т. 32, № 2. — С. 024201. — DOI: 10.1088/0256-307x/32/2/024201.
133. Modulated vortex solitons of four-wave mixing / Y. Zhang [и др.] // Opt. Express. — 2010. — Май. — Т. 18, № 11. — С. 10963–10972. — DOI: 10.1364/OE.18.010963.

134. *Mokhun I., A M., Ju V.* Singularities of Poynting Vector and the Structure of Optical Fields // Ukrainian Journal of Physical Optics. — 2006. — Сент. — Т. 7. — DOI: 10.3116/16091833/7/3/129/2006.
135. *Monk P.* Finite Element Methods for Maxwell's Equations. — Oxford University Press, 04.2003. — DOI: 10.1093/acprof:oso/9780198508885.001.0001.
136. Multi-twist polarization ribbon topologies in highly-confined optical fields / Т. Bauer [и др.] // New Journal of Physics. — 2019. — Май. — Т. 21, № 5. — С. 053020. — DOI: 10.1088/1367-2630/ab171b.
137. Multitwist Möbius Strips and Twisted Ribbons in the Polarization of Paraxial Light Beams / E. J. Galvez [и др.] // Scientific Reports. — 2017. — Т. 7, № 1. — С. 13653. — DOI: 10.1038/s41598-017-13199-1 ; — <https://www.nature.com/articles/s41598-017-13199-1.pdf>.
138. Near-field polarization singularities at a planar nonlinear metamaterial with strong frequency dispersion / N. N. Potravkin [и др.] // Laser Physics Letters. — Germany, 2018. — Т. 15, № 11. — С. 115403. — DOI: 10.1088/1612-202X/aae03e.
139. New approach to plot polarization singularity lines of electromagnetic fields in nonparaxial optics / P. S. Ryzhikov [и др.] // Laser Physics Letters. — 2020. — Сент. — Т. 17, № 10. — С. 105403. — DOI: 10.1088/1612-202x/abb13f.
140. Nonlinear dynamics of two-color optical vortices in lithium niobate crystals / A. Dreischuh [и др.] // Opt. Express. — 2008. — Апр. — Т. 16, № 8. — С. 5406—5420. — DOI: 10.1364/OE.16.005406.
141. Nonregularity of three-dimensional polarization states / J. J. Gil [и др.] // Opt. Lett. — 2018. — Окт. — Т. 43, № 19. — С. 4611—4614. — DOI: 10.1364/OL.43.004611.
142. Numerical Simulation of Hybrid Polarization Singularity Configurations / D. Ye [и др.] // Curr. Opt. Photon. — 2017. — Авг. — Т. 1, № 4. — С. 396—401.
143. *Nye J. F.* Line singularities in wave fields // Philosophical Transactions of the Royal Society A Mathematical Physical and Engineering Sciences. — 1997. — Т. 355, № 1731. — С. 2065—2069. — DOI: 10.1098/rsta.1997.0107.
144. *Nye J. F., Berry M. V., Walford M. E. R.* Measuring the Change in Thickness of the Antarctic Ice Sheet // Nature Physical Science. — 1972. — Ноябрь. — Т. 240, № 97. — С. 7—9. — DOI: 10.1038/physci240007a0.
145. *Nye J. F.* Optical caustics in the near field from liquid drops // Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences. — 1978. — Т. 361, № 1704. — С. 21—41. — DOI: 10.1098/rspa.1978.0090.
146. *Nye J. F.* The motion and structure of dislocations in wavefronts // Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences. — 1981. — Т. 378, № 1773. — С. 219—239. — DOI: 10.1098/rspa.1981.0149.

147. *Nye J. F.* Lines of circular polarization in electromagnetic wave fields // Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences. — 1983. — Т. 389, № 1797. — С. 279—290. — DOI: 10.1098/rspa.1983.0109.
148. *Nye J. F.* Polarization effects in the diffraction of electromagnetic waves: the role of disclinations // Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences. — 1983. — Т. 387, № 1792. — С. 105—132. — DOI: 10.1098/rspa.1983.0053.
149. *Nye J. F., Berry M. V., Frank F. C.* Dislocations in wave trains // Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences. — 1974. — Т. 336, № 1605. — С. 165—190. — DOI: 10.1098/rspa.1974.0012.
150. *Nye J. F., Hajnal J. V.* The wave structure of monochromatic electromagnetic radiation // Proceedings of the Royal Society A. — 1987. — Т. 409, № 1836. — С. 21—36. — DOI: 10.1098/rspa.1987.0002.
151. *O'Reilly O. M.* Link, Writhe, and Twist // Modeling Nonlinear Problems in the Mechanics of Strings and Rods: The Role of the Balance Laws. — Cham : Springer International Publishing, 2017. — С. 93—118. — DOI: 10.1007/978-3-319-50598-5_3.
152. Observation of optical polarization Möbius strips / Т. Bauer [и др.] // Science. — 2015. — Т. 347, № 6225. — С. 964—966. — DOI: 10.1126/science.1260635.
153. Observation of optical vortex knots and links associated with topological charge / J. Zhong [и др.] // Opt. Express. — 2021. — Ноябрь. — Т. 29, № 23. — С. 38849—38857. — DOI: 10.1364/OE.441263.
154. Observation of Polarization Singularities at the Nanoscale / М. Burreli [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2009. — Янв. — Т. 102, вып. 3. — С. 033902. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.033902.
155. Observation of singularities in multiply scattered microwave fields / S. Zhang [и др.] // J. Opt. Soc. Am. A. — 2007. — Окт. — Т. 24, № 10. — А33—А38. — DOI: 10.1364/JOSAA.24.000A33.
156. Optical force and torque on small particles induced by polarization singularities / J. Peng [и др.] // Opt. Express. — 2022. — Май. — Т. 30, № 10. — С. 16489—16498. — DOI: 10.1364/OE.458060.
157. Optical framed knots as information carriers / Н. Larocque [и др.] // Nature Communications. — 2020. — Окт. — Т. 11, № 1. — С. 5119. — DOI: 10.1038/s41467-020-18792-z.
158. Optical Polarization Möbius Strips and Points of Purely Transverse Spin Density / Т. Bauer [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Июнь. — Т. 117, вып. 1. — С. 013601. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.013601.
159. Optical vortex interaction and generation via nonlinear wave mixing / F. Lenzini [и др.] // Phys. Rev. A. — 2011. — Дек. — Т. 84. — DOI: 10.1103/PhysRevA.84.061801.
160. Optical Vortices from Liquid Crystal Droplets / Е. Brasselet [и др.] // Physical review letters. — 2009. — Сент. — Т. 103. — С. 103903. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.103.103903.

161. Optics of light beams with screw dislocations / I. Basistiy [и др.] // Optics Communications. — 1993. — Т. 103, № 5. — С. 422–428. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0030-4018\(93\)90168-5](https://doi.org/10.1016/0030-4018(93)90168-5).
162. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes / L. Allen [и др.] // Phys. Rev. A. — 1992. — ИЮНЬ. — Т. 45, вып. 11. — С. 8185–8189. — DOI: [10.1103/PhysRevA.45.8185](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.45.8185).
163. *Ostrovsky A. S., Rickenstorff-Parrao C., Arrizón V.* Generation of “the perfect” optical vortex using a liquid-crystal spatial light modulator // Opt. Lett. — 2013. — Февр. — Т. 38, № 4. — С. 534–536. — DOI: [10.1364/OL.38.000534](https://doi.org/10.1364/OL.38.000534).
164. *Otte E.* Vectorial Light Fields and Singularities in 3d Space // Structured Singular Light Fields. — Cham : Springer International Publishing, 2021. — С. 53–95. — DOI: [10.1007/978-3-030-63715-6_3](https://doi.org/10.1007/978-3-030-63715-6_3).
165. *Otte E., Alpmann C., Denz C.* Polarization Singularity Explosions in Tailored Light Fields // Laser & Photonics Reviews. — 2018. — Т. 12, № 6. — С. 1700200. — DOI: <https://doi.org/10.1002/lpor.201700200>.
166. *Padgett M. J., Allen L.* Orbital angular momentum exchange in cylindrical-lens mode converters // Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics. — 2002. — ЯНВ. — Т. 4, № 2. — S17–S19. — DOI: [10.1088/1464-4266/4/2/362](https://doi.org/10.1088/1464-4266/4/2/362).
167. *Parmee C. D., Dennis M. R., Ruostekoski J.* Optical excitations of Skyrmions, knotted solitons, and defects in atoms // Communications Physics. — 2022. — Март. — Т. 5, № 1. — С. 54. — DOI: [10.1038/s42005-022-00829-y](https://doi.org/10.1038/s42005-022-00829-y).
168. Particle-like topologies in light / D. Sugic [и др.] // Nature Communications. — 2021. — Нояб. — Т. 12, № 1. — С. 6785. — DOI: [10.1038/s41467-021-26171-5](https://doi.org/10.1038/s41467-021-26171-5).
169. *Peng J., Liu W., Wang S.* Polarization singularities in light scattering by small particles // Phys. Rev. A. — 2021. — Февр. — Т. 103, вып. 2. — С. 023520. — DOI: [10.1103/PhysRevA.103.023520](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.103.023520).
170. *Poincaré H.* Sur les courbes définies par les équations différentielles (III) // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. — 1885. — Т. 1. — С. 167–244.
171. Poincaré-beam patterns produced by nonseparable superpositions of Laguerre-Gauss and polarization modes of light / E. J. Galvez [и др.] // Appl. Opt. — 2012. — Май. — Т. 51, № 15. — С. 2925–2934. — DOI: [10.1364/AO.51.002925](https://doi.org/10.1364/AO.51.002925).
172. Polarisation structuring of broadband light / K. J. Mitchell [и др.] // Opt. Express. — 2017. — Окт. — Т. 25, № 21. — С. 25079–25089. — DOI: [10.1364/OE.25.025079](https://doi.org/10.1364/OE.25.025079).
173. Polarization pattern of vector vortex beams generated by q-plates with different topological charges / F. Cardano [и др.] // Appl. Opt. — 2012. — Апр. — Т. 51, № 10. — С. C1–C6. — DOI: [10.1364/AO.51.0000C1](https://doi.org/10.1364/AO.51.0000C1).
174. Polarization rotation and singularity evolution of fundamental Poincaré beams through anisotropic Kerr nonlinearities / B. Wen [и др.] // Journal of Optics. — 2020. — Июль. — Т. 22, № 8. — С. 085501. — DOI: [10.1088/2040-8986/ab9aae](https://doi.org/10.1088/2040-8986/ab9aae).

175. Polarization singularities and orbital angular momentum sidebands from rotational symmetry broken by the Pockels effect / X. Lu [и др.] // *Scientific Reports*. — 2014. — Май. — Т. 4, № 1. — С. 4865. — DOI: 10.1038/srep04865.
176. Polarization Singularities in 2D and 3D Speckle Fields / F. Flossmann [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Май. — Т. 100, вып. 20. — С. 203902. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.100.203902.
177. Polarization singularities of the object field of skin surface / O. V. Angelsky [и др.] // *Journal of Physics D: Applied Physics*. — 2006. — Авг. — Т. 39, № 16. — С. 3547–3558. — DOI: 10.1088/0022-3727/39/16/005.
178. Polarization singularities: Progress, fundamental physics, and prospects / Q. Wang [и др.] // *APL Photonics*. — 2021. — Т. 6, № 4. — С. 040901. — DOI: 10.1063/5.0045261.
179. Polarization-Sensitive Second Harmonic Generation Microscopy for Investigations of Diseased Collagenous Tissues / R. Cisek [и др.] // *Frontiers in Physics*. — 2021. — DOI: 10.3389/fphy.2021.726996.
180. *Polynkin P., Ament C., Moloney J. V.* Self-Focusing of Ultraintense Femtosecond Optical Vortices in Air // *Phys. Rev. Lett.* — 2013. — Июль. — Т. 111, вып. 2. — С. 023901. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.023901.
181. *Potravkin N., Makarov V., Perezhogin I.* Modeling highly-dispersive transparency in planar nonlinear metamaterials // *Optics Communications*. — 2017. — Т. 385. — С. 177–180. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2016.10.056>.
182. *Press W. H., Teukolsky S. A.* Adaptive Stepsize Runge-Kutta Integration // *Computers in Physics*. — 1992. — Т. 6, № 2. — С. 188–191. — DOI: 10.1063/1.4823060.
183. Propagation equation for tight-focusing by a parabolic mirror / A. Couairon [и др.] // *Opt. Express*. — 2015. — Нояб. — Т. 23, № 24. — С. 31240–31252. — DOI: 10.1364/OE.23.031240.
184. Reconstructing the topology of optical polarization knots / H. Larocque [и др.] // *Nature Physics*. — 2018. — Нояб. — Т. 14, № 11. — С. 1079–1082. — DOI: 10.1038/s41567-018-0229-2.
185. *Richards B., Wolf E., Gabor D.* Electromagnetic diffraction in optical systems, II. Structure of the image field in an aplanatic system // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*. — 1959. — Т. 253, № 1274. — С. 358–379. — DOI: 10.1098/rspa.1959.0200.
186. *Riess J.* Quantised vortex motion through rings in Schrodinger mechanics // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 1987. — Окт. — Т. 20, № 15. — С. 5179. — DOI: 10.1088/0305-4470/20/15/031.
187. *Riess J.* Nodal structure of schroedinger wave functions and its physical significance // *Annals of Physics*. — 1970. — Т. 57, № 2. — С. 301–321. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(70\)90355-6](https://doi.org/10.1016/0003-4916(70)90355-6).

188. *Riess J.* Phase singularities and quantum dynamics // *Phys. Rev. B.* — 1988. — Август. — Т. 38, вып. 5. — С. 3133–3141. — DOI: 10.1103/PhysRevB.38.3133.
189. *Ji-Rong R., Tao Z., Shu-Fan M.* Knotted Topological Phase Singularities of Electromagnetic Field // *Communications in Theoretical Physics.* — 2008. — Т. 50, № 5. — С. 1071–1076. — DOI: 10.1088/0253-6102/50/5/12 ; — <http://arxiv.org/pdf/0712.4198>.
190. Sagnac interferometer method for synthesis of fractional polarization vortices / P. H. Jones [и др.] // *Opt. Lett.* — 2009. — Сентябрь. — Т. 34, № 17. — С. 2560–2562. — DOI: 10.1364/OL.34.002560.
191. *Schenk O., Gärtner K., Fichtner W.* Efficient Sparse LU Factorization with Left-Right Looking Strategy on Shared Memory Multiprocessors // *BIT Numerical Mathematics.* — 2000. — Март. — Т. 40, № 1. — С. 158–176. — DOI: 10.1023/A:1022326604210.
192. Second harmonic generation in isotropic chiral medium with nonlocality of nonlinear optical response by heterogeneously polarized pulsed beams / K. S. Grigoriev [и др.] // *Optics Express.* — United States, 2017. — Т. 25, № 6. — С. 6253–6262. — DOI: 10.1364/OE.25.006253.
193. Second-harmonic generation and the orbital angular momentum of light / K. Dholakia [и др.] // *Physical Review A.* — 1996. — Т. 54, № 5. — r3742–r3745. — DOI: 10.1103/physreva.54.r3742.
194. *Shen Y.* The Principles of Nonlinear Optics. — Wiley, 2003.
195. *Shishkov G. M., Grigoriev K. S., Makarov V. A.* Polarization singularities in the self-focusing of an elliptically polarized laser beam in the isotropic phase of a cholesteric liquid crystal close to the temperature of mesophase transition // *J. Opt. Soc. Am. B.* — 2021. — Октябрь. — Т. 38, № 10. — С. 2932–2937. — DOI: 10.1364/JOSAB.435961.
196. Singularities of interference of three waves with different polarization states / P. Kurzynowski [и др.] // *Opt Express.* — United States, 2012. — Ноябрь. — Т. 20, № 24. — С. 26755–26765.
197. Singularities of the second-harmonic light field polarisation arising upon reflection of normally incident elliptically polarised Gaussian beam from the surface of an isotropic chiral medium / K. S. Grigoriev [и др.] // *Quantum Electronics.* — United Kingdom, 2011. — Т. 41, № 11. — С. 993–996. — DOI: 10.1070/QE2011v041n11ABEH014705.
198. Solving the Nonlinear Schrödinger Equation in Optical Fibers Using Physics-informed Neural Network / X. Jiang [и др.] // *Optical Fiber Communication Conference (OFC) 2021.* — Optica Publishing Group, 2021. — М3Н.8. — DOI: 10.1364/OFC.2021.M3Н.8.
199. Space-variant polarization patterns of non-collinear Poincare superpositions / E. Galvez [и др.] // . — 03.2015. — DOI: 10.1117/12.2079058.
200. *Stasiak A., Katritch V., Kauffman L.* Ideal Knots. — World Scientific, 1998.
201. *Stoker J.* Differential Geometry. — Wiley, 2011.
202. Stokes singularity relations / I. Freund [и др.] // *Opt. Lett.* — 2002. — Апрель. — Т. 27, № 7. — С. 545–547. — DOI: 10.1364/OL.27.000545.

203. *Strohaber J., Scarborough T. D., Uiterwaal C. J. G. J.* Ultrashort intense-field optical vortices produced with laser-etched mirrors // *Appl. Opt.* — 2007. — Дек. — Т. 46, № 36. — С. 8583–8590. — DOI: 10.1364/AO.46.008583.
204. Structure of polarization singularities of a light beam at triple frequency generated in isotropic medium by singularly polarized beam / K. S. Grigoriev [и др.] // *Optics Express.* — United States, 2017. — Т. 25, № 21. — С. 25416–25421. — DOI: 10.1364/OE.25.025416.
205. Structure of polarization singularity lines in the near-field of golden spheroidal nanoparticle irradiated by a monochromatic plane wave / K. S. Grigoriev [и др.] // *ALT'18 Book of Abstracts.* — 2018. — NL-I–5.
206. Subwavelength beams with polarization singularities in plasmonic metamaterials / C. Zapata-Rodriguez [и др.] // *Physica Scripta.* — 2014. — Сент. — Т. T162. — С. 014045. — DOI: 10.1088/0031-8949/2014/T162/014045.
207. *Sugic D., Dennis M. R.* Singular knot bundle in light // *J. Opt. Soc. Am. A.* — 2018. — Дек. — Т. 35, № 12. — С. 1987–1999. — DOI: 10.1364/JOSAA.35.001987.
208. *Sun W., Fu Q., Chen Z.* Finite-difference time-domain solution of light scattering by dielectric particles with a perfectly matched layer absorbing boundary condition // *Appl. Opt.* — 1999. — Май. — Т. 38, № 15. — С. 3141–3151. — DOI: 10.1364/AO.38.003141.
209. *TD D., Hesselink L.* Visualizing Second-Order Tensor Fields with Hyperstreamlines // *Computer Graphics and Applications, IEEE.* — 1993. — Авг. — Т. 13. — С. 25–33. — DOI: 10.1109/38.219447.
210. *Tekce K., Otte E., Denz C.* Optical singularities and Möbius strip arrays in tailored non-paraxial light fields // *Opt. Express.* — 2019. — Окт. — Т. 27, № 21. — С. 29685–29696. — DOI: 10.1364/OE.27.029685.
211. The relationship between topological characteristics of component vortices and polarization singularities / O. Angelsky [и др.] // *Optics Communications.* — 2002. — Т. 207, № 1–6. — С. 57–65. — DOI: 10.1016/s0030-4018(02)01479-7.
212. Three-dimensional measurement of a tightly focused laser beam / X. Xie [и др.] // *AIP Advances.* — 2013. — Т. 3, № 2. — С. 022110. — DOI: 10.1063/1.4791764.
213. Three-dimensional structure of polarization singularities of a light field near a dielectric spherical nanoparticle / N. Y. Kuznetsov [и др.] // *Optics Express.* — United States, 2020. — Т. 28, № 19. — С. 27293–27299. — DOI: 10.1364/oe.398602.
214. *Tibshirani R.* Regression shrinkage and selection via the lasso: a retrospective // *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Statistical Methodology).* — 2011. — Т. 73, № 3. — С. 273–282.
215. Tight focusing of electromagnetic fields by large-aperture mirrors / D. E. Shipilo [и др.] // *Phys. Rev. E.* — 2019. — Сент. — Т. 100, вып. 3. — С. 033316. — DOI: 10.1103/PhysRevE.100.033316.
216. Topological near fields generated by topological structures / J. Peng [и др.] // *Science Advances.* — 2022. — Т. 8, № 41. — eabq0910. — DOI: 10.1126/sciadv.abq0910.

217. Topological polarization singularities in metaphotonics / W. Liu [и др.] // *Nanophotonics*. — 2021. — Февр. — Т. 10. — DOI: 10.1515/nanoph-2020-0654.
218. Topological quasiparticles of light: Optical skyrmions and beyond / Y. Shen [и др.]. — 2022. — Май. — DOI: 10.48550/arXiv.2205.10329.
219. Topological scattering singularities and embedded eigenstates for polarization control and sensing applications / Z. Sakotic [и др.] // *Photon. Res.* — 2021. — Июль. — Т. 9, № 7. — С. 1310—1323. — DOI: 10.1364/PRJ.424247.
220. Transformation of phase dislocations under acousto-optic interaction of optical and acoustical Bessel beams / V. N. Belyi [и др.] // *Journal of Optics*. — 2016. — Июнь. — Т. 18, № 7. — С. 074002. — DOI: 10.1088/2040-8978/18/7/074002.
221. *Tsukerman I.* Spurious numerical solutions in electromagnetic resonance problems // *Magnetics, IEEE Transactions on*. — 2003. — Июнь. — Т. 39. — С. 1405—1408. — DOI: 10.1109/TMAG.2003.810409.
222. Tying Polarization-Switchable Optical Vortex Knots and Links via Holographic All-Dielectric Metasurfaces / X. Guo [и др.] // *Laser & Photonics Review*. — 2020. — Т. 14, № 3. — С. 1900366. — DOI: 10.1002/lpor.201900366.
223. *Tyson R. K., Scipioni M., Viegas J.* Generation of an optical vortex with a segmented deformable mirror // *Appl. Opt.* — 2008. — Ноябрь. — Т. 47, № 33. — С. 6300—6306. — DOI: 10.1364/AO.47.006300.
224. *Tzarouchis D., Sihvola A.* Light Scattering by a Dielectric Sphere: Perspectives on the Mie Resonances // *Applied Sciences*. — 2018. — Т. 8, № 2. — DOI: 10.3390/app8020184.
225. *Varga P., Török P.* Focusing of electromagnetic waves by paraboloid mirrors. II. Numerical results // *J. Opt. Soc. Am. A*. — 2000. — Ноябрь. — Т. 17, № 11. — С. 2090—2095. — DOI: 10.1364/JOSAA.17.002090.
226. *Vasil'ev V. I., Soskin M. S.* Tangled nonlinear driven chain reactions of all optical singularities // *Complex Light and Optical Forces VI*. Т. 8274. — International Society for Optics, Photonics. SPIE, 2012. — С. 166—176. — DOI: 10.1117/12.904769.
227. *Voitsekhovich V. V., Kouznetsov D., Morozov D. K.* Density of turbulence-induced phase dislocations // *Appl. Opt.* — 1998. — Июль. — Т. 37, № 21. — С. 4525—4535. — DOI: 10.1364/AO.37.004525.
228. *Volkov S. N., Koroteev N. I., Makarov V. A.* Second-harmonic generation in the interior of an isotropic medium with quadratic nonlinearity by a focused inhomogeneously polarized pump beam // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. — 1998. — Апр. — Т. 86, № 4. — С. 687—695. — DOI: 10.1134/1.558527.
229. *Volyar A. V., Fadeeva T. A.* Dynamics of dislocations and disclinations of the field of a few-order optical fiber: I. Creation and annihilation of $C\pm$ disclinations // *Technical Physics Letters*. — 1997. — Т. 23, № 1. — С. 57—60. — DOI: 10.1134/1.1261617.

230. *Volyar A. V., Fadeeva T. A., Reshitova K. M.* Dynamics of field dislocations and disclinations in a few-mode optical fiber. III. Circularly polarized CP11 modes and L disclinations // *Technical Physics Letters*. — 1997. — Т. 23, № 3. — С. 175–177. — DOI: 10.1134/1.1261639.
231. *Volyar A. V., Zhilaitis V. Z., Fadeeva T. A.* Optical vortices in low-mode fibers: III. Dislocation reactions, phase transitions, and topological birefringence // *Optics and Spectroscopy*. 2000. — Т. 88, № 3. — С. 397–405. — DOI: 10.1134/1.626809.
232. Wave front sensing of an optical vortex and its correction in the close-loop adaptive system with bimorph mirror / F. A. Starikov [и др.] // *Optics in Atmospheric Propagation and Adaptive Systems X*. Т. 6747. — International Society for Optics, Photonics. SPIE, 2007. — С. 209–216. — DOI: 10.1117/12.764985.
233. *Whewell W.* XI. Essay towards a first approximation to a map of cotidal lines // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. — 1833. — Т. 123, № 123. — С. 147–236. — DOI: 10.1098/rstl.1833.0013.
234. *Wischgoll T., Meyer J.* Locating Closed Hyperstreamlines in Second Order Tensor Fields // — 01.2006. — С. 257–267. — DOI: 10.1007/3-540-31272-2_15.
235. *Wright F. J., Nye J. F.* Dislocations in diffraction patterns: continuous waves and pulses // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. — 1982. — Т. 305, № 1490. — С. 339–382. — DOI: 10.1098/rsta.1982.0041.
236. *Yakimenko A. I., Zaliznyak Y. A., Kivshar Y.* Stable vortex solitons in nonlocal self-focusing nonlinear media // *Phys. Rev. E*. — 2005. — Июнь. — Т. 71, вып. 6. — С. 065603. — DOI: 10.1103/PhysRevE.71.065603.
237. *Yao A. M., Padgett M. J.* Orbital angular momentum: origins, behavior and applications // *Adv. Opt. Photon.* — 2011. — Июнь. — Т. 3, № 2. — С. 161–204. — DOI: 10.1364/AOP.3.000161.
238. *Zhang Y., Yang X., Gao J.* Generation of polarization singularities with geometric metasurfaces // *Scientific Reports*. — 2019. — Дек. — Т. 9, № 1. — С. 19656. — DOI: 10.1038/s41598-019-56179-3.
239. *Абрамочкин Е. Г., Волостников В. Г.* Спиральные пучки света // *Успехи физических наук*. — 2004. — Т. 174, № 12. — С. 1273–1300. — DOI: 10.3367/UFNr.0174.200412a.1273.
240. *Веретенев Н. А., Розанов Н. Н., Федоров С. В.* Лазерные солитоны: топологические и квантовые эффекты // *Успехи физических наук*. — 2022. — Т. 192, № 2. — С. 143–176. — DOI: 10.3367/UFNr.2020.11.038869.
241. Возникновение сингулярностей поляризации световой волны в ближнем поле планарного нелинейного метаматериала / Н. Н. Потравкин [и др.] // *Сборник трудов XVI Всероссийской школы-семинара «Волны в неоднородных средах» имени профессора А.П. Сухорукова*. — г. Можайск, Московская область, 2018. — С. 42–44.

242. Коноскопическая картина с сингулярностями в электрооптическом кристалле / М. В. Брецько [и др.] // Вестник Физико-технического института Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского. — 2018. — Т. 2, вып. 1.
243. *Котляр В. В., Ковалёв А. А.* Орбитальный угловой момент структурно-устойчивых лазерных пучков // Компьютерная оптика. — 2022. — Т. 46, вып. 4. — С. 517–521. — DOI: 10.18287/2412-6179-С0-1108.
244. *Котляр В. В., Ковалёв А. А., Воляр А. В.* Топологический заряд оптических вихрей и их суперпозиций // Компьютерная оптика. — 2020. — Т. 44, вып. 2. — С. 145–154. — DOI: <https://doi.org/10.18287/2412-6179-С0-685>.
245. *Котляр В. В., Стафеев С. С., Ковалёв А. А.* Острая фокусировка светового поля с поляризационной и фазовой сингулярностью произвольного порядка // Компьютерная оптика. — 2019. — Т. 43, вып. 3. — С. 337–346. — DOI: <https://doi.org/10.18287/2412-6179-2019-43-3-337-346>.
246. *Кузнецов Н. Ю.* Трансформация поляризационных характеристик импульсного светового пучка при удвоении частоты в изотропной хиральной среде // Сборник докладов XI Всероссийской школы для студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов по лазерной физике и лазерным технологиям. — Саров, Нижегородская область, 2018. — С. 306–310.
247. Оптические вихри в неоднородных средах / V. Aksenov [и др.] // Оптика атмосферы и океана. — 1999. — Окт. — Т. 12. — С. 952–958.
248. *Прасолов В. В.* Узлы, зацепления, косы и трёхмерные многообразия. — МЦНМО, 1997.
249. *Розанов Н. Н.* Поляризационные сингулярности при интерференции трех плоских волн // Оптика и спектроскопия. — 2022. — Т. 130, вып. 5. — С. 775–778. — DOI: 10.21883/OS.2022.05.52436.4-22.
250. *Сергеевич Г. К., Анато́льевич М. В.* Генерация и преобразование световых пучков и импульсов, содержащих сингулярности поляризации, в средах с нелокальностью нелинейно-оптического отклика : дис. ... канд. / Сергеевич Григорьев Кирилл, Анато́льевич Макаров Владимир. — МГУ имени М.В. Ломоносова, 2019.
251. Топологические особенности линий сингулярности поляризации света, формируемых при его острой фокусировке / Н. Ю. Кузнецов [и др.] // XII Международная конференция по фотонике и информационной оптике: Сборник научных трудов. — Москва : Москва, 2023. — С. 145–146.
252. *Топоногов В.* Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей: учебное пособие для вузов. — Физматкнига, 2012.
253. Трёхмерная структура поляризационных сингулярностей и распределение момента импульса в непараксиальных световых полях / Н. Ю. Кузнецов [и др.] // Труды XI Международной конференции «Фундаментальные проблемы оптики» ФПО-2019. — 2019. — С. 137–137.

254. Фазовые сингулярности и оптические вихри в фотонике / А. П. Порфирьев [и др.] // Успехи физических наук. — 2022. — Т. 192, № 8. — С. 841—866. — DOI: 10.3367/UFNr.2021.07.039028.
255. Элементарная топология / О. Виро [и др.]. — МЦНМО, 2010.