

**ОТЗЫВ научного руководителя**  
**о диссертации на соискание ученой степени**  
**кандидата физико-математических наук**  
**Емельянова Дмитрия Павловича**  
**на тему «Построение решений краевых задач для нерегулярно**  
**вырождающихся эллиптических дифференциальных уравнений**  
**с аналитическими коэффициентами»**  
**по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и**  
**математическая физика**

В диссертационной работе Д.П. Емельянова изучаются свойства решений краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений в прямоугольнике. Рассмотрен случай нерегулярного вырождения уравнения по одной из переменных, т.е. вырождается не вся главная часть дифференциальной операции (это – регулярное вырождение), а слагаемое, содержащее вторую производную по переменной вырождения. Если при регулярном вырождении уравнения в основном сохраняют те же свойства, что и обыкновенные дифференциальные уравнения с вырождением главной части, то в случае нерегулярного вырождения свойства уравнений и их решений значительно изменяются и изучение их более сложно. Коэффициенты уравнений зависят только от переменной вырождения и являются аналитическими функциями – разлагаются в сходящиеся степенные ряды на некотором интервале. Правая часть уравнения зависит от обеих переменных и также является аналитической функцией по переменной вырождения.

Ставится задача – найти явный вид классических решений краевых задач для рассматриваемых уравнений и выяснить, как эти решения наследуют свойство аналитичности коэффициентов и правой части уравнений. Ранее этот вопрос был решен только для случая квадратичного вырождения для уравнения, не содержащего слагаемых с первыми производными.

Д.П. Емельянов исследовал широкий класс нерегулярно вырождающихся эллиптических уравнений и выписал их решения в явном аналитическом виде – в виде так называемых рядов Пуассона, - это ряды по собственным функциям обыкновенного дифференциального оператора по одной переменной, с коэффициентами – степенными рядами по другой переменной. Получены условия сходимости этих рядов и их производных. В результате оказалось возможным проследить, как свойство аналитичности коэффициентов и правой части уравнений наследуется решениями и каким образом факт вырождения уравнения проявляется в решении. Выявленные свойства близки свойствам решений сингулярно возмущенных дифференциальных операторов, которые были обнаружены в результате применения метода регуляризации сингулярных возмущений.

Перечислим основные результаты диссертации. Выпишем главную часть исследуемых дифференциальных операторов:  $u_{xx} + y^m u_{yy} + \dots$

1. Для краевой задачи E для рассматриваемого эллиптического дифференциального уравнения при порядках вырождения  $m = 1, 2$  установлен общий вид формальных решений в виде рядов, в которых характер неаналитической зависимости решения от переменного  $y$  указан явно. Доказаны теоремы о существовании классического решения задачи. При  $m = 2$  решены проблемы малых знаменателей и логарифмических особенностей.
2. Для краевой задачи D для рассматриваемого эллиптического дифференциального уравнения при порядках вырождения  $1 \leq m < 2$  установлен общий вид формальных решений в виде рядов, в которых характер неаналитической зависимости решения от переменного  $y$  указан явно. Доказаны теоремы о существовании классического решения задачи. При этом в случае иррациональных  $m$  установлено разложение решения по целым степеням переменной  $\tau = y^{2-m}$  с аналитическими коэффициентами.
3. Установлены асимптотические свойства решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с вырождением порядка  $m \in [1, 2]$  и большим параметром  $k$  при неизвестной функции.

Отметим, что схема работы для случая  $m = 2$  и для других рассмотренных случаев вырождения существенно различаются в технических преобразованиях. Все результаты, полученные в работе, являются новыми, носят теоретический характер, вносят существенный вклад в аналитическую теорию вырождающихся дифференциальных уравнений с частными производными и доказаны автором самостоятельно. При работе над диссертацией автор проявил высокую математическую квалификацию и творческое мышление.

Результаты диссертации опубликованы в 10 печатных работах, из них 4 – в научных изданиях, индексируемых Web of Science, Scopus, RSCI, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ, 6 – тезисы докладов.

Автореферат соответствует требованиям и правильно отражает содержание диссертации.

Работа прошла многократную апробацию. Результаты работы обсуждались и докладывались на международных и всероссийских научных конференциях и на научных семинарах.

На основании сказанного считаю, что диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Считаю, что диссертационная работа Емельянова Дмитрия Павловича удовлетворяет всем требованиям «Положения о присуждении ученых степеней в МГУ имени М.В. Ломоносова» и рекомендую её к защите в диссертационном совете МГУ.011.8 на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Научный руководитель,  
доктор физико-математических наук  
профессор кафедры общей математики  
факультета вычислительной математики и кибернетики  
ФГБОУ ВО «МГУ имени М.В. Ломоносова»  
Ломов Игорь Сергеевич

«08» апреля 2024г.

Контактные данные:

тел.: +7 (915) 246-66-28, e-mail: lomov@cs.msu.ru

Специальность, по которой научным руководителем защищена диссертация:  
01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Адрес места работы:

119991, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, с. 52,  
ФГБОУ ВО «МГУ имени М.В. Ломоносова», факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра общей математики  
Тел.: +7 (495) 939-55-91; e-mail: om@cs.msu.ru

Подпись сотрудника кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики ФГБОУ ВО «МГУ имени М.В. Ломоносова» Ломова И.С. удостоверяю: