

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Дерюгина Наталья Николаевна

**Контрастные структуры в нелинейных
двухкомпонентных системах с сингулярным возмущением
и их применение в физическом моделировании**

1.3.3. — «Теоретическая физика»

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор

Нефедов Николай Николаевич

Москва — 2023

Оглавление

	Стр.
Введение	6
Глава 1. Обзор литературы	11
1.1 Приложения	11
1.2 Двухкомпонентные системы с разной скоростью	13
1.3 Сингулярно возмущенные граничные условия	14
1.4 Метод дифференциальных неравенств	15
Глава 2. Существование и устойчивость погранслоного решения системы уравнений реакция-диффузия с условиями Неймана	18
2.1 Постановка задачи	18
2.2 Построение асимптотики	21
2.2.1 Локальные координаты	21
2.2.2 Общий вид асимптотики	23
2.2.3 Регулярная часть	25
2.2.4 Погранслоная часть	26
2.3 Обоснование асимптотики	29
2.3.1 Существование решения	29
2.3.2 Асимптотическая устойчивость стационарного решения	32

2.4	Пример системы химической кинетики	34
Глава 3. Стационарное погранслоное решение в задачах с		
	сингулярными граничными условиями	36
3.1	Существование стационарного погранслоного решения в уравнении реакция-диффузия с сингулярным граничным условием Неймана	36
3.1.1	Постановка задачи	37
3.1.2	Построение асимптотики	38
3.1.3	Обоснование асимптотики	44
3.1.4	Асимптотическая устойчивость решения.	47
3.2	Существование погранслоного решения в эллиптической задаче с сингулярным граничным условием третьего рода	48
3.2.1	Построение асимптотики	49
3.2.2	Общий вид асимптотики	50
3.2.3	Регулярная часть	51
3.2.4	Погранслоная часть	52
3.2.5	Обоснование асимптотики	54

3.3	Существование и устойчивость стационарного решения системы уравнений реакция-диффузия с сингулярно возмущенными граничными условиями Неймана	57
3.3.1	Построение асимптотики	59
3.3.2	Общий вид асимптотики	59
3.3.3	Регулярная часть	61
3.3.4	Погранслоиная часть	62
3.3.5	Существование решения	67
3.3.6	Асимптотическая устойчивость стационарного решения	71

Глава 4. Существование периодического решения в виде

двумерного фронта в системе параболических

уравнений 74

4.1	Постановка задачи	74
4.2	Локальные координаты	76
4.3	Асимптотическое приближение	78
4.4	Обоснование асимптотики	87
4.5	Построение верхнего и нижнего решений	90
4.6	Существование решения начально-краевой задачи	95
4.7	Асимптотическая устойчивость решения периодической задачи	97

Глава 5. Динамика автоволнового фронта в модели развития

урбоэкосистем	100
5.1 Постановка задачи	101
5.2 Общий вид асимптотики	104
5.3 Регулярная часть	106
5.4 Функции переходного слоя	107
5.4.1 Переход к локальным координатам	107
5.4.2 Система уравнений для определения функций переходного слоя	109
5.4.3 Функции переходного слоя первого порядка	114
5.5 Пример	119
Заключение	122

Введение

В задачах математического моделирования в классической теории поля, биофизике, химической кинетике и других научных областях естественным образом возникают сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения. Именно такие уравнения способны описать физические явления, для которых характерны резко изменяющиеся состояния рассматриваемой системы. В последние годы количество возникающих задач подобного рода особенно велико. Математически, такие явления описываются с помощью решений вида контрастных структур — функций, внутри области определения которых происходит резкое изменение их значений. В работе применяются два основных метода исследования контрастных структур — метод пограничных функций А. Б. Васильевой и метод дифференциальных неравенств, развитый в работах Н.Н. Нефёдова. Первый позволяет строить равномерные асимптотические приближения, второй позволяет доказать существование, локальную единственность и асимптотическую устойчивость решений с переходными слоями.

Целью данной работы является исследование контрастных структур в сингулярно возмущенных нелинейных двухкомпонентных системах с разными степенями малого параметра в ряде возможных постановок: с внутренним переходным слоем и пограничным переходным слоем, с сингулярным возмущением в дифференциальном операторе и в граничных условиях задачи.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие

задачи:

1. Построение асимптотического приближения решения с пограничным переходным слоем или с внутренним переходным слоем.
2. Построение нижних и верхних решений как модификации построенной асимптотики по методу дифференциальных неравенств.
3. Формулирование условий существования решений для рассмотренных типов задач.
4. Доказательство устойчивости полученных стационарных решений.

Научная новизна: Метод пограничных функций применен для ряда сингулярно возмущенных нелинейных двухкомпонентных систем с разными степенями малого параметра. Построена формальная асимптотика, проведено доказательство корректности построенной асимптотики, ее существования, локальной единственности и асимптотической устойчивости по Ляпунову. Для параболической задачи с условиями Неймана сформулировано условие существования решения, расширяющее класс задач, для которых применим построенный алгоритм.

Теоретическая и практическая значимость Теоретическая значимость работы состоит в расширении класса задач, для которых применен метод пограничных функций, сформулированы условия его применения и доказательства существования и единственности. Полученные результаты мож-

но использовать для исследования других переходных слоев. Проведенные исследования имеют важное значение для теоретической физики в области пограничных слоев, возникающих в нелинейных системах. Разработанные математические методы могут применяться для описания явлений классической теории поля, например, неравновесной термодинамики. Практическая значимость работы заключается в возможности применения ее результатов в математическом моделировании в задачах биофизики, химической кинетики, экологии и других областей наук, в которых возникает скачкообразное изменение рассматриваемых величин.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Существуют решения в виде контрастных структур для нелинейных двухкомпонентных систем в случаях с разными характерными скоростями изменения компонент системы (степенями малого параметра при дифференциальных операторах для двух компонент), с внутренним переходным слоем и пограничным переходным слоем, с сингулярным возмущением в дифференциальном операторе и в граничных условиях задачи.
2. Полученный в работе алгоритм позволяет строить асимптотические разложения по малому параметру решений двумерных задач с пограничным или внутренним переходным слоем.

3. Для рассмотренных задач справедливы теоремы существования и асимптотической устойчивости решений по Ляпунову.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью математических методов, примененных для построения решений. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Результаты работы были доложены на следующих конференциях: Ломоносов (Москва, 2013), "Актуальные проблемы математической физики"(Москва, 2014), "Ломоносов"(Москва, 2015), "Волны-2015"(Красновидово, 2015), V Съезд биофизиков России (Ростов-на-Дону 2015), IX Всероссийская конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и механики» с международным участием, посвященная памяти академика А.Ф. Сидорова (Дюрсо, 2018), Ломоносовские чтения (Москва, 2018), Тихоновские чтения (Москва, 2019), Ломоносов-2019 (Москва, 2019), 2nd International Conference on Integrable Systems and Nonlinear Dynamics (Ярославль, 2020), Ломоносов-2022 (Москва, 2022).

Личный вклад. Личный вклад автора состоит в построении асимптотических приближений решений с пограничным или внутренним переходным слоем, установлении условий существования и устойчивости построенных решений. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причём вклад соискателя был определяющим. Вклад автора в статье "Автоволновая самоорганизация в неоднородных природно-антропогенных

экосистемах" (Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия, 2016, №6, с. 39-45) составляет 1/4. В остальных работах, опубликованных в соавторстве, основополагающий вклад принадлежит соискателю.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 печатных изданиях, 5 из которых изданы в рецензируемых журналах из баз данных Scopus и Web of Science.

, 10 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, 15 — в тезисах докладов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 5 глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 123 страницы, включая 5 рисунков.

Глава 1. Обзор литературы

Многие прикладные задачи химической кинетики, биологии, экологии и других областей наук приводят к необходимости рассмотрения нелинейных сингулярных возмущенных уравнений в частных производных, решения которых имеют переходные слои – резкие изменения на границе или внутри рассматриваемой области. Для математического исследования таких структур развиваются асимптотические методы. Фундамент этого развивающегося направления был заложен в 1950-х годах, в работах А.Н. Тихонова [1], [2], [3]), а затем А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова [4]. Современный аппарат асимптотической теории сингулярных возмущений сохранил сформированный в этих работах язык. При этом появляющиеся новые прикладные задачи и запросы фундаментальных исследований продолжают требовать развития и совершенствования теории.

1.1 Приложения

Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения возникают во многих прикладных задачах. Например, в работе [5] теория контрастных структур была применена для описания турбулентного обмена между пространственно-неоднородным растительным покровом и приземным слоем атмосферы.

ры. Предполагалось, что компоненты скорости ветра имеют резкие переходные слои на границе раздела типов растительности. Авторы исследовали двумерную начально-краевую задачу, полученную из уравнений движения и уравнения неразрывности. Применение асимптотической теории позволило решить проблемы замыкания, то есть не привлекать дополнительные уравнения. Опираясь на полученные ранее теоретические результаты, авторы построили численные решения для распределения скорости ветра на границе лесных полос. В работе [6] коллектив авторов-биофизиков предложил модифицированную систему уравнению Фитцхью-Нагумо для описания так называемой урбоэкосистемы — системы в которой взаимодействуют природные и антропогенные факторы. Модель описывает перекрестное взаимодействие активирующей и ингибирующей компонент, связанных нелинейностью. В качестве активатора можно рассматривать, например, техногенное электромагнитное излучение или концентрацию тяжелых металлов в биогенном веществе, а в качестве ингибитора — скорость течения и перемешивания подземных вод, плотность почвогрунтов и т.д. С помощью асимптотических методов теории сингулярных возмущений авторы исследовали вопросы формирования и устойчивости контрастных структур типа всплеска. В работе [7] были рассмотрены стационарные решения системы реакция-диффузия с разными степенями малого параметра при старшей производной. Мотивацией для исследования стала задача химической кинетики, а именно — одновременное протекание «быстрой» бимолекулярной реакции и

«медленной» мономолекулярной реакции. С помощью метода дифференциальных неравенств авторы доказали существование асимптотического решения задачи.

1.2 Двухкомпонентные системы с разной скоростью

Одно из сравнительно недавно появившихся направлений, которое продолжает развиваться, — исследование существования и устойчивости стационарных решений параболических систем с разными степенями малого параметра. Физически это означает наличие быстрых источников разной скорости. Такие задачи применяются для математического моделирования систем, разные компоненты которой имеют разные характерные скорости изменения. В частности, такое описание актуально для моделирования переходных процессов в химической кинетике и биофизике.

Первой работой в этом направлении стало исследование одномерной краевой задачи [8] с внутренним переходным слоем — контрастной структурой типа ступеньки. Были определены условия, при которых существует решение с внутренним переходным слоем, доказана теорема существования решения для постановки с периодическими условиями по времени и в случае начальной задачи по времени, доказана устойчивость решения периодической задачи.

В работе [9] была рассмотрена одномерная система двух параболических уравнений с разными степенями малого параметра при дифференциальном операторе. Опираясь на результаты стационарного случая [8], авторы представили алгоритм получения асимптотического приближения решения типа фронта.

1.3 Сингулярно возмущенные граничные условия

Еще один из новых классов сингулярно возмущенных задач – задачи с сингулярно возмущенными граничными условиями второго и третьего рода. Такие задачи возникают естественным образом при математическом моделировании систем с интенсивными источниками на границе рассматриваемой области. Главное отличие от задачи с сингулярно возмущенными условиями первого рода состоит в том, что устойчивых по Ляпунову решений может быть несколько. Каждое из них единственно в своей области.

Впервые задача подобного рода была рассмотрена в 2014 году в работе [10]. Было доказано существование периодического по времени решения с переходным слоем вблизи границы для одномерной задачи типа реакция-диффузия с сингулярно возмущенным условием Неймана. Было показано, что в отличие от стандартных граничных условий Неймана, в задачах с сингулярно возмущенными условиями возникает пограничный слой порядка единицы и имеет более сложную структуру.

Продолжением в этом направлении стала работы [11], [12]. В них авторы рассмотрели уравнения реакция-диффузия с сингулярно возмущенными краевыми условиями второго и третьего рода, обобщив и развив результаты [10] на многомерный класс задач. Была получена формальная асимптотика, доказано существование и асимптотическая устойчивость полученного решения. Аналогичная задача с сингулярно возмущенными граничными условиями третьего рода была рассмотрена в работе [12].

1.4 Метод дифференциальных неравенств

Как было сказано выше, язык и основные методы асимптотической теории сингулярных возмущений были заложены в пионерских работах А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова. Если общий подход и стратегия построения асимптотики остались без существенных изменений, то исследование устойчивости полученных решений и их существования получило развитие позже. На сегодня основным методом доказательства существования и оценки точности построенной асимптотики является асимптотический метод дифференциальных неравенств. Впервые он был предложен Н.Н. Нефёдовым в работах [13] и [14].

Рассмотрим задачу в двумерной односвязной области D , ограниченной гладкой границей ∂D

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f(u, x), x = (x_1, x_2) \in D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \beta(x)u = h(x), x \in \partial D. \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь \mathcal{L} – дифференциальный оператор второго порядка, а производная в граничном условии берется по внутренней нормали к области D , $\beta(x) \geq 0$. Верхним и нижним решениями задачи (1.1) будем считать гладкие функции $u_\alpha \leq u_\beta$, если справедливо:

$$\mathcal{L}u_\beta - f(u_\beta, x) \leq 0, Bu_\beta \leq 0$$

$$\mathcal{L}u_\alpha - f(u_\alpha, x) \geq 0, Bu_\alpha \geq 0$$

Основы метода были заложены в [15]-[16]. В работах Н.Н. Нефёдова ([13],[17], [18], [19], [20], [21]) метод дифференциальных неравенств получил свое развитие применительно к сингулярно возмущенным задачам типа реакция-диффузия. Согласно асимптотическому методу дифференциальных неравенств верхнее и нижнее решения строятся как модификация построенной асимптотики порядка ε^n с помощью добавки поправок к коэффициентам членов порядка ε^{n+1} . Стандартная схема проверки (описанная, например, в [14]) позволяют показать, что построенные таким образом функции являются упорядоченными нижним и верхним решениями задачи и, следовательно, существует решение этой задачи: $u_\alpha(x, \varepsilon) \leq u(x, \varepsilon) \leq u_\beta(x, \varepsilon)$. Реализацию такого подхода позволяет сам метод построения асимптотики, который подразумевает монотонность операторов, порождающих асимптотику.

Асимптотический метод дифференциальных неравенств получил распространение на исследования параболических краевых задач [22]) и применяется для задач типа реакция-диффузия (например, [17],[23]), реакция-диффузия-адвекция (например, [24], [25], [26]), интегро-дифференциальных уравнений (например, [27], [28]) также на задачи с более сложной структурой – с разрывными источниками и нелинейностями.

Глава 2. Существование и устойчивость погранслоного решения системы уравнений реакция-диффузия с условиями Неймана

Целью данной главы является исследование параболической системы двух уравнений типа реакция-диффузия с условиями Неймана с коэффициентами диффузии различной степени малости. В главе исследована задача о существовании и асимптотической устойчивости стационарного решения для системы с граничными условиями Неймана без требования квазимонотонности правых частей. Построено асимптотическое приближение стационарного решения и доказана его асимптотическая устойчивость по Ляпунову. Полученный результат применен к классу задач экологии.

2.1 Постановка задачи

Рассматривается система двух уравнений типа реакция-диффузия с разными степенями малого параметра при дифференциальном операторе. Задача рассматривается в замкнутой, односвязной двумерной области D , ограничен-

ной достаточно гладкой границей ∂D :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{N}_u := \varepsilon^4 \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} - f(u, v, x, \varepsilon) = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in D, t > 0, \\ \mathcal{N}_v := \varepsilon^2 \Delta v - \frac{\partial v}{\partial t} - g(u, v, x, \varepsilon) = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in D, t > 0, \\ u(x, 0, \varepsilon) = u_{init}(x, \varepsilon), v(x, 0, \varepsilon) = v_{init}(x, \varepsilon), \quad x \in \bar{D}, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial D} = h(x), \quad x \in \partial D, \\ \left. \frac{\partial v}{\partial n} \right|_{\partial D} = q(x), \quad x \in \partial D. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – малый параметр, функции $f(u, v, x, \varepsilon)$ и $g(u, v, x, \varepsilon)$ определены при $(u, v, x) \in G \equiv I_u \times I_v \times D$ и $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, где ε_0 – положительная константа. Производная в граничном условии берется по внутренней нормали к ∂D . Исследованы условия существования и устойчивости по Ляпунову стационарного решения задачи (2.1). Это решение является решением эллиптической краевой задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_u := \varepsilon^4 \Delta u - f(u, v, x, \varepsilon) = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in D, \\ \mathcal{L}_v := \varepsilon^2 \Delta v - g(u, v, x, \varepsilon) = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in D, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial D} = h(x), \quad x \in \partial D, \\ \left. \frac{\partial v}{\partial n} \right|_{\partial D} = q(x), \quad x \in \partial D. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Ниже исследовано существование решения с пограничным слоем для задачи (2.2) и его устойчивость по Ляпунову как стационарного решения задачи (2.1).

Потребуем выполнения следующих условий:

(A0) $f(u, v, x, \varepsilon)$, $g(u, v, x, \varepsilon)$, $h(x)$ и $q(x)$ достаточно гладкие функции.

(A1) Вырожденная система

$$\begin{cases} f(u, v, x, 0) = 0, \\ g(u, v, x, 0) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

имеет решение $u = \bar{u}(x)$, $v = \bar{v}(x)$ такое, что $f_u(\bar{u}(x), \bar{v}(x), x, 0) > 0$, $g_v(\bar{u}(x), \bar{v}(x), x, 0) > 0$ при $x \in \bar{D}$. Ниже использованы обозначения $\bar{f}(x) = f(\bar{u}(x), \bar{v}(x), x, 0)$, $\bar{g}(x) = g(\bar{u}(x), \bar{v}(x), x, 0)$ и аналогичные обозначения для производных этих функций.

(A2) Определитель матрицы $\begin{pmatrix} \bar{f}_u(x) & \bar{f}_v(x) \\ \bar{g}_u(x) & \bar{g}_v(x) \end{pmatrix}$ положителен при $x \in \bar{D}$.

(A3) Существуют такие $\gamma_u(x)$ и $\gamma_v(x)$, что для любого $-1 \leq \Theta \leq 1$ в выражении $\begin{pmatrix} \bar{f}_u(x) & \Theta \bar{f}_v(x) \\ \Theta \bar{g}_u(x) & \bar{g}_v(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_u(x) \\ \gamma_v(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(x) \\ B(x) \end{pmatrix}$ имеем $A(x) > 0$, $B(x) > 0$ при всех $x \in \bar{D}$.

Замечание. В некоторых случаях решение системы (2.3) может быть найдено следующим образом: $f(u, v, x, 0) = 0$ имеет корень $u = \varphi(v, x)$: $f_u(\varphi(v, x), v, x, 0) > 0$, $v \in I_v$, $x \in \bar{D}$. Уравнение $p(v, x) := g(\varphi(v, x), v, x, 0) = 0$ имеет корень $v = v_0(x)$: $p_v(v_0, x) = g_v(\varphi(v_0, x), v_0, x, 0) > 0$, $x \in \bar{D}$, т.е. при более жестких условиях.

Ниже доказано существование стационарного решения, построена и обоснована его асимптотика и получены условия его асимптотической устойчивости по Ляпунову.

2.2 Построение асимптотики

2.2.1 Локальные координаты

Пусть граница ∂D задана параметрически: $x_1 = \varphi(\theta)$, $x_2 = \psi(\theta)$, где $0 \leq \theta < \Theta$ – параметр, при возрастании которого от 0 до Θ точка $(\varphi(\theta), \psi(\theta))$ проходит через каждую точку границы ∂D . Для описания решения вблизи ∂D определим δ -окрестность $\partial D^\delta := \{P \in D : \text{dist}(P, \partial D) < \delta\}$, $\delta = \text{const} > 0$. Введем в δ -окрестности ∂D локальные координаты (r, θ) , где r – расстояние от заданной точки внутри этой окрестности до точки на границе ∂D с координатами $(\varphi(\theta), \psi(\theta))$ вдоль нормали к ∂D . Известно, что если граница достаточно гладкая (функции $\varphi(\theta)$ и $\psi(\theta)$ имеют непрерывные производные), то в достаточно малой окрестности границы существует взаимно однозначное соответствие между исходными координатами (x_1, x_2) и локальными координатами (r, θ) , задаваемое формулами:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi(\theta) - r \frac{\psi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}}, \\ x_2 = \psi(\theta) + r \frac{\varphi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}}. \end{cases}$$

Единичный вектор касательной \mathbf{k} и единичный вектор нормали \mathbf{n} к ∂D задаются формулами: $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + \psi_\theta^2/\varphi_\theta^2}} \\ \frac{\psi_\theta/\varphi_\theta}{\sqrt{1 + \psi_\theta^2/\varphi_\theta^2}} \end{pmatrix}$, $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \frac{-\psi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}} \\ \frac{\varphi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}} \end{pmatrix}$.

Переходя к новым переменным, получим для дифференциального оператора Δ выражение в переменных (r, θ) :

$$\Delta_{r,\theta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + H_\theta \frac{\partial H_\theta}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{H_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{H_\theta} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{H_\theta^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

где H_θ - коэффициент Ламе: $H_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \theta}\right)^2}$.

Введем растянутые переменные двух масштабов $\xi = \frac{r}{\varepsilon}$ и $\eta = \frac{r}{\varepsilon^2}$. Тогда, раскладывая коэффициенты при частных производных в ряды по степеням ε , получим выражения для дифференциальных операторов в растянутых переменных:

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi,\theta} &= \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\varphi_{\theta\theta}\psi_\theta - \psi_{\theta\theta}\varphi_\theta}{\sqrt{\psi_\theta^2 + \varphi_\theta^2}} + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i-1} L_i, \\ \Delta_{\eta,\theta} &= \frac{1}{\varepsilon^4} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\varphi_{\theta\theta}\psi_\theta - \psi_{\theta\theta}\varphi_\theta}{\sqrt{\psi_\theta^2 + \varphi_\theta^2}} + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i-2} L_i, \end{aligned}$$

где L_i - линейные дифференциальные операторы, содержащие частные производные $\frac{\partial}{\partial \theta}$ и $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$. Так как локальная координата r вводится как расстояние вдоль внутренней нормали к ∂D , то оператор граничного условия в локальных

и растянутых переменных принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

2.2.2 Общий вид асимптотики

Формальная асимптотика решения строится стандартно с использованием схемы алгоритма метода пограничных функций, согласно которому искомые функции представляются в виде суммы:

$$u(x, \varepsilon) = \bar{u}(x, \varepsilon) + Pu(\xi, \theta, \varepsilon) + Ru(\eta, \theta, \varepsilon), \quad (2.4)$$

$$v(x, \varepsilon) = \bar{v}(x, \varepsilon) + Pv(\xi, \theta, \varepsilon) + Rv(\eta, \theta, \varepsilon).$$

В аналогичном виде представляется нелинейность:

$$f(u, x, \varepsilon) = \bar{f} + Pf(u, \xi, \theta, \varepsilon) + Rf(\eta, \theta, \varepsilon),$$

где

$$\begin{aligned} Pf &= f\left(\bar{u}(\varepsilon\xi, \theta, \varepsilon) + Pu(\xi, \theta, \varepsilon), \bar{v}(\varepsilon\xi, \theta, \varepsilon) + Pv(\xi, \theta, \varepsilon), \varepsilon\xi, \theta, \varepsilon\right) \\ &\quad - f(\bar{u}(\varepsilon\xi, \theta, \varepsilon), \bar{v}(\varepsilon\xi, \theta, \varepsilon), \varepsilon\xi, \theta, \varepsilon), \\ Rf &= f\left(\bar{u}(\varepsilon^2\eta, \theta, \varepsilon) + Pu(\varepsilon\eta, \theta, \varepsilon) + Ru(\eta, \theta, \varepsilon), \right. \\ &\quad \left. \bar{v}(\varepsilon^2\eta, \theta, \varepsilon) + Pv(\varepsilon\eta, \theta, \varepsilon) + Rv(\eta, \theta, \varepsilon), \varepsilon^2\eta, \theta, \varepsilon\right) - \\ &\quad - f\left(\bar{u}(\varepsilon^2\eta, \theta, \varepsilon) + Pu(\varepsilon\eta, \theta, \varepsilon), \bar{v}(\varepsilon^2\eta, \theta, \varepsilon) + Pv(\varepsilon\eta, \theta, \varepsilon), \varepsilon^2\eta, \theta, \varepsilon\right) \quad (2.5) \end{aligned}$$

Для краткости записи слагаемые представлены в новых координатах (r, θ) (в дальнейшем старые или новые координаты в представлении для погранслошной части нелинейности будем использовать исходя из соображений удобства). Аналогичным образом представляется и функция $g(u, v, x, \varepsilon)$.

Функции $\bar{u}(x, \varepsilon)$ $\bar{v}(x, \varepsilon)$ – регулярная часть асимптотики, описывают функции u и v вдали от границы ∂D , а $P(\xi, \theta, \varepsilon)$ и $R(\eta, \theta, \varepsilon)$ – погранслошная часть асимптотики, описывают решение вблизи границы ∂D в двух разных масштабах. Все слагаемые асимптотики (2.4) представляются в виде рядов по степеням ε :

$$\bar{u}(x, \varepsilon) = \bar{u}_0(x) + \varepsilon \bar{u}_1(x) + \dots$$

$$Pu(\xi, \theta, \varepsilon) = P_0u(\xi, \theta) + \varepsilon P_1u(\xi, \theta) + \dots$$

$$Ru(\eta, \theta, \varepsilon) = R_0u(\eta, \theta) + \varepsilon R_1u(\eta, \theta) + \dots$$

Аналогичным образом представляются слагаемые асимптотики для функции v . Введем обозначения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{f}(x) = f(\bar{u}_0(x), \bar{v}_0(x), x, 0), \\ \tilde{f}(\xi, \theta) = f(\bar{u}_0(0, \theta) + P_0u(\xi, \theta), \bar{v}_0(0, \theta) + P_0v(\xi, \theta), \theta, 0), \\ \hat{f}(\eta, \theta) = f(\bar{u}_0(0, \theta) + P_0u(0, \theta) + R_0u(\eta, \theta), \bar{v}_0(0, \theta) + P_0v(0, \theta) + R_0v(\eta, \theta), \theta, 0). \end{array} \right.$$

Аналогичные обозначения будем использовать для функции g и для производных этих функций.

2.2.3 Регулярная часть

Подставляя (2.4) в исходную задачу (2.2) и разделяя стандартным образом эту задачу на задачи для регулярной и погранслойной частей, получим последовательность задач для определения коэффициентов регулярной и погранслойной частей асимптотического приближения. Главные члены регулярной части асимптотики $\bar{u}_0(x)$ и $\bar{v}_0(x)$ определяются из вырожденной системы (2.2):

$$\begin{cases} f(\bar{u}_0(x), \bar{v}_0(x), x, 0) = 0, \\ g(\bar{u}_0(x), \bar{v}_0(x), x, 0) = 0. \end{cases}$$

С учетом условия (A1) эта система имеет решение

$$\begin{cases} \bar{u}_0(x) = \bar{u}(x), \\ \bar{v}_0(x) = \bar{v}(x). \end{cases}$$

Коэффициенты регулярной части асимптотического приближения (2.4) для $k \geq 1$

определяются из систем вида:

$$\begin{cases} \bar{f}_u(x)\bar{u}_k + \bar{f}_v(x)\bar{v}_k = F_k(x), \\ \bar{g}_u(x)\bar{u}_k + \bar{g}_v(x)\bar{v}_k = G_k(x), \end{cases} \quad (2.6)$$

где $F_k(x)$ и $G_k(x)$ – известные на каждом шаге функции, зависящие от коэффициентов регулярной части асимптотического приближения предыдущих

порядков. Определитель этой системы $\Delta = \bar{f}_u(x) \cdot \bar{g}_v(x) - \bar{f}_v(x) \cdot \bar{g}_u(x) > 0$ по условию (A2). Таким образом, эта система однозначно разрешима.

2.2.4 Погранслоиная часть

Система для нахождения функций погранслоиной части получается по методу Васильевой и имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} Ru + \varepsilon^2 \frac{\varphi_{\theta\theta}\psi_\theta - \psi_{\theta\theta}\varphi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}} \frac{\partial}{\partial \eta} Ru + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+2} L_i Ru = Rf, \\ \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} Rv + \frac{\varphi_{\theta\theta}\psi_\theta - \psi_{\theta\theta}\varphi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}} \frac{\partial}{\partial \eta} Rv + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i L_i Rv = Rg, \\ \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} Pu + \varepsilon^3 \frac{\varphi_{\theta\theta}\psi_\theta - \psi_{\theta\theta}\varphi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}} \frac{\partial}{\partial \xi} Pu + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+3} L_i Pu = Pf, \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} Pv + \varepsilon \frac{\varphi_{\theta\theta}\psi_\theta - \psi_{\theta\theta}\varphi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}} \frac{\partial}{\partial \xi} Pv + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+1} L_i Pv = Pg. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Выписывая последовательно слагаемые при разных степенях малого параметра, учитывая исходное граничное условие, а также условие стремления к нулю на бесконечности для всех погранслоиных функций, получим задачи для их определения.

Задачи для нулевого и первого порядков функции Rv имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 R_0 v}{\partial \eta^2} = 0, \\ \frac{\partial R_0 v}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0, \\ R_0 v(\infty) = 0. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 R_1 v}{\partial \eta^2} = 0, \\ \frac{\partial R_1 v}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = -\frac{\partial P_0 v}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}, \\ R_1 v(\infty) = 0. \end{array} \right.$$

Решение этих задач тривиально: $R_0v(\eta, \theta) = 0$; $R_1v(\eta, \theta) = 0$.

Используя представление (2.5), для функций $P_0u(\xi, \theta)$ и $P_0v(\xi, \theta)$ получаем:

$$f(\bar{u}_0(0, \theta) + P_0u(\xi, \theta), \bar{v}_0(0, \theta) + P_0v(\xi, \theta), \theta, 0) = 0. \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 P_0v}{\partial \xi^2} = g(\bar{u}_0(0, \theta) + P_0u(\xi, \theta), \bar{v}_0(0, \theta) + P_0v(\xi, \theta), \theta, 0), \\ \frac{\partial P_0v}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = -\frac{\partial R_1v}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0, \\ P_0v(\infty, \theta) = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Задача (2.8), (2.9) имеет решение $P_0v(\xi, \theta) = 0$, $P_0u(\xi, \theta) = 0$.

Функция $R_0u(\eta, \theta)$ определяется из задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 R_0u}{\partial \eta^2} = f(\bar{u}_0(0, \theta) + R_0u, \bar{v}_0(0, \theta), 0, \theta), \\ \frac{\partial R_0u}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0, \\ R_0u(\infty) = 0, \end{cases}$$

решение которой $R_0u(\eta, \theta) = 0$. Таким образом, все функции нулевого порядка погранслойной части асимптотики равны нулю. Таким образом, в рассматриваемом случае $\bar{f} = \tilde{f} = \hat{f}$ и $\bar{g} = \tilde{g} = \hat{g}$.

Для функции $R_2v(\eta, \theta)$ имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 R_2v}{\partial \eta^2} = 0,$$

из которого с учетом условия убывания на бесконечности $R_2v(\infty) = 0$ получим,

что $R_2v(\eta, \theta) = 0$.

Задачи для нахождения $P_1v(\xi, \theta)$ и $P_1u(\xi, \theta)$ имеют вид:

$$P_1u = -\frac{\bar{f}_v}{\bar{f}_u}P_1v(\xi, \theta),$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 P_1v}{\partial \xi^2} + \left(\bar{g}_u \frac{\bar{f}_v}{\bar{f}_u} - \bar{g}_v\right)P_1v = 0, \\ \frac{\partial P_1v}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = q(\theta) - \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial r} \Big|_{r=0} - \frac{\partial R_2v}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0}, \\ P_1v(\infty) = 0. \end{cases}$$

Откуда в явном виде находится $P_1v(\xi, \theta) = \left(\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial r} \Big|_{r=0} - q(\theta)\right) \exp^{-\xi \sqrt{\left(\bar{g}_u \frac{\bar{f}_v}{\bar{f}_u} - \bar{g}_v\right)}}$
и, следовательно, $P_1u(\xi, \theta) = -\frac{\bar{f}_v}{\bar{f}_u} \left(\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial r} \Big|_{r=0} - q(\theta)\right) \exp^{-\xi \sqrt{\left(\bar{g}_u \frac{\bar{f}_v}{\bar{f}_u} - \bar{g}_v\right)}}$.

Система для нахождения функции $R_1u(\eta, \theta)$ выглядит следующим обра-

зом:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 R_1u}{\partial \eta^2} - \bar{f}_u R_1u = 0, \\ \frac{\partial R_1u}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = -\frac{\partial P_0u}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0, \\ R_1u(\infty) = 0 \end{cases}$$

и дает тривиальное решение $R_1u(\eta, \theta) = 0$.

Погранфункция R_2u определяется из задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 R_2u}{\partial \eta^2} + \bar{f}_u R_2u = 0, \\ \frac{\partial R_2u}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = h(\theta) - \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial r} \Big|_{r=0} - \frac{\partial P_1v}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}, \\ R_2u(\infty) = 0, \end{cases}$$

решение которой, как и решения задач для пограничных функций следующих порядков, получаемых из (2.7), выписывается в явном виде и имеет стандартную оценку экспоненциального убывания.

2.3 Обоснование асимптотики

2.3.1 Существование решения

Для доказательства существования стационарного решения - решения задачи (2.2), будем использовать асимптотический метод дифференциальных неравенств. Для этого построим в области \bar{D} верхнее и нижнее решения задачи (2.2) - (u_α, v_α) и (u_β, v_β) как модификацию построенной в предыдущем разделе формальной асимптотики порядка k -функций $U_k(x, \varepsilon)$ и $V_k(x, \varepsilon)$ (частичных сумм порядка k представлений (2.4)). По определению эти функции должны удовлетворять следующим условиям:

Условие (B1): $u_\alpha(x, \varepsilon) \leq u_\beta(x, \varepsilon)$ и $v_\alpha(x, \varepsilon) \leq v_\beta(x, \varepsilon)$ для $x \in \bar{D}$.

Условие (B2):

$$\mathcal{L}_u(u_\beta) \leq 0 \leq \mathcal{L}_u(u_\alpha), v_\alpha \leq v \leq v_\beta,$$

$$\mathcal{L}_v(v_\beta) \leq 0 \leq \mathcal{L}_v(v_\alpha), u_\alpha \leq u \leq u_\beta, \quad x \in \bar{D}.$$

Условие **(B3)**:

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial n} \Big|_{\partial D} \leq h(x) \leq \frac{\partial u_\alpha}{\partial n} \Big|_{\partial D},$$

$$\frac{\partial v_\beta}{\partial n} \Big|_{\partial D} \leq q(x) \leq \frac{\partial v_\alpha}{\partial n} \Big|_{\partial D}.$$

Продемонстрируем построение верхнего и нижнего решений как модификацию первого порядка построенной асимптотики (ниже эти функции используются для оценки области притяжения стационарного решения):

$$\begin{cases} u_\alpha(x, \varepsilon) = U_1(x, \varepsilon) - \varepsilon \gamma_u(x) - \varepsilon^2 \exp(-\kappa_1 \xi), \\ v_\alpha(x, \varepsilon) = V_1(x, \varepsilon) - \varepsilon \gamma_v(x) - \varepsilon^2 \exp(-\kappa_2 \xi), \\ u_\beta(x, \varepsilon) = U_1(x, \varepsilon) + \varepsilon \gamma_u(x) + \varepsilon^2 \exp(-\kappa_1 \xi), \\ v_\beta(x, \varepsilon) = V_1(x, \varepsilon) + \varepsilon \gamma_v(x) + \varepsilon^2 \exp(-\kappa_2 \xi). \end{cases} \quad (2.10)$$

Условие упорядоченности **(B1)** выполняется в силу представления (2.10).

Так как асимптотика первого порядка удовлетворяет точно граничным условиям задачи (2.2), то погранслойные добавки в представлении (2.10), компенсируя невязки в граничных условиях при достаточно больших $\kappa_{1,2}$, обеспечат выполнение соответствующих граничных неравенств условия **(B3)**.

Проверим первое неравенство в условии **(B2)**. Оно должно выполняться для всех $v_\alpha \leq v \leq v_\beta$, или, что то же самое, для всех $v \in [V_1 - \varepsilon \gamma_v(x) - \varepsilon^2 \exp(-\kappa_2 \xi), V_1 + \varepsilon \gamma_v(x) + \varepsilon^2 \exp(-\kappa_2 \xi)]$. При подстановке в первое неравенство получим $\mathcal{L}_u(u_\beta) = O(\varepsilon^2) - \varepsilon(\bar{f}_u \gamma_u + \Theta \bar{f}_v \gamma_v)$, $x \in \bar{D}$, где $-1 \leq \Theta \leq 1$. В Из

условия **(A3)** следует выполнение неравенства $\mathcal{L}_u(u_\beta) < O$. Аналогично, для трех оставшихся неравенств получим:

$$L_v v_\beta = O(\varepsilon^2) - \varepsilon(\Theta \bar{g}_u \gamma_u + \bar{g}_v \gamma_v) < 0, \quad x \in \bar{D},$$

$$L_u u_\alpha = O(\varepsilon^2) + \varepsilon(\bar{f}_u \gamma_u + \Theta \bar{f}_v \gamma_v) > 0, \quad x \in \bar{D},$$

$$L_v v_\alpha = O(\varepsilon^2) + \varepsilon(\Theta \bar{g}_u \gamma_u + \bar{g}_v \gamma_v) > 0, \quad x \in \bar{D}.$$

Таким образом, неравенства условия **(B2)** выполняются в силу условия **(A3)**.

Из теорем сравнения ([15]) следует, что существует решение задачи (2.2), для которого выполняются неравенства:

$$\begin{cases} u_\alpha(x, \varepsilon) \leq u(x, \varepsilon) \leq u_\beta(x, \varepsilon), & x \in \bar{D}, \\ v_\alpha(x, \varepsilon) \leq v(x, \varepsilon) \leq v_\beta(x, \varepsilon), & x \in \bar{D} \end{cases} \quad (2.11)$$

Из представлений для нижнего и верхнего решений (2.10) следует, что $u_\alpha(x, \varepsilon) - u_\beta(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^2)$, $v_\alpha(x, \varepsilon) - v_\beta(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^2)$. Аналогичным образом, используя асимптотическое приближение k -го порядка $U_k(x, \varepsilon), V_k(x, \varepsilon)$, можно доказать существование решения с помощью верхних и нижних решений, для которых будет справедливо соответствующее уточнение оценки интервала до порядка $(k+1)$: $u_\alpha(x, \varepsilon) - u_\beta(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{k+1})$, $v_\alpha(x, \varepsilon) - v_\beta(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{k+1})$. Таким образом, имеет место следующая теорема:

Теорема 1. Пусть выполняются условия **(A0)-(A5)**. Тогда при достаточно малом ε , существует решение $u(x, \varepsilon), v(x, \varepsilon)$ задачи (2.2) с пограничным условием вблизи ∂D , для которого функции $U_n(x, \varepsilon), V_n(x, \varepsilon)$ являются равномерным асимптотическим приближением с точностью ε^{n+1} при $x \in \bar{D}$.

2.3.2 Асимптотическая устойчивость стационарного решения

Для доказательства асимптотической устойчивости стационарного решения задачи (2.1) используется эффективный во многих классах задач подход, использующий верхние и нижние решения специальной структуры (см. [29]).

Напомним, что вектор-функции $(U_\beta(x, t, \varepsilon), V_\beta(x, t, \varepsilon))$ и $(U_\alpha(x, t, \varepsilon), V_\alpha(x, t, \varepsilon))$ называются соответственно верхним и нижним решениями системы задачи (2.1), если они удовлетворяют при достаточно малых ε условиям:

Условие **(C1)**: $U_\alpha(x, t, \varepsilon) \leq U_\beta(x, t, \varepsilon)$ и $V_\alpha(x, t, \varepsilon) \leq V_\beta(x, t, \varepsilon)$ для $x \in \bar{D}$, $t > 0$.

Условие **(C2)**:

$$\mathcal{N}_u(U_\beta) \leq 0 \leq \mathcal{N}_u(U_\alpha), V_\alpha \leq V \leq V_\beta, \quad x \in \bar{D}, \quad t > 0,$$

$$\mathcal{N}_v(V_\beta) \leq 0 \leq \mathcal{N}_v(V_\alpha), U_\alpha \leq U \leq U_\beta, \quad x \in \bar{D}, \quad t > 0.$$

Условие **(C3)**:

$$\left. \frac{\partial U_\beta}{\partial n} \right|_{\partial D} \leq h(x) \leq \left. \frac{\partial U_\alpha}{\partial n} \right|_{\partial D},$$

$$\left. \frac{\partial V_\beta}{\partial n} \right|_{\partial D} \leq q(x) \leq \left. \frac{\partial V_\alpha}{\partial n} \right|_{\partial D}.$$

Функции $U_\alpha(x, t, \varepsilon)$ и $(U_\beta(x, t, \varepsilon))$ определим следующим образом:

$$U_\alpha(x, t, \varepsilon) = u(x, \varepsilon) + (u_\alpha(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon))e^{-\kappa t},$$

$$U_\beta(x, t, \varepsilon) = u(x, \varepsilon) + (u_\beta(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon))e^{-\kappa t},$$

где $u(x, \varepsilon)$ - стационарное решение, существование которого доказано в Теореме 1, $u_\alpha(x, \varepsilon)$ и $u_\beta(x, \varepsilon)$ – нижнее и верхнее решение для u -компоненты стационарной задачи, определенные в (2.10). Аналогичным образом определим функции $V_\alpha(x, t, \varepsilon)$, и $V_\beta(x, t, \varepsilon)$.

Используя очевидные оценки $|u(x, \varepsilon) - u_\alpha(x, \varepsilon)| \leq C\varepsilon$ и $|v(x, \varepsilon) - v_\alpha(x, \varepsilon)| \leq C\varepsilon$, несложно показать выполнение условий **(C1)**-**(C3)**.

Из [15] следует, что при условии $u_\alpha(x, \varepsilon) \leq u_{init}(x, \varepsilon) \leq u_\beta(x, \varepsilon)$, $v_\alpha(x, \varepsilon) \leq v_{init}(x, \varepsilon) \leq v_\beta(x, \varepsilon)$, существует единственное решение $(U_\varepsilon(x, t, \varepsilon), V_\varepsilon(x, t, \varepsilon))$ задачи (2.1) такое, что $U_\alpha(x, t, \varepsilon) \leq U_\varepsilon(x, t, \varepsilon) \leq U_\beta(x, t, \varepsilon)$ и $V_\alpha(x, t, \varepsilon) \leq V_\varepsilon(x, t, \varepsilon) \leq V_\beta(x, t, \varepsilon)$ для $x \in \bar{D}$, $t > 0$. Из этого факта и из структуры нижнего и верхнего решений параболической задачи следует следующий результат.

Теорема 2. Пусть выполняются условия **(A0)**-**(A5)**. Тогда, при достаточно малом ε , стационарное решение $(u_\varepsilon(x, \varepsilon), v_\varepsilon(x, \varepsilon))$ задачи (2.1) асимптотически устойчиво по Ляпунову, причем область притяжения не менее $(u_\alpha(x, \varepsilon), v_\alpha(x, \varepsilon)) \times (u_\beta(x, \varepsilon), v_\beta(x, \varepsilon))$. Это решение также локально единственно как решение задачи (2.2) в этой области.

2.4 Пример системы химической кинетики

Рассмотрим пример задачи (2.1) для следующей системы химической кинетики, описывающей быстрые бимолекулярные и мономолекулярные реакции

(см. [7]):

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^4 \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = k_1 uv + k_2 u(v - p)^2 + \varepsilon I_u(x) \equiv f(u, v, x, \varepsilon), \\ \varepsilon^2 \Delta v - \frac{\partial v}{\partial t} = k_3 uv + k_4 v(v - p) + \varepsilon I_v(x) \equiv g(u, v, x, \varepsilon), \\ u(x, 0, \varepsilon) = u_{init}(x, \varepsilon), v(x, 0, \varepsilon) = v_{init}(x, \varepsilon), (x) \in \bar{D}, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial D} = h(x), x \in \partial D, t > 0, \\ \left. \frac{\partial v}{\partial n} \right|_{\partial D} = q(x), x \in \partial D, t > 0. \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Функции $u(x, t)$ и $v(x, t)$ описывают концентрации двух веществ, участвующих в реакции. $I_u(x)$ и $I_v(x)$ – неотрицательные функции, описывающие внешние источники. Функция $p = p(x)$ – достаточно гладкая, $k_i > 0$, $i = \overline{1, 4}$ – постоянные. Два уравнения входят в систему с разной степенью малого параметра при дифференциальном операторе, что соответствует разным скоростям изменения концентрации двух реагентов или коэффициентам диффузии различной степени малости. Отметим, что для заданной системы не выполняется ни одно из четырех условий квазимонотонности, которые обычно предполагают в рассмотрении подобных задач, так как производная $f_v = k_1 u + k_2 u 2(v - p)$ меняет знак при переходе через p в области между нижним и верхним решениями.

Вырожденная система

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 uv + k_2 u(v - p)^2 = 0, \\ k_3 uv + k_4 v(v - p) = 0 \end{array} \right.$$

имеет решение

$$\begin{cases} \bar{u}(x) = 0, \\ \bar{v}(x) = p(x). \end{cases}$$

Производные $\bar{f}_u(x) = k_1 p(x) > 0$ и $\bar{g}_v(x) = k_4 p(x) > 0$, т.е. условие **(A1)** выполнено.

Определитель матрицы, определяющей регулярную часть асимптотики: $\begin{vmatrix} \bar{f}_u & \bar{f}_v \\ \bar{g}_u & \bar{g}_v \end{vmatrix} = k_1 k_4 p^2 > 0$, а в выражении $\begin{pmatrix} \bar{f}_u & \Theta \bar{f}_v \\ \Theta \bar{g}_u & \bar{g}_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_u(x) \\ \gamma_v(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 p & 0 \\ \Theta k_3 p & k_4 p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_u(x) \\ \gamma_v(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(x) \\ B(x) \end{pmatrix}$ при выборе функций $\begin{pmatrix} \gamma_u(x) > 0 \\ \gamma_v(x) > k_3 \gamma_u(x) / k_4 > 0 \end{pmatrix}$ функции $A(x) > 0$ и $B(x) > 0$. Таким образом, условия **(A2)** и **(A3)** выполнены.

Следовательно, для рассматриваемой системы химической кинетики применимы результаты Теоремы 1 и Теоремы 2.

Глава 3. Стационарное погранслоное решение в задачах с сингулярными граничными условиями

В данной главе рассмотрены три двумерные задачи с сингулярными граничными условиями. В первом разделе главы рассматривается однокомпонентное уравнение реакция-диффузия с сингулярно возмущенным граничным условием Неймана. В следующем разделе рассматривается естественное обобщение данной задачи на случай сингулярно возмущенных условий третьего рода. Наконец, завершает главу задача, представляющая следующий шаг развития этого направления, а именно двухкомпонентная система уравнений реакция-диффузия с сингулярно возмущенными граничными условиями Неймана.

3.1 Существование стационарного погранслоного решения в уравнении реакция-диффузия с сингулярным граничным условием Неймана

В настоящем разделе рассматривается задача с сингулярным граничным условием второго рода. Раздел развивает и обобщает результаты [10] на новый класс задач, представляющий интерес как с теоретической, так и с практической точек зрения.

3.1.1 Постановка задачи

Рассматривается уравнение реакция-диффузия с сингулярно-возмущенным краевым условием Неймана в замкнутой, односвязной двумерной области D , ограниченной достаточно гладкой границей ∂D . Ниже будем предполагать, что граница ∂D задана параметрически: $x = \varphi(\theta)$, $y = \psi(\theta)$, где $0 \leq \theta \leq \Theta$ – параметр, при возрастании которого от 0 до Θ точка $(\varphi(\theta), \psi(\theta))$ проходит через каждую точку границы ∂D :

$$\begin{cases} \mathcal{N}u := \varepsilon^2 \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} - f(u, x, \varepsilon) = 0, & x = (x_1, x_2) \in D, t > 0, \\ u(x, 0, \varepsilon) = u_{init}(x), & (x_1, x_2) \in \bar{D}, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial D} = \frac{h(x, t)}{\varepsilon}, & x \in \partial D, t > 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Производная в граничном условии берется по внутренней нормали к ∂D . С физической точки зрения задача описывает процессы с интенсивным потоком через границу заданной области. Данный раздел ставит своей целью исследовать стационарное решение задачи (3.1). Это решение является решением эллиптической краевой задачи

$$\begin{cases} \mathcal{L}u := \varepsilon^2 \Delta u - f(u, x, \varepsilon) = 0, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial D} = \frac{h(x)}{\varepsilon}, \\ x = (x_1, x_2) \in D. \end{cases} \quad (3.2)$$

Правая часть граничного условия содержит малый параметр $\varepsilon > 0$, что соответствует наличию на границе ∂D интенсивных источников. Наличие малого параметра делает граничное условие Неймана сингулярным и приводит к наличию у решения более сложного пограничного слоя.

Цель главы – исследовать существование решения с пограничным слоем для задачи (3.2) и его устойчивость по Ляпунову.

Потребуем выполнения следующих условий:

(A0) $f(u, x, \varepsilon)$ всюду в \bar{D} , $h(x)$ на границе ∂D и $\varphi(\theta)$, $\psi(\theta)$ при $0 \leq \theta \leq \Theta$ - достаточно гладкие функции.

(A1) Вырожденное уравнение $f(u, x, 0) = 0$ имеет корень $u = u_0(x)$:
 $f_u(u_0(x), x, 0) > 0$, $x \in \bar{D}$.

3.1.2 Построение асимптотики

Локальные координаты

Для описания решения близи ∂D введем в ее достаточно малой окрестности локальные координаты (r, θ) , где r – расстояние от заданной точки внутри этой окрестности до точки на границе ∂D с координатами $(\varphi(\theta), \psi(\theta))$ вдоль нормали к ∂D . Известно, что если граница достаточно гладкая (функции $\varphi(\theta)$ и $\psi(\theta)$ имеют непрерывные производные), то в достаточно малой окрестности

границы существует взаимно однозначное соответствие между исходными координатами (x_1, x_2) и локальными координатами (r, θ) , задаваемое формулами:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi(\theta) - r \frac{\psi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}}, \\ x_2 = \psi(\theta) + r \frac{\varphi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}}. \end{cases}$$

Единичный вектор касательной \mathbf{k} и единичный вектор нормали \mathbf{n} к ∂D

задаются формулами: $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\psi_\theta/\varphi_\theta}{\sqrt{1 + \psi_\theta^2/\varphi_\theta^2}} \end{pmatrix}$, $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -\psi_\theta \\ \frac{\varphi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}} \end{pmatrix}$.

Переходя к новым переменным, получим для оператора задачи следующее выражение:

$$\mathcal{L} = \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + H_\theta \frac{\partial H_\theta}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{H_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{H_\theta} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{H_\theta^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right).$$

где H_θ - коэффициент Ламе: $H_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \theta}\right)^2}$.

Введем растянутую переменную $\xi = \frac{r}{\varepsilon}$. Тогда, раскладывая коэффициенты при частных производных в ряды по степеням ε , получим для оператора задачи:

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\varphi_{\theta\theta}\psi_\theta - \psi_{\theta\theta}\varphi_\theta}{\sqrt{\psi_\theta^2 + \varphi_\theta^2}} + \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon^i \mathcal{L}_i,$$

где \mathcal{L}_i - линейные дифференциальные операторы, содержащие частные производные $\frac{\partial}{\partial \theta}$ и $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$. Так как локальная координата r вводится как расстояние вдоль внутренней нормали к ∂D , то оператор граничного условия в локальных

и растянутой переменных принимает вид:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial n} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Общий вид асимптотики

Асимптотику решения будем строить, используя стандартную схему алгоритма метода пограничных функций (см. [30], ([4])), согласно которому искомая функция представляется в виде суммы

$$u(x, \varepsilon) = \bar{u}(x, \varepsilon) + \Pi(\xi, \theta, \varepsilon). \quad (3.3)$$

В аналогичном виде представляется нелинейность:

$$\begin{aligned} f(u, x, \varepsilon) = \bar{F} + \Pi f(u, \xi, \theta, \varepsilon) = & f(\bar{u}(x, \varepsilon), x, \varepsilon) + f\left(\bar{u}(\varphi(\theta) - \varepsilon \xi \frac{\psi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}}, \right. \\ & \left. \psi(\theta) + \varepsilon \xi \frac{\varphi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}}, \varepsilon\right) + \Pi(\xi, \theta, \varepsilon), \varphi(\theta) - \varepsilon \xi \frac{\psi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}}, \psi(\theta) + \varepsilon \xi \frac{\varphi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}}, \varepsilon) - \\ & - f\left(\bar{u}(\varphi(\theta) - \varepsilon \xi \frac{\psi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}}, \psi(\theta) + \varepsilon \xi \frac{\varphi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}}, \varepsilon), \varphi(\theta) - \varepsilon \xi \frac{\psi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}}, \psi(\theta) + \right. \\ & \left. + \varepsilon \xi \frac{\varphi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}}, \varepsilon\right). \end{aligned}$$

В этих представлениях $\bar{u}(x, \varepsilon)$ – регулярная часть асимптотики, описывает функцию u вдали от границы ∂D , а $\Pi(\xi, \theta, \varepsilon)$ – погранслоиная часть асимптотики, описывает решение вблизи границы ∂D . Оба слагаемых представляются в виде ряда по степеням ε :

$$\bar{u}(x, \varepsilon) = \bar{u}_0(x) + \varepsilon \bar{u}_1(x) + \dots$$

$$\Pi(\xi, \theta, \varepsilon) = \Pi_0(\xi, \theta) + \varepsilon \Pi_1(\xi, \theta) + \dots$$

Разложим в ряды по степеням ε \bar{F} и Πf , используя обозначения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{f}(x) = f(\bar{u}_0(x), x, 0), \\ \tilde{f}(\xi, \theta) = f(\bar{u}_0(\varphi(\theta), \psi(\theta)) + \Pi_0(\xi, \theta), \varphi(\theta), \psi(\theta), 0) = \\ = f(\bar{u}_0(0, \theta) + \Pi_0(\xi, \theta), 0, \theta, 0), \end{array} \right.$$

и аналогичные обозначения будем использовать для производных этих функции (старые или новые координаты в представлении для погранслошной части нелинейности можно использовать, учитывая специфику задачи, из соображений удобства).

Регулярная часть

Подставляя (3.3) в исходную задачу (3.2) и разделяя стандартным образом эту задачу на задачи для регулярной и погранслошной частей, получим последовательность задач для определения коэффициентов регулярной и погранслошной частей асимптотического приближения. Для $\bar{u}_0(x)$ получим: $f(\bar{u}_0(x), x, 0) = 0$. С учетом условия **(A1)** $\bar{u}_0(x) = u_0(x)$. Первый порядок функции регулярной части определяется из уравнения: $\bar{f}_u(x)\bar{u}_1 = -\bar{f}_\varepsilon(x)$ Произвольный порядок функции регулярной части определяется из уравнений вида: $\bar{f}_u(x)\bar{u}_k = F_k(x)$, где $F_k(x)$ – известная на каждом шаге функция, зависящая

от коэффициентов регулярной части асимптотического приближения предыдущих порядков.

Погранслойная часть

Задача для нулевого порядка погранслойной части решения имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial \xi^2} = f(\bar{u}_0(\varphi(\theta), \psi(\theta)) + \Pi_0, \varphi(\theta), \psi(\theta), 0), \\ \left. \frac{\partial \Pi_0}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = h(0, \theta), \\ \Pi_0(\infty, \theta) = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Задача (3.4) – обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (θ играет роль параметра), которое можно проанализировать на фазовой плоскости (Π_0, Π'_0) (Рис. 3.1).

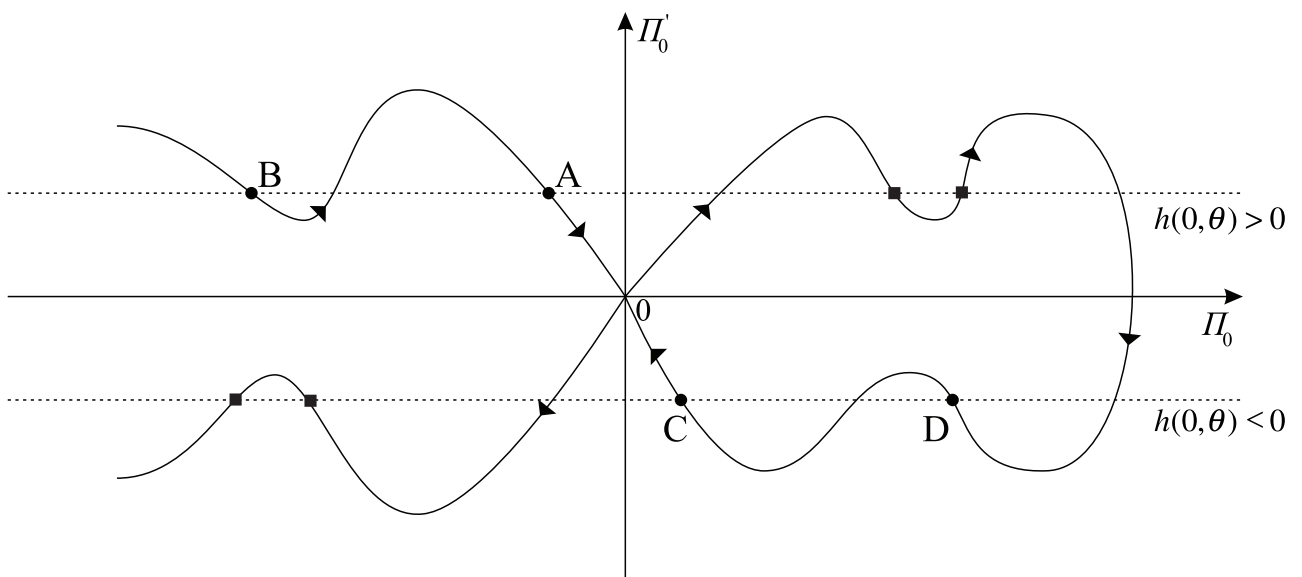


Рисунок 3.1 – Фазовая плоскость (Π_0, Π'_0) при фиксированном параметре θ

Точка $(0, 0)$ на фазовой плоскости – точка покоя типа седла. Задача (3.4) имеет решение, если прямая $\Pi'_0 = h(0, \theta)$ пересекает сепаратрису, идущую в точку $(0, 0)$.

Из анализа фазовой плоскости видно, что таких решений может быть несколько. Ниже показано, если при $\xi = 0$ значение (Π_0, Π'_0) , $0 \leq \theta \leq \Theta$ попадает в точки A, B, C, D , то двигаясь от них по сепаратрисе к точке $(0, 0)$ можно получить решение задачи (3.4). Сформулируем условия отбора решений:

Условие **(A2)**: Уравнение

$$\pm \left(2 \int_0^s f(\bar{u}_0(\varphi(\theta), \psi(\theta)) + \sigma, \varphi(\theta), \psi(\theta), 0)) d\sigma \right)^{1/2} = h(0, \theta)$$

для каждого фиксированного θ имеет корень $s = s(\theta)$ такой, что

$$f(\bar{u}_0(\varphi(\theta), \psi(\theta)) + s(\theta), \varphi(\theta), \psi(\theta), 0)) > 0 \text{ при } s(\theta) > 0 \text{ и}$$

$$f(\bar{u}_0(\varphi(\theta), \psi(\theta)) + s(\theta), \varphi(\theta), \psi(\theta), 0)) < 0 \text{ при } s(\theta) < 0.$$

Отметим, что точки, обозначенные на рис. 3.1 квадратиками для $\Pi_0(0, \theta) > 0$, соответствуют решениям с немонотонным пограничным слоем, так как двигаясь от этих точек по сепаратрисе к седлу $(0, 0)$ производная Π_0 переходит через нулевое значение и меняет знак. Задача для первого порядка погранслошной части имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial \xi^2} - \tilde{f}_u(\xi, \theta) \cdot \Pi_1 = G_1(\xi, \theta), \\ \frac{\partial \Pi_1}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = -\frac{\partial \bar{u}_0(0, \theta)}{\partial r}, \\ \Pi_1(\infty, \theta) = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned}
G_1(\xi, \theta) = & (\tilde{f}_u(\xi, \theta) - \bar{f}_u(x)) \left(\bar{u}_1(\varphi(\theta), \psi(\theta)) - \xi \frac{\psi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \varphi_\theta^2}} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x_1} \Big|_{(\varphi(\theta), \psi(\theta))} + \right. \\
& \left. + \xi \frac{\varphi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \varphi_\theta^2}} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x_2} \Big|_{(\varphi(\theta), \psi(\theta))} \right) - \tilde{f}_{x_1}(\xi, \theta) \cdot \xi \frac{\psi_\theta}{\sqrt{\psi_\theta^2 + \varphi_\theta^2}} + \tilde{f}_{x_2}(\xi, \theta) \cdot \xi \frac{\varphi_\theta}{\sqrt{\psi_\theta^2 + \varphi_\theta^2}} + \\
& + \tilde{f}_\varepsilon(\xi, \theta) + \bar{f}_{x_1}(x) \cdot \xi \frac{\psi_\theta}{\sqrt{\psi_\theta^2 + \varphi_\theta^2}} - \bar{f}(x)_{x_2} \cdot \xi \frac{\varphi_\theta}{\sqrt{\psi_\theta^2 + \varphi_\theta^2}} - \bar{f}(x)_\varepsilon - \frac{\partial \Pi_0}{\partial \xi} \frac{\varphi_{\theta\theta} \psi_\theta - \psi_{\theta\theta} \varphi_\theta}{\sqrt{\psi_\theta^2 + \varphi_\theta^2}}.
\end{aligned}$$

Решение этой задачи может быть получено явно:

$$\begin{aligned}
\Pi_1(\xi, \theta) = & \frac{z(\xi, \theta)}{\frac{\partial z}{\partial \xi}(0, \theta)} \left(- \frac{\partial \bar{u}_0(0, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{z(0, \theta)} \int_0^\infty z(\chi, \theta) G_1(\chi, \theta) \partial \chi \right) - \\
& - z(\xi, \theta) \int_0^\infty \frac{1}{z^2(\eta, \theta)} \int_\eta^\infty z(\chi, \theta) G_1(\chi, \theta) \partial \chi \partial \eta,
\end{aligned}$$

где $z(\xi, \theta) = \frac{\partial \Pi_0}{\partial \xi}$.

Используя предложенную схему, можно построить асимптотику произвольного порядка k :

$$U_k = \sum_{i=0}^k \varepsilon^i (\bar{u}_i(x) + \Pi_i(\xi)).$$

3.1.3 Обоснование асимптотики

Для доказательства существования решения используем схему асимптотического метода дифференциальных неравенств. Для этого построим в области \bar{D} верхнее и нижнее решения задачи (3.2) – $\beta(x, \varepsilon)$ и $\alpha(x, \varepsilon)$. Для удобства напомним определение этих функций:

(B1): $\alpha(x, \varepsilon) \leq \beta(x, \varepsilon)$, для $x \in \bar{D}$.

(B2): $\mathcal{L}(\beta) \leq 0 \leq \mathcal{L}(\alpha)$ для $x \in D$.

(B3): $\varepsilon \frac{\partial \beta}{\partial n} \Big|_{\partial D} \leq h(x) \leq \varepsilon \frac{\partial \alpha}{\partial n} \Big|_{\partial D}$.

Верхнее и нижнее решения будем строить как модификацию $(n + 1)$ -го порядка построенной асимптотики:

$$\begin{cases} \alpha(x, \varepsilon) = U_n + \varepsilon^{n+1} \left(\bar{u}_{n+1}(x) - \gamma + \Pi_{n+1}(\xi, \theta) + \Pi_\alpha(\xi, \theta) \right), \\ \beta(x, \varepsilon) = U_n + \varepsilon^{n+1} \left(\bar{u}_{n+1}(x) + \gamma + \Pi_{n+1}(\xi, \theta) + \Pi_\beta(\xi, \theta) \right). \end{cases} \quad (3.6)$$

Здесь $\gamma > 0$. Функций $\Pi_\alpha(\xi, \theta)$ и $\Pi_\beta(\xi, \theta)$ определяются из задач, аналогичных (3.5):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Pi_\alpha}{\partial \xi^2} - \tilde{f}_u(\xi, \theta) \cdot \Pi_\alpha = G_\alpha(\xi, \theta), & \frac{\partial^2 \Pi_\beta}{\partial \xi^2} - \tilde{f}_u(\xi, \theta) \cdot \Pi_\beta = G_\beta(\xi, \theta), \\ \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = -\delta, & \frac{\partial \Pi_\beta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \delta, \\ \Pi_\alpha(\infty, \theta) = 0, & \Pi_\beta(\infty, \theta) = 0, \end{cases}$$

где $G_\alpha(\xi, \theta) = -\gamma(\tilde{f}_u(\xi, \theta) - \bar{f}_u(x)) + Ae^{-\kappa\xi}$,

$G_\beta(\xi, \theta) = -\gamma(\tilde{f}_u(\xi, \theta) - \bar{f}_u(x)) - Ae^{-\kappa\xi}$. Можно показать, что для функции $\Pi_0(\xi, \theta)$ выполняется экспоненциальная оценка $|\Pi_0(\xi, \theta)| \leq Ce^{-\kappa\xi}$, где $C > 0$ и $\kappa > 0$. Отсюда следует экспоненциальная оценка выражения $(\tilde{f}_u(\xi, \theta) - \bar{f}_u(x))$ и, следовательно, можно подобрать такие числа A и κ , что G_α будет положительной, а G_β – отрицательной экспоненциально убывающими функциями.

Функции $\Pi_\alpha(\xi, \theta)$ и $\Pi_\beta(\xi, \theta)$ определяются в явном виде с помощью формул, аналогичных формуле для $\Pi_1(\xi, \theta)$:

$$\begin{aligned} \Pi_\alpha(\xi, \theta) = & \frac{z(\xi, \theta)}{\frac{\partial z}{\partial \xi}(0, \theta)} \delta + \frac{z(\xi, \theta)}{\frac{\partial z}{\partial \xi}(0, \theta)} \frac{1}{z(0, \theta)} \int_0^\infty z(\chi, \theta) G_\alpha(\chi, \theta) d\chi - \\ & - z(\xi, \theta) \int_0^\xi \frac{1}{z^2(\eta, \theta)} \int_\eta^\infty z(\chi, \theta) G_\alpha(\chi, \theta) d\chi d\eta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_\beta(\xi, \theta) = & \frac{z(\xi, \theta)}{\frac{\partial z}{\partial \xi}(0, \theta)} (-\delta) + \frac{z(\xi, \theta)}{\frac{\partial z}{\partial \xi}(0, \theta)} \frac{1}{z(0, \theta)} \int_0^\infty z(\chi, \theta) G_\beta(\chi, \theta) d\chi - \\ & - z(\xi, \theta) \int_0^\xi \frac{1}{z^2(\eta, \theta)} \int_\eta^\infty z(\chi, \theta) G_\beta(\chi, \theta) d\chi d\eta. \end{aligned}$$

Стандартным образом устанавливается, что для $\Pi_\alpha(\xi, \theta)$ и $\Pi_\beta(\xi, \theta)$ справедливы экспоненциальные оценки. Несложно также показать, что в силу условия **(A2)** $\Pi_\alpha(\xi, \theta) < 0$, $\Pi_\beta(\xi, \theta) > 0$, что обеспечивает условие упорядоченности верхнего и нижнего решений **(B1)**.

Проверим теперь выполнение условия **(B2)**. Подставим выражения для верхнего и нижнего решений (3.6) в исходный оператор задачи (3.2). Имеем:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\alpha(x, \varepsilon) = \varepsilon^{n+1}(G_\alpha + \bar{f}_u(x)\gamma) + O(\varepsilon^{n+2}), \\ \mathcal{L}\beta(x, \varepsilon) = \varepsilon^{n+1}(G_\beta - \bar{f}_u(x)\gamma) + O(\varepsilon^{n+2}). \end{cases}$$

В силу условия **(A1)**, положительности G_α и отрицательности G_β условие **(B2)** выполнено.

Для проверки выполнения условия **(B3)** подставим (3.6) в граничный оператор задачи (3.2).

$$\varepsilon \frac{\partial \beta}{\partial n} \Big|_{\partial D} = h(x) - \varepsilon^n \frac{\partial \Pi_\beta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} + O(\varepsilon^{n+1}) = h(x) - \varepsilon^n \delta + O(\varepsilon^{n+1}) < h(x),$$

$$\varepsilon \frac{\partial \alpha}{\partial n} \Big|_{\partial D} = h(x) - \varepsilon^n \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} + O(\varepsilon^{n+1}) = h(x) + \varepsilon^n \delta + O(\varepsilon^{n+1}) > h(x).$$

Таким образом, для функций $\alpha(x, \varepsilon)$ и $\beta(x, \varepsilon)$ выполнены все условия **(B1)**-**(B3)**. Из результатов работ по теоремам сравнения (см., например, [15]) следует, что существует решение задачи (3.2), для которого выполняется неравенство: $\alpha(x, \varepsilon) \leq u(x, \varepsilon) \leq \beta(x, \varepsilon)$ при $x \in \bar{D}$. Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 1. Пусть выполняются условия **(A0)**-**(A2)**. Тогда при достаточно малом ε , для выбранной согласно условию **(A2)** функции $\Pi_0(\xi, \theta)$ существует соответствующее ей решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (3.2) с пограничным слоем вблизи ∂D , для которого функция $U_n(x, \varepsilon)$ является равномерным асимптотическим приближением с точностью ε^{n+1} при $x \in \bar{D}$.

3.1.4 Асимптотическая устойчивость решения.

Метод дифференциальных неравенств позволяет также доказать асимптотическую устойчивость по Ляпунову решения (3.3) как стационарного решения параболической задачи (3.1). Для этого строятся нестационарные верхнее и нижнее решения задачи (3.1) в виде $\bar{\alpha}(x, t, \varepsilon) = u(x, \varepsilon) + e^{-\lambda(\varepsilon)t}(\alpha(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon))$,

$\bar{\beta}(x, t, \varepsilon) = u(x, \varepsilon) + e^{-\lambda(\varepsilon)t}(\beta(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon))$, где $\lambda(\varepsilon) > 0$ достаточно мало. Очевидно, что $\bar{\alpha} < \bar{\beta}$. Можно показать, что $\mathcal{N}_\varepsilon \beta < 0$ и $\mathcal{N}_\varepsilon \alpha > 0$. При этом в качестве $\alpha(x, \varepsilon)$ и $\beta(x, \varepsilon)$ можно взять модификацию асимптотики первого порядка – $\alpha_1(x, \varepsilon)$ и $\beta_1(x, \varepsilon)$. Таким образом, для решений, описанных теоремой 1, доказана асимптотическая устойчивость по Ляпунову с областью притяжения по крайней мере $[\alpha_1(x, \varepsilon), \beta_1(x, \varepsilon)]$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (A0)-(A2). Тогда каждое решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (3.2), существование которого гарантируется теоремой 1, асимптотически устойчиво по Ляпунову с областью устойчивости по крайней мере $[\alpha_1(x, \varepsilon), \beta_1(x, \varepsilon)]$ и следовательно $u(x, \varepsilon)$ – единственное решение задачи (3.2) в этой области.

3.2 Существование погранслоного решения в эллиптической задаче с сингулярным граничным условием третьего рода

В данном разделе рассматривается уравнение реакция-диффузия с сингулярно-возмущенным краевым условием третьего рода в двумерной области D , ограниченной кривой ∂D .

$$\begin{cases} \mathcal{L}u := \varepsilon^2 \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} - f(u, x, \varepsilon) = 0; x = (x_1, x_2) \in D, t > 0, \\ u(x, \varepsilon, 0) = u_{init}(x) \\ \varepsilon \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial D} + a(x, t)u = g(x, t), x = (x_1, x_2) \in D, t > 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

Задача рассматривается в замкнутой, односвязной области D , ограниченной достаточно гладкой границей ∂D . Производная в граничном условии берется по внутренней нормали к ∂D . В разделе исследуется существование и устойчивость стационарного решения задачи (3.7). Оно является решением эллиптической краевой задачи:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u := \varepsilon^2 \Delta u - f(u, x, \varepsilon) = 0, (x_1, x_2) \in D \\ \varepsilon \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial D} + a(x)u = g(x), (x_1, x_2) \in \partial D. \end{cases} \quad (3.8)$$

Цель настоящего раздела – исследовать существование решения с пограничным слоем для задачи (3.8) и его устойчивость по Ляпунову.

Потребуем выполнения некоторых условий:

(A0) $f(u, x, \varepsilon)$ всюду в \bar{D} и $g(x)$ на границе ∂D достаточно гладкие.

(A1) Вырожденное уравнение $f(u_0(x), x, 0) = 0$ имеет корень $u = u_0(x)$:

$f_u(u_0(x), x, 0) > 0, (x_1, x_2) \in \bar{D}$.

3.2.1 Построение асимптотики

Для описания решения вблизи переходного слоя осуществляется переход к локальным координатам аналогично тому, как это было сделано в разделе 1 настоящей главы.

3.2.2 Общий вид асимптотики

Асимптотику решения будем строить по классическому алгоритму, описанному в работах Васильевой-Бутузова ([4], [30]). Искомая функция представляется в виде суммы:

$$u(x, \varepsilon) = \bar{u}(x, \varepsilon) + \Pi(\xi, \theta, \varepsilon), \quad (3.9)$$

где $\bar{u}(x, \varepsilon)$ – функция регулярной части, описывает функцию u вдали от границы ∂D , а $\Pi(\xi, \theta, \varepsilon)$ – погранслойная функция, описывает решение вблизи ∂D .

Оба слагаемых представляются в виде ряда по степеням ε :

$$\bar{u}(x, \varepsilon) = \bar{u}_0(x) + \varepsilon \bar{u}_1(x) + \dots$$

$$\Pi(\xi, \theta, \varepsilon) = \Pi_0(\xi, \theta) + \varepsilon \Pi_1(\xi, \theta) + \dots$$

Правую часть представим в виде

$$\begin{aligned} f(u, x, \varepsilon) &= \bar{F} + \Pi f(u, \xi, \theta, \varepsilon) = f(\bar{u}(x, \varepsilon), x, \varepsilon) + \\ &+ f\left(\bar{u}(\varphi(\theta) - \varepsilon \xi \frac{\psi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}}, \psi(\theta) + \varepsilon \xi \frac{\varphi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}}, \varepsilon) + \Pi(\xi, \theta, \varepsilon), \varphi(\theta) - \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon \xi \frac{\psi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}}, \psi(\theta) + \varepsilon \xi \frac{\varphi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}}, \varepsilon\right) - \\ &\quad - f\left(\bar{u}(\varphi(\theta) - \varepsilon \xi \frac{\psi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}}, \varepsilon), \varphi(\theta) - \varepsilon \xi \frac{\psi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}}, \varepsilon\right) \end{aligned}$$

и разложим в ряд Тейлора в точке $(\bar{u}_0(x), x, 0)$, используя обозначения:

$$\bar{f}(x) = f(\bar{u}_0(x), x, 0),$$

$$\tilde{f}(\xi, \theta) = f(\bar{u}_0(\varphi(\theta), \psi(\theta)) + \Pi_0(\xi, \theta), \varphi(\theta), \psi(\theta), 0),$$

и аналогичные обозначения будем использовать для производных функции $f(u, x, \varepsilon)$

3.2.3 Регулярная часть

Подставим (3.9) в изначальную задачу (3.8) и выделим слагаемые, зависящие от x последовательно для каждой степени ε . Тогда в нулевом порядке получим:

$$f(\bar{u}_0(x), x, 0) = 0$$

С учетом условия (A1) $\bar{u}_0(x_1, x_2) = u_0(x)$.

Первый порядок функции регулярной части определяется из уравнения:

$$\bar{f}_u(x)\bar{u}_1(x) = -\bar{f}_\varepsilon(x).$$

Произвольный порядок функции регулярной части определяется из уравнений вида:

$$\bar{f}_u(x)\bar{u}_k(x) = F_k(x),$$

где $F_k(x)$ – известная на каждом шаге функция, зависящая от функций регулярной части порядка $(k - 1)$ и ниже.

3.2.4 Погранслоиная часть

С учетом условия **(A1)** задача для определения нулевого порядка погранслоиной части решения выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial \xi^2} = f(\bar{u}_0(\varphi(\theta), \psi(\theta)) + \Pi_0, \varphi(\theta), 0), \\ \frac{\partial \Pi_0}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} + a(\theta) \Pi_0 = g(\theta), \\ \Pi_0(\infty, \theta) = 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Задача (3.10) – обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (θ здесь играет роль параметра), которое поддается анализу на фазовой плоскости (Π_0, Π'_0) (Рис. 3.2). Точка $(0, 0)$ – точка покоя типа седла. Задача (3.10) имеет решение, если прямая $\Pi'_0 - a(0, \theta) = -g(\theta)$ пересекает сепаратрису, идущую в точку $(0, 0)$. Из анализа фазовой плоскости понятно, что таких решений может

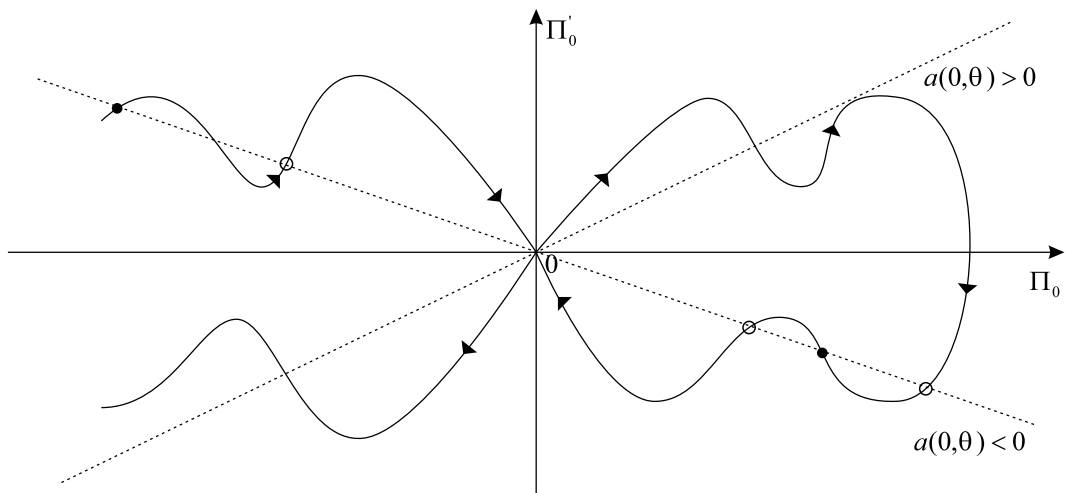


Рисунок 3.2 — Фазовая плоскость задачи (3.10) при фиксированном θ

быть несколько. Сформулируем условия отбора решений:

Условие **(A2)**: Уравнение $\pm \left(2 \int_0^s f(\bar{u}_0(\varphi(\theta), \psi(\theta)) + \sigma, \varphi(\theta), \psi(\theta), 0)) d\sigma \right)^{1/2} = a(0, \theta)s - g(\theta)$ для каждого фиксированного θ имеет корень такой, что $f(\bar{u}_0(\varphi(\theta), \psi(\theta)) + s, \varphi(\theta), \psi(\theta), 0) > 0$ при $s(\theta) > 0$ и $f(\bar{u}_0(\varphi(\theta), \psi(\theta)) + s, \varphi(\theta), \psi(\theta), 0) < 0$ при $s(\theta) < 0$

Задача для первого порядка пограничной части имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial \xi^2} - \tilde{f}_u(\xi, \theta) \cdot \Pi_1 = G_1(\xi, \theta) \\ \frac{\partial \Pi_1}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} + a(\theta) \Pi_1 = -\frac{\partial \bar{u}_0(\varphi(\theta), \psi(\theta))}{\partial r} \\ \Pi_1(\infty, \theta) = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

где $G_1(\xi, \theta) = (\tilde{f}_u(\xi, \theta) - \bar{f}_u(x)) \left(\bar{u}_1(\varphi(\theta), \psi(\theta)) - \xi \frac{\psi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \varphi_\theta^2}} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x_1} \Big|_{(\varphi(\theta), \psi(\theta))} + \xi \frac{\varphi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \varphi_\theta^2}} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x_2} \Big|_{(\varphi(\theta), \psi(\theta))} \right) - \tilde{f}_{x_1}(\xi, \theta) \cdot \xi \frac{\psi_\theta}{\sqrt{\psi_\theta^2 + \varphi_\theta^2}} + \tilde{f}_{x_2}(\xi, \theta) \cdot \xi \frac{\varphi_\theta}{\sqrt{\psi_\theta^2 + \varphi_\theta^2}} + \tilde{f}_\varepsilon(\xi, \theta) + \bar{f}_{x_2}(x) \cdot \xi \frac{\psi_\theta}{\sqrt{\psi_\theta^2 + \varphi_\theta^2}} - \bar{f}_{x_2}(x) \cdot \xi \frac{\varphi_\theta}{\sqrt{\psi_\theta^2 + \varphi_\theta^2}} - \bar{f}_\varepsilon(x) - \frac{\partial \Pi_0}{\partial \xi} \frac{\varphi_{\theta\theta} \psi_\theta - \psi_{\theta\theta} \varphi_\theta}{\sqrt{\psi_\theta^2 + \varphi_\theta^2}}$.

Решение этой задачи может быть получено явно:

$$\begin{aligned} \Pi_1(\xi, \theta) = \frac{z(\xi, \theta)}{\frac{\partial z}{\partial \xi}(0, \theta)} & \left(\int_0^\infty -\frac{\partial \bar{u}_0(\varphi(\theta), \psi(\theta))}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{z(0, \theta)} \int_0^\infty z(\chi, \theta) G_1(\chi, \theta) d\chi \right) - \\ & - z(\xi, \theta) \int_0^\infty \frac{1}{z^2(\eta, \theta)} \int_\eta^\infty z(\chi, \theta) G_1(\chi, \theta) d\chi d\eta, \end{aligned}$$

где $z(\xi, \theta) = \frac{\partial \Pi_0}{\partial \xi}$.

3.2.5 Обоснование асимптотики

Доказательство существования решения будем проводить по методу дифференциальных неравенств. Для этого построим в области \bar{D} верхнее и нижнее решения задачи (3.8) – $\beta(x, \varepsilon)$ и $\alpha(x, \varepsilon)$, дважды дифференцируемые по x и удовлетворяющие условиям:

$$(B1): \alpha(x, \varepsilon) \leq \beta(x, \varepsilon), \text{ для всех } x \in \bar{D}.$$

$$(B2): \mathcal{L}(\beta) \leq 0 \leq \mathcal{L}(\alpha).$$

$$(B3): \varepsilon \frac{\partial \beta}{\partial n} \Big|_{\partial D} + a(x)\beta \Big|_{\partial D} \leq g(x) \leq \varepsilon \frac{\partial \alpha}{\partial n} \Big|_{\partial D} + a(x)\alpha \Big|_{\partial D}.$$

Будем считать, что для задачи (3.8) построена асимптотика n -го порядка:

$$U_n = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i (\bar{u}_i(x) + \Pi_i(\xi)).$$

Верхнее и нижнее решения будем строить как модификацию $(n + 1)$ -го порядка построенной асимптотики:

$$\begin{aligned} \alpha(x, \varepsilon) &= U_n + \varepsilon^{n+1} \left(\bar{u}_{n+1}(x) - \gamma + \Pi_{n+1}(\xi, \theta) + \Pi_\beta(\xi, \theta) \right), \\ \beta(x, \varepsilon) &= U_n + \varepsilon^{n+1} \left(\bar{u}_{n+1}(x) + \gamma + \Pi_{n+1}(\xi, \theta) + \Pi_\alpha(\xi, \theta) \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Здесь $\gamma > 0$. Функции $\Pi_\alpha(\xi, \theta)$ и $\Pi_\beta(\xi, \theta)$ определяются из задач, аналогичных (3.11):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Pi_\alpha}{\partial \xi^2} - \tilde{f}_u(\xi, \theta) \cdot \Pi_\alpha = G_\alpha(\xi, \theta), \\ \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} + a(0, \theta) \Pi_\alpha = -\frac{\delta}{\psi_\theta}, \\ \Pi_\alpha(\infty, \theta) = 0. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Pi_\beta}{\partial \xi^2} - \tilde{f}_u(\xi, \theta) \cdot \Pi_\beta = G_\beta(\xi, \theta), \\ \frac{\partial \Pi_\beta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} + a(0, \theta) \Pi_\beta = \frac{\delta}{\psi_\theta}, \\ \Pi_\beta(\infty, \theta) = 0. \end{array} \right.$$

Где $G_\alpha(\xi, \theta) = -\gamma(\tilde{f}_u(\xi, \theta) - \bar{f}_u(x)) + Ae^{-\kappa\xi}$, и $G_\beta(\xi, \theta) = -\gamma(\tilde{f}_u(\xi, \theta) - \bar{f}_u(x)) - Ae^{-\kappa\xi}$. Можно показать, что для функции $\Pi_0(\xi, \theta)$ выполняется экспоненциальная оценка $|\Pi_0(\xi, \theta)| \leq Ce^{-\kappa\xi}$, где $C > 0$ и $\kappa > 0$. Отсюда следует экспоненциальная оценка на выражение $(\bar{f}_u(x) - \tilde{f}_u(\xi, \theta))$ и, следовательно, можно подобрать такие числа A и κ , что G_α будет положительной, а G_β – отрицательной экспоненциально убывающими функциями.

Выражения для функций $\Pi_\alpha(\xi, \theta)$ и $\Pi_\beta(\xi, \theta)$ находятся из задач (3.2.5) явным образом:

$$\begin{aligned} \Pi_\alpha(\xi, \theta) = & \frac{z(\xi, \theta)}{\frac{\partial z}{\partial \xi}(0, \theta)} \frac{\delta}{\psi_\theta} + \frac{z(\xi, \theta)}{\frac{\partial z}{\partial \xi}(0, \theta)} \frac{1}{z(0, \theta)} \int_0^\infty z(\chi, \theta) G_\alpha(\chi, \theta) d\chi - \\ & - z(\xi, \theta) \int_0^\xi \frac{1}{z^2(\eta, \theta)} \int_\eta^\infty z(\chi, \theta) G_\alpha(\chi, \theta) d\chi d\eta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_\beta(\xi, \theta) = & \frac{z(\xi, \theta)}{\frac{\partial z}{\partial \xi}(0, \theta)} \cdot \frac{-\delta}{\psi_\theta} + \frac{z(\xi, \theta)}{\frac{\partial z}{\partial \xi}(0, \theta)} \frac{1}{z(0, \theta)} \int_0^\infty z(\chi, \theta) G_\beta(\chi, \theta) d\chi - \\ & - z(\xi, \theta) \int_0^\xi \frac{1}{z^2(\eta, \theta)} \int_\eta^\infty z(\chi, \theta) G_\beta(\chi, \theta) d\chi d\eta. \end{aligned}$$

Откуда видно, что для $\Pi_\alpha(\xi, \theta)$ и $\Pi_\beta(\xi, \theta)$ справедлива экспоненциальная оценка.

Условие упорядоченности верхнего и нижнего решения **(B1)** оказывается выполнено по построению. Это следует из положительности (отрицательности) $G_\alpha(G_\beta)$ и условия **(A2)**.

Проверим теперь выполнение условия **(B2)**. Подставим выражения для верхнего и нижнего решений (3.12) в исходный оператор задачи (3.8):

$$\mathcal{L}\alpha(x, \varepsilon) = \varepsilon^{n+1}(G_\alpha + \bar{f}_u(x)\gamma) + O(\varepsilon^{n+2}),$$

$$\mathcal{L}\beta(x, \varepsilon) = \varepsilon^{n+1}(G_\beta - \bar{f}_u(x)\gamma) + O(\varepsilon^{n+2}).$$

С учетом условия **(A1)** получаем выполнение условия **(B2)**: $\mathcal{L}(\beta) \leq 0 \leq \mathcal{L}(\alpha)$.

Для проверки выполнения условия **(B3)** подставим (3.12) в граничный оператор задачи (3.8).

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \beta}{\partial n} \Big|_{\partial D} + a(0, \theta) \beta \Big|_{\partial D} &= g(x) - \varepsilon^n \frac{\partial \Pi_\beta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} + O(\varepsilon^{n+1}) = \\ &= g(x) - \varepsilon^n \frac{\delta}{\psi_\theta} + O(\varepsilon^{n+1}) < g(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \alpha}{\partial n} \Big|_{\partial D} + a(0, \theta) \alpha \Big|_{\partial D} &= g(x) - \varepsilon^n \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} + O(\varepsilon^{n+1}) = \\ &= g(x) + \varepsilon^n \frac{\delta}{\psi_\theta} + O(\varepsilon^{n+1}) > g(x). \end{aligned}$$

Таким образом, для функций $\alpha(x, \varepsilon)$ и $\beta(x, \varepsilon)$ выполнены все условия **(B1)**-**(B3)**. Из результатов работ [15] следует, что в этом случае существует решение задачи (3.8), для которого выполняется неравенство: $\alpha(x, \varepsilon) \leq u(x, \varepsilon) \leq \beta(x, \varepsilon)$ при $x \in \bar{D}$. Таким образом доказана следующая теорема:

Теорема 1. Пусть выполняются условия **(A0)**-**(A2)**. Тогда при достаточно малом ε , для выбранной согласно условию **(A2)** функции $\Pi_0(\xi, \theta)$ существует

соответствующее ей решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (3.8) с пограничным слоем вблизи ∂D , для которого функция $U_n(x, \varepsilon)$ является равномерным асимптотическим приближением с точностью $O(\varepsilon^{n+1})$.

3.3 Существование и устойчивость стационарного решения системы уравнений реакция-диффузия с сингулярно возмущенными граничными условиями Неймана

В данном разделе рассматривается система двух уравнений типа реакция-диффузия с разными степенями малого параметра при дифференциальном операторе и сингулярно возмущенными условиями Неймана. Задача рассматривается в замкнутой, односвязной двумерной области D , ограниченной достаточно гладкой границей ∂D .

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{N}_u(u, v) := \varepsilon^4 \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} - f(u, v, x, \varepsilon) = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in D, t > 0, \\ \mathcal{N}_v(u, v) := \varepsilon^2 \Delta v - \frac{\partial v}{\partial t} - g(u, v, x, \varepsilon) = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in D, t > 0, \\ u(x, 0, \varepsilon) = u_{init}(x, \varepsilon), v(x, 0, \varepsilon) = v_{init}(x, \varepsilon), \quad (x) \in \bar{D}, \\ \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial D} = h(x), \quad x \in \partial D, \\ \varepsilon \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\partial D} = q(x), \quad x \in \partial D. \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – малый параметр, функции $f(u, v, x, \varepsilon)$ и $g(u, v, x, \varepsilon)$ определены при $(u, v, x) \in G \equiv I_u \times I_v \times D$ и $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, где ε_0 – положительная кон-

станта. Производная в граничном условии берется по внутренней нормали к ∂D . Данная глава ставит своей целью исследовать существование и устойчивость стационарного решения задачи (3.13). Это решение является решением эллиптической краевой задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_u(u, v) := \varepsilon^4 \Delta u - f(u, v, x, \varepsilon) = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in D, \\ \mathcal{L}_v(u, v) := \varepsilon^2 \Delta v - g(u, v, x, \varepsilon) = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in D, \\ \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial D} = h(x), \quad x \in \partial D, \\ \varepsilon \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\partial D} = q(x), \quad x \in \partial D. \end{array} \right. \quad (3.14)$$

В главе доказано существование решения с пограничным слоем для задачи (3.14) и его устойчивость по Ляпунову.

Потребуем выполнения следующих условий:

(A0) $f(u, v, x, \varepsilon)$, $g(u, v, x, \varepsilon)$, $h(x)$ и $q(x)$ достаточно гладкие функции.

(A1) Вырожденное уравнение $f(u, v, x, 0) = 0$ имеет корень $u = \varphi(v, x)$ такой, что $f_u(\varphi(v, x), v, x, 0) > 0$, $v \in I_v$, $x \in \bar{D}$.

(A2) Уравнение $p(v, x) := g(\varphi(v, x), v, x, 0) = 0$ имеет корень $v = v_0(x)$:

$$p_v(v_0, x) = g_v(\varphi(v_0, x), v_0, x, 0) > 0, \quad x \in \bar{D}.$$

(A3) В данной главе предполагается квазимонотонное невозрастание правых частей: $f_v(u, v, x, 0) \leq 0$, $g_u(u, v, x, 0) \leq 0$, $(u, v, x) \in I_u \times I_v \times \bar{D}$.

3.3.1 Построение асимптотики

Для описания решения вблизи переходного слоя вводится система локальных координат аналогично тому, как это было сделано в разделе 1 настоящей главы.

3.3.2 Общий вид асимптотики

Асимптотику решения будем строить, используя стандартную схему алгоритма метода пограничных функций, согласно которому искомые функции представляются в виде суммы:

$$\begin{aligned} u(x, \varepsilon) &= \bar{u}(x, \varepsilon) + Pu(\xi, \theta, \varepsilon) + Ru(\eta, \theta, \varepsilon), \\ v(x, \varepsilon) &= \bar{v}(x, \varepsilon) + Pv(\xi, \theta, \varepsilon) + Rv(\eta, \theta, \varepsilon). \end{aligned} \tag{3.15}$$

В аналогичном виде представляется нелинейность :

$$f(u, v, x, \varepsilon) = \bar{f}(x, \varepsilon) + Pf(\xi, \theta, \varepsilon) + Rf(\eta, \theta, \varepsilon),$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{f} &= f(\bar{u}(x, \varepsilon), \bar{v}(x, \varepsilon), x, \varepsilon), \\
Pf &= f\left(\bar{u}(\varepsilon\xi, \theta, \varepsilon) + Pu(\xi, \theta, \varepsilon), \bar{v}(\varepsilon\xi, \theta, \varepsilon) + Pv(\xi, \theta, \varepsilon), \varepsilon\xi, \theta, \varepsilon\right) - \\
&\quad - f(\bar{u}(\varepsilon\xi, \theta, \varepsilon), \bar{v}(\varepsilon\xi, \theta, \varepsilon), \varepsilon\xi, \theta, \varepsilon), \\
Rf &= f\left(\bar{u}(\varepsilon^2\eta, \theta, \varepsilon) + Pu(\varepsilon\eta, \theta, \varepsilon) + Ru(\eta, \theta, \varepsilon), \right. \\
&\quad \left. \bar{v}(\varepsilon^2\eta, \theta, \varepsilon) + Pv(\varepsilon\eta, \theta, \varepsilon) + Rv(\eta, \theta, \varepsilon), \varepsilon^2\eta, \theta, \varepsilon\right) - \\
&\quad - f\left(\bar{u}(\varepsilon^2\eta, \theta, \varepsilon) + Pu(\varepsilon\eta, \theta, \varepsilon), \bar{v}(\varepsilon^2\eta, \theta, \varepsilon) + Pv(\varepsilon\eta, \theta, \varepsilon), \varepsilon^2\eta, \theta, \varepsilon\right). \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Для краткости записи слагаемые представлены в новых координатах (r, θ) (в дальнейшем старые или новые координаты в представлении для погранслоистой части нелинейности будем использовать исходя из соображений удобства).

Аналогичным образом представляется и функция $g(u, v, x, \varepsilon)$.

Функции $\bar{u}(x, \varepsilon)$ $\bar{v}(x, \varepsilon)$ – регулярная часть асимптотики, описывают функции u и v вдали от границы ∂D , а $P(\xi, \theta, \varepsilon)$ и $R(\eta, \theta, \varepsilon)$ – погранслоистая часть асимптотики, описывает решение вблизи границы ∂D в двух разных масштабах.

Все слагаемые асимптотики (3.15) представляются в виде рядов по степеням ε :

$$\begin{aligned}
\bar{u}(x, \varepsilon) &= \bar{u}_0(x) + \varepsilon\bar{u}_1(x) + \dots, \\
Pu(\xi, \theta, \varepsilon) &= P_0u(\xi, \theta) + \varepsilon P_1u(\xi, \theta) + \dots, \\
Ru(\eta, \theta, \varepsilon) &= R_0u(\eta, \theta) + \varepsilon R_1u(\eta, \theta) + \dots
\end{aligned}$$

Аналогичным образом представляются слагаемые асимптотики для функции v . Для дальнейшего изложения введем обозначения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{f}(x) = f(\bar{u}_0(x), \bar{v}_0(x), x, 0), \\ \tilde{f}(\xi, \theta) = f(\bar{u}_0(0, \theta) + P_0 u(\xi, \theta), \bar{v}_0(0, \theta) + P_0 v(\xi, \theta), \theta, 0), \\ \hat{f}(\eta, \theta) = f(\bar{u}_0(0, \theta) + P_0 u(0, \theta) + R_0 u(\eta, \theta), \bar{v}_0(0, \theta) + P_0 v(0, \theta) + R_0 v(\eta, \theta), \theta, 0). \end{array} \right.$$

Аналогичные обозначения будем использовать для функции g и для производных этих функций.

3.3.3 Регулярная часть

Подставляя (3.15) в исходную задачу (3.14) и разделяя стандартным образом эту задачу на задачи для регулярной и погранслойной частей, получим последовательность задач для определения коэффициентов регулярной и погранслойной частей асимптотического приближения. Главные члены регулярной части асимптотики $\bar{u}_0(x)$ и $\bar{v}_0(x)$ определяются из вырожденной системы (3.14):

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\bar{u}_0(x), \bar{v}_0(x), x, 0) = 0, \\ g(\bar{u}_0(x), \bar{v}_0(x), x, 0) = 0. \end{array} \right.$$

С учетом условиям (A1) и (A2) эта система имеет решение

$$\begin{cases} \bar{u}_0(x) = \varphi(v_0(x), x), \\ \bar{v}_0(x) = v_0(x). \end{cases}$$

Функции регулярной части порядка $k \geq 1$ определяются из системы вида:

$$\begin{cases} \bar{f}_u(x)\bar{u}_k + \bar{f}_v(x)\bar{v}_k = F_k(x), \\ \bar{g}_u(x)\bar{u}_k + \bar{g}_v(x)\bar{v}_k = G_k(x), \end{cases} \quad (3.17)$$

где $F_k(x)$ и $G_k(x)$ – известные на каждом шаге функции, зависящие от коэффициентов регулярной части асимптотического приближения предыдущих порядков. Определитель системы $\Delta = \bar{f}_u(x) \cdot \bar{g}_v(x) - \bar{f}_v(x) \cdot \bar{g}_u(x) \neq 0$ по условиям (A1), (A2). Таким образом эта система однозначно разрешима.

3.3.4 Погранслоиная часть

Система для нахождения функций погранслоиной части получается по методу Васильевой и имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} Ru + \varepsilon^2 \frac{\varphi_{\theta\theta}\psi_\theta - \psi_{\theta\theta}\varphi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}} \frac{\partial}{\partial \eta} Ru + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+2} L_i Ru = Rf, \\ \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} Rv + \frac{\varphi_{\theta\theta}\psi_\theta - \psi_{\theta\theta}\varphi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}} \frac{\partial}{\partial \eta} Rv + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i L_i Rv = Rg, \\ \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} Pu + \varepsilon^3 \frac{\varphi_{\theta\theta}\psi_\theta - \psi_{\theta\theta}\varphi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}} \frac{\partial}{\partial \xi} Pu + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+3} L_i Pu = Pf, \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} Pv + \varepsilon \frac{\varphi_{\theta\theta}\psi_\theta - \psi_{\theta\theta}\varphi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}} \frac{\partial}{\partial \xi} Pv + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+1} L_i Pv = Pg. \end{cases} \quad (3.18)$$

Выписывая последовательно слагаемые при разных степенях малого параметра, учитывая исходное граничное условие, а также условие стремления к нулю на бесконечности для всех погранслойных функций, получим задачи для их определения.

Задачи для нулевого и первого порядков функции Rv имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 R_0 v}{\partial \eta^2} = 0, \\ \frac{\partial R_0 v}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0, \\ R_0 v(\infty) = 0. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 R_1 v}{\partial \eta^2} = 0, \\ \frac{\partial R_1 v}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = q(0, \theta) - \frac{\partial P_0 v}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}, \\ R_1 v(\infty) = 0. \end{array} \right.$$

Решение этих задач тривиально: $R_0 v(\eta, \theta) = 0$, $R_1 v(\eta, \theta) = 0$. Таким обра-

зом $\frac{\partial R_1}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0$ и граничное условие для функции $P_0 v(\xi, \theta)$ приобретает

вид $\frac{\partial P_0 v}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = q(0, \theta)$. Как следует из (3.18), $P_0 u$ находится из уравнения

$P_0 f = f(\bar{u}_0(0, \theta) + P_0 u, \bar{v}_0(0, \theta) + P_0 v(\xi, \theta), 0, \theta) = 0$. Таким образом, задачи для

нахождения функций $P_0 u(\xi, \theta)$ и $P_0 v(\xi, \theta)$ решаются совместно и имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 u = \varphi(\bar{v}_0 + P_0 v, 0, \theta) - \bar{u}_0(0, \theta), \\ \frac{\partial^2 P_0 v}{\partial \xi^2} = p(\bar{v}_0(0, \theta) + P_0 v, 0, \theta), \\ \frac{\partial P_0 v}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = q(0, \theta), \\ P_0 v(\infty, \theta) = 0. \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Задача (3.19) – обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

(θ играет роль параметра), которое поддается анализу на фазовой плоскости

(P_0v, P_0v') (Рис. 3.3). Точка $(0, 0)$ – точка покоя типа седла. Задача (3.19) имеет решение, если прямая $P_0v' = q(0, \theta)$ пересекает сепаратрису, идущую в точку $(0, 0)$. Из анализа фазовой плоскости понятно, что таких решений может быть

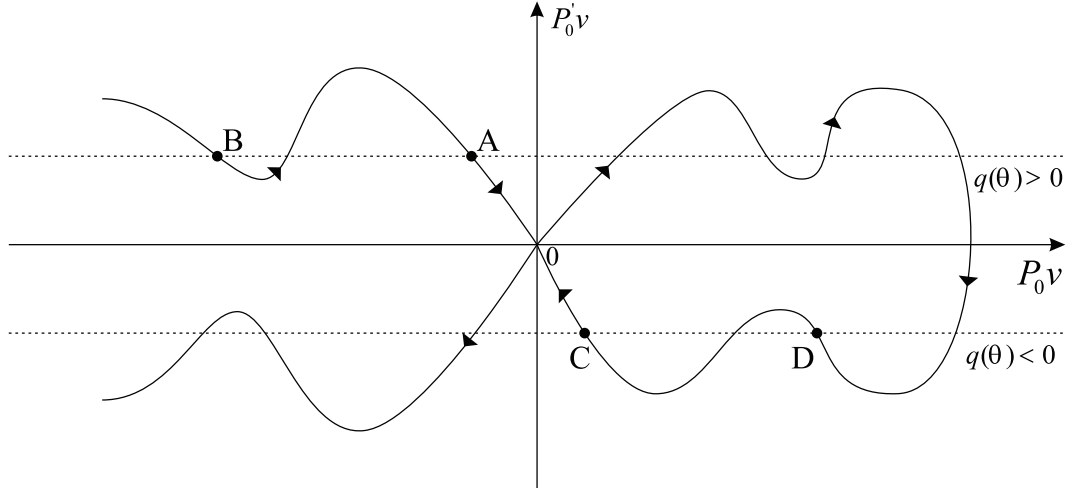


Рисунок 3.3 — Фазовая плоскость задачи (3.19) при фиксированном θ

несколько. Ниже показано, если при $\xi = 0$ значение (P_0v, P_0v') , $0 < \theta < \Theta$ попадает в точки A, B, C, D , то двигаясь от них по сепаратрису к точке $(0, 0)$ можно

получить решение задачи (3.19). Сформулируем условие отбора решений:

Условие **(A4)**: уравнение $\pm \left(2 \int_0^s p(v_0(0, \theta) + \sigma, 0, \theta) d\sigma \right)^{1/2} = q(0, \theta)$ для каждого фиксированного θ имеет корень $s(\theta)$ такой, что $p(v_0(0, \theta) + s, 0, \theta) > 0$ при $s(\theta) > 0$ и $p(v_0(0, \theta) + s, 0, \theta) < 0$ при $s(\theta) < 0$.

Для функции P_0v имеет место экспоненциальная оценка $|P_0v(\xi, \theta)| < B \exp^{-\lambda\xi}$, где B и λ – положительные константы.

Функция $R_0u(\eta, \theta)$ определяется из задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 R_0u}{\partial \eta^2} = f(\bar{u}_0(0, \theta) + P_0u(\varepsilon\eta, \theta) + R_0u, \bar{v}_0(0, \theta) + P_0v(\varepsilon\eta, \theta), 0, \theta), \\ \frac{\partial R_0u}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = h(0, \theta), \\ R_0u(\infty) = 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Анализируя аналогичным образом фазовую плоскость для задачи (3.20) получим дополнительное условие:

Условие **(A5)**: уравнение $\pm \left(2 \int_0^s f(\bar{u}_0 + P_0u + \sigma, \bar{v}_0 + P_0v, 0, \theta) d\sigma \right)^{1/2} = h(\theta)$ для каждого фиксированного θ имеет корень $s(\theta)$ такой, что $f(\bar{u}_0 + P_0u + s, \bar{v}_0 + P_0v, 0, \theta) > 0$ при $s(\theta) > 0$ и $f(\bar{u}_0 + P_0u + s, \bar{v}_0 + P_0v, 0, \theta) < 0$ при $s(\theta) < 0$.

Для функции R_0u также справедлива экспоненциальная оценка, аналогичная оценке для P_0v .

После нахождения k -ых членов регулярной части асимптотики из задач (3.17) находится функция R_kv из задачи вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 R_kv}{\partial \eta^2} = R_{(k-2)}g(\eta, \theta), \\ \frac{\partial R_kv}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = -\frac{P_{k-1}v}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} - \frac{\partial \bar{v}_{k-2}}{\partial r} \Big|_{r=0}, \\ R_kv(\infty) = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Затем определяются функции $P_{(k-1)}u$ и $P_{(k-1)}v$ из задач вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{(k-1)}u = -\frac{\bar{f}_v}{\bar{f}_u}P_{(k-1)}v(\xi, \theta) - P_{(k-3)}f(\xi, \theta), \\ \frac{\partial^2 P_{(k-1)}v}{\partial \xi^2} = \bar{p}_v P_{(k-1)}u(\xi, \theta) + P_{(k-1)}g(\xi, \theta), \\ \frac{\partial P_{(k-1)}v}{\partial \xi} \Big|_{\eta=0} = -\frac{\partial R_k v}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} - \frac{\partial \bar{v}_{k-2}}{\partial r} \Big|_{r=0}, \\ P_{(k-1)}v(\infty) = 0. \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Затем находится функция $R_k u(\eta, \theta)$ из задачи вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 R_k u}{\partial \eta^2} - \bar{f}_u R_k u = R_{(k)}f(\eta, \theta), \\ \frac{\partial R_k u}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = -\frac{P_{k-1}u}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} - \frac{\partial \bar{u}_{k-2}}{\partial r} \Big|_{r=0}, \\ R_k u(\infty) = 0. \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Функции $R_k g(\eta, \theta)$, $R_k f(\eta, \theta)$, $P_k f(\xi, \theta)$ и $P_k g(\xi, \theta)$ известны на каждом шаге и представляют собой члены при малом параметре соответствующей степени в разложении (3.16). Для всех построенных таким образом функций выполняются экспоненциальные оценки.

Используя предложенную схему, можно построить асимптотику произвольного порядка $k \geq 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_k = \sum_{i=0}^k \varepsilon^i (\bar{u}_i(x) + Pu_i(\xi, \theta) + Ru_i(\eta, \theta)), \\ V_k = \sum_{i=0}^k \varepsilon^i (\bar{v}_i(x) + Pv_i(\xi, \theta) + Rv_i(\eta, \theta)). \end{array} \right.$$

3.3.5 Существование решения

Для доказательства существования решения задачи (3.14) будем использовать асимптотический метод дифференциальных неравенств. Для этого построим в области \bar{D} верхнее и нижнее решение задачи (3.14) – (u_α, v_α) и (u_β, v_β) . По определению эти функции должны удовлетворять следующим условиям:

Условие **(B1)**: $u_\alpha(x, \varepsilon) \leq u_\beta(x, \varepsilon)$ и $v_\alpha(x, \varepsilon) \leq v_\beta(x, \varepsilon)$ для $x \in \bar{D}$.

Условие **(B2)**:

$$\mathcal{L}_u(u_\beta, v) \leq 0 \leq \mathcal{L}_u(u_\alpha, v), v_\alpha \leq v \leq v_\beta, x \in \bar{D},$$

$$\mathcal{L}_v(u, v_\beta) \leq 0 \leq \mathcal{L}_v(u, v_\alpha), u_\alpha \leq u \leq u_\beta, x \in \bar{D}.$$

В силу условий квазимонотонности (A3) это выполняется при выполнении неравенств

$$\mathcal{L}_u(u_\alpha, v_\alpha) \geq 0,$$

$$\mathcal{L}_u(u_\beta, v_\beta) \leq 0$$

и аналогичных неравенств для оператора \mathcal{L}_v .

Условие **(B3)**:

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial n} \Big|_{\partial D} \leq h(x) \leq \frac{\partial u_\alpha}{\partial n} \Big|_{\partial D},$$

$$\frac{\partial v_\beta}{\partial n} \Big|_{\partial D} \leq q(x) \leq \frac{\partial v_\alpha}{\partial n} \Big|_{\partial D}.$$

Верхнее и нижнее решения будем строить как модификацию n -го порядка построенной асимптотики:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\alpha(x, \varepsilon) = U_n(x, \varepsilon) - \varepsilon^n \gamma_u(x) + \varepsilon^n P_\alpha u(\xi, \theta) + \varepsilon^n R_\alpha u(\eta, \theta), \\ v_\alpha(x, \varepsilon) = V_n(x, \varepsilon) - \varepsilon^n \gamma_v(x) + \varepsilon^n P_\alpha v(\xi, \theta), \\ u_\beta(x, \varepsilon) = U_n(x, \varepsilon) + \varepsilon^n \gamma_u(x) + \varepsilon^n P_\beta u(\xi, \theta) + \varepsilon^n R_\beta u(\eta, \theta), \\ v_\beta(x, \varepsilon) = V_n(x, \varepsilon) + \varepsilon^n \gamma_v(x) + \varepsilon^n P_\beta v(\xi, \theta). \end{array} \right.$$

Функции γ_u и γ_v построим как решение системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{f}_u \cdot \gamma_u(x) + \bar{f}_v \cdot \gamma_v(x) = A, \\ \bar{g}_u \cdot \gamma_u(x) + \bar{g}_v \cdot \gamma_v(x) = B, \end{array} \right.$$

где A и B – положительные константы. Ее решение: $\gamma_u(x) = \frac{A\bar{g}_v - B\bar{f}_v}{\bar{f}_u\bar{g}_v - \bar{f}_v\bar{g}_u}$, $\gamma_v(x) = \frac{A\bar{f}_u - B\bar{g}_u}{\bar{f}_u\bar{g}_v - \bar{f}_v\bar{g}_u}$. Из условий **(A2)**–**(A3)** следует, что $\gamma_u(x) > 0$ и $\gamma_v(x) > 0$.

Для удовлетворения условиям **(B2)**–**(B3)** необходимы функции $P_\alpha u(\xi, \theta)$, $R_\alpha u(\eta, \theta)$, $P_\alpha v(\xi, \theta)$ и соответствующие функции верхнего решения, которые можно определить как решения задач, аналогичных по структуре задачам для нахождения n -го порядка функций погранслойной части асимптотики (3.22)–(3.23):

$$\left\{ \begin{array}{l} P_\alpha u = -\frac{\bar{f}_v}{\bar{f}_u} P_\alpha v(\xi, \theta), \\ \frac{\partial^2 P_\alpha v}{\partial \xi^2} - \bar{p}_v P_\alpha u(\xi, \theta) = P_\alpha g(\xi, \theta) = \gamma_v(x)(\tilde{g}_v(\xi, \theta) - \bar{g}_v(x)) + C_p e^{-\kappa_p \xi}, \\ \frac{\partial P_\alpha v}{\partial \xi} \Big|_{\eta=0} = \varepsilon \frac{\gamma_v}{\partial r} \Big|_{r=0} + \delta, \\ P_\alpha v(\infty) = 0. \end{array} \right. \quad (3.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 R_\alpha u}{\partial \eta^2} - \bar{f}_u R_\alpha u = R_\alpha f(\eta, \theta) = \gamma_u(\hat{f}_u(\eta, \theta) - \tilde{f}_u(\xi, \theta)) + C_r e^{-\kappa_r \eta}, \\ \frac{\partial R_\alpha u}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \varepsilon^2 \frac{\gamma_u}{\partial r} \Big|_{r=0} + \delta, \\ R_\alpha u(\infty) = 0. \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Здесь δ – некоторая положительная величина. Граничные условия выбраны таким образом, чтобы удовлетворять условию **(B3)** Функции $P_\alpha v(\xi, \theta)$ и $R_\alpha u(\eta, \theta)$ находятся в явном виде:

$$\begin{aligned} P_\alpha v(\xi, \theta) &= \frac{\pi(\xi, \theta)}{\frac{\partial \pi}{\partial \xi}(0, \theta)} \left(\varepsilon \frac{\gamma_v}{\partial r} \Big|_{r=0} + \delta \right) + \frac{\pi(\xi, \theta)}{\frac{\partial \pi}{\partial \xi}(0, \theta)} \frac{1}{\pi(0, \theta)} \int_0^\infty \pi(\chi, \theta) P_\alpha g(\chi, \theta) d\chi - \\ &\quad - \pi(\xi, \theta) \int_0^\xi \frac{1}{\pi^2(\eta, \theta)} \int_\eta^\infty \pi(\chi, \theta) P_\alpha g(\chi, \theta) d\chi d\eta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_\alpha u(\eta, \theta) &= \frac{\rho(\eta, \theta)}{\frac{\partial \rho}{\partial \eta}(0, \theta)} \left(\varepsilon^2 \frac{\gamma_u}{\partial r} \Big|_{r=0} + \delta \right) + \frac{\rho(\eta, \theta)}{\frac{\partial \rho}{\partial \eta}(0, \theta)} \frac{1}{\rho(0, \theta)} \int_0^\infty \rho(\chi, \theta) R_\alpha f(\chi, \theta) d\chi - \\ &\quad - \rho(\eta, \theta) \int_0^\eta \frac{1}{\rho^2(\eta, \theta)} \int_\zeta^\infty \rho(\chi, \theta) R_\alpha f(\chi, \theta) d\chi d\zeta. \end{aligned}$$

где $\pi(\xi, \theta) = \frac{\partial P_0 v(\xi, \theta)}{\partial \xi}$ – частное решение однородного уравнения задачи (3.24)

и $\rho(\eta, \theta) = \frac{\partial R_0 u(\eta, \theta)}{\partial \eta}$ – частное решение однородного уравнения задачи (3.25).

В силу условий (A4) и (A5) $P_\alpha v(\xi, \theta) < 0$, $R_\alpha u(\eta, \theta) < 0$. Соответствующие функции верхнего решения строятся аналогично и для них выполняются неравенства с обратным знаком. Таким образом, в силу построения условие упорядоченности верхнего и нижнего решений (B1) выполнено.

Выполним проверку условия (B2):

$$\mathcal{L}_u(u_\alpha, v_\alpha) = \varepsilon^n (A + C_p e^{-\kappa_p \xi} + C_r e^{-\kappa_r \eta}) + O(\varepsilon^{n+1}) > 0,$$

$$\mathcal{L}_u(u_\beta, v_\beta) = \varepsilon^n (-A - C_p e^{-\kappa_p \xi} - C_r e^{-\kappa_r \eta}) + O(\varepsilon^{n+1}) < 0,$$

$$\mathcal{L}_v(u_\alpha, v_\alpha) = \varepsilon^n (B + C_p e^{-\kappa_p \xi} + C_r e^{-\kappa_r \eta}) + O(\varepsilon^{n+1}) > 0,$$

$$\mathcal{L}_v(u_\beta, v_\beta) = \varepsilon^n (-B - C_p e^{-\kappa_p \xi} - C_r e^{-\kappa_r \eta}) + O(\varepsilon^{n+1}) < 0.$$

Неравенства выполняются в силу показанных выше оценок.

Условие (B3) проверим также с помощью простой подстановки.

$$\frac{u_\alpha}{\partial n} \Big|_{\partial D} = h(x) - \varepsilon^n \frac{\partial \gamma_u}{\partial n} \Big|_{\partial D} + \varepsilon^{n-2} \frac{\partial R_\alpha u}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} + O(\varepsilon^{n+1}) = h(x) + \varepsilon^n \delta + O(\varepsilon^{n+1}) > h(x),$$

$$\frac{v_\alpha}{\partial n} \Big|_{\partial D} = q(x) - \varepsilon^n \frac{\partial \gamma_v}{\partial n} \Big|_{\partial D} + \varepsilon^{n-1} \frac{\partial P_\alpha v}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} + O(\varepsilon^{n+1}) = q(x) + \varepsilon^n \delta + O(\varepsilon^{n+1}) > q(x).$$

Таким образом, условия **B1-B3** выполнены. Согласно работам по теоремам сравнения [15] отсюда следует, что существует решение задачи (3.14), для

которого выполняются неравенства:

$$\begin{cases} u_\alpha(x, \varepsilon) \leq u(x, \varepsilon) \leq u_\beta(x, \varepsilon), & x \in \bar{D}, \\ v_\alpha(x, \varepsilon) \leq v(x, \varepsilon) \leq v_\beta(x, \varepsilon), & x \in \bar{D}. \end{cases} \quad (3.26)$$

Причем для верхнего и нижнего решений, построенных как модификации n -го порядка асимптотики справедлива следующая оценка: $u_\alpha(x, \varepsilon) - u_\beta(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^n)$, $v_\alpha(x, \varepsilon) - v_\beta(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^n)$. Таким образом, для асимптотики произвольного порядка доказана следующая теорема:

Теорема 1. Пусть выполняются условия **(A0)**-**(A5)**. Тогда при достаточно малом ε , существует решение $u(x, \varepsilon), v(x, \varepsilon)$ задачи (3.14) с пограничным слоем вблизи ∂D , для которого функции $U_{n-1}(x, \varepsilon), V_{n-1}(x, \varepsilon)$ являются равномерным асимптотическим приближением с точностью $O(\varepsilon^n)$ при $x \in \bar{D}$.

3.3.6 Асимптотическая устойчивость стационарного решения

Для доказательства асимптотической устойчивости используются верхнее и нижнее решение системы (3.13) специальной структуры $(U_\alpha(x, \varepsilon, t), V_\alpha(x, \varepsilon, t))$ и $(U_\beta(x, \varepsilon, t), V_\beta(x, \varepsilon, t))$, для которых выполняются условия:

Условие **(C1)**: $U_\alpha(x, \varepsilon, t) \leq U_\beta(x, \varepsilon, t)$ и $V_\alpha(x, \varepsilon, t) \leq V_\beta(x, \varepsilon, t)$ для $x \in \bar{D}, t > 0$.

Условие **(C2)**:

$$\mathcal{N}_u(U_\beta) \leq 0 \leq \mathcal{N}_u(U_\alpha), V_\alpha \leq V \leq V_\beta, x \in \bar{D}, t > 0,$$

$$\mathcal{N}_v(V_\beta) \leq 0 \leq \mathcal{N}_v(V_\alpha), U_\alpha \leq U \leq U_\beta, x \in \bar{D}, t > 0.$$

Условие **(C3)**:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_\beta}{\partial n} \Big|_{\partial D} &\leq h(x, t) \leq \frac{\partial U_\alpha}{\partial n} \Big|_{\partial D}, \\ \frac{\partial V_\beta}{\partial n} \Big|_{\partial D} &\leq q(x, t) \leq \frac{\partial V_\alpha}{\partial n} \Big|_{\partial D}. \end{aligned}$$

Построим функции $U_\alpha(x, \varepsilon, t)$, $U_\beta(x, \varepsilon, t)$ следующим образом:

$$U_\alpha(x, t) = u(x) + (u_\alpha(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon))e^{-\kappa t},$$

$$U_\beta(x, t) = u(x) + (u_\beta(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon))e^{-\kappa t}.$$

Где $u(x, \varepsilon)$ — стационарное решение, существование которого доказывает Теорема 1, $U_\alpha(x, \varepsilon)$ и $U_\beta(x, \varepsilon)$ — нижнее и верхнее решение u -компоненты стационарной задачи. Аналогичным образом построим функции $V_\alpha(x, t)$, и $V_\beta(x, t)$.

Используя очевидные оценки $|u(x, \varepsilon) - u_\alpha(x, \varepsilon)| \leq C\varepsilon$ и $|v(x, \varepsilon) - v_\alpha(x, \varepsilon)| \leq C\varepsilon$ можно показать выполнение условий **(C1)**-**(C3)**.

Из [15] следует также, что существует единственное решение $(U_\varepsilon(x, \varepsilon, t), V_\varepsilon(x, \varepsilon, t))$ (3.13), причем $U_\alpha(x, \varepsilon, t) \leq U_\varepsilon(x, \varepsilon, t) \leq U_\beta(x, \varepsilon, t)$ и $V_\alpha(x, \varepsilon, t) \leq V_\varepsilon(x, \varepsilon, t) \leq V_\beta(x, \varepsilon, t)$ для $x \in \bar{D}, t > 0$. Отсюда следует выполнение Теоремы 2.

Теорема 2. Пусть выполняются условия **(A0)**-**(A5)**. Тогда при достаточно малом ε , стационарное решение $u_\alpha(x, \varepsilon)$, $v_\alpha(x, \varepsilon)$ задачи (3.13) асимптотически устойчиво по Ляпунову, причем область притяжения не менее

$(u_\alpha(x, \varepsilon), v_\alpha(x, \varepsilon)) \times (u_\beta(x, \varepsilon), v_\beta(x, \varepsilon))$. Это решение также локально единственно как решение задачи (3.14) в этой области.

Глава 4. Существование периодического решения в виде двумерного фронта в системе параболических уравнений

В данной главе рассматривается система двух сингулярно возмущенных параболических уравнений в двумерной области с периодическими условиями по времени. Исследуются решения типа периодического фронта, локализованного в окрестности замкнутой кривой. Систему можно рассматривать как математическую модель, описывающую резкое изменение физических характеристик пространственно-неоднородных сред. Получено асимптотическое приближение и доказана теорема существования решения типа периодического фронта в системе двух параболических уравнений с малым параметром при дифференциальном операторе в случае периодических условий по времени. Также доказана локальная единственность и асимптотическая устойчивость периодического решения.

4.1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу для системы параболических уравнений:

$$\begin{cases} \varepsilon^4 \Delta u - \varepsilon^4 u_t = f(u, v, \mathbf{x}, t, \varepsilon), \\ \varepsilon^2 \Delta v - \varepsilon^2 v_t = g(u, v, \mathbf{x}, t, \varepsilon), \\ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in D \subset R^2, t \in (0; +\infty), \end{cases} \quad (4.1)$$

с условиями:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial D} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial n} \right|_{\partial D} = 0, \quad t \in (0; +\infty), \quad (4.2)$$

$$u(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t + T), \quad v(\mathbf{x}, t) = v(\mathbf{x}, t + T), \quad \mathbf{x} \in D, \quad t \in (0; +\infty),$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, Δ — оператор Лапласа, D — ограниченная односвязная область с достаточно гладкой границей ∂D , f и g — достаточно гладкие и T -периодические функции в области $(u, v, \mathbf{x}, t, \varepsilon) \in I_u \times I_v \times \bar{D} \times (0; +\infty) \times (0; \varepsilon_0]$, I_u и I_v — некоторые промежутки изменения переменных u и v , $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по внутренней нормали к ∂D .

Целью главы является доказательство теоремы существования решения в виде периодического фронта задачи (4.1), (4.2), получение алгоритма построения асимптотического приближения решения, доказательство локальной единственности и асимптотической устойчивости решения.

Требование гладкости функций f и g связано с предполагаемым порядком точности асимптотического приближения. Для построения асимптотики порядка n требуется, чтобы функции $f(u, v, \mathbf{x}, t, \varepsilon)$ и $g(u, v, \mathbf{x}, t, \varepsilon)$ принадлежали классу C^{n+3} .

Пусть выполнены следующие требования:

Условие **(A1)**: уравнение $f(u, v, \mathbf{x}, t, 0) = 0$ при $(v, \mathbf{x}, t) \in I_v \times \bar{D} \times (0; +\infty)$ имеет относительно u ровно три корня $u = \varphi^i(v, \mathbf{x}, t)$, $i = 1, 2, 3$, такие, что $\varphi^i(v, \mathbf{x}, t) \in I_u$, $\varphi^1(v, \mathbf{x}, t) < \varphi^2(v, \mathbf{x}, t) < \varphi^3(v, \mathbf{x}, t)$, $f_u(\varphi^{1,3}(v, \mathbf{x}, t), v, \mathbf{x}, t, 0) > 0$, $f_u(\varphi^2(v, \mathbf{x}), v, \mathbf{x}, t, 0) < 0$.

Условие **(A2)**: каждое из уравнений $h^i(v, \mathbf{x}, t) := g(\varphi^i(v, x, t), v, \mathbf{x}, t, 0) = 0$, ($i = 1, 3$) при $\mathbf{x} \in \bar{D}$ имеет относительно v единственное решение $v = v^i(\mathbf{x}, t) \in I_v$, причем во всей области $(\mathbf{x}, t) \in \bar{D} \times (0; +\infty)$ выполнены неравенства $v^1(\mathbf{x}, t) < v^3(\mathbf{x}, t)$, $h_v^i(v^i(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t) > 0$, ($i = 1, 3$).

Условие **(A3)**: справедливы неравенства $f_v(u, v, \mathbf{x}, t, 0) < 0$; $g_u(u, v, \mathbf{x}, t, 0) < 0$ всюду в области $(u, v, \mathbf{x}, t) \in I_u \times I_v \times \bar{D} \times (0; +\infty)$.

4.2 Локальные координаты

Выберем внутри области D некоторую точку $O(x_1^0; x_2^0)$ и в окрестности этой точки перейдем к полярной системе координат (ρ, θ) , $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ с полюсом в точке O с помощью формул

$$x_1 = x_1^0 + \rho \cos \theta, \quad x_2 = x_2^0 + \rho \sin \theta.$$

Для упрощения записи будем считать $x_1^0 = 0$, $x_2^0 = 0$. Потребуем выполнения условия **(A4)**:

Система уравнений относительно v и ρ :

$$\begin{aligned} & \int_{v^1(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, t)}^v h^1(v', \rho \cos \theta, \rho \sin \theta, t) dv' + \\ & + \int_{v^3(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, t)}^v h^3(v', \rho \cos \theta, \rho \sin \theta, t) dv' = 0, \\ & \int_{\varphi^1(v, \rho \cos \theta, \rho \sin \theta, t)}^v f(u, v, \rho \cos \theta, \rho \sin \theta, t, 0) du = 0 \end{aligned}$$

имеет единственное периодическое по t решение $v = v_0(\theta, t)$, $\rho = \rho_0(\theta, t)$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $t \in (0; +\infty)$, причём

$$v^1(\rho_0(\theta, t) \cos \theta, \rho_0(\theta, t) \sin \theta, t) < v_0(\theta, t) < v^3(\rho_0(\theta, t) \cos \theta, \rho_0(\theta, t) \sin \theta, t),$$

а функция $\rho = \rho_0(\theta, t)$, $0 \leq \theta < 2\pi$ в каждый момент времени t определяет простую замкнутую гладкую кривую C_0 , лежащую внутри области D .

Для описания поведения решения в переходном слое в достаточно малой окрестности кривой C_0 введем локальные координаты (r, θ) . Величина $|r|$ является расстоянием от точки $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ до кривой C_0 вдоль нормали к ней, причем $r > 0$, если \mathbf{x} лежит внутри области, ограниченной кривой C_0 ; $r < 0$, если \mathbf{x} лежит вне этой области; $r = 0$, если $\mathbf{x} \in C_0$. В координатах (r, θ) кривая C задается уравнением:

$$r = \lambda(\theta, t) := \varepsilon \lambda_1(\theta, t) + \varepsilon^2 \lambda_2(\theta, t) + \dots \quad (4.3)$$

Для описания поведения решения в достаточно малой окрестности границы ∂D введем локальные координаты (l, θ) . Величина $l > 0$ является расстоянием от точки $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ до кривой ∂D вдоль нормали к ней.

Переход от координат (x_1, x_2) к (r, θ) осуществляется по формулам:

$$x_1 = \rho_0(\theta, t) \cos \theta - r \sin \alpha, \quad x_2 = \rho_0(\theta, t) \sin \theta + r \cos \alpha,$$

где

$$\sin \alpha = \frac{\rho_{0\theta}(\theta, t) \sin \theta + \rho_0(\theta, t) \cos \theta}{\sqrt{\rho_{0\theta}(\theta, t)^2 + \rho_0(\theta, t)^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{\rho_{0\theta}(\theta, t) \cos \theta - \rho_0(\theta, t) \sin \theta}{\sqrt{\rho_{0\theta}(\theta, t)^2 + \rho_0(\theta, t)^2}},$$

α - угол между осью Ox_2 и внутренней нормалью к кривой C_0 , а $\{-\sin \alpha, \cos \alpha\}$ – координаты единичной внутренней нормали к кривой C_0 .

4.3 Асимптотическое приближение

Кривая C в каждый момент времени $t \in (0; +\infty)$ разделяет область \bar{D} на две части: $\bar{D}^{(+)}$ с границей C и $\bar{D}^{(-)}$, границами которой являются C и ∂D . Асимптотика решения задачи строится отдельно в каждой из областей $\bar{D}^{(+)}$ и $\bar{D}^{(-)}$:

$$u = \begin{cases} u^{(-)}, & \mathbf{x} \in \bar{D}^{(-)}, \\ u^{(+)}, & \mathbf{x} \in \bar{D}^{(+)}, \end{cases} \quad v = \begin{cases} v^{(-)}, & \mathbf{x} \in \bar{D}^{(-)}, \\ v^{(+)}, & \mathbf{x} \in \bar{D}^{(+)}. \end{cases}$$

Функции $u^{(-)}, u^{(+)}, v^{(-)}, v^{(+)}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} u^{(-)} &= \bar{u}^{(-)}(\mathbf{x}, t, \varepsilon) + Q^{(-)}u(\xi, \theta, t, \varepsilon) + M^{(-)}u(\sigma, \theta, t, \varepsilon) + Pu(\zeta, \theta, \varepsilon) + Ru(\eta, \theta, \varepsilon), \\ u^{(+)} &= \bar{u}^{(+)}(\mathbf{x}, t, \varepsilon) + Q^{(+)}u(\xi, \theta, t, \varepsilon) + M^{(+)}u(\sigma, \theta, t, \varepsilon), \\ v^{(-)} &= \bar{v}^{(-)}(\mathbf{x}, t, \varepsilon) + Q^{(-)}v(\xi, \theta, t, \varepsilon) + M^{(-)}v(\sigma, \theta, t, \varepsilon) + Pv(\zeta, \theta, \varepsilon) + Rv(\varepsilon, \eta, \theta, \varepsilon), \\ v^{(+)} &= \bar{v}^{(+)}(\mathbf{x}, t, \varepsilon) + Q^{(+)}v(\xi, \theta, t, \varepsilon) + M^{(+)}v(\sigma, \theta, t, \varepsilon). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Здесь $\bar{u}^{(\pm)}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$, $\bar{v}^{(\pm)}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ — регулярные члены асимптотики; $Q^{(\pm)}u(\xi, \theta, t, \varepsilon)$, $Q^{(\pm)}v(\xi, \theta, t, \varepsilon)$, $M^{(\pm)}u(\sigma, \theta, t, \varepsilon)$, $M^{(\pm)}v(\sigma, \theta, t, \varepsilon)$ — функции переходного слоя в окрестности кривой C . Для описания функций переходного

слоя в окрестности кривой C введем растянутые переменные:

$$\xi = \frac{r - \lambda(\theta, t)}{\varepsilon}, \quad \sigma = \frac{r - \lambda(\theta, t)}{\varepsilon^2}.$$

Функции $Pu(\zeta, \theta, \varepsilon)$, $Pv(\zeta, \theta, \varepsilon)$, $Ru(\eta, \theta, \varepsilon)$, $Rv(\eta, \theta, \varepsilon)$ используются для описания решения вблизи границы ∂D . Эти функции зависят от растянутых переменных ζ , η :

$$\zeta = \frac{l}{\varepsilon}, \quad \eta = \frac{l}{\varepsilon^2}.$$

Каждое слагаемое в (4.4) будем искать в виде ряда по степеням ε , например,

$$\bar{u}^{(-)}(\mathbf{x}, t, \varepsilon) = \bar{u}_0^{(-)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \bar{u}_1^{(-)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^2 \bar{u}_2^{(-)}(\mathbf{x}, t) + \dots$$

Подставляя в исходную систему вместо u и v разложения

$$\bar{u}^{(\pm)}(x, \varepsilon) = \bar{u}_0^{(\pm)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \bar{u}_1^{(\pm)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^2 \bar{u}_2^{(\pm)}(\mathbf{x}, t) + \dots,$$

$$\bar{v}^{(\pm)}(x, \varepsilon) = \bar{v}_0^{(\pm)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \bar{v}_1^{(\pm)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^2 \bar{v}_2^{(\pm)}(\mathbf{x}, t) + \dots,$$

стандартным способом, описанным в [4], получаем системы конечных уравнений для определения приближений функций регулярной части. Главные члены $\bar{u}_0^{(\pm)}(\mathbf{x}, t)$, $\bar{v}_0^{(\pm)}(\mathbf{x}, t)$ определяются из вырожденной системы (вырожденной называется исходная система уравнений (4.1) при $\varepsilon = 0$):

$$\begin{cases} f(\bar{u}_0^{(\pm)}(\mathbf{x}, t), \bar{v}_0^{(\pm)}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t, 0) = 0, \\ g(\bar{u}_0^{(\pm)}(\mathbf{x}, t), \bar{v}_0^{(\pm)}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t, 0) = 0. \end{cases}$$

Согласно условиям **(A1)**, **(A2)** система имеет два решения. Выберем

$$\begin{aligned}\bar{v}_0^{(-)}(\mathbf{x}, t) &= v^1(\mathbf{x}, t), \quad \bar{v}_0^{(+)}(\mathbf{x}, t) = v^3(\mathbf{x}, t), \quad \bar{u}_0^{(-)}(\mathbf{x}, t) = \varphi^1(v^1(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t), \\ \bar{u}_0^{(+)}(\mathbf{x}, t) &= \varphi^3(v^3(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t).\end{aligned}$$

Функции $\bar{u}_k^{(\pm)}(x)$ и $\bar{v}_k^{(\pm)}(x)$ при $k \geq 1$ определяются из линейных систем

$$\begin{aligned}\bar{f}_u^{(\pm)}(\mathbf{x}, t)\bar{u}_k^{(\pm)} + \bar{f}_v^{(\pm)}(\mathbf{x}, t)\bar{v}_k^{(\pm)} &= \bar{F}_k^{(\pm)}(\mathbf{x}, t), \\ \bar{g}_u^{(\pm)}(\mathbf{x}, t)\bar{u}_k^{(\pm)} + \bar{g}_v^{(\pm)}(\mathbf{x}, t)\bar{v}_k^{(\pm)} &= \bar{G}_k^{(\pm)}(\mathbf{x}, t).\end{aligned}\tag{4.5}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\bar{f}_u^{(-)}(\mathbf{x}, t) &:= f_u(\varphi^1(v^1(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t), v^1(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t, 0), \\ \bar{f}_u^{(+)}(\mathbf{x}, t) &:= f_u(\varphi^3(v^3(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t), v^3(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t, 0)\end{aligned}$$

и аналогичный смысл имеют обозначения $\bar{f}_v^{(\mp)}(\mathbf{x}, t)$, $\bar{g}_u^{(\mp)}(\mathbf{x}, t)$, $\bar{g}_v^{(\mp)}(\mathbf{x}, t)$, а $\bar{F}_k^{(\mp)}(\mathbf{x}, t)$ и $\bar{G}_k^{(\mp)}(\mathbf{x}, t)$ - известные на k -ом шаге функции, рекуррентно выражающиеся через $\bar{u}_i^{(\pm)}(\mathbf{x}, t)$, $\bar{v}_i^{(\pm)}(\mathbf{x}, t)$ с номерами $i < k$. Определители $\Delta^{(\mp)}(\mathbf{x}, t) := \bar{f}_u^{(\mp)}(\mathbf{x}, t)\bar{g}_v^{(\mp)}(x) - \bar{f}_v^{(\mp)}(x)\bar{g}_u^{(\mp)}(\mathbf{x}, t) = \bar{f}_u^{(\mp)}(\mathbf{x}, t) \cdot \bar{h}_v^{1,3}(\mathbf{x}, t)$ систем (4.5) отличны от нуля всюду в области $(\mathbf{x}, t) \in \bar{D}_T := \{\bar{D} \times (0; +\infty)\}$.

Асимптотические разложения $u^{(-)}(\mathbf{x}, t)$ и $u^{(+)}(\mathbf{x}, t)$, $v^{(-)}(\mathbf{x}, t)$ и $v^{(+)}(\mathbf{x}, t)$ и их производные по направлению нормали к кривой C непрерывно сшиваются на этой кривой.

Кривую C определим равенством:

$$u(\mathbf{x}, t, \varepsilon)|_{\mathbf{x} \in C} = \varphi^2(v_c, \mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in C}.$$

Через $v_c = v_c(\boldsymbol{\theta}, t)$ обозначено значение v -компоненты решения задачи (4.1), (4.2) на кривой C в момент времени t . Будем искать $v_c(\boldsymbol{\theta}, t)$ в виде ряда:

$$v_c(\boldsymbol{\theta}, t) := v_0(\boldsymbol{\theta}, t) + \varepsilon v_1(\boldsymbol{\theta}, t) + \varepsilon^2 v_2(\boldsymbol{\theta}, t) + \dots \quad (4.6)$$

Коэффициенты рядов (4.3), (4.6) будут найдены в процессе построения асимптотики решения задачи (4.1), (4.2). В дальнейшем с целью уменьшения громоздкости формул будем писать v_c вместо $v_c(\boldsymbol{\theta}, t)$ и λ вместо $\lambda(\boldsymbol{\theta}, t)$.

Кривая C в каждый момент времени $t \in (0; +\infty)$ — это проекция на плоскость (x_1, x_2) той кривой, по которой пересекаются графики функций $u = u(x, t, \varepsilon)$ и $u = \varphi^2(v(x, t, \varepsilon), x, t)$, где $u(x, t, \varepsilon)$, $v(x, t, \varepsilon)$ — искомое решение задачи.

Напомним, что $r = 0$ на кривой C . Тогда условия непрерывного сшивания асимптотических разложений для функций v и u имеют вид:

$$\bar{v}^{(-)}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)|_{\mathbf{x} \in C} + Q^{(-)}v(0, \boldsymbol{\theta}, t, \varepsilon) + M^{(-)}v(0, \boldsymbol{\theta}, t, \varepsilon) = v_c(\boldsymbol{\theta}, t),$$

$$\bar{v}^{(+)}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)|_{\mathbf{x} \in C} + Q^{(+)}v(0, \boldsymbol{\theta}, t, \varepsilon) + M^{(+)}v(0, \boldsymbol{\theta}, t, \varepsilon) = v_c(\boldsymbol{\theta}, t),$$

$$\bar{u}^{(-)}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)|_{\mathbf{x} \in C} + Q^{(-)}u(0, \boldsymbol{\theta}, t, \varepsilon) + M^{(-)}u(0, \boldsymbol{\theta}, t, \varepsilon) = \varphi^2(v_c(\boldsymbol{\theta}, t), \mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in C},$$

$$\bar{u}^{(+)}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)|_{\mathbf{x} \in C} + Q^{(+)}u(0, \boldsymbol{\theta}, t, \varepsilon) + M^{(+)}u(0, \boldsymbol{\theta}, t, \varepsilon) = \varphi^2(v_c(\boldsymbol{\theta}, t), \mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in C}.$$

Потребуем выполнение условия сшивания нормальных (по нормали к кривой C) производных функций $u^{(-)}(\mathbf{x}, t)$, $u^{(+)}(\mathbf{x}, t)$ и $v^{(-)}(\mathbf{x}, t)$, $v^{(+)}(\mathbf{x}, t)$ на

кривой C :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \bar{v}^{(-)}}{\partial r}(\lambda, \theta, t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial Q^{(-)v}}{\partial \xi}(0, \theta, t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial M^{(-)v}}{\partial \sigma}(0, \theta, t, \varepsilon) = \\
& = \frac{\partial \bar{v}^{(+)}}{\partial r}(\lambda, \theta, t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial Q^{(+)v}}{\partial \xi}(0, \theta, t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial M^{(+)v}}{\partial \sigma}(0, \theta, t, \varepsilon), \\
& \frac{\partial \bar{u}^{(-)}}{\partial r}(\lambda, \theta, t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial Q^{(-)u}}{\partial \xi}(0, \theta, t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial M^{(-)u}}{\partial \sigma}(0, \theta, t, \varepsilon) = \\
& = \frac{\partial \bar{u}^{(+)}}{\partial r}(\lambda, \theta, t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial Q^{(+)u}}{\partial \xi}(0, \theta, t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial M^{(+)u}}{\partial \sigma}(0, \theta, t, \varepsilon).
\end{aligned}$$

Здесь и далее будем считать, что в аргументе функций регулярной части мы перешли к переменным (r, θ) , и под записью $\bar{u}^{(\pm)}(\lambda, \theta, t, \varepsilon)$ будем подразумевать $\bar{u}^{(\pm)}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ при $\mathbf{x} = \{\rho_0(\theta, t) \cos \theta - \lambda \sin \alpha, \rho_0(\theta, t) \sin \theta + \lambda \cos \alpha\}$, и аналогичный смысл имеют обозначения $\bar{v}^{(\pm)}(\lambda, \theta, t, \varepsilon)$.

Пограничные функции $Pu(\zeta, \theta, \varepsilon)$, $Pv(\zeta, \theta, \varepsilon)$, $Ru(\eta, \theta, \varepsilon)$, $Rv(\eta, \theta, \varepsilon)$ строятся стандартным способом (см. [4]). Ряды пограничных функций не содержат членов нулевого порядка, что характерно для задачи Неймана, ряды $Pu(\zeta, \theta, \varepsilon)$, $Pv(\zeta, \theta, \varepsilon)$ начинаются с членов порядка ε , ряды $Ru(\eta, \theta, \varepsilon)$ — с членов порядка ε^2 , а ряды $Rv(\eta, \theta, \varepsilon)$ — с членов порядка ε^4 . Функции $P_i u(\zeta, \theta)$, $P_i v(\zeta, \theta)$ экспоненциально убывают при $\zeta \rightarrow +\infty$, а функции $R_i u(\eta, \theta)$, $R_i v(\eta, \theta)$ экспоненциально убывают при $\eta \rightarrow +\infty$.

Функции переходного слоя, как было отмечено выше, зависят от растянутых переменных $\xi = \frac{r - \lambda}{\varepsilon}$ и $\sigma = \frac{r - \lambda}{\varepsilon^2}$.

Оператор задачи в переменных (ξ, θ, t) и (σ, θ, t) принимает вид:

$$\Delta_{\xi, \theta} - \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\varepsilon} \cdot L_1 + \sum_{i \geq 2} \varepsilon^{i-2} L_i,$$

$$\Delta_{\sigma, \theta} - \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon^4} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot N_1 + \sum_{i \geq 2} \varepsilon^{i-3} N_i,$$

где $L_i, N_i, i \geq 1$ - дифференциальные операторы первого и второго порядка. В частности,

$$L_1 = \rho_0 \sin(\theta - \alpha)(\alpha_\theta + 1) \frac{\partial}{\partial \xi} - \left(\rho_{0\theta} \alpha_\theta \cos(\theta + \alpha) + \rho_{0\theta\theta} \sin(\theta - \alpha) + 2\rho_{0\theta} \cos(\theta - \alpha) \right) \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\rho_0 \rho_{0t}}{\sqrt{\rho_{0\theta}^2 + \rho_0^2}} \frac{\partial}{\partial \xi},$$

$$L_2 = \frac{1}{\rho_{0\theta}^2 + \rho_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

$$N_1 = \rho_0 \sin(\theta - \alpha)(\alpha_\theta + 1) \frac{\partial}{\partial \sigma} - \left(\rho_{0\theta} \alpha_\theta \cos(\theta + \alpha) + \rho_{0\theta\theta} \sin(\theta - \alpha) + 2\rho_{0\theta} \cos(\theta - \alpha) \right) \frac{\partial}{\partial \sigma} - \frac{\rho_0 \rho_0}{\sqrt{\rho_{0\theta}^2 + \rho_0^2}} \frac{\partial}{\partial \sigma},$$

$$N_2 = \frac{1}{\rho_{0\theta}^2 + \rho_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Система для нахождения функций переходного слоя получается по методу Васильевой и имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} M^{(\pm)} u + \varepsilon^2 \cdot N_1 M^{(\pm)} u + \sum_{i \geq 2} \varepsilon^{i+1} N_i M^{(\pm)} u = M^{(\pm)} f \\ \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} M^{(\pm)} v + N_1 M^{(\pm)} v + \sum_{i \geq 2} \varepsilon^{i-1} N_i M^{(\pm)} v = M^{(\pm)} g \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} Q^{(\pm)} v + \varepsilon L_1 Q^{(\pm)} v + \sum_{i \geq 2} \varepsilon^i L_i Q^{(\pm)} v = Q^{(\pm)} g \\ \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} Q^{(\pm)} u + \varepsilon^3 L_1 Q^{(\pm)} u + \sum_{i \geq 2} \varepsilon^{i+2} L_i Q^{(\pm)} u = Q^{(\pm)} f \end{array} \right.$$

где $M^{(\pm)} f = f\left(\bar{u}^{(\pm)}(\lambda + \varepsilon^2 \sigma, \theta, t, \varepsilon) + Q^{(\pm)} u(\varepsilon \sigma, \theta, t, \varepsilon) + M^{(\pm)} u(\sigma, \theta, t, \varepsilon), \bar{v}^{(\pm)}(\lambda + \varepsilon^2 \sigma, \theta, t, \varepsilon) + Q^{(\pm)} v(\varepsilon \sigma, \theta, t, \varepsilon) + M^{(\pm)} v(\sigma, \theta, t, \varepsilon), \lambda + \varepsilon^2 \sigma, \theta, t, \varepsilon\right) - f\left(\bar{u}^{(\pm)}(\lambda + \varepsilon^2 \sigma, \theta, t, \varepsilon) + Q^{(\pm)} u(\varepsilon \sigma, \theta, t, \varepsilon), \bar{v}^{(\pm)}(\lambda + \varepsilon^2 \sigma, \theta, t, \varepsilon) + Q^{(\pm)} v(\varepsilon \sigma, \theta, t, \varepsilon), \lambda + \varepsilon^2 \sigma, \theta, t, \varepsilon\right),$

$Q^{(\pm)}f = f\left(\bar{u}^{(\pm)}(\lambda + \varepsilon\xi, \theta, t, \varepsilon) + Q^{(\pm)}u(\varepsilon\sigma, \theta, t, \varepsilon), \bar{v}^{(\pm)}(\lambda + \varepsilon\xi, \theta, t, \varepsilon) + Q^{(\pm)}v(\xi, \theta, t, \varepsilon), \lambda + \varepsilon\xi, \theta, t, \varepsilon\right) - f\left(\bar{u}^{(\pm)}(\lambda + \varepsilon\xi, \theta, t, \varepsilon), \bar{v}^{(\pm)}(\lambda + \varepsilon\xi, \theta, t, \varepsilon), \lambda + \varepsilon\xi, \theta, t, \varepsilon\right)$, и аналогичный смысл имеют обозначения $M^{(\pm)}g$ и $Q^{(\pm)}g$.

Мы перешли от аргумента (x_1, x_2) к переменным (r, θ) , но оставили те же обозначения функций $f, g, h^{1,3}, \bar{u}_i, \bar{v}_i$ ($i = 0, 1, \dots$).

Потребуем, чтобы для всех функций переходного слоя выполнялись условия на бесконечности:

$$\begin{aligned} Q_i^{(\pm)}u(\xi, \theta, t) \rightarrow 0, \quad Q_i^{(\pm)}v(\xi, \theta, t) \rightarrow 0 \quad \text{при } \xi \rightarrow \pm\infty \\ M_i^{(\pm)}u(\sigma, \theta, t) \rightarrow 0, \quad M_i^{(\pm)}v(\sigma, \theta, t) \rightarrow 0 \quad \text{при } \sigma \rightarrow \pm\infty \\ \text{для всех } i \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Выпишем задачи для определения функций переходного слоя нулевого и последующих порядков.

Функции $Q_0^{(\pm)}v(\xi, \theta, t)$ определяются из задач:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_0^{(\pm)}v}{\partial \xi^2} = h^{1,3}(v^{1,3}(\lambda, \theta, t) + Q_0^{(\pm)}v, \lambda, \theta, t), \\ Q_0^{(\pm)}v(\pm\infty, \theta, t) = 0, \quad Q_0^{(\pm)}v(0, \theta, t) = v_c - v^{1,3}(\lambda, \theta, t). \end{aligned}$$

Функции $Q_0^{(\pm)}u(\xi, \theta, t)$ можно выразить через $Q_0^{(\pm)}v$ следующим образом:

$$Q_0^{(\pm)}u(\xi, \theta, t) = \varphi^{1,3}\left(v^{1,3}(\lambda, \theta, t) + Q_0^{(\pm)}v(\xi, \theta, t), \lambda, \theta, t\right) - \varphi^{1,3}\left(v^{1,3}(\lambda, \theta, t), \lambda, \theta, t\right).$$

Функции $M_0^{(\pm)}v(\sigma, \theta, t), M_1^{(\pm)}v(\sigma, \theta, t)$ – тривиальны.

Задачи для функций $M_0^{(\pm)}u(\sigma, \theta, t)$ имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 M_0^{(\pm)}u}{\partial \sigma^2} = f(\varphi^{1,3}(v_c, \lambda, \theta, t) + M_0^{(\pm)}u, v_c, \lambda, \theta, t, 0), \\ M_0^{(\pm)}u(\pm\infty, \theta, t) = 0, \\ M_0^{(\pm)}u(0, \theta, t) = \varphi^2(v_c, \lambda, \theta, t) - \varphi^{1,3}(v_c, \lambda, \theta, t). \end{cases}$$

Будем считать, что функции переходного слоя определены для порядков $i = 0, 1, \dots, n-1$. Приведем задачи для функций переходного слоя n -го порядка.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{f}_u^{(\pm)}(\xi, \theta, t) &:= f_u \left(\bar{u}_0^{(\pm)}(\lambda, \theta, t) + Q_0^{(\pm)}u(\xi, \theta, t), \bar{v}_0^{(\pm)}(\lambda, \theta, t) + Q_0^{(\pm)}v(\xi, \theta, t), \lambda, \theta, t, 0 \right), \\ \hat{f}_u(\sigma, \theta, t) &:= \begin{cases} f_u \left(\varphi^1(v_c, \lambda, \theta, t) + M_0^-u(\sigma, \theta, t), v_c, \lambda, \theta, t, 0 \right), & \sigma \leq 0, \\ f_u \left(\varphi^3(v_c, \lambda, \theta, t) + M_0^+u(\sigma, \theta, t), v_c, \lambda, \theta, t, 0 \right), & \sigma \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Функции $M_n^{(\pm)}v(\sigma, \theta, t)$ определяются из задач:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 M_n^{(\pm)}v}{\partial \sigma^2} = m_n g(\sigma, \theta, t), \\ M_n^{(\pm)}v(\pm\infty, \theta, t) = 0, \\ \frac{\partial M_n^{(\pm)}v}{\partial \sigma}(\pm\infty, \theta, t) = 0. \end{cases}$$

Функции $Q_n^{(\pm)}v(\xi, \theta, t)$ определяются из задач:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 Q_n^{(\pm)}v}{\partial \xi^2} = \tilde{h}_v^{1,3}(\xi, \theta, t) \cdot Q_n^{(\pm)}v + H_n^{(\pm)}(\xi, \theta, t), \\ Q_n^{(\pm)}v(0, \theta, t) = -\bar{v}_n^{(\pm)}(\lambda, \theta, t) - M_n^{(\pm)}v(0, \theta, t), \\ Q_n^{(\pm)}v(\pm\infty, \theta, t) = 0. \end{cases}$$

А функции $Q_n^{(\pm)}u(\xi, \theta, t)$ получаются из алгебраических уравнений:

$$Q_n^{(\pm)}u(\xi, \theta, t) = -\tilde{f}_v(\xi, \theta, t)\tilde{f}_u^{-1}(\xi, \theta, t)Q_n^{(\pm)}v(\xi, \theta, t) + q_n^{(\pm)}f(\xi, \theta, t).$$

Функции $M_n^{(\pm)}u(\sigma, \theta, t)$ определяются из задач:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 M_n^{(\pm)}u}{\partial \sigma^2} = \hat{f}_u(\sigma, \theta, t) \cdot M_n^{(\pm)}u + F_n^{(\pm)}(\sigma, \theta, t), \\ M_n^{(\pm)}u(0, \theta, t) = -Q_n^{(\pm)}u(0, \theta, t) - \bar{u}_n^{(\pm)}(\lambda, \theta, t), \\ M_n^{(\pm)}u(\pm\infty, \theta, t) = 0. \end{cases}$$

Функции $m_n^{(\pm)}g(\sigma, \theta, t)$, $q_n^{(\pm)}f(\xi, \theta, t)$, $H_n^{(\pm)}(\xi, \theta, t)$, $F_n^{(\pm)}(\sigma, \theta, t)$ известны на n -ом шаге.

Кривая C , задающая положение фронта, с каждым приближением определяется с большей точностью по ε . Функции $\lambda_n(\theta, t)$ определяются вместе с $v_n(\theta, t)$ из системы уравнений:

$$\begin{aligned} \lambda_n \frac{\partial(\Phi_1 - \Phi_3)}{\partial \lambda} \Big|_{\xi=0, \lambda=0, v_c=v_0} + v_n \frac{\partial(\Phi_1 - \Phi_3)}{\partial v_c} \Big|_{\xi=0, \lambda=0, v_c=v_0} + S_n(\theta, t) &= 0 \\ \lambda_n \frac{\partial(\Psi_1 - \Psi_3)}{\partial \lambda} \Big|_{\sigma=0, \lambda=0, v_c=v_0} + v_n \frac{\partial(\Psi_1 - \Psi_3)}{\partial v_c} \Big|_{\sigma=0, \lambda=0, v_c=v_0} + T_n(\theta, t) &= 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $S_n(\theta, t)$ и $T_n(\theta, t)$ – известные функции.

Здесь введены функции $\Phi_1(\xi, \theta, t, \lambda, v_c)$, $\Phi_3(\xi, \theta, t, \lambda, v_c)$, $\Psi_1(\sigma, \theta, t, \lambda, v_c)$,

$\Psi_3(\sigma, \theta, t, \lambda, v_c)$ по формулам:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\xi, \theta, t, \lambda, v_c) &:= \frac{\partial Q_0^{(-)}v}{\partial \xi}(\xi, \theta, t), & \Phi_3(\xi, \theta, t, \lambda, v_c) &:= \frac{\partial Q_0^{(+)}v}{\partial \xi}(\xi, \theta, t), \\ \Psi_1(\sigma, \theta, t, \lambda, v_c) &:= \frac{\partial M_0^{(-)}u}{\partial \sigma}(\sigma, \theta, t), & \Psi_3(\sigma, \theta, t, \lambda, v_c) &:= \frac{\partial M_0^{(+)}u}{\partial \sigma}(\sigma, \theta, t). \end{aligned}$$

При определении функций $\Phi_{1,3}(\xi, \theta, t, \lambda, v_c)$, $\Psi_{1,3}(\sigma, \theta, t, \lambda, v_c)$ мы учли, что величины λ и v_c входят в выражения для функций $Q_0^{(\pm)}v(\xi, \theta, t)$, $M_0^{(\pm)}u(\sigma, \theta, t)$ в качестве параметров.

Пусть выполнено условие (A5):

$$J(\theta, t) = \frac{D(\Phi_1 - \Phi_3, \Psi_1 - \Psi_3)}{D(\lambda, v_c)} \Big|_{\lambda=0, v_c=v_0} < 0.$$

При выполнении условия **(A5)** система уравнений (4.7) однозначно задает функции $\lambda_n(\theta, t)$ и $v_n(\theta, t)$.

4.4 Обоснование асимптотики

Составим конечные суммы, представляющую собой формальное асимптотическое приближение n -ого порядка по малому параметру. Определим члены рядов (4.4), (4.3) до номера n включительно, а также функции $M_{n+1}^{(\pm)}v$, $M_{n+2}^{(\pm)}v$, $R_{n+1}v$, $R_{n+2}v$ и положим

$$\Lambda_n(\theta, t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \lambda_i(\theta, t), \quad \xi_n = \frac{r - \Lambda_n(\theta, t, \varepsilon)}{\varepsilon}, \quad \sigma_n = \frac{r - \Lambda_n(\theta, t, \varepsilon)}{\varepsilon^2}.$$

Кривую, заданную уравнением $r = \Lambda_n(\theta, t, \varepsilon)$ обозначим через C_n . Эта кривая разделяет область \bar{D} на две подобласти, которые обозначим как $\bar{D}_n^{(-)}$ и $\bar{D}_n^{(+)}$. Подобласть $D_n^{(+)}$ ограничена кривой C_n , а граница $D_n^{(-)}$ состоит из C_n и ∂D .

Составим суммы $U_n^{(-)}$, $V_n^{(-)}$, $U_n^{(+)}$, $V_n^{(+)}$:

$$\begin{aligned}
U_n^{(+)} &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i (\bar{u}_i^{(+)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) + Q_i^{(+)} u(\xi_n, \boldsymbol{\theta}, t) + M_i^{(+)} u(\sigma_n, \boldsymbol{\theta}, t)), \\
U_n^{(-)} &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i (\bar{u}_i^{(-)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) + Q_i^{(-)} u(\xi_n, \boldsymbol{\theta}, t) + M_i^{(-)} u(\sigma_n, \boldsymbol{\theta}, t) + \\
&\quad + P_i u(\zeta, \boldsymbol{\theta}) + R_i u(\eta, \boldsymbol{\theta})), \\
V_n^{(+)} &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i (\bar{v}_i^{(+)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) + Q_i^{(+)} v(\xi_n, \boldsymbol{\theta}, t) + M_i^{(+)} v(\sigma_n, \boldsymbol{\theta}, t)) + \\
&\quad + \sum_{i=n+1}^{n+2} \varepsilon^i M_i^{(+)} v(\sigma_n, \boldsymbol{\theta}, t), \\
V_n^{(-)} &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i (\bar{v}_i^{(-)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) + Q_i^{(-)} v(\xi_n, \boldsymbol{\theta}, t) + M_i^{(-)} v(\sigma_n, \boldsymbol{\theta}, t) + P_i v(\zeta, \boldsymbol{\theta}) + R_i v(\eta, \boldsymbol{\theta})) + \\
&\quad + \sum_{i=n+1}^{n+2} \varepsilon^i (M_i^{(-)} v(\sigma_n, \boldsymbol{\theta}, t) + R_i v(\eta, \boldsymbol{\theta})). \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Положим

$$U_n = \begin{cases} U_n^{(-)}, & (\mathbf{x}, t) \in \bar{D}_n^{(-)} \times (0; +\infty), \\ U_n^{(+)}, & (\mathbf{x}, t) \in \bar{D}_n^{(+)} \times (0; +\infty); \end{cases} \quad V_n = \begin{cases} V_n^{(-)}, & (\mathbf{x}, t) \in \bar{D}_n^{(-)} \times (0; +\infty), \\ V_n^{(+)}, & (\mathbf{x}, t) \in \bar{D}_n^{(+)} \times (0; +\infty). \end{cases}$$

Функции U_n и V_n по своему построению удовлетворяют уравнениям (4.1) с точностью $O(\varepsilon^{n+1})$ всюду в области \bar{D} , за исключением кривой C_n , а на этой кривой они и их производные имеют разрывы (скачки). Можно провести сглаживание функций U_n и V_n , например, так, как это сделано в работе [31], в результате чего они будут удовлетворять уравнениям (4.1) с точностью $O(\varepsilon^{n+1})$ всюду в области \bar{D} , включая кривую C_n .

Сформулируем теорему существования решения задачи (4.1)-(4.2).

Теорема 1. При выполнении условий A1-A5 для достаточно малого $\varepsilon > 0$ и для всех $(x, t) \in \bar{D} \times (0; +\infty)$ существует периодическое решение $u(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$, $v(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ задачи (4.1)-(4.2), для которого функции $U_n(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$, $V_n(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ являются равномерным в области \bar{D} асимптотическими приближением с точностью порядка $O(\varepsilon^{n+1})$, то есть при $(\mathbf{x}, t) \in \bar{D} \times (0; +\infty)$ выполняются неравенства

$$|u(\mathbf{x}, t, \varepsilon) - U_n(\mathbf{x}, t, \varepsilon)| \leq C\varepsilon^{n+1}, \quad |v(\mathbf{x}, t, \varepsilon) - V_n(\mathbf{x}, t, \varepsilon)| \leq C\varepsilon^{n+1},$$

где C - положительная постоянная, не зависящая от ε .

Доказательство теоремы существования решения проведено по методу дифференциальных неравенств. В работе [15] доказано существование решения задачи (4.1)-(4.2), в случае, если существуют верхнее и нижнее решения данной задачи. Мы построим нижнее и верхнее решение так, чтобы асимптотика порядка n лежала между ними и тем самым докажем теорему. Нижнее и верхнее решения (u_α, v_α) и (u_β, v_β) - это функции, удовлетворяющие следующим условиям:

Условие **(B1)**.

$$u_\alpha \leq u_\beta, \quad v_\alpha \leq v_\beta, \quad (x, t) \in \bar{D} \times (0; +\infty).$$

Условие **(B2)**. При всех $(x, t) \in \bar{D} \times (0; +\infty)$ и достаточно малом ε выполнено

$$\varepsilon^4 \Delta u_\beta - \varepsilon^4 \frac{\partial u_\beta}{\partial t} - f(u_\beta, v, \mathbf{x}, t, \varepsilon) < 0 < \varepsilon^4 \Delta u_\alpha - \varepsilon^4 \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} - f(u_\alpha, v, \mathbf{x}, t, \varepsilon),$$

$$v_\alpha \leq v \leq v_\beta,$$

$$\varepsilon^2 \Delta v_\beta - \varepsilon^2 \frac{\partial v_\beta}{\partial t} - g(u, v_\beta, \mathbf{x}, t, \varepsilon) < 0 < \varepsilon^2 \Delta v_\alpha - \varepsilon^2 \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} - g(u, v_\alpha, \mathbf{x}, t, \varepsilon),$$

$$u_\alpha \leq u \leq u_\beta.$$

Условие **(B3)**. При всех $t \in (0; +\infty)$ выполнено

$$\left. \frac{\partial u_\beta}{\partial n} \right|_{\mathbf{x} \in \partial D} \leq 0 \leq \left. \frac{\partial u_\alpha}{\partial n} \right|_{\mathbf{x} \in \partial D}, \quad \left. \frac{\partial v_\beta}{\partial n} \right|_{\mathbf{x} \in \partial D} \leq 0 \leq \left. \frac{\partial v_\alpha}{\partial n} \right|_{\mathbf{x} \in \partial D}.$$

4.5 Построение верхнего и нижнего решений

Для построения верхнего и нижнего решения введем в окрестности кривой C кривые C_β и C_α , которые в локальной системе координат (r, θ) задаются функциями $r = \lambda_\beta(\theta, t)$ и $r = \lambda_\alpha(\theta, t)$:

$$\lambda_\beta(\theta, t) := \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon^i \lambda_i(\theta, t) - \varepsilon^{n+1} \delta(\theta, t), \quad \lambda_\alpha(\theta, t) := \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon^i \lambda_i(\theta, t) + \varepsilon^{n+1} \delta(\theta, t),$$

где $\delta(\theta, t)$ – положительная 2π -периодическая функция, $0 \leq \theta < 2\pi$. Дальнейшие рассуждения проведем для верхнего решения (u_β, v_β) . Кривая C_β разделяет область D на подобласти $D_\beta^{(+)}$ и $D_\beta^{(-)}$ – внутреннюю и внешнюю по

отношению к C_β . Верхнее решение строим отдельно в каждой из этих областей:

$$u_\beta = \begin{cases} u_\beta^{(+)}(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in \bar{D}_\beta^{(+)} \times (0; +\infty), \\ u_\beta^{(-)}(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in \bar{D}_\beta^{(-)} \times (0; +\infty), \end{cases}$$

$$v_\beta = \begin{cases} v_\beta^{(+)}(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in \bar{D}_\beta^{(+)} \times (0; +\infty), \\ v_\beta^{(-)}(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in \bar{D}_\beta^{(-)} \times (0; +\infty). \end{cases}$$

Нижнее решение строится аналогичным образом относительно кривой C_α .

Функции $u_\beta^{(+)}(\mathbf{x}, t)$ и $u_\beta^{(-)}(\mathbf{x}, t)$, $v_\beta^{(+)}(\mathbf{x}, t)$ и $v_\beta^{(-)}(\mathbf{x}, t)$ сшиваются на кривой C_β непрерывно:

$$v_\beta^{(+)}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in C_\beta} = v_\beta^{(-)}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in C_\beta} = \sum_{i=1}^{n+1} v_i(\theta, t) \varepsilon^i + \varepsilon^{n+1} \mu(\theta, t), \quad (4.9)$$

$$u_\beta^{(+)}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in C_\beta} = u_\beta^{(-)}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in C_\beta} = \varphi^2 \left(\sum_{i=0}^{n+1} v_i(\theta, t) \varepsilon^i + \mu(\theta, t), \theta, t \right).$$

Здесь $\mu(\theta, t)$ - 2π -периодическая функция по переменной $\theta \in [0; 2\pi)$. Функции $\mu(\theta, t)$, $\delta(\theta, t)$ будут выбраны таким образом, чтобы выполнялось условие на скачок производной верхнего решения на кривой C_β :

Условие **(B4)**

$$\left(\frac{\partial u_\beta^{(-)}}{\partial n} - \frac{\partial u_\beta^{(+)}}{\partial n} \right) \Big|_{\mathbf{x} \in C_\beta} \geq 0, \quad \left(\frac{\partial v_\beta^{(-)}}{\partial n} - \frac{\partial v_\beta^{(+)}}{\partial n} \right) \Big|_{\mathbf{x} \in C_\beta} \geq 0.$$

Аналогичное условие должно выполняться для нижнего решения на кривой C_α :

Условие **(B5)**

$$\left(\frac{\partial u_\alpha^{(-)}}{\partial n} - \frac{\partial u_\alpha^{(+)}}{\partial n} \right) \Big|_{\mathbf{x} \in C_\alpha} \leq 0, \quad \left(\frac{\partial v_\alpha^{(-)}}{\partial n} - \frac{\partial v_\alpha^{(+)}}{\partial n} \right) \Big|_{\mathbf{x} \in C_\alpha} \leq 0.$$

Введем в окрестности кривых C_α и C_β растянутые переменные $\xi_\alpha, \sigma_\alpha, \xi_\beta, \sigma_\beta$ по формулам:

$$\xi_{\alpha,\beta} = \frac{r - \lambda_{\alpha,\beta}}{\varepsilon}, \quad \sigma_{\alpha,\beta} = \frac{r - \lambda_{\alpha,\beta}}{\varepsilon^2}.$$

Верхнее решение будем строить как модификацию асимптотики $n+1$ -го порядка $U_{n+1}^{(\mp)}, V_{n+1}^{(\mp)}$. Обозначим добавку к асимптотике в порядке $n+1$ через $W^{(\mp)}u$ и $W^{(\mp)}v$. К верхнему решению добавим эти функции со знаком плюс, а к нижнему - со знаком минус:

$$\begin{aligned} u_\beta^{(-)} &= U_{n+1}^{(-)} + \varepsilon^{n+1} W_{n+1}^{(-)} u(\mathbf{x}, \xi_\beta, \sigma_\beta, \theta, t) + \varepsilon^{n+2} \exp(-\gamma\zeta), \\ u_\beta^{(+)} &= U_{n+1}^{(+)} + \varepsilon^{n+1} W_{n+1}^{(+)} u(\mathbf{x}, \xi_\beta, \sigma_\beta, \theta, t), \\ v_\beta^{(-)} &= V_{n+1}^{(-)} + \varepsilon^{n+1} W_{n+1}^{(-)} v(\mathbf{x}, \xi_\beta, \sigma_\beta, \theta, t) + \varepsilon^{n+2} \exp(-\gamma\zeta) + \varepsilon^{n+2} \omega_{\beta 0}(\theta, t) + \\ &+ \varepsilon^{n+3} \omega_{\beta 1}(\theta, t), \\ v_\beta^{(+)} &= V_{n+1}^{(+)} + \varepsilon^{n+1} W_{n+1}^{(+)} v(\mathbf{x}, \xi_\beta, \sigma_\beta, \theta, t). \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} u_\alpha^{(-)} &= U_{n+1}^{(-)} - \varepsilon^{n+1} W^{(-)} u(\mathbf{x}, \xi_\alpha, \sigma_\alpha, \theta, t) - \varepsilon^{n+2} \exp(-\gamma\zeta), \\ u_\alpha^{(+)} &= U_{n+1}^{(+)} - \varepsilon^{n+1} W^{(+)} u(\mathbf{x}, \xi_\alpha, \sigma_\alpha, \theta, t), \\ v_\alpha^{(-)} &= V_{n+1}^{(-)} - \varepsilon^{n+1} W^{(-)} v(\mathbf{x}, \xi_\alpha, \sigma_\alpha, \theta, t) - \varepsilon^{n+2} \exp(-\gamma\zeta) + \\ &+ \varepsilon^{n+2} \omega_{\beta 0}(\theta, t) + \varepsilon^{n+3} \omega_{\beta 1}(\theta, t), \\ v_\alpha^{(+)} &= V_{n+1}^{(+)} - \varepsilon^{n+1} W^{(+)} v(\mathbf{x}, \xi_\alpha, \sigma_\alpha, \theta, t). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Функции $W^{(\pm)}u$ и $W^{(\pm)}v$ содержат несколько слагаемых:

$$W^{(\pm)}u(\mathbf{x}, \xi_\beta, \sigma_\beta, \theta, t) = u_\beta^{(\pm)}(\mathbf{x}, t) + Q_\beta^{(\pm)}u(\xi_\beta, \theta, t) + M_\beta^{(\pm)}u(\sigma_\beta, \theta, t),$$

$$W^{(\pm)}v(\mathbf{x}, \xi_\beta, \sigma_\beta, \theta, t) = v_\beta^{(\pm)}(\mathbf{x}, t) + Q_\beta^{(\pm)}v(\xi_\beta, \theta, t) + \varepsilon^2 M_\beta^{(\pm)}v(\sigma_\beta, \theta, t).$$

Положим $\omega_{\beta 0}(\theta, t) = M_{n+2}^{(+)}(0, \theta, t) - M_{n+2}^{(-)}(0, \theta, t)$, $\omega_{\beta 1}(\theta, t) = M_{n+3}^{(+)}(0, \theta, t) - M_{n+3}^{(-)}(0, \theta, t)$, что обеспечит непрерывность функций v_β и v_α . Выпишем задачи для функций \bar{u}_β , \bar{v}_β , $Q_\beta^{(\pm)}v$, $Q_\beta^{(\pm)}u$, $M_\beta^{(\pm)}v$, $M_\beta^{(\pm)}u$.

Функции \bar{u}_β и \bar{v}_β имеют вид:

$$\bar{u}_\beta^{(\pm)}(\mathbf{x}, t) = \frac{A\bar{g}_v(\mathbf{x}, t) - B\bar{f}_v(\mathbf{x}, t)}{\bar{f}_u(\mathbf{x}, t)\bar{h}_v^{1,3}(\mathbf{x}, t)}, \quad \bar{v}_\beta^{(\pm)}(\mathbf{x}, t) = \frac{B\bar{f}_u(\mathbf{x}, t) - A\bar{g}_u(\mathbf{x}, t)}{\bar{f}_u(\mathbf{x}, t)\bar{h}_v^{1,3}(\mathbf{x}, t)}.$$

Невязки, возникающие в результате добавления к асимптотике слагаемых $\varepsilon^{n+1}\bar{u}_\beta^{(\pm)}(\mathbf{x}, t)$ и $\varepsilon^{n+1}\bar{v}_\beta^{(\pm)}(\mathbf{x}, t)$, компенсируются за счет функций $Q_\beta^{(\pm)}u$, $Q_\beta^{(\pm)}v$, $M_\beta^{(\pm)}u$, $M_\beta^{(\pm)}v$.

Функции $Q_\beta^{(\pm)}v(\xi_\beta, \theta, t)$ определяются из задач:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 Q_\beta^{(\pm)}v}{\partial \xi_\beta^2} = \tilde{h}_v^{1,3}(\xi_\beta, \theta, t) \left(\bar{v}_\beta^{(\pm)}(\lambda_\beta, \theta, t) + Q_\beta^{(\pm)}v \right) + \frac{\tilde{g}_u^{(\pm)}(\xi_\beta, \theta, t)}{\tilde{f}_u^{(\pm)}(\xi_\beta, \theta, t)} A - B, \\ Q_\beta^{(\pm)}v(0, \theta, t) = -\bar{v}_\beta^{(\pm)}(\lambda_\beta, \theta, t), \quad Q_\beta^{(\pm)}v(\pm\infty, \theta, t) = 0, \end{cases}$$

$$Q_\beta^{(\pm)}u(\xi_\beta, \theta, t) = -\frac{\tilde{f}_v^{(\pm)}(\xi_\beta, \theta, t)}{\tilde{f}_u^{(\pm)}(\xi_\beta, \theta, t)} Q_\beta^{(\pm)}v(\xi_\beta, \theta, t).$$

Функции $M_\beta^{(\pm)}u(\sigma_\beta, \theta, t)$ определяются из уравнений:

$$\frac{\partial^2 M_\beta^{(\pm)}u}{\partial \sigma_\beta^2} - \hat{f}_u^{(\pm)}(\sigma_\beta, \theta, t) M_\beta^{(\pm)}u = A \left(\frac{\hat{f}_u^{(\pm)}(\sigma_\beta, \theta, t)}{\tilde{f}_u^{(\pm)}(0, \theta, t)} - 1 \right)$$

с условиями

$$M_\beta^{(\pm)}u(0, \theta, t) = -\frac{A}{\tilde{f}_u^{(\pm)}(0, \theta, t)}, \quad M_\beta^{(\pm)}u(\pm\infty, \theta, t) = 0.$$

Функции $M_\beta^{(\pm)}v$ определяются из задач:

$$\frac{\partial^2 M_\beta^{(\pm)}v}{\partial \sigma^2} = m_\beta g(\sigma_\beta, \theta, t), \quad M_\beta^{(\pm)}v(\pm\infty, \theta, t) = 0, \quad \frac{\partial M_\beta^{(\pm)}v}{\partial \sigma_\beta}(\pm\infty, \theta, t) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} m_\beta g(\sigma_\beta, \theta, t) = & \hat{g}_u^{(\pm)}(\sigma_\beta, \theta, t)(\bar{u}_\beta^{(\pm)}(\lambda_\beta, \theta, t) + Q_\beta^{(\pm)}u(0, \theta, t) + M_\beta^{(\pm)}u(\sigma_\beta, \theta, t)) + \\ & + \hat{g}_v^{(\pm)}(\sigma_\beta, \theta, t)\mu(\theta, t) - \tilde{g}_u^{(\pm)}(0, \theta, t)(\bar{u}_\beta^{(\pm)}(\lambda_\beta, \theta, t) + Q_\beta^{(\pm)}u(0, \theta, t)) - \\ & - \tilde{g}_v^{(\pm)}(0, \theta, t)\mu(\theta, t). \end{aligned}$$

Построенные указанным образом функции u_β, v_β и u_α, v_α удовлетворяют условиям (B1)-(B5) и являются верхним и нижним решениями задачи (4.1), (4.2).

Согласно статье [32] (Теорема 2.2) существования верхнего и нижнего решений - непрерывных и гладких в области \bar{D}_T функций, гарантирует существование классического решения задачи (4.1), (4.2). Доказательство основано на принципе максимума для верхнего и нижнего решений из класса $C^{2,1}(\bar{D}_T)$. В данном случае функции $u_\beta(\mathbf{x}, t, \varepsilon), v_\beta(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ и $u_\alpha(\mathbf{x}, t, \varepsilon), v_\alpha(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ принадлежат классу $C^{1,1}(\bar{D}_T)$, если в условиях B4, B5 выполнено равенство. Тогда можно повторить рассуждения работы [15], основываясь на принципе максимума для функций из класса $C^{1,1}(\bar{D}_T)$, доказанном в работе [33]. Если же функции $u_\beta(\mathbf{x}, t, \varepsilon), v_\beta(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ и $u_\alpha(\mathbf{x}, t, \varepsilon), v_\alpha(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ принадлежат классу $C^{0,0}(\bar{D}_T) \cap C^{2,1}(D_T^l \cup D_T^r)$ и имеют разрыв нормальной производной по кривым $C_\beta \in D, C_\alpha \in D$ соответственно, тогда для доказательства можно использовать принцип максимума из работы [34] (Лемма 2).

Приведенные рассуждения утверждают справедливость Теоремы 1.

4.6 Существование решения начально-краевой задачи

Рассмотрим начально-краевую задачу, соответствующую системе уравнений (4.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^4 \Delta u - \varepsilon^4 u_t = f(u, v, \mathbf{x}, t, \varepsilon), \\ \varepsilon^2 \Delta v - \varepsilon^2 v_t = g(u, v, \mathbf{x}, t, \varepsilon), \\ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in D \subset R^2, t \in (0; +\infty), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial D} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial n} \right|_{\partial D} = 0, \quad t \in (0; +\infty), \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_{init}(\mathbf{x}), \quad v(\mathbf{x}, 0) = v_{init}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{D}, \end{array} \right. \quad (4.12)$$

где $u_{init}(\mathbf{x})$, $v_{init}(\mathbf{x})$ - некоторые непрерывные гладкие функции. Заметим, что в качестве начальной точки может быть выбрана любая $t = t_0$.

Определим функции $U_{up}(x, t, \varepsilon)$, $V_{up}(x, t, \varepsilon)$ и $U_{down}(x, t, \varepsilon)$, $V_{down}(x, t, \varepsilon)$ равенствами

$$\begin{aligned} U_{up}(\mathbf{x}, t, \varepsilon) &= u^*(\mathbf{x}, t, \varepsilon) + (u_\beta(\mathbf{x}, t, \varepsilon) - u^*(\mathbf{x}, t, \varepsilon))e^{-\lambda t}, \\ U_{down}(\mathbf{x}, t, \varepsilon) &= u^*(\mathbf{x}, t, \varepsilon) + (u_\alpha(\mathbf{x}, t, \varepsilon) - u^*(\mathbf{x}, t, \varepsilon))e^{-\lambda t}, \\ V_{up}(\mathbf{x}, t, \varepsilon) &= v^*(\mathbf{x}, t, \varepsilon) + (v_\beta(\mathbf{x}, t, \varepsilon) - v^*(\mathbf{x}, t, \varepsilon))e^{-\lambda t}, \\ V_{down}(\mathbf{x}, t, \varepsilon) &= v^*(\mathbf{x}, t, \varepsilon) + (v_\alpha(\mathbf{x}, t, \varepsilon) - v^*(\mathbf{x}, t, \varepsilon))e^{-\lambda t}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Здесь u_α , v_α и u_β , v_β - это нижнее и верхнее решения задачи (4.1), (4.2), заданные выражениями (4.10) и (4.11). Через $u^*(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$, $v^*(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ обозначено некоторое

решение задачи (4.1),(4.2), лежащие между u_α, u_β и v_α, v_β , соответственно (решение существует согласно Теореме 1).

Теорема 2. При выполнении условий A1-A5 для произвольных достаточно гладких начальных функций $u_{init}(\mathbf{x}), v_{init}(\mathbf{x})$, таких что

$$U_{down}(\mathbf{x}, 0, \varepsilon) < u_{init}(\mathbf{x}) < U_{up}(\mathbf{x}, 0, \varepsilon), \quad \mathbf{x} \in D$$

$$V_{down}(\mathbf{x}, 0, \varepsilon) < v_{init}(\mathbf{x}) < V_{up}(\mathbf{x}, 0, \varepsilon), \quad \mathbf{x} \in D,$$

существует решение $u(\mathbf{x}, t, \varepsilon), v(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ начально-краевой задачи (4.12), лежащее между верхним и нижним решениями $U_{down}(\mathbf{x}, t, \varepsilon), U_{up}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ для u -компоненты и $V_{down}(\mathbf{x}, t, \varepsilon), V_{up}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ - для v -компоненты при $\mathbf{x} \in D$ и $t \in (0; +\infty)$:

$$U_{down}(\mathbf{x}, t, \varepsilon) < u(\mathbf{x}, t, \varepsilon) < U_{up}(\mathbf{x}, t, \varepsilon), \quad V_{down}(\mathbf{x}, t, \varepsilon) < v(\mathbf{x}, t, \varepsilon) < V_{up}(\mathbf{x}, t, \varepsilon).$$

Доказательство. Воспользуемся определением верхнего и нижнего решений, введенным в разделе 4.4, исключая условие периодичности. Можно показать, что функции $U_{up}(\mathbf{x}, t, \varepsilon), V_{up}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ и $U_{down}(\mathbf{x}, t, \varepsilon), V_{down}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ являются верхним и нижним решениями задачи (4.12).

Условие (B1) выполняется на сегменте $\mathbf{x} \in D$, так как по способу построения функций $u_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ справедливо равенство $U_{up}(\mathbf{x}, t, \varepsilon) - U_{down}(\mathbf{x}, t, \varepsilon) = e^{-\lambda t}(u_\beta(\mathbf{x}, t, \varepsilon) - u_\alpha(\mathbf{x}, t, \varepsilon)) \geq 0$. Аналогичное равенство справедливо для $v_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$.

Функции $U_{down}(\mathbf{x}, t, \varepsilon), V_{down}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ удовлетворяют неравенствам условия (B2), которое достаточно проверить при $v = V_{up}$ в силу условия A3.

Аналогичным образом, можно показать, что неравенства условия $B2$ выполняются для дифференциальных операторов $L_{1\varepsilon}(U_{down}, V_{down})$, $L_{2\varepsilon}(U_{up}, V_{up})$, $L_{2\varepsilon}(U_{down}, V_{down})$.

На границе области ∂D для производных по нормали $U_{up}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ выполнено равенство:

$$\frac{\partial U_{up}}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{n}}(1 - e^{-\lambda t}) + e^{-\lambda t} \frac{\partial U^\beta}{\partial \mathbf{n}} \leq 0$$

согласно граничным условиям для периодических решений задачи (4.1), (4.2) и методу построения функции $U^\beta(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$. Таким образом для функции $U_{up}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ выполнено условие (B3). Можно показать, что функции $V_{up}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ и $U_{down}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$, $V_{down}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ также удовлетворяют условию (B3).

Согласно работе [15], если существуют нижнее $(U_{down}(\mathbf{x}, t, \varepsilon), V_{down}(\mathbf{x}, t, \varepsilon))$ и верхнее $(U_{up}(\mathbf{x}, t, \varepsilon), V_{up}(\mathbf{x}, t, \varepsilon))$ решения задачи (4.12), тогда решение $u(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$, $v(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ задачи (4.12) существует и удовлетворяет неравенствам: $U_{down}(\mathbf{x}, t, \varepsilon) \leq u(\mathbf{x}, t, \varepsilon) \leq U_{up}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$, $V_{down}(\mathbf{x}, t, \varepsilon) \leq v(\mathbf{x}, t, \varepsilon) \leq V_{up}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$, $\mathbf{x} \in D$, $t \in (0; +\infty)$. Теорема 2 доказана.

4.7 Асимптотическая устойчивость решения периодической задачи

Теорема 3. Пусть выполнены условия A1-A5. Тогда гладкое периодическое решение задачи (4.1),(4.2), для которого суммы (4.8) являются

асимптотическим приближением, единственно и асимптотически устойчиво по Ляпунову с областью влияния по крайней мере $[U^{down}, U^{up}]$ для u -компоненты и $[V^{down}, V^{up}]$ для v -компоненты.

Доказательство.

Выберем начальные функции $u_{init}(\mathbf{x})$, $v_{init}(\mathbf{x})$ задачи (4.12) таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$u_{\alpha}(\mathbf{x}, 0, \varepsilon) < u_{init}(\mathbf{x}) < u_{\beta}(\mathbf{x}, 0, \varepsilon), \quad v_{\alpha}(\mathbf{x}, 0, \varepsilon) < v_{init}(\mathbf{x}) < v_{\beta}(\mathbf{x}, 0, \varepsilon), \quad \mathbf{x} \in D. \quad (4.14)$$

Из равенств (4.13) следует, что $U_{down}(\mathbf{x}, 0, \varepsilon) = u_{\alpha}(\mathbf{x}, 0, \varepsilon)$, $U_{up}(\mathbf{x}, 0, \varepsilon) = u_{\beta}(\mathbf{x}, 0, \varepsilon)$ и $V_{down}(\mathbf{x}, 0, \varepsilon) = v_{\alpha}(\mathbf{x}, 0, \varepsilon)$, $V_{up}(\mathbf{x}, 0, \varepsilon) = v_{\beta}(\mathbf{x}, 0, \varepsilon)$. Таким образом функции $u_{init}(\mathbf{x})$ и $v_{init}(\mathbf{x})$, удовлетворяющие неравенствам (4.14), лежат между нижним и верхним решениями U_{down} , U_{up} и V_{down} , V_{up} при $\mathbf{x} \in D$. Условия Теоремы 2 выполнены и существует единственное решение $u(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$, $v(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ начальной задачи (4.12), лежащее между $U_{down}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$, $U_{up}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ и $V_{down}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$, $V_{up}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$.

Функции $U_{down}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$, $U_{up}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ сходятся к функции $u^*(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$. В этом случае функция $u(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ также стремится к $u^*(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$. Поскольку решение $u(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ задачи (4.12) единственно, то функция $u^*(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ является единственным решением задачи (4.1),(4.2), расположенным между $u_{\alpha}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ и $u_{\beta}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$. Аналогично для v -компоненты функция $v^*(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ является единственным решением задачи (4.1),(4.2), расположенным между $v_{\alpha}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ и $v_{\beta}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$

Отсюда следует что, если неравенства (4.14) выполнены, то справедливы предельные равенства

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |u(\mathbf{x}, t, \varepsilon) - u^*(\mathbf{x}, t, \varepsilon)| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} |v(\mathbf{x}, t, \varepsilon) - v^*(\mathbf{x}, t, \varepsilon)| = 0$$

и периодическое решение $u^*(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$, $v^*(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ локально устойчиво по Ляпунову с областью влияния по крайней мере $[u_\alpha, u_\beta]$ для u -компоненты и $[v_\alpha, v_\beta]$ для v -компоненты.

Глава 5. Динамика автоволнового фронта в модели развития урбоэкосистем

В настоящей главе рассматривается краевая задача для нелинейной параболической системы в двумерной области. Это сингулярно возмущенная система уравнений с периодическими условиями по времени. В общем виде задача была рассмотрена в предыдущей главе. Данную в настоящей главе задачу можно рассматривать как математическую модель распространения автоволнового фронта в двумерной области в случае неоднородной среды, параметры которой меняются со временем. В работе [35] подобная система используется для описания развития урбоэкосистемы.

Рассматриваемая система относится к типу систем «реакция-диффузия», которые используются для моделирования переходных процессов различной природы в химической кинетике, биофизике, экологии и других областях. Нелинейные системы с различными коэффициентами диффузии компонент могут описывать формирование структур в диссипативных средах [36], [37]. В биофизике модель Фитц Хью-Нагумо [38] в различных модификациях (см., например, [39]) применяется для описания волн возбуждения в активных средах. Модели на основе систем «реакция-диффузия» изучаются как аналитическими методами [40], [41], [42], так и в численных экспериментах [43], [44].

5.1 Постановка задачи

В работе [35] была предложена пространственно-временная модель урбо-экосистемы:

$$\begin{cases} \mu u_t - \mu D_u \Delta u = -\mu^{-1}(u(u - \alpha(x, y, t))(u - 1) + uv), \\ \mu v_t - \mu D_v \Delta v = -\gamma v + \beta u, \quad -L \leq x, y \leq L, t > 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=\mp L} = \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=\mp L} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}|_{x=\mp L} = \frac{\partial v}{\partial y}|_{y=\mp L} = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Здесь $0 \leq \mu \leq 1$ – малый параметр, Δ – оператор Лапласа, $\alpha(x, y, t) > 0$ – функция, непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных, $\gamma > 0, \beta > 0$ – параметры системы, $\mu D_u, \mu D_v$ – коэффициенты диффузии, u – функция интенсивности антропогенных факторов, а v – функция интенсивности природных факторов. Урбоэкосистема – это экосистема города и пригорода, и переход от городской среды к сельской происходит в узкой пространственной области – городской окраине. Предполагается, что графики функций u и v имеют переходный слой, соответствующий переходу от городской среды к сельской. В работе [35] получено численное решение задачи (5.1) в виде движущегося фронта по каждой из компонент. Вопрос состоит в получении аналитического решения модельной системы.

В определенной области изменения параметров α, β, γ многочлен в правой части первого уравнения (5.1) имеет три действительных корня (см. [35]) и может быть представлен в виде $u(u - \alpha(x, y, t))(u - 1) + uv = u(u - \Psi_1(v, x, y, t))(u -$

$\psi_2(v, x, y, t)$), где $0 < \psi_1(v, x, y, t) < \psi_2(v, x, y, t)$. Чтобы проанализировать структуру решения, можно использовать метод построения асимптотического приближения решения задачи (5.1) для случая правой части первого уравнения, когда переменная v входит как малая добавка, один корень многочлена зависит только от времени, а второй только от пространственных переменных.

Рассмотрим в области D с достаточно гладкой границей ∂D задачу:

$$\begin{cases} \varepsilon^4 \Delta u - \varepsilon^4 u_t = -u(u - \varphi^1(t))(u - \varphi^3(t)) - \varepsilon v, \\ \varepsilon^2 \Delta v - \varepsilon^2 v_t = \gamma v - u, \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in D \subset R^2, t \in (0; +\infty) \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial D} = 0, \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\partial D} = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Решение удовлетворяет периодическим условиям по времени $u(x, y, t) = u(x, y, t + T)$, $v(x, y, t) = v(x, y, t + T)$ при $(x, y) \in D$, $t \in (0; +\infty)$. Здесь $0 < \varepsilon = \mu^2 < 1$ — малый параметр, Δ — оператор Лапласа, D — ограниченная односвязная область с достаточно гладкой границей ∂D , $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали к ∂D . Параметр β и коэффициенты D_u , D_v положили равными 1. Выбор периодических условий по времени позволяет в данной задаче не рассматривать вопрос формирования контрастной фронта в окрестности начального момента времени и вопрос согласования начальных и граничных условий.

Условие 1. Пусть $\varphi^1(t)$, $\varphi^3(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции при $(x_1, x_2) \in D, t \in (0; +\infty)$, причем $\varphi^1(t) < 0 < \varphi^3(t)$, и $\varphi^1(t)$ —

периодическая функция. Ниже будут сформулированы дополнительные условия на функции $\varphi^1(t)$ и $\varphi^3(t)$.

В предыдущей главе было показано, что в задачах, подобных (5.2), возможно существование решений с внутренним переходным слоем. Внутренний слой образуется как переход от одного устойчивого корня вырожденной системы (5.2) к другому (вырожденной называется система (5.2) при $\varepsilon = 0$). Вырожденная система для настоящей задачи имеет два устойчивых корня относительно u -компоненты: $\varphi^1(t)$, $\varphi^3(t)$ и неустойчивый корень $u = 0$; устойчивые корни для v -компоненты: $\gamma^{-1}\varphi^1(t)$, $\gamma^{-1}\varphi^3(x_1, x_2)$. Ниже получено асимптотическое представление периодического решения задачи (5.2) с внутренним переходным слоем, который в каждый момент времени t расположен в окрестности некоторой гладкой замкнутой кривой $C \subset D$. Внутри кривой C решение для u - и v -компонент близко к решениям $\varphi^3(t)$ и $\gamma^{-1}\varphi^3(x_1, x_2)$ вырожденной системы, а вне кривой — к корням $\varphi^1(t)$ и $\gamma^{-1}\varphi^1(t)$ соответственно.

5.2 Общий вид асимптотики

Кривая C в каждый момент времени $t \in (0; +\infty)$ разделяет область \bar{D} на две части: $\bar{D}^{(+)}$ с границей C и $\bar{D}^{(-)}$, границами которой являются C и ∂D . Асимптотика решения задачи строится отдельно в каждой из областей $\bar{D}^{(+)}$ и $\bar{D}^{(-)}$:

$$u(x_1, x_2, t) = \begin{cases} u^{(-)}(x_1, x_2, t), & (x_1, x_2) \in \bar{D}^{(-)}, \\ u^{(+)}(x_1, x_2, t), & (x_1, x_2) \in \bar{D}^{(+)}, \end{cases}$$

$$v(x_1, x_2, t) = \begin{cases} v^{(-)}(x_1, x_2, t), & (x_1, x_2) \in \bar{D}^{(-)}, \\ v^{(+)}(x_1, x_2, t), & (x_1, x_2) \in \bar{D}^{(+)}, \end{cases}$$

Функции $u^{(-)}(x_1, x_2, t)$, $u^{(+)}(x_1, x_2, t)$, $v^{(-)}(x_1, x_2, t)$, $v^{(+)}(x_1, x_2, t)$ имеют

вид:

$$u^{\mp}(x_1, x_2, t) = \bar{u}_0^{(\mp)}(x_1, x_2, t) + Q_0^{\mp}u(\xi, \theta, t) + M_0^{\mp}u(\sigma, \theta, t) +$$

$$+ \varepsilon \bar{u}_1^{(\mp)}(x_1, x_2, t) + \varepsilon Q_1^{\mp}u(\xi, \theta, t) + \varepsilon M_1^{\mp}u(\sigma, \theta, t),$$

$$v^{(\mp)}(x_1, x_2, t) = \bar{v}_0^{(\mp)}(x_1, x_2, t) + Q_0^{\mp}v(\xi, \theta, t) + M_0^{\mp}v(\sigma, \theta, t) +$$

$$+ \varepsilon \bar{v}_1^{(\mp)}(x_1, x_2, t) + \varepsilon Q_1^{\mp}v(\xi, \theta, t) + \varepsilon M_1^{\mp}v(\sigma, \theta, t). \quad (5.3)$$

Здесь $u_{0,1}^{(\mp)}(x_1, x_2, t)$, $v_{0,1}^{(\mp)}(x_1, x_2, t)$ — члены регулярной части асимптотики; $Q_i^{\mp}u(\xi, \theta, t)$, $Q_i^{\mp}v(\xi, \theta, t)$, $M_i^{\mp}u(\sigma, \theta, t)$, $M_i^{\mp}v(\sigma, \theta, t)$ — функции переходного слоя, описывающие решение вблизи кривой C ; $\xi = \frac{r}{\varepsilon}$, $\sigma = \frac{r}{\varepsilon^2}$ — переменные переходного слоя, (r, θ) — локальные координаты точки (x_1, x_2) в окрестности кривой C .

Определим положение кривой C условием пересечения u -компоненты решения задачи (5.2) с неустойчивым корнем $u = 0$ вырожденной системы:

$$u(x_1, x_2, t)_{(x_1, x_2) \in C} = 0.$$

Асимптотические представления (5.3) согласованы до непрерывности на кривой C в каждый момент времени t :

$$\begin{aligned} & \bar{u}_0^{(\mp)}(x_1, x_2, t)_{(x_1, x_2) \in C} + Q_0^{\mp} u(0, \theta, t) + M_0^{\mp} u(0, \theta, t) + \\ & + \varepsilon \bar{u}_1^{(\mp)}(x_1, x_2, t)_{(x_1, x_2) \in C} + \varepsilon Q_1^{\mp} u(0, \theta, t) + \varepsilon M_1^{\mp} u(0, \theta, t) = 0, \\ & \bar{v}_0^{(\mp)}(x_1, x_2, t)_{(x_1, x_2) \in C} + Q_0^{\mp} v(0, \theta, t) + M_0^{\mp} v(0, \theta, t) + \\ & + \varepsilon \bar{v}_1^{(\mp)}(x_1, x_2, t)_{(x_1, x_2) \in C} + \varepsilon Q_1^{\mp} v(0, \theta, t) + \varepsilon M_1^{\mp} v(0, \theta, t) = v^*(\theta, t), \end{aligned} \quad (5.4)$$

где $v^*(\theta, t)$ - значение v -компоненты на кривой перехода. Функцию $v^*(\theta, t)$ представим в виде суммы

$$v^*(\theta, t) := v_0(\theta, t) + \varepsilon v_1(\theta, t), \quad (5.5)$$

каждое слагаемое которой будет определено в процессе построения асимптотического решения.

Потребуем также, чтобы на кривой C были согласованы до непрерывности первые производные функций $u^{(-)}(x_1, x_2, t)$, $u^{(+)}(x_1, x_2, t)$, $v^{(-)}(x_1, x_2, t)$, $v^{(+)}(x_1, x_2, t)$ взятые по нормали к C :

$$\left. \frac{\partial u^{(-)}}{\partial n} \right|_C = \left. \frac{\partial u^{(+)}}{\partial n} \right|_C, \quad \left. \frac{\partial v^{(-)}}{\partial n} \right|_C = \left. \frac{\partial v^{(+)}}{\partial n} \right|_C \quad (5.6)$$

5.3 Регулярная часть

Действуя по методу пограничных функций, получим для регулярной части асимптотики соотношения

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_0^{(-)}(x_1, x_2, t) &= \varphi^1(t), \\
 \bar{u}_0^{(+)}(x_1, x_2, t) &= \varphi^3(x_1, x_2), \\
 \bar{v}_0^{(-)}(x_1, x_2, t) &= \gamma^{-1}\varphi^1(t), \\
 \bar{v}_0^{(+)}(x_1, x_2, t) &= \gamma^{-1}\varphi^3(x_1, x_2).
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Функции регулярной части первого порядка:

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_1^{(-)}(x_1, x_2, t) &= -\gamma^{-1}(\varphi^3(x_1, x_2) - \varphi^1(t))^{-1}, \\
 \bar{u}_1^{(+)}(x_1, x_2, t) &= -\gamma^{-1}(\varphi^3(x_1, x_2) - \varphi^1(t))^{-1}, \\
 \bar{v}_1^{(-)}(x_1, x_2, t) &= -\gamma^{-2}(\varphi^3(x_1, x_2) - \varphi^1(t))^{-1}, \\
 \bar{v}_1^{(+)}(x_1, x_2, t) &= -\gamma^{-2}(\varphi^3(x_1, x_2) - \varphi^1(t))^{-1},
 \end{aligned}$$

5.4 Функции переходного слоя

5.4.1 Переход к локальным координатам

Выберем в области D точку $O(x^0, y^0)$ и перейдем к полярной системе координат (ρ, θ) , $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ с центром в точке O по формулам

$$x = x^0 + \rho \cos \theta, \quad y = y^0 + \rho \sin \theta.$$

Для упрощения записи будем считать $x^0 = 0$, $y^0 = 0$. В координатах (ρ, θ) кривая C задается уравнением

$$\rho = \rho^*(\theta, t) := \rho_0(\theta, t) + \varepsilon \rho_1(\theta, t). \quad (5.8)$$

Для описания переходного слоя в δ -окрестности кривой C стандартным способом вводятся локальные координаты (r, θ) . Величина $|r|$ - это расстояние от точки (x, y) до кривой C вдоль нормали к C ; $r > 0$, если точка (x, y) лежит внутри области, ограниченной кривой C ; $r < 0$, если (x, y) находится вне этой области; $r = 0$, если $(x, y) \in C$; θ - тот же полярный угол, что и в формулах (8).

Если δ -окрестность $\{(0 \leq |r| \leq \delta) \times (0 \leq \theta \leq 2\pi)\}$ достаточно узкая, т. е. величина δ достаточно мала, чтобы нормали проведенные из различных точек кривой C не пересекались внутри этой окрестности, то существует однозначное

соответствие между координатами (x, y) и (r, θ) , которое задается формулами

$$x = \rho^*(\theta, t) \cos \theta - r \cdot \sin \alpha, \quad (5.9)$$

$$y = \rho^*(\theta, t) \sin \theta + r \cdot \cos \alpha$$

где

$$\sin \alpha = \frac{\rho_\theta^*(\theta, t) \sin \theta + \rho^*(\theta, t) \cos \theta}{\sqrt{\rho_\theta^*(\theta, t)^2 + \rho^*(\theta, t)^2}},$$

$$\cos \alpha = \frac{\rho_\theta^*(\theta, t) \cos \theta - \rho^*(\theta, t) \sin \theta}{\sqrt{\rho_\theta^*(\theta, t)^2 + \rho^*(\theta, t)^2}}$$

$\{-\sin \alpha, \cos \alpha\}$ — координаты единичной внутренней нормали к кривой C .

Для упрощения записи формул будем обозначать функции

$$\bar{u}_0^{(\mp)}(\rho^* \cos \theta - r \sin \alpha, \rho^* \sin \theta + r \cos \alpha, t)$$

как $\bar{u}_0^{(\mp)}(r, \rho^*, \theta, t)$ и аналогичные обозначения будем применять для других функций переменных (x, y) , в частности через $\varphi^3(r, \rho^*, \theta)$ обозначим функцию $\varphi^3(\rho^* \cos \theta - r \sin \alpha, \rho^* \sin \theta + r \cos \alpha)$. Введем полезную в дальнейшем функцию

$$f(u, v, r, \rho^*, \theta, t, \varepsilon) := u(u - \varphi^1(t))(u - \varphi^3(r, \rho^*, \theta)) - \varepsilon v. \quad (5.10)$$

Сформулируем условия на функции $\varphi^1(t)$ и $\varphi^3(x, y)$.

Условие 2. Пусть уравнение $\varphi^1(t) + \varphi^3(0, \rho_0, \theta) = 0$ определяет простую замкнутую гладкую кривую $C_0 : \rho = \rho_0(\theta, t) \in D, \quad \theta \in [0; 2\pi], \quad t \in (0; +\infty)$, причем функция $\rho_0(\theta, t)$ — периодическая с периодом T . Кривая C_0 является нулевым приближением кривой перехода C .

Условие 3. Пусть функции $\varphi^3(r, \rho^*(\theta, t), \theta)$ удовлетворяет условию $\frac{\partial \varphi^3}{\partial \rho^*}(0, \rho_0(\theta, t), \theta) \neq 0$ при всех $\theta \in [0; 2\pi], t \in (0; +\infty)$.

5.4.2 Система уравнений для определения функций переходного слоя

Асимптотика решения вблизи кривой перехода C задается Q - и M -функциями, зависящими от растянутых переменных ξ и σ . Запишем выражения для оператора задачи $\Delta - \frac{\partial}{\partial t}$ в переменных (ξ, σ, t) с учетом разложения ρ^* в сумму по степеням малого параметра:

$$\Delta - \frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \varepsilon^{-1} L_1 + \sum_{i=2} \varepsilon^{i-2} L_i$$

и в переменных (σ, θ, t) :

$$\Delta - \frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon^{-4} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \varepsilon^{-2} N_1 + \sum_{i=2} \varepsilon^{i-4} N_i,$$

где $L_i, N_i, i \geq 1$, — дифференциальные операторы первого и второго порядка, коэффициенты которых зависят от неизвестных пока функций $\rho_0(\theta, t), \rho_1(\theta, t)$, определяющих кривую C . В частности,

$$L_1 = \rho_0 \sin(\theta - \alpha)(\alpha_\theta + 1) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\rho_0 \rho_{0t}}{(\rho_{0\theta}^2 + \rho_0^2)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \xi} + \\ + (\rho_{0\theta} \alpha_\theta \cos(\theta + \alpha) + \rho_{0\theta} \sin(\theta - \alpha) + 2\rho_{0\theta} \cos(\theta - \alpha)) \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (5.11)$$

Уравнения для функций $Q_i^\mp u(\xi, \theta, t)$, $Q_i^\mp v(\xi, \theta, t)$, ($i = 0, 1$) получаются приравнинванием коэффициентов при одинаковых степенях ε в равенствах

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 Q^{(\mp)} u}{\partial \xi^2} + \sum_{k=1} \varepsilon^{k+2} L_k Q^\mp u = \\ = f(\bar{u}^\mp(\varepsilon \xi, \rho^*, \theta, t) + Q^\mp v, \bar{v}^\mp(\varepsilon \xi, \rho^*, \theta, t) + Q^\mp v, \varepsilon \xi, \rho^*, \theta, t, \varepsilon) - \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$- f(\bar{u}^\mp(\varepsilon \xi, \rho^*, \theta, t), \bar{v}^\mp(\varepsilon \xi, \rho^*, \theta, t), \varepsilon \xi, \rho^*, \theta, t, \varepsilon),$$

$$\frac{\partial^2 Q^\mp v}{\partial \xi^2} + \sum_{k=1} \varepsilon^k L_k Q^\mp v = \gamma Q^\mp v - Q^\mp u,$$

где $\bar{u}^\mp := \bar{u}_0^\mp + \varepsilon \bar{u}_1^\mp$, $Q^\mp u := Q_0^\mp u + \varepsilon Q_1^\mp u$ и аналогичный смысл имеют обозначения \bar{v}^\mp , $Q^\mp v$ (аргументы опущены).

Уравнения для функций $M_i^\mp u(\sigma, \theta, t)$, $M_i^\mp v(\xi, \theta, t)$, ($i = 0, 1$) получаются при выделении коэффициентов при одинаковых степенях ε в равенствах

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 M^{(\mp)} u}{\partial \sigma^2} + \sum_{k=1,2} \varepsilon^k N_k M^\mp u =$$

$$= f(\bar{u}^\mp(\varepsilon \xi, \rho^*, \theta, t) + Q^\mp u + M^\mp u, \bar{v}^\mp(\varepsilon \xi, \rho^*, \theta, t) + Q^\mp v + M^\mp v, \varepsilon^2 \sigma, \rho^*, \theta, t) -$$

$$- f(\bar{u}^\mp(\varepsilon \xi, \rho^*, \theta, t) + Q^\mp u, \bar{v}^\mp(\varepsilon \xi, \rho^*, \theta, t) + Q^\mp v, \varepsilon^2 \sigma, \rho^*, \theta, t),$$

$$\varepsilon^{-2} \frac{\partial^2 M^\mp v}{\partial \sigma^2} + \sum_{k=1} \varepsilon^{k-2} N_k M^\mp v = \gamma M^\mp v - M^\mp u$$

где $M^\mp v := M_0^\mp v + \varepsilon M_1^\mp v$, $M^\mp u := M_0^\mp u + \varepsilon M_1^\mp u$, аргумент r функций \bar{u}^\mp , \bar{v}^\mp заменен на $\varepsilon^2 \sigma$, аргумент ξ функций $Q^\mp u$, $Q^\mp v$ заменен на $\varepsilon \sigma$.

Функции M^\mp при $i = 0, 1$ определяются из задач

$$\frac{\partial^2 M_i^\mp v}{\partial \sigma^2} = 0, \quad M_i^\mp v(\mp \infty, \theta, t) = 0,$$

которые имеют только тривиальные решения:

$$M_0^\mp v(\sigma, \theta, t) = 0, \quad M_1^\mp v(\sigma, \theta, t) = 0.$$

Здесь и далее $\theta \in [0; 2\pi]$ и $t \in (0; +\infty)$ рассматриваются как параметры.

Функции переходного слоя нулевого и первого порядков получаются выделением коэффициентов при ε^0 и ε^1 после разложения входящих в них функций по формуле Тейлора по степеням ε . Дополнительные условия получаются из условий непрерывности (5.4) и условий убывания на бесконечности $Q_i^\mp v(\mp\infty, \theta, t) = 0$, $M_i^\mp v(\mp\infty, \theta, t) = 0$, $i = 0, 1$.

Функции $Q_0^\mp u$ определяются из уравнений

$$\begin{aligned} & (\bar{u}_0^\mp(0, \rho_0, \theta, t) + Q_0^\mp u - \varphi^1(t)) \cdot (\bar{u}_0^\mp(0, \rho_0, \theta, t) + Q_0^\mp u) \\ & \times (\bar{u}_0^\mp(0, \rho_0, \theta, t) + Q_0^\mp u - \varphi^3(0, \rho_0, \theta)) = 0. \end{aligned}$$

Решения этих уравнений: $Q_0^\mp u(\xi, \theta, t) = 0$.

Функции $Q_0^\mp v$ определяются из задач:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 Q_0^\mp v}{\partial^2 \xi} = \gamma Q_0^\mp v, \\ Q_0^\mp v(0, \theta, t) = v_0(\theta, t) - \bar{v}_0^\mp(0, \rho_0, \theta, t), \\ Q_0^\mp v(\mp\infty, \theta, t) = 0, \end{cases}$$

решения которых легко выписать:

$$\begin{aligned} Q_0^{(-)} v(\xi, \theta, t) &= (v_0(\theta, t) - \gamma^{-1} \varphi^1(t)) \exp \sqrt{\gamma} \xi, \\ Q_0^{(+)} v(\xi, \theta, t) &= (v_0(\theta, t) - \gamma^{-1} \varphi^3(0, \rho_0, \theta)) \exp \sqrt{\gamma} \xi, \end{aligned} \tag{5.13}$$

Запишем уравнения для функции $M^{(-)}u$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_0^\mp u}{\partial \sigma^2} &= (\bar{u}_0^\mp(0, \rho_0, \theta, t) + M_0^\mp u)(\bar{u}_0^\mp(0, \rho_0, \theta, t) + M_0^\mp u - \varphi^1(t)) \\ &\times (\bar{u}_0^\mp(0, \rho_0, \theta, t) + M_0^\mp u - \varphi^3(0, \rho_0, \theta)) \end{aligned}$$

Уравнения для функции $M_0^{(-)}u$ определены при $\sigma \leq 0$, а для функции $M_0^{(+)}u$ - при $\sigma \geq 0$. Введем непрерывную функцию

$$\tilde{u}(\sigma, \theta, t) := \begin{cases} \bar{u}_0^{(-)}(0, \rho_0, \theta, t) + M_0^{(-)}u(\sigma, \theta, t), & \sigma \leq 0 \\ \bar{u}_0^{(+)}(0, \rho_0, \theta, t) + M_0^{(+)}u(\sigma, \theta, t), & \sigma \geq 0 \end{cases}$$

Запишем уравнение для функции $\tilde{u}(\sigma, \theta, t)$:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \sigma^2} = \tilde{u} (\tilde{u} - \varphi^1(t)) (\tilde{u} - \varphi^3(0, \rho_0, \theta)), \quad -\infty < \sigma < +\infty. \quad (5.14)$$

Будем искать такое решение уравнения (5.14), которое удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \tilde{u}(-\infty, \theta, t) &= \varphi^1(t), \\ \tilde{u}(+\infty, \theta, t) &= \varphi^3(0, \rho_0, \theta), \\ \tilde{u}(0, \theta, t) &= 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Уравнение второго порядка (5.14) эквивалентно системе уравнений

$$\Psi = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \sigma}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} = \tilde{u} (\tilde{u} - \varphi^1(t)) (\tilde{u} - \varphi^3(0, \rho_0, \theta)) \quad (5.16)$$

для которой точки $(\varphi^1(t); 0)$ и $(\varphi^3(0, \rho_0, \theta); 0)$ являются точками покоя типа седла на фазовой плоскости (\tilde{u}, Ψ) . Существование решения задачи (5.14), (5.15) означает существование соединительной сепаратрисы между этими точками покоя, которая имеет вид параболы: $\Psi(\tilde{u}) = k (\tilde{u} - \varphi^1(t)) (\tilde{u} - \varphi^3(0, \rho_0, \theta))$.

Функцию $\Psi(\tilde{u})$ подставим в систему (5.16), определим постоянную $k = -1/\sqrt{2}$ и получим уравнение для относительно функции $\rho_0(\theta, t)$:

$$\varphi^1(t) + \varphi^3(0, \rho_0, \theta) = 0. \quad (5.17)$$

Уравнение (5.17) разрешимо в силу условия 2.

Учитывая, что $\Psi = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \sigma}$, запишем уравнение первого порядка для функции $\tilde{u}(\sigma, \theta, t)$:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{u} - \varphi^1(t)) (\tilde{u} - \varphi^3(0, \rho_0, \theta)).$$

Выпишем решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $\tilde{u}(0, \theta, t) = 0$:

$$\tilde{u}(\sigma, \theta, t) = \frac{\varphi^1(t)\varphi^3(0, \rho_0, \theta) (1 - \exp(k\sigma(\varphi^3(0, \rho_0, \theta) - \varphi^1(t))))}{\varphi^1(t) - \varphi^3(0, \rho_0, \theta) \exp(k\sigma(\varphi^3(0, \rho_0, \theta) - \varphi^1(t)))}.$$

В выражение (5.13) входит неизвестная функция $v_0(\theta, t)$, которую можно определить из условий сшивания производных (5.6). Запишем условия сшивания с учетом перехода к локальным координатам (r, θ) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}^{(-)}}{\partial r}(0, \rho^*, \theta, t) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial Q^{(-)}v}{\partial \xi}(0, \theta, t) &= \frac{\partial \bar{v}^{(+)}}{\partial r}(0, \rho^*, \theta, t) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial Q^{(+)}v}{\partial \xi}(0, \theta, t), \\ \frac{\partial \bar{u}^{(-)}}{\partial r}(0, \rho^*, \theta, t) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial Q^{(-)}u}{\partial \xi}(0, \theta, t) + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial M^{(-)}u}{\partial \sigma}(0, \theta, t) &= \\ = \frac{\partial \bar{u}^{(+)}}{\partial r}(0, \rho^*, \theta, t) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial Q^{(+)}u}{\partial \xi}(0, \theta, t) + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial M^{(+)}u}{\partial \sigma}(0, \theta, t) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Выделяя в равенствах (5.18) старшие слагаемые с коэффициентом ε^{-1} в первом равенстве и с коэффициентом ε^{-2} во втором, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_0^{(-)}v}{\partial \xi}(0, \theta, t) &= \frac{\partial Q_0^{(+)}v}{\partial \xi}(0, \theta, t) \\ \frac{\partial M_0^{(-)}u}{\partial \sigma}(0, \theta, t) &= \frac{\partial M_0^{(+)}u}{\partial \sigma}(0, \theta, t). \end{aligned}$$

Подставляя в первое равенство выражения (5.13) для функций $Q_0^{(\mp)}v(\xi, \theta, t)$,

получим

$$v_0(\theta, t) = 0.$$

Можно проверить, что производные функций $M_0^{(\mp)}u(\sigma, \theta, t)$ равны при $\sigma = 0$, если $\rho_0(\theta, t)$ — решение уравнения (5.17).

5.4.3 Функции переходного слоя первого порядка

Продолжая действовать по алгоритму метода теории контрастных структур, запишем задачи для функций $Q_1^{(\mp)}u(\xi, \theta, t)$, $Q_1^{(\mp)}v(\xi, \theta, t)$, $M_1^{(\mp)}u(\sigma, \theta, t)$.

Из соотношений (5.12) получаются выражения для функций $Q_1^{(\mp)}u(\xi, \theta, t)$:

$$\bar{u}_1^{(\mp)}(0, \rho_0, \theta, t) + Q_1^{(\mp)}u = \mp \frac{\bar{v}_0^{(\mp)}(0, \rho_0, \theta, t) + Q_0^{(\mp)}v(\xi, \theta, t)}{\bar{u}_0^{(\mp)}(0, \rho_0, \theta, t) (\varphi^3(0, \rho_0, \theta) - \varphi^1(t))} \quad (5.19)$$

Подставим выражения для $Q_0^{(\mp)}v(\xi, \theta, t)$ и найденные ранее функции регулярной части и выпишем решения уравнений (5.19) :

$$Q_1^{(\mp)}u(\xi, \theta, t) = \mp \frac{e^{-|\xi|\sqrt{\gamma}}}{\gamma (\varphi^3(0, \rho_0, \theta) - \varphi^1(t))}.$$

Функции $Q_1^{(\mp)}v(\xi, \theta, t)$ определяются из уравнений

$$\frac{\partial^2 Q_1^{(\mp)}v}{\partial \xi^2} + A(\theta, t) \frac{\partial Q_0^{(\mp)}v}{\partial \xi} = \gamma Q_1^{(\mp)}v - Q_1^{(\mp)}u$$

Здесь $A(\theta, t)$ - коэффициент при $\frac{\partial}{\partial \xi}$ в дифференциальном операторе L_1 , заданном выражением (5.11). Уравнения для функции $Q_1^{(-)}v$ определены при $\xi \leq 0$, а для функции $Q_1^{(+)}v$ - при $\xi \geq 0$.

После подстановки известных функций $Q_0^{(\mp)}v(\xi, \theta, t)$ и $Q_1^{(\mp)}u(\xi, \theta, t)$ при-

дем к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_1^{(-)}v}{\partial \xi^2} - \gamma Q_1^{(-)}v &= -\frac{\varphi^1(t)}{\sqrt{\gamma}} A(\theta, t) e^{\sqrt{\gamma}\xi} - \frac{e^{\sqrt{\gamma}\xi}}{\gamma(\varphi^3(0, \rho_0, \theta) - \varphi^1(t))}, \\ \frac{\partial^2 Q_1^{(+)}v}{\partial \xi^2} - \gamma Q_1^{(+)}v &= \frac{\varphi^3(0, \rho_0, \theta)}{\sqrt{\gamma}} A(\theta, t) e^{-\sqrt{\gamma}\xi} + \frac{e^{-\sqrt{\gamma}\xi}}{\gamma(\varphi^3(0, \rho_0, \theta) - \varphi^1(t))}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

которые будем решать с дополнительными условиями

$$Q_1^{(\mp)}v(\mp\infty, \theta, t) = 0,$$

$$Q_1^{(\mp)}v(0, \theta, t) = v_1(\theta, t) - \bar{v}_1^{(\mp)}(0, \rho_0, \theta, t),$$

где $v_1(\theta, t)$ - второе слагаемое суммы (5.5). Решения уравнений (5.20) можно

выписать в явном виде:

$$\begin{aligned} Q_1^{(-)}v(\xi, \theta, t) &= \left(v_1 + \frac{1}{\gamma^2(\varphi^3(0, \rho_0, t) - \varphi^1(t))} \right) e^{\xi\sqrt{\gamma}} + \\ &+ \xi e^{\xi\sqrt{\gamma}} \left(-A(\theta, t) \frac{\varphi^1(t)}{2\gamma} - \frac{1}{2\gamma\sqrt{\gamma}(\varphi^3(0, \rho_0, \theta) - \varphi^1(t))} \right), \\ Q_1^{(+)}v(\xi, \theta, t) &= \left(v_1 - \frac{1}{\gamma^2(\varphi^3(0, \rho_0, t) - \varphi^1(t))} \right) e^{-\xi\sqrt{\gamma}} + \\ &+ \xi e^{-\xi\sqrt{\gamma}} \left(A(\theta, t) \frac{\varphi^3(0, \rho_0, \theta)}{2\gamma} + \frac{1}{2\gamma\sqrt{\gamma}(\varphi^3(0, \rho_0, \theta) - \varphi^1(t))} \right). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Условие непрерывности асимптотических разложений (5.18) для v -компоненты

в нулевом порядке по ε дает равенство

$$\frac{\partial \bar{v}_0^{(-)}}{\partial r}(0, \rho_0, \theta, t) + \frac{\partial Q_1^{(-)}v}{\partial \xi}(0, \theta, t) = \frac{\partial \bar{v}_0^{(+)}}{\partial r}(0, \rho_0, \theta, t) + \frac{\partial Q_1^{(+)}v}{\partial \xi}(0, \theta, t).$$

Подставим в равенства выражения (5.7) и (5.21) и найдем функцию $v_1(\theta, t)$:

$$v_1(\theta, t) = \frac{1}{2\gamma^2(\varphi^3(0, \rho_0, \theta) - \varphi^1(t))} + \frac{1}{2\gamma\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \varphi^3}{\partial r}(0, \rho_0, \theta). \quad (5.22)$$

Введем обозначения

$$\tilde{f}_u(\xi, \theta, t) := \begin{cases} f_u \left(\bar{u}_0^{(-)}(0, \rho_0, \theta, t), \bar{v}_0^{(-)}(0, \rho_0, \theta, t) + \right. \\ \left. + Q_0^{(-)} v(\xi, \theta, t), 0, \rho_0, \theta, t, 0 \right), & \xi \leq 0 \\ f_u \left(\bar{u}_0^{(+)}(0, \rho_0, \theta, t), \bar{v}_0^{(+)}(0, \rho_0, \theta, t) + \right. \\ \left. + Q_0^{(+)} v(\xi, \theta, t), 0, \rho_0, \theta, t, 0 \right), & \xi \geq 0 \end{cases}$$

$$\hat{f}_u(\sigma, \theta, t) := f_u(\tilde{u}(\sigma, \theta, t), v_0, 0, \rho_0, \theta, t, 0),$$

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \rho^*}(\sigma, \theta, t) := \frac{\partial f}{\partial \rho^*}(\tilde{u}(\sigma, \theta, t), v_0, 0, \rho_0, \theta, t, 0),$$

где функция $f(u, v, r, \rho^*, \theta, t, \varepsilon)$ задана выражением (5.10)

Функции $M_1^{(\mp)} u(\sigma, \theta, t)$ определяются из задач

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 M_1^{(\mp)} u}{\partial \sigma^2} - \hat{f}_u(\sigma, \theta, t) M_1^{(\mp)} u = F(\sigma, \theta, t), \\ M_1^{(\mp)} u(0, \theta, t) = -\omega^{(\mp)}(\theta, t), \quad M_1^{(\mp)} u(\mp\infty, \theta, t) = 0. \end{cases}$$

где

$$F(\sigma, \theta, t) = \hat{f}_u(\sigma, \theta, t) \omega^{(\mp)}(\theta, t) + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \rho^*}(\sigma, \theta, t) \rho_1 -$$

$$- \tilde{f}_u(0, \theta, t) \left(\bar{u}_1^{(\mp)}(0, \rho_0, \theta, t) + Q_1^{(\mp)} u(0, \theta, t) \right),$$

$$\omega^{(\mp)}(\theta, t) = \bar{u}_1^{(\mp)}(0, \rho_0, \theta, t) + Q_1^{(\mp)} u(0, \theta, t) + \frac{\partial \bar{u}_0^{(\mp)}}{\partial \rho^*}(0, \rho_0, \theta, t) \cdot \rho_1.$$

Здесь через ρ_1 обозначена функция $\rho_1(\theta, t)$, входящая в сумму (5.8). Ре-

шения задач (26) можно выписать в явном виде:

$$M_1^{(\mp)} u(\sigma, \theta, t) = -\Psi(\sigma, \theta, t) \Psi^{-1}(0, \theta, t) \omega^{(\mp)}(\theta, t) +$$

$$+ \Psi(\sigma, \theta, t) \int_0^\sigma \Psi^{-2}(\sigma_1, \theta, t) d\sigma_1 \times \int_{\mp\infty}^{\sigma_1} \Psi(\sigma_2, \theta, t) F(\sigma_2, \theta, t) d\sigma_2,$$

где $\Psi(\sigma, \theta, t) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \sigma}(\sigma, \theta, t).$

В выражения (27) входит неизвестная функция $\rho_1(\theta, t)$, которую можно определить из условия сшивания производных (5.18) для u -компоненты в порядке $O(\varepsilon^{-1})$

$$\frac{\partial M_1^{(-)} u}{\partial \sigma}(0, \theta, t) = \frac{\partial M_1^{(+)} u}{\partial \sigma}(0, \theta, t).$$

Выпишем производные $\frac{\partial M_1^{(\mp)} u}{\partial \sigma}(0, \theta, t)$, используя выражения (27):

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_1^{(\mp)} u}{\partial \sigma}(0, \theta, t) &= -\frac{\partial \Psi}{\partial \sigma}(0, \theta, t) \Psi^{-1}(0, \theta, t) \omega^{(\mp)}(\theta, t) + \\ &+ \Psi^{-1}(0, \theta, t) \int_{\mp\infty}^0 \Psi(\sigma, \theta, t) F(\sigma, \theta, t) d\sigma. \end{aligned}$$

Справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma}(0, \theta, t) &= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \sigma^2}(0, \theta, t) = f(0, v_0, 0, \rho_0, \theta, t) = 0, \\ \int_{\mp\infty}^0 \Psi(\sigma, \theta, t) \hat{f}_u(\sigma, \theta, t) d\sigma &= \int_{\mp\infty}^0 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \sigma} f_u(\tilde{u}, v_0, \rho_0, \theta, t) d\sigma = f(u, v_0, 0, \rho_0, \theta, t)|_{\varphi^{1,3}}^0 = 0, \\ \int_{-\infty}^0 \Psi(\sigma, \theta, t) d\sigma &= -\varphi^1(t), \\ \int_{+\infty}^0 \Psi(\sigma, \theta, t) d\sigma &= -\varphi^3(0, \rho_0, \theta). \end{aligned}$$

Подставим в (28) выражения (29), учитывая равенства (30), и придем к уравнению относительно $\rho_1(\theta, t)$:

$$\begin{aligned} &\tilde{f}_u(0, \theta, t) \varphi^1(t) \left(\bar{u}_1^{(-)}(0, \rho_0, \theta, t) + Q_1^{(-)} u(0, \theta, t) \right) + \\ &+ \tilde{f}_u(0, \theta, t) \varphi^3(0, \rho_0, \theta) \left(\bar{u}_1^{(+)}(0, \rho_0, \theta, t) + Q_1^{(+)} u(0, \theta, t) \right) + \\ &+ \rho_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\sigma, \theta, t) \frac{\partial \hat{f}}{\partial \rho^*}(\sigma, \theta, t) d\sigma = 0. \end{aligned}$$

Из равенств (5.19) с учетом краевых условий для функций $Q_1^{(\mp)}v(\xi, \theta, t)$ при $\xi = 0$ получим

$$\begin{aligned}\varphi^1(t) \left(\bar{u}_1^{(-)}(0, \rho_0, \theta, t) + Q_1^{(-)}u(0, \theta, t) \right) &= -\frac{v_1(\theta, t)}{\varphi^3(0, \rho_0, \theta) - \varphi^1(t)}, \\ \varphi^3(0, \rho_0, \theta) \left(\bar{u}_1^{(+)}(0, \rho_0, \theta, t) + Q_1^{(+)}u(0, \theta, t) \right) &= \frac{v_1(\theta, t)}{\varphi^3(0, \rho_0, \theta) - \varphi^1(t)}.\end{aligned}$$

Уравнение для $\rho_1(\theta, t)$ принимает вид

$$\rho_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\sigma, \theta, t) \frac{\partial \hat{f}}{\partial \rho^*}(\sigma, \theta, t) d\sigma = 0.$$

Найдем производную $\frac{\partial \hat{f}}{\partial \rho^*}(\sigma, \theta, t)$, дифференцируя функцию $f(\tilde{u}, v_0, 0, \rho^*, \theta, t, 0)$,

заданную выражением (5.10):

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \rho^*}(\sigma, \theta, t) = \frac{\partial \varphi^3}{\partial \rho^*}(0, \rho_0, \theta) \cdot \tilde{u}(\sigma, \theta, t) (\tilde{u}(\sigma, \theta, t) - \varphi^1(t)).$$

Вычислим интеграл:

$$\begin{aligned}& \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\sigma, \theta, t) \frac{\partial \hat{f}}{\partial \rho^*}(\sigma, \theta, t) d\sigma = \\ &= \frac{\partial \varphi^3}{\partial \rho^*}(0, \rho_0, \theta) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(\sigma, \theta, t) (\tilde{u}(\sigma, \theta, t) - \varphi^1(t)) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \sigma} d\sigma = \\ &= \frac{\partial \varphi^3}{\partial \rho^*}(0, \rho_0, \theta) \int_{\varphi^1(t)}^{\varphi^3(0, \rho_0, \theta)} (\tilde{u}^2 - \tilde{u}\varphi^1(t)) d\tilde{u} = \\ &= \frac{1}{3} \frac{\partial \varphi^3}{\partial \rho^*}(0, \rho_0, \theta) (\varphi^3(0, \rho_0, \theta) - \varphi^1(t)) \times (\varphi^3(0, \rho_0, \theta))^2 \neq 0.\end{aligned}$$

Коэффициент при ρ_1 в уравнении (31) отличен от нуля по условиям 1 и 3 (при вычислении интеграла было использовано условие 2, поэтому уравнение имеет только тривиальное решение

$$\rho_1(\theta, t) = 0.$$

Выпишем выражения для функций $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ - асимптотического приближения решения:

$$u(x, y, t) = \begin{cases} \tilde{u}\left(\frac{r}{\varepsilon^2}, \theta, t\right) + \varepsilon \bar{u}_1^{(-)}(x, y, t) + \varepsilon Q_1^{(-)} u\left(\frac{r}{\varepsilon}, \theta, t\right) + \varepsilon M_1^{(-)} u\left(\frac{r}{\varepsilon^2}, \theta, t\right), \\ \sqrt{x^2 + y^2} \geq \rho_0(\theta, t) \\ \tilde{u}\left(\frac{r}{\varepsilon^2}, \theta, t\right) - \varphi^3(0, \rho_0, \theta) + \varphi^3(x, y) + \varepsilon \bar{u}_1^{(+)}(x, y, t) + \\ + \varepsilon Q_1^{(+)} u\left(\frac{r}{\varepsilon}, \theta, t\right) + \varepsilon M_1^{(+)} u\left(\frac{r}{\varepsilon^2}, \theta, t\right), \sqrt{x^2 + y^2} \leq \rho_0(\theta, t) \end{cases}$$

$$v(x, y, t) = \begin{cases} \gamma^{-1} \varphi^1(t) \left(1 - \exp\left(\sqrt{\gamma} \frac{r}{\varepsilon}\right)\right) + \varepsilon \bar{v}_1^{(-)}(x, y, t) + \\ + Q_1^{(-)} v\left(\frac{r}{\varepsilon}, \theta, t\right), \sqrt{x^2 + y^2} \geq \rho_0(\theta, t), \\ \gamma^{-1} \varphi^3(x, y) \left(1 - \exp\left(-\sqrt{\gamma} \frac{r}{\varepsilon}\right)\right) + \varepsilon \bar{v}_1^{(+)}(x, y, t) + \\ + Q_1^{(+)} v\left(\frac{r}{\varepsilon}, \theta, t\right), \\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq \rho_0(\theta, t). \end{cases}$$

Под r в формулах подразумевается локальная координата в окрестности кривой C .

5.5 Пример

Рассмотрим пример задачи (5.2). Пусть область \bar{D} — это круг $x^2 + y^2 \leq 0.9$ и пусть функции $\varphi^1(t)$ и $\varphi^3(x, y)$ задаются выражениями $\varphi^1(t) = -0.75 - 0.125 \cos(2\pi t)$, $\varphi^3(x, y) = \frac{11}{12} - x^2 - y^2$. Для функций $\varphi^1(t)$, $\varphi^3(x, y)$ в области D выполнены условия 1 – 3. Функция $\rho_0(\theta, t)$, задающая положение фронта в нулевом порядке, определяется из уравнения (5.17): $\rho_0(\theta, t) = \sqrt{\frac{1}{6} - \frac{\cos 2\pi t}{8}}$.

Уравнение кривой фронта $\rho = \rho_0(\theta, t)$ не зависит от θ , поэтому $\frac{\partial \rho_0}{\partial \theta} = 0$.

Можно показать, что в этом случае $\alpha_\theta = 0$ и коэффициент $A(\theta, t)$ в выражении (5.21) для функции $Q_1^{(\mp)}(\xi, \theta, t)$ принимает вид $A(\theta, t) = (\rho_{0t}(\theta, t) - \rho_0(\theta, t))$.

Если $\rho_{0\theta} = 0$ и $\rho_1(\theta, t) = 0$, то формулы (5.9) перехода к локальным координатам упрощаются: $x = (\rho_0(\theta, t) - r) \cos \theta$, $y = (\rho_0(\theta, t) - r) \sin \theta$. Из этих

соотношений можно выразить r : $r = \rho_0(\theta, t) - \sqrt{x^2 + y^2}$

Вычислим $v_1(\theta, t)$ по формуле:

$$\begin{aligned} v_1(\theta, t) &= \frac{1}{2\gamma^2 (\varphi^3(0, \rho_0, \theta) - \varphi^1(t))} + \frac{1}{2\gamma\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \varphi^3}{\partial r}(0, \rho_0, \theta) = \\ &= \frac{2}{\gamma^2(6 + \cos 2\pi t)} + \frac{1}{2\gamma\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{11}{12} - (\rho_0(\theta, t) - r)^2 \right) \Big|_{r=0} = \\ &= \frac{\rho_0(\theta, t)}{\gamma^2(6 + \cos 2\pi t)} - \frac{\rho_0(\theta, t)}{\gamma\sqrt{\gamma}}. \end{aligned}$$

Период T изменения решения задается периодом функции $\varphi^1(t)$ и равен 1.

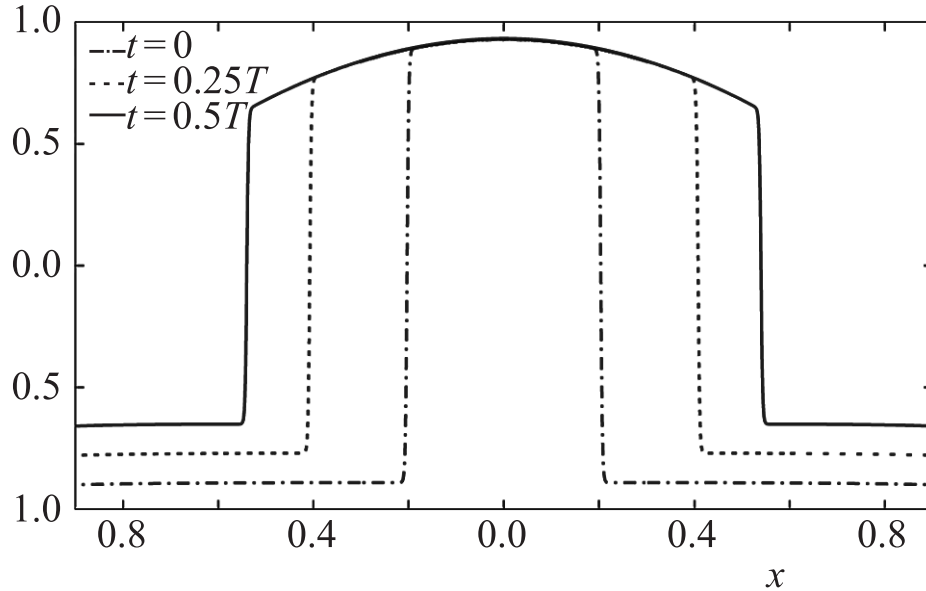


Рисунок 5.1 — Сечение асимптотики первого порядка $u(x, y, t)$ при $y = 0$ в различные моменты времени. Параметры: $\varepsilon = 0.05$, $\gamma = 2$

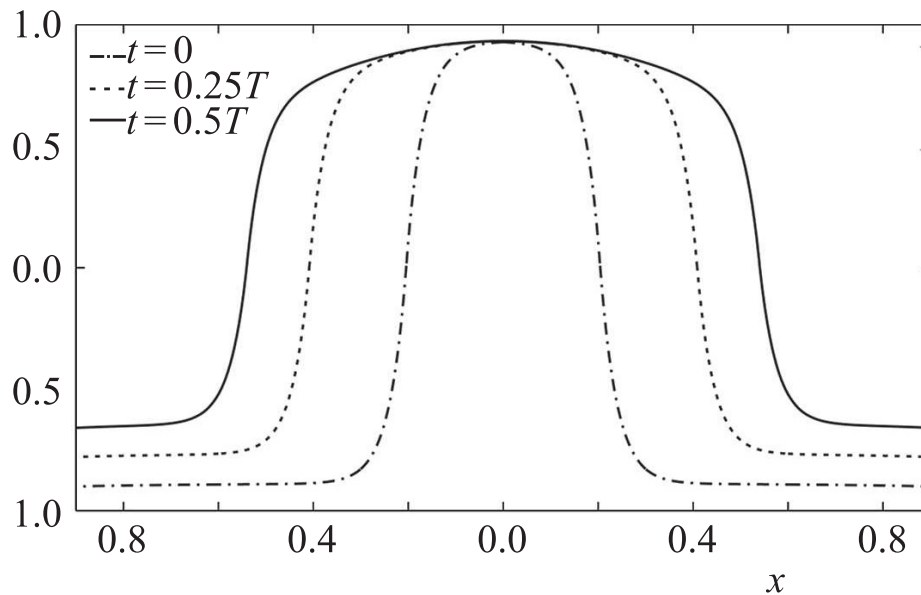


Рисунок 5.2 — Рис. 2. Сечение асимптотики первого порядка $v(x, y, t)$ при $y = 0$ в различные моменты времени. Параметры: $\varepsilon = 0.05, \gamma = 2$

Получено асимптотическое приближение периодического решения задачи с внутренним переходным слоем. Внутренний слой локализован в окрестности замкнутой кривой, которая с точностью $O(\varepsilon^2)$ задается функцией $\rho_0(\theta, t)$. Скорость фронта $W(\theta, t)$ определяется производной $\frac{\partial \rho_0}{\partial t}(\theta, t)$.

Полученное решение обладает четкой структурой: внутри кривой фронта решение для u -компоненты близко к функции $\varphi^3(x, y)$, а вне кривой - к периодической функции $\varphi^1(t)$ (для v -компоненты наблюдается аналогичная структура решения). Отметим, что переходный слой v -компоненты сосредоточен в ε -окрестности кривой перехода, тогда как для u -компоненты слой локализован в ε^2 -окрестности кривой.

Приведенный метод построения асимптотического приближения решения может применяться для анализа моделей автоволновых процессов в активных средах и получения приближенного решения модели урбоэкосистемы.

Заключение

Диссертационная работа посвящена теоретическому исследованию контрастных структур в нелинейных двухкомпонентных системах с сингулярным возмущением в нескольких возможных постановках:

- с внутренним переходным слоем и пограничным переходным слоем
- с сингулярным возмущением в дифференциальном операторе и в граничных условиях задачи.

Для исследования указанных задач применены метод пограничных функций и метод дифференциальных неравенств. Построена формальная асимптотика, проведено доказательство корректности построенной асимптотики, ее существования, локальной единственности и асимптотической устойчивости по Ляпунову.

Перечислим основные результаты работы.

- Для параболической задачи реакция-диффузия с условиями Неймана получены условия, при которых существуют решения с пограничным переходным слоем, позволяющие не требовать условия квазимонотонности. Таким образом расширен класс задач, для которых применимы стандартные методы асимптотической теории
- Разработан алгоритм построения асимптотических разложений для двухкомпонентных систем с разными степенями малого параметра с

сингулярным возмущением в операторе и в граничных условиях, с внутренним и пограничным переходными слоями

- Для построенных решений доказаны теоремы существования, локальной единственности и асимптотической устойчивости по Ляпунову
- На примере задач биофизики и химической кинетики показана применимость разработанных алгоритмов

Результаты, предложенные в диссертационной работе, могут быть применены в качестве основы для исследования более сложных задач.

Список литературы

1. *Тихонов А. Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Матем. сб. — 1948. — Т. 22(64), № 2. — С. 193—204.
2. *Тихонов А. Н.* О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры // Матем. сб. — 1950. — Т. 27(69), № 1. — С. 147—156.
3. *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Матем. сб. — 1952. — Т. 31(73), № 3. — С. 575—586.
4. *Васильева А., Бутузов В.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — Высшая школа Москва, 1990.
5. Применение теории контрастных структур для описания поля скорости ветра в пространственно-неоднородном растительном покрове / Н. Левашова [и др.] // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2015. — № 3. — С. 3—10.
6. Популяционная модель урбоэкосистем в представлениях активных сред / А. Сидорова [и др.] // Биофизика. — 2015. — Т. 60, № 30. — С. 574—582.
7. *Butuzov V., Nefedov N., Schneider K.* Singularly Perturbed Boundary Value Problems Modelling Fast Bimolecular Reactions // IFAC Proceedings Volumes. — 1997. — Т. 30, № 10. — С. 55—57.

8. *Бутузов В. Ф., Левашова Н. Т., Мельникова А. А.* Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе уравнений с различными степенями малого параметра // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2012. — Т. 52, № 11. — С. 1983—2003.
9. *Мельникова А.* Существование и устойчивость периодического решения типа фронта в двухкомпонентной системе параболических уравнений // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* — 2019. — Т. 59, № 7. — С. 1184—1200.
10. Periodic solutions with a boundary layer of reaction–diffusion equations with singularly perturbed neumann boundary conditions / V. Butuzov [и др.] // *International Journal of Bifurcation and Chaos.* — 2014. — Т. 24, № 8. — С. 1440019-1 - 1440019—8.
11. *Нефедов Н., Никулин Е.* Существование и устойчивость периодических решений с пограничным слоем в двумерной задаче реакция–диффузия в случае сингулярно возмущенных граничных условий второго рода // *Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия.* — 2020. — № 2. — С. 15—20.
12. *Нефедов Н., Никулин Е.* О периодических решениях с пограничным слоем в задаче реакция–диффузия с сингулярно возмущенными граничными условиями третьего рода // *Дифференциальные уравнения.* — 2020. — Т. 56, № 12. — С. 1641—1650.

13. *Нефедов Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов сингулярно возмущенных уравнений в частных производных // Дифференциальные уравнения. — 1995. — № 4. — С. 719—723.
14. *Нефедов Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Дифференциальные уравнения. — 1995. — Т. 31, № 7. — С. 1132—1139.
15. *Pao C. V.* Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. — Plenum Press, 1992. — С. 777.
16. *Aman H.* Supersolutions, monotone iterations and stability // J. Differential Equations. — 1976. — Т. 21, № 2. — С. 363—377.
17. *Нефёдов Н. Н., Волков В. Т.* Развитие асимптотического метода дифференциальных неравенств для исследования периодических контрастных структур в уравнениях реакция-диффузия // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2006. — Т. 46, № 4. — С. 615—623.
18. *Бутузов В., Нефедов Н., Шнайдер К.* О формировании и распространении резких переходных слоев в параболических задачах // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2005. — № 1. — С. 9—13.
19. *Nefedov N.* Spike-type contrast structures in reaction-diffusion systems // Journal of Mathematical Sciences. — 2008. — Т. 150, № 6. — С. 2540—2549.

20. *Nefedov N.* Comparison principle for reaction-diffusion-advection problems with boundary and internal layers // *Lecture Notes in Computer Science*. — 2013. — Т. 8236. — С. 62–72.
21. *Nefedov N. N., Recke L., Schnieder K. R.* Existence and asymptotic stability of periodic solutions with an interior layer of reactionadvection-diffusion equations // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. — 2013. — Т. 405. — С. 90–103.
22. *Нефедов Н. Н.* Асимптотический метод дифференциальных неравенств в исследовании периодических контрастных структур: существование, асимптотика, устойчивость // *Дифференциальные уравнения*. — 2000. — Т. 36, № 2. — С. 262–269.
23. Решение вида движущегося фронта двумерной задачи реакция-диффузия / *Е. А. Антипов [и др.]* // *Моделирование и анализ информационных систем*. — 2017. — Т. 24, № 3.
24. *Давыдова М. А., Нефедов Н. Н.* Существование и устойчивость контрастных структур в многомерных задачах реакция-диффузия-адвекция в случае сбалансированной нелинейности // *Моделирование и анализ информационных систем*. — 2017. — Т. 24, № 1. — С. 31–38.
25. *Антипов Е. А., Левашова Н. . Т., Нефедов Н. Н.* Асимптотическое приближение решения уравнения реакция-диффузия-адвекция с нелинейным

- адвективным слагаемым // Моделирование и анализ информационных систем. — 2018. — Т. 25, № 1. — С. 18—32.
26. *Левашова Н., Нефедов Н., Николаева О.* Существование и асимптотическая устойчивость стационарного погранслоного решения двумерной задачи реакция-диффузия-адвекция // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т. 56, № 2. — С. 204—216.
27. *Нефёдов Н. Н., Никитин А. Г.* Метод дифференциальных неравенств для контрастных структур типа ступеньки в сингулярно возмущённых интегро-дифференциальных уравнениях в пространственно двумерном случае // Дифференциальные уравнения. — 2000. — Т. 42, № 5. — С. 690—700.
28. *Нефёдов Н. Н., Никитин А. Г.* Развитие асимптотического метода дифференциальных неравенств для решений типа ступеньки в сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнениях // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2001. — Т. 41, № 7. — С. 1057—1066.
29. *Нефедов Н.* Развитие методов асимптотического анализа переходных слов в уравнениях реакция-диффузия-адвекция: теория и применение // Ж. Вычисл. матем. и матем. физ. — 2021. — Т. 61, № 12. — С. 2074—2094.
30. *Васильева А.Б. and Бутузов В.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — Наука, 1973.

31. *Бутузов В.Ф. Васильева А.Б. Н.* Асимптотическая теория контрастных структур. — 1997.
32. *Pao C.* Periodic solutions of parabolic systems with nonlinear boundary conditions // *J. Math. Anal. Appl.* — 1992. — Т. 234, № 2. — С. 759—774.
33. *Dong G.* *Nonlinear Partial Differential Equations of Second Order*, — Providence: Am. Math. Soc., 2008.
34. *Левашова Н., Нефедов Н., Орлов А.* АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИЯ-ДИФфуЗИЯ С РАЗРЫВНЫМ ИСТОЧНИКОМ // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2019. — Т. 59, № 4. — С. 611—622.
35. Модель структурообразования урбоэкосистем как процесс автоволновой самоорганизации в активных средах / А. Э. Сидорова [и др.] // Математическая биология и биоинформатика. — 2017. — Т. 12, № 1. — С. 186—197.
36. *Murray J. D.* *Mathematical Biology II*. — New York: Springer-Verlag, 2003.
37. *Meinhardt H.* *Models of Biological Pattern Formation* (Academic Press, London, 1982). — 05.1982.
38. *FitzHugh R.* Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane // *Biophysical Journal*. — 1961. — Т. 1, № 6. — С. 445—466. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0006349561869026>.

39. Dynamics of spatially nonuniform patterning in the model of blood coagulation / V. I. Zarnitsina [и др.] // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2001. — Т. 11, № 1. — С. 57–70. — eprint: <https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.1345728>. — URL: <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.1345728>.
40. *Ham Y.* Internal layer oscillations in FitzHugh-Nagumo equation // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 1999. — Т. 103, № 2. — С. 287–295. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042798002647>.
41. *Hagberg A., Meron E.* Complex patterns in reaction-diffusion systems: A tale of two front instabilities // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 1994. — Т. 4, № 3. — С. 477–484. — eprint: <https://doi.org/10.1063/1.166047>. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.166047>.
42. *Wu SL. and Zhao H., Liu S.* Asymptotic stability of traveling waves for delayed reaction-diffusion equations with crossing-monostability // *Z. Angew. Math. Phys.* — 2011. — Т. 62. — С. 377–397.
43. Пороговая активация свертывания крови и рост тромба в условиях кровотока / А. Чуличков [и др.] // *Математическое моделирование*. — 2000. — Т. 12, № 3. — С. 75.

44. *Prum R. O., Williamson S.* Reaction–diffusion models of within-feather pigmentation patterning // Proceedings of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences. — 2002. — Т. 269, № 1493. — С. 781–792. — eprint: <https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rspb.2001.1896>. — URL: <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspb.2001.1896>.
45. *Медведев А. М.* Электронные компоненты и монтажные подложки [Электронный ресурс]. — 2006. — URL: http://www.kit-e.ru/articles/elcomp/2006%5C_12%5C_124.php (дата обр. 19.01.2015).
46. *В. Ф. Бутузов Н. Н. Н.* Об одной задаче теории сингулярных возмущений // Дифференциальные уравнения. — 1976. — Т. 12, № 10. — С. 1736–1747.
47. *Kumar M. S. A.* Singular perturbation problems in nonlinear elliptic partial differential equations: a survey. — 2014.
48. *Васильева А.Б. Бутузов В.Ф. Н. Н.* Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах. Т. 4. — 1997. — С. 799–851.
49. *Butuzov V.F. Nefedov N.N. S. K.* Singularly Perturbed Problems in Case of Exchange of Stabilities // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — Т. 121. — С. 1973–2079.

50. *Васильева А.Б. Бутузов В.Ф. Н. Н.* Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями // Дифференциальные уравнения и топология. — 2010.
51. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук. — 1957. — Т. 12, 5(77). — С. 3—122.
52. *Aman H.* On the number of solutions of nonlinear equations in ordered Banach spaces // J. Funct. Anal. — 1972. — Т. 11, № 3. — С. 346—384.
53. *Nefedov N.* An asymptotic method of differential inequalities for the investigation of periodic contrast structures: Existence, asymptotics, and stability // Differ. Equations. — 2000. — Т. 36, № 2. — С. 298—305.
54. *Nefedov N., Recke L., Schneider K.* Existence and asymptotic stability of periodic solutions with an interior layer of reaction-advection-diffusion equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2013. — Т. 405, № 1. — С. 90—103.
55. *Parker A.* On the periodic solution of the Burgers equation: a unified approach // Proceedings: Mathematical and Physical Sciences. — 1992. — С. 113—132.

56. *Zhukovsky K.* Operational solution for some types of second order differential equations and for relevant physical problems // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2017. — T. 446, № 1. — C. 628—647.
57. *Zhukovsky K.* Exact harmonic solution to ballistic type heat propagation in thin films and wires // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2018. — T. 120. — C. 944—955.
58. *Zhukovsky K.* Solution for the Hyperbolic Heat Conduction Equation and Its Relationship to the Guyer–Krumhansl Equation // Moscow University Physics Bulletin. — 2018. — T. 73, № 1. — C. 45—52.
59. *Zhukovsky K.* The operational solution of fractional-order differential equations, as well as Black–Scholes and heat-conduction equations // Moscow University Physics Bulletin. — 2016. — T. 71, № 3. — C. 237—244.
60. *Cole J.* On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics // Quarterly of Applied Mathematics. — 1951. — T. 9. — C. 225—263.
61. *Malfliet W.* Approximate solution of the damped Burgers equation // J. Phys. A: Math. Gen. — 1993. — T. 26, № L1. — C. 723—728.
62. *Nefedov N. N., Rudenko O. V.* On front motion in a Burgers-type equation with quadratic and modular nonlinearity and nonlinear amplification // Doklady Mathematics. — 2018. — T. 97. — C. 99—103.

63. *Nefedov N. N., Levashova N. T., O. O.* The asymptotic stability of a stationary solution with an internal transition layer to a reaction–diffusion problem with a discontinuous reactive term // *Moscow University Physics Bulletin*. — 2018. — Т. 73, № 6. — С. 565–572.
64. *Barenblatt G., Entov V., Ryzhik V.* Theory of fluid flows through natural rocks. — Kluwer Academic Publishers, 1991.
65. *Nefedov N., Sakamoto K.* Multi-dimensional stationary internal layers for spatially inhomogeneous reaction-diffusion equations with balanced nonlinearity // *Hiroshima Mathematical Journal*. — 2003. — Т. 33, № 3. — С. 391–432.
66. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н.* Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // *Фундамент. и прикл. матем.* — 1998. — Т. 4, № 3. — С. 799–851.
67. *Левашова Н. Т., Мельникова А. А.* Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе параболических уравнений // *Дифференциальные уравнения*. — М., 2015. — Т. 51, № 3. — С. 339–358.
68. *Butuzov V. F., Levashova N. T., Mel'nikova A. A.* A steplike Contrast Structure in a Singularly Perturbed System of Elliptic Equation // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — Road Town, United Kingdom, 2013. — Vol. 53, no. 9. — P. 1239–1259.

Публикации автора по теме диссертации

69. *Nefedov N. N., Deryugina N. N.* Existence and stability of a stable stationary solution with a boundary layer for a system of reaction–diffusion equations with Neumann boundary conditions // Theoretical and Mathematical Physics. — Road Town, United Kingdom, 2022. — Vol. 212, no. 1. — P. 962—971.
70. *Нефедов Н. Н., Дерюгина Н. Н.* СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НЕЙМАНА // Теоретическая и математическая физика. — Москва, 2022. — Т. 212, № 1. — С. 83—94.
71. *Melnikova A. A., Deryugina N. N.* Existence of a Periodic Solution in the Form of a Two-Dimensional Front in a System of Parabolic Equations // Differential Equations. — New York, USA, 2020. — Vol. 56, no. 4. — P. 462—477.
72. *Nefedov N. N., Nikulin E. I., N. N. D.* Periodic and stationary solutions of nonlinear reaction-diffusion problems with singularly perturbed boundary conditions // Second International Conference on Integrable Systems & Nonlinear Dynamics ISND–2020. — Yaroslavl: Filigran, 2020. — P. 82—83.
73. *Nefedov N. N., Deryugina N. N.* The Existence of a Boundary-Layer Stationary Solution to a Reaction–Diffusion Equation with Singularly Perturbed Neumann

- Boundary Condition // Moscow University Physics Bulletin. — New York, N.Y., United States, 2020. — Vol. 75, no. 5. — P. 409—414.
74. *Мельникова А. А., Дерюгина Н. Н.* Существование периодического решения в виде двумерного фронта в системе параболических уравнений // Дифференциальные уравнения. — М., 2020. — Т. 56, № 4. — С. 475—489.
75. *Нефедов Н. Н., Дерюгина Н. Н.* Существование стационарного погранслоеного решения в уравнении реакция—диффузия с сингулярным граничным условием Неймана // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — М., 2020. — № 5. — С. 30—34.
76. *Melnikova A., Deryugina N.* Boundary layer solution for an elliptic problem with a singular Neumann boundary condition // 2nd International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences. Belgorod-Russia, August 20-24, 2019. — Belgorod-Russia, 2019. — P. 18—19.
77. *Дерюгина Н. Н.* Система периодических параболических уравнений с малым параметром как модель сезонного изменения туристической активности // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2019» / под ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов. — Москва : Москва, 2019.
78. *Melnikova A. A., Derugina N. N.* The Dynamics of the Autowave Front in a Model of Urban Ecosystems // Moscow University Physics Bulletin. — New York, N.Y., United States, 2018. — Vol. 73, no. 3. — P. 284—292.

79. *Melnikova A. A., Derugina N. N.* The Problem of the Front Motion to a Nonlinear System of Equations // FDM'18: Seventh Conference on Finite Difference Methods: Theory and Applications. — Univesty of Rouse, Bulgaria, 2018. — P. 32—32.
80. *Мельникова А. А., Дерюгина Н. Н.* Задача движения двумерного фронта для нелинейной системы параболических уравнений // Международная конференция "Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения" : сборник тезисов (г . Уфа, 12 – 16 марта 2018 г.) — БГПУ Уфа, 2018. — С. 54—54.
81. *Мельникова А. А., Дерюгина Н. Н.* Задача о периодическом движении фронта: вопросы существования и асимптотики решения // ЛОМО-НОВСКИЕ ЧТЕНИЯ - 2018. СЕКЦИЯ ФИЗИКИ. Сборник тезисов докладов / под ред. Н.Н. Сысоева. — Физический факультет МГУ Москва, 2018. — С. 95—97.
82. *Мельникова А. А., Дерюгина Н. Н.* Обоснование модели движения фронта в неоднородной среде для двухкомпонентной системы // Тезисы докладов IX Всероссийской конференции "Актуальные проблемы прикладной математики и механики" с международным участием, посвященная памяти академика А.Ф. Сидорова (Абрау-Дюрсо, 3-8 сентября 2018 г.) — ИММ УРО РАН Екатеринбург, 2018. — С. 53—54.

83. Мельникова А. А., Дерюгина Н. Н. Периодические изменения автоволнового фронта в двумерной системе параболических уравнений // Моделирование и анализ информационных систем. — Ярославль, 2018. — Т. 25, № 1. — С. 112—124.
84. Мельникова А. А., Дерюгина Н. Н. Динамика движения автоволнового фронта в модели развития урбоэкосистемы // Тихоновские чтения: научная конференция: тезисы докладов (23 октября - 27 октября 2017 г.) — МАКС Пресс Москва, 2017. — С. 73—73.
85. Autowave Self-Organization in Heterogeneous Natural–Anthropogenic Ecosystems / A. E. Sidorova [et al.] // Moscow University Physics Bulletin. — New York, N.Y., United States, 2016. — Vol. 71, no. 6. — P. 562—568.
86. Автоволновая самоорганизация в неоднородных природно-антропогенных экосистемах / А. Э. Сидорова [и др.] // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — М., 2016. — № 6. — С. 39—45.
87. Механизмы автоволновой самоорганизации в природно-антропогенных экосистемах / А. Э. Сидорова [и др.] // Материалы XI международной научно-технической конференции "АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ХИМИИ" (Севастополь, 25-29 апреля 2016). Т. 1. — Севастопольский государственный университет г. Севастополь г. Севастополь, 2016. — С. 115—120.

88. Механизмы автоволновой самоорганизации в природно-антропогенных экосистемах / Актуальные вопросы биологической физики и химии. БФФХ-2016: материалы XI международной научно-технической конференции, г. Севастополь, 25-29 апреля 2016 г.: в 2 т / А. Э. Сидорова [и др.] // АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ХИМИИ БФФХ – 2016 Материалы XI международной научно-технической конференции г. Севастополь, 25-29 апреля 2016 г. Т. 1. — г. Севастополь, 2016. — С. 115—119.
89. Автоволновая самоорганизация в природно-антропогенных экосистемах / А. Э. Сидорова [и др.] // Труды школы-семинара "Физика и применение микроволн" ("Волны-2015"). — <http://waves.phys.msu.ru>, 2015. — С. 91—91. — (Спектроскопия, диагностика и томография).
90. Модель урбоэкосистем как сопряженных активных сред / Н. Н. Дерюгина [и др.] // Материалы тезисов V съезда биофизиков (Ростов-на-Дону, 4-10 октября 2015). Т. 2. — Издательство Федерального южного университета, 2015. — С. 355—355.
91. *Мельникова А. А., Дерюгина Н. Н.* Стационарные решения в модели урбоэкосистемы // Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам «Ломоносов-2015». Секция «Физика». Сборник тезисов. Т. 1. — Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, Физический факультет, 2015.

92. *Мельникова А. А., Дерюгина Н. Н.* Применение контрастных структур в задачах биофизики // Международный научный семинар "АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ". Сборник тезисов докладов. — Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, Физический факультет, 2014. — С. 143—145.
93. *Мельникова А. А., Дерюгина Н. Н.* Контрастная структура типа всплеска в системе ФитцХью-Нагумо // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2013» / Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, М.В. Чистякова. Т. 1 / под ред. А. Л. Брюханов [и др.]. — Москва : Москва, 2013. — (Режим доступа: http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2013/2098/27569_20f3.pdf).