

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

КИРОВА ВАЛЕРИЯ ОРЛАНОВНА

**ВОПРОСЫ КОМБИНАТОРНОЙ ГЕОМЕТРИИ И
КОМБИНАТОРИКИ СЛОВ**

1.1.5 – МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА, ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И
ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

ДИССЕРТАЦИЯ

НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

КАНДИДАТА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Научные руководители:

д.ф.-м.н., профессор А.Я. Белов

д.ф.-м.н., профессор А.М. Райгородский

Москва – 2024

Содержание

Введение	3
1 Хроматическое число n-мерного пространства \mathbb{R}^n с запрещенными одноцветными конфигурациями	18
1.1 Понятие батонов и имеющиеся результаты	18
1.2 Теорема о существовании 2-цветной раскраски \mathbb{R}^n с запрещенными одноцветными конфигурациями	19
1.3 Предварительные сведения	21
1.3.1 Постановка задачи в \mathbb{R}_∞^n	21
1.3.2 Построение двухцветной раскраски	23
1.4 Доказательство теоремы 1.4	29
1.5 Следствия	34
1.5.1 Доказательство следствия 1.2	34
1.5.2 Доказательство следствия 1.3	34
1.6 Обобщение на ℓ_p -пространства при $p \neq 2$	35
1.7 Заключительные замечания, вопросы, перспективы	37
2 Хроматическое число слоев	38
2.1 Вещественные слои	38
2.2 Рациональные слои	41
2.3 Хроматическое число слоев с запрещенными одноцветными конфигурациями	42
3 Графы, представимые в виде слов	44
3.1 Понятие графов, представимых словами	44
3.2 k -Представимость и число представимости графа	46
3.3 Перестановочно представимые графы	47
3.4 Полутранзитивные ориентации и представимые графы	49
3.5 Графы, представимые в виде слов и их связь с хроматическим числом	51
4 Комбинаторика слов	56
4.1 Основные определения комбинаторики слов	56

4.2	Слова Штурма	57
4.3	Арифметическая сложность бесконечных слов	60
4.3.1	Арифметическая сложность слов Штурма	63
4.4	Полиномиальная сложность	65
4.4.1	Полиномиальная сложность слов Штурма	67
4.4.2	Геометрический двойственный метод	68
4.5	Заключительные замечания, вопросы, перспективы	72
5	Приложения комбинаторной геометрии	73
5.1	Геометрические свойства блочных сред	73
5.1.1	Эргодический поход	74
5.1.2	Случай трех систем прямых на плоскости	76
5.1.3	Эргодическая теорема	77
	Заключение	82
	Список литературы	84

Введение

Актуальность темы

Диссертация посвящена комбинаторике — одному из важных разделов дискретной математики, методы которого широко используются для решения практических и теоретических задач. Эта область имеет тесную связь со многими разделами математики и компьютерными науками.

Наше внимание прежде всего уделено вопросам, лежащим на стыке комбинаторной геометрии и теории графов, а так же комбинаторной геометрии и комбинаторики слов. Результаты работы разбиваются на три части: задача Нельсона о хроматическом числе нормированного пространства; графы, представимые словами; и о комбинаторных сложностных характеристиках бесконечных слов. Начнем с обзора результатов предыдущих исследований.

20-й век ознаменовался значительными достижениями в комбинаторике, что было связано с быстрым развитием дискретной математики и информатики, и многие математики внесли свой вклад в эту область. Один из них — венгерский математик Пауль Эрдеш (1913—1996), который ввел в комбинаторику вероятностный анализ и является создателем венгерской школы комбинаторного анализа. Эрдеш внес значительный вклад в теорию графов, комбинаторную теорию чисел, экстремальную комбинаторику и развитие комбинаторной геометрии. Хотя сам Эрдеш не был израильтянином, он активно сотрудничал с израильскими математиками и внес значительный вклад в комбинаторику. Он оказал сильное влияние на развитие комбинаторной математики в Израиле, в частности на основоположников израильской комбинаторной школы — Нога Алона и Рона Аарони. В России комбинаторная школа была создана относительно недавно, А.М Райгородским.

Внимание к комбинаторике (и конечной математике вообще) значительно повысилось во второй половине 20-го века с наступлением компьютерной эры. Интенсивный рост развития и эволюции компьютерных наук непосредственно имеет тесную связь с комбинаторикой. Комбинаторика предоставляет основополагающие концепции и методы, которые имеют решающее значение при решении сложных вычислительных задач, разработке эффективных алгоритмов, проектировании и анализе различных структур данных и систем. Например, алгоритмы поиска кратчайшего пути на графе и задачи составления расписания в значительной степени основаны на комбинаторных методах.

В теории сложности вычислений комбинаторика является фундаментальной составляющей при анализе алгоритмической сложности и классификации задач на основе их вычислительной сложности. Задачи комбинаторной оптимизации, такие как задача коммивояжера и задача о рюкзаке, формируют основу для понимания сложности различных вычислительных задач.

Важную роль комбинаторика играет в теории кодирования и криптографии. Методы комбинаторного проектирования, такие как коды обнаружения и исправления ошибок (коды Хэмминга и коды Рида-Соломона) широко используются в современных системах связи. Комбинаторные концепции, включая группы перестановок, используются при разработке и анализе криптографических протоколов.

Действительно, такие науки, как информатика и компьютерные науки, в значительной степени опираются на комбинаторные концепции. Это незаменимая область математики, лежащая в основе многих аспектов информатики и компьютерных наук.

В процессе развития информатики и компьютерных наук естественным образом возник ряд вопросов, связанных с такими областями комбинаторики, как теория графов, комбинаторная геометрия и комбинаторика слов.

Комбинаторная теория графов является центральной областью исследований в области информатики. Графы используются для представления и решения широкого спектра задач. Многие алгоритмы и структуры данных в значительной степени основаны на концепциях и методах теории графов.

Современная комбинаторная геометрия берет свое начало в конце 19 века, активное развитие получила в начале 20 века. Ранними изучаемыми темами были: плотность упаковки окружностей, проективные конфигурации Рейе и Стейница, геометрия чисел Минковского и раскраски карт Тейта, Хивуда и Хадвигера. Активное развитие эта область получила в начале 20 века: были доказаны теоремы Радона, Хелли, Юнга, Бляшке, а также строго доказана изопериметрическая теорема. На стыке топологии, анализа и комбинаторики были доказаны теоремы Борсука — Улама и Люстерника — Шнирельмана. Во второй четверти 20 века были поставлены проблема Борсука и проблема Нелсона — Эрдёша — Хадвигера. В 1940-х годах оформилась теория Рамсея. А.М. Райгородским получены многочисленные результаты относительно проблем Борсука, Нелсона - Эрдеша - Хадвигера и Грюнбаума. Эта область быстро прогрессирует и по сей день.

Комбинаторная геометрия имеет важное значение в алгебре, в частности в теории групп.

Самым ярким примером служит комбинаторная теория групп, создателем научной школы которой является С.И. Адян, и много примеров можно увидеть в его работах [8, 9, 10, 11]. Геометрически наглядная интерпретация вывода следствий из определяющих соотношений групп можно увидеть в работе А.Ю. Ольшанского [12].

Одним из разделов комбинаторики является комбинаторика на словах. Возникновение этого раздела берет свое начало в 1906 году с работ норвежского математика Акселя Туэ [144, 145], и продолжено американскими математиками Морсом и Хедлундом [79] в 1940 году. Объектом исследования в комбинаторике на словах являются слова — символные последовательности над конечным алфавитом. В своей работе [144] Туэ поставил вопрос о существовании бесконечного слова над конечным алфавитом, в котором нет слов, состоящих из двух последовательных вхождений одинаковых подслов. В дальнейшем, комбинаторика слов получила развитие во Франции, а именно в комбинаторной школе Марселя-Пауля Шутценбергера, который является одним из основоположников данной области.

Комбинаторика слов имеет большое значение в алгебре (при изучении базисов и нормальных форм, много примеров в работах П.С. Новикова и С.И. Адяна [8, 9, 10, 11], Р. Линдон, П. Шупп [5]), в задачах, связанных с мономиальными алгебрами (А.Я. Белов, В.В. Борисенко, В.Н. Латышев [2, 20], В.А. Уфнаровский [17], В. Дренский [18], и монографии М.В. Сапира [19]), а так же в задачах комбинаторной теории групп, теории колец, в теории алгебр Ли, проблемах бернсайдовского типа. Многие теоремы комбинаторики слов активно используются алгебраистами.

Комбинаторика слов является быстроразвивающимся направлением. Тесную связь комбинаторика слов имеет с символической динамикой. А.Мучник, Ю. Притыкин, А.Л. Семенов дали полный обзор понятий и результатов, связанных с обобщениями понятия периодической последовательности [6]. Большой вклад в развитие символической динамики и комбинаторных методов внес А. Вершик [22]. Алгоритмические проблемы, связанные с морфическими последовательностями были изучены И. Митрофановым [7].

Подробное описание равномерно рекуррентных слов, порождаемых переключением отрезков, сделали А. Чернятьев и А. Канель-Белов. Асимптотические свойства динамических систем прекрасно изучены А.Рыжиковым. Ряд глубоких результатов по комбинаторике слов был получен представителями школы С.В. Агустиновича.

Помимо перечисленного, комбинаторика слов имеет большое значение в такой области ком-

пьютерных наук, как биоинформатика. Она играет решающую роль в понимании и анализе биологических последовательностей, которые можно рассматривать как слова, состоящие из конечного алфавита. Одна из самых актуальных задач биоинформатики, которую решает комбинаторика слов, это генерация всех возможных последовательностей заданной длины и алфавита. Это особо необходимо при создании синтетических последовательностей для экспериментального проектирования. При сборке генома комбинаторика слов используется для реконструкции полных геномов путем сборки перекрывающихся фрагментов ДНК. Для решения головоломки из перекрывающихся фрагментов и определения правильного порядка и ориентации последовательностей используются различные комбинаторные алгоритмы. Определенно, комбинаторика слов предоставляет необходимые инструменты и методы для анализа, манипулирования и понимания огромного объема данных о биологических последовательностях в области биоинформатики. Применение теории графов и комбинаторики слов для описания и реконструкции хромосомных структур активно развивается В.А. Любецким.

Задача Нельсона

Задачи комбинаторной геометрии, рассматриваемые в настоящей работе, берут свое начало в 1950 году, когда Э. Нельсон задался вопросом о нахождении *хроматического числа* плоскости (обозначим его за $\chi(\mathbb{R}^2)$)- минимального числа цветов, в которые можно раскрасить евклидову плоскость так, чтобы любые две точки на единичном расстоянии имели разные цвета. В русскоязычной литературе устоялось название проблема Нельсона-Хадвигера. Эта задача была популяризована М. Гарднером, П. Эрдемом, Г. Хадвигером, А. Сойфером и получила дальнейшее развитие. Казалось бы, что найти точное значение $\chi(\mathbb{R}^2)$ нетрудно. Однако, хроматическое число плоскости не только не найдено, но даже имеет зазор между имеющимися оценками:

$$5 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7.$$

Верхняя оценка была установлена Хадвигером [82] в 1961 году и является классической. Нижняя граница является относительно недавним открытием в работе Обри Ди Грея [72], которая довольно быстро была подтверждена в работах Эксоо и Исмаилеску [59]). Более 65 лет не появлялось никаких аргументов, позволяющих улучшить нижнюю оценку. Попытки решить эту проблему породили большое число интересных задач и содержательных результатов.

Ввиду невозможности решить исходную задачу появились различные ослабления и обобщения. Прежде всего, задача была перенесена на n -мерные евклидовы пространства. *Хроматическим числом* $\chi(\mathbb{R}_N^n)$ n -мерного нормированного пространства \mathbb{R}_N^n называется наименьшее r , при котором существует раскраска точек пространства \mathbb{R}_N^n в r цветов, при которой не найдется двух точек одного цвета, расположенных друг от друга на единичном расстоянии.

Эта тема была наиболее подробно изучена для n -мерных ℓ_p -пространств \mathbb{R}_p^n , и особенно для Евклидовых пространств \mathbb{R}_2^n . Так же в работе А. Сойфер [134] подробно описана история развития этой задачи. Очевидно, что имеет место точное равенство при $n = 1$: $\chi(\mathbb{R}_2^1) = 2$ [135]. Однако зазор между наилучшей известной нижней и верхней оценками очень быстро возрастает с ростом n . Это можно увидеть уже для случая $n = 3$ ([116], [53]):

$$6 \leq \chi(\mathbb{R}_2^3) \leq 15.$$

Что касается случая растущей размерности, то в настоящее время лучшие асимптотические нижние и верхние границы при $n \rightarrow \infty$ принадлежат А.М. Райгородскому [122] и Ларману и Роджерсу [102, 121] соответственно:

$$(1.239 + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{R}_2^n) \leq (3 + o(1))^n.$$

Для не Евклидовых ℓ_p -пространств значение $\chi(\mathbb{R}_p^n)$ экспоненциально растет с ростом n (см. статью [123] и два обзора [124, 125] Райгородского). Случай Чебышевских пространств \mathbb{R}_∞^n выделяется здесь из-за фольклорного равенства $\chi(\mathbb{R}_\infty^n) = 2^n$, верного при всех $n \in \mathbb{N}$.

В работе [95] А. Купавский устанавливает верхнюю границу при $n \rightarrow \infty$, зависящую исключительно от размерности пространства:

$$\chi(\mathbb{R}_N^n) \leq (4 + o(1))^n.$$

Для обоснования верхних оценок обычно приводят явную раскраску пространства \mathbb{R}^n в требуемое число цветов. Для обоснования нижних оценок используются дистанционные графы. Граф $G = (V, E)$, множество V вершин которого является подмножеством пространства \mathbb{R}^n , называется *дистанционным*, если длины всех его ребер равны друг другу. Например для \mathbb{R}^2 дистанционный граф - граф, у которого вершины - точки плоскости, а ребра - пары точек на единичном расстоянии. Хроматическим числом $\chi(G)$ дистанционного графа G называется наименьшее число цветов, в которые можно раскрасить вершины графа так, чтобы никакие

две смежные вершины не оказались бы покрашены в один и тот же цвет. Нетрудно видеть, что для любого дистанционного графа G , вложенного в пространство \mathbb{R}^n , верно неравенство

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq \chi(G).$$

Отметим, что по теореме Эрдеша-де Брейна [34] существует конечный дистанционный граф G , для которого неравенство обращается в равенство.

М. Бенда и М. Перлес [35] рассмотрели эту задачу на \mathbb{Q}^4 - графе, полученном из рациональных точек 4-пространства путем соединения двух точек, если их евклидово расстояние равно единице. Они установили, что его хроматическое число равно 4.

Соответствующая тематика активно развивается, получено много интересных результатов и оценок в различных ситуациях (например, см. [134]). Хроматические числа пространств активно исследовались, например, в школе А. М. Райгородского. Более подробные сведения о проблеме Нельсона-Хадвигера и смежных задачах можно почерпнуть из следующих обзоров: П. К. Агарвал и Я. Пах [84], П. Брасс, В. Мозер, Я. Пах [33], К. Б. Чилакамарри [99], В. Кли и С. Вэгон [101], А. М. Райгородский [124], [122] [125], [126], А. Сойфер [134],[137], Л. А. Секеи [106], и многие другие выдающиеся математики.

Начнем с ослаблений. Если каждое одноцветное множество разбивается на связные области, ограниченные жордановыми кривыми, то необходимо не менее 6 цветов, что было доказано Д. Р. Вудаллом еще в 1973-ем году [149]. К. Дж. Фалконер в 1981-ом году показал, что если потребовать, чтобы множества точек, раскрашенных в один и тот же цвет, были измеримы по Лебегу, тогда для правильной раскраски плоскости требуется хотя бы 5 цветов [69]. Разумеется, раскраска плоскости в 7 цветов обеспечивает оценку сверху и для ослабленных формулировок.

Одна из главных трудностей заключается в том, что ответ может зависеть от теоретико-множественной аксиоматики, как показали в 2003-ем году С. Шелах и А. Сойфер [136]. Если мы предполагаем аксиому выбора, то по теореме Эрдеша-де Брейна [34] хроматическое число бесконечного графа реализуется на конечном подграфе. Однако компьютерный перебор не находит подграфов с хроматическим числом хотя бы 5, что позволяет предположить, что хроматическое число в стандартной аксиоматике равняется четырем. Если же отказаться от аксиомы выбора, но дополнить стандартную аксиоматику Цермело-Френкеля аксиомой зависящего выбора и дополнительно потребовать измеримость всех подмножеств по Лебегу, то

применимо доказательство Фалконера, и хроматическое число лежит между пятью и семью.

Также можно рассматривать случай ограниченного подмножества плоскости, что было сделано, например, в работе А. Купавского и А. Райгородского [97].

Множество $\mathcal{M}' \subset \mathbb{R}^n$ называется N -изометрической копией множества \mathcal{M} если существует биекция $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ такая что $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_N = \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|_N$ для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{M}$.

Чтобы обобщить эти проблемы, можно запретить более сложным конфигурациям быть одноцветными. Для нормированного пространства \mathbb{R}_N^n и подмножества $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$, *хроматическим числом* $\chi(\mathbb{R}_N^n, \mathcal{M})$ называется наименьшее r , при котором существует раскраска пространства \mathbb{R}^n в r цветов, в которой нет одноцветных N -изометрических копий множества \mathcal{M} . В этих терминах, $\chi(\mathbb{R}_N^n) = \chi(\mathbb{R}_N^n, I)$, где I – двухточечное множество.

Систематическое изучение этого понятия началось с трех классических работ Пауля Эрдаша, Рональда Грэма, Питера Монггомери, Брюса Ротшильда, Джоэла Спенсера, и Эрнста Штрауса [60, 61, 62], а теперь выросло в отдельную ветвь комбинаторики, что можно увидеть в обзоре [74] Грэма. В случае Евклидова пространства, наиболее подробно изученным вопросом является следующий. Является ли множество \mathcal{M} *Рамсеевским*, т.е., стремится ли $\chi(\mathbb{R}_2^n, \mathcal{M})$ к бесконечности с ростом n ? Известно, что множества вершин симплексов [68] и правильных многогранников [94, 48] являются Рамсеевскими (явные границы этих хроматических чисел приведены в работах [115, 120, 133]). Однако задача определения всех множеств Рамсея в целом остается широко открытой, и даже предположения об ответе на нее вызывают споры, см. [103].

В 2016 году в работе [98] А. Канель-Белов, В. Воронов и Д. Черкашин развили эту тематику, предложив следующую интерпретацию задачи. Рассмотрим промежуточный случай между плоскостью и пространством, а именно слой между двумя плоскостями высоты e . Очевидно, что при достаточно малом значении e сохраняется раскраска в 7 цветов без одноцветных точек на единичном расстоянии. Таким образом, было предложено рассматривать хроматические числа пространств вида $\mathbb{R}^n \times [0, e]^h$, где $n, h \geq 1$ для $e > 0$, с запрещенным единичным евклидовым расстоянием. Такие метрические пространства именуется *слоями*, а число n называется размерностью слоя. Очевидно, что для любого положительного e выполнены неравенства

$$\chi(\mathbb{R}^n) \leq \chi(\mathbb{R}^n \times [0, e]^h) \leq \chi(\mathbb{R}^{n+h}).$$

Изучение раскрасок слоев началось для одномерных и двумерных слоев с запрещенным еди-

ничным евклидовым расстоянием, и уже в работе [148] были рассмотрены трехмерные вещественные и двумерные рациональные слои при разных значениях e, h , для которых получен ряд оценок.

Графы, представимые словами

С развитием компьютерной эры представление графов словами стало иметь решающее значение для их хранения в памяти компьютера. Слова также использовались для выявления и описания различных полезных свойств графов, таких как классы, в которых алгоритмические задачи любой сложности становятся простыми, или классы, которые хорошо квазиупорядочены с помощью введенного отношения подграфов. С другой стороны, графы часто использовались для изучения различных свойств слов и связанных с ними комбинаторных структур, таких как перестановки.

Самым ярким примером, показывающим важность слов для нумерации графов, являются слова Прюфера для деревьев [119], когда в 1918 г. немецкий математик Хайнц Прюфер обнаружил интересную взаимосвязь между мечеными деревьями с n вершинами и последовательностями длины $n - 2$, составленными из элементов множества $1, 2, \dots, n$. Это отношение является биекцией между деревьями и последовательностями, что позволило Прюферу доказать формулу Кэли о количестве n -вершинных помеченных деревьев.

В дальнейшем, взаимосвязи между словами и графами неоднократно исследовались. Аналогичные взаимосвязи известны для пороговых графов [54], графов букв [118], графов перестановок [89], графов пересечений вписанных многоугольников [88], почти периодических слов (с переходом к числу Белла для свойств наследственных графов [31]) и ряда других графов [38],[70]. Более детальная информация изложена в [90]. Один из самых последних открытий в этой области является понятие графов, представимых в виде слов.

Впервые понятие графов, представимых словами, было введено С. В. Китаевым [91] и систематически развивается по сей день [92], [90]. Мотивом послужили полугруппы Перкинса [117], играющие центральную роль в теории полугрупп с 1960 г., и использующиеся для построения примеров и контрпримеров.

Графы, представимые словами, имеют применение в алгебре, информатике и компьютерных науках, комбинаторике слов и теории расписаний [76], имеют основополагающее значение в математической биологии и биоинформатике, что можно увидеть в работах В.А.Любецкого

[21]. Также такие графы обобщают несколько фундаментальных классов графов, таких как графы пересечения хорд [49], 3-раскрашиваемые графы [42] и графы сравнимости [104].

Вопросы комбинаторики слов

Объектом исследования комбинаторики слов являются символьные последовательности над конечным алфавитом (или слова). Изучение комбинаторики слов начинается в 1906 году с работ норвежского математика Акселя Туэ [144] [145] о неповторных словах, и продолжено М. Морсом и Г. Хедлундом [79] в 1940 году. В своей работе [144] А. Туэ поставил вопрос о существовании бесконечного слова над конечным алфавитом, в котором нет слов, состоящих из двух последовательных вхождений одинаковых подслов. Такие слова называются *квадратами*. Например, таким будет слово $ababab$, в котором есть три подряд идущих вхождения подслова ab . Очевидно, если алфавит бинарный, то бесконечных слов без квадратов нет. Однако А. Туэ построил пример такого слова над трехбуквенным алфавитом. Полученные результаты стали основой нового направления исследований - теории избегаемости. Систематическое исследование ряда задач комбинаторики слов возникло в ответ на фундаментальные запросы компьютерных наук, в особенности биоинформатики.

В 1940 году в работе [79] М. Морс и Г. Хедлунд ставят вопрос о множестве подслов заданной длины бесконечного слова и вводят следующее определение. *Комбинаторной сложностью* слова w называется количество подслов длины n и обозначается $p_w(n)$. Это понятие широко используется при комбинаторном исследовании бесконечных последовательностей. Например, он используется при определении топологической энтропии символьной динамической системы. Очевидно, что $p_w(n)$ - неубывающая функция, значения которой находятся между единицей и множеством всех слов длины n : $1 \leq p_w(n) \leq q^n$. Фундаментальный результат Морса и Хедлунда состоит в том, что любое апериодическое правостороннее бесконечное слово имеет факторную сложность не менее $n + 1$ для каждого n . Слова с комбинаторной сложностью $n + 1$ называются *словами Штурма* и относятся к классу наиболее изученных бесконечных слов. Так же авторы доказали, что комбинаторная сложность бесконечного слова ограничена тогда и только тогда, когда слово периодично.

В 2000 году Теорема Ван дер Вардена об одноцветных арифметических прогрессиях положила начало изучению функции арифметической сложности бесконечных слов [27], являющейся в некотором смысле модификацией функции комбинаторной сложности.

Помимо комбинаторной и арифметической сложности существует еще множество различных функций сложности: сложность Ли [38], Абелева сложность [46], k -абелева сложность [87], арифметическая сложность [27], [44], максимальная шаблонная сложность [86], сложность цикла [45], биномиальная сложность [132], оконная сложность [47], периодическая сложность [113] и т.д. Мы будем рассматривать лишь некоторые из них.

Таким образом, тематика диссертации весьма актуальна

Цели и результаты работы

Целью настоящей работы является изучение задач, стоящих на стыке комбинаторной геометрии и теории теории графов, а также комбинаторной геометрии и комбинаторики слов:

- Рассмотреть задачу Нельсона и её обобщения. Опираясь на Теорему Ван дер Вардена об одноцветных арифметических прогрессиях, рассмотреть противоположную постановку задачи – о хроматическом числе нормированного пространства \mathbb{R}_N^n с запрещенными одноцветными арифметическими прогрессиями.
- Изучить хроматические числа пространств вида $\mathbb{R}_N^n \times [0, e]^h$, где $e > 0, h \in \mathbb{N}$. Рассмотреть хроматические числа таких пространств с запрещенными одноцветными арифметическими прогрессиями.
- Изучить графы представимые в виде слов, их свойства и связь с хроматическим числом.
- Изучить связь Теоремы Ван дер Вардена с комбинаторными сложностными характеристиками бесконечных слов. Изучить комбинаторную сложность и ее модификации, представить обзор имеющихся результатов для класса слов с наименьшей комбинаторной сложностью - слов Штурма. Рассмотреть полиномиальную Теорему Ван дер Вардена для введения новой, более обобщенной модификации функции комбинаторной сложности - полиномиальной сложности бесконечных слов. Установить оценку полиномиальной сложности для слов Штурма.
- Представить приложения комбинаторной геометрии в задачах Маркшейдерского дела. Разработать эргодический подход к задаче разбиения трещинами массивов горных пород на блоки и определения их геометрических свойств.

Все эти задачи успешно решены автором.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит преимущественно теоретический характер. Полученные результаты могут использоваться в таких областях как теория Рамсея, теория кодирования и криптография, теория оптимизации, теория сложности вычислений, биоинформатика и вычислительная биология, а также в задачах Маркшейдерского дела.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Научная новизна диссертационной работы характеризуется следующими результатами.

- Опираясь на Теорему Ван дер Вардена об одноцветных арифметических прогрессиях, рассмотрена противоположная постановка задачи – о хроматическом числе нормированных пространств \mathbb{R}_N^n и пространств вида $\mathbb{R}_N^n \times [0, e]^h$, где $e > 0, h \in \mathbb{N}$, с запрещенными одноцветными арифметическими прогрессиями.
- Доказано, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует раскраска \mathbb{R}_∞^n в 2 цвета, т.ч. все достаточно длинные единичные арифметические прогрессии \mathcal{B}_k содержат точки разных цветов, т.е. имеем $\chi(\mathbb{R}_\infty^n, \mathcal{B}_k) = 2$.
- Доказано, что для каждого $1 \leq p \leq \infty$ и каждого натурального n любое нормированное пространство \mathbb{R}_p^n с нормой ℓ_p может быть покрашено в 2 цвета так, что все достаточно длинные единичные арифметические прогрессии \mathcal{B}_k содержат точки разных цветов.
- Доказано, что для любых натуральных $h, n \geq 1$ и вещественного $e > 0$, существует такое $k = k(n, h, e)$, что $\chi(\mathbb{R}^n \times [0, e]^h, \mathcal{B}_k) = 2$.
- Опираясь на полиномиальную Теорему Ван дер Вардена, представлена обобщенная модификация функции комбинаторной сложности - полиномиальная сложность бесконечных слов. Установлена верхняя оценка $O(n^{d+2})$ полиномиальной сложности слова Штурма, где $d \in \mathbb{N}$ – степень полинома.
- Разработан эргодический подход для разбиения пространства n системами равноотстоящих плоскостей и других аналогичных задач.

Основные методы исследования

В работе применяются как классические комбинаторные методы, в частности, методы комбинаторной геометрии и комбинаторики слов, геометрические методы, так и методы, заимствованные из алгебры, дискретной математики и теории графов.

Апробация работы

Результаты и положения диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

1. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2020» (секция “Математика и механика”, подсекция “Математическая логика, алгебра и теория чисел”), г. Москва, Россия, 10 - 27 Ноября 2020 г.
2. Летняя школа Российской Ассоциации Искусственного Интеллекта (секция "Логика искусственного интеллекта "), г. Сочи, Россия, 5-18 июля 2021 г.
3. Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов 2022» (секция “Математика и механика”, подсекция “Математическая логика, алгебра и теория чисел”), г. Москва, Россия, 11 - 22 Апреля 2022 г.
4. Летняя школа AIRI (Artificial Intelligence Research Institute) по искусственному интеллекту, г. Сочи, Россия, 4-17 июля 2022 г.
5. Зимняя студенческая школа по математике и теоретической информатике НИУ ВШЭ, СПбГУ и Лаборатории кластерной геометрии, г.Москва, Россия, 27 января - 1 февраля 2023 г.
6. Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов 2023» (секция “Математика и механика”, подсекция “Математическая логика, алгебра и теория чисел”), г. Москва, Россия, 10 - 21 Апреля 2023 г.
7. Международная научная конференция “Numeration 2023”, University of Liège , г.Лельеж, Бельгия, 22-26 мая 2023 г.

8. Международная научная конференция "32nd Cumberland Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing Теннесси, США, 13-14 мая 2023.
9. XXVI Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «МАТЕМАТИКИ – АЛТАЙСКОМУ КРАЮ (МАК-2023)» (секция "математика подсекция "алгебра, математическая логика, дискретная математика и теория чисел"), г. Барнаул, Россия, 7 июня 2023 г.
10. Научная школа "Обратные некорректные задачи и машинное обучение г. Сочи, Россия, 4-8 сентября 2023 г.
11. Международная научная конференция "Graph Drawing and Combinatorial Geometry Workshop Erdős Center, г. Будапешт, Венгрия, 13-17 ноября 2023 г.

Публикации

Результаты диссертации обоснованы в виде строгих математических доказательств и опубликованы пяти статьях [150, 151, 152, 153, 154], из которых пять опубликованы в рецензируемых научных журналах, удовлетворяющих положению о присуждении ученых степеней в МГУ.

Работа [150] опубликована в журнале, входящем в реферативные базы данных Scopus и Web of Science; работы [151, 152, 153, 154] опубликованы в журналах, входящих в реферативные базы данных Scopus и RSCI.

Работы [150, 151] написаны в соавторстве с Сагдеевым А., работа [153] написана в соавторстве с Годуновым И., работа [152] написана автором самостоятельно. Работа [154] написана в соавторстве с А. Беловым и В. Павловой.

Все вышеперечисленные работы соответствуют теме научно-квалификационной работы и отражают ее содержание. Работа подготовлена по специальности 1.1.5 «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика».

Структура и объём диссертационной работы

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка использованной литературы. Полный объём диссертации — 96 страниц, список литературы содержит 157 наименований.

Краткое содержание работы

Во введении даётся общая характеристика работы, постановки задач, цели работы и обосновывается её актуальность. Кроме того, приводится обзор результатов, полученных ранее другими авторами по теме диссертации и смежным направлениям исследований, а также кратко излагается содержание её глав.

Первая глава посвящена задаче Нельсона и её обобщениям. В главе рассматривается задача о раскрасках метрических пространств с запрещенными одноцветными конфигурациями, а именно арифметическими прогрессиями. В этой главе найдены условия, при которых минимальное число цветов, достаточное для раскраски n -мерного пространства с экстремальной метрикой в условиях отсутствия одноцветных изометрических копий арифметических прогрессий, равно двум.

Вторая глава посвящена естественному обобщению задачи о хроматическом числе плоскости. В главе рассматриваются хроматические числа пространств вида $\mathbb{K}^n \times [0, e]^h$, где $\mathbb{K} = \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, для натуральных $n, h \geq 1$ и вещественного $e > 0$. Такие пространства называются слоями. Представлен обзор имеющихся оценок для одномерных, двумерных и трехмерных вещественных и рациональных слоев с запрещенным единичным евклидовым расстоянием. Рассматривается задача о хроматическом числе таких пространств с запрещенными одноцветными арифметическими прогрессиями. В этой главе доказано, что любая слойка может быть раскрашена в 2 цвета так, что не найдется одноцветных изометрических копий арифметических прогрессий.

Третья глава является обзорной. Глава посвящена графам, представимых в виде слов. В главе представлен обзор графов, представимых словами, а именно: какие известные классы графов представимы словами, а какие нет; какие операции сохраняют представимость слов (или непредставимость) и какие свойства сохраняются для этого графа. В частности, представлена связь графов, представимых словами, с хроматическим числом графа.

Четвертая глава посвящена вопросам комбинаторики слов. В этой главе рассматриваются комбинаторные сложностные характеристики бесконечных слов, в частности слов Штурма. В главе представлена связь Теоремы Ван дер Вардена с комбинаторными сложностными характеристиками бесконечных слов. Основным результатом главы является введение понятия полиномиальной сложности бесконечных слов и верхняя оценка для сложности слов Штурма.

Пятая глава посвящена приложениям комбинаторной геометрии в задачах Маркшейдерского дела и содержит один из основных результатов диссертации. В главе рассматривается разбиение трещинами массивов горных пород на блоки. Взяв за основу модель, в которой трещины представляют собой системы неограниченных эквидистантных (то есть параллельных и равноотстоящих) систем плоскостей, в главе изучено распределение блоков по объемам и формам и представлен эргодический подход, который позволяет находить распределение блоков не только по объемам, как все разработанные ранее методы, но и по другим геометрическим параметрам.

В заключении подводятся итоги проведенной работы и приводятся основные результаты. Также обозначаются возможные направления дальнейших исследований.

Благодарности

Автор выражает глубокие искренние благодарности своим научным руководителям, доктору физико-математических наук, профессору Белову Алексею Яковлевичу, и доктору физико-математических наук, профессору Райгородскому Андрею Михайловичу. Автор выражает отдельную искреннюю и глубокую благодарность кандидату физико-математических наук Арсению Сагдееву, за постановку задач и плодотворные обсуждения в процессе совместной работы.

Автор выражает большую благодарность заведующему кафедрой математической логики и теории алгоритмов Семенову Алексею Львовичу, Пентусу Мати Рейновичу и всем сотрудникам кафедры за неоценимую поддержку в научной работе. Также автор выражает благодарность за поддержку в научной работе доктору физико-математических наук, профессору Алескерову Фуаду Тагиевичу и кандидату технических наук Алексею Логунову.

Диссертация была выполнена при поддержке гранта РФФИ 22-11-00177.

1 Хроматическое число n -мерного пространства \mathbb{R}^n с запрещенными одноцветными конфигурациями

1.1 Понятие батонов и имеющиеся результаты

Одним из простейших примеров не-Рамсеевских множеств являются одномерные конфигурации. Пусть для $k \in \mathbb{N}$ обозначим $[k]_0 = \{0, 1, 2, \dots, k\}$. Следуя статье [96], для последовательности положительных вещественных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, назовем множество $\{0, \lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \dots, \sum_{t=1}^k \lambda_t\} \subset \mathbb{R}$ *батон* и обозначим $\mathcal{B}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. В случае $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 1$ множество является просто единичной арифметической прогрессией, для краткости мы будем обозначать его через \mathcal{B}_k . В работе Erdős [60] авторы показали, что любой батон \mathcal{B} по крайней мере из трех точек не является Рамсеевским, так как $\chi(\mathbb{R}_2^n, \mathcal{B}) \leq 16$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Более того, они доказали что

$$\chi(\mathbb{R}_2^n, \mathcal{B}_k) = 2 \tag{1}$$

для всех $k \geq 5$ и всех натуральных n . Заметим, что неизвестно [74] являются ли значения 5 и 16 здесь "тесными". Другие версии этих результатов приведены в разделе [25, 26, 51].

В недавней серии работ [96, 66, 67], авторы изучили хроматические числа для n -мерных пространств \mathbb{R}^n в метрике Чебышева. Среди прочих результатов, они доказали, что \mathcal{B}_k являются экспоненциально ℓ_∞ -Рамсеевскими множествами.

Теорема 1.1. *Всякое подмножество $X \subset [k]_0^n \subset \mathbb{R}_\infty^n$ мощности $|X| > k^n$ содержит копию \mathcal{B}_k , где $k, n \in \mathbb{N}$.*

Из этой теоремы следует, что если раскраска \mathbb{R}_∞^n не содержит одноцветной копии \mathcal{B}_k , то каждый из ее цветов может пересекать $[k]_0^n$ не более чем в k^n точках. Используя принцип Дирихле, мы получаем следующее следствие.

Следствие 1.1. *Для всех $k, n \in \mathbb{N}$ верно:*

$$\chi(\mathbb{R}_\infty^n, \mathcal{B}_k) \geq \left(\frac{k+1}{k} \right)^n.$$

Это неравенство показывает, что в отличие от евклидова случая, для любого заданного k , каждая двухцветная раскраска \mathbb{R}^n содержит одноцветную ℓ_∞ -изометрическую копию \mathcal{B}_k , когда размерность n достаточно велика относительно k .

Теорему 1.1 и следствие 1.1 можно обобщить на случай произвольных \mathcal{B}_k . В работе [96] авторы рассмотрели $\mathcal{B}(1, \alpha)$, который представляет собой множество $\{0, 1, 1 + \alpha\}$, и доказали что $\mathcal{B}(1, \alpha)$ является экспоненциально ℓ_∞ -Рамсеевским с помощью следующей теоремы.

Теорема 1.2. *Пусть $\alpha > 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда существует подмножество $A \subset \mathbb{R}$ мощности $\lceil \alpha \rceil + 2$ для которого выполняется следующее. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$, каждое подмножество $B \subset A^n \subset \mathbb{R}_\infty^n$ мощности $|B| > (\lceil \alpha \rceil + 1)^n$ содержит копию $\mathcal{B}(1, \alpha)$.*

Из этой теоремы можно легко вывести, что для всех $\alpha > 1$ и $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $\chi(\mathbb{R}_\infty^n; \mathcal{B}(1, \alpha)) \geq \left(\frac{\lceil \alpha \rceil + 2}{\lceil \alpha \rceil + 1}\right)^n$. В частности, отсюда следует, что метрическое пространство $\mathcal{B}(1, \alpha)$ экспоненциально ℓ_∞ -Рамсеевское.

Рассматривая общий случай $\mathcal{B}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, используется та же идея сведения к целочисленному случаю и применения принципа Дирихле. В обозначениях предыдущего пункта основная трудность здесь состоит в нахождении подходящего A и биекции f .

Теорема 1.3. *Пусть k — целое положительное число и $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — положительные действительные числа. Тогда существуют $m \in \mathbb{Z}$ и подмножество $A \subset \mathbb{R}$ мощности $m + 1$ такие, что выполняется следующее. Учитывая целое положительное число n , каждое подмножество $B \subset A^n \subset \mathbb{R}_\infty^n$ мощности $|B| > m^n$ содержит копию $\mathcal{B}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$.*

Для доказательства этой теоремы, авторы сначала предполагают, что существует «подходящее» конечное подмножество $A = \{a_0, \dots, a_m\} \subset \mathbb{R}$, которое удовлетворяет нескольким условиям, затем доказывают существование этого "подходящего" A .

1.2 Теорема о существовании 2-цветной раскраски \mathbb{R}^n с запрещенными одноцветными конфигурациями

Цель данной работы - найти аналоги (1) для неевклидовых нормированных пространств. Более того, мы решаем следующую общую проблему для широкого класса нормированных пространств.

Проблема 1.1. *Верно ли, что для любого нормированного пространства \mathbb{R}_N^n , найдется $k = k(\mathbb{R}_N^n)$ при котором $\chi(\mathbb{R}_N^n, \mathcal{B}_k) = 2$?*

Неравенство 1.1 показывает, что в отличие от евклидова случая, для любого заданного k , каждая двухцветная раскраска \mathbb{R}^n содержит одноцветную ℓ_∞ -изометрическую копию \mathcal{B}_k ,

когда размерность n достаточно велика относительно k . Однако, следующая теорема, которая является одним из основных результатов главы, показывает, что это не так в "противоположной" ситуации, когда k достаточно велико относительно n .

Теорема 1.4. *Для любого $n \in \mathbb{N}$, существует раскраска в 2 цвета пространства \mathbb{R}^n без одноцветных ℓ_∞ -изометрических копий всех батонов $\mathcal{B}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ такая что $\max_t \lambda_t \leq 1$ и $\sum_{t=1}^k \lambda_t \geq 5^n$. В частности, для всех $n \in \mathbb{N}$ и $k \geq 5^n$, имеем $\chi(\mathbb{R}_\infty^n, \mathcal{B}_k) = 2$.*

Доказательство этой теоремы является конструктивным. Заметим, что в данной работе нет попыток оптимизировать константу 5^n в утверждении, пытаясь сохранить ясность доказательства. Дальнейшее обсуждение имеется в разделе 1.7.

Теорема 1.4 применяется для решения задачи 1.1 для многих нормированных пространств \mathbb{R}_N^n , отличных от \mathbb{R}_∞^n . Основным препятствием на этом пути является следующее. Произвольная N -изометрическая копия батона \mathcal{B} в \mathbb{R}^n не обязательно является ℓ_∞ -изометрической копией какого-то другого батона. Например, набор из трех точек $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(1, 1)$ на плоскости является ℓ_1 -изометрической копией \mathcal{B}_2 . При этом все ℓ_∞ -расстояния между ними единичны, и поэтому ни одно из расстояний не равно сумме двух других. Однако это препятствие исчезает, если мы рассматриваем только *коллинеарные* N -изометрические копии \mathcal{B} . В частном случае $\mathcal{B} = \mathcal{B}_k$, мы называем его коллинеарные N -изометрические копии *единичными арифметическими прогрессиями в \mathbb{R}_N^n длины $k + 1$* .

Следствие 1.2. *Для любого нормированного пространства \mathbb{R}_N^n существует вещественная дельта $\delta = \delta(\mathbb{R}_N^n)$ такая, что имеет место следующее. Существует двухцветная раскраска \mathbb{R}^n без одноцветных коллинеарных N -изометрических копий всех батонов $\mathcal{B}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ такая, что $\max_t \lambda_t \leq 1$ и $\sum_{t=1}^k \lambda_t \geq \delta$. В частности, все достаточно длинные единичные арифметические прогрессии в \mathbb{R}_N^n содержат точки обоих цветов при такой раскраске.*

Заметим, что если норма N на \mathbb{R}^n является *строго выпуклой*, тогда каждая N -изометрическая копия любого батона \mathcal{B} должна быть коллинеарна. Напомним, что норма N на \mathbb{R}^n называется *строго выпуклой* тогда и только тогда, когда для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, равенство $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_N = \|\mathbf{x}\|_N + \|\mathbf{y}\|_N$ означает, что \mathbf{x} и \mathbf{y} коллинеарны. Таким образом, Следствие 1.2 дает положительное решение задачи 1.1 для таких нормированных пространств. Например, хорошо известно, что ℓ_p -норма строго выпукла для всех $1 < p < \infty$.

Следующее следствие рассматривает несколько противоположную ситуацию, когда "единичный шар" нормы является центрально-симметричным выпуклым многоугольником.

Следствие 1.3. Пусть \mathbb{R}_N^n - нормированное пространство, единичный шар которого является центрально-симметричным выпуклым многоугольником в \mathbb{R}^n с $2f$ гранями. Тогда существует двухцветная раскраска \mathbb{R}^n без одноцветных N -изометрических копий всех батонов $\mathcal{B}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ таких, что $\max_t \lambda_t \leq 1$ и $\sum_{t=1}^k \lambda_t \geq 5^f$. В частности, для всех $k \geq 5^f$, имеем $\chi(\mathbb{R}_N^n, \mathcal{B}_k) = 2$.

Очевидно, что этот результат можно применить к n -мерному пространству \mathbb{R}_1^n с манхэттенским расстоянием, единичным шаром которого является гипероктаэдр (кросс-политоп) с 2^n гранями. Вместе со Следствием 1.2, эти результаты решают задачу 1.1 для всех ℓ_p -пространств. Однако, общий случай остается открытым.

Оставшаяся часть главы построена следующим образом. Раздел 1.3 содержит некоторые предварительные технические утверждения: классификацию всех ℓ_∞ -изометрических копий батонов в \mathbb{R}^n , понятие гиперповерхности под названием *зме́йка*, и доказательства основных свойств. В разделе 1.4 построена явная раскраска \mathbb{R}^{n+1} на основе этих гиперповерхностей и доказана Теорема 1.4. В разделе 1.5 мы имеем дело с нормированными пространствами, отличными от \mathbb{R}_∞^n , и доказываем формулы 1.2 и 1.3. В разделе 1.6 мы обобщаем полученные результаты на ℓ_p -пространства при $p \neq 2$. Наконец, в разделе 1.7 мы делаем некоторые дальнейшие замечания и излагаем больше открытых проблем.

1.3 Предварительные сведения

1.3.1 Постановка задачи в \mathbb{R}_∞^n

Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \subset \mathbb{R}$ - произвольный фиксированный батон. Ясно, что для всех $x \in \mathbb{R}$ как *сдвиг* $x + \mathcal{B} := \{x, x + \lambda_1, \dots, x + \sum_{t=1}^k \lambda_t\}$, так и *отражение* $x - \mathcal{B} := \{x, x - \lambda_1, \dots, x - \sum_{t=1}^k \lambda_t\}$ являются изометрическими копиями \mathcal{B} (независимо от рассматриваемой нормы на \mathbb{R}). Нетрудно видеть, что на прямой не существует других изометрических копий \mathcal{B} .

Следующая простая Лемма распространяет эти идеи на многомерные чебышевские пространства \mathbb{R}_∞^n . Грубо говоря, она утверждает, что произвольное множество точек \mathbb{R}^n образует ℓ_∞ -изометрическую копию \mathcal{B} тогда и только тогда, когда одна из проекций этого множества

на основные оси является либо сдвигом, либо отражением \mathcal{B} , а все остальные проекции не влияют на расстояния между точками. Эта Лемма появилась ранее в [66], но приведем ее полное краткое доказательство ниже для полноты.

В дальнейшем мы будем использовать обозначение $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ для точек $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Лемма 1.1. Пусть $k, n \in \mathbb{N}$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - последовательность положительных вещественных чисел. Тогда последовательность $\mathbf{x}^0, \dots, \mathbf{x}^k$ точек в \mathbb{R}^n является ℓ_∞ -изометричной к $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ (в таком порядке) тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия. Во-первых, существует $i \leq n$ такое, что последовательность x_i^0, \dots, x_i^k является либо сдвигом, либо отражением \mathcal{B} . Во-вторых, для любого $j \leq n$ и любого $s \leq k$ имеем $|x_j^s - x_j^{s-1}| \leq |x_i^s - x_i^{s-1}| = \lambda_s$.

Доказательство. Пусть последовательность $\mathbf{x}^0, \dots, \mathbf{x}^k$ точек в \mathbb{R}^n является ℓ_∞ -изометрической копией \mathcal{B} . Для краткости обозначим $\sigma_s := \sum_{t=1}^s \lambda_t$ для всех $s = 0, \dots, k$. Пусть i - координата такая, что $|x_i^k - x_i^0| = \sigma_k$ (должна существовать хотя бы одна такая координата, так как $\max_j |x_j^k - x_j^0| = \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0\|_\infty = \sigma_k$). Тогда должно быть ясно, что для всех $s = 1, \dots, k-1$, мы имеем единственный выбор x_i^s так, что два неравенства $|x_i^s - x_i^0| \leq \|\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^0\|_\infty = \sigma_s$ и $|x_i^k - x_i^s| \leq \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^s\|_\infty = \sigma_k - \sigma_s$ выполняются одновременно. Более того, в этом случае оба неравенства должны выполняться с равенством. На этом доказательство первой части завершено. Вторая часть утверждения тривиальна, так как для любого $j \leq n$ и любого $s \leq k$, очевидно, имеем $|x_j^s - x_j^{s-1}| \leq \|\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^{s-1}\|_\infty = \lambda_s = |x_i^s - x_i^{s-1}|$.

Чтобы доказать обратное, предположим, что последовательность $\mathbf{x}^0, \dots, \mathbf{x}^k$ точек в \mathbb{R}^n удовлетворяет обоим условиям леммы. Учитывая $0 \leq l < r \leq k$, заметим, что из первого условия следует, что $|x_i^r - x_i^l| = \sigma_r - \sigma_l$. Более того, из второго условия и неравенства треугольника следует, что

$$|x_j^r - x_j^l| \leq \sum_{s=l+1}^r |x_j^s - x_j^{s-1}| \leq \sum_{s=l+1}^r |x_i^s - x_i^{s-1}| = \sum_{s=l+1}^r \lambda_s = \sigma_r - \sigma_l.$$

для всех $j \leq n$. Следовательно, имеем $\|\mathbf{x}^r - \mathbf{x}^l\|_\infty = |x_i^r - x_i^l| = \sigma_r - \sigma_l$. Значит, последовательность $\mathbf{x}^0, \dots, \mathbf{x}^k$ действительно является ℓ_∞ -изометрической копией \mathcal{B} . \square

Мы говорим, что данная ℓ_∞ -изометрическая копия \mathcal{B} имеет направление i , если ее проекция на основную ось i образует либо сдвиг, либо отражение \mathcal{B} . Из леммы 1.1 следует, что

каждая ℓ_∞ -изометрическая копия \mathcal{B} имеет по крайней мере (но не обязательно точно) одно направление.

1.3.2 Построение двухцветной раскраски

В данном разделе мы вводим понятие гиперповерхности под названием *змейка* и изучаем ее основные свойства. Эти гиперповерхности будут играть важную роль в построении раскраски и доказательстве основного результата данной работы в разделе 1.4.

Мы начнем с введения некоторых обозначений. Пусть $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ - стандартные базисные векторы для \mathbb{R}^n , а $\mathbf{1}_n \in \mathbb{R}^n$ - их сумма, т.е. вектор, у которого все n координат являются единицами. Заметим, что здесь и далее мы не отличаем точки от их векторов положения. Для всех $m < n$, мы также идентифицируем \mathbb{R}^m с m -мерным подпространством \mathbb{R}^n , которое охватывается первыми m базисными векторами $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$. Например, мы определяем точки $(1, 2) \in \mathbb{R}^2$ и $(1, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$. Для двух подмножеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ обозначим их *сумму Минковского* $\{\mathbf{a} + \mathbf{b} : \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\} \subset \mathbb{R}^n$ на $A + B$ как обычно. Мы называем сумму Минковского *инъективной*, если для всех $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in A, \mathbf{b}, \mathbf{b}' \in B$, из равенства $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a}' + \mathbf{b}'$ следует, что $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$ и $\mathbf{b} = \mathbf{b}'$. Наконец, для подмножества $A \subset \mathbb{R}^n$ и для множества вещественных чисел $I \subset \mathbb{R}$ обозначим множество попарных произведений $\{i \cdot \mathbf{a} : i \in I, \mathbf{a} \in A\} \subset \mathbb{R}^n$ через $I \cdot A$.

Для заданного $n \in \mathbb{N}$, *змейка* $\mathfrak{S}^n(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$ - это n -мерная кусочно-линейная гиперповерхность в \mathbb{R}^{n+1} зависящая от $2n$ положительных вещественных параметров. Определение гиперповерхности дается индукцией по n . Пусть $\mathfrak{S}^0(\emptyset) := \{0\}$ есть просто начало линии. Для $n > 0$, мы определяем $\mathfrak{S}^n(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$ как

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}^n(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) &= \mathfrak{S}^{n-1}(a_1, b_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}) \\ &+ \mathbb{Z} \cdot \{a_n \cdot \mathbf{e}_{n+1} - b_n \cdot \mathbf{1}_n\} + [0, a_n] \cdot \mathbf{e}_{n+1} \cup (0, b_n] \cdot \mathbf{1}_n. \end{aligned} \quad (2)$$

В дальнейшем, при необходимости, мы будем опускать параметры и обозначать $\mathfrak{S}^n(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$ через \mathfrak{S}^n для краткости.

Мы иллюстрируем это определение для случаев $n = 1, 2$ в Рис. 1.

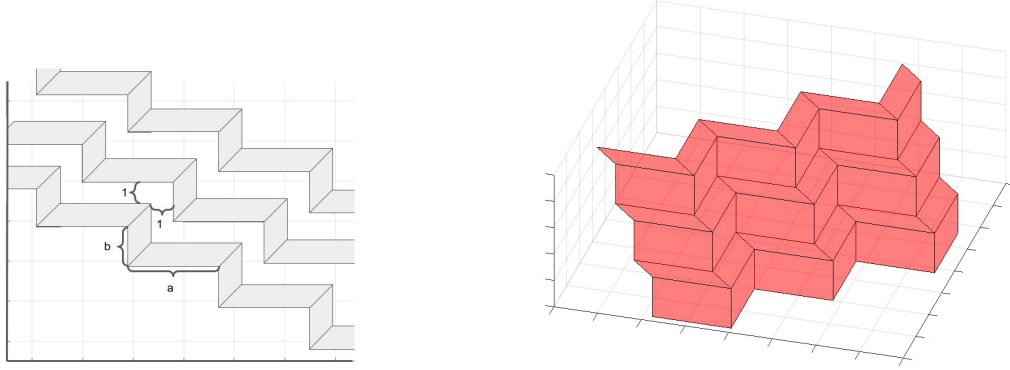


Рис. 1: Конструкция "змейка" для плоскости и пространства

Теперь мы приведем некоторые основные свойства этих гиперповерхностей в виде отдельных лемм.

Лемма 1.2. Для $n \in \mathbb{N}$, положительных вещественных $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ и μ , верно

$$\mathfrak{S}^n(\mu a_1, \mu b_1, \dots, \mu a_n, \mu b_n) = \mu \cdot \mathfrak{S}^n(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n).$$

Доказательство. Доказательство индукцией по n . В случае $n = 0$ имеем $\{0\} = \mu \cdot \{0\}$. Если $n > 1$, то объединив гипотезу индукции с (2), заключаем, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}^n(\mu a_1, \mu b_1, \dots, \mu a_n, \mu b_n) &= \mathfrak{S}^{n-1}(\mu a_1, \mu b_1, \dots, \mu a_{n-1}, \mu b_{n-1}) \\ &\quad + \mathbb{Z} \cdot \{\mu a_n \cdot \mathbf{e}_{n+1} - \mu b_n \cdot \mathbf{1}_n\} + [0, \mu a_n] \cdot \mathbf{e}_{n+1} \cup (0, \mu b_n] \cdot \mathbf{1}_n \\ &= \mu \cdot \mathfrak{S}^{n-1}(a_1, b_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}) \\ &\quad + \mu \cdot \mathbb{Z} \cdot \{a_n \cdot \mathbf{e}_{n+1} - b_n \cdot \mathbf{1}_n\} + \mu \cdot [0, a_n] \cdot \mathbf{e}_{n+1} \cup \mu \cdot (0, b_n] \cdot \mathbf{1}_n \\ &= \mu \cdot \left(\mathfrak{S}^{n-1}(a_1, b_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}) \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{Z} \cdot \{a_n \cdot \mathbf{e}_{n+1} - b_n \cdot \mathbf{1}_n\} + [0, a_n] \cdot \mathbf{e}_{n+1} \cup (0, b_n] \cdot \mathbf{1}_n \right) \\ &= \mu \cdot \mathfrak{S}^n(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n). \end{aligned}$$

На этом доказательство завершено. □

Лемма 1.3. Для всех $n \in \mathbb{N}$, положительных вещественных чисел $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ и t справедливо следующее. Для любых двух точек $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{S}^n = \mathfrak{S}^n(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$, мы имеем

$$\|\mathbf{x} + t \cdot \mathbf{1}_{n+1} - \mathbf{y}\|_\infty \geq t.$$

Другими словами, ℓ_∞ -расстояние между \mathfrak{S}^n и сдвигом $\mathfrak{S}^n + t \cdot \mathbf{1}_{n+1}$ равно t .

Доказательство. Используем индукцию по n . Если $n = 0$, то доказывать нечего, так как $|0 + t - 0| = t$. Поэтому мы переходим к шагу индукции. Зафиксируем $n \geq 1$, и предположим, что в существуют $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{S}^n$ такие, что

$$\|\mathbf{x} + t \cdot \mathbf{1}_{n+1} - \mathbf{y}\|_\infty < t. \quad (3)$$

Мы используем введенное понятие (2) змейки \mathfrak{S}^n чтобы представить \mathbf{x} в виде суммы

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + c_{\mathbf{x}}(a_n \cdot \mathbf{e}_{n+1} - b_n \cdot \mathbf{1}_n) + v_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_{n+1} + w_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{1}_n,$$

где $\mathbf{x}' \in \mathfrak{S}^{n-1}$, $c_{\mathbf{x}} \in \mathbb{Z}$, $v_{\mathbf{x}} \in [0, a_n)$, $w_{\mathbf{x}} \in [0, b_n]$, либо $v_{\mathbf{x}}$ или $w_{\mathbf{x}}$ равны нулю. Затем мы представляем \mathbf{y} аналогичным образом.

Учитывая только последнюю координату, из (3) выводим, что

$$|a_n(c_{\mathbf{x}} - c_{\mathbf{y}}) + v_{\mathbf{x}} - v_{\mathbf{y}} + t| < t. \quad (4)$$

Поскольку $v_{\mathbf{x}} - v_{\mathbf{y}} > -a_n$, последнее неравенство подразумевает, что $c_{\mathbf{x}} - c_{\mathbf{y}} \leq 0$.

Аналогично, можно рассмотреть первые n из $n + 1$ координат в (3), чтобы получить, что

$$\|\mathbf{x}' + (b_n(c_{\mathbf{y}} - c_{\mathbf{x}}) + w_{\mathbf{x}} - w_{\mathbf{y}} + t) \cdot \mathbf{1}_n - \mathbf{y}'\|_\infty < t.$$

По предположению индукции из последнего неравенства следует, что

$$|b_n(c_{\mathbf{y}} - c_{\mathbf{x}}) + w_{\mathbf{x}} - w_{\mathbf{y}} + t| < t. \quad (5)$$

Поскольку $w_{\mathbf{x}} - w_{\mathbf{y}} \geq -b_n$, то из (5) следует, что $c_{\mathbf{y}} - c_{\mathbf{x}} \leq 0$.

Следовательно, если выполняются оба неравенства (4) и (5), то $c_{\mathbf{x}} = c_{\mathbf{y}}$. При таком предположении эти неравенства превращаются в $|v_{\mathbf{x}} - v_{\mathbf{y}} + t| < t$ и $|w_{\mathbf{x}} - w_{\mathbf{y}} + t| < t$, соответственно. В частности, имеем $v_{\mathbf{x}} < v_{\mathbf{y}}$ и $w_{\mathbf{x}} < w_{\mathbf{y}}$. Однако мы имеем противоречие, так как либо $v_{\mathbf{y}}$, либо $w_{\mathbf{y}}$ равны нулю. Это подтверждает шаг индукции.

Итак, мы показали, что для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{S}^n$, имеем $\|\mathbf{x} + t \cdot \mathbf{1}_{n+1} - \mathbf{y}\|_\infty \geq t$. Кроме того, если $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, то последнее неравенство превращается в равенство. Это доказывает, что ℓ_∞ -расстояние между гиперповерхностями \mathfrak{S}^n и $\mathfrak{S}^n + t \cdot \mathbf{1}_{n+1}$ равно t .

□

Лемма 1.4. *Для всех $n \in \mathbb{N}$ и положительных вещественных чисел $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ справедливы следующие два утверждения. Во-первых, сумма Минковского из правой части (2) инъективна. Во-вторых, мы имеем*

$$\mathbb{R}^{n+1} = \mathfrak{S}^n(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) + \mathbb{R} \cdot \mathbf{1}_{n+1},$$

так как эта сумма также инъективна.

Доказательство. Как и в случае предыдущих лемм, доказательство здесь проводится индукцией по n . Базовый случай $n = 0$ является непосредственным. Действительно, первое утверждение в этом случае вырождено, а второе тривиально, так как сумма $\mathbb{R} = \{0\} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{1}_1$ явно инъективна. Итак, мы переходим к шагу индукции.

Предположим, что $n \geq 1$ и рассмотрим сумму Минковского

$$\Sigma := \mathfrak{S}^{n-1} + \mathbb{Z} \cdot \{a_n \cdot \mathbf{e}_{n+1} - b_n \cdot \mathbf{1}_n\} + [0, a_n] \cdot \mathbf{e}_{n+1} \cup (0, b_n] \cdot \mathbf{1}_n + \mathbb{R} \cdot \mathbf{1}_{n+1}. \quad (6)$$

Заметим, что последний член правой части (6) позволяет вычесть произвольный коллинеарный $\mathbf{1}_{n+1}$ вектор из любой точки предыдущих членов суммы Минковского. Более того, эта операция не меняет того, является ли сумма инъективной или нет. В частности, для всех $v \in [0, a_n)$, мы можем заменить $v \cdot \mathbf{e}_{n+1}$ на $v \cdot \mathbf{e}_{n+1} - v \cdot \mathbf{1}_{n+1} = -v \cdot \mathbf{1}_n$. Итак, заменим $[0, a_n] \cdot \mathbf{e}_{n+1}$ из предпоследнего члена (6) на $(-a_n, 0] \cdot \mathbf{1}_n$ и заключим, что

$$\Sigma = \mathfrak{S}^{n-1} + \mathbb{Z} \cdot \{a_n \cdot \mathbf{e}_{n+1} - b_n \cdot \mathbf{1}_n\} + (-a_n, b_n] \cdot \mathbf{1}_n + \mathbb{R} \cdot \mathbf{1}_{n+1}.$$

Аналогично, заменим $\mathbb{Z} \cdot \{a_n \cdot \mathbf{e}_{n+1} - b_n \cdot \mathbf{1}_n\}$ на $\mathbb{Z} \cdot \{-(a_n + b_n) \cdot \mathbf{1}_n\}$ в правой части последнего равенства. Затем, заметим, что

$$\mathbb{Z} \cdot \{-(a_n + b_n) \cdot \mathbf{1}_n\} + (-a_n, b_n] \cdot \mathbf{1}_n = \mathbb{R} \cdot \mathbf{1}_n$$

и эта сумма инъективна. Следовательно,

$$\Sigma = \mathfrak{S}^{n-1} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{1}_n + \mathbb{R} \cdot \mathbf{1}_{n+1} = \mathbb{R}^n + \mathbb{R} \cdot \mathbf{1}_{n+1},$$

где последнее равенство выполняется по индукции.

Наконец, легко проверить, что верно $\mathbb{R}^n + \mathbb{R} \cdot \mathbf{1}_{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ и сумма в левой части инъективна.

Подводя итог, мы убедились, что сумма Минковского (6) равна \mathbb{R}^{n+1} и инъективна. Учитывая определение (2) змейки \mathfrak{S}^n , эти наблюдения приводят к желаемым утверждениям и завершают доказательство. □

Из Леммы 1.4 следует, что

$$\mathbb{R}^{n+1} = \mathfrak{S}^n + \mathbb{R} \cdot \mathbf{1}_{n+1} = \mathfrak{S}^n + [0, 1) \cdot \mathbf{1}_{n+1} + \mathbb{Z} \cdot \mathbf{1}_{n+1} = \widehat{\mathfrak{S}}^n + \mathbb{Z} \cdot \mathbf{1}_{n+1}, \quad (7)$$

где

$$\widehat{\mathfrak{S}}^n = \widehat{\mathfrak{S}}^n(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) = \mathfrak{S}^n(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) + [0, 1) \cdot \mathbf{1}_{n+1}, \quad (8)$$

и обе эти суммы инъективны.

Следующая Лемма описывает "контуры" $\widehat{\mathfrak{S}}^n$, т.е. такие пересечения

$$\widehat{\mathfrak{S}}^n(h) := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_n, h) \in \widehat{\mathfrak{S}}^n\} \quad (9)$$

с гиперплоскостью $x_{n+1} = h$ в случае $a_n > 1$.

Лемма 1.5. *Для всех $n \in \mathbb{N}$, положительных вещественных чисел $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ таких, что $a_n > 1$, и для всех $t \in \mathbb{Z}$, справедливо следующее. Если $h \in [ta_n, ta_n + 1)$, то*

$$\widehat{\mathfrak{S}}^n(h) = \mathfrak{S}^{n-1} - tb_n \cdot \mathbf{1}_n + [0, b_n + 1) \cdot \mathbf{1}_n. \quad (10)$$

Более того, если $h \in [ta_n + 1, ta_n + a_n)$, то

$$\widehat{\mathfrak{S}}^n(h) = \mathfrak{S}^{n-1} - tb_n \cdot \mathbf{1}_n + [0, 1) \cdot \mathbf{1}_n. \quad (11)$$

Доказательство. Начнем с доказательства второго утверждения.

Зафиксируем некоторые $t \in \mathbb{Z}$ и $h \in [ta_n + 1, ta_n + a_n)$. Напомним, что это следует из (2) и (8): каждая точка $\mathbf{x} \in \widehat{\mathfrak{S}}^n$ имеет единственное представление в виде суммы

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + c_{\mathbf{x}}(a_n \cdot \mathbf{e}_{n+1} - b_n \cdot \mathbf{1}_n) + v_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_{n+1} + w_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{1}_n + u_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{1}_{n+1}, \quad (12)$$

где $\mathbf{x}' \in \mathfrak{S}^{n-1}$, $c_{\mathbf{x}} \in \mathbb{Z}$, $u_{\mathbf{x}} \in [0, 1)$, $v_{\mathbf{x}} \in [0, a_n)$, $w_{\mathbf{x}} \in [0, b_n]$, и либо $v_{\mathbf{x}}$ или $w_{\mathbf{x}}$ равно нулю. Последняя координата такой \mathbf{x} равна

$$x_{n+1} = c_{\mathbf{x}}a_n + v_{\mathbf{x}} + u_{\mathbf{x}}, \quad (13)$$

в то время как первые n координат есть

$$(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}' - c_{\mathbf{x}} b_n \cdot \mathbf{1}_n + (w_{\mathbf{x}} + u_{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{1}_n. \quad (14)$$

Заметим, что если $c_{\mathbf{x}} > m$, то имеем $x_{n+1} \geq (m+1)a_n > h$. Аналогично, если $c_{\mathbf{x}} < m$, то имеем $x_{n+1} < (m-1)a_n + a_n + 1 \leq h$. Таким образом, $x_{n+1} = h$ тогда и только тогда, когда $c_{\mathbf{x}} = m, u_{\mathbf{x}} \in [0, 1), v_{\mathbf{x}} = h - ma_n - u_{\mathbf{x}} > 0$. Очевидно, что из последнего неравенства следует, что $w_{\mathbf{x}} = 0$. Теперь из (14) следует, что первые n координат таких точек образуют множество из правой части (11).

Перейдем к первой части леммы. Зафиксируем $m \in \mathbb{Z}$ и $h \in [ma_n, ma_n + 1)$. Мы используем то же представление (12) произвольного $\mathbf{x} \in \widehat{\mathfrak{S}}^n$, что и раньше. Опять же, если $c_{\mathbf{x}} > m$, то из (13) следует, что $x_{n+1} \geq (m+1)a_n > h$. Аналогично, если $c_{\mathbf{x}} < m-1$, то имеем $x_{n+1} < (m-2)a_n + a_n + 1 < h$. Однако на этот раз есть два варианта для $c_{\mathbf{x}}$: если $\mathbf{x} \in \widehat{\mathfrak{S}}^n(h)$, то либо $c_{\mathbf{x}} = m-1$, либо $c_{\mathbf{x}} = m$.

В первом случае $x_{n+1} = h$ тогда и только тогда, когда $v_{\mathbf{x}} + u_{\mathbf{x}} = h - (m-1)a_n$. Заметим, что если $u_{\mathbf{x}} \leq h - ma_n$, то $v_{\mathbf{x}} = h - (m-1)a_n - u_{\mathbf{x}} \geq a_n$, что невозможно. В то же время, если $h - ma_n < u_{\mathbf{x}} < 1$, то мы имеем $0 < v_{\mathbf{x}} < a_n$, как и требуется. Более того, $w_{\mathbf{x}} = 0$ для всех таких \mathbf{x} , при которых $v_{\mathbf{x}}$ положительно. Таким образом, из (14) следует, что первые n координат точек $\mathbf{x} \in \widehat{\mathfrak{S}}^n$ таких, что $x_{n+1} = h$ и $c_{\mathbf{x}} = m-1$ образуют множество S_1 , определяемое как

$$S_1 = \mathfrak{S}^{n-1} - (m-1)b_n \cdot \mathbf{1}_n + (h - ma_n, 1) \cdot \mathbf{1}_n = \mathfrak{S}^{n-1} - mb_n \cdot \mathbf{1}_n + I_1 \cdot \mathbf{1}_n,$$

где

$$I_1 = (h - ma_n + b_n, b_n + 1).$$

Теперь рассмотрим другой случай, а именно, $c_{\mathbf{x}} = m$. Из равенства (13), мы имеем $x_{n+1} = h$ тогда и только тогда, когда $v_{\mathbf{x}} + u_{\mathbf{x}} = h - ma_n$. Поскольку $0 \leq h - ma_n < 1$, есть два варианта удовлетворения последнего уравнения. Первый вариант - взять $u_{\mathbf{x}} = h - ma_n, v_{\mathbf{x}} = 0$, и таким образом значение $w_{\mathbf{x}} \in [0, b_n]$ может быть произвольным. Из (14) следует, что первые n координат таких точек образуют множество

$$S_2 = \mathfrak{S}^{n-1} - mb_n \cdot \mathbf{1}_n + I_2 \cdot \mathbf{1}_n, \text{ где } I_2 = [h - ma_n, h - ma_n + b_n].$$

Второй вариант¹ заключается в том, чтобы взять произвольное $u_{\mathbf{x}} \in [0, h - ma_n)$ и положить $v_{\mathbf{x}} = h - ma_n - u_{\mathbf{x}} > 0$. Для всех таких точек будем иметь $w_{\mathbf{x}} = 0$, так как $v_{\mathbf{x}}$ положительно. Следовательно, по (14), первые n координат этих точек образуют множество

$$S_3 = \mathfrak{S}^{n-1} - mb_n \cdot \mathbf{1}_n + I_3 \cdot \mathbf{1}_n, \text{ где } I_3 = [0, h - ma_n).$$

Рассмотрев все эти возможности, мы пришли к выводу, что

$$\widehat{\mathfrak{S}}^n(h) = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \mathfrak{S}^{n-1} - mb_n \cdot \mathbf{1}_n + (I_1 \cup I_2 \cup I_3) \cdot \mathbf{1}_n.$$

Наконец, легко установить, что $I_3 \cup I_2 \cup I_1 = [0, b_n + 1)$. Это дает (10) и завершает доказательство. \square

Следствие 1.4. *Из леммы 1.5, для всех $m \in \mathbb{Z}$, $h \in [ma_n - a_n + 1, ma_n + a_n)$, верно*

$$\widehat{\mathfrak{S}}^n(h) \subset \widehat{\mathfrak{S}}^n(ma_n) = \mathfrak{S}^{n-1} - mb_n \cdot \mathbf{1}_n + [0, b_n + 1) \cdot \mathbf{1}_n.$$

1.4 Доказательство теоремы 1.4

В данном разделе мы построим специальную двухцветную раскраску пространства \mathbb{R}^n и докажем, что она обладает желаемым свойством. Построение основано на понятии змейки \mathfrak{S}^n , поэтому мы используем обозначения из предыдущего раздела.

Для данного $n \in \mathbb{N}$, полагаем

$$a_i = a_i(n) := \frac{7}{4} \cdot (5^n - 5^{n-i}), \quad b_i = b_i(n) := 4 \cdot 5^{n-i}, \quad i = 0, \dots, n. \quad (15)$$

Для всех $m \leq n$ обозначим змейку $\mathfrak{S}^m(a_1, b_1, \dots, a_m, b_m)$ через \mathfrak{S}_n^m для краткости. Согласно (8), положим $\widehat{\mathfrak{S}}^n := \mathfrak{S}_n^n + [0, 1) \cdot \mathbf{1}_{n+1}$. Напомним, что по (7), мы имеем

$$\mathbb{R}^{n+1} = \widehat{\mathfrak{S}}^n + \mathbb{Z} \cdot \mathbf{1}_{n+1}$$

и эта сумма инъективна. Следовательно, \mathbb{R}^{n+1} можно представить в виде дизъюнктивного объединения

$$\mathbb{R}^{n+1} = \mathfrak{A} \sqcup \mathfrak{B},$$

где

$$\mathfrak{A} := \widehat{\mathfrak{S}}^n + \{2z : z \in \mathbb{Z}\} \cdot \mathbf{1}_{n+1}, \quad \mathfrak{B} := \widehat{\mathfrak{S}}^n + \{2z + 1 : z \in \mathbb{Z}\} \cdot \mathbf{1}_{n+1}.$$

¹Заметим, что этот вариант может быть вырожденным, если $h = ma_n$.

Наконец, раскрасим все точки множеств \mathfrak{R} и \mathfrak{B} в красный и синий цвета, соответственно. Мы проиллюстрируем эту раскраску для случая $n = 1$ на рисунке 2.

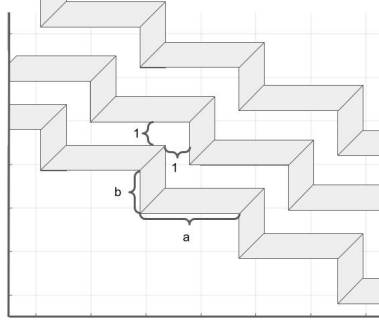


Рис. 2: Часть раскраски "змейка" на плоскости

Для доказательства Теоремы 1.4 покажем, что не существует одноцветных ℓ_∞ -изометрических копий всех батонов $\mathcal{B}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ таких, что $\max_t \lambda_t \leq 1$ и $\sum_{t=1}^k \lambda_t \geq 5^{n+1}$. Ввиду симметрии между \mathfrak{R} и \mathfrak{B} , достаточно доказать отсутствие копий только одного цвета, например красных. Кроме того, из леммы 1.3 следует, что для всех $z, z' \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{x} \in \widehat{\mathfrak{S}}^n + 2z \cdot \mathbf{1}_{n+1}$, $\mathbf{y} \in \widehat{\mathfrak{S}}^n + 2z' \cdot \mathbf{1}_{n+1}$, имеем $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty > 2 \cdot |z - z'| - 1$. В частности, ℓ_∞ -расстояние между любыми двумя точками различных трансляций $\widehat{\mathfrak{S}}^n$ в \mathfrak{R} строго больше единицы. Так как $\max_t \lambda_t \leq 1$, то любая красная ℓ_∞ -изометрическая копия $\mathcal{B}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ должна полностью лежать внутри некоторого сдвига $\widehat{\mathfrak{S}}^n + 2z \cdot \mathbf{1}_{n+1}$ в \mathfrak{R} . Более того, так как $5^{n+1} > \frac{7}{4} \cdot 5^n - \frac{3}{4} = a_n + 1$, следующее предложение завершает доказательство Теоремы 1.4.

Предложение 1.1. *Для $n \in \mathbb{N}$ и положительных вещественных $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ верно следующее. Если $\max_t \lambda_t \leq 1$ и $\sum_{t=1}^k \lambda_t \geq a_n + 1$, тогда $\widehat{\mathfrak{S}}^n$ не содержит ℓ_∞ -изометрической копии множества $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$.*

В остальной части этого раздела мы докажем последнее предложение индукцией по n . База индукции $n = 0$ очевидна. Действительно, $\widehat{\mathfrak{S}}^0$ - это просто полуоткрытый интервал $[0, 1) \subset \mathbb{R}$, который явно не содержит изометрической копии \mathcal{B} , когда $\text{diam}(\mathcal{B}) = \sum_{t=1}^k \lambda_t \geq a_0 + 1 = 1$. Итак, предположим, что $n \geq 1$.

Напомним, что доказательство состоит из двух шагов. На первом шаге доказывається, что никакая ℓ_∞ -изометрическая копия \mathcal{B} в $\widehat{\mathfrak{S}}^n$ не имеет *направлений* $n + 1$ (см. раздел 1.3.1), а на втором шаге мы показываем, что направления $1, \dots, n$ также исключены. Это сразу же

завершит доказательство Предложения 1.1, поскольку Лемма 1.1 гарантирует, что каждая ℓ_∞ -изометрическая копия \mathcal{B} в $\widehat{\mathfrak{S}}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ имеет хотя бы одно направление среди первых $n+1$ целых положительных чисел.

Шаг 1: Ни одна ℓ_∞ -изометрическая копия \mathcal{B} в $\widehat{\mathfrak{S}}^n$ не имеет направления $n+1$.

Предположим противное. Пусть последовательность $\mathbf{x}^0, \dots, \mathbf{x}^k$ точек в $\widehat{\mathfrak{S}}^n$ является ℓ_∞ -изометрической копией \mathcal{B} , имеющей направление $n+1$. Таким образом, их последние координаты $x_{n+1}^0, \dots, x_{n+1}^k$ образуют (в таком порядке) либо сдвиг, либо отражение \mathcal{B} . Без потери общности предположим, что верно первое, т.е. что $x_{n+1}^s - x_{n+1}^{s-1} = \lambda_s \leq 1$ для всех $s = 1, \dots, k$.

Выберем $m \in \mathbb{N}$ такое, что $ma_n \leq x_{n+1}^0 < (m+1)a_n$. Априори существуют две возможности: либо $x_{n+1}^k < (m+1)a_n + 1$, либо $x_{n+1}^k \geq (m+1)a_n + 1$.

Первый вариант приводит к противоречию, так как

$$\sum_{t=1}^k \lambda_t = x_{n+1}^k - x_{n+1}^0 < (m+1)a_n + 1 - ma_n = a_n + 1.$$

Итак, давайте предположим, что $x_{n+1}^k \geq (m+1)a_n + 1$. В этом случае, полагаем

$$l := \max\{s : x_{n+1}^s < (m+1)a_n\} \quad \text{and} \quad r := \min\{s : x_{n+1}^s \geq (m+1)a_n + 1\}.$$

Теперь оценим расстояние $\|\mathbf{x}^r - \mathbf{x}^l\|_\infty$ двумя способами, чтобы снова получить противоречие.

С одной стороны, ясно, что

$$(m+1)a_n \leq x_{n+1}^{l+1} = x_{n+1}^l + \lambda_{l+1} \leq x_{n+1}^l + 1 < (m+1)a_n + 1.$$

Аналогично, мы имеем

$$(m+1)a_n \leq x_{n+1}^r - 1 \leq x_{n+1}^r - \lambda_r = x_{n+1}^{r-1} < (m+1)a_n + 1.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^r - \mathbf{x}^l\|_\infty &= x_{n+1}^r - x_{n+1}^l = (x_{n+1}^r - x_{n+1}^{r-1}) + (x_{n+1}^{r-1} - x_{n+1}^{l+1}) + (x_{n+1}^{l+1} - x_{n+1}^l) \\ &= \lambda_r + (x_{n+1}^{r-1} - x_{n+1}^{l+1}) + \lambda_{l+1} < 1 + 1 + 1 = 3. \end{aligned} \tag{16}$$

С другой стороны, ясно, что $\|\mathbf{x}^r - \mathbf{x}^l\|_\infty \geq \|\mathbf{y}^r - \mathbf{y}^l\|_\infty$, где $\mathbf{y}^s = (x_1^s, \dots, x_n^s)$ - множество первых n координат \mathbf{x}^s , $s = 0, \dots, k$. Кроме того, мы имеем $\mathbf{y}^l \in \widehat{\mathfrak{S}}^n(x_{n+1}^l)$ по определению, см. (9). Вспомним, что

$$(m+1)a_n > x_{n+1}^l = x_{n+1}^{l+1} - \lambda_{l+1} \geq (m+1)a_n - 1 \geq ma_n + 1,$$

где последнее неравенство имеет место, так как $a_n \geq 2$, см (15). Поэтому из второй части леммы 1.5 следует, что

$$\widehat{\mathfrak{F}}^n(x_{n+1}^l) = \mathfrak{F}_n^{n-1} - mb_n \cdot \mathbf{1}_n + [0, 1] \cdot \mathbf{1}_n.$$

Аналогично, мы имеем

$$(m+1)a_n + 1 \leq x_{n+1}^r = x_{n+1}^{r-1} + \lambda_r < (m+1)a_n + 1 + 1 \leq (m+2)a_n.$$

Таким образом, следуя второй части Леммы 1.5, имеем следующее:

$$\mathbf{y}^r \in \widehat{\mathfrak{F}}^n(x_{n+1}^r) = \mathfrak{F}_n^{n-1} - (m+1)b_n \cdot \mathbf{1}_n + [0, 1] \cdot \mathbf{1}_n.$$

Наконец, применим Лемму 1.3 и заключим что ℓ_∞ -расстояние между $\widehat{\mathfrak{F}}^n(x_{n+1}^l)$ и $\widehat{\mathfrak{F}}^n(x_{n+1}^r)$ равно $b_n - 1 = 3$, см. (15). В частности, мы имеем

$$\|\mathbf{x}^r - \mathbf{x}^l\|_\infty \geq \|\mathbf{y}^r - \mathbf{y}^l\|_\infty > 3.$$

Однако последнее неравенство противоречит (16). Это замечание завершает Шаг 1.

Шаг 2: Для всех $1 \leq i \leq n$, никакая ℓ_∞ -изометрическая копия \mathcal{B} в $\widehat{\mathfrak{F}}^n$ не имеет направления i .

Это доказательство имеет сходство с аргументом из предыдущего шага. Как и ранее, предположим обратное. Пусть последовательность $\mathbf{x}^0, \dots, \mathbf{x}^k$ точек в $\widehat{\mathfrak{F}}^n$ является ℓ_∞ -изометрической копией \mathcal{B} , имеющей направление i для некоторого $1 \leq i \leq n$. Поскольку последние координаты не определяют расстояния между этими точками (см. лемму 1.1), легко видеть, что последовательность $\mathbf{y}^0, \dots, \mathbf{y}^k$ также является ℓ_∞ -изометрической копией \mathcal{B} , имеющей направление i , где $\mathbf{y}^s = (x_1^s, \dots, x_n^s)$, $s = 0, \dots, k$.

Возьмем индекс l такой, что $x_{n+1}^l = \min_s x_{n+1}^s$. Если этот выбор не является однозначно определенным, то выбираем произвольный из них. Далее, выберем $m \in \mathbb{N}$ такое, что $(m-1)a_n + 1 \leq x_{n+1}^l < ma_n + 1$. Априори существует две возможности: либо $\max_s x_{n+1}^s < (m+1)a_n$, либо $\max_s x_{n+1}^s \geq (m+1)a_n$.

В первом случае, при $s = 0, \dots, k$, мы имеем $(m-1)a_n + 1 \leq x_{n+1}^s < (m+1)a_n$. Таким образом, из Следствия 1.4 следует, что

$$\mathbf{y}^s \in \widehat{\mathfrak{F}}^n(x_{n+1}^s) \subset \widehat{\mathfrak{F}}^n(ma_n) = \mathfrak{F}_n^{n-1} - mb_n \cdot \mathbf{1}_n + [0, b_n + 1] \cdot \mathbf{1}_n. \quad (17)$$

Это доказывает следующее утверждение.

Замечание 1.1. Множество $\{\mathbf{y}^0, \dots, \mathbf{y}^k\} + mb_n \cdot \mathbf{1}_n$ является подмножеством $\mathfrak{S}_n^{n-1} + [0, b_n + 1) \cdot \mathbf{1}_n$ и формирует ℓ_∞ -изометрическую копию \mathcal{B} .

С другой стороны, вспомним, что $b_n = b_n(n) = 4$ в силу (15). Кроме того, имеем $\frac{a_i(n)}{5} = a_i(n-1)$ и $\frac{b_i(n)}{5} = b_i(n-1)$ для всех $i = 1, \dots, n-1$. Отсюда, из леммы 1.2 следует, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_n^{n-1} + [0, b_n + 1) \cdot \mathbf{1}_n &= \mathfrak{S}^{n-1}(a_1(n), b_1(n), \dots, a_{n-1}(n), b_{n-1}(n)) + [0, 5) \cdot \mathbf{1}_n \\ &= 5 \cdot \left(\mathfrak{S}^{n-1}\left(\frac{a_1(n)}{5}, \frac{b_1(n)}{5}, \dots, \frac{a_{n-1}(n)}{5}, \frac{b_{n-1}(n)}{5}\right) + [0, 1) \cdot \mathbf{1}_n \right) \\ &= 5 \cdot \left(\mathfrak{S}^{n-1}(a_1(n-1), b_1(n-1), \dots, a_{n-1}(n-1), b_{n-1}(n-1)) + [0, 1) \cdot \mathbf{1}_n \right) \\ &= 5 \cdot (\mathfrak{S}_{n-1}^{n-1} + [0, 1) \cdot \mathbf{1}_n) = 5 \cdot \widehat{\mathfrak{S}}^{n-1}. \end{aligned}$$

Теперь мы применим гипотезу индукции из Предложения 1.1 к $\widehat{\mathfrak{S}}^{n-1}$ и получим следующее следующее.

Замечание 1.2. Для любых положительных вещественных $\lambda'_1, \dots, \lambda'_{k'}$, если $\max_t \lambda'_t \leq 5$ и $\sum_{t=1}^{k'} \lambda'_t \geq 5a_{n-1}(n-1) + 5$, тогда $\mathfrak{S}_n^{n-1} + [0, b_n + 1)$ не содержит ℓ_∞ -изометрических копий множества $\mathcal{B}(\lambda'_1, \dots, \lambda'_{k'})$.

В частности, из последнего утверждения следует, что сумма $\mathfrak{S}_n^{n-1} + [0, b_n + 1)$ не содержит ℓ_∞ -изометрической копии $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, потому что

$$\sum_{t=1}^k \lambda_t \geq a_n(n) + 1 = \frac{7}{4} \cdot 5^n - \frac{3}{4} > \frac{7}{4} \cdot 5^n - \frac{15}{4} = 5a_{n-1}(n-1) + 5.$$

Однако это наблюдение противоречит Утверждению 1.1.

Таким образом, остается только рассмотреть случай, когда $x_{n+1}^s \geq (m+1)a_n$ для некоторого s . Пусть r - ближайший к l индекс такой, что $x_{n+1}^{r+1} \geq (m+1)a_n$. Без потери общности предположим, что $r > l$. Ясно, что множество $\{\mathbf{x}_s : l \leq s \leq r\}$ является ℓ_∞ -изометрической копией $\mathcal{B}' := \mathcal{B}(\lambda_l, \dots, \lambda_{r-1})$. Таким образом, и множество $\{\mathbf{y}_s : l \leq s \leq r\}$. Более того, в силу выбора r , мы имеем $x_{n+1}^s < (m+1)a_n$ для всех $l \leq s \leq r$. Как и ранее, из этих неравенств вместе со Следствием 1.4 вытекает (17) и доказывается следующее утверждение.

Замечание 1.3. Множество $\{\mathbf{y}_s : l \leq s \leq r\} + mb_n \cdot \mathbf{1}_n$ является подмножеством $\mathfrak{S}_n^{n-1} + [0, b_n + 1) \cdot \mathbf{1}_n$ и формирует ℓ_∞ -изометрическую копию множества $\mathcal{B}' = \mathcal{B}(\lambda_l, \dots, \lambda_{r-1})$.

Наконец, мы оцениваем диаметр \mathcal{B}' , чтобы получить противоречие с Утверждением 1.2.

Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{t=l}^{r-1} \lambda_t &= \sum_{t=l}^r \lambda_t - \lambda_r = \|\mathbf{x}^{r+1} - \mathbf{x}^l\|_\infty - \lambda_r \geq x_{n+1}^{r+1} - x_{n+1}^l - 1 \\ &> (m+1)a_n(n) - (ma_n(n) + 1) - 1 = a_n(n) - 2 = 5a_{n-1}(n-1) + 5, \end{aligned}$$

где последнее равенство находится путем простого вычисления. Это замечание завершает доказательство как Предложения 1.1, так и Теоремы 1.4.

1.5 Следствия

1.5.1 Доказательство следствия 1.2

Учитывая $n \in \mathbb{N}$, пусть N - норма на \mathbb{R}^n . Известный результат гласит, что любые две нормы на конечно-мерном пространстве эквивалентны, т.е. каждая из них ограничена некоторой линейной функцией другой. В частности, существуют положительные числа c и C такие, что $c\|\mathbf{x}\|_N \leq \|\mathbf{x}\|_\infty \leq C\|\mathbf{x}\|_N$ для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. После соответствующего масштабирования мы можем предположить без потери общности, что $C = 1$. Мы доказываем, что двухцветность \mathbb{R}^n из Теоремы 1.4 обладает желаемым свойством с $\delta = \delta(\mathbb{R}_N^n) := 5^n/c$.

Действительно, пусть $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ - батон такой, что $\max_t \lambda_t \leq 1$ и $\sum_{t=1}^k \lambda_t \geq \delta$. Зададим последовательность коллинеарных точек $\mathbf{x}^0, \dots, \mathbf{x}^k$ в \mathbb{R}^n , которая образует N -изометрическую копию \mathcal{B} . Рассмотрим соотношение

$$\mu := \frac{\|\mathbf{x}^r - \mathbf{x}^l\|_\infty}{\|\mathbf{x}^r - \mathbf{x}^l\|_N}.$$

Нетрудно видеть, что из коллинеарности этих точек следует, что значение μ не зависит от индексов l и r таких, что $0 \leq l < r \leq k$. В частности, мы заключаем, что последовательность $\mathbf{x}^0, \dots, \mathbf{x}^k$ образует ℓ_∞ -изометрическую копию батона $\mathcal{B}' = \mathcal{B}(\lambda'_1, \dots, \lambda'_k)$, где $\lambda'_s = \mu\lambda_s$ для всех $s = 0, \dots, k$. Более того, по конструкции мы имеем $c \leq \mu \leq 1$.

Наконец, заметим, что $\max_t \lambda'_t = \mu \cdot \max_t \lambda_t \leq 1$ и $\sum_{t=1}^k \lambda'_t = \mu \cdot \sum_{t=1}^k \lambda_t \geq c \cdot \delta = 5^n$. Отсюда из Теоремы 1.4 следует, что последовательность $\mathbf{x}^0, \dots, \mathbf{x}^k$ содержит точки обоих цветов.

1.5.2 Доказательство следствия 1.3

Пусть \mathbb{R}_N^n - n -мерное нормированное пространство, единичный шар U которого является центрально-симметричным выпуклым многоугольником в \mathbb{R}^n с $2f$ гранями. Следующее дока-

зательство основано на хорошо известном факте, что U можно рассматривать как пересечение f -мерного гиперкуба с некоторой n -мерной гиперплоскостью, содержащей начало координат (см. [75], Теорема 5.1.3 или [101], Предложение 4.5). Однако для ясности мы запишем все детали ниже.

Учитывая $1 \leq i \leq f$, пусть $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^n$ - вектор, ортогональный к i -ой паре противоположных граней U так, что их гиперплоскости определяются уравнениями $\langle \mathbf{c}_i, \mathbf{x} \rangle = 1$ и $\langle \mathbf{c}_i, \mathbf{x} \rangle = -1$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает стандартное евклидово точечное произведение на \mathbb{R}^n . Тогда нетрудно заметить, что

$$U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\langle \mathbf{c}_i, \mathbf{x} \rangle| \leq 1 \text{ для всех } 1 \leq i \leq f\},$$

и что для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ мы имеем

$$\|\mathbf{x}\|_N = \max_{1 \leq i \leq f} |\langle \mathbf{c}_i, \mathbf{x} \rangle|. \quad (18)$$

Рассмотрим линейную функцию $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^f$ определенную для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ как

$$\varphi(\mathbf{x}) = (\langle \mathbf{c}_1, \mathbf{x} \rangle, \dots, \langle \mathbf{c}_f, \mathbf{x} \rangle).$$

Из (18) следует, что $\|\mathbf{x}\|_N = \|\varphi(\mathbf{x})\|_\infty$ для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, φ обеспечивает изометрическое вложение \mathbb{R}_N^n в \mathbb{R}_∞^f . Наконец, легко видеть, что двухцветность \mathbb{R}^f из Теоремы 1.4, индуцированная на образ $\varphi(\mathbb{R}^n)$ обладает желаемым свойством.

1.6 Обобщение на ℓ_p -пространства при $p \neq 2$

Из теоремы 1.4 и следствий 1.2, 1.3 вытекает очевидность следующей теоремы.

Теорема 1.5. *Для любого $1 \leq p \leq \infty$ и любого натурального n , существует такое достаточно большое $k = k(p, n)$ такое, что $\chi(\mathbb{R}_p^n, \mathcal{B}_k) = 2$.*

Доказательство. Для случая $p = \infty$ доказательство проводится с использованием определенной в разделе 1.3.2 явной двухцветной раскраски, состоящей из одинаковых расположенных друг над другом слоев-'змеек', цвета которых мы чередуем. Данная раскраска пространства \mathbb{R}^n не содержит одноцветных ℓ_∞ -изометричных копий прогрессий \mathcal{B}_k при $k \geq 5^n$.

Предположим теперь, что $1 < p < \infty$. Известно, что единичный шар ℓ_p нормы в этом случае является строго выпуклым. А значит, всякая ℓ_p -изометричная копия множества \mathcal{B}_k лежит

на некоторой прямой. Как следствие, она является арифметической прогрессией в пространстве \mathbb{R}_∞^n , длину звена (а значит - и диаметр) которой можно контролировать в терминах n и p . Здесь мы используем тот факт, что ℓ_p -и ℓ_∞ -нормы на \mathbb{R}^n 'эквивалентны' друг другу, т.е. при некоторых положительных $c = c(n, p)$ и $C = C(n, p)$ верно, что $c\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_p \leq C\|\mathbf{x}\|_\infty$ при всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. А значит, из отсутствия в некоторой раскраске пространства \mathbb{R}^n с нормой ℓ_∞ достаточно длинных одноцветных арифметических прогрессий действительно следует и отсутствие в ней одноцветных ℓ_p -изометричных копий множеств \mathcal{B}_k при всех достаточно больших значениях k .

Наконец, рассмотрим случай $p = 1$. Эта ситуация в некотором смысле диаметрально противоположна предыдущей, так как единичным шаром ℓ_1 -нормы является выпуклый центрально симметричный многогранник (точнее - гипероктаэдр или кросс-политоп). Известно, что всякий такой многогранник с f парами противоположных граней является центральным сечением f -мерного гиперкуба некоторой гиперплоскостью. А значит, пространство \mathbb{R}_1^n может быть изометрично вложено в \mathbb{R}_∞^m при $m = 2^{n-1}$. Следовательно, для построения искомой двухцветной раскраски пространства \mathbb{R}_1^n достаточно рассмотреть такую раскраску \mathbb{R}_∞^m , а затем просто индуцировать ее на соответствующее подпространство. \square

Доказательство оставляет открытым вопрос об асимптотическом поведении оптимальной константы $k(p, n)$ из теоремы 1. Наилучшие оценки для $p = \infty$, которых нам удалось добиться в рамках известных методов таковы: $n/\ln(2) \leq k(\infty, n) \leq 3^n$. При каждом фиксированном $1 < p < \infty$ можно показать, что $k(p, n) = o(n)$ при $n \rightarrow \infty$, однако не ясно, стремится ли эта величина к бесконечности с ростом n . Напомним, что в евклидовом случае это стремление отсутствует, так как из вышеупомянутых результатов Эрдёша следует, что $k(2, n) \leq 5$ при всех $n \in \mathbb{N}$. С учетом возросшего в последние годы интереса специалистов к так называемым полихроматическим раскраскам, уместным было бы рассмотреть следующее обобщение исходной задачи. Доказать, что для любого $1 \leq p \leq \infty$ и любых натуральных n и t , существует достаточно большое натуральное $k = k(p, n, t)$ и раскраска пространства \mathbb{R}^n в t цветов такая, что всякая ℓ_p -изометричная копия прогрессии \mathcal{B}_k в \mathbb{R}^n содержит точки всех t цветов. Отметим, что даже для евклидова случая вопрос об асимптотическом поведении величины $k(2, n, t)$ остается открытым.

1.7 Заключительные замечания, вопросы, перспективы

Утверждение Теоремы 1.4 ставит следующую проблему. При $n \in \mathbb{N}$, каков минимум $k = k(\mathbb{R}_\infty^n) \leq 5^n$ такой, что $\chi(\mathbb{R}_\infty^n, \mathcal{B}_k) = 2$? При более тщательном выборе вспомогательных параметров для построенной раскраски можно показать, что $k(\mathbb{R}_\infty^n) = O(3^n)$. Однако, этот подход не приводит к субэкспоненциальной верхней границе. С другой стороны, из (1.1) следует, что $k(\mathbb{R}_\infty^n) \geq n/\ln(2)$. Было бы интересно сократить разрыв между этими границами и найти правильную асимптотику.

Случаи малых размерностей обычно представляют самостоятельный интерес в задачах такого рода. Нетрудно проверить, что $\chi(\mathbb{R}_\infty^2, \mathcal{B}_1) = 4$, $\chi(\mathbb{R}_\infty^2, \mathcal{B}_2) = \chi(\mathbb{R}_\infty^2, \mathcal{B}_3) = 3$ и $\chi(\mathbb{R}_\infty^2, \mathcal{B}_k) = 2$ для всех $k \geq 4$. Однако, нахождение такого полного списка представляется вычислительно сложной задачей даже в случае трехмерного пространства \mathbb{R}_∞^3 .

Следуя доказательству предыдущей Главы 1.2, можно легко показать, что минимум $k = k(\mathbb{R}_p^n)$ такой, что $\chi(\mathbb{R}_p^n, \mathcal{B}_k) = 2$ не превышает $n \cdot 5^n$ при всех $1 < p < \infty$. Однако, естественно предположить, что $k(\mathbb{R}_p^n)$ ограничен для таких значений p , как $n \rightarrow \infty$ по аналогии с евклидовым случаем, где мы имеем $k(\mathbb{R}_2^n) \leq 5$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Верхняя граница на $k(\mathbb{R}_N^n)$, вытекающая из Следствия 1.3, зависит только от числа граней единичного шара, и не зависит от размерности n . Например, если $P(2f)$ - норма на плоскости, единичный шар которой является регулярным $(2f)$ -гоном, то из Следствия 1.3 следует, что $k(\mathbb{R}_{P(2f)}^2) \leq 5^f$. Существует ли равномерная верхняя граница, не зависящая от f , для этой последовательности норм?

2 Хроматическое число слоев

Данная глава посвящена естественному обобщению задачи о хроматическом числе плоскости. Рассматриваются хроматические числа пространств вида $\mathbb{K}^n \times [0, e]^h$, где $\mathbb{K} = \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, для натуральных $n, h \geq 1$ и вещественного $e > 0$, с запрещенным единичным евклидовым расстоянием. Такие метрические пространства будем называть *слоями*, величину n - размерностью слоя, и для краткости будем обозначать их $Slice(n, h, e)$. Впервые они были введены в работе [98], и изучались исключительно для вещественных слоев с евклидовой метрикой.

2.1 Вещественные слои

Очевидно, что для любого положительного e выполнены неравенства

$$\chi(\mathbb{R}^n) \leq \chi(\mathbb{R}^n \times [0, e]^h) \leq \chi(\mathbb{R}^{n+h}).$$

Хроматическое число слоев конечно, так как $\chi(\mathbb{R}^n) \leq 3 + o(1)^n$ при $n \rightarrow \infty$ ([105]). Таким образом, по теореме Вријjn–Erdős это достигается на конечном подграфе.

Как указывалось ранее, изучение раскрасок слоев началось в работе [98] для одномерных и двумерных вещественных слоев с запрещенным единичным евклидовым расстоянием. Для одномерных слоев известны следующие нижние и верхние оценки.

Утверждение 2.1. Пусть $0 < e \leq \sqrt{\frac{3}{4h}}$. Тогда верно

$$\chi(\mathbb{R} \times [0, e]^h) = 3.$$

Пусть $\sqrt{\frac{3}{4h}} < e < \sqrt{\frac{8}{9h}}$. Тогда

$$\chi(\mathbb{R} \times [0, e]^h) = 4.$$

Для удобства и полноты восприятия представим читателю доказательство теоремы.

Доказательство. Верхняя оценка. Пусть $0 < h \leq \sqrt{\frac{3}{4k}}$. Раскрасим \mathbb{R} в 3 цвета, чередуя одноцветные полуинтервалы длины $1/2$ (цветов 1, 2, 3, 1, 2, 3 и т.д.). Затем каждой точке $\mathbb{R} \times [0, h]^k$ присвоим тот же цвет, который имеет проекция из прямого произведения на действительную прямую. Тогда диаметр одноцветного параллелепипеда $[0; \frac{1}{2}] \times [0, h]^k$ не превосходит 1, причем в случае равенства концы диаметра раскрашены по-разному.

Аналогично строится раскраска в 4 цвета при $\sqrt{\frac{3}{4k}} < h \leq \sqrt{\frac{8}{9k}}$ – в этом случае полуинтервалы имеют длину $1/3$.

Нижняя оценка. Проиллюстрируем на тривиальном примере схему доказательства, которая будет использована далее для размерностей 3 и 4.

Предположим, что полоса $\mathbb{R} \times [0, e]$ правильно раскрашена в несколько цветов. Пусть $l \in \mathbb{N}$ таково, что $1/l = \delta \leq e^2$. На границе слойки $\mathbb{R} \times \{0\}$ выберем раскрашенные по-разному точки $u = (x, 0)$, $v = (x + \delta, 0)$, расстояние между которыми равно δ . Такой выбор возможен в силу того, что точки $(0, 0), (\delta, 0), \dots, (1, 0)$ не могут быть все одного цвета. Обозначим $w = (x + \delta/2, e)$. В одной из пар точек u, w или v, w встречаются два цвета. Пусть это пара u, w . Тогда для раскраски точки ξ , которая находится на расстоянии 1 от u, w и лежит внутри полосы, потребуется еще один цвет.

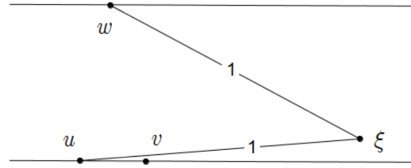


Рис. 3: Нижняя оценка для $\chi(\mathbb{R} \times [0, e])$.

Множество $\mathbb{R} \times [0, h]^k$ при $\sqrt{\frac{3}{4k}} < h \leq \sqrt{\frac{8}{9k}}$ содержит полосу $\mathbb{R} \times [0, h_1]$, $h_1 > \sqrt{3}/2$, которая является произведением \mathbb{R} на большую диагональ k -мерного гиперкуба с ребром h . В такую полосу вкладывается дистанционный граф, изображенный на рис. , причем $d(y, z)$ может принимать любое значение из отрезка $[0, 3 - 2\sqrt{3 - h_1^2}]$. Выберем такую реализацию этого графа, чтобы точки x, y, z лежали на границе полосы, и $d(y, z) = 1/m$; $m \in \mathbb{N}$. Копируя конструкцию m раз, строим дистанционный граф с хроматическим числом 4.

Замечание. Число вершин критического графа стремится к бесконечности, когда h приближается к значению, в котором хроматическое число разрывно ($h = 0$ и $h = \sqrt{\frac{3}{4k}}$), но граф может быть размещен в области, диаметр которой не зависит от h .

Очевидно, функция $\xi_{n,k}(h) = \chi(\mathbb{R}^n \times [0, h]^k)$, определенная при $h \geq 0$, не убывает. При любых фиксированных n, k число значений $\xi_{n,k}(h)$ конечно, поскольку $\chi(\mathbb{R}^n) \leq \xi_{n,k}(h) \leq \chi(\mathbb{R}^{n+k})$, а следовательно, конечно и число точек разрыва. По-видимому, при $n > 1$ ни одна точка разрыва $\xi_{n,k}(h)$ не может быть найдена без улучшения известных оценок $\chi(\mathbb{R}^n)$.

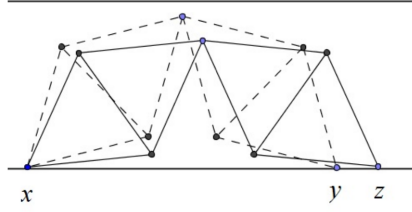


Рис. 4: Цепочка θ -графов внутри полосы.

□

Укажем более широкий класс множеств, для которых нижняя оценка из Теоремы 2.1 остается в силе.

Утверждение 2.2. Пусть ϵ - произвольное положительное число; Q - ϵ -окрестность некой кривой ξ диаметра хотя бы 2. Тогда $\chi(Q) \geq 3$.

Рассмотрим промежуточный случай между плоскостью и трехмерным пространством - $\mathbb{R}^2 \times [0, \epsilon]$ (слойка высоты ϵ). Данное множество допускает правильную раскраску в 7 цветов. Однако нижняя оценка менее тривиальна, чем для плоскости. В работе [98] авторы доказали, что если слойка между двумя плоскостями в трехмерном пространстве произвольным образом раскрашена в 4 цвета, то найдутся две одноцветные точки на единичном расстоянии. Таким образом, для $\mathbb{R}^2 \times [0, \epsilon]$ имеются следующие верхняя и нижняя оценки:

Теорема 2.1. Пусть ϵ - положительное число, меньшее $\sqrt{3/7}$. Тогда

$$5 \leq \chi(\mathbb{R}^2 \times [0, \epsilon]) \leq 7.$$

При "раздутии" плоскости в пространстве большей размерности верхняя оценка остается прежней в силу того, что раскраска плоскости в 7 цветов не содержит расстояний, принадлежащих некоторому интервалу. Таким образом, имеем следующее.

Теорема 2.2. Пусть $h \in \mathbb{Z}$, $\epsilon < \epsilon_o(h)$ - положительное число. Тогда

$$\chi(\mathbb{R}^2 \times [0, \epsilon]^h) \leq 7.$$

Нижнюю оценку можно улучшить при значении $h = 2$. Кроме того, в [98] показано, что при наличии двух инфинитезимальных измерений, в раскраске в 5 цветов найдутся две одноцветные точки на единичном расстоянии. Иными словами, если прямое произведение плоскости на

сколь угодно малый квадрат раскрашено в 5 цветов, то найдутся две одноцветные точки на единичном расстоянии:

Теорема 2.3. Пусть ϵ - произвольное положительное число, Тогда верно:

$$6 \leq \chi(\mathbb{R}^2 \times [0, \epsilon]^2).$$

Для получения приведенных нижних оценок, как и при $n = 1$, достаточно рассмотреть раскраску ограниченной области, диаметр которой не зависит от высоты слойки ϵ .

В работе [148] авторы рассмотрели 3-мерные вещественные и 2-мерные слойки. Они доказали следующую теорему.

Теорема 2.4. Существует $\epsilon_0 > 0$, такое, что для произвольного положительного значения $\epsilon > \epsilon_0$ выполняется

$$10 \leq \chi(\mathbb{R}^3 \times [0, \epsilon]^6) \leq 15.$$

Оценка сверху непосредственно следует из доказательств верхней оценки $\chi(\mathbb{R}^3) \leq 15$, аналогично двумерному случаю. Оценка снизу требует несколько более сложных рассуждений, чем для плоских слоев.

2.2 Рациональные слойки

Для начала дадим обзор текущих результатов, касающихся хроматических чисел рациональных пространств.

Одномерный случай, как и для вещественных чисел, тривиален: $\chi(\mathbb{Q}) = 2$. Некоторое удивление может вызвать тот факт, что точное значение хроматического числа \mathbb{Q}^n известно не только в размерности 2, но и в размерностях 3 и 4. В своих работах Вудалл [58] и Джонсон [85] доказали, что для плоскости и пространства по прежнему допускается правильная раскраска в два цвета: $\chi(\mathbb{Q}^2) = \chi(\mathbb{Q}^3) = 2$. Бенда и Перлес [35] показали, что $\chi(\mathbb{Q}^4) = 4$.

(см. Д. Р. Вудалл [58], П. Д. Джонсон [85] и М. Бенда-М. Перлес [35]). Что касается случая растущей размерности, то лучшая асимптотическая нижняя оценка принадлежит Е. И. Пономаренко и А. М. Райгородскому [14], [13], верхняя - Д. Г. Ларману и К. А. Роджерсу [102].

Теорема 2.5. Для любого $n \in \mathbb{N}$ верно:

$$(1.199 \dots + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{Q}^n) \leq (3 + o(1))^n.$$

Отметим также, что в статье [30] рассматривался смешанный случай пространства $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$.

Обозначим через $[0, \varepsilon]_{\mathbb{Q}}$ множество рациональных чисел, принадлежащих отрезку $[0, \varepsilon]$. Так как $\chi(\mathbb{Q}^4) = 4$, то хроматическое число пространства $\mathbb{Q}^2 \times [0, \varepsilon]_{\mathbb{Q}}^2$ никак не может быть больше 4.

В случае рациональных срезов в [148] авторы показали, что хроматическое число 2-мерного рационального среза составляет не более 4:

$$\chi(\mathbb{Q}^2 \times [0, e]_{\mathbb{Q}}^2) = 4.$$

В [98] были рассмотрены одномерные рациональные слойки и доказана следующая теорема.

Теорема 2.6. *Для достаточно малого положительного e выполняется*

$$\chi(\mathbb{Q} \times [0, e]_{\mathbb{Q}}^3) = 3$$

Очевидно, нельзя заменить в условии теоремы $[0, \varepsilon]_{\mathbb{Q}}^3$ на $[0, \varepsilon]_{\mathbb{Q}}^2$ так как $\chi(\mathbb{Q}^3) = 2$.

2.3 Хроматическое число слоев с запрещенными одноцветными конфигурациями

Рассмотрим хроматические числа пространств $\mathbb{R}^n \times [0, e]^h$ с запрещенными одноцветными конфигурациями, рассмотренными в главе 1. Напомним, что для последовательности положительных вещественных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, множество $\{0, \lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \dots, \sum_{t=1}^k \lambda_t\} \subset \mathbb{R}$ называется *батонном* и обозначается $\mathcal{B}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. В случае $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 1$, т.е. если множество является просто единичной арифметической прогрессией, мы просто обозначаем его для краткости \mathcal{B}_k .

Следующая теорема является следствием теоремы 1.4.

Теорема 2.7. *Для любых $1 \leq p \leq \infty$ и натуральных $h, n \geq 1$ и вещественного $e > 0$, существует такое $k = k(n, h, e)$, что $\chi(\mathbb{R}^n \times [0, e]^h, \mathcal{B}_k) = 2$.*

Доказательство. Так как $\mathbb{R}^n \times [0, e]^h \subset \mathbb{R}_p^{n+h}$, потому если раскрасить $\mathbb{R}^n \times [0, e]^h$ так, что не найдется одноцветных \mathcal{B}_k , то очевидно, что это будет промежуточный случай между определенными в доказательстве теоремы 1.4 раскрасками \mathfrak{S}^{n+h} и \mathfrak{S}^{n+h+1} пространств \mathbb{R}^{n+h} и \mathbb{R}^{n+h+1} соответственно. Более того, если высота слойки e меньше, чем диаметр множества \mathcal{B}_k , то в этом случае задача в точности совпадает с задачей раскрашивания в два цвета пространства

\mathbb{R}^{n+h} , и при построении такой раскраски \mathfrak{S}^{n+h} пространство $\mathbb{R}^n \times [0, e]^h$ также раскрашивается в 2 цвета и не содержит одноцветных \mathcal{B}_k . Однако, если значение e весьма велико, тогда $\mathbb{R}^n \times [0, e]^h$ примерно совпадает с пространством \mathbb{R}^{n+h+1} , и построенная в $\mathbb{R}^n \times [0, e]^h$ раскраска \mathfrak{S}^{n+h+1} не будет содержать одноцветных \mathcal{B}_k .

□

Это очевидно, но это может быть строго доказано с помощью теоремы де Брёйна — Эрдёша для гиперграфов.

Доказательство оставляет открытым вопрос об асимптотическом поведении $k = k(n, h, e)$ из теоремы 1.4, а также поднимает следующий вопрос: какое значение высоты e надо взять, чтобы произошел переход от раскраски \mathfrak{S}^{n+h} к раскраске \mathfrak{S}^{n+h+1} ? Достаточно ли для этого диаметра \mathcal{B}_k ?

3 Графы, представимые в виде слов

Понятие графов, представимых словом, уходит своими корнями в изучение знаменитой полугруппы Перкинса. Впервые понятие графов, представимых словами, было введено С. В. Китаевым [91] и систематически развивается по сей день [92], [90]. Когда вводится новый класс графов, в данном случае, класс графов, представимых словами, прежде всего возникают следующие вопросы. Какие известные классы графов представимы словами, а какие нет? Какие операции сохраняют представимость слов (или непредставимость) и какие свойства сохраняются для этого графа? В частности, нас интересует связь графов, представимых словами, с хроматическим числом графа.

3.1 Понятие графов, представимых словами

Рассматриваются графы без петель петель и/или параллельных рёбер. Пусть w — слово над некоторым алфавитом Σ_q , а x и y — две различные буквы слова w . Будем говорить, что буквы x и y *чередуются* в слове w , если после удаления из w всех букв, кроме копий x и y , получится либо слово вида $xuxy \cdots$, либо слово вида $yxyx \cdots$ (длина каждого из этих слов может быть как чётной, так и нечётной). Например, в слове $abcacbd$ буквы a и b чередуются, а буквы c и d не чередуются.

Слово w называется k -*униформным*, если каждая буква встречается в w ровно k раз. Например, слово $abcabc$ 2-униформно, так как каждая буква встречается два раза. 1-униформное слово над алфавитом Σ_q называется *перестановкой* алфавита Σ_q .

Мы будем использовать слово над алфавитом V для представления неориентированного графа $G = (V, E)$, и использовать ориентированные графы в процессе представления G .

Будем говорить, что граф $G = (V, E)$ *представим в виде слова*, если существует такое слово w , содержащее каждую букву из алфавита V , что буквы x и y , $x \neq y$, чередуются в w тогда и только тогда, когда $\{x, y\} \in E$. Будем также говорить, что слово w *представляет* граф G , и называть w *представляющим словом*.

Например, граф, изображенный на рис.5, представляет слово $w = 431423124132$. Граф на рисунке - это граф, который представлен словом $w = 1342132412$.

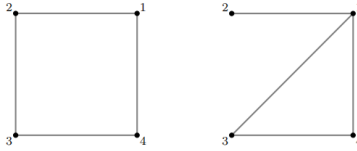


Рис. 5:

Граф G может считаться непомеченным, так как определение не зависит от выбора меток вершин. Один и тот же граф может представлять бесконечно много слов. Например, каждый полный граф K_n может быть представлен перестановкой множества $\{1, 2, \dots, n\}$, и, в частности, словом $w = 123\dots n$.

Например, полный граф K_7 , изображенный на рисунке 6, можно представить словом $w = 1234567$.

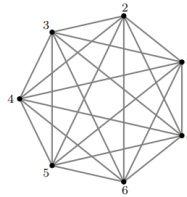


Рис. 6: Полный граф K_7

Для представления безрёберного графа E_n с множеством вершин $V = \{1, 2, \dots, n\}$ подходит любое слово вида $w_1 1 2 \dots n n(n-1) \dots 1 w_2$, где w_1 и w_2 - произвольные слова над алфавитом V .

Класс графов, представимых в виде слов, является наследственным, т. е. замкнутым относительно удаления вершин. Действительно, если слово w представляет граф G , то слово w' , полученное из w удалением всех копий буквы v , представляет граф $G \setminus \{v\}$. Это наблюдение помогло найти единственную известную на сегодняшний день асимптотику для числа графов, представимых в виде слов [50], которая приведена ниже.

Теорема 3.1. Число n -вершинных графов, представимых в виде слов, равно $2^{\frac{n^2}{3} + o(n^2)}$.

Однако, встает вопрос, все ли графы можно представить словами? Ответ на этот вопрос отрицательный.

3.2 k -Представимость и число представимости графа

Граф G называется k -представимым в виде слова (далее будем для краткости писать k -представимым), если существует k -униформное слово w , представляющее его. В таком случае будем говорить, что слово w k -представляет G .

Следующая теорема, введенная в работе [92], показывает эквивалентность введенных определений.

Теорема 3.2. *Граф представим в виде слова тогда и только тогда, когда он k -представим для некоторого k .*

Доказательство. Очевидно, что k -представимость влечёт представимость в виде слова. Докажем обратное. Пусть слово w_0 представляет граф G , причём каждая буква встречается в w_0 не более k раз. Обозначим через A множество букв, встречающихся ровно k раз. Если $A \neq V$, то рассмотрим слово w' , полученное удалением из w_0 всех букв из A . Пусть $p(w')$ является его начальной перестановкой (т. е. перестановкой, которая получается удалением из w' всех кроме первой копий каждой буквы). Нетрудно проверить [92], что слово $w_1 = p(w')w_0$ также представляет граф G . Если оно не является k -униформным, то повторяем ту же самую процедуру до тех пор, пока не получим k -униформное слово, представляющее G . \square

Например, если $k = 3$ и $w_0 = 3412132154$, то $w_1 = 34253412132154$ и $w_2 = 534253412132154$ представляют тот же самый граф, причём последнее слово является 3-униформным. Используя те же аргументы, что и в теореме 3.2, можно доказать, что каждый граф, представимый в виде слова, имеет бесконечно много слов, которые его представляют.

Теорема 3.3. *Любой k -представимый граф G является $(k + 1)$ -представимым.*

Отметим, что слово и его циклический сдвиг могут представлять разные графы (например, 331 и 313). Однако в случае униформного слова циклический сдвиг всегда представляет тот же самый граф.

В работе [92]: Пусть $w = uv$ является k -униформным словом, представляющим граф G , где u и v — некоторые слова над алфавитом V . Тогда слово $w = vi$ также представляет G .

Из теоремы 3.2 вытекает корректность следующего определения. *Числом представимости* графа G называется минимальное k , для которого G является k -представимым. Для

непредставимых графов (существование которых будет показано ниже) можно считать $k = \infty$. Обозначим через $R(G)$ число представимости графа G и положим $R_k = G | R(G) = k$.

Очевидно, что $R_1 = \{G | G \text{ - полный граф}\}$.

Очевидно, что любой полный граф может быть представлен одним словом. Следующая теорема, дает верхнюю границу числа представлений для всех других графов, представимых словом.

Теорема 3.4. *Каждый неполный граф G , представимый словом, равен $2(n - (G))$ -представимый словом, где (G) - размер максимальной клики в G .*

Прямым следствием теоремы 3.4 является то, что задача распознавания графов, представимых в виде слов, NP-полна.

3.3 Перестановочно представимые графы

Ориентация графа называется *транзитивной* если из наличия дуг $u \rightarrow v$ и $v \rightarrow z$ следует существование дуги $u \rightarrow z$. Неориентированный граф является *графом сравнимости*, если у него существует транзитивная ориентация. Легко показать, что наименьшим графом, не имеющим такой ориентации, является цикл C_5 .

Граф $G = (V, E)$ *перестановочно представим*, если он может быть представлен словом вида $p_1 p_2 \dots p_k$, где каждая p_i является перестановкой над V для $1 \leq i \leq k$. Если в таком слове использовано k перестановок, то будем говорить, что G является *перестановочно k -представимым*.

Например, цикл C_4 является перестановочно 2-представимым, в чём можно убедиться, рассмотрев слово 13243142.

Следующая теорема [91] является простым следствием того факта, что любой частичный порядок можно задать как пересечение линейных порядков.

Теорема 3.5. *Граф перестановочно представим тогда и только тогда, когда он является графом сравнимости.*

Следующая теорема устанавливает связь между представимостью в виде слова и перестановочной представимостью.

Теорема 3.6. [92] *Граф G , полученный из графа H добавлением все смежной вершины, представим в виде слова тогда и только тогда, когда H перестановочно представим.*

Колесом W_n называется граф, полученный из цикла C_n добавлением всесмежной вершины. Нетрудно убедиться, что никакой нечётный цикл C_{2n+1} при $n \geq 2$ не является графом сравнимости, а значит, все нечётные колеса W_{2n+1} непредставимы при $n \geq 2$. На самом деле W_5 является наименьшим непредставимым графом и единственным таким графом на 6 вершинах.

Теоремы 3.6 и 3.5 дают представление о структуре графов, представимых словами. Как прямое следствие теоремы 3.6 получается следующее свойство подграфов, индуцированных окружением (множеством соседей) каждой вершины представимого графа.

Теорема 3.7. [92] *Если граф G представим в виде слова, то окружение любой вершины в G является перестановочно представимым.*

Из теорем 3.5 и 3.7 следует, что окружение любой вершины в перестановочно представимом графе является графом сравнимости.

Естественным образом возникает следующий вопрос: если у нас есть граф, в котором окрестность каждой вершины является графом сравнимости, то можно ли представить этот граф словом? Другими словами, справедливо ли обратное утверждение к теореме 3.7? Ответ на этот вопрос отрицательный. Контрпример приведен в [109], и это так называемый $co-(T_2)$ граф, который представлен на рис. 7

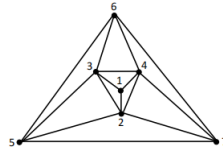


Рис. 7: Непредставимый граф, в котором окружение каждой вершины образует граф сравнимости

Действительно, легко проверить, что индуцированная окрестность любой вершины $co-(T_2)$ является графом сравнимости — примеры транзитивных ориентаций окрестности вершины 1, вершины 2 (изоморфной окрестностям вершин 3 и 4) и окрестности из вершины 5 (изоморфной окрестностям вершин 6 и 7). Однако $co-(T_2)$ не поддается словесному представлению [?].

Кликой в графе называется подмножество попарно смежных вершин. Известно, что задача поиска в заданном графе G клики максимальной мощности является NP-трудной. Однако в классе графов, представимых в виде слов, эта проблема полиномиально разрешима [77].

3.4 Полутранзитивные ориентации и представимые графы

Полуциклом называется ориентированный граф $G = (V, E)$, полученный из цикла заменой ориентации одного ребра. Другими словами, полуцикл представляет собой ориентированный путь $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_n$ и дугу x_1x_n , где все $x_i \in V$. Говорим, что полуцикл в ациклическом ориентированном графе образует *срез*, если он не порождает транзитивного подграфа (т. е. в нём нет некоторой дуги x_ix_j при $i < j$). Заметим, что вершины x_i и x_j в срезе должны быть несмежны (дуги x_jx_i нет из-за ацикличности графа). Ясно, что срез содержит не менее четырёх вершин.

Ориентация графа называется *полутранзитивной*, если она ациклическая и не содержит срезов.

Из определения сразу следует, что всякая транзитивная ориентация является полутранзитивной. Обратное неверно, что легко заметить на примере ориентированного пути.

Граф $G = (V, E)$ является полутранзитивным, если он допускает ациклическую ориентацию, такую, что для любого направленного пути $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_n$ с $x_i \in V$ для всех $i, 1 \leq i \leq k$, либо

- отсутствует ребро $x_1 \rightarrow x_k$, либо
- ребро $x_1 \rightarrow x_k$ присутствует, и существуют ребра $x_i \rightarrow x_j$ для всех $1 \leq i < j \leq k$.

Другими словами, в этом случае (ациклический) подграф, индуцированный вершинами x_1, \dots, x_k , является транзитивным.

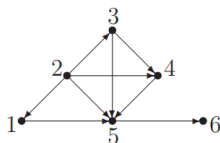


Рис. 8: Пример полутранзитивного оператора

Ориентация графа на рис. 8 является полутранзитивной, и, таким образом, лежащий в основе (ненаправленный) граф является полутранзитивным. Действительно, сразу видно, что орграф ациклический, и нам нужно беспокоиться только о направленных путях на трех или более ребрах. Существует шесть таких путей:

- $2 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 6$. Беспокоиться не о чем, так как $2 \rightarrow 6$ - это не ребро.
- $2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6$. Беспокоиться не о чем, так как $2 \rightarrow 6$ - это не ребро.
- $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$. Поскольку $2 \rightarrow 5$ - это ребро, нам нужно убедиться, что $2 \rightarrow 4$ и $3 \rightarrow 5$ также являются ребрами, что и имеет место.
- $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$. Беспокоиться не о чем, так как $2 \rightarrow 6$ - это не ребро.
- $2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$. Беспокоиться не о чем, так как $2 \rightarrow 6$ - это не ребро.
- $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$. Беспокоиться не о чем, так как $3 \rightarrow 6$ - это не ребро.

Замечание 3.1. Полутранзитивные ориентации определены в [?], [111] в терминах коротких путей следующим образом. Полуцикл - это направленный ациклический граф, полученный путем изменения направления одного ребра направленного цикла. Ациклический орграф является сокращением, если он индуцируется вершинами полуцикла и содержит пару несмежных вершин. Таким образом, орграф на множестве вершин x_1, \dots, x_k является кратчайшим путем, если он содержит направленный путь $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_k$, ребро $x_1 \rightarrow x_k$, и в нем отсутствует ребро $x_i \rightarrow x_j$ для некоторого $1 \leq i < j \leq k$; в частности, у нас должно быть $4 \leq k$, чтобы любой короткий путь был по крайней мере, на четырех вершинах. Пример быстрого доступа приведен на рис. 4.2 (там отсутствуют ребра $1 \rightarrow 4$, $2 \rightarrow 6$ и $3 \rightarrow 6$). Ориентация графа является полутранзитивной, если она ациклическая и не содержит сокращений. Очевидно, что это определение является просто еще одним способом ввести понятие полутранзитивных ориентаций, представленное в определении полутранзитивного графа.

Как будет видно из теоремы 3.8, поиск полутранзитивной ориентации графа эквивалентен распознаванию его представимости в виде слова, а эта задача NP-полна (см. теорему ??). Поэтому эффективного способа построения полутранзитивной ориентации в общем случае скорее всего не существует.

Следующая теорема характеризует графы, представимые в виде слов, в терминах ориентаций. В работе [111] авторы доказали следующую важную теорему.

Теорема 3.8. Граф G представим в виде слова тогда и только тогда, когда G допускает полутранзитивную ориентацию.

Из доказательства теоремы 3.8 вытекает оценка $2n^2$ на длину минимального равномерного слова, представляющего граф. Однако её можно немного улучшить.

Теорема 3.9. [78] Пусть G - неполный представимый в виде слова граф. Тогда он $2(n - \kappa(G))$ -представим, где $\kappa(G)$ - размер максимальной клики в G .

Естественным следствием теоремы 3.9 является принадлежность задачи распознавания представимости графа в виде слова классу NP. Действительно, длина представляющего слова не превосходит $2n^2$, а чередование любой пары букв в слове проверяется за $O(n^2)$ операций.

В работе [90] М. Халлдорсон показал, что проверка полутранзитивности ориентации также может быть выполнена за полиномиальное время и чисто графовыми методами .

3.5 Графы, представимые в виде слов и их связь с хроматическим числом

Изучим соотношение хроматического числа и представимости графа. Напомним, что граф G является k -раскрашиваемым, если множество вершин G может быть разбито не более чем на k независимых множеств. Хроматическим числом $\chi(G)$ графа G называется наименьшее число k , при котором G является k -раскрашиваемым.

Очевидно, что любой 1-раскрашиваемый граф – это граф без ребер.

Теорема 3.10. Любой 1-раскрашиваемый граф G является представимым в 2 словах.

Доказательство. Предположим, что набор вершин G равен $\{1, \dots, n\}$. Тогда легко видеть, что 2-униформное слово $12 \cdots nn(n-1) \cdots 1$ представляет собой G . \square

Класс двухцветных графов - это в точности класс двудольных графов.

Теорема 3.11. Любой двухцветный граф представим перестановочно.

Доказательство. Каждый двудольный граф является графом сравнимости (ориентация всех ребер, если таковые имеются, из одной части в другую дает транзитивную ориентацию), и по Теореме 3.5 следует, что такой граф представим перестановочно. \square

Следующая теорема показывает, что класс графов, представимых в виде слов, содержит все 3-раскрашиваемые графы.

Теорема 3.12. [78] Любой 3-раскрашиваемый граф представим в виде слова.

Доказательство. Пусть дан граф, раскрашенный в 3 цвета. Ориентируем ребра от первого цветового класса через второй к третьему классу. Легко видеть, что мы получаем полутранзитивный оргграф. Таким образом, согласно теореме 3.8, граф может быть представлен словом. \square

Данная теорема не распространяется на более высокие хроматические числа. Например, некоторые 4-цветные графы могут быть непредставимы словами. Однако мы можем получить результат в терминах обхвата графа, который является длиной его самого короткого цикла.

Предложение 3.1. *Пусть G - граф, обхват которого больше его хроматического числа. Тогда G можно представить словом.*

Следующая теорема предоставляет альтернативное (самодостаточное) доказательство того факта, что любой 3-цветной граф можно представить словами.

Теорема 3.13. *3-цветные графы являются $2\lfloor 2n/3 \rfloor$ -представимыми словами.*

Доказательство. Пусть G - трехцветный граф. Предположим, что вершины G разбиты на три независимых множества A , B и C . Можно считать, что множество B имеет максимальную мощность среди этих трех множеств. Направим ребра графа G из A в $B \cup C$ и из B в C , полученную ориентацию обозначим через D .

Пусть $v \in A$. Обозначим через N_v^B (соответственно, N_v^C) произвольную перестановку над множеством соседей v в B (соответственно в C) и через \overline{N}_v^B (соответственно, \overline{N}_v^C) произвольную перестановку по оставшимся вершинам B (соответственно в C). Кроме того, пусть A_v — произвольная перестановка над множеством $A \setminus \{v\}$. Напомним, что для перестановки $\pi r(\pi)$ — это перестановка, записанная в обратном порядке. Рассмотрим 2-однородное слово

$$w_v^A = A_v \overline{N}_v^B v N_v^B N_v^C v \overline{N}_v^C r(A_v) r(N_v^B) r(\overline{N}_v^B) r(\overline{N}_v^C) r(N_v^C).$$

Заметим, что w_v^A покрывает все ребра, лежащие внутри B и C , а также все ребра, инцидентные v . Действительно, граф H , индуцированный w_v^A , получается из полного трехдольного графа с разбиением A, B, C удалением всех ребер, соединяющих v с $\overline{N}_v^B \cup \overline{N}_v^C$. Поскольку начальная перестановка $p(w_v^A) = A_v \overline{N}_v^B v N_v^B N_v^C \overline{N}_v^C$ и ни один направленный путь не может вести из v в \overline{N}_v^B , это топологический вид D .

Аналогично, для $v \in C$ рассмотрим 2-однородное слово

$$w_v^C = N_v^A \overline{N_v^A} \overline{N_v^B} N_v^B C_v r \left(\overline{N_v^A} \right) v r \left(N_v^A \right) r \left(N_v^B \right) v r \left(\overline{N_v^B} \right) r \left(C_v \right),$$

где $C_v, \overline{N_v^A}, N_v^A, \overline{N_v^B}$ and N_v^B определяются по аналогии с соответствующими наборами выше. Используя аналогичные рассуждения, можно показать, что w_v^C покрывает все ребра, лежащие внутри A и B , и все ребра, инцидентные v .

Объединив все эти слова, мы получим $2k$ -однородное слово w , представляющее G , где $k = |A \cup C|$. Поскольку B имеет максимальную мощность $k \leq \lfloor 2n/3 \rfloor$. \square

Назовем граф k -вырожденным неориентированный граф, в котором каждый подграф имеет вершину степени не выше k , то есть некоторая вершина подграфа инцидентна k или меньшему количеству ребер подграфа.

Например, каждый планарный граф имеет вершину степени 5 или меньше, следовательно, каждый планарный граф 5-вырожден.

С помощью простой индукции по числу вершин, очень похожей на доказательство теоремы о шести красках для планарных графов, можно доказать, что k -вырожденный граф имеет хроматическое число не более $k + 1$. Из этого факта и теоремы 3.13 следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 3.14. *Любой 2-вырожденный граф представим в виде слова.*

В 1959 г. Герберт Грэтч опубликовал следующую теорему, доказательство которой было упрощено в [143].

Теорема 3.15. *Каждый планарный граф без треугольников можно раскрасить только тремя цветами.*

Прямым следствием теорем 3.13 и 3.15 является следующая Теорема, впервые приведенная в [110].

Теорема 3.16. *Планарные графы без треугольников представляются в виде слов.*

Оказывается, мы не можем использовать графы с более высоким хроматическим числом — примеры на рис. 9 показывают, что четырехцветные графы не могут быть представимы в виде слов. Графы, показанные на рис. 9, являются минимальными графами не представимыми в виде слов.

В частности, одним из них является колесо W_5 (крайний левый граф). Поскольку класс графов, представимых словом, является наследственным, любой граф, содержащий граф, не представимый словом, в качестве индуцированного подграфа, также не является нельзя представить словом. Например, граф на рис. 10 невозможно представить словами, поскольку он содержит колесо W_5 в качестве индуцированного подграфа.

Нечётные колёса W_{2n+1} непредставимы при $n \geq 2$, а W_5 - минимальный по числу вершин непредставимый граф. Учитывая наследственность класса представимых графов, получаем, что весь класс \mathcal{W} графов, содержащих какое-либо колесо $W_{2n+1} (n \geq 2)$ в качестве индуцированного подграфа, непредставим. Заметим, что каждый граф из \mathcal{W} обязательно содержит вершину степени 5 или больше, а также треугольник. Естественно спросить, существуют ли непредставимые графы максимальной степени 4 или без треугольников. На оба эти вопроса ответ положительный. Граф на рис. 9 справа, отвечает на первый вопрос.

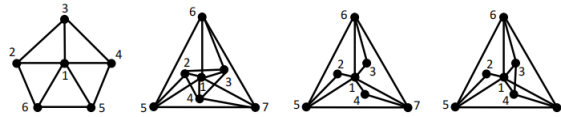


Рис. 9: Примеры графов, не представимых словами

Однако в этом направлении можно получить больше результатов, например, по обхвату графа. Обхват графа — это длина кратчайшего цикла, содержащегося в графе. Например, квадрат (4-цикл C_4) имеет обхват 4, а граф на рис. 10 имеет обхват 3. Граф с обхватом 4 и более не содержит треугольников. Если граф не содержит циклов (то есть является ациклическим графом), его обхват определяется как бесконечный.

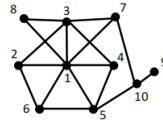


Рис. 10: Пример непредставимого графа

Теорема 3.17. Пусть G — граф, обхват которого больше его хроматического числа. Тогда G можно представить в виде слова.

Доказательство. Предположим, что G раскрашена в цвета $\{1, \dots, \chi(G)\}$. Направим ребра

графа от меньшего к большему цвету. Не существует направленного пути с более чем $\chi(G) - 1$ ребрами, но поскольку G не содержит циклов из $\chi(G)$ или меньшего количества ребер, коротких путей быть не может. Следовательно, G полутранзитивно ориентирован и по теореме 3.8 представим в виде слова. \square

Из теоремы 3.12 и теоремы Брукса [56] следует, например, представимость всех графов максимальной степени 3. В частности, графа Петерсена (рис. ??) раскрашивается в 3 цвета и, следовательно, по теореме 3.13 представим в виде слова. В [109] авторы показали, что этот граф представим в трех словах, но не представим в двух словах.

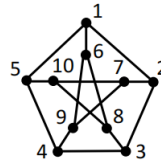


Рис. 11: граф Петерсена

Пусть M — 4-хроматический граф с охватом не меньше 10 (такие графы существуют по теореме Эрдёша). Для каждого пути длины 3 в M добавим к M ребро, соединяющее его концы. Тогда полученный граф без треугольников будет непредставимым.

Таким образом, кратко обобщим ситуацию с k -раскрашиваемыми графами: все 1, 2, 3-раскрашиваемые графы представимы словами. Не все 4-раскрашиваемые графы можно представить в виде слова.

4 Комбинаторика слов

4.1 Основные определения комбинаторики слов

Объектом исследования комбинаторики слов являются символьные последовательности над конечным алфавитом, называемых *словами*. Пусть Σ_q — алфавит мощности q . Слово вида $w = \cdots w_{-2}w_{-1}w_0w_1w_2\cdots$, где все $w_i \in \Sigma_q$, называется *бесконечным в обе стороны*. Слово называется *бесконечным вправо*, если имеет вид $w = w_0w_1w_2\cdots$. Число символов n в конечном слове $w = w_0\cdots w_n$ называется *длиной слова w* и обозначается через $|w|$. Число вхождений символа a в слово w обозначается через $|w|_a$.

Подсловом (или *фактором*) слова w называется слово $w_kw_{k+1}\cdots w_{k+n-1}$, где $k, n \in \mathbb{N}$.

Для примера рассмотрим бесконечное вправо слово $w = 0011100100111\cdots$ над бинарным алфавитом $\Sigma_2 = \{0, 1\}$. Конечное слово $u = 001$ является его подсловом длины $|u| = 3$. Существуют как минимум три его вхождения в слово w : $u = w_{[0,2]}$, $u = w_{[5,7]}$ и $u = w_{[8,10]}$. Нули входят в слово u два раза, а единица один, и обозначается $|u|_0 = 2$ и $|u|_1 = 1$ соответственно.

Центральным объектом исследования комбинаторики слов является понятие комбинаторной (или факторной) сложности, введенное в 1940 году в работе [79] М. Морсом и Г. Хедлундом. *Комбинаторной* (или *факторной*) сложностью $p_w(n)$ слова w называется количество всех подслов длины n в слове w .

Слово w называется *периодическим*, если существует $T \in \mathbb{N}$ такое что для всех i верно равенство $w_i = w_{i+T}$. Слово называется *со временем периодичным* если существуют $T, i_0 \in \mathbb{N}$ для которых верно $\forall i \geq i_0 : w_i = w_{i+T}$.

Очевидно, что среди всех периодов T слова w можно выбрать минимальный период T_{min} . Иногда минимальным начальным периодом периодического бесконечного слова $w = w_0\cdots w_n\cdots$ называется также конечное слово $w_0\cdots w_{T_{min}}$.

Теорема 4.1 (Файн, Уилф). *Если слово длины не меньше $p+q-(p, q)$ периодически с периодами p и q , то оно периодически с периодом (p, q) . Длина $p+q-(p, q)$ оптимальна для всех слов, кроме как над однобуквенным алфавитом, поскольку существуют бинарные слова длины $p+q-(p, q)-1$, периодичные с периодами p и q , но не (p, q) .*

Бесконечное вправо слово w называется *со временем t -периодическим*, если равенства $w_i = w_{i+t}$ выполняются, начиная с некоторого N_0 , то есть при $i > N_0$.

Нетрудно видеть, что всего существует q^t бесконечных t -периодических слов над конечным алфавитом Σ_q - независимо от того, идет речь о словах, бесконечных вправо или в обе стороны.

Следующие две леммы являются классическими результатами комбинаторики на словах и упоминаются практически в каждой монографии на эту тему.

Лемма 4.1. *Бесконечное в обе стороны (вправо) слово w является периодическим (со временем периодическим) тогда и только тогда, когда его комбинаторная сложность $p_w(n)$ ограничена сверху константой, и, начиная с некоторого момента, равна этой константе.*

Лемма 4.2. *Если слово w не является со временем периодическим, то для любого n для его комбинаторной сложности $p_w(n)$ верно неравенство $p_w(n) \geq n + 1$.*

Слова, для которых при всех n верно равенство $p_w(n) = n + 1$, то есть непериодические слова с наименьшей комбинаторной сложностью, образуют класс так называемых слов Штурма. Подробнее о них рассказывается в следующем разделе.

4.2 Слова Штурма

Слова Штурма имеют долгую историю. Они относятся к классу бесконечных слов и хорошо изучены. Первые изложения были представлены Бернулли, Кристоэлем и Марковым в книге А. Венкова [147]. Термин *слово Штурма* впервые был введен в Хедлундом и Морсом в работе [81] при развитии символической динамики [79], [80]. Большое количество работ посвящено свойствам этих последовательностей ([139], [63], [140]). В работах Раузи [128],[129], [130], Браун [39], Ито и Ясутоми [83] рассматривали комбинаторные свойства слов Штурма. Связь с итерационными морфизмами были рассмотрены в работах Сиболда [138] и Мигноси [112]. Слова Штурма присутствуют в таких областях как эргодическая теория [?], компьютерная графика [40] и кристаллография.

Существует несколько эквивалентных определений слов Штурма [36].

Прежде всего, бесконечное вправо слово $w = w_0w_1w_2 \dots$ над бинарным алфавитом $\{0, 1\}$ называется словом Штурма, если его комбинаторная сложность $p_w(n)$ равна $n + 1$ для всех значений n .

Бесконечное вправо слово называется словом Штурма, если оно является непериодически *уравновешенным* словом, т.е. для каждого значения n число единиц в подсловах слова w длины n принимает не более двух значений - в действительности, ровно два соседних значения. Это

определение может быть записано следующим равенством: пусть u и v – два подслова слова w одинаковой длины. Пусть $|u|_1$ и $|v|_1$ – количество единиц в подсловах u и v соответственно. Тогда

$$||u|_1 - |v|_1| \leq 1.$$

Слова Штурма - это *механические* слова с иррациональным наклоном, т.е. бесконечное вправо или в обе стороны слово, каждый символ которого задан одним из двух равенств:

$$w_i = \lfloor \alpha(i+1) + \beta \rfloor - \lfloor \alpha i + \beta \rfloor,$$

или

$$w_i = \lceil \alpha(i+1) + \beta \rceil - \lceil \alpha i + \beta \rceil$$

где $\alpha \in (0, 1)$ - это *иррациональный наклон* слова Штурма, и $0 \leq \beta < 1$. Мы можем говорить о *нижних* и *верхних* словах Штурма если в определении выбрана нижняя или верхняя целая часть. Оба варианта совпадают в случае, когда $\alpha i + \beta$ не является целым. Определения будут эквивалентны только в случае бесконечных вправо слов, так как не всякое бесконечное в обе стороны слово со сложностью $n + 1$ будет словом Штурма.

Приведенное выше определение можно эквивалентным образом переписать с помощью вращения единичной окружности - двоичного кодирования траектории точки на окружности длины 1. Этот круг реализуется как интервал $[0, 1]$, идентифицирующий 0 и 1, то есть принимающий дробные части $x \mapsto x \bmod 1$, и каждый символ записывается по правилу:

$$w_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \{\alpha i + \beta\} \in [1 - \alpha, 1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

для всех $i \geq 0$.

В терминах окружности это звучит так: начните с точки $x_0 = \beta$ на окружности и поворачивайте дугу длиной α в каждый дискретный момент времени $x_{k+1} = (\alpha + x_k) \bmod 1$, затем закодируйте результирующие точки на 1, когда они принадлежат к $I_1 = [1 - \alpha, 1]$ и 0, когда они принадлежат к $I_0 = [0, 1 - \alpha]$.

Мы видели, что символы в слове Штурма w соответствуют интервалам I_0 и I_1 , этот процесс можно повторить, чтобы объяснить, что происходит с факторами из $\{0, 1\}^n$. В результате

коэффициенты соответствуют интервалам окружности, ограниченным $0, -\alpha, -2\alpha, \dots, -n\alpha$, по модулю 1. Обратите внимание, что, поскольку α иррационально, то точки $0, -\alpha, -2\alpha, \dots, -n\alpha$, по модулю 1 все различны. Таким образом, приведенные выше точки ограничивают интервалы окружности $n + 1$: у нас есть $n + 1$ возможных факторов из $\{0, 1\}^n$ длины n , появляющихся в слове w .

Например, если взять $\alpha = \varphi - 1$, где φ — золотое сечение, и $\beta = 0$, то получится слово

$$w = 01001010010010100101001001001\dots$$

которое называется *словом Фибоначчи*, и является классическим примером слова Штурма. Слово Фибоначчи формируется путём повторения конкатенации тем же образом, что и числа Фибоначчи образуются путём повторяемых сложений: пусть $S_0 = 0$, а $S_1 = 01$, тогда n -й последовательности определяется как конкатенация предыдущего члена и члена до него: $S_n = S_{n-1}S_{n-2}$.

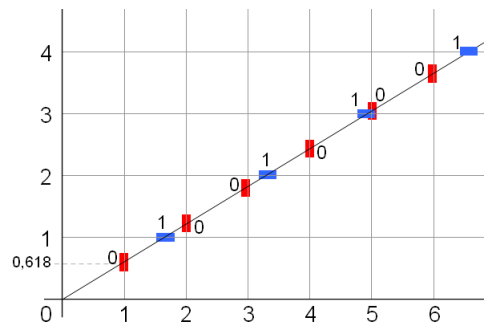


Рис. 12: Построение слова Фибоначчи

В качестве примера слова Штурма на рисунке изображено построение слова Фибоначчи как механического слова: его очередной символ равен нулю тогда и только тогда, когда прямая $y = \alpha i + \beta$, где $0 \leq \alpha, \beta < 1$, не пересекает целочисленную горизонталь между двумя целочисленными вертикалями, и единице, если она ее пересекает.

Заметим, что количество единиц в подслове длины n слова Штурма с наклоном α может быть равно либо $\lfloor n\alpha \rfloor$, либо $\lceil n\alpha \rceil$, в полном соответствии с определением слова Штурма как уравновешенного слова.

Все эти эквивалентные определения относятся к словам над алфавитом $\Sigma_2 = \{0, 1\}$. Слово над любым другим бинарным алфавитом называется словом Штурма, если получается из слова Штурма над алфавитом $\{0, 1\}$ взаимно однозначным переименованием символов.

Мигноси [112] основываясь на предположение о неоднозначности языка [57], доказал в 1989 году следующую важную теорему.

Теорема 4.2. *Количество подслов длины n в слове Штурма определяется суммой*

$$1 + \sum_1^n (n - i + 1)\varphi(i)$$

где $\varphi(i)$ – функция Эйлера.

Доказательство этой теоремы основано на тонком анализе структуры слова Штурма. Однако Берсель и Поккьоль [37] представили доказательство формулы с помощью геометрического двойственного метода. Метод основан на том, что каждому заданному двумя параметрами слову можно поставить в соответствие точку на плоскости, координаты которой равны параметрам слова. При определенном выборе параметров точки из одной связной области будут соответствовать одному и тому же слову. В данном случае области оказываются гранями плоского графа, а значит их количество можно посчитать по формуле Эйлера. Таким образом, количество всех подслов длины n слова Штурма может быть получено как количество всех связных областей плоскости.

Помимо комбинаторной сложности существует множество различных функций сложности: сложность Ли [38], Абелева сложность [46], k -абелева сложность [87], арифметическая сложность [27], [44], максимальная шаблонная сложность [86], циклическая сложность [45], биномиальная сложность [132], оконная сложность [47], сложность периода [113], сложность палиндрома [29]. В большинстве случаев эти альтернативные понятия сложности могут быть использованы для обнаружения (а в некоторых случаях и для характеристики) со временем периодических слов. Среди этого списка, мы будем рассматривать лишь арифметическую сложность, являющуюся в некотором смысле модификацией комбинаторной сложности.

4.3 Арифметическая сложность бесконечных слов

Понятие арифметической сложности бесконечного слова впервые было введено в 2000 г. С. Августиневичем, Д. Фон-Дер-Флассом и А. Фрид в работе [27], и на настоящий момент прекрасно изучены авторами определения. Начало изучению арифметической сложности положили теоремы Ван дер Вардена [146] и Семерди [141].

Теорема Ван дер Вардена — классический результат комбинаторной теории чисел об одноцветных арифметических прогрессиях в раскрасках натуральных чисел.

Теорема 4.3 (Ван дер Варден, 1927). Пусть $l, k \in \mathbb{N}$. Тогда существует такое натуральное число $n(k, l)$, что при разбиении любого отрезка ряда натуральных чисел длины $n(k, l)$ любым способом на k классов (среди которых могут быть и пустые) по крайней мере в одном из этих классов найдется арифметическая прогрессия длины l .

Несмотря на кажущуюся простоту и естественность теорема Ван дер Вардена сыграла значительную роль в развитии двух разделов математики – аддитивной комбинаторики и комбинаторной эргодической теории. Теорема Ван дер Вардена является типичным утверждением теории Рамсея, а также предтечей теоремы Семереди, которая положила начало большой ветви аддитивной комбинаторики. Прежде всего, дадим следующее важное определение.

Будем говорить, что множество $A \in \mathbb{N}$ имеет *положительную асимптотическую плотность*, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{|A\{1, 2, 3, \dots, n\}|}{n} > 0.$$

Теорема 4.4 (Семереди, 1975). В любом бесконечном множестве $A \in \mathbb{N}$ положительной асимптотической плотности для всякого положительного целого l существует арифметическая прогрессия длины l .

В своем доказательстве Семереди использует трудные комбинаторные аргументы. Основу его доказательства составляет так называемая Лемма регулярности [142], которая является, на сегодняшний день, важнейшим инструментом исследования графов. Из этой замечательной теоремы выросла новая большая область комбинаторной теории чисел. Обсуждению этой тематики и посвящен обзор И.Д. Шкредова [23].

Прежде чем подойти к понятию арифметической сложности слова, введем обозначение для арифметической подпоследовательности и дадим определение арифметического замыкания.

Для всякого бесконечного вправо слова $w = w_1 \dots w_n \dots$ через w_d^k обозначим бесконечное слово $w_d^k = w_k w_{k+d} \dots w_{k+nd} \dots$ – *арифметическую подпоследовательность* слова w с разностью d и начальной позицией k .

Арифметическим замыканием бесконечного слова w называется множество

$$A_w = \{w_k w_{k+d} w_{k+2d} \dots w_{k+(n-1)d} \mid k \geq 0, d > 0\}.$$

Теоремы Ван дер Вардена и Семереди в данных терминах могут быть сформулированы следующим образом.

Теорема 4.5 (Ван дер Варден). *Во всяком слове w существует символ a , такой что $a^n \in A_w$ для всякого $n > 0$.*

Теорема 4.6 (Семерди). *Если в слове w для некоторого символа a верхний предел отношения количества вхождений символа a в префикс слова w к длине этого префикса положителен,*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|w[1..n]|}{n} > 0$$

то $a \in A_w$ для всех $n > 0$.

Эти теоремы дают ответ на вопрос о том, какие слова обязательно входят в арифметическое замыкание.

Арифметическая сложность $a_w(n)$ определяется как совокупное число всех подслов арифметических подпоследовательностей данного слова $a_w(n) = \#(A_w \cap \Sigma_q^n)$.

Эта функция является одной из наиболее изученных модификаций классической функции комбинаторной сложности $p_w(n)$.

Вопросы, возникающие в связи с арифметической сложностью, аналогичны вопросам, связанным с комбинаторной сложностью: как растет функция арифметической сложности? В каких случаях функция ведет себя линейно? Эти вопросы непросты для комбинаторной сложности, но могут быть частично решены для арифметической сложности.

Арифметическая сложность отражает структуру множества арифметических подслов бесконечного слова, то есть слов, встречающихся в нем по арифметическим прогрессиям. Арифметическая сложность имеет тесную связь как с классической комбинаторикой, так и с дискретной динамикой. Ясно, что арифметическая сложность бесконечного слова не может быть меньше его комбинаторной сложности, поскольку арифметическое замыкание содержит множество подслов бесконечного слова - его арифметических подслов с разностью 1. Таким образом, верно следующее:

$$1 \leq p_w(n) \leq a_w(n) \leq q^n.$$

Нетрудно также убедиться, что арифметическая сложность бесконечного слова ограничена константой тогда и только тогда, когда слово со временем периодически; сложность же бесконечного слова может расти линейно, как впервые было показано в [27]. При этом почти все бесконечные слова, разумеется, имеют максимально возможную арифметическую сложность q^n , причем это возможно, даже если комбинаторная сложность слова растет линейно.

4.3.1 Арифметическая сложность слов Штурма

Функция арифметической сложности прежде всего была изучена на словах Штурма. Естественным образом возник вопрос: является ли арифметическая сложность слов Штурма также минимальной? Ответ на этот вопрос отрицательный, и может быть получен уже из характеристики равномерно повторяющихся слов линейной арифметической сложности [64]: слова Штурма даже не попадают в класс слов, имеющих линейную сложность. Более того, кажется, что уникальной функции минимальной арифметической сложности непериодического слова не существует: по крайней мере, для равномерно повторяющихся слов вместо этого мы имеем семейство функций с убывающими верхней и нижней асимптотами [28].

Но какова арифметическая сложность слова Штурма? В работе [44] Ж. Кассень и А. Фрид, используя геометрический двойственный метод [37], установили верхнюю оценку арифметической сложности, единую для всех слов Штурма и равную $O(n^3)$. Если быть точнее, то

$$g(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \sum_{p=1}^n (n-p+1)\varphi(p) + 2$$

где $\varphi(p)$ – функция Эйлера.

Теорема 4.7. *Для всякого $\alpha \in (0, 1)$ верно неравенство*

$$a_\alpha(n+1) \leq g(n).$$

Заметим, что $g(n) = (1/6 + 1/\pi^2)n^3 + O(n^2)$, т.е. растет как $O(n^3)$.

Так же авторы показали, что сама функция арифметической сложности зависит от выбора наклона слова Штурма. Исследовав этот интересный факт для некоторых слов Штурма, включая слово Фибоначчи, так же было установлено что в рассмотренных случаях разница между верхней границей и реальной арифметической сложностью ограничена.

В этой же работе были получены точные оценки арифметической сложности для наклонов слова Штурма из интервала $\alpha \in (1/3, 2/2)$, и вращательных слов с иррациональной длиной интервала $\alpha \in (1/3, 1/2)$.

Теорема 4.8. *Для наклона слова Штурма $\alpha \in (0.4, 0.5)$ верны равенства $a_\alpha(1) = 2$, $a_\alpha(2) = 4$, $a_\alpha(3) = 8$, $a_\alpha(4) = 16$, $a_\alpha(5) = 30$*

$$a_\alpha(n+1) = \begin{cases} g(n) - 4, & \text{если } n \text{ - четное} \\ g(n) - 3, & \text{если } n \text{ - нечетное} \end{cases}$$

если $n + 1 \geq 6$.

Теорема 4.9. Для наклона слова Штурма $\alpha \in (0.375, 0.4)$ верны равенства $a_\alpha(1) = 2$, $a_\alpha(2) = 4$, $a_\alpha(3) = 8$, $a_\alpha(4) = 16$, $a_\alpha(5) = 30$, $a_\alpha(6) = 52$, $a_\alpha(7) = 83$, $a_\alpha(8) = 128$ и

$$a_\alpha(n + 1) = \begin{cases} g(n) - 8, & \text{если } n - \text{ четное} \\ g(n) - 9, & \text{если } n - \text{ нечетное} \end{cases}$$

если $n + 1 \geq 9$.

Отметим, что эта формула верна и для слова Фибоначчи, заданного $\alpha = (\sqrt{5} + 1) / 2 - 1 = 0.381966$.

Для остальных значений α ситуация намного сложнее, так как при геометрическом изображении слова в построенной схеме встречается сколь угодно большое число центральных расщепляющихся граней, и разность между числом граней схемы и значением $a_\alpha(n + 1)$ растет.

В отличие от верхней оценки на арифметическую сложность слова Штурма, нижняя оценка, полученная в работе А.Фрид [65], является достаточно точной (в том смысле, что в некоторых случаях разность между ней и точными значениями ограничена константой).

Теорема 4.10. Для всех $n > 0$ арифметическая сложность слова Штурма с наклоном $\alpha < 1/2$ удовлетворяет неравенству

$$a_\alpha(2n - 2) \geq \sum_{p=1}^n p\varphi(p) - 1/2 \sum_{p=1}^{\lfloor 2/\alpha \rfloor} p\varphi(p) - 1/2 \sum_{p=1}^{\lfloor 1/\alpha \rfloor} p\varphi(p)$$

где $\varphi(i)$ – функция Эйлера.

Однако в этой же работе результат дополняется менее точно нижней оценкой, имеющей кубический порядок: существует нижняя граница арифметической сложности слова Штурма, которая также равна $O(n^3)$ (точнее, значение равно $n^3/4\pi^2 + O(n^2)O(1/\alpha^3)$, где α – наклон слова Штурма). Итак, нижняя и верхняя границы отличаются примерно в 10,58 раза, причем верхняя более реалистична. Стоит обратить внимание, что другие функции сложности слов Штурма различаются сильнее. Максимальная шаблонная сложность [86] слова Штурма также минимальна среди непериодических слов и равна $2n$, хотя слова Штурма – не единственные

слова, обладающие этим свойством. Шаablонная сложность [131] слова Штурма, как и арифметическая сложность, зависит от выбора слова и может быть равна $\Omega(n^3)$, хотя принцип зависимости от конкретного слова совершенно иной.

Таким образом, взятые вместе результаты на оценку роста арифметической сложности слов Штурма означают, что слова Штурма с любым наклоном имеют кубический порядок роста.

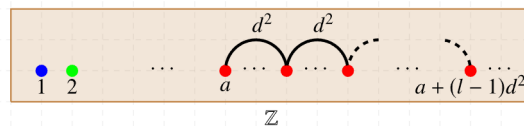
4.4 Полиномиальная сложность

Как упоминалось ранее, Теорема Ван дер Вардена положила начало изучению арифметической сложности бесконечных слов. Естественным образом возникает интерес к рассмотрению следующего вопроса: если не ограничиваться арифметическими подпоследовательностями, а взять подпоследовательности с более прогрессирующим шагом? В этом разделе мы вводим новое понятие *полиномиальной сложности* слова, изучение которой задает модификация Теоремы Ван дер Вардена для полиномиального случая. Так, А. Либман и В. Бергельсон [107] представили частный случай полиномиальной Теоремы Ван дер Вардена.

Теорема 4.11 (Полиномиальная Теорема Ван дер Вардена). Пусть $l, r \in \mathbb{N}$ и $Q(d)$ — полином с целочисленными коэффициентами, т.ч. $Q(0) = 0$. Тогда для любой раскраски множества целых чисел \mathbb{Z} в r цветов существуют $a, d \in \mathbb{Z}$ т.ч. найдется одноцветная арифметическая прогрессия длины l :

$$a, a + Q(d), 2 + 2Q(d), \dots, a + (l - 1)Q(d)$$

Пример 4.1. Одноцветная арифметическая прогрессия длины l с шагом d^2 .



Мы будем изучать более общий случай. Рассмотрим полином

$$Q(k) = a_d k^d + a_{d-1} k^{d-1} + \dots + a_1 k + a_0,$$

где $a_i, d \in \mathbb{N}$, и $i \in \{0, \dots, d\}$.

Прежде чем подойти к понятию полиномиальной сложности, аналогично понятиям арифметической подпоследовательности и арифметического замыкания, введем следующие термины. Для заданного полинома $Q(k)$ определим *полиномиальную подпоследовательность* длины

n бесконечного вправо слова w как конечную последовательность вида $w_{Q(k)}w_{Q(k+1)} \cdots w_{Q(k+n-1)}$, где k – начальная позиция.

Пример 4.2. Рассмотрим функцию $Q(k) = k^2 + 1$ на слове Фибоначчи:

$$w = 01001010010010100101001001001001 \cdots$$

тогда полиномиальная подпоследовательность для $n = 5$ и $k = 0, \dots, 4$ будет иметь вид 10010.

Полиномиальным замыканием бесконечного вправо слова w для полинома степени d называется следующее множество:

$$P_w^d = \{w_{Q(k)}w_{Q(k+1)} \cdots w_{Q(k+n-1)} \mid n, k \geq 0\}$$

Для заданного бесконечного вправо слова $w = w_1w_2 \cdots$ и полинома $Q(k)$ степени d мы определяем *полиномиальную сложность* как функцию $\mathcal{P}_w^d(n)$, равную количеству всех различных полиномиальных подпоследовательностей длины n , встречающихся в слове w :

$$\mathcal{P}_w^d(n) = \# \left(P_w^d \cap \Sigma_q^n \right).$$

Прежде всего, мы рассмотрим случай для полинома степени $d = 1$. Если $Q(k) = ak + b$, то $w_{ak+b}w_{a(k+1)+b} \cdots w_{a(k+n)+b}$, т.е. полиномиальное слово является арифметической подпоследовательностью w_a^{ax+b} слова w с разностью a и начальной позицией $ak + b$. Таким образом, арифметическое замыкание A_w включено в P_w^d , и для $d = 1$ равенство $A_w = P_w^1$ истинно.

Но что можно сказать для случая более высоких степеней полинома? Очевидно, что полиномиальная сложность бесконечного слова является неубывающей функцией, которая растет не быстрее, чем число всех возможных слов над заданным алфавитом q^n . Поскольку арифметическая сложность является частным случаем полиномиальной сложности, то функция полиномиальной сложности растет не медленнее, чем арифметическая сложность слова w , и, как следствие, не медленнее, чем комбинаторная сложность слова w . Таким образом, для любых $d, n > 0$ верны следующие неравенства :

$$1 \leq p_w(n) \leq a_w(n) \leq \mathcal{P}_w^d(n) \leq q^n.$$

Очевидно предположить, что функция полиномиальной сложности в первую очередь ограничена степенью полинома d .

Естественным образом возникает желание рассмотреть введенную функцию полиномиальной сложности прежде всего на словах Штурма, что и будет сделано в следующем разделе.

4.4.1 Полиномиальная сложность слов Штурма

Прежде всего, введем некоторые необходимые обозначения.

Пусть w – слово Штурма с параметрами α, β . Для $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ обозначим через $v_\alpha(\alpha', \beta', n)$ слово длины n , определенное по правилу

$$v_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \{\alpha'Q(i+k) + \beta'\} \in [1-\alpha, 1], \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

для всех $i = 0, \dots, n-1$ и $k \geq 0$.

Таким образом, для полинома степени d множество всех полиномиальных подпоследовательностей длины n слова Штурма равно

$$P_w^d(n) = \bigcup_{\alpha', \beta' \in [0,1]} v_\alpha(\alpha', \beta', n).$$

Это представление в дальнейшем будет использоваться для оценки его мощности $\mathcal{P}^d(n)$.

Изобразим геометрически слово $v_\alpha(\alpha', \beta', n)$ следующим образом. Заштрихуем все полосы вида $k \leq y < k + \alpha$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Если прямая $l \in \mathcal{H}$ пересекает вертикальную линию $x = i$ в заштрихованной полосе, то соответствующий символ v_i слова $v_\alpha(\alpha', \beta', n)$ равен единице. Будем говорить, что прямая $l = \alpha'x + \beta'$ определяет слово $v_\alpha(\alpha', \beta', n)$.

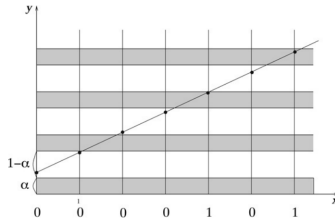


Рис. 13: Геометрическое представление слова из $P_w^1(n)$

Теорема 4.12. Пусть w – слово Штурма. Для любого $d \in \mathbb{N}$ верно:

$$\mathcal{P}_w^d(n) \leq O(n^{d+2}).$$

Для доказательства оценки будем использовать геометрический двойственный метод — технику, введенную в работе [37], адаптировав для поставленной задачи.

4.4.2 Геометрический двойственный метод

Поскольку каждое слово Штурма определяется линией $y = \alpha x + \beta$, естественно рассмотреть геометрическую форму плоскости. Двойственность любого набора точек решетки — это расположение линий. Очевидно, что коэффициенты слов слова Штурма находятся в биекции с гранями некоторого определенного расположения, ограниченного единичным квадратом.

Пусть $(0, x, y)$ — система координат евклидовой плоскости \mathcal{E} . Пусть \mathcal{H} — множество прямых с конечным наклоном, и пусть \mathcal{L} — множество прямых, заданных уравнением $y = \alpha x + \beta$, где $\alpha, \beta \in [0, 1)$. Для линии $\ell \in \mathcal{H}$, заданной уравнением $y = \alpha x + \beta$, через ℓ^+ мы обозначаем полуплоскость $y \leq \alpha x + \beta$.

Следующее множество играет ключевую роль в подсчете полиномиальной сложности. Так как все прямые множества \mathcal{L} лежат ниже прямой $y = x + 1$, то мы будем рассматривать точки, которые тоже лежат ниже прямой $y = x + 1$.

Определим множество $P_\alpha(n) = \{p_{i,j}\}$, где $i = 0, \dots, n-1$ и $j = 0, \dots, 2Q(i)+1$, точки которого задаются следующим образом:

$$p_{i,2k} = (Q(i), k), p_{i,2k+1} = (Q(i), k + \alpha)$$

для всех $i = 0, \dots, n-1$ и $k = 0, \dots, Q(i)$.

Для всякой прямой $l \in \mathcal{L}$ с уравнением $y = \alpha'x + \beta'$ определим последовательность точек $p(\alpha', \beta', n) = \{p_{i,j_i}\}_{i=0, \overline{n-1}}$, где j_i — это наибольшее целое из множества $\{0, \dots, 2Q(i)+1\}$, при котором точка p_{i,j_i} лежит не выше прямой l . Таким образом, в слове $v_\alpha(\alpha', \beta', n)$, которое определяет прямая l , символ v_i принимает значение 1 тогда и только тогда, когда в соответствующей этому слову последовательности точек $p(\alpha', \beta', n)$ значение j_i четно.

Лемма 4.3. *Две линии l_1 и l_2 множества \mathcal{L} определяют одно и то же слово длины n , если совпадают соответствующие им последовательности точек $\{p_{Q(i),j_i}\}_{i=0, \overline{n}}$.*

Чтобы воспользоваться леммой, представим линию точкой. С этой целью вводим двойственное отображение $x \in \mathcal{H} \cup \mathcal{E} \mapsto x^* \in \mathcal{H} \cup \mathcal{E}$. Двойственность отображает линию $\ell \in \mathcal{H}$ с уравнением $y = \alpha x + \beta$ в точку $\ell^* \in \mathcal{E}$ с координатами $(\alpha, -\beta)$, и наоборот: точка p с

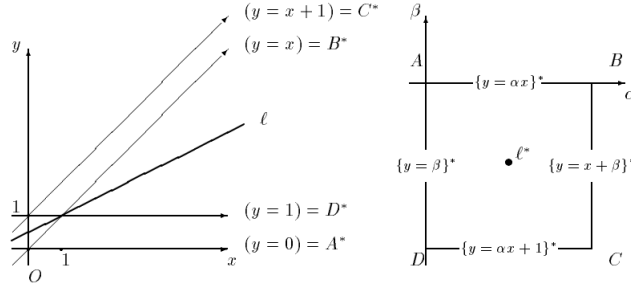


Рис. 14: Двойственное отображение \mathcal{L}

координатами (α, β) отображается в линию p^* , заданную уравнением $y = \alpha x - \beta$. Можно легко проверить, что преобразование двойственности является инволюцией и что оно сохраняет отношение инцидентности: две точки, лежащие на одной прямой, переходят в две прямые, пересекающиеся в соответствующей точке, и наоборот; точка p лежит в полуплоскости $y \leq \alpha x + \beta$ ниже прямой ℓ , заданной уравнением $y = \alpha x + \beta$, тогда и только тогда, когда точка ℓ^* лежит в полуплоскости $y \leq \alpha x - \beta$:

$$p \in \ell \Leftrightarrow \ell^* \in p^*,$$

и

$$p \in \ell^+ \Leftrightarrow \ell^* \in (p^*)^+.$$

Потому будем говорить что точка $\ell^* \in \mathcal{P}$ определяет w , если прямая $\ell \in \mathcal{H}$ определяет w .

Таким образом, при задании двойственного отображения множества \mathcal{L} , мы получаем, что оно отображается на квадрат

$$\mathcal{C} = \{(\alpha, \beta) \mid 0 \leq \alpha, -\beta < 1\}.$$

Крайние точки $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(-1, 1)$, $D(0, -1)$ топологического замыкания $\bar{\mathcal{C}}$ из \mathcal{C} являются, соответственно, двойственными изображениями линий $y = 0$, $y = x$, $y = x + 1$, $y = 1$; его ребра являются, соответственно, двойственными изображениями линий $\{y = \alpha x\}$, $\{y = x + \beta\}$, $\{y = \alpha x + 1\}$ и $\{y = \beta\}$, а его внутренняя часть является двойственным изображением множества $\{y = \alpha x + \beta\}$, где $0 < \alpha, \beta < 1$.

Линии, которые пересекают внутреннюю часть \mathcal{C} , назовем *сегментами*. Определим *схему* \mathcal{A}_n квадрата $\bar{\mathcal{C}}$ как разложение на вершины, ребра и грани. Мы будем понимать схему \mathcal{A}_n как

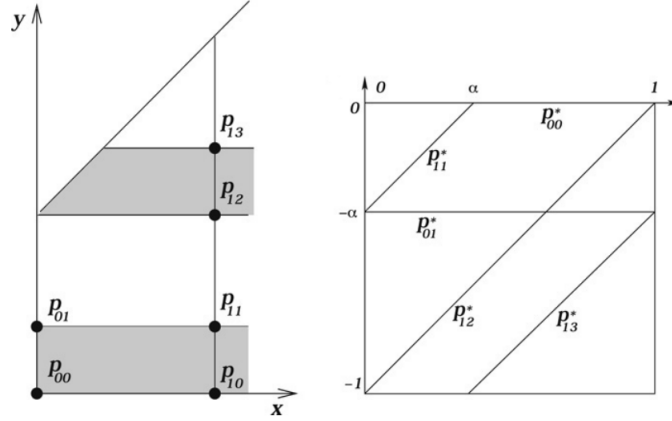


Рис. 15: Пример построения схемы \mathcal{A}_2

плоский граф с вершинами, определенных как точки пересечений отрезков схемы, ребрами, определенными как части отрезков, соединяющих вершины, и гранями, определенными как *внутренности* многоугольников, ограниченных ребрами. Внешнюю грань мы учитывать не будем.

Пример 4.3. *Пример построения схемы \mathcal{A}_2 для множества $P_\alpha(2)$: 6 граней, 4 сегмента, 9 вершин, 14 ребер.*

Лемма 4.4. *Две линии l_1, l_2 из \mathcal{L} определяют одно и то же слово длины n тогда и только тогда, когда l_1^* и l_2^* лежат в одной и той же грани схемы \mathcal{A}_n .*

Это двойственная формулировка предыдущей леммы. По этой лемме можно сказать, что грань f схемы \mathcal{A}_n определяет слово w , если всякая точка $l^* \in \mathcal{A}_n$ определяет w . Если l^* лежит на ребре схемы \mathcal{A}_n , являющемся частью прямой p^* , то двойственная ему прямая l проходит через точку p . Таким образом, точка l^* определяет то же самое, что и грань под ней. Из этого следует, что точки, лежащие вне граней схемы \mathcal{A}_n , не определяют новых слов из \mathcal{A}_n .

Следующая лемма дает первый шаг в доказательстве Теоремы 4.12.

Лемма 4.5. *Число полиномиальных подслов длины n слова Штурма не превышает числа граней f схемы \mathcal{A}_n .*

Лемма 4.6. *Количество граней f схемы \mathcal{A}_n не зависит от α и $f \leq O(n^{d+2})$.*

Доказательство. Для подсчета количества граней, достаточно посчитать их вершины. Пусть $s(l)$ – количество точек множества $P_\alpha(n)$, лежащих на прямой $l \in \mathcal{L}$. Так как каждая вершина

схемы \mathcal{A}_n образуется пересечением минимум двух прямых, то для их подсчета достаточно рассмотреть линии $l \in \mathcal{L}$ с положительным наклоном, такие, что $c(\ell) \geq 2$, и проходящие через точки $p_{a,b}, p_{c,t} \in P_\alpha(n)$, где :

- b – чётно, t – нечётно,
- b – нечётно, t – чётно,
- b, t – чётные,
- b, t – нечётные.

Для подсчета количества таких прямых, посчитаем количество возможных наклонов.

Рассмотрим первый случай: b – чётно, t – нечётно. Тогда $p_{a,b} = (Q(a), b')$, где $b = 2b'$, и $p_{c,t} = (Q(c), t' + \alpha)$, где $t = 2t' + 1$. Пусть точка $p_{a,b}$ лежит левее точки $p_{c,t}$, т.е. $a < c$, тогда наклон прямой l равен $(t' + \alpha - b')/(Q(c) - Q(a))$. Так как α иррационально, то прямая l не проходит через другие точки из $P_\alpha(n)$.

Посчитаем количество возможных наклонов для данных a и c , а именно вычислим

$$\sum_{0 \leq a < c \leq n} (Q(c) - Q(a)).$$

Так как a принимает все значения от 0 до $c - 1$ (всего c значений), а c принимает все значения от 1 до n (всего n значений), то для фиксированного c , разность $c - a$ принимает значения от 1 до c (всего c значений). Приведем формулу выше к двойному суммированию

$$\sum_{0 \leq a < c \leq n} (Q(c) - Q(a)) = \sum_{c=1}^n \sum_{i=1}^c Q(i).$$

Для оценки асимптотики заменим двойное суммирование на двойное интегрирование, что повышает степень подынтегрального полинома на 2, и дает нам оценку $O(n^{d+2})$.

Случай $a > c$ аналогичен.

Рассмотрим прямые, которые проходят минимум через две целочисленные точки множества $P_\alpha(n)$, т.е. точки p_{ab}, p_{cd} где b и d чётны. В силу иррациональности α такие прямые не проходят через нецелые точки множества $P_\alpha(n)$. Таким образом, их вклад, равен сумме, найденной в доказательстве Теоремы 4.2 работы [37]:

$$1 + \sum_1^n (n - i + 1)\varphi(i)$$

, где $\varphi(i)$ – функция Эйлера. В нашем случае:

$$1 + \sum_{i=1}^n (Q(n) - Q(i) + 1)\varphi(Q(i))$$

Так как функция Эйлера линейна, то второе слагаемое не превосходит $O(n^d)$.

Прямые, проходящие через две нецелые точки из множества $P_\alpha(n)$, т.е. точки p_{ab} , p_{cd} где b и d нечётны, рассматриваются симметрично и приносят тот же вклад.

Итого мы имеем:

$$f = O(n^{d+2}) + 2 \sum_{i=1}^n (Q(n) - Q(i) + 1)\varphi(Q(i)) + 2.$$

В частности, видно, что f не зависит от α .

Таким образом, полученная оценка на количество граней f растет как $O(n^{d+2})$. □

Так как число полиномиальных подсловов длины n слова Штурма не превышает числа граней f , то имеем, что полиномиальная сложность слова Штурма равна $O(n^{d+2})$, где d – степень полинома. Что завершает доказательство Теоремы 4.12.

4.5 Заключительные замечания, вопросы, перспективы

В будущем, конечно, стоит более подробно рассмотреть поведение полиномиальной сложности для слова Штурма и рассмотреть слова из других классов бесконечных слов (слово Теплица, слово Туэ–Морса и так далее). В частности, для какого класса полиномов степени $d > 1$ функция $\mathcal{P}_w(n)$ растет линейно? Существует ли вообще такой полином?

Мы оставляем все эти проблемы открытыми для дальнейших исследований.

5 Приложения комбинаторной геометрии

Комбинаторная геометрия играет важную роль в моделировании геологических объектов, особенно при анализе и представлении структурных и геометрических свойств геологических формаций. Использование комбинаторной геометрии в моделировании геологических объектов позволяет анализировать сложные геометрические свойства пород, предсказывать их поведение и взаимодействие с флюидами, а также улучшить понимание физических процессов в горных породах. Например, пространственная структура пористых сред, таких как геологические пласты, может быть представлена в терминах комбинаторной геометрии. Использование графов и комбинаторных структур позволяет моделировать и изучать геологические трещины и разломы. Мы рассмотрим разбиение массивов горных пород на блоки и их геометрические свойства.

5.1 Геометрические свойства блочных сред

Массивы горных пород часто бывают разбиты трещинами на блоки. Геомеханические свойства трещиноватого массива горной породы зависят как от физических характеристик составляющей его породы, так и от геометрии слагающих его блоков. Для изучения блочного массива важно уметь определять относительное число блоков, удовлетворяющих заданному свойству. Чаще всего возникает необходимость по данным о трещиноватости определить распределение блоков по объемам. Будем полагать, что трещины моделируются неограниченными плоскостями и группируются в системы примерно параллельных трещин.

Геометрическая классификация трещин горных пород была разработана С. Н. Чернышевым [24]. В соответствии с этой классификацией одной из моделей, в ряде случаев верно описывающих действительность, является модель, в которой трещины представляют собой системы неограниченных эквидистантных (то есть параллельных и равноотстоящих) систем плоскостей. Взяв за основу этот подход, мы изучим распределение блоков по объемам и формам и представим метод, который позволяет находить распределение блоков не только по объемам, как все разработанные ранее методы, но и по другим геометрическим параметрам.

Рядом авторов рассматривались ранее методы изучения геометрических свойств блоков массивов, описываемых такими моделями, например [1], [4]. Однако эти методы основаны на простом моделировании, что является неэффективным для протяженных областей. Кроме

того, разработанные ранее методы позволяют оценивать только объемы блоков и не учитывают их геометрии.

В работе [3] Беловым А.Я. рассматривалась модель равноотстоящих трещин и пуассоновская модель, в которой предполагается, что пересечения каждой системы трещин с прямой общего положения образуют пуассоновское множество точек, и кроме того, объединения любого числа этих точек пересечения также образуют пуассоновские множества точек.

5.1.1 Эргодический подход

Эргодический подход основан на равенстве средних по объему и по реализациям, что позволяет вместо моделирования всего массива описать локальные его участки, вычислив локальную характеристику такого участка, усреднение которой по реализациям и даст искомую эффективную характеристику массива. При усреднении по реализациям каждый локальный участок учитывается с пропорциональной частоте его появления в массиве. Таким образом, определение локальной характеристики участка и частоты его появления являются основными задачами при данном подходе.

В этом параграфе представим полученные в [3] эргодические теоремы для разбиения пространства n системами равноотстоящих плоскостей и других аналогичных задач. Также мы рассмотрим задачу определения относительного числа N_V блоков, которые превышают некоторое значения объема V для пространства, разбитого системами плоскостей A_1, \dots, A_n , моделирующих трещины. Для каждой i -и системы A_i расстояния между соседними плоскостями постоянны и равны d_i .

Задача отыскания распределения блоков по объемам равносильна задаче определения N_V , поскольку P_V - плотность вероятности того, что монолитный блок имеет объем V , равна:

$$P_V = \lim_{dV \rightarrow 0} (N_V - N_{V+dV}) / dV$$

Если число систем $n < 3$, то плоскости не разбивают пространство на ограниченные части, а если $n = 3$, то они разбивают пространство на одинаковые параллелепипеды, так что этот случай тривиален. Поэтому мы будем рассматривать только случай, когда $n > 3$. Изучая разбиение плоскости n системами параллельных равноотстоящих прямых мы будем предполагать, что $n > 2$ по тем же причинам.

Опишем основную идею. Рассматриваются три системы трещин A_1, A_2, A_3 , разбивающие

пространство на параллелепипеды, которые называют блоками первого порядка. Каждый из них в свою очередь, разбит плоскостями остальных $n - 3$ систем A_4, \dots, A_n на монолитные блоки. Монолитным мы будем называть блок, не пересеченный ни одной трещиной.

Блок первого порядка B примем в качестве локального участка; его разбиение системами A_4, \dots, A_n описывается $n - 3$ параметрами f_4, \dots, f_n , характеризующими сдвиг систем A_4, \dots, A_n относительно B ; параметр f_i соответствует системе A_i .

В качестве f_i примем расстояние от фиксированной вершины B до подходящей плоскости системы A_i , при этом $0 \leq f_i \leq d_i$. Оказывается, что все f_i равновероятны и независимы, т.е. относительное число N блоков в таких, что $f_i < f'_i < f_i + df_i$ равно $\prod_{i=4}^n df_i/d_i$. Придадим сказанному точный смысл. Число частей \bar{N}_V , объем которых превосходит V , в пересчете на единицу объема, находится по Формуле:

$$\bar{N}_V = \frac{1}{V_{1,2,3}} \frac{1}{d_4 \cdots d_n} \int_0^{d_4} \cdots \int_0^{d_n} N_V(f_4, \dots, f_n) df_4 \cdots df_n$$

где $N_V(f_4, \dots, f_n)$ - число блоков, объем которых превосходит V , получившихся при разбиении, задаваемом набором параметров $\{f_1, \dots, f_n\}$. Пусть $V_{1,2,3}$ - объем блока первого порядка B , порожденного системами A_1, A_2, A_3 .

Относительное число N_V блоков, объем которых превосходит V отличается от N средним количеством блоков в единице объема N_0 .

При практическом вычислении выбор тройки систем целесообразно проводить так, чтобы $V_{1,2,3}$ (и следовательно, среднее число частей разбиения B) был бы минимален.

Перейдем к формальной постановке задач. Среднее число N_V монолитных блоков, объем которых превосходит V в пересчете на единицу объема мы определим как среднее по решетке через предел:

$$N_V = \lim_{n \rightarrow \infty} M_{n,V}/n,$$

где $M_{n,V}$ это число монолитных блоков, объем которых больше V в кубе с ребрами длины n , параллельными осями координат. Из доказанного ниже будет следовать, что этот предел существует. Аналогично можно определить N_α - среднее число блоков в единице объема, удовлетворяющих свойству α , если соответствующий предел, аналогичный пределу, представленному

выше, существует.

Уравнения плоскостей из A_i имеют вид:

$$X \cos \varphi_i \sin \psi_i + Y \cos \varphi_i \cos \psi_i + Z \sin \psi_i = \text{const}$$

Причем $\cos \varphi_i \sin \psi_i > 0_i$ в силу выбора нормального вектора.

Предположим также, что все системы находятся в общем положении, так что величины $\{\cos \varphi_i, d_i, \cos \psi_i\}$ алгебраически независимы .

Поскольку породный массив часто имеет сложную структуру из-за сильно выраженной системы пастельных трещин, имеет смысл и плоский аналог задачи. Пусть S - площадь блока. В этом случае величины S, \bar{N}_S определяются аналогично, только блок первого порядка B определяется парой систем прямых A_1, A_2 . Тогда справедлива формула аналогичная 5.1.1:

$$\bar{N}_S = \frac{1}{S_{1,2}} \frac{1}{d_3 \cdots d_n} \int_0^{d_3} \cdots \int_0^{d_n} N_s(f_3, \dots, f_n) df_3 \cdots df_n$$

Уравнения линий трещин i -системы A_i имеют вид:

$$X \cdot \sin \varphi_i + Y \cdot \cos \varphi_i = 0$$

При этом также предполагается, что трещины находятся в общем положении, т.е. величины $\{\cos \varphi_i, d_i\}$ алгебраически независимы. Задача нетривиальна при $n > 2$.

5.1.2 Случай трех систем прямых на плоскости

Рассмотрим первый нетривиальный случай разбиения плоскости тремя системами прямых A_1, A_2, A_3 .

С помощью аффинного преобразования можно добиться того, чтобы системы A_1, A_2 разбивали плоскость на единичные квадраты.

Выбрав подходящим образом направления координатных осей, можно считать, что уравнения прямых из A_3 имеют вид:

$$ax + by = \text{const},$$

где $a, b > 0, a = \cos \varphi, b = \sin \varphi$.

Случаю общего положения исходных систем соответствует случай, когда для преобразованных систем A'_i величины a/d и b/d иррациональны, где d - расстояние между соседними прямыми в преобразованной системе A'_3 .

Рассмотрим теперь разбиение плоскости 3-мя системами прямых A_1, A_2, A_3 . Каждый блок первого порядка B определяется однозначно парой целых чисел (x, y) являющихся в образованной трещинами систем A_1, A_2 системе координат координатами его левого нижнего угла.

Разбиение блока B системой A_3 определяется расстоянием f от точки $0(x, y)$ до ближайшей прямой из A_3 , лежащей выше 0.

Очевидно, что $0 \leq f < d = d_3$. Значения f равномерно распределены на отрезке $[0, d]$, т.е. относительное число блоков первого порядка, для которых $f_1 \leq f < f_2$, где $0 \leq f_1 < f_2$, равно $(f_2 - f_1)/d$.

Тем самым среднее число \bar{N}_S блоков площади $> S$ в пересчете на единицу площади будет равным:

$$\bar{N}_S = \frac{1}{d} \int_0^d N_S(f) df$$

где $N_S(f)$ - определяется аналогично $N_S(f_1, \dots, f_n)$.

Мы опустим доказательство равномерной распределенности f , которое можно найти в [?].

5.1.3 Эргодическая теорема

Прежде чем представить эргодическую теорему, определим необходимые величины. Для доказательства формул 5.1.1 и 5.1.1 в общем случае необходимо проверить независимость распределения параметров f_i и кроме того, их нужно более удобно определить, ведь что значит что прямая (или плоскость) лежит "выше" точки 0? В качестве f_i хочется взять расстояние от выбранного угла до подходящей прямой (плоскости) i -й системы. Но точка 0 находится между двумя прямыми (плоскостями). Какую из них выбрать?

Запишем уравнение прямых i -й системы в нормальном виде:

$$X \cdot a_i + Y \cdot b_i = c_i + k \cdot d_i,$$

где $k \in \mathbb{Z}$, и $a_i^2 + b_i^2 = 1, a_i^2 > 0$.

Аналогично, уравнения плоскостей i -й системы в пространственном случае имеют вид:

$$a_i \cdot X + b_i \cdot Y + c_i \cdot Z = e_i + k \cdot d_i,$$

Причем $a_i > 0$, $a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$.

Рассмотрим пространственный случай.

Точка $O(x_0, y_0, z_0)$ заключена между плоскостями α_1 и α_2 :

$$\alpha_1 : a_i \cdot X + b_i \cdot Y + c_i \cdot Z = e_i + k \cdot d_i$$

$$\alpha_2 : a_i \cdot X + b_i \cdot Y + c_i \cdot Z = e_i + (k + 1) \cdot d_i,$$

что алгебраически означает:

$$a_i \cdot X_0 + b_i \cdot Y_0 + c_i \cdot Z_0 - k \cdot d_i > 0 > a_i \cdot X_0 + b_i \cdot Y_0 + c_i \cdot Z_0 - (k + 1) \cdot d_i$$

Положим $f_i[X_0, Y_0, Z_0]$ равным расстоянию от точки $O(X_0, Y_0, Z_0)$ до α_2 . Как легко убедиться

$$f_i[x_0, Y_0, Z_0] = d_i \cdot \{(-a_i \cdot X_0 - b_i \cdot Y_0 - c_i \cdot Z_0 + e_i) / d_i\}.$$

При параллельном переносе точки $O(X_0, Y_0, Z_0)$; а вектор (X_1, Y_1, Z_1) f_1 преобразуются следующим образом:

$$f'_i = d_i \{(f_i - a_i \cdot X_1 - b_i \cdot Y_1 - c_i \cdot Z_1) / d_i\}$$

Для плоского случая имеют место аналогичные формулы:

$$f_i[X_0, Y_0] = d_i \{(-a_i \cdot X_0 - b_i \cdot Y_0 + e_i) / d_i\}.$$

$$f'_i = d_i \{(f_i - a_i \cdot X_1 - b_i \cdot Y_1) / d_i\}.$$

Сформулируем теперь эргодическую теорему. Величина N_V уже определена выше с помощью формулы 5.1.1.

Теорема 5.1. Пусть V - блок первого порядка, образованный системами A_1, A_2, A_3 , точка O - его вершина. N_V - среднее число монолитных блоков, объем которых превосходит V . Набор $f_i, i = 4, \dots, n$, определяет разбиение V системами A_1, \dots, A_n и тем самым определена величина $N_V(f_4, \dots, f_n)$ - число частей разбиения V , объем которых превосходит V . Тогда

$$\bar{N}_V = \frac{1}{1,2,3} \frac{1}{a_4 \cdots d_n} \int_0^{d_4} \cdots \int_0^{d_n} N_V(f_4, \dots, f_n) df_4 \cdots df_n$$

Для плоского случая аналогично:

$$\bar{N}_S = \frac{1}{S_{1,2}} \frac{1}{d_3 \cdots d_n} \int_0^{d_3} \cdots \int_0^{d_n} N_S(f_3, \dots, f_n) df_3 \cdots df_n.$$

Поставим задачу о математическом ожидании числа добытых тарифных блоков. Пусть Ω - разрабатываемая область массива, настолько большая, что можно пренебрегать граничными блоками и полагать, что она содержит целое число блоков первого порядка. Через $|\Omega|$ мы будем обозначать объем Ω .

Теорема 5.2. Математическое ожидание числа блоков объема выше V , находящихся в области Ω , равно

$$\bar{M}_V^\Omega = |\Omega| \cdot \bar{N}_V.$$

Для плоского случая:

$$\bar{M}_S^\Omega = |\Omega| \cdot \bar{N}_S$$

где $|\Omega|$ площадь области Ω .

В общем случае пусть l — аддитивный функционал, заданный на множестве наборов блоков, т.е. его значение на наборе есть сумма его значений по всем блокам, составляющим набор. Примерами такого Функционала являются число блоков в наборе объема больше V или суммарная "стоимость" блоков.

Пусть \tilde{M}_l^Ω - математическое ожидание, т.е. среднее значение l на наборе монолитных блоков составляющих Ω . Дадим формальное определение величинам \tilde{M}_l^Ω и \bar{M}_V^Ω , введем нужные понятия.

Рассмотрим систему координат $O(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, связанную с блоком первого порядка B . В этой системе координат A_1, A_2, A_3 образуют целочисленную решетку единичных кубов, каждый куб единичной решетки $B(a, b, c)$ определяется вектором сдвига (a, b, c) относительно начального куба

$$B = B(0, 0, 0) = \{x, y, z \mid 0 \leq x, y, z \leq 1\}.$$

Тем самым определяются функции $f_i(x, y, z)$ - параметры разбиения $B(x, y, z)$ системами A_4, \dots, A_n , вычисленные в старой системе координат. При этом

$$f_i(x, y, z) = d_i \cdot \{(f_i - a_i \cdot x - b_i \cdot y - c_i \cdot z) / d_i\}$$

область Ω задается набором $\{B(a + x_i, b + y_i, c + z_i)\}$ составляющих ее блоков первого порядка; причем расположение Ω относительно решетки задается вектором (a, b, c) , а набор векторов (x_i, y_i, z_i) определяет "форму" Ω . Объем $|\Omega|$ области Ω равен $k \cdot V_{1,2,3}$.

Математическое ожидание \tilde{M}_l^Ω или среднее значение l на частях разбиения области Ω определяется как среднее по решетке:

$$\tilde{M}_l^\Omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{8n^3} \left[\sum_{|a|, |b|, |c| \leq n} \sum_{i=1}^k 1[a + x_i, b + y_i, c + z_i] \right],$$

Здесь $l[\alpha, \beta, \gamma]$ - значение l на наборе, образованном разбиением $B(\alpha, \beta, \gamma)$ системами A_4, \dots, A_n .

Переставив порядок суммирования в равенстве выше, мы получим:

$$\tilde{M}_l^\Omega = k \cdot \bar{l},$$

где \bar{l} - среднее значение $l[x, y, z]$ по решетке. Взяв в качестве l число блоков объема больше V , мы определим M_V .

Через $L(f_4, \dots, f_n)$ мы обозначим значение l на наборе, образованном разбиением B , системами A_4, \dots, A_n , определенном параметрами (f_4, \dots, f_n) .

Мы всюду предполагаем, что функция $L(f_4, \dots, f_n)$ интегрируема по Риману.

Теорема 5.3.

$$\tilde{M}_l^\Omega = \frac{|\Omega|}{V_{1,2,3}} \cdot \frac{1}{d_4 \dots d_n} \int_0^{d_4} \dots \int_0^{d_n} L(f_4, \dots, f_n) df_4 \dots df_n.$$

Аналогично, в плоском случае

$$\tilde{M}_l^\Omega = \frac{|\Omega|}{S_{1,2}} \cdot \frac{1}{d_3 \dots d_n} \int_0^{d_3} \dots \int_0^{d_n} L(f_3, \dots, f_n) df_3 \dots df_n.$$

где все соответствующие величины определяются для плоского случая аналогично.

Приведенные теоремы позволяют сводить задачу отыскания распределения блоков по объемам или, что более обще, находить относительное число блоков, удовлетворяющих данному

свойству к изучению разбиения одного блока первого порядка, что позволяет избежать моделирования всего массива. Смысл теоремы состоит, во-первых, в том, что средняя величина l на Ω пропорциональна объему $|\Omega|$, и, во-вторых, что все сдвиги систем A_i относительно B в случае общего положения равномерно распределены и независимы. Сформулируем последнее утверждение в несколько ином виде, в ряде случаев более удобном для использования.

Определим относительное число блоков решетки M_α , удовлетворяющих свойству α через предел:

$$M_\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} M_{n,\alpha},$$

где $M_{n,\alpha}$ - относительное число блоков решетки удовлетворяющих свойству α , находящихся в, шаре радиуса n .

Теорема 5.4. *Относительное число блоков первого порядка, таких, что $0 \leq f_i^0 \leq f_i \leq f_i^0 + \Delta f_i \leq d_i$ равно $\prod_{i=1}^n \Delta f_i / d_i$.*

Доказательство представлено в работе [?], где рассматривался только пространственный случай. Из этой теоремы непосредственно следует теорема 5.3; из ее плоского и одномерного аналога - соответствующие аналоги теоремы 5.3.

Аналогичные теоремы имеют место и в n -мерном случае. Эргодическая теорема позволяет значительно упростить нахождение распределения блоков по объемам.

При нахождении распределения блоков по объемам возникают задачи эффективного многократного вычисления объемов многогранников, грани которых параллельны данному конечному набору плоскостей. Сам объем вычисляется много раз при различных сдвигах, и для эффективного вычисления выгодно вычислить сначала все нужные величины, связанные с направлениями граней.

Достаточно, оказывается, уметь определять коэффициенты в формулах для объема тетраэдра в зависимости от свободных членов уравнений плоскостей его граней. Оказывается, что при массовом вычислении объема каждый раз тратится только несколько умножений. В [?] показано, что если у многогранника M грани находятся в общем положении, то задача вычисления объема M сводится, как и в случае четырех систем плоскостей, с помощью соображений включения-исключения к задаче вычисления объемов тетраэдров, грани которых лежат на \mathcal{R} - семействе плоскостей, являющихся продолжением граней M .

Заклучение

В настоящей работе изучена серия задач, лежащих на стыке комбинаторной геометрии и теории графов, а так же комбинаторной геометрии и комбинаторики слов.

Основные результаты диссертации заключаются в следующем:

- Доказано, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует раскраска \mathbb{R}_∞^n в 2 цвета, т.ч. все достаточно длинные единичные арифметические прогрессии \mathcal{B}_k содержат точки разных цветов, т.е. имеем $\chi(\mathbb{R}_\infty^n, \mathcal{B}_k) = 2$.
- Доказано, что для каждого $1 \leq p \leq \infty$ и каждого натурального n любое нормированное пространство \mathbb{R}_p^n с нормой ℓ_p может быть покрашено в 2 цвета так, что все достаточно длинные единичные арифметические прогрессии \mathcal{B}_k содержат точки разных цветов.
- Доказано, что для любых натуральных $h, n \geq 1$ и вещественного $e > 0$, существует такое $k = k(n, h, e)$, что $\chi(\mathbb{R}^n \times [0, e]^h, \mathcal{B}_k) = 2$.
- Опираясь на полиномиальную Теорему Ван дер Вардена, введена обобщенная модификация функции комбинаторной сложности - полиномиальная сложность бесконечных слов. Установлена верхняя оценка полиномиальной сложности слов Штурма $O(n^{d+2})$ для любого полинома степени $d \in \mathbb{N}$.
- Разработан эргодический подход для разбиения пространства n системами равноотстоящих плоскостей и других аналогичных задач.

Существует множество различных естественных направлений дальнейшего развития данного исследования среди которых особенно отметим следующие.

Утверждение Теоремы 1.4 ставит следующую проблему. При $n \in \mathbb{N}$, каков минимум $k = k(\mathbb{R}_\infty^n) \leq 5^n$ такой, что $\chi(\mathbb{R}_\infty^n, \mathcal{B}_k) = 2$? При более тщательном выборе вспомогательных параметров для построенной раскраски можно показать, что $k(\mathbb{R}_\infty^n) = O(3^n)$. Однако, этот подход не приводит к субэкспоненциальной верхней границе. С другой стороны, из неравенства $\chi(\mathbb{R}_\infty^n, \mathcal{B}_k) \geq \left(\frac{k+1}{k}\right)^n$ следует, что $k(\mathbb{R}_\infty^n) \geq n/\ln(2)$. Было бы интересно сократить разрыв между этими границами и найти правильную асимптотику.

Случаи малых размерностей обычно представляют самостоятельный интерес в задачах такого рода. Нетрудно проверить, что $\chi(\mathbb{R}_\infty^2, \mathcal{B}_1) = 4$, $\chi(\mathbb{R}_\infty^2, \mathcal{B}_2) = \chi(\mathbb{R}_\infty^2, \mathcal{B}_3) = 3$, а также

$\chi(\mathbb{R}_\infty^2, \mathcal{B}_k) = 2$ для всех $k \geq 4$. Однако, нахождение такого полного списка представляется вычислительно сложной задачей даже в случае трехмерного пространства \mathbb{R}_∞^3 .

Верхняя граница на $k(\mathbb{R}_N^n)$, вытекающая из Следствия 1.3, зависит только от числа граней единичного шара, и не зависит от размерности n . Например, если $P(2f)$ - норма на плоскости, единичный шар которой является регулярным $(2f)$ -гоном, то из Следствия 1.3 следует, что $k(\mathbb{R}_{P(2f)}^2) \leq 5^f$. Существует ли равномерная верхняя граница, не зависящая от f , для этой последовательности норм?

Доказательство Теоремы 2.7 оставляет открытым вопрос об асимптотическом поведении $k = k(p, n, h, e)$ из теоремы 1.4 и, соответственно, также поднимает следующий вопрос: какой длины батона $k = k(n, h, e)$ достаточно, при котором $\chi(\mathbb{R}^n \times [0, e]^h, \mathcal{B}_k) = 2$? Также остаётся открытым следующий вопрос: какое значение высоты e надо взять, чтобы произошел переход от раскраски \mathfrak{S}^{n+h} к раскраске \mathfrak{S}^{n+h+1} ? Достаточно ли для этого диаметра \mathcal{B}_k ?

В работе введенная функция полиномиальной сложности рассмотрена только на наиболее изученном классе бесконечных слов - словах Штурма. Конечно, для полноты исследования, необходимо рассмотреть слова из других классов бесконечных слов (слово Теплица, слово Туэ–Морса и так далее).

Естественно ожидать, что реализация данного направления продолжения исследования приведет к усилению большинства результатов, представленных нами в первой, второй и четвертой главах настоящей работы.

Результаты диссертации прежде всего могут быть интересны специалистам в комбинаторной геометрии, комбинаторики слов и теории кодирования, а также специалистам в области Маркшейдерского дела.

Список литературы

- [1] Анощенко Н. Н. Геометрический анализ трещиноватости и блочности месторождений облицовочного камня // Методические указания, Москва, Изд. МГИ, 1983.
- [2] Белов А. Я., Борисенко В. В., Латышев В. Н. Мономиальные алгебры // Алгебра – 4, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., **26**, ВИНТИ, М., 2002, 35–214.
- [3] Белов А.Я. Геометрические свойства блочных сред // Деп. ВИНТИ. 16.01.91, N272-B91.
- [4] Количко А. В. Опыт оценки блочности трещиноватого массива скальных пород // Труды Гидропроекта, Сб.14, Москва–Ленинград, Энергия, 1966.
- [5] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп // М., Мир, 1980.
- [6] Мучник А. А. , Притыкин Ю. Л. , Семенов А. Л. Последовательности, близкие к периодическим // УМН, 2009, 64, 5(389), 21–96.
- [7] Митрофанов И.В. Алгоритмические проблемы, связанные с морфическими последовательностями // Диссертация кандидата Физико-математических наук.
- [8] Новиков П. С. , Адян С. И. О бесконечных периодических группах. I // Изв. АН СССР. Сер. матем., 32:1 (1968), 212–244.
- [9] Новиков П. С. , Адян С. И. О бесконечных периодических группах. II // Изв. АН СССР. Сер. матем., 32:2 (1968), 251–524.
- [10] Новиков П. С. , Адян С. И. О бесконечных периодических группах. III // Изв. АН СССР. Сер. матем., 32:3 (1968), 709–731.
- [11] Новиков П. С. , Адян С. И. Определяющие соотношения и проблема тождества для свободных периодических групп нечетного порядка // Изв. АН СССР. Сер. матем., 32:4 (1968), 971–979.
- [12] Ольшанский А.Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах // М.: Наука.
- [13] Пономаренко Е.И., Райгородский А.М. Новая нижняя оценка хроматического числа рационального пространства с одним и двумя запрещенными расстояниями // Математические заметки, 2015, 97, 2, 255–261.

- [14] Райгородский А. М. Линейно-алгебраический метод в комбинаторике // М.: МЦНМО, 2007.
- [15] Семёнов А. Л. Пресбургеровость предикатов, регулярных в двух системах счисления // Сиб. матем. журн., 1977, 18, 2, 403–418.
- [16] Семёнов А. Л. Алгоритмические проблемы для степенных рядов и контекстно-свободных грамматик // Докл. АН СССР, 212 (1973), 50–52.
- [17] Уфнарковский В. А. Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре // Итоги науки и техн., Современ. пробл. мат. Фундам. направления, 1990, №57, С. 5–177.
- [18] Drensky, V. Free Algebras and PI-algebras: Graduate Course in Algebra // Springer-Verlag, Singapore, 2000.
- [19] Sapir M. V. Combinatorial algebra: syntax and semantics // Springer, 2014.
- [20] Kanel-Belov A., Karasik Y., Louis Halle Rowen Computational Aspects of Polynomial Identities: Volume 1, Kemer’s Theorems, 2nd Edition // Monographs and Research Notes in Mathematics., Boca Raton, FL: CRC Press, 2015, ISBN: 978-1-4987-2008-3, 418.
- [21] Горбунов К.Ю., Любецкий В.А. Алгоритм преобразования одного графа в другой с минимальной ценой // Информатика и ее применения, издательство ИПИ РАН (М.), том 11, № 1, с. 79-89 2017.
- [22] Вершик А. М. , Лифшиц М. А. О $\{mm\}$ -энтропии банахова пространства с гауссовской мерой // Теория вероятн. и ее примен., **68**:3 (2023), 532–543.
- [23] Шкредов И. Д. Теорема Семереди и задачи об арифметических прогрессиях // УМН, **61**:6(372) (2006), 111–178; *Russian Math. Surveys*, **61**:6 (2006), 1101–1166
- [24] Чернышев С. Н. Трещины горных пород // Москва, Наука, 1983.
- [25] Arman A., Tsaturian S. A result in asymmetric Euclidean Ramsey theory // Discrete Math., 341 (2018), N5, 1502–1508.
- [26] Arman A., Tsaturian S. Equally spaced collinear points in Euclidean Ramsey theory // arXiv preprint 1705.04640, 2017.

- [27] Avgustinovich S., Fon-Der-Flaass D., Frid A. Arithmetical complexity of infinite words // Proc. Words, Languages and Combinatorics III, 2000. Singapore: World Scientific, 2003. P. 51-62.
- [28] Avgustinovich S., Cassaigne J., Frid A. Sequences of low arithmetical complexity // Theoret. Inform. Appl. 40 (2006) 569–582
- [29] Allouche J., Baake M., Cassaigne J. and Damanik D. Palindrome complexity Selected papers in honor of Jean Berstel // Theoret. Comput. Sci. 292 (2003), no. 1, p. 9–31.
- [30] Axenovich M. , Choi J. , Lastrina M. , McKay T. ,Smith J. , Stanton B. On the chromatic number of subsets of the Euclidean plane // Graphs and Combinatorics, 30(1):71–81, 2014.
- [31] Balogh J., Bollobás B., Weinreich D. A jump to the Bell number for hereditary graph properties // J. Comb. Theory, Ser. B, 95, 29–48, 2005.
- [32] Bell E. J. L. , Rayson P. ,Berridge D. The strong-connectivity of word-representable digraphs // 2011 (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive, arXiv:1102.0980).
- [33] Brass, Peter, Moser, William O.J., Pach, János. Research problems in discrete geometry // Springer, Science and Business Media, 2006.
- [34] N. G. de Bruijn, Paul Erdős A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations // Indagationes Mathematicae, 13:371–373, 1951.
- [35] Benda M., Perles M. Colorings of metric spaces // Geombinatorics, 9(3):113–126, 2000.
- [36] Berstel J., Seebold P. Sturmian words, in: M. Lothaire, Algebraic Combinatorics on Words // Cambridge University Press, 2002. P. 40-97.
- [37] Berstel J., Pocchiola M. A geometric proof of the enumeration formula for Sturmian words // Int. J. Algebra and Comput., 1993, V. 3, 349 -355.
- [38] Bell J. , Shallit J. Lie complexity of words // Theoret. Comput. Sci. in press (2022).
- [39] Brown C. A characterization of the quadratic irrationals // Canad. Math. Bull. (1991), 36.
- [40] Bresenham J. Algorithm for computer control of a digital plotter // IBM Systems J. (1965), 25-30.

- [41] Benda M., Perles M. Colorings of metric spaces // *Geombinatorics* 9, No. 3 (2000), 113–126.
- [42] Beigel R., Eppstein D. 3-Coloring in time $O(1.3289^n)$ // *J. Algorithms*. 2005. Vol. 54, No. 2. P. 168–204.
- [43] Bruce Bauslaugh L. Tearing a strip off the plane // *Journal of Graph Theory*, 29(1):17–33, 1998.
- [44] Cassaigne J., Frid A. On the arithmetical complexity of Sturmian words // *Theoretical Computer Science*, 2007, V. 380, P.304-316.
- [45] Cassaigne J., Fici G., Sciortino M., Zamboni L. Cyclic complexity of words // *J. Combin. Theory Ser. A* 145 (2017), 36–56.
- [46] Cassaigne J., Richomme G., Saari K., Zamboni L. Avoiding Abelian powers in binary words with bounded Abelian complexity // *Internat J. Found. Comput. Sci.* 22, 4 (2011), 905–920.
- [47] Cassaigne J., Kaboré, I., Tapsoba, T. On a new notion of complexity on infinite words // *Acta Univ. Sapientiae Math.* 2, 2 (2010), 127–136.
- [48] Cantwell K. All regular polytopes are Ramsey // *J. Combin. Theory Ser. A*, 114 (2007), 555–562.
- [49] Cerny J. Coloring circle graphs // *Electron. Notes Discrete Math.* 2007. Vol. 29. P. 457–461.
- [50] Collins A. , Kitaev S. , Lozin V. New results on word-representable graphs // *Discrete Appl. Math.*, 216, 136–141, 2017.
- [51] Conlon D., Fox J Lines in Euclidean Ramsey theory // *Disc. Comput. Geom.*, 61 (2019), N1, 218–225.
- [52] Coven Ethan M., Hedlund G. Sequences with minimal block growth // *Mathematical systems theory volume 7*, 138–153, 1973
- [53] Coulson D. A 15-colouring of 3-space omitting distance one // *Discrete Mathematics* 256, No. 1 (2002), 83–90.
- [54] Chvátal V., Hammer P. Aggregation of inequalities in integer programming // *Studies in integer programming*. Amsterdam: North-Holland, 1977. P. 145–162. (*Ann. Discrete Math.*; Vol. 1).

- [55] Cherkashin D. D. , Kanel-Belov A. J. , Strukov G. A. , Voronov V. A. On the chromatic numbers of 3-dimensional slices // 2022.
- [56] Diestel R. Graph Theory // Springer, Heidelberg, 2016 (Grad. Texts Math., Vol. 173).
- [57] Dulucq S., D. Gouyou-Beauchamp Sur les facteurs des suites de Sturm // Rapport No. I-8735, Comput. Sci., 1987.
- [58] Douglas R. Woodall. Distances realized by sets covering the plane // Journal of Combinatorial Theory, Series A, 14(2):187–200, 1973.
- [59] Exoo G., Ismailescu D. The chromatic number of the plane is at least 5: A new proof // Disc. Comput. Geom., 64 (2020), N1, 216–226.
- [60] Erdős P., Graham R.L. , Montgomery P., Rothschild B.L. , Spencer J., Straus E.G. Euclidean Ramsey theorems I // J. Combin. Theory Ser. A, 14 (1973), N3, 341–363.
- [61] Erdős P., Graham R.L. , Montgomery P., Rothschild B.L. , Spencer J., Straus E.G. Euclidean Ramsey theorems II // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, 10 (1973), Infinite and Finite Sets, Keszthely, Hungary and North-Holland, Amsterdam, 520–557.
- [62] Erdős P., Graham R.L. , Montgomery P., Rothschild B.L. , Spencer J., Straus E.G. Euclidean Ramsey theorems III // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, 10 (1973), Infinite and Finite Sets, Keszthely, Hungary and North-Holland, Amsterdam, 559–583.
- [63] Fraenkel A.S., Mushkin M., Tassa U. Determination of by $[n\theta]$ its sequence of differences // Canad. Math. Bull. (1978), 441-446.
- [64] Frid A. Sequences of linear arithmetical complexity // Theoret. Comput. Sci. 339 (2005) 68–87.
- [65] Frid A. A lower bound for the arithmetical complexity of Sturmian words // Siberian Electron. Math. Rep. 2, 14–22 (in Russian, English abstract).
- [66] Frankl N. , Kupavskii A. , Sagdeev A. Max-norm Ramsey Theory // arXiv preprint 2111.08949, 2021.
- [67] Frankl N. , Kupavskii A. , Sagdeev A. Schmidt–Tuller conjecture on linear packings and coverings // Proceedings of the American Mathematical Society,, Vol. 151, No. 6, pp. 2353–2362, 2023.

- [68] Frankl P. , V. Rödl A partition property of simplices in Euclidean space // J. Amer. Math. Soc., 3 (1990), N1, 1–7.
- [69] Falconer K.J. The realization of distances in measurable subsets covering // Rn. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 31(2):184–189, 1981.
- [70] Fernandes C. G. , Green E. L. , Mandel A. From monomials to words to graphs // J. Comb. Theory, Ser. A, 105, No. 2, 185–206, 2004.
- [71] Gao A. L. L., Kitaev S., Zhang P. B. On 132-representable graphs // Australas. J. Comb., 69, No. 1, 105–118, 2017.
- [72] A.D.N.J. de Grey The chromatic number of the plane is at least 5 // Geombinatorics, 28 (2018), 18–31.
- [73] Glen M., Kitaev S., Pyatkin A. On the representation number of a crown graph // 2016. (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive; arXiv:1609.00674).
- [74] Graham R.L. Euclidean Ramsey theory // Handbook of Discrete and Computational Geometry, Chapman and Hall/CRC, 2017, 281–297.
- [75] Grünbaum B. Convex Polytopes // 2nd edition, New York: Interscience, 1967.
- [76] Graham R., Zang N. Enumerating split-pair arrangements // J. Comb. Theory, Ser. A. 2008. Vol. 115, No. 2. P. 293–303.
- [77] Halldórsson M., Kitaev S., Pyatkin A. Alternation graphs. in Graph-Theoretic Concepts in Computer Science // (Revis. Pap. 37th Int. Workshop, Teplá Monastery, Czech Republic, June 21–24, 2011), pp. 191–202, Springer, Heidelberg, 2011 (Lect. Notes Comp. Sci., Vol. 6986).
- [78] Halldórsson M., Kitaev S., Pyatkin A. Semi-transitive orientations and word-representable graphs // Discrete Appl. Math., 201, 164–171, 2016.
- [79] Hedlund G.A. , Morse M. Symbolic dynamics // Amer. J. Math, 1938, 815-866.
- [80] Hedlund G.A., M. Morse. Sturmian sequences // Amer. J. Math, 1940.
- [81] Hedlund G.A. Sturmian minimal sets // Amer. J. Math, 1944, 605-620.

- [82] H. Hadwiger Überdeckung des Euklidischen Raumes durch kongruente Mengen // Portugaliae Math. 4, German, 1945, 238–242.
- [83] Ito S., Yasutomi S. On continued fractions, substitutions and characteristic sequences // Japan. J. Math., 1990, 287-306.
- [84] Pach J., Agarwal P. Combinatorial geometry // John Wiley and Sons, 37, 2011.
- [85] Peter D. Johnson. Coloring abelian groups // Discrete Mathematics, 40(2):219–223, 1982.
- [86] Kamae, T., and Zamboni, L. Sequence entropy and the maximal pattern complexity of infinite words // Ergodic Theory and Dynamical Systems 22, 4 (2002), 1191–1199.
- [87] Karhumaki, J., Saarela, A., and Zamboni, L. Q. On a generalization of abelian equivalence and complexity of infinite words // J. Combin. Theory, Ser. A 120, 8 (2013), 2189–2206
- [88] Koebe M. On a new class of intersection graphs // Ann. Discrete Math. 1992. Vol. 51. P. 141–143.
- [89] Korpelainen N., Lozin V. Two forbidden induced subgraphs and well quasi-ordering // Discrete Math. 2011. Vol. 311, No. 16. P. 1813–1822.
- [90] Kitaev S., Lozin V. Words and graphs // Cham: Springer, 2015. (Monogr. Theor. Comp. Sci., EATCS Ser.).
- [91] Kitaev S., Seif S. Word problem of the Perkins semigroup via directed acyclic graphs // Order. 2008. Vol. 25, No. 3. P. 177–194.
- [92] Kitaev S., Pyatkin A. On representable graphs // J. Autom. Lang. Comb. 2008. Vol. 13, No. 1. P. 45–54.
- [93] Klee V. Polyhedral sections of convex bodies // Acta Math., 103 (1960), NN3-4, 243–267.
- [94] Kříž I. Permutation groups in euclidean Ramsey theory // Proc. Amer. Math. Soc., 112 (1991), N3, 899–907.
- [95] Kupavskii A. On the chromatic number of R^n with an arbitrary norm // Discrete Math., 311 (2011), N6, 437–440.

- [96] Kupavskii A., Sagdeev A. All finite sets are Ramsey in the maximum norm // Forum Math. Sigma, 9 (2021), e55, 12 pp.
- [97] Kupavskii A., Raigorodskii A. On the chromatic numbers of small-dimensional Euclidean spaces // Electronic Notes in Discrete Mathematics, 34:435–439, 2009.
- [98] Kanel-Belov A., Voronov V., Cherkashin D. On the chromatic number of an infinitesimal plane layer // St. Petersburg Mathematical Journal, 29(5):761–775, 2018.
- [99] Kiran Chilakamarri B. The unit-distance graph problem: a brief survey and some new results // Bull. Inst. Combin. Appl, 8(39):C60, 1993.
- [100] Kirova V., Sagdeev A. Two-colorings of normed spaces without long monochromatic unit arithmetic progressions // SIAM Journal on Discrete Mathematics, Vol. 37, Iss. 2 (2023).
- [101] Klee V., Wagon S. Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory // Dolciani Mathematical Expositions No. 11. Mathematical Association of America, 1991.
- [102] Larman D.G. , Rogers C.A. The realization of distances within sets in Euclidean space // Mathematika, 19 (1972), 1–24.
- [103] Leader I., Russell P.A., Walters M. Transitive sets in Euclidean Ramsey theory // J. Combin. Theory Ser. A, 119 (2012), 382–396.
- [104] Lovasz L. Perfect graphs // Selected topics graph theory. V. 2. London: Acad. Press, 1983. P. 55–87.
- [105] Larman D. G. , Rogers A. C. The realization of distances within sets in Euclidean space // Mathematika 19, No. 01 (1972), 1–24.
- [106] Szekely Laszlo A. Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems. // In Paul Erdős and his mathematics II. Citeseer, 2002.
- [107] Leibman A., Bergelson V. Polynomial extensions of van der Waerden’s and Szemerédi’s theorems // Journal of the American Math Society, Vol. 9, 1996, 725–753.
- [108] Martin Charles Golumbic. Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs // Annals of Discrete Mathematics. Elsevier Science B.V., Amsterdam, second edition, v. 57 , 2004. With a foreword by Claude Berge.

- [109] Magnús M. Halldórsson, Kitaev S., Pyatkin A. Graphs capturing alternations in words // In Yuan Gao, Hanlin Lu, Shinnosuke Seki, and Sheng Yu, editors, *Developments in Language Theory*, volume 6224 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 436–437. Springer Berlin, 2010.
- [110] Magnús M. Halldórsson, Kitaev S., Pyatkin A. Alternation graphs // In Petr Kolman and Jan Kratochvíl, editors, *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, volume 6986 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 191–202. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [111] Magnús M. Halldórsson, Kitaev S., Pyatkin A. Semi-transitive orientations and word-representable graphs // *Discrete Applied Mathematics*, to appear, 2015.
- [112] Mignosi F. On the number of factors of Sturmian words // *Theoret. Comput. Sci.* 1991, 71-84.
- [113] Mignosi, F., and Restivo, A. *A new complexity function for words based on periodicity*. *Int. J. Algebra Comput.* 23, 4 (2013), 963–988.
- [114] Y. Mandelshtam, On graphs representable by pattern-avoiding words, 2016 (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive, arXiv:1608.07614).
- [115] Naslund E. Monochromatic Equilateral Triangles in the Unit Distance Graph // *Bull. Lond. Math. Soc.*, 52 (2020), N4, 687–692.
- [116] Nechushtan O. On the space chromatic number // *Discrete Math.*, 256, N1–2 (2002), 499 - 507.
- [117] Perkins P. Bases for equational theories of semigroups // *J. Algebra.* 1969. Vol. 11, No. 2. P. 298–314.
- [118] Petkovsek M. Letter graphs and well-quasi-order by induced subgraphs // *Discrete Math.* 2002. Vol. 244. P. 375–388.
- [119] Prufer H. Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen // *Arch. Math. Phys.* 1918. Vol. 27. P. 742–744.
- [120] Prosanov R.I. Upper Bounds for the Chromatic Numbers of Euclidean Spaces with Forbidden Ramsey Sets // *Math. Notes*, 103 (2018), N2, 243–250.

- [121] Prosanov R. A new proof of the Larman–Rogers upper bound for the chromatic number of the Euclidean space // *Discrete Appl. Math.*, 276 (2020), 115–120.
- [122] Raigorodskii A.M. On the Chromatic Number of a Space // *Russian Math. Surveys*, 55 (2000), 351–352.
- [123] Raigorodskii A.M. On the Chromatic Number of a Space with the Metric ℓ_p // *Russian Math. Surveys*, 59 (2004), 973–975.
- [124] Raigorodskii A.M. The Borsuk problem and the chromatic numbers of some metric spaces // *Russian Math. Surveys*, 56 (2001), 103–139.
- [125] Raigorodskii A.M. Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters // *Thirty Essays on Geometric Graph Theory*, New York, Springer, 2013, 429–460.
- [126] Raigorodskii A.M. Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters // *Discrete geometry and algebraic combinatorics*, *Contemp. Math*, 625:93–109, 2014.
- [127] Radoicic R. , Toth G. Note on the chromatic number of the space // In: *Discrete and Computational Geometry, Algorithms and Combinatorics book series*, Vol. 25, Springer (2003), pp. 695–698.
- [128] Rauzy G. Suites a termes dans un alphabet fini, *Semin* // *Theorie des Nombres*, 1982-1983, 25-01,25-16, Bordeaux.
- [129] Rauzy G. Mots infinis en arithmetique, in :*Automata on infinite words* (D. Perrin ed.) // *Lect. Notes Comp. Sci.* 1985, 165-171.
- [130] Rauzy G. Sequences defined by iterated morphisms, in :*Workshop on Sequences* (R. Capocelli ed.) // *Lecture Notes Comput. Sci.*, to appear.
- [131] A. Restivo, S. Salemi Binary patterns in infinite binary words // in: W. Brauer, H. Ehrig, J. Karhumaki, A. Salomaa (Eds.), *Formal and Natural Computing*, in: *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 2300, 2002, pp. 107–116.
- [132] Rigo M., and Salimov, P. Another generalization of abelian equivalence: Binomial complexity of infinite words // *Theoret. Comput. Sci.* 601 (2015), 47–57.

- [133] Sagdeev A.A. Exponentially Ramsey Sets // *Probl. Inf. Transm.*, 54 (2018), N4, 372–396.
- [134] Soifer A. *The mathematical coloring book* // Springer-Verlag New York, 2009.
- [135] Соифер А. , Хроматическое число плоскости: его прошлое, настоящее и будущее // *Матем. просвещение*, 2004, N8, 186 - 221.
- [136] Shelah S., Soifer A. Axiom of choice and chromatic number of the plane // *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 103(2):387–391, 2003.
- [137] Soifer A. *The Hadwiger–Nelson problem* // *In Open Problems in Mathematics*, Springer, 2016, 439–457
- [138] Seebold P. Fibonacci morphisms and Sturmian words // *Theoret. Comput. Sci.* 1991, 367-384.
- [139] Series C. The geometry of Marhoff numbers // *The Mathematical Intelligencer* (1985), 20-29.
- [140] Stolarsky K. Beatty sequences, continued fractions, and certain shift operators // *Cand. Math. Bull.* (1976), 473-482.
- [141] Szemerédi E. On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression // *Acta Arithm.* 1975. V. 27. P. 199-245.
- [142] E. Szemerédi // *Regular partitions of graphs* Computer science department, School of Humanities and Sciences, Stanford University, 1975
- [143] Thomassen C. A short list color proof of Grötzsch’s theorem // *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 88(1):189 – 192, 2003.
- [144] Thue A. *Über die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen* // *Norske Vid. Skrifter I Mat.-Nat. Kl.*, Christiania, 1912.
- [145] Thue A. *Über unendliche Zeichenreihen* // *Norske Vid. Skrifter I Mat. Nat. Kl.*, Christiania 1906. V. 7 P. 1-22. V. 10. P. 1-67.
- [146] Van der Waerden B.L, *Beweis einer Baudetschen Vermutung* // *Nieuw Arch. Wisk.*, 15 (1927), 212–216.
- [147] Venkov A. *Elementary Number Theory* // Wolter-Noordho, Groningen, 1970.

- [148] Voronov V., Kanel-Belov A., Strukov G., Cherkashin D. On the chromatic numbers of 3-dimensional slices // Journal of Mathematical Sciences, 518 (2022), 94–113.
- [149] Woodall D. Distances realized by sets covering the plane // Journal of Combinatorial Theory, Series A, 14(2):187–200, 1973.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ

- [150] *Kirova V., Sagdeev A.* Two-colorings of normed spaces without long monochromatic unit arithmetic progressions, SIAM Journal on Discrete Mathematics, 2023, Vol. 37, No. 2, pp. 718–732. — (Web of Science, Scopus. Impact Factor 2022: WoS 0.736, SJR 0.901, Scopus 0.967)

Соавтору принадлежит постановка задачи и проверка результатов. Основные результаты статьи получены автором самостоятельно

- [151] *Кирова В.О., Сагдеев А.А.* Двухцветные раскраски нормированных пространств без длинных одноцветных арифметических прогрессий // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, 2022, том 506, страницы 54–56.

English transl.: *Kirova V.O., Sagdeev A.A.* Two-colorings of normed spaces with no long monochromatic unit arithmetic progressions // DOKLADY MATHEMATICS no. 2 (2022): 348–350. — (Scopus, RSCI. Impact Factor 2022: SJR 0.444).

Соавтору принадлежит постановка задачи и проверка результатов. Основные результаты статьи получены автором самостоятельно.

- [152] *В.О. Кирова* О хроматическом числе слоев без одноцветных арифметических прогрессий // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 78–84.

English transl.: *V.O. Kirova* On the chromatic number of slices without monochromatic unit arithmetic progressions // Chebyshevskii sbornik, 2023, vol. 24, no. 4, pp. 78–84. — (Scopus, RSCI. Impact Factor 2022: SJR 0.305).

[153] *В.О. Кирова, И.В. Годунов.* Комбинаторные сложностные характеристики слов Штурма // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 63-77.

English transl.: *V.O.Kirova, I.V. Godunov* On the complexity functions of Sturmian words // Chebyshevskii sbornik, 2023, vol. 24, no. 4, pp. 63-44. — (Scopus, RSCI. Impact Factor 2022: SJR 0.305).

Соавтору принадлежит выполнению рутинной работы по систематизации материала. Основные результаты статьи получены автором самостоятельно.

[154] *А.Я. Канель-Белов, В.В. Павлова, В.О. Кирова* Геометрические свойства сред, разбитых трещинами на блоки // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 208-216.

English transl.: *A.Ya. Kanel-Belov, V.V.Pavlova, V.O. Kirova* Geometric properties of rocks, broken into blocks by cracks // Chebyshevskii sbornik, 2023, vol. 24, no. 5, pp. 208-216. — (Scopus, RSCI. Impact Factor 2022: SJR 0.305).

Вклад всех авторов равноценен и неразделим.

Другие публикации

[155] *Кирова В.О.* Полиномальная сложность слов Штурма // СБОРНИК ТРУДОВ ВСЕРОССИЙСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ С МЕЖДУНАРОДНЫМ УЧАСТИЕМ «МАТЕМАТИКИ – АЛТАЙСКОМУ КРАЮ (МАК-2023)» — Барнаул, 7 июня 2023 г.

[156] Кирова В.О. The chromatic number of space with Chebyshev metric without long monochromatic unit arithmetic progressions [Электронный ресурс] // Материалы Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов 2022”. Москва, 11 - 22 Апреля 2022 г. http://logic.math.msu.ru/wp-content/uploads/the_chromatic_number_1.pdf (Дата обращения - 12.12.2023)

[157] Кирова В.О. On the chromatic number of slices without monochromatic unit arithmetic progression [Электронный ресурс] // Материалы Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов 2023”. Москва, 10 - 21 Апреля 2023 г. — http://logic.math.msu.ru/wp-content/uploads/nis/kirova_lomonosov_2023.pdf (Дата обращения - 12.12.2023)