

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА  
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И  
КИБЕРНЕТИКИ

*На правах рукописи*



Высоцкий Алексей Олегович

**Нелинейные методы наблюдения для  
динамических систем с неопределенностью**

1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук  
Фомичев Василий Владимирович

Москва — 2024

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>Глава 1. Декомпозиция систем с неопределенностью</b>	<b>13</b>
1.1 Введение. Постановка задачи . . . . .	13
1.2 Приведение системы к канонической форме управляемости . . . . .	15
1.3 Нулевая динамика и относительный порядок скалярных систем . . . . .	21
1.4 Оценка подсистемы, отвечающей нулевой динамике . . . . .	27
<b>Глава 2. Базовый случай второго относительного порядка</b>	<b>31</b>
2.1 Введение . . . . .	31
2.2 Постановка задачи . . . . .	32
2.3 Случай $\alpha = 1/2$ . . . . .	34
2.4 Вариация параметра нелинейности . . . . .	47
2.5 Погрешность измерения выхода . . . . .	58
2.6 Неидеальности элементов переключения . . . . .	62
<b>Глава 3. Каскадный наблюдатель для систем с произвольным относительным порядком</b>	<b>69</b>
3.1 Введение . . . . .	69
3.2 Предварительная оценка . . . . .	71
3.3 Каскадный наблюдатель состояния . . . . .	75
3.4 Каскад систем более высоких порядков . . . . .	81
<b>Заключение</b>	<b>88</b>
<b>Список литературы</b>	<b>90</b>



# Введение

## Актуальность работы.

Результаты математической теории управления широко используются в различных областях науки и техники: от вычислительной и робототехники до медицины (см., например, [1–10]). Физически системы управления имеют различную природу, но с математической точки зрения все их можно представить как некое отображение из множества входных сигналов в множество выходных. Различаются модели систем способом задания такого отображения. Широко распространен способ задания этого отображения, где динамика системы задается с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),$$

где  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  – вектор состояния системы, отражающий изменяющиеся во времени характеристики объекта управления (например координаты), а  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_l(t))$  – вход объекта или управление, отражающее внешние воздействия на объект управления. Помимо этого, такие математические модели систем управления также включают в себя уравнения выхода:

$$y(t) = h(t, x(t)),$$

где  $y(t) = (y_1(t), \dots, y_p(t))$  – выход динамической системы, имеющий смысл измеряемой характеристики объекта.

Однако, большинство известных алгоритмов управления предполагают известным полное состояние объекта управления, а не только измеряемый выходной сигнал системы. При этом не всегда на практике известны значения всех входных сигналов объекта управления. Решение задач управления при наличии такого рода неопределенности является одним из главных разделов современной теории управления. За-

дача наблюдения для динамической системы заключается в том, чтобы по имеющейся информации о системе – измеряемом выходном сигнале и известных входных сигналах – получить оценку всего неизвестного вектора состояния системы.

В самом простом случае, то есть для линейных стационарных систем с известными входными воздействиями, задача может быть решена с использованием только линейных обратных связей [11]. Однако добавление в систему управления внешнего возмущения значительно сокращает применимость линейных обратных связей в построении наблюдателей (например, в работе [12] приведены дополнительные условия для линейных систем с неопределенностью, обеспечивающие применимость к ним наблюдателей, аналогичных по структуре наблюдателям Люенбергера). Таким образом, для решения задачи асимптотически точного восстановления вектора состояния для систем с неопределенностью в более общем случае необходимо использование нелинейных методов построения оценок.

В настоящей работе мы будем рассматривать системы управления вида

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B'u(t) + B\eta(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases}$$

где  $x(t)$  обозначает вектор состояния системы,  $u(t)$  – известный входной сигнал (управление),  $\eta(t)$  – неизвестный входной сигнал (возмущение), а  $y(t)$  – выходной сигнал.  $A$ ,  $B$ ,  $B'$  и  $C$  – известные постоянные матрицы соответствующих размеров. То есть рассматривается линейная стационарная система управления с неопределенностью в виде неизвестного аддитивного входного воздействия. Системы такого вида используются для описания многих объектов управления, в том числе нелинейных, с помощью метода линеаризации приводимых к рассматриваемой форме.

В связи с этим, исследование данного вида систем является актуальным и интересным с практической точки зрения.

Для получения оценки неизвестного вектора состояния  $x$  обычно используют вспомогательную динамическую систему. Данная система в качестве входных сигналов имеет входной сигнал  $u$  и выходной сигнал  $y$  оцениваемой систем. То есть, она имеет вид

$$\dot{\bar{x}}(t) = g(\bar{x}(t), u(t), y(t))$$

В качестве оценки неизвестных компонент вектора состояния используются компоненты вектора  $\bar{x}$ . Такие вспомогательные системы называются наблюдателями.

Отметим, что наблюдатели могут использоваться при решении других задач управления, если подход к решению предполагает полноту информации о состоянии системы. К таким задачам могут быть отнесены задачи стабилизации (см., например [13–15]), обращения (см., например [16–19]) и слежения (см., например [20–22]).

Традиционно для решения задачи наблюдения исходная система приводится к канонической форме с выделением нулевой динамики (то есть к виду, в котором динамика системы, обеспечивающая при соответствующем входе тождественно нулевой выход, описывается одной из подсистем). Любая динамическая система общего положения, входные и выходные сигналы которой скалярны, может быть приведена к такой форме. В случае, если нулевая динамика рассматриваемой системы устойчива, то задача наблюдения для нее сводится к задаче наблюдения для подсистемы размерности, равной относительно порядку исходной системы.

Для систем с малым относительным порядком (не более двух) существуют различные решения данной задачи (например в работах [17; 23; 24]). Для систем же произвольного относительного порядка, хотя

и были предложены алгоритмы построения наблюдателей (см., например [25]), но не были доказаны какие-либо алгебраические достаточные условия точности получаемых оценок, что затрудняет практическое применение данных алгоритмов наблюдения. Таким образом, задача наблюдения для систем с неопределенностью остается актуальной.

Наиболее успешно применяемыми методами для решения данной задачи являются методы, основанные на использовании скользящих режимов высоких порядков. Такие методы характеризуются использованием разрывных (содержащих элементы переключения) обратных связей. Предлагаемый в данной работе метод построения наблюдателей также основывается на использовании алгоритма скольжения второго порядка. В связи с этим важным для практического применения аспектом исследования становится анализ свойств рассматриваемого алгоритма скольжения при условии неидеальности элементов переключения (см. главу 2).

**Степень разработанности темы.** Для систем с неопределенностью предлагались разные методы построения наблюдателей. Простейшие подходы к решению задачи наблюдения для неопределенных систем основываются на использовании только линейных обратных связей. Так например в работах [12; 26] исследовалась возможность применения наблюдателей с классической структурой наблюдателей Люенбергера [11]. Такой подход в построении наблюдателей накладывает существенные ранговые ограничения на исходную систему и в общем случае неприменим. Другой подход к построению наблюдателей, использующий только линейные обратные связи описан в работах [17; 27]. В них предлагались наблюдатели, основанные на использовании глубоких обратных связей, то есть, линейных обратных связей с большими коэффициентами усиления. Однако использование таких обратных связей на практике затруднительно, и позволяют получать оценки только

заданной точности, но не асимптотически точные.

Другая группа методов построения наблюдателей для систем с неопределенностью, называемая обычно методами  $H_\infty$ , основывается, как правило, на использовании пропорционально-интегральных (ПИ) обратных связей. В работах, где разрабатывается данная методология построения наблюдателей (см., например [28; 29]), с помощью методов теории линейных матричных неравенств, решается задача наблюдения в следующей постановке: необходимо построить такие оценки, которые были бы асимптотически точными в отсутствие внешних возмущений, и, при этом норма  $\|T(s)\|_\infty$  передаточной функции  $T(s)$  от неизвестного входного сигнала к ошибке оценивания была бы минимальной для рассматриваемого класса обратных связей. Недостатком таких методов является то, что в случае наличия в системе неопределенности, они могут не давать асимптотически точных оценок фазового вектора системы.

Еще одним часто используемым подходом для решения данной задачи являются алгоритмы наблюдения, основанные на использовании скользящих режимов высоких порядков (например, в работах [23; 25]). При этом даже для случая малых относительных порядков существующие условия, обеспечивающие точность получаемых оценок, не являются исчерпывающими (в главе 2 для одного широко используемого алгоритма скольжения второго порядка показывается, что множество допустимых параметров может быть существенно расширено). Для систем, обладающих большим относительным порядком показано, что наблюдатели предлагаемой структуры при должном выборе параметров дают асимптотически точные оценки вектора состояния. Однако в общем случае не существует алгоритмов выбора параметров наблюдателей, гарантирующих асимптотическую точность полученных оценок.

**Цель диссертационной работы.** Цель работы состоит в разра-



ботке новых методов построения наблюдателей для динамических систем с неопределенностью. Для достижения этой цели были поставлены следующие задачи:

1. Получить необходимые и достаточные условия устойчивости нулевого решения для базовой системы управления второго порядка, замкнутой с помощью алгоритма скольжения второго порядка (алгоритма “super-twisting”). Далее эту замкнутую систему управления будем называть ST системой.
2. Исследовать свойства динамики ST системы при вариации параметра нелинейности.
3. Исследовать свойства динамики ST системы при наличии погрешности измерения выходного сигнала системы.
4. Исследовать свойства динамики ST системы при наличии неидеальностей в релейных элементах системы.
5. Обобщить метод построения наблюдателей для систем со вторым относительным порядком на случай произвольного относительного порядка. Получить достаточные условия асимптотической точности получаемых оценок фазового вектора системы.

**Методы исследования.** Основные результаты получены с использованием методов теории дифференциальных уравнений, математического анализа, матричных методов линейной алгебры и дифференциальной геометрии.

**Степень достоверности результатов.** Достоверность полученных результатов обеспечивается строгими математическими доказательствами сформулированных утверждений и подтверждается результатами численных экспериментов.

**Научная новизна.** Разработан новый метод построения наблюдателя состояния (далее называемого каскадным) для динамических систем с неопределенностью и изучены его свойства, в частности в диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. Получено решение для ST системы с “наихудшим” возмущением. На основании решения получено новое доказательство критерия устойчивости системы, в том числе при вариации параметра нелинейности.
2. Получены оценки области притяжения нулевого решения для ST системы при неклассических значениях параметра нелинейности алгоритма.
3. Получены точные оценки области, в которую сходятся траектории ST системы при наличии погрешности измерений.
4. Получены оценки области, в которую гарантированно сходятся решения ST системы при наличии типичных неидеальностей релейных элементов.
5. Разработан алгоритм построения и получены достаточные условия асимптотической точности оценок для каскадного наблюдателя состояния для систем с неопределенностью.

**Теоретическая и практическая значимость.** Работа имеет теоретический характер. Разработанные автором методы построения наблюдателей могут быть использованы для решения практических задач, в которых требуется построение оценок состояния динамических систем с неопределенностью, в том числе при условии неидеальности элементов переключения и при наличии погрешности измерения выхода систем.

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Необходимые и достаточные условия устойчивости и оценки для траекторий  $ST$  системы, в том числе при вариации параметра нелинейности.
2. Оценки области притяжения нулевого решения для  $ST$  системы при вариации степени нелинейного слагаемого.
3. Точные оценки области, в которую сходятся траектории  $ST$  системы при наличии погрешности измерения выхода.
4. Оценки области, в которую гарантированно сходятся решения  $ST$  системы при условии неидеальности релейных элементов элементов системы.
5. Метод построения каскадного наблюдателя состояния для систем с неопределенностью и достаточные условия точности получаемых с его помощью оценок.

**Апробация работы.** Представленные в работе результаты были неоднократно представлены на семинаре на кафедре НДСиПУ факультета ВМК МГУ, а также на следующих российских и международных конференциях:

- научной конференции «Всероссийское совещание по проблемам управления» (Москва, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова, 17–20 июня 2019 г.);
- научной конференции «Ломоносовские чтения 2020» (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 20 октября – 02 ноября 2020 г.);
- научной конференции «Ломоносовские чтения 2021» (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 20–29 апреля 2021 г.);

- научной конференции «Ломоносовские чтения 2022» (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 14–22 апреля 2021 г.);
- научной конференции «Тихоновские Чтения 2022» (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 24–29 октября 2022 г.);
- международной научной конференции “Modern aspects of applied mathematics” (Shenzhen, MSU-BIT University, 6–7 декабря 2022)
- научной конференции «Тихоновские Чтения 2023» (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 30 октября – 03 ноября 2023 г.);
- научной конференции «Всероссийское совещание по проблемам управления» (Москва, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова, 17-20 июня 2024 г.).

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 6 статьях в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ, в том числе в 6 работах в изданиях, индексируемых в базе ядра РИНЦ “eLibrary Science Index”, при этом переводные версии 5 статей опубликованы в журналах, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus.

**Личный вклад автора.** Все приводимые в работе результаты сформулированы и доказаны автором лично. Результаты других авторов, упомянутые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 97 страниц текста, 6 иллюстраций. Список литературы содержит 51 наименование.

# Глава 1

## Декомпозиция систем с неопределенностью

В данной главе рассматриваются понятия нулевой динамики и относительного порядка для линейных скалярных систем. Описывается метод сведения задачи наблюдения для линейных скалярных систем с произвольным относительным порядком к задаче наблюдения для систем с максимальным относительным порядком. Приводится решение поставленной задачи для простейшего случая, когда относительный порядок исходной системы равен 1. Основные результаты главы опубликованы в работе [30].

### 1.1. Введение. Постановка задачи

Рассматривается линейная стационарная скалярная система управления:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B'u(t) + B\eta(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (1.1)$$

В работе используются стандартные для теории управления обозначения:  $x \in \mathbb{R}^n$  – неизвестный вектор состояния динамической системы,  $u(t) \in \mathbb{R}$  – известное входное воздействие (управление) системы,  $\eta(t) \in \mathbb{R}$  – неизвестное входное воздействие (возмущение) системы,  $y(t) \in \mathbb{R}$  – измеряемый выходной сигнал. Матрицы  $A$ ,  $B'$ ,  $B$ ,  $C$  постоянные, их размеры согласованы с указанными размерами входов, выхода и состояния, то есть  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B' \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ . Система (1.1) называется скалярной, поскольку ее входы и выход являются скалярными величинами. Система рассматривается при  $t \geq 0$ , начальное состояние системы неизвестно.

Дополнительно делаются следующие предположения относительно классов входных воздействий системы:

**Предположение 1.1.** Управление системы  $u(t)$  является непрерывной функцией времени.

**Предположение 1.2.** Возмущение системы  $\eta(t)$  является измеримой и ограниченной функцией времени, причем известна ее мажоранта, т.е. число  $\eta_0 \in \mathbb{R}$ , такое что  $|\eta(t)| \leq \eta_0$ ,  $t \in [0; +\infty)$ .

В сделанных предположениях правая часть системы дифференциальных уравнений (1.1) может не быть непрерывной. Здесь и всюду в данной работе для дифференциальных уравнений с разрывной правой частью решение будет пониматься в смысле работ [31; 32], а именно:

**Определение 1.1.** Вектор-функция  $x(t)$ , определенная на интервале  $(t_1, t_2)$  либо на отрезке  $[t_1, t_2]$  называется решением уравнения

$$\dot{x} = f(t, x),$$

если  $x(t)$  абсолютно непрерывна и для нее почти всюду на интервале (отрезке) выполнено

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)),$$

где  $F(t, x)$  – наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все предельные значения вектор-функции  $f(t, x^*)$  при  $x^* \rightarrow x$ ,  $t = const$ .

**Замечание 1.1.** Поскольку правая часть системы уравнений (1.1) непрерывна по  $x$ , то множества  $F(t, x)$  для нее всегда будет состоять из одной точки, совпадающей со значением правой части, т.е.

$$F(t, x) = \{Ax + B'u(t) + B\eta(t)\}.$$

Решением системы (1.1) является, таким образом, абсолютно непрерывная вектор-функция, почти всюду удовлетворяющая данному уравнению.

**Замечание 1.2.** Поскольку функция  $u(t)$  по Предположению 1.1 непрерывна, она также является и суммируемой на любом отрезке  $[t_1, t_2]$ . Из ограниченности измеримой функции  $\eta(t)$  также следует ее суммируемость на любом отрезке. Из этих двух замечаний (и стационарности матриц системы) следует (см. [32, с. 9]) существование и единственность решения системы (1.1) в смысле Определения 1.1 всюду на  $[0, +\infty)$ .

Основной задачей, решаемой в данной работе, является построение оценки  $\bar{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  вектора состояния  $x(t)$  системы (1.1) по известной информации о системе: матрицах  $A, B', B, C$ , входном воздействии  $u(t)$  и выходном сигнале  $y(t)$ . Требуется асимптотическая точность получаемой оценки, т.е. чтобы  $\|\bar{x}(t) - x(t)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

## 1.2. Приведение системы к канонической форме управляемости

Для решения поставленной задачи наблюдения удобно рассматривать динамические системы не в общем виде (1.1), а в особом, алгоритм преобразования к которому и будет приведен далее.

Сначала введем некоторые вспомогательные понятия

**Определение 1.2.** Пара матриц  $\{C, A\}$ , где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  называется наблюдаемой, если матрица наблюдаемости

$$N_{A,C} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

имеет полный ранг.

**Замечание 1.3.** Заметим, что в случае, когда пара матриц  $\{C, A\}$  рас-

сматриваемой системы (1.1) не наблюдаема, поставленная задача построения асимптотической оценки состояния может быть неразрешима.

В самом деле, если матрица  $N_{A,C}$  вырождена, то существует такой вектор  $x_* \in \mathbb{R}^n$ , что  $N_{A,C}x_* = O_{n \times 1}$ , то есть

$$Cx_* = 0, \quad CAx_* = 0, \quad \dots, \quad CA^{n-1}x_* = 0.$$

Отсюда, в силу теоремы Гамильтона-Кэли, следует, что

$$Ce^{At}x_* = C \left( I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots \right) x_* \equiv 0.$$

Значит, если решению  $x_{(0)}(t)$  системы (1.1) с начальным условием  $x_0$  соответствует выход  $y_{(0)}(t)$ , то и решению  $x_{(1)}(t)$  этой системы с начальным условием  $x_0 + x_*$  с теми же входными сигналами  $u(t)$ ,  $\eta(t)$  будет, очевидно, соответствовать такой же выходной сигнал  $y_{(1)}(t) \equiv y_{(0)}(t)$ . При этом разность решений  $\Delta x(t) = x_{(0)}(t) - x_{(1)}(t)$  будет удовлетворять системе

$$\begin{cases} \Delta \dot{x}(t) = A\Delta x(t), \\ \Delta x(0) = x_*. \end{cases}$$

В случае, если ненаблюдаемая подсистема (см. [33]) системы (1.1) не является асимптотически устойчивой, разность  $\Delta x(t)$  не будет стремиться к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Значит, в этом случае будут существовать два различных, но неразличимых по доступной информации о системе решения системы (1.1), и поставленная задача неразрешима.

**Пример 1.1.** Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -x_2 + \eta(t), \\ y = x_3. \end{cases}$$



Матрица наблюдаемости для этой системы

$$N_{A,C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

очевидно, вырожденная. Заметим теперь, что начальным условиям  $x_0 = (0 \ 0 \ 0)^T$  и  $x_0 + x_* = (1 \ 0 \ 0)^T$  при возмущении  $\eta(t) \equiv 0$  будут соответствовать выход  $y(t) \equiv 0$  при экспоненциально расходящихся решениях решения  $x_{(0)}(t) \equiv O_{3 \times 1}$  и  $x_{(1)}(t) = (e^t \ 0 \ 0)^T$ .

**Определение 1.3.** Пара матриц  $\{A, B\}$ , где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$ , называется управляемой, если матрица управляемости

$$K_{A,B} = \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-2}B & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

имеет полный ранг.

**Замечание 1.4.** Заметим, что в случае, когда пара матриц  $\{A, B\}$  рассматриваемой системы (1.1) не управляема, поставленная задача построения асимптотической оценки состояния может быть неразрешима.

**Пример 1.2.** Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ \dot{x}_3 = x_4 - x_2 + \eta(t), \\ \dot{x}_4 = x_3, \end{cases}$$

$$y = 2x_3 + x_4.$$

Пара матриц  $\{C, A\}$  наблюдаема, поскольку матрица

$$N_{A,C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

очевидно, невырожденная.

При этом пара  $\{A, B\}$  неуправляема:

$$K_{A,B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом все решения неуправляемой подсистемы (определяемые уравнениями для  $x_1$  и  $x_2$ ) ограничены:  $x_1^2(t) + x_2^2(t) = const$ . Это означает, что в случае, если начальные условия для этой подсистемы достаточно малы, ее воздействие на управляемую подсистему (определяемую уравнениями для  $x_3$  и  $x_4$ ), а следовательно и на выходной сигнал  $y(t)$  может быть полностью компенсировано ограниченным возмущением  $\eta(t)$ . Действительно, компоненты решения  $x_3(t)$  и  $x_4(t)$  рассматриваемой системы с начальными условиями  $x_0 = (0 \ 0 \ 1 \ 1)^T$  и возмущением  $\eta(t) = \sin(t)$  будут совпадать с решениями при  $x_0 = (1 \ 0 \ 1 \ 1)^T$  и возмущении  $\eta(t) \equiv 0$ . При этом компоненты  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  решений будут отличаться. Следовательно, поставленная задача для такой системы неразрешима.

Всюду далее будем предполагать, что система (1.1) находится в общем положении, т.е. выполнено

**Предположение 1.3.** Пара матриц  $\{A, B\}$  управляема, а пара матриц  $\{C, A\}$  наблюдаема.

В силу Предположения 1.3 система (1.1) может невырожденным преобразованием координат быть приведена к специальной канонической форме — канонической форме управляемости (см. [34; 35]):

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}'u(t) + b\eta(t), \\ y = \tilde{C}\tilde{x}, \end{cases} \quad (1.2)$$

где матрица  $\tilde{A}$  имеет вид:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & \cdots & -a_n \end{pmatrix},$$

где  $a_1, \dots, a_n$  – коэффициенты характеристического полинома матрицы  $A$ , т.е.

$$\chi(s) = \det(sI - A) = s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1,$$

$$\text{а } b = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Преобразование координат имеет вид  $T_1 \tilde{x} = x$ , где матрица  $T_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Столбцы  $T_1^i$  матрицы  $T_1$  определяются соотношениями

$$T_1^n = B,$$

$$T_1^{n-1} = AT_1^n + a_n B = AB + a_n B,$$

$$\vdots$$

$$T_1^2 = AT_1^3 + a_3 B = A^{n-2} B + a_n A^{n-3} B + \cdots + a_3 B,$$

$$T_1^1 = AT_1^2 + a_2 B = A^{n-1} B + a_n A^{n-2} B + \cdots + a_2 B.$$

Легко показать, что таким образом заданная матрица преобразования  $T_1 = \begin{pmatrix} T_1^1 & \cdots & T_1^n \end{pmatrix}$  будет невырожденной тогда и только тогда, когда пара матриц  $\{A, B\}$  является управляемой. При этом, если пара  $\{A, B\}$  не является управляемой, то не существует невырожденного преобразования координат, приводящего систему (1.1) к канонической форме (1.2).

Матрицы  $\tilde{B}'$  и  $\tilde{C}$  в свою очередь определяются из соотношений

$$\tilde{B}' = (T_1)^{-1} B', \quad \tilde{C} = C T_1.$$

Очевидно, в силу невырожденности преобразования координат, поставленная задача построения оценки вектора состояния для системы

(1.1) эквивалентна задаче оценивания фазового вектора для преобразованной системы (1.2).

**Пример 1.3.** Пусть задана система управления

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 2x_3 - x_5 + 6u(t), \\ \dot{x}_2 = 5x_3 + 2x_4 - 2x_5 + 4x_6 - 2x_7, \\ \dot{x}_3 = 2x_3 + x_4 + 2x_6 - x_7, \\ \dot{x}_4 = 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 4x_5 - 8x_7 - u(t) + \eta(t), \\ \dot{x}_5 = x_3 + x_6, \\ \dot{x}_6 = -2x_3 - x_4 - 2x_6 + 2x_7 - u(t), \\ \dot{x}_7 = 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 - 8x_7 + u(t) + \eta(t), \\ y = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 - x_7. \end{cases}$$

Легко убедиться, что система находится в общем положении:

$$\det(K_{A,B}) = -1, \quad \det(N_{A,C}) = 1.$$

Характеристический полином матрицы  $A$  системы

$$\chi(s) = s^7 + 4s^6 - 3s^4 - 2s^3 + s - 2.$$

Матрица  $T_1$  преобразования к канонической форме управляемости (1.2), таким образом, имеет вид

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача наблюдения для исходной системы преобразованием координат  $\tilde{x} = T_1^{-1}x$  сводится, таким образом, к задаче наблюдения для системы следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}'u(t) + b\eta(t) = T_1^{-1}AT + T_1^{-1}B\eta(t) + T_1^{-1}B'u(t) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \tilde{x} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \eta(t) \\ y &= CT_1\tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{x}. \end{aligned}$$

### 1.3. Нулевая динамика и относительный порядок скалярных систем

Важным понятием в теории управления, и в частности для задачи наблюдения, является понятие нулевой динамики. Данное понятие может быть определено следующим образом (см., например [36, с. 61])

**Определение 1.4.** Под нулевой динамикой системы понимается движение в системе, целиком принадлежащее многообразию

$$y(t) = Cx(t) \equiv 0,$$

т.е. движение в системе приводящее к тождественно нулевому выходу.

Для рассматриваемого в данной работе случая скалярных систем управления, находящихся в общем положении, решена задача определения уравнений нулевой динамики, т.е. нахождения системы дифференциальных уравнений, описывающих движение по многообразию  $y \equiv 0$ .

Для этого исходная система уравнений (1.2) невырожденной заменой фазовых координат приводится к специальной канонической форме, в которой уравнения нулевой динамики представляются как отдельная подсистема. Для полноты описания метода построения оценки вектора состояния системы (1.2), приведем кратко алгоритм перехода к этой канонической форме.

Для этого, сначала введем еще одно вспомогательное понятие.

**Определение 1.5.** Натуральное число  $r$  будем называть относительным порядком системы (1.1), если

$$CB = 0, \quad CAB = 0, \quad \dots, \quad CA^{r-2}B = 0, \quad CA^{r-1}B \neq 0.$$

Эти условия означают, что  $y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)}$  не зависят явно от входного воздействия  $\eta(t)$ , а  $y^{(r)}$  явно зависит от  $\eta(t)$ .

**Замечание 1.5.** Определение относительного порядка инвариантно относительно невырожденного преобразования координат  $\tilde{x} = T_1 x$ . Действительно, для любого целого неотрицательного числа  $i$  будет выполнено

$$\tilde{C}(\tilde{A})^i \tilde{B} = (CT_1)(T_1^{-1}AT_1)^i(T_1^{-1}B) = C(T_1T_1^{-1})A^i(T_1T_1^{-1})^{-1}B = CA^iB.$$

**Замечание 1.6.** В силу Предположения 1.3 такое число всегда будет существовать и  $r \leq n$ . В самом деле, если  $CA^iB = 0$  для всех  $i = 0 \dots n - 1$ , то это означает, что  $N_{A,C}B = O_{n \times 1}$ . Отсюда следует, что либо матрица  $N_{A,C}$  вырождена, что противоречит предположению о наблюдаемости пары  $\{C, A\}$ , либо  $B = O_{n \times 1}$ , что противоречит предположению об управляемости пары  $\{A, B\}$ .

Пусть относительный порядок равен  $r$ . Тогда, не ограничивая общности рассуждений можно считать, что  $CA^{r-1}B = 1$  (этого всегда можно добиться нормировкой выхода  $y(t)$ ). Для системы, находящейся в

канонической форме управляемости (1.2) это означает, что вектор  $\tilde{C}$  имеет вид

$$\tilde{C} = \left( \tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2 \quad \dots \quad \tilde{C}_{n-r} \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right).$$

От канонического представления (1.2) можно перейти к каноническому представлению с выделением нулевой динамики (см. [37]) с помощью замены координат

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T_2 \tilde{x},$$

где части  $x'$ ,  $y'$  нового вектора состояния задаются соотношениями

$$x' = \begin{cases} \tilde{x}_1, \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n-r} \end{cases}, \quad y' = \begin{cases} y_1 = \tilde{C}\tilde{x}, \\ y_2 = \tilde{C}\tilde{A}\tilde{x}, \\ \vdots \\ y_r = \tilde{C}\tilde{A}^{r-1}\tilde{x} \end{cases}.$$

В силу определения относительного порядка системы и вида матрицы  $\tilde{A}$  в системе (1.2), матрица преобразования  $T_2$  будет иметь вид

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 & \tilde{C}_3 & \dots & \tilde{C}_{n-r} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 & \dots & \tilde{C}_{n-r-1} & \tilde{C}_{n-r} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \tilde{C}_{n-r} & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что такое преобразование координат невырожденно, определитель  $\det(T_2) = 1$ .

Уравнения системы в новых координатах примут следующий вид, называемый канонической формой с выделением нулевой динамики:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 + b'_1 u, \\ \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{n-r-1} = \tilde{x}_{n-r} + b'_{n-r-1} u, \\ \dot{\tilde{x}}_{n-r} = -\tilde{C}_1 \tilde{x}_1 - \tilde{C}_2 \tilde{x}_2 - \dots - \tilde{C}_{n-r} \tilde{x}_{n-r} + b'_{n-r} u + y, \\ \dot{y}_1 = y_2 + b''_1 u, \\ \vdots \\ \dot{y}_{r-1} = y_r + b''_{r-1} u, \\ \dot{y}_r = -\sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i \tilde{x}_i - \sum_{j=1}^r \beta_j y_j + b''_r u + \eta, \\ y = y_1. \end{array} \right.$$

В матричной форме система может быть записана как

$$\begin{cases} \dot{x}' = A_1 x' + b' u + b_y y, \\ \dot{y}' = A_2 y' + A_{12} x' + b'' u + b_\eta \eta, \end{cases} \quad (1.3)$$

где  $b_y = (0 \ \dots \ 0 \ 1)^T \in \mathbb{R}^{n-r}$ ,  $b_\eta = (0 \ \dots \ 0 \ 1)^T \in \mathbb{R}^r$

Часть системы, заданная уравнениями для  $x'$ , является подсистемой, отвечающей нулевой динамике системы при нулевом управлении  $u(t) \equiv 0$ . Матрица  $A_1$  при этом имеет вид сопровождающей матрицы полинома

$$P(s) = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 s + \dots + \tilde{C}_{n-r} s^{n-r-1} + s^{n-r}.$$

**Пример 1.4.** Продолжим преобразование системы из Примера 1.3. Найдем относительный порядок этой системы:

$$CB = 0, \quad CAB = 0, \quad CA^2B = 0, \quad CA^3B = 0, \quad CA^4B = 1,$$

значит относительный порядок системы  $r = 5$ .



Значит матрица  $T_2$  преобразования к канонической форме с выделением нулевой динамики будет иметь вид:

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Система сводится, таким образом, к следующему виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 + 4u, \\ \dot{\tilde{x}}_2 = -\tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2 + y, \\ \dot{y}_1 = y_2 + 4u, \\ \dot{y}_2 = y_3 - 2u, \\ \dot{y}_3 = y_4 - 4u, \\ \dot{y}_4 = y_5 - 2u, \\ \dot{y}_5 = 11\tilde{x}_1 + 10\tilde{x}_2 - 9y_1 + 7y_2 - 5y_3 + 5y_4 - 2y_5 + u + \eta, \\ y = y_1. \end{array} \right.$$

Спектр нулевой динамики (то есть спектр матрицы  $A_1$  в каноническом представлении (1.3)) может быть найден по исходным параметрам системы следующим образом. Находят инвариантные нули, определяемые по матрице Розенброка системы (1.1):

$$R(s) = \left[ \begin{array}{c|c} sI - A & -B \\ \hline C & O \end{array} \right], \quad R(s) \in \mathbb{C}^{(n+1) \times (n+1)}.$$

**Определение 1.6.** Инвариантными нулями системы (1.1) будем называть такие  $s^* \in \mathbb{C}$ , при которых матрица Розенброка системы теряет

ранг, то есть

$$\text{rank}R(s^*) < n + 1.$$

Очевидно, инвариантные нули системы не меняются при невырожденных линейных преобразованиях координат.

Инвариантные нули определяют спектр нулевой динамики системы. Всюду в далее будем предполагать, что нулевая динамика системы (1.1) устойчива, то есть выполнено

**Предположение 1.4.** Все инвариантные нули системы (1.1) лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости:

$$\text{Re}(s^*) < 0.$$

**Замечание 1.7.** Выполнение Предположения 1.4 означает гурвицевость матрицы  $A_1$  из канонического представления (1.3) (спектр матрицы  $A_1$  состоит из инвариантных нулей системы, точнее  $\det(sI - A_1) = \det(R(s))$ ).

При этом, если нулевая динамика системы неустойчива, то поставленная задача может быть неразрешима.

**Пример 1.5.** Рассмотрим систему управления

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -x_1 + x_2 - 2x_3 + \eta, \\ y = x_2. \end{cases}$$

Легко убедиться, что пара матриц  $\{A, B\}$  управляема, а пара  $\{C, A\}$  наблюдаема:

$$K_{A,B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad N_{A,C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

При этом система находится в канонической форме с выделением нулевой динамики, нулевая динамика определяется уравнением для компонента  $x_1$  динамической системы. Уравнения движения системы при тождественно нулевом выходе  $y \equiv 0$  определяются уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \equiv 0, \\ \dot{x}_2 = x_3 \equiv 0, \\ \dot{x}_3 = -x_1 + x_2 - 2x_3 + \eta = -x_1 + \eta \equiv 0. \end{cases}$$

Таким образом, если начальные условия системы положить  $x_1(0) = x_1^0$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $x_3(0) = 0$ , и если  $\eta(t) \equiv x_1(t) = x_1^0$ , то динамика системы будет целиком принадлежать многообразию  $y \equiv 0$ , а значит решения с различными  $x_1(t) = x_1^0$  будут неразличимы. Таким образом, поставленная задача построения асимптотически точной оценки вектора состояния для такой системы неразрешима.

#### 1.4. Оценка подсистемы, отвечающей нулевой динамике

В силу Предположения 1.4 для части  $x'$  вектора состояния системы, находящейся в канонической форме (1.3) может быть построена асимптотически точная оценка  $\bar{x}'$  с помощью наблюдателя вида:

$$\dot{\bar{x}}' = A_1 \bar{x}' + b'u + b_y y. \quad (1.4)$$

В самом деле, ошибка оценивания  $e_x = x' - \bar{x}'$  в этом случае будет удовлетворять уравнению

$$\dot{e}_x = A_1 e_x.$$

Из гурвицевости матрицы  $A_1$  следует, что  $e_x(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Скорость сходимости при использовании такого наблюдателя определяется

свойствами матриц исходной системы (1.1) и не может быть изменена.

Задача наблюдения для системы (1.1) свелась таким образом к задаче построения оценки для части  $y'$  вектора состояния системы (1.3).

В случае, когда относительный порядок системы (1.1)  $r = 1$ , задача тривиальна, поскольку единственный компонент  $y_1$  подсистемы, которую требуется оценить, является измеряемым выходом.

Далее будем рассматривать случай  $r > 1$ . Перед началом построения оценки вектора  $y'$  в этом случае необходимо провести еще одно фазовое преобразование данной подсистемы. Очевидно, что пара матриц  $\{A_2, b_\eta\}$  управляема, поскольку подсистема  $y'$  находится в канонической форме управляемости (1.2). Значит столбцы матрицы управляемости  $K_{A_2, b_\eta}$  линейно независимы. Отсюда следует, что преобразование координат  $T_3 \tilde{y} = y'$ , где столбцы  $T_3^i$  матрицы  $T_3 \in \mathbb{R}^{r \times r}$  определяются из соотношений

$$\begin{aligned} T_3^r &= b_\eta, \\ T_3^{r-1} &= A_2 T_3^r = A_2 b_\eta, \\ &\vdots \\ T_3^2 &= A_2 T_3^3 = A_2^{r-2} b_\eta, \\ T_3^1 &= A_2 T_3^2 = A_2^{r-1} b_\eta. \end{aligned}$$

невырожденно, поскольку матрица  $T_3$  получается из матрицы управляемости перестановкой столбцов.

В силу вида матриц  $A_2$  и  $b_\eta$ , матрица  $T_3$  нижнетреугольная и все ее диагональные элементы равны 1. Преобразованная система для  $\tilde{y}$  будет иметь следующий вид (см. [33; 38]):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{y}}_1 = -\beta_r \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + b_1^u u, \\ \dot{\tilde{y}}_2 = -\beta_{r-1} \tilde{y}_1 + \tilde{y}_3 + b_2^u u, \\ \vdots \\ \dot{\tilde{y}}_{r-1} = -\beta_2 \tilde{y}_1 + \tilde{y}_r + b_{r-1}^u u, \\ \dot{\tilde{y}}_r = -\beta_1 \tilde{y}_1 - \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i \tilde{x}_i + b_r^u u + \eta, \\ y = \tilde{y}_1, \end{array} \right. \quad (1.5)$$

где коэффициенты  $\alpha_i$  и  $\beta_j$  те же, что в канонической форме с выделенной нулевой динамикой (1.3).

Задача построения оценки вектора состояния для системы (1.1) при сделанных предположениях свелась, таким образом, к задаче построения оценки для динамической системы с максимальным относительным порядком вида (1.5). Задача построения асимптотических наблюдателей состояния для таких систем будет рассмотрена в главах 2 и 3.

Продолжим рассмотрение системы из Примера 1.4

**Пример 1.6.** Легко убедиться, что единственным инвариантным нулем рассматриваемой системы является  $s^* = -1$ . В самом деле, определитель матрицы Розенброка системы

$$\det R(s) = (s + 1)^2.$$

Значит, поскольку нулевая динамика системы устойчива, для получения оценки  $\bar{x}'$  части  $x'$  состояния полученной в Примере 1.4 системы вида (1.3) можно использовать следующий наблюдатель:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2 + 4u, \\ \dot{\bar{x}}_2 = -\bar{x}_1 - 2\bar{x}_2 + y. \end{array} \right.$$

Ошибка наблюдения  $e_x = x' - \bar{x}'$  в этом случае будет удовлетворять системе

$$\begin{cases} \dot{e}_{x,1} = e_{x,2}, \\ \dot{e}_{x,2} = -e_{x,1} - 2e_{x,2}. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим, что:

$$\begin{cases} e_{x,1}(t) = e^{-t}(e_{x,1}(0) + (e_{x,1}(0) + e_{x,2}(0))t), \\ e_{x,2}(t) = e^{-t}(e_{x,2}(0) - (e_{x,1}(0) + e_{x,2}(0))t), \end{cases}$$

то есть предлагаемый наблюдатель для части  $x'$  вектора состояния является асимптотически (экспоненциально) точным.

Матрица  $T_3^{-1}$  преобразования  $T_3^{-1}y' = \tilde{y}$  второй части вектора состояния будет для рассматриваемой системы следующей:

$$T_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 2 & 1 & 0 \\ -7 & 5 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подсистема в новых координатах будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}}_1 = -2\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + 4u, \\ \dot{\tilde{y}}_2 = 5\tilde{y}_1 + \tilde{y}_3 + 6u, \\ \dot{\tilde{y}}_3 = -5\tilde{y}_1 + \tilde{y}_4 - 28u, \\ \dot{\tilde{y}}_4 = 7\tilde{y}_1 + \tilde{y}_5 + 20u, \\ \dot{\tilde{y}}_5 = -9\tilde{y}_1 + 11\tilde{x}_1 + 10\tilde{x}_2 - 21u + \eta, \\ y = \tilde{y}_1. \end{cases}$$

Таким образом, задача оценивания для системы общего вида (1.1), рассмотренной в Примере 1.3 свелась к задаче для системы максимального относительного порядка в форме (1.5).

## Глава 2

# Базовый случай второго относительного порядка

Как было показано в предыдущей главе, задача построения оценки вектора состояния для линейных динамических систем с неопределенностью может быть сведена к задаче построения оценки для системы с максимальным относительным порядком, имеющей вид (1.5). В данной главе предлагается алгоритм построения наблюдателей для таких систем в случае, когда относительный порядок системы равен 2. Будут сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия сходимости погрешности наблюдения. Также будут исследованы свойства предлагаемого наблюдателя в случаях, когда в системе имеет место погрешность измерения выходного сигнала, и при наличии в элементах переключения типовых неидеальностей, получены оценки точности наблюдателя в этих случаях. Основные результаты главы опубликованы в работах [39—42].

В данной главе будет использоваться следующие обозначения:

- Для вещественного числа  $x$

$$[x]^\alpha = \text{sign}(x)|x|^\alpha.$$

### 2.1. Введение

В данной главе рассматривается задача наблюдения для системы (1.5). Выше разобран тривиальный случай, когда относительный порядок исходной системы (1.1) равен 1. Теперь мы перейдем к рассмотрению случая, когда относительный порядок исходной системы (1.1)  $r = 2$ .

Предлагаемый наблюдатель основан на одном известном алгоритме скольжения второго порядка: алгоритме “super-twisting” (см. [23; 43]). Основывается данный алгоритм на использовании нелинейных и разрывных обратных связей. Основным методом исследования устойчивости нулевого решения ST системы было использование функций Ляпунова (см., например [44; 45]). Кроме того, важным свойством, часто используемым при анализе данной системы, является свойство однородности (например в работе [25] с использованием этого свойства доказано существование набора параметров, обеспечивающего устойчивость системы).

В данном разделе будет получено решение ST системы для случая “наихудшего” возмущения. Будут, таким образом, сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия устойчивости рассматриваемого алгоритма и получены точные оценки для траекторий системы в отклонениях. В том числе будут доказаны условия устойчивости в случае, когда правая часть системы уравнений не является однородной, что существенно расширяет множество допустимых параметров наблюдателя.

Наконец, будут получены оценки для ошибки оценивания предлагаемого наблюдателя при наличии в рассматриваемой динамической системе погрешности измерения выходов и типовых неидеальностей в релейных элементах: зоны нечувствительности, гистерезиса и задержки.

## 2.2. Постановка задачи

Конкретизируем рассматриваемую задачу. Рассматривается следующая система управления:



$$\begin{cases} \dot{x}' = A_1 x' + b'u + b_y y, \\ \dot{\tilde{y}}_1 = -\beta_2 \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + b_1^u u, \\ \dot{\tilde{y}}_2 = -\beta_1 \tilde{y}_1 - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i \tilde{x}_i + b_2^u u + \eta, \\ y = \tilde{y}_1. \end{cases}$$

Известны все параметры системы, входной сигнал  $u(t)$ , измеряемый выход  $y(t)$ . Кроме того, в первой главе был приведен метод построения асимптотически точной оценки (полученная с помощью наблюдателя (1.4))  $\bar{x}'$  части  $x'$  вектора состояния рассматриваемой системы. Требуется по данной известной информации о системе построить асимптотически точную оценку неизвестной части вектора состояния рассматриваемой системы, то есть оценку компонента  $\tilde{y}_2$ .

Для решения поставленной задачи предлагается использовать систему наблюдателя, основанного использовании нелинейных и разрывных обратных связей, предложенных в работе [43], следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}}_1 = -\beta_2 y + \bar{y}_2 + b_{u,1} u + k[e_1]^\alpha, \\ \dot{\tilde{y}}_2 = -\beta_1 y - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i \bar{x}'_i + b_{u,2} u + \mu[e_1]^0, \end{cases}$$

где  $e_1 = \tilde{y}_1 - \bar{y}_1 = y - \bar{y}_1$ ,  $\bar{x}'_i$  — оценки  $\tilde{x}_i$ , полученные с помощью наблюдателя (1.4).  $k > 0$ ,  $\mu > 0$ ,  $0 < \alpha < 1$  — числовые параметры наблюдателя.

Запишем систему уравнений для ошибки оценивания для такого наблюдателя —  $e = \tilde{y} - \bar{y}$ :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - k[e_1]^\alpha, \\ \dot{e}_2 = -\mu[e_1]^0 + \xi(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

где новый неизвестный входной сигнал  $\xi(t)$  определяется соотношением

$$\xi(t) = \eta(t) - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i (\tilde{x}_i - \bar{x}'_i) = \eta(t) - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i e_{x,i}.$$

В силу асимптотической точности оценок  $\bar{x}'_i$ , для любого положительного  $m \in \mathbb{R}$  найдется такое  $t_0 > 0$ , что  $|\sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i e_{x,i}(t)| \leq m$  при  $t > t_0$ . Значит, не нарушая общности, можно считать, что входной сигнал  $\xi(t)$  в системе (2.1) всюду ограничен, т.е.

$$|\xi(t)| \leq \xi_0,$$

и его мажоранта  $\xi_0$  известна.

Рассматриваемая в данном разделе задача наблюдения сводится таким образом к выбору параметров  $k$ ,  $\mu$  и  $\alpha$  наблюдателя, таких чтобы нулевое решение системы (2.1) было бы устойчиво при любом измеримом ограниченном внешнем возмущении  $\xi(t)$ .

**Замечание 2.1.** Заметим, что если  $\mu \leq \xi_0$ , то система (2.1) не может быть устойчивой при всех  $\xi(t)$  из рассматриваемого класса. В самом деле, при выборе  $\xi(t) = \xi_0$ , из неравенства  $\mu \leq \xi_0$  следует, что  $\dot{e}_2(t) \geq 0$ , а значит рассматриваемая система не может быть устойчива.

Всюду в дальнейшем анализе будем полагать, что  $\mu > \xi_0$ .

### 2.3. Случай $\alpha = 1/2$

Начнем рассмотрение этой задачи с наиболее исследованного в литературе случая, когда параметр  $\alpha = 1/2$ . В этом случае система для ошибки оценивания имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - k[e_1]^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{e}_2 = -\mu[e_1]^0 + \xi(t). \end{cases} \quad (2.2)$$

Алгоритм управления, используемый в данной динамической системе (в рамках данной работы называемой ST системой) является, при соответствующем выборе параметров, алгоритмом скольжения второго порядка и известен под названием “super-twisting”. Использование

данного алгоритма управления приводит к возникновению в системе скользящего режима второго порядка (см. [25], [46, с. 155]). Данный случай является наиболее удобным для анализа устойчивости нулевого решения.

**Замечание 2.2.** Правая часть уравнений системы (2.1) в случае, когда  $\alpha = 1/2$ , однородна. В самом деле, если произвести в системе замену координат и времени

$$\begin{cases} \epsilon_1 = \sigma^2 e_1, \\ \epsilon_2 = \sigma e_2, \\ \tau = \sigma t, \end{cases}$$

где  $\sigma$  – произвольное положительное действительное число, то уравнения системы не изменятся:

$$\begin{cases} \frac{d\epsilon_1}{d\tau} = \epsilon_2 - k[\epsilon_1]^{\frac{1}{2}}, \\ \frac{d\epsilon_2}{d\tau} = -\mu[\epsilon_1]^0 + \xi(\tau). \end{cases}$$

Из этого следует, например, что если асимптотическая устойчивость для системы с таким выбором параметра имеет место, то она является глобальной. Так, в работах [23; 25] было доказано существование набора параметров  $k, \mu$ , гарантирующего локальную устойчивость системы, а следовательно из свойства однородности, и глобальную.

Впоследствии, в работах [44; 45; 47] с помощью метода функций Ляпунова были получены алгебраические достаточные условия асимптотической устойчивости системы. В работе [48] было, с помощью анализа траекторий системы при “наихудшем” возмущении с было получено необходимое и достаточное условие устойчивости системы (2.1) при  $\alpha = 1/2$ . В данной главе предлагается новый способ доказательства критерия, основанный на получении полного решения системы с “наихудшим” возмущением. Этот метод позволяет получить условия

устойчивости в более простом, чем были предложены в [48], полностью действительнoзначном виде. Кроме того, полученное в работе решение системы позволяет получать точные оценки траекторий системы, что, в свою очередь, позволяет далее получить оценки для систем с произвольным параметром  $\alpha$  и в случае наличия погрешности измерения выхода.

Начнем с анализа фазовых траекторий системы (2.2).

**Замечание 2.3.** Заметим, что система (2.1) центрально симметрична относительно начала координат (т.е. семейство траекторий системы при всевозможных  $\xi(t)$  из рассматриваемого класса и всевозможных начальных условиях симметрично). В самом деле, если  $e(t)$  – решение системы (2.1) с начальными условиями  $(e_1^0, e_2^0)$  и возмущением  $\xi(t)$ , то  $-e(t)$  будет являться решением этой системы с начальными условиями  $(-e_1^0, -e_2^0)$  и возмущением  $-\xi(t)$ .

Не нарушая общности, все последующие рассуждения будем проводить для правой полуплоскости координатной плоскости, т.е. при  $e_1 \geq 0$ . Начнем рассмотрение с I четверти координатной плоскости (с области, где  $e_1 > 0$  и  $e_2 > 0$ ).

**Замечание 2.4.** Заметим, что траектория системы (2.2) при  $e_2 > 0$  не может перейти во II четверть из I, то есть не может пересечь ось  $e_1 = 0$ . В самом деле, поскольку в малой окрестности оси  $e_1 = 0$  при  $e_2 > 0$  (в области  $ke_1^{\frac{1}{2}} < e_2$ ) имеет место неравенство  $\dot{e}_1 > 0$ .

Значит, поскольку всюду в правой полуплоскости  $\dot{e}_2 \leq -\mu + \xi_0 < 0$ , траектория системы (2.1) из I четверти может либо перейти в IV, либо сойтись к началу координат. Из IV же четверти, поскольку  $\dot{e}_1 \leq e_2 < 0$ ,  $\dot{e}_2 \leq -\mu + \xi_0 < 0$ , система (2.1) может перейти только в III четверть. При этом очевидно, что траектория системы из IV четверти всегда достигает III четверти координатной плоскости.

В силу центральной симметрии системы (2.1), в левой полуплоскости траектория системы из III четверти попадает либо во II, либо в начало координат. Из II четверти траектория системы гарантированно попадает в I.

Отсюда следует, что для анализа устойчивости системы (2.1) достаточно рассматривать траектории системы с начальными условиями на луче  $l_0 = \{e : e_1 = 0, e_2 \geq 0\}$ . В самом деле, выше показано, что всякая траектория системы (2.1) с любыми начальными условиями и любым возмущением  $\xi(t)$  попадает на этот луч. Всюду далее будем рассматривать системы (2.1) с начальными условиями  $e_1(0) = 0; e_2(0) = e_2^0 \geq 0$ .

Для анализа устойчивости системы с произвольным возмущением из рассматриваемого класса достаточно рассмотреть систему (2.2) с “наихудшим” возмущением  $\xi^*$ , таким, что траектории системы с этим возмущением будут ограничивать область в полуплоскости, из которой не могут выйти траектории с любым другим возмущением из рассматриваемого класса и теми же начальными условиями. Вид этого возмущения был впервые получен в работе [24]. Для полноты анализа, приведем рассуждения о получении этого вида.

Начнем рассмотрение с области на правой полуплоскости, где значение координаты  $e_1$  возрастает, то есть где  $e_2 > ke_1^{\frac{1}{2}}$  (область (a) на Рис. 1). Для того, чтобы траектории системы с возмущением  $\xi^*$  ограничивали сверху траектории системы с произвольным возмущением нужно чтобы траектории последней не могли пересечь траектории первой ни в одной точке рассматриваемой области. Поскольку первые компоненты вектора скорости систем не зависят от возмущения  $\xi$ , они положительны и равны для систем со всевозможными возмущениями. Значит, в силу положительности  $\dot{e}_1$  в рассматриваемой области, отсутствие пересечения траекторий может быть обеспечено максимизацией  $\xi(t)$ , то есть при  $\xi^* \equiv \xi_0$ .

В области же полуплоскости, где значение координаты  $e_1$  убывает, то есть если  $e_2 < ke_1^{\frac{1}{2}}$  (область (b) Рис. 1), аналогичным образом можно показать, что “наихудшим” возмущением, обеспечивающим ограничение сверху траектории с любыми другими возмущениями будет возмущением, минимизирующее  $\xi(t)$ , то есть  $\xi^* \equiv -\xi_0$ .

Это означает, что в любой точке траектории системы (2.2) с возмущением  $\xi^*$  будет выполнено неравенство

$$(\bar{n}, \bar{f}) \leq 0,$$

где  $\bar{n}$  – вектор внешней нормали к траектории системы с наилучшим возмущением, а  $\bar{f}$  – вектор скорости в этой точке системы (2.2) с произвольным возмущением  $\xi(t)$ . При этом неравенство может быть сделано строгим выбором  $\xi^* = \pm(\xi_0 + \varepsilon)$  в соответствующих областях, где  $\varepsilon$  – произвольное положительное число.

Таким образом, мы показали, что траектории системы

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - k[e_1]^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{e}_2 = -\mu[e_1]^0 + \xi^*(t), \end{cases} \quad (2.3)$$

где

$$\xi^*(t) = \xi_0 \text{sign} \dot{e}_1(t) = \xi_0, \text{sign}(e_2(t) - k[e_1(t)]^{\frac{1}{2}})$$

будут ограничивать область в полуплоскости, из которой траектории системы (2.2) с любым  $\xi(t)$  из рассматриваемого класса не могут выйти. Это означает, для доказательства устойчивости системы (2.2) необходимо и достаточно доказать устойчивость системы (2.3) с “наихудшим” возмущением.

Для получения же критерия устойчивости системы (2.3), получим сначала ее решение. Начнем рассмотрение с области правой полуплоскости, где  $e_2 \geq ke_1^{\frac{1}{2}}$ , т.е. где  $\dot{e}_1 \geq 0$  (область (a) на Рис. 1). Положим при

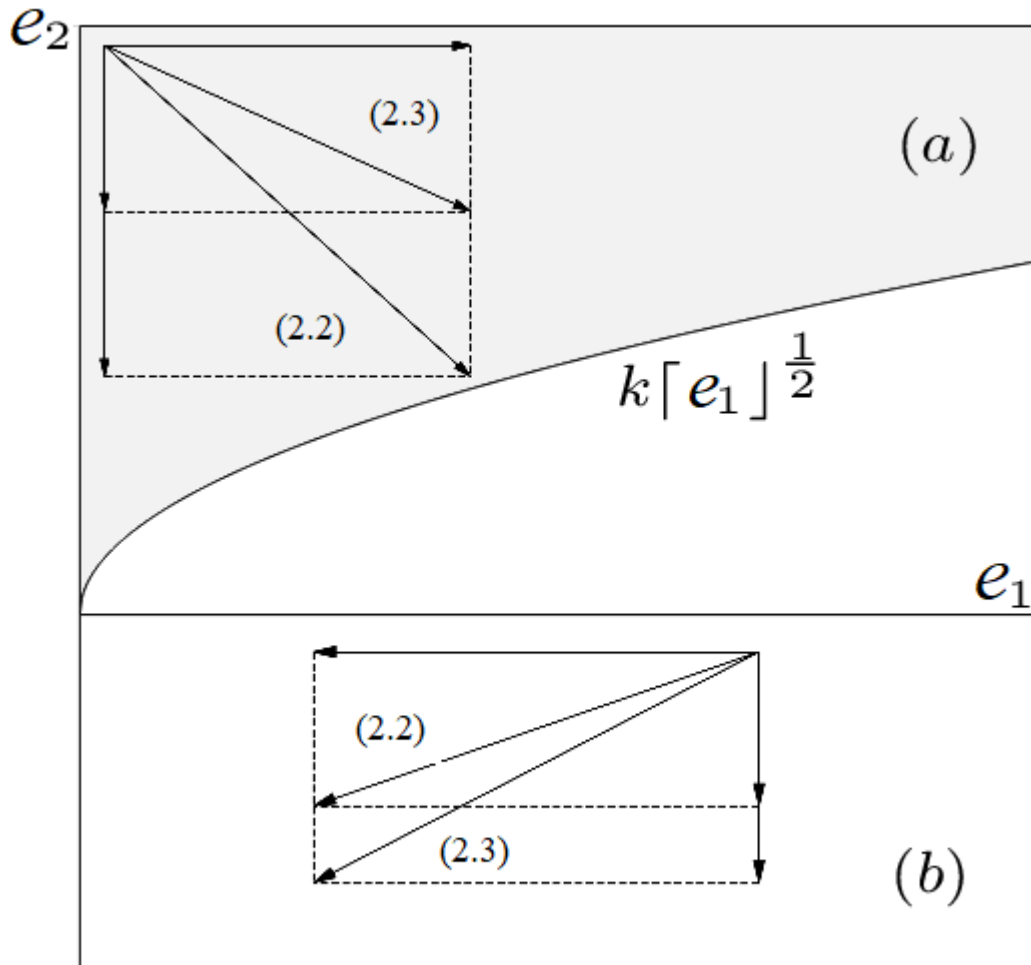


Рисунок 1 – Сравнение векторов скорости систем (2.1) и (2.3)

этом начальное условие  $e_2^0 > 0$ . Уравнения системы (2.3) принимают в этой области вид:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - ke_1^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{e}_2 = -\mu + \xi_0, \\ e_1(0) = 0, \\ e_2(0) = e_2^0 > 0. \end{cases}$$

Легко решить второе уравнение системы:

$$e_2(t) = e_2^0 - (\mu - \xi_0)t.$$

Подставив это выражение в первое уравнение системы, получим:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2^0 - (\mu - \xi_0)t - ke_1^{\frac{1}{2}}, \\ e_1(0) = 0. \end{cases}$$

Произведя замену переменной  $z(t) = \sqrt{e_1(t)}$ , получим:

$$\begin{cases} \dot{z} = \frac{a-vt}{2z} - \frac{k}{2}, \\ z(0) = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

где  $a = e_2^0$ ,  $v = \mu - \xi_0$ .

Произведя замену времени  $\tau = t - \frac{a}{v}$ , получим

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = \frac{-v\tau}{2z} - \frac{k}{2}, \\ z(-\frac{a}{v}) = 0. \end{cases}$$

Заметим, что движение системы в рассматриваемой области  $\dot{e}_1 \geq 0$  происходит при  $\tau < 0$ . В самом деле,  $\tau < 0$  пока  $t < \frac{a}{v}$ . Подставив неравенство для  $t$  в выражение для  $e_2(t)$  получим, что  $\tau < 0$  пока  $e_2(t) > 0$ . При этом траектория системы (2.3) может выйти из области только при  $e_2 > 0$ , т.к. она не может достигнуть в этой области начала координат ( $\dot{e}_1 > 0$  всюду в области). Таким образом, корректно будет искать  $z$  в виде  $z(\tau) = \tau p(\tau)$ . Уравнения системы изменятся следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{p(\tau)d\tau + \tau dp(\tau)}{d\tau} = \frac{-v}{2p(\tau)} - \frac{k}{2}, \\ p(-\frac{a}{v}) = 0. \end{cases}$$

Разделив переменные в уравнении, получим:

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{-\tau} = \frac{pdp}{p^2 + \frac{k}{2}p + \frac{v}{2}} = \frac{pdp}{(p + \frac{k}{4})^2 - \frac{k^2}{16} + \frac{v}{2}}, \\ p(-\frac{a}{v}) = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Рассмотрим сначала случай, когда  $k^2 < 8v$ , т.е. когда знаменатель правой части уравнения (2.5) всюду положителен. Проинтегрируем левую и правую части уравнения и получим, что для решения уравнения



(2.5) справедливо следующее тождество:

$$C - \ln(-\tau) = \frac{1}{2} \ln\left(p^2 + \frac{k}{2}p + \frac{b}{2}\right) - \frac{k}{\sqrt{8v - k^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{4p + k}{\sqrt{8v - k^2}}\right).$$

Для  $z(\tau)$  тождество будем иметь следующий вид:

$$C = \frac{1}{2} \ln\left(z^2 + \frac{k}{2}z\tau + \frac{v}{2}\tau^2\right) - \frac{k}{\sqrt{8v - k^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{4z + k\tau}{\tau\sqrt{8v - k^2}}\right). \quad (2.6)$$

Подставив в тождество начальное условие  $z\left(\frac{-a}{v}\right) = 0$ , найдем значения константы  $C$ :

$$C = \ln\left(\frac{a}{\sqrt{2v}}\right) - \frac{k}{\sqrt{8v - k^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{k}{\sqrt{8v - k^2}}\right).$$

Найдем теперь координату выхода траектории системы (2.3) из рассматриваемой области. Условие достижения границы области  $\dot{e}_1 = 0$ , т.е.  $kz = a - vt = -v\tau$ . Подставив в тождество (2.6) выражение для  $C$  и граничные условия, получим:

$$e'_2 = \frac{ak}{\sqrt{2v}} \exp\left\{\frac{-k}{\sqrt{8v - k^2}} \left(\operatorname{arctg}\frac{k}{\sqrt{8v - k^2}} + \operatorname{arctg}\frac{4v - k^2}{k\sqrt{8v - k^2}}\right)\right\}, \quad (2.7)$$

где  $e'_2$  – координата по оси  $e_2$  точки выхода системы (2.3) при  $k^2 < 8(\mu - \xi_0)$  из области  $\dot{e}_1 > 0$  (из области (a) в (b) на Рис. 1).

Теперь рассмотрим случай, когда  $k^2 > 8v$ , т.е. когда у знаменателя правой части (2.5) есть корни

$$p_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 8v}}{4}.$$

При, поскольку этом в области (a)  $\dot{e}_1 > 0$ , то всюду вдоль траектории системы будет выполнено неравенство  $a - vt > kz$ , а значит  $-v\tau > k\tau p(\tau)$ . Значит, поскольку  $\tau < 0$  на участке траектории, находящемся в области, будет выполнено неравенство  $-\frac{v}{k} < p(\tau) < 0$ .

Заметим, что

$$\frac{k - \sqrt{k^2 - 8v}}{4} > \frac{v}{k}.$$

для любых положительных  $k, v$ , таких что  $k^2 > 8v$ . В самом деле, неравенство может быть переписано как

$$k^2 - 4v > k\sqrt{k^2 - 8v} = \sqrt{(k^2 - 4v)^2 - 16v^2}.$$

Из этого следует, разность  $p(\tau) - p_{1,2}$  будет положительной всюду в области.

Уравнение (2.5) преобразуется к виду

$$\frac{d\tau}{-\tau} = \frac{M_1 dp}{p - p_1} + \frac{M_2 dp}{p - p_2},$$

где  $M_1 = \frac{p_1}{p_1 - p_2}$ ,  $M_2 = \frac{-p_2}{p_1 - p_2}$ . Проинтегрируем левую и правую части уравнения. Выражение для левой части такое же, как и в случае  $k^2 < 8v$ . Для правой части:

$$\int \frac{M_1 dp}{p - p_1} + \frac{M_2 dp}{p - p_2} = M_1 \ln(p - p_1) + M_2 \ln(p - p_2) + C.$$

Для решения уравнения (2.5) в этом случае будет справедливо тождество:

$$C - \ln(-\tau) = M_1 \ln(p - p_1) + M_2 \ln(p - p_2).$$

Подставив начальные условия, такие же, как и в случае  $k^2 < 8b$ , найдем  $C$ :

$$C = \ln\left(\frac{a}{v}\right) + \ln(-p_1) + M_2 \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right).$$

Подставив в тождество  $C$  и условия выхода из области, имеем:

$$\ln\left(-\frac{v}{k} - p_1\right) + M_2 \ln\left(\frac{v + p_2 k}{v + p_1 k}\right) + \ln(-\tau) - \ln(-p_1) - M_2 \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) - \ln\left(\frac{a}{v}\right) = 0.$$

Перейдя к исходной переменной, получим:

$$e_2'' = \frac{-kap_1}{-v - kp_1} \left(\frac{p_2(v + kp_1)}{p_1(v + kp_2)}\right)^{M_2}, \quad (2.8)$$

где  $e_2''$  – координата точки выхода системы (2.3) при  $k^2 > 8(\mu - \xi_0)$  из области  $\dot{e}_1 > 0$  (из области (a) в область (b) на Рис. 1).

Отметим также, что

$$\lim_{k^2 \rightarrow 8v-0} e'_2 = \lim_{k^2 \rightarrow 8v+0} e''_2 = \frac{ak}{\sqrt{2v}} \exp -1.$$

Из этого, а также поскольку траектория системы с  $k^2 = 8v$  будет зажата между траекториями систем с  $k^2 > 8v$  и  $k^2 < 8v$ , следует, что точка координата перехода из области (a) в область (b) для случая  $k^2 = 8v$  будет равна пределу  $e'_2$  при  $k^2 \rightarrow 8v - 0$ .

Перейдем к рассмотрению области полуплоскости, где значение  $e_1$  убывает, то есть где  $e_2 < ke_1^{\frac{1}{2}}$  (область (b) на Рис. 1). В этой области наихудшее возмущение также будет постоянно:  $\xi^* \equiv -\xi_0$ .

Система (2.3) в области (b) принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - ke_1^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{e}_2 = -\mu - \xi_0, \\ e_1(0) = \left(\frac{e_2^*}{k}\right)^2, \\ e_2(0) = e_2^* > 0, \end{cases}$$

где  $e_2^*$  – координата перехода системы в эту область (либо  $e'_2$  либо  $e''_2$  в зависимости от выбора параметров системы).

Заменами переменных, аналогичными приведенным выше для случая нахождения системы в области (a) на Рис. 1, уравнения системы могут быть приведены к виду с разделенными переменными (2.5). При этом, в области (b), очевидно, значения параметров уравнения будут другими:  $a = e_2^*$ , а  $v = \mu + \xi_0$ . Начнем, как и в рассуждениях для предыдущей рассмотренной области, со случая, когда знаменатель правой части уравнения (2.5) всюду положителен, то есть когда  $k^2 < 8v = 8(\mu + \xi_0)$ .

Так же, как в рассмотренном выше случае, эту систему можно привести к виду (2.4). В силу автономности системы (2.4) будем считать, что в момент, когда система переходит из области (a) в область (b)

$t = 0$ . Это означает, что если  $k^2 < 8(\mu + \xi_0)$ , для участка траектории, на котором  $\tau = t - \frac{a}{v} < 0$  (то есть пока траектория системы находится в I четверти координатной плоскости) для решения уравнения будет справедливо тождество (2.6).

Найдем константу  $C$  для этого участка траектории. Для этого подставим начальные условия:  $t = 0$ ,  $kz = a$ , то есть  $\tau = \frac{-a}{v}$ ,  $p = \frac{-v}{k}$ . Подставив их, получим:

$$C = \ln\left(\frac{a}{k}\right) - \frac{k}{\sqrt{8v - k^2}} \operatorname{arctg} \frac{-4v + k^2}{k\sqrt{8v - k^2}}.$$

Для решения (2.4) будет, таким образом, на промежутке  $\tau < 0$  справедливо:

$$\begin{aligned} & \ln\left(\frac{a}{k}\right) - \frac{k}{\sqrt{8v - k^2}} \operatorname{arctg} \frac{-4v + k^2}{k\sqrt{8v - k^2}} = \\ & = \frac{1}{2} \ln\left(z^2 + z\tau \frac{k}{2} + \frac{v}{2}\tau\right) - \frac{k}{\sqrt{8v - k^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{4z + k\tau}{\tau\sqrt{8v - k^2}}\right). \end{aligned}$$

Найдем теперь координату по оси  $e_1$  точки перехода траектории системы в IV четверть координатной плоскости. Для этого перейдем в тождестве к пределу при  $\tau \rightarrow 0 - 0$ . Получим:

$$z_1 = \frac{a}{k} \exp\left\{\frac{k}{\sqrt{8v - k^2}}\left(-\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{-4v + k^2}{k\sqrt{8v - k^2}}\right)\right\}, \quad (2.9)$$

где  $z_1 = \sqrt{e'_1}$ ,  $e'_1$  – координата точки пересечения траекторией системы (2.3) оси  $e_2 = 0$ . Очевидно, что если  $8v > k^2$ , то  $z_1 > 0$ , значит, траектории системы в этом случае всегда переходят в IV четверть координатной плоскости.

В IV четверти уравнения системы (2.3) могут быть записаны как:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - ke_1^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{e}_2 = -\mu - \xi_0, \\ e_1(0) = e'_1 > 0, \\ e_2(0) = 0. \end{cases}$$

Аналогично предыдущим областям при  $t > 0$  уравнения системы эквивалентные следующему:

$$\frac{dt}{t} = \frac{pdp}{(p + \frac{k}{4})^2 - \frac{k^2}{16} + \frac{v}{2}},$$

где  $p(t)t = \sqrt{e_1(t)}$ ,  $v = \mu + \xi_0$ .

Проинтегрировав левую и правую части уравнения, имеем:

$$C = \frac{1}{2} \ln \left( z^2 + \frac{k}{2} zt + \frac{v}{2} t^2 \right) - \frac{k}{\sqrt{8v - k^2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{4z + k\tau}{\tau\sqrt{8v - k^2}} \right).$$

Найдем значение  $C$  для этого промежутка. Для этого перейдем в тождестве к пределу при  $t \rightarrow 0 + 0$ . При этом в силу непрерывности траектории системы  $z(t) \rightarrow z_1$ . Получим:

$$C = \ln(z_1) - \frac{k}{\sqrt{8v - k^2}} \frac{\pi}{2}.$$

Условие достижения траекторией системы оси  $e_1 = 0$ . Подставив его, и полученное выражения для  $C$  в тождество, получим координату точки перехода траектории системы (2.3) в III четверть координатной плоскости:

$$|e_2^1| = z_1 \sqrt{2v} \exp \left\{ \frac{k}{\sqrt{8v - k^2}} \left( -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{k}{\sqrt{8v - k^2}} \right) \right\}, \quad (2.10)$$

где  $e_2^1$  – координата перехода системы (2.3) в III четверть координатной плоскости.

Объединив (2.9) и (2.10), получим

$$|e_2^1| = \frac{e_2^* \sqrt{2(\mu + \xi_0)}}{k^2} \exp \left\{ \frac{-k\pi + k \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{8(\mu + \xi_0) - k^2}}{k}}{\sqrt{8(\mu + \xi_0) - k^2}} \right\}. \quad (2.11)$$

Заметим, что при  $k^2 \rightarrow 8(\mu + \xi_0) - 0$  имеет место  $|e_2^1| \rightarrow 0$ . Сравнив вектора скоростей систем вида (2.3) с различными значениями параметра  $k$  можно показать, аналогично рассуждениям для “наихудшей помехи”, что траектории системы с большими  $k$  ограничивают области, из которых не могут выйти траектории систем с меньшими. Из

этого, а также из приведенных рассуждений о фазовых траекториях системы следует, что при  $k^2 \geq 8(\mu + \xi_0)$  траектория системы (2.3) будет сходиться к началу координат в I четверти координатной плоскости.

Подставив вместо  $e_2^*$  в уравнении (2.11)  $e_2'$  или  $e_2''$  получим, что при  $k^2 < 8(\mu - \xi_0)$

$$\begin{aligned} \frac{|e_2^1|}{e_2^0} &= \nu_1(\mu, \xi_0, k) = \\ &= \sqrt{\frac{\mu + \xi_0}{\mu - \xi_0}} \exp \left\{ \frac{-k\pi + k \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{8(\mu + \xi_0) - k^2}}{k}}{\sqrt{8(\mu + \xi_0) - k^2}} - \frac{k \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{8(\mu - \xi_0) - k^2}}{k}}{\sqrt{8(\mu - \xi_0) - k^2}} \right\}, \end{aligned}$$

а при  $8(\mu - \xi_0) \leq k^2 < 8(\mu + \xi_0)$

$$\begin{aligned} \frac{|e_2^1|}{e_2^0} &= \nu_2(\mu, \xi_0, k) = \\ &= \sqrt{\frac{2p_1(\mu + \xi_0)}{kp_1 + (\mu - \xi_0)}} \left( \frac{p_2(kp_1 + (\mu - \xi_0))}{p_1(kp_2 + (\mu - \xi_0))} \right)^{M_2} \exp \left\{ \frac{-k\pi + k \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{8(\mu + \xi_0) - k^2}}{k}}{\sqrt{8(\mu + \xi_0) - k^2}} \right\}. \end{aligned}$$

Значит, координаты точек пересечения оси  $e_1 = 0$  системой (2.3) будут образовывать геометрическую прогрессию с множителем  $\nu_1$  либо  $\nu_2$  в зависимости от параметров системы. Устойчивость системы, очевидно, будет достигаться в случае, когда множитель прогрессии меньше 1. Таким образом, мы получили необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости системы (2.3), а значит доказана

**Теорема 2.1.** *Нулевое решение системы (2.2) глобально асимптотически устойчиво при любом ограниченном измеримом входным сигнале  $|\xi(t)| \leq \xi_0$  тогда и только тогда, когда*

$$\nu(\mu, \xi_0, k) < 1,$$

где

$$\nu = \begin{cases} \nu_1, & 0 < k < \sqrt{8(\mu - \xi_0)}, \\ \nu_2, & \sqrt{8(\mu - \xi_0)} \leq k < \sqrt{8(\mu + \xi_0)}, \\ 0, & k \geq \sqrt{8(\mu + \xi_0)}. \end{cases}$$

**Замечание 2.5.** Заметим, что из  $k \rightarrow 0$  будет следовать, что  $\nu \rightarrow \sqrt{\frac{\mu+\xi_0}{\mu-\xi_0}} > 1$ . Кроме того, если  $\nu(\mu, \xi_0, k_1) < 1$ , то для любого  $k > k_1$  будет выполнено  $\nu(\mu, \xi_0, k) < \nu(\mu, \xi_0, k_1) < 1$  (в этом можно убедиться продифференцировав по  $k$  правую часть тождества (2.10)). Значит, в силу непрерывности  $\nu$  по  $k$  при фиксированных  $\mu$  и  $\xi_0$ , для любых  $\xi_0, \mu$  существует единственное  $k_0(\mu, \xi_0)$ , такое, что  $\nu(\mu, \xi_0, k_0) = 1$ . Системы с  $k < k_0$  будут в этом случае неустойчивы, системы с  $k = k_0$  будут устойчивы, но не асимптотически, а системы с  $k > k_0$  будут глобально асимптотически устойчивы.

## 2.4. Вариация параметра нелинейности

Традиционно, при изучении данного алгоритма, варьируются только множители перед нелинейным и разрывным слагаемыми в первом и втором уравнении системы (2.1) соответственно, при одинаковом значении степени, равном  $1/2$ . Далее будут изучены свойства устойчивости обобщенного (при различных значениях степени из интервала  $0 < \alpha < 1$ ) алгоритма “super-twisting”.

Для случая  $\alpha = 1/2$  ранее, с помощью анализа фазового пространства, было показано, что траектории системы (2.1) с любым возмущением из рассматриваемого класса будут ограничены сверху траекторией системы с “наихудшим” возмущением:

$$\xi^* = \xi_0 \text{sign}(\dot{e}_1) = \xi_0 \text{sign}(e_2 - k[e_1]^\alpha). \quad (2.12)$$

Рассуждения о “наихудшем” возмущении  $\xi(t)$ , приведенные для случае  $\alpha = 1/2$  могут быть без изменений применены к системе (2.1) с произвольным  $\alpha$  из рассматриваемого интервала. Всюду далее в данной разделе будет рассматриваться система (2.1) с “наихудшим” возмуще-

нием:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - k[e_1]^\alpha, \\ \dot{e}_2 = \xi^* - \mu[e_1]^0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Для случая  $\alpha = 1/2$  известны необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости системы (2.1) с возмущением (2.12). В этом случае показано, что устойчивость системы, если достигается, то является глобальной. Кроме того, для любых  $\xi_0 > 0, \mu > \xi_0$  существует  $k_0 = k_0(\mu, \xi_0)$ , такое, что при любом  $k > k_0$  система (2.1) с параметрами  $(k, \mu, \alpha = 1/2)$  будет устойчива, при  $k = k_0$  система устойчива, но не асимптотически, а при  $k < k_0$  система неустойчива.

Не нарушая общности рассуждений, положим начальные условия для системы (2.13) равными  $(0, e_2^0), e_2^0 > 0$ . Рассматривать систему, в силу симметричности относительно начала координат, достаточно только в правой полуплоскости координатной плоскости, т.е. при  $e_1 \geq 0$ .

### Случай $0 < \alpha < 1/2$

Начнем анализ устойчивости системы (2.1) со случая  $0 < \alpha < 1/2$ . Для этого будем сравнивать траекторию системы (2.1) с произвольными параметрами  $k, \mu, \alpha < 1/2$  с траекторией системы

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - k^*[e_1]^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{e}_2 = \xi^* - \mu[e_1]^0, \end{cases} \quad (2.14)$$

где  $k^* = k_0(\mu, \xi_0) + \delta_k, \delta_k \in \mathbb{R}$  – произвольное положительное число. В силу приведенных выше рассуждений, система (2.14) будет глобально асимптотически устойчивой.

Покажем, что существует окрестность начала координат, в которой траектория системы (2.14) будет ограничивать траекторию системы (2.13) с рассматриваемым набором параметров.



Заметим, что в области координатной плоскости, где

$$k[e_1]^\alpha \geq k^*[e_1]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.15)$$

траектория системы (2.14) будут ограничивать область, из которой траектории системы (2.13) не могут выйти. Действительно, в области, где знак первой компоненты векторов скорости систем совпадает (области (а) и (с) на Рис. 2), значения второй компоненты векторов скоростей систем совпадают. Значит, поскольку величина  $\dot{e}_1$  больше в системе (2.14), траектория системы (2.13) не может пересечь траекторию системы (2.14) (аналогично рассуждениям о “наихудшей” помехе  $(\bar{n}, \bar{f}) < 0$ ). Случай же, когда знак первых компонент вектора скорости двух систем отличается возможен только если  $\dot{e}_1 < 0$  для системы (2.13) (область (b) на Рис. 2). Значит, и в этом случае пересечение траекторий невозможно, и траектория системы (2.14) будет ограничивать область, из которой траектории системы (2.13) не могут выйти.

Получим оценку на величину начального условия  $e_2^0$ , гарантирующую выполнение неравенства (2.15). Очевидно, поскольку траектории системы (2.14) ограничивают область, в которой будут находиться траектории системы (2.13), достаточно выбрать такое начальное условие, чтобы неравенство выполнялось для системы (2.14). Неравенство (2.15) переписывается как

$$|e_1| \leq \left( \frac{k}{k^*} \right)^{\frac{2}{1-2\alpha}} = e_{1,max}. \quad (2.16)$$

Ранее мы получили решение системы (2.14). В частности, была получена зависимость максимального значения координаты  $e_1$  (обозначим его  $e_1^*$ ) от начального условия  $e_2^0$ :

$$\begin{cases} e_1^* = \frac{(e_2^0)^2}{2v} \exp \left\{ \frac{-2k^*}{\sqrt{8v-(k^*)^2}} \left( \arctg \frac{k^*}{\sqrt{8v-(k^*)^2}} + \arctg \frac{4v-(k^*)^2}{k^* \sqrt{8v-(k^*)^2}} \right) \right\}, & (k^*)^2 < 8v, \\ e_1^* = \left( \frac{e_2^0 p_1}{v+k^* p_1} \right)^2 \left( \frac{p_2(v+k^* p_1)}{p_1(v+k^* p_2)} \right)^{2M_2}, & (k^*)^2 \geq 8v, \end{cases}$$

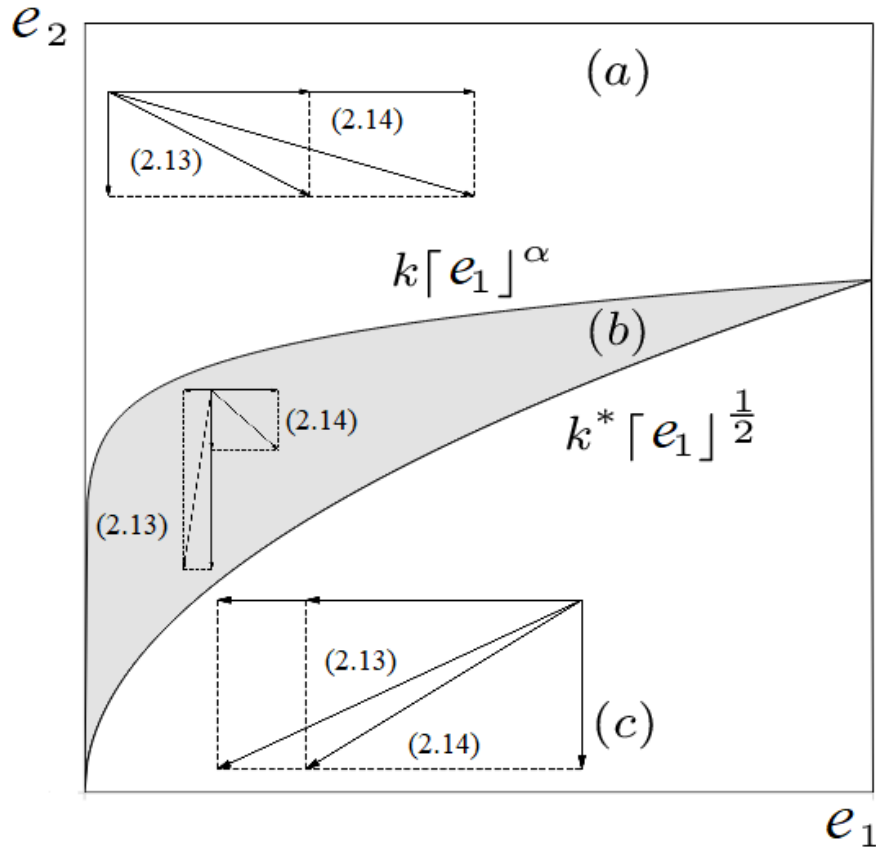


Рисунок 2 – Сравнение векторов скоростей систем (2.13) и (2.14)

где  $v = \mu - \xi_0$ ,  $p_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 8v}}{4}$ ,  $M_2 = \frac{-p_2}{p_1 - p_2}$ .

Неравенство (2.16) равносильно для системы (2.14) неравенству  $e_1^* \leq e_{1,max}$ . Последнее можно переписать как неравенство для начального условия  $e_2^0$ :

$$\begin{cases} |e_2^0| < \sqrt{2v} \exp \left\{ \frac{k_0}{\sqrt{8v - k_0^2}} \left( \arctg \frac{k_0}{\sqrt{8v - k_0^2}} + \arctg \frac{4v - k_0^2}{k_0 \sqrt{8v - k_0^2}} \right) \right\} \sqrt{e_{1,max}}, & k_0^2 < 8v, \\ |e_2^0| < \frac{v + k_0 p_1}{p_1} \left( \frac{p_1(v + k_0 p_2)}{p_2(v + k_0 p_1)} \right)^{M_2} \sqrt{e_{1,max}}, & k_0^2 \geq 8v. \end{cases} \quad (2.17)$$

Если для начальных условий системы (2.13) выполнено условие (2.17), то, поскольку ее траектория не выходит из области, ограниченной траекторией системы (2.14), для нее также будет выполнено и условие (2.16). Значит, траектории системы (2.13) с такими начальными условиями будут ограничены сверху траекториями асимптотически устой-

чивых систем (2.14).

Таким образом, мы показали, что система (2.1) с  $0 < \alpha < 1/2$  будет являться локально асимптотически устойчивой для любого набора параметров  $\mu > \xi_0$  и  $k > 0$ . Для случая  $\alpha = 1/2$ , в силу однородности правой части уравнений системы, локальная устойчивость означала также и глобальную. Теперь покажем, что для рассматриваемого сейчас интервала значений параметра нелинейности система никогда не является глобально асимптотически устойчивой. Сначала докажем вспомогательное утверждение:

**Лемма 2.1.** *Для любого  $M > 0$  и любого  $\delta_e > 0$  найдется достаточно большое  $e_2^*$ , такое что для координат точки  $(M, e_{2,M})$  выхода системы (2.13) с начальными условиями  $(0, e_2^0 > e_2^*)$  из полосы  $0 < e_1 < M$  будет выполнено неравенство*

$$e_{2,M} \geq e_2^0 - \delta_e.$$

*Доказательство.* Выберем  $e_{2,M}$  такое, что

$$e_{2,M} \geq kM^\alpha + \frac{(\mu - \xi_0)M}{\delta_e}.$$

Рассмотрим траекторию системы (2.13), проходящую через точку  $(M, e_{2,M})$ . В полосе  $0 < e_1 < M$ , очевидно, для этой системы будет выполнено неравенство

$$\dot{e}_1 \geq e_{2,M} - kM^\alpha \geq \frac{(\mu - \xi_0)M}{\delta_e}.$$

Из этого следует, что промежуток времени  $\Delta t$ , в течение которого система находилась в полосе удовлетворяет соотношению

$$\Delta t \leq \frac{\delta_e}{\mu - \xi_0}.$$

Поскольку на рассматриваемом участке  $\dot{e}_1 \equiv -\mu + \xi_0$ , получим

$$e_2^0 = e_{2,M} + (\mu - \xi_0)\Delta t \leq e_{2,M} + \delta_e.$$

Таким образом, для выполнения условия Леммы достаточно выбрать

$$e_2^0 \geq kM^\alpha + \frac{(\mu - \xi_0)M}{\delta_e} + \delta_e.$$

□

Аналогичным образом можно доказать следующее утверждение:

**Лемма 2.2.** *Для любого  $M > 0$  и любого  $\delta_e > 0$  найдется такое  $e_2^* > 0$ , что координата  $e_2^1$  достижения системой (2.13) с начальными условиями  $(M, e_{2,M} < -e_2^*)$  оси  $e_1 = 0$  будет удовлетворять неравенству:*

$$e_2^1 \geq e_{2,M} - \delta_e.$$

Отсутствие глобальной устойчивости системы (2.13) является простым следствием этих утверждений. В самом деле, выберем произвольное  $k_* < k_0(\mu, \xi_0)$ . Легко показать, что вне полосы

$$|e_1| \leq \left( \frac{k}{k_*} \right)^{\frac{2}{1-2\alpha}}$$

траектории системы (2.13) находятся вне области, ограниченной траекториями системы:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - k_* [e_1]^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{e}_2 = \xi^* - \mu [e_1]^0, \end{cases} \quad (2.18)$$

Значит, в силу Леммы 2.1, траектория системы (2.13) с достаточно большим начальным условием  $e_2^0$  будет ограничена снизу траекторией системы (2.18) с начальным условием  $\bar{e}_2^0 = e_2^0 - \delta_e$  вплоть до повторного попадания в полосу.  $\delta_e$  при этом выбором  $e_2^0$  может быть сделано сколь угодно малым. В силу Леммы 2.2 и выбора  $k_*$ , координата  $\bar{e}_2^1$  второго попадания траектории системы (2.18) в полосу при достаточно большом  $e_2^0$  будет удовлетворять неравенству

$$|\bar{e}_2^1| \geq \bar{e}_2^0 \nu(\mu, \xi_0, k_*) - \delta_e.$$

Поскольку  $\delta_e$  может быть выбрано сколь угодно малым, при достаточно большом  $e_2^0$  будет выполнено:

$$|e_2^1| > |\bar{e}_2^1| > e_2^0.$$

Таким образом мы показали, что при достаточно большом начальном условии  $e_2^0$  координаты точек пересечения оси  $e_1 = 0$  системой (2.13) будут возрастать, а значит система не будет являться глобально устойчивой.

Объединив вышеизложенное, получим следующее утверждение:

**Теорема 2.2.** *Нулевое решение системы (2.1) с  $0 < \alpha < 1/2$ ,  $\mu > \xi_0$  и  $k > 0$  является локально асимптотически устойчивым. При этом ни при каком выборе параметров  $\mu$  и  $k$  оно не будет являться глобально устойчивым. Область притяжения нулевого решения системы содержит множество, ограниченное траекторией системы (2.14) с начальным условием, удовлетворяющим неравенству (2.17).*

**Следствие 1.** *Если набор параметров  $k, \mu$  обеспечивает устойчивость системы (2.13) при  $\alpha = 1/2$  (т.е. если  $k > k_0(\mu, \xi_0)$ ), то при  $\alpha \rightarrow 1/2 - 0$  область устойчивости системы (2.13) растет, заполняя всю координатную плоскость.*

Численное моделирование показывает, что полученные теоретические оценки для области устойчивости системы в зависимости от параметров близки к реальной величине области. В частности, на Рис. 3 приведен пример зависимости величины (по оси  $e_2$ ) области устойчивости и ее оценки от значения параметра  $k$  при том, что остальные параметры системы фиксированы. Конкретнее, моделировалась система:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - k[e_1]^{0.3}, \\ \dot{e}_2 = \text{sign}(\dot{e}_1) - 2[e_1]^0. \end{cases}$$

Для получения реальной величины области устойчивости начальное условие  $e_2^0$  увеличивалось до тех пор, пока следующая координата пересечения системой оси  $e_1 = 0$  не оказывалась больше  $e_2^0$ . Интегрирование системы производилось методом Эйлера первого порядка с шагом  $10^{-3}$ .

Кроме того, результаты численных экспериментов указывают на то, что отношение реальной величины области устойчивости и полученной оценки не зависит от  $k$  (при фиксированных значениях параметров  $\mu$ ,  $\xi_0$  и  $\alpha$  отношение не изменяется при изменении параметра  $k$ ).

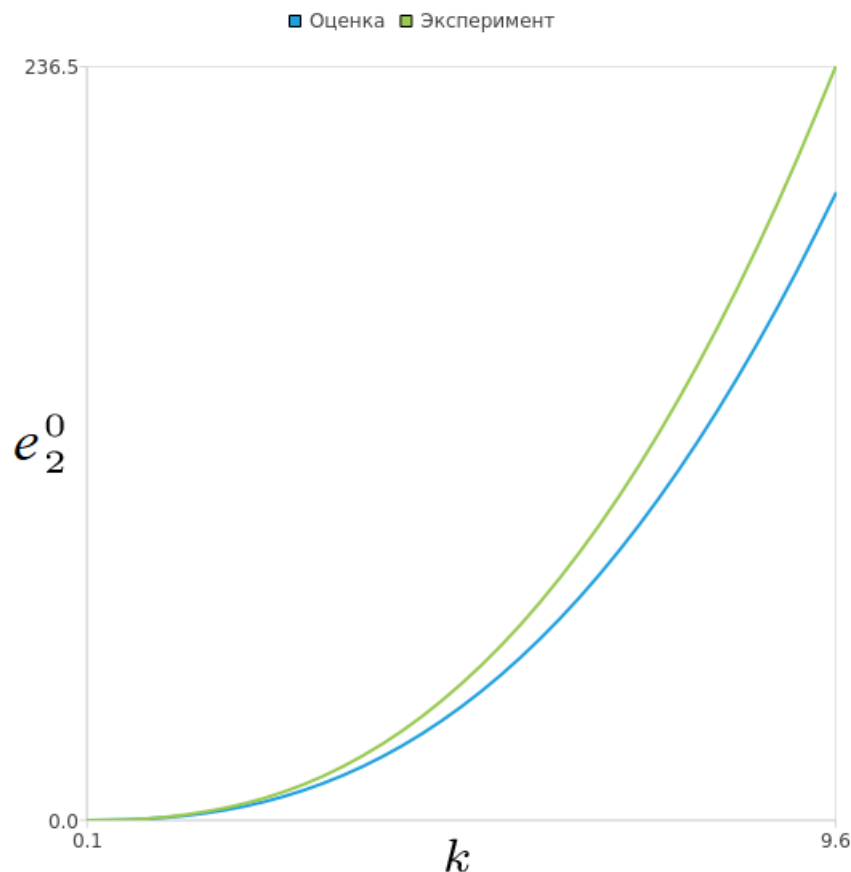


Рисунок 3 – Размер области устойчивости системы (2.13) при  $\alpha < 1/2$

### Случай $1/2 < \alpha < 1$

Перейдем к рассмотрению случая  $1/2 < \alpha < 1$ . Аналогично случаю  $\alpha < 1/2$  будем сравнивать траекторию системы (2.13) с траекторией неустойчивой системы

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - k_* [e_1]^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{e}_2 = \xi^* - \mu [e_1]^0, \end{cases} \quad (2.19)$$

где  $k_* = k_0(\mu, \xi_0) - \delta_k$ , где  $\delta_k > 0$  – произвольное действительное число.

Покажем, что существует окрестность начала координат, внутри которой траектории системы (2.19) ограничивают снизу траектории системы (2.13). Аналогичными случаю  $\alpha < 1/2$  рассуждениями легко показать, что такая ограниченность траекторий будет достигаться всюду в области, где  $k[e_1]^\alpha \leq k_* [e_1]^{\frac{1}{2}}$ , т.е. при

$$|e_1| \leq \left( \frac{k_*}{k} \right)^{\frac{2}{2\alpha-1}} = e_{1,min}. \quad (2.20)$$

Для системы (2.19) эквивалентное условию (2.20) неравенство для начального условия  $e_2^0$  запишется в виде

$$\begin{cases} |e_2^0| < \sqrt{2v} \exp \left\{ \frac{k_0}{\sqrt{8v-k_0^2}} \left( \arctg \frac{k_0}{\sqrt{8v-k_0^2}} + \arctg \frac{4v-k_0^2}{k_0 \sqrt{8v-k_0^2}} \right) \right\} \sqrt{e_{1,min}}, & k_0^2 < 8v, \\ |e_2^0| < \frac{v+k_0 p_1}{p_1} \left( \frac{p_1(v+k_0 p_2)}{p_2(v+k_0 p_1)} \right)^{M_2} \sqrt{e_{1,min}}, & k_0^2 \geq 8v. \end{cases} \quad (2.21)$$

В силу ограниченности траектории системы (2.19) сверху траекторией системы (2.13), и неустойчивости системы (2.19), система (2.13) с  $\alpha > 1/2$  также будет неустойчивой.

Покажем, что несмотря на отсутствие устойчивости, все траектории системы (2.13) при  $\alpha > 1/2$  будут сходиться в некую ограниченную область. Для этого выберем произвольно параметр  $k^* > k_0(\mu, \xi_0)$ . Вне полосы

$$|e_1| \leq \left( \frac{k^*}{k} \right)^{\frac{2}{2\alpha-1}}$$

траектории системы (2.13) будут ограничены сверху траекториями устой-

чивой системы

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - k^*[e_1]^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{e}_2 = \xi^* - \mu[e_1]^0. \end{cases} \quad (2.22)$$

Кроме того, в силу Леммы 2.1, при достаточно большом начальном условии  $e_2^0$  траектории системы (2.13) будут ограничены сверху траекториями системы (2.22) с начальным условием  $e_2^0 + \delta_e$  до повторного попадания в полосу. Таким образом, для координаты  $\bar{e}_2^1$  повторного попадания системы (2.13) в полосу будет выполнено

$$|\bar{e}_2^1| < (e_2^0 + \delta_e)\nu(\mu, \xi_0, k^*) < e_2^0.$$

В силу же Леммы 2.2, из этого следует, что при достаточно большом  $e_2^0$  для координаты  $e_2^1$  пересечения траекторией системы (2.13) оси  $e_1 = 0$  будет выполнено неравенство

$$|e_2^1| < |\bar{e}_2^1| + \delta_e < e_2^0.$$

То есть, величина координат точек пересечения оси  $e_1 = 0$  при достаточно больших начальных условиях будет уменьшаться, а значит траектории системы сходятся в ограниченную область.

Таким образом, доказана

**Теорема 2.3.** *Нулевое решение системы (2.1) с  $1/2 < \alpha < 1$ , не является устойчивым ни для каких  $\mu > \xi_0$  и  $k > 0$ . При этом, траектории системы сходятся при любых значениях параметров  $\mu > \xi_0$  и  $k > 0$  в некую ограниченную область, содержащую множество, ограниченное траекторией системы (2.19) с  $k_* = k_0(\mu, \xi_0)$  и начальными условиями, удовлетворяющими (2.21).*

Численное моделирование при этом показывает, что система (2.13) с параметром  $1/2 < \alpha < 1$  содержит предельный цикл, притягивающий все решения системы, кроме нулевого, величина которого близка



к полученной нижней оценке. В частности, на Рис. 4 приведен пример зависимости размера (по оси  $e_2$ ) предельного цикла и его оценки от значения параметра  $k$  при фиксированных значениях других параметров системы. Конкретно, рассматривалась следующая система:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - k[e_1]^{0.6}, \\ \dot{e}_2 = 4\text{sign}(\dot{e}_1) - 5[e_1]^0. \end{cases}$$

Интегрирование системы производилось методом Эйлера первого порядка с шагом  $10^{-3}$ . Для нахождения величины (максимальной координаты по оси  $e_2$ ) предельного цикла значение начального условия  $e_2^0$  увеличивалось до момента, когда координата следующего пересечения траекторий оси  $e_1 = 0$  не оказывалась меньше  $e_2^0$ . В качестве исходного значения начального условия  $e_2^0$  бралась оценка (2.21). Минимальный шаг изменения начального условия был выбран равным 0.01.

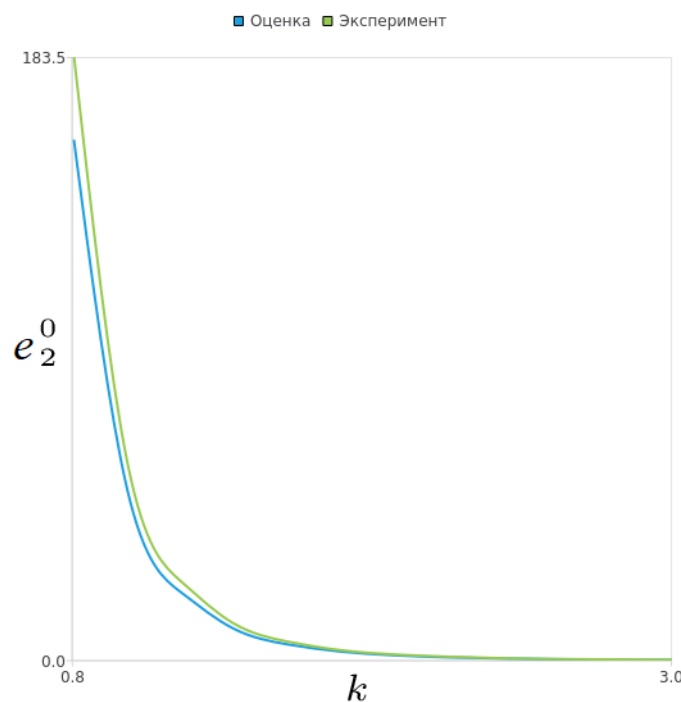


Рисунок 4 – Величина предельного цикла системы (2.13) при  $\alpha > 1/2$

## 2.5. Погрешность измерения выхода

В данном разделе мы исследуем характеристики предлагаемого наблюдателя в случае, когда выходной сигнал системы известен не точно, то есть при наличии некоторой погрешности  $\delta(t)$  измерения выхода системы. Конкретнее, рассмотрим задачу наблюдения для следующей системы управления:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}}_1 = -\beta_2 \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + b_1^u u, \\ \dot{\tilde{y}}_2 = -\beta_1 \tilde{y}_1 - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i \tilde{x}_i + b_2^u u + \eta, \\ y = \tilde{y}_1 + \delta. \end{cases}$$

Будем полагать, что погрешность измерения  $\delta$  является измеримой и ограниченной функцией, причем известна ее мажоранта, то есть  $|\delta(t)| \leq \Delta$ . Остальные обозначения те же, что и в предыдущих разделах работы.

Для построения оценки вектора состояния системы будем использовать тот же наблюдатель, что и в случае точного измерения выхода. Для ошибки оценивания с помощью такого наблюдателя справедливы уравнения:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - k[e_1 + \delta]^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{e}_2 = \xi - \mu[e_1 + \delta]^0, \end{cases} \quad (2.23)$$

где  $e = \tilde{y} - \bar{y}$ . Целью исследования в данном разделе работы является доказательство сходимости траекторий системы (2.23) с любым возмущением  $\xi$  и любой погрешностью измерения  $\delta$  из рассматриваемых классов в некую ограниченную область на координатной плоскости. Кроме того, будет получен вид области сходимости системы (2.23) и точные оценки этой области.

Поскольку система (2.23) симметрична относительно начала координат (симметрично семейство траекторий при всевозможных возмущениях и погрешностях измерения), не ограничивая общности рассуждений,

всюду далее будем рассматривать систему (2.23) в правой полуплоскости, т.е. при  $e_1 > 0$ .

Сначала рассмотрим систему при  $e_1 < \Delta$ ,  $e_2 > 0$ . Причем будем рассматривать систему при  $e_2 > k(e_1 + \Delta)^{1/2}$ , то есть вне окрестности начала координат, где координата  $e_1$  может убывать. В этой области  $\dot{e}_2 \leq \mu + \xi_0$ , причем если  $\dot{e}_2 > 0$  (т.е. если  $\delta(t) < -e_1(t) < 0$ ), то  $\dot{e}_1 \geq e_2$ . Таким образом, траектории системы (2.23) при  $e_1 < \Delta$  и  $e_2 > 0$  будут находиться в области, ограниченной траекторией системы

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2, \\ \dot{e}_2 = \xi_0 + \mu. \end{cases} \quad (2.24)$$

Обозначим за  $t'$  момент времени, когда система (2.24) доходит до границы области, т.е. до момента, когда  $e_1 = \Delta$ ,  $e_2(t') = e_2'$ .

В области  $e_1 > \Delta$  будет справедлива система неравенств

$$\begin{aligned} \text{sign}(e_1 + \delta) &= \text{sign}(e_1), \\ \dot{e}_1 &\leq e_2 - k(e_1 - \Delta)^{\frac{1}{2}}, \\ -\mu - \xi_0 &\leq \dot{e}_2 \leq -\mu + \xi_0. \end{aligned}$$

Из этого следует, что траектории системы (2.23) с произвольной погрешностью измерения будут ограничены сверху траекторией системы с “наихудшей” погрешностью:

$$\delta^*(t) \equiv -\Delta.$$

Далее в области  $e_1 > \Delta$  будем рассматривать систему (2.23) с “наихудшей” погрешностью. Проведем замену координат  $\bar{e}_1 = e_1 - \Delta$ . Уравнения системы (2.23) в области примут вид:

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_1 = e_2 - \bar{e}_1^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{e}_2 = \xi - \mu. \end{cases} \quad (2.25)$$

Значит, координата выхода из области  $e_1 > \Delta$  системы (2.23) с произвольной погрешностью измерения будет ограничена сверху координатой выхода из этой области системы (2.25) с начальными условиями  $\bar{e}_1(0) = 0$ ,  $e_2(0) = e'_2$ , где  $\bar{e}_1 = e_1 - \Delta$ .

Свойства системы (2.25) были исследованы в предыдущих разделах работы, для нее известно что координата  $e''_2$  пересечения траекторией системы оси  $\bar{e}_1 = 0$  удовлетворяет неравенству

$$|e''_2| \leq \nu(\mu, \xi_0, k)e'_2.$$

После этого система попадает в область  $e_1 < \Delta$ ,  $e_2 < 0$ . Для нее, аналогично области  $e_1 < \Delta$ ,  $e_2 > 0$ , можно показать, что траектории системы (2.23) будут ограничены сверху траекторией системы

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2, \\ \dot{e}_2 = -\mu - \xi_0, \end{cases} \quad (2.26)$$

с начальными условиями  $e_1(0) = \Delta$ ,  $e_2(0) = e''_2$ . Оставшееся время пребывания системы (2.26) в правой полуплоскости обозначим как  $t''$ , координату пересечения оси  $e_1 = 0$  – как  $e_2^1$ .

Решив уравнения ограничивающих систем (2.24), (2.26), получим систему уравнений

$$\begin{cases} e_2^0 t' + \frac{\mu + \xi_0}{2} (t')^2 = \Delta, \\ -\nu e'_2 t'' - \frac{\mu + \xi_0}{2} (t'')^2 = -\Delta, \\ e'_2 = e_2^0 + (\mu + \xi_0)t', \\ e_2^1 = -\nu e'_2 - (\mu + \xi_0)t''. \end{cases} \quad (2.27)$$

Найдя из первых двух уравнений  $t'$ ,  $t''$ , и подставив полученные значения в последние два получим

$$|e_2^1| = \sqrt{(\nu(\mu, \xi_0, k)e_2^0)^2 + 2(\mu + \xi_0)(1 + \nu(\mu, \xi_0, k)^2)\Delta}.$$

Значит, условие  $|e_2^1| \leq e_2^0$  выполнено тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$(e_2^0)^2 \geq \frac{2(\mu + \xi_0)(1 + \nu^2)\Delta}{1 - \nu^2}.$$

Очевидно, это неравенство может быть выполнено только если  $\nu(\mu, \xi_0, k) < 1$ , то есть если система (2.23) с тождественно нулевой погрешностью измерения выхода будет глобально асимптотически устойчивой. Выполнение этого условия означает, очевидно, что и координаты точек пересечения траекториями системы (2.23) оси  $e_1 = 0$  будут убывать при любых возмущениях  $\xi(t)$  и погрешностях  $\delta(t)$ .

Проведя аналогичные рассуждения для левой полуплоскости, имеем

**Теорема 2.4.** Система (2.23) с ограниченной погрешностью  $|\delta(t)| \leq \Delta$ , и такими  $\mu > \xi_0$ ,  $k > 0$ , что  $\nu(\mu, \xi_0, k) < 1$ , сходится в область, ограниченную траекторией систем (2.24), (2.25), (2.26) в соответствующих областях, при начальных условиях для системы (2.24) на оси  $e_1 = 0$

$$\begin{aligned} e_1^0 &= 0, \\ e_2^0 &= \sqrt{\frac{2(\mu + \xi_0)(1 + \nu^2)\Delta}{1 - \nu^2}}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Граница этой области является предельным циклом системы при наилучших возмущениях и начальных условиях (2.28).

**Оценка области сходимости.** Оценим размеры области, куда гарантированно попадает система. Очевидно, максимальное значение  $e_2 = e_2'$ . Максимальное же значение  $e_1 = \Delta + \bar{e}_{1,max}$ , где  $\bar{e}_{1,max}$  – максимальное значение  $\bar{e}_1(t)$  из (2.25) при движении системы в исследуемой области.

Для системы (2.25) с “наихудшим” возмущением  $\xi^*$  в предыдущих разделах был получен параметрический вид решения. Очевидно, максимального значения координата  $\bar{e}_1$  достигается в точке траектории, где  $e_2 = k\bar{e}_1^{\frac{1}{2}}$ . Значение координаты  $e_2$  в этой точке задано уравнени-

ями (2.7) в случае, когда  $k^2 < 8(\mu - \xi_0)$  и (2.8), когда  $k^2 \geq 8(\mu - \xi_0)$ . Максимальное значение координаты  $\bar{e}_1$ , следовательно, удовлетворяет:

$$\bar{e}_{1,max} = \begin{cases} \frac{(e'_2)^2}{2v} \exp \left\{ \frac{-2k}{\sqrt{8v-k^2}} \left( \arctg \frac{k}{\sqrt{8v-k^2}} + \arctg \frac{4v-k^2}{k\sqrt{8v-k^2}} \right) \right\}, & k^2 < 8v, \\ \left( \frac{-e'_2 p_1}{-v - k p_1} \right)^2 \left( \frac{p_2(v + k p_1)}{p_1(v + k p_2)} \right)^{2M_2}, & k^2 \geq 8v. \end{cases} \quad (2.29)$$

Найдя из системы (2.27)  $e'_2$ , получим точную оценку области сходимости системы (2.23) при ограниченном  $\delta$ .

**Следствие 2.** *В случае выполнения условий Теоремы 2.4 система (2.23) сходится в область*

$$\begin{aligned} |e_2| &\leq \sqrt{2\Delta(\mu + \xi_0) \frac{2}{1 - \nu^2}} = |e'_2|, \\ |e_1| &\leq \Delta + \bar{e}_{1,max}. \end{aligned}$$

## 2.6. Неидеальности элементов переключения

В данном разделе мы исследуем характеристики предложенного наблюдателя для случая, когда элементы переключения системы наблюдателя неидеальны. Этот аспект исследования актуален для практических применений рассматриваемого алгоритма обратной связи, поскольку реализовать идеальные реле на практике невозможно. Будут рассмотрены три типичных вида неидеальности элементов реле: зона нечувствительности, гистерезис и задержка. Будут получены теоретические оценки области сходимости системы в отклонениях.

**Зона нечувствительности.** Начнем рассмотрение с неидеальности типа “зона нечувствительности”. Конкретнее, пусть в системе наблю-

дателя вместо идеальных реле имеются реле следующего вида:

$$\text{sign}_{ins}(x) = \begin{cases} 1, & x > \Delta_{ins}, \\ -1, & x < -\Delta_{ins}, \\ 0, & |x| \leq \Delta_{ins}, \end{cases} \quad (2.30)$$

где  $\Delta_{ins} > 0$  — константа, определяющая величину зоны нечувствительности. Уравнения для ошибки наблюдения в этом случае примут вид:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - k \text{sign}_{ins}(e_1) |e_1|^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{e}_2 = -\mu \text{sign}_{ins}(e_1) + \xi(t). \end{cases} \quad (2.31)$$

Естественно, будем считать, что параметры  $k$  и  $\mu$  системы выбраны таким образом, что система с идеальными элементами переключения устойчива, то есть такими, что  $\nu(\mu, \xi_0, k) < 1$ .

Заметим, что система (2.31) эквивалентна системе (2.23) с погрешностью измерения  $\delta_{ins}(t)$ , удовлетворяющей:

$$\delta_{ins}(t) = \begin{cases} 0, & |e_1(t)| > \Delta_{ins}, \\ -e_1(t), & |e_1(t)| \leq \Delta_{ins}, \end{cases}$$

и идеальными элементами переключения. Очевидно, что для такой погрешности измерения выхода выполнена оценка:

$$|\delta_{ins}(t)| \leq \Delta_{ins}.$$

Значит, согласно Теореме 2.4, ошибка оценивания вектора состояния системы наблюдателем с неидеальными реле (2.30) будет сходиться в область, размеры которой удовлетворяют неравенствам, приведенным в Следствии 2 с  $\Delta = \Delta_{ins}$ :

$$\begin{aligned} |e_2| &\leq \sqrt{2\Delta_{ins}(\mu + \xi_0) \frac{2}{1 - \nu^2}} = |e'_2|, \\ |e_1| &\leq \Delta_{ins} + \bar{e}_{1,max}, \end{aligned}$$

где  $\bar{e}_{1,max}$  определяется уравнением (2.29).

**Гистерезис.** Перейдем к рассмотрению системы с неидеальностью типа “гистерезис”, а именно к неидеальным реле вида:

$$\text{sign}_h(x(t)) = \begin{cases} 1, & x > \Delta_h, \\ -1, & x < -\Delta_h, \\ \text{sign}(x(\tau(t))), & |x| \leq \Delta_h, \end{cases} \quad (2.32)$$

где  $\tau(t) = \sup \{ \tau < t : |x(\tau)| = 1 \}$ ,  $\Delta_h > 0$  — действительная константа. Уравнения для ошибки наблюдения при наличии такого вида неидеальностей в релейных элементах примут вид:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - k \text{sign}_h(e_1) |e_1|^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{e}_2 = -\mu \text{sign}_h(e_1) + \xi(t). \end{cases} \quad (2.33)$$

Так же, как и при рассмотрении неидеальностей типа “зона нечувствительности” рассмотрим новую погрешность измерения  $\delta_h(t)$ , такую что

$$\delta_h(t) = \begin{cases} 0, & |e_1| > \Delta_h, \\ -e_1 - \text{sign}(e_1(\tau))\varepsilon, & |e_1| \leq \Delta_h, \end{cases}$$

где  $\varepsilon$  — произвольная действительная константа.

Как было показано в предыдущем разделе работы, траектория системы (2.23) скручивается вокруг начала координат, если она не находится в малой окрестности начала координат (т.е. траектория системы будет последовательно проходить I, IV, III, II четверти координатной плоскости). Это означает, что система (2.23) с введенной погрешностью измерения  $\delta_h(t)$  и идеальными реле будет эквивалента системе без погрешности измерения и реле, удовлетворяющими (2.32).

При этом для введенной погрешности  $\delta_h(t)$  справедлива оценка

$$|\delta_h(t)| \leq \Delta_h + \varepsilon.$$



Значит, согласно Теореме 2.4, и в силу произвольности выбора константы  $\varepsilon$ , траектории системы (2.33) будут сходиться в область, размеры которой удовлетворяют неравенствам, приведенным в Следствии 2 с  $\Delta = \Delta_h$ :

$$\begin{aligned} |e_2| &\leq \sqrt{2\Delta_h(\mu + \xi_0) \frac{2}{1 - \nu^2}} = |e'_2|, \\ |e_1| &\leq \Delta_h + \bar{e}_{1,max}, \end{aligned}$$

где  $\bar{e}_{1,max}$  определяется уравнением (2.29).

**Задержка.** Рассмотрим теперь систему (1.1) при наличии задержки в элементах переключения, т.е.

$$\text{sign}_\tau(x(t)) = \text{sign}(x(t - \tau)). \quad (2.34)$$

Уравнения для ошибки наблюдения имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - k \text{sign}_\tau(e_1) |e_1|^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{e}_2 = -\mu \text{sign}_\tau(e_1) + \xi(t). \end{cases} \quad (2.35)$$

Начнем с рассмотрения траектории системы на координатной плоскости. Заметим, что траектория системы (2.35) не может перейти из I четверти во II. Действительно, если  $e_1 \rightarrow 0$ , и при этом траектория не стремится к началу координат, то  $\dot{e}_1 \rightarrow e_2 > 0$ . Это означает, что траектория системы может перейти из I четверти во II только пройдя через начало координат. Таким образом, траектория системы из I четверти гарантированно попадает либо в IV четверть, либо в начало координат. При этом, если система пробудет в правой полуплоскости время  $\tau$ , на протяжении всего оставшегося пребывания системы в правой полуплоскости поведение системы будет эквивалентно поведению системы с идеальным реле, для которой доказано, что она переходит из I четверти в IV, а из IV в III. Следовательно, система в любом случае перейдет

из левой полуплоскости в правую, либо через начало координат, либо через IV четверть. Аналогично, из правой полуплоскости система обязательно попадет в левую, либо через начало координат, либо из II четверти.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда система перешла из II четверти в I в точке  $(0, e_2^0)$ . Заметим, что при этом, если  $e_2^0 > (\mu + \xi_0)\tau$ , то на промежутке времени  $[-\tau, 0]$  выполняется условие  $\text{sign} e_1 = -1$ . Это так, поскольку во II четверть траектория системы может перейти только из III четверти или из начала координат. При этом  $\dot{e}_2 \leq \mu + \xi_0$ , значит, поскольку изменение координаты  $e_2$  за время пребывания системы во II четверти равно  $e_2^0$ , то отрезок времени, проведенный системой во II четверти, не меньше  $\frac{e_2^0}{\mu + \xi_0} = \tau$ . Следовательно,  $\text{sign}_\tau e_1 = -1$  и на интервале  $[0, \tau]$ .

Значит на промежутке будет выполнено неравенство  $\dot{e}_2 \geq \mu - \xi_0$ , а значит  $e_2(\tau) \geq e_2^0 + (\mu - \xi_0)\tau$ . После этого момента система до перехода в левую полуплоскость будет эквивалентна системе с идеальными реле, а значит, как было доказано в предыдущих разделах работы, если имеет место наихудшая помеха  $\xi^*(t) = \xi_0 \text{sign}(\dot{e}_1)$ , то для координаты  $e_2^1$  пересечения оси  $e_1 = 0$  будет выполнено неравенство

$$|e_2^1| \geq \nu(\mu, \xi_0, k)e_2(\tau) = \nu(\mu, \xi_0, k)e_2^0 + \nu(\mu, \xi_0, k)(\mu - \xi)\tau.$$

Это значит, что если

$$\tau \geq \frac{e_2^0(1 - \nu)}{\nu(\mu - \xi)},$$

то  $|e_2^1|$  будет больше  $e_2^0$ . Значит, при  $t \rightarrow \infty$  координаты пересечения оси  $e_1 = 0$  траекторией системы не могут быть меньше

$$e_2^* = \frac{\tau\nu(\mu - \xi)}{1 - \nu}.$$

Численное моделирование при этом показывает, что траектории систем с задержкой в элементах переключения приближаются к некому

предельному циклу, размеры которого зависят от  $\tau$ .

**Численное моделирование.** Для проверки полученных ранее теоретических оценок, а также для определения реального характера зависимости величины области, в которую сходятся траектории системы при наличии рассматриваемых неидеальностей, проведем численные эксперименты.

Для системы

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - \text{sign}(e_1)\sqrt{|e_1|}, \\ \dot{e}_2 = -3\text{sign}(e_1) + 2\text{sign}(e_2 - \text{sign}(e_1)\sqrt{|e_1|}), \end{cases}$$

с начальными условиями  $(5, 0)$  при наличии в элементах переключения неидеальностей рассматриваемых типов был проведен численный эксперимент для разных параметров неидеальностей. Интегрирование проводилось методом Эйлера первого порядка с шагом интегрирования 0.001. Критерием остановки интегрирования было отличие модуля координаты очередного пересечения траекторией системы оси  $e_1 = 0$  (то есть смены знака  $e_1$ ) от предыдущего не более чем на 0.01. Зависимости максимальной величины компоненты  $e_2$  вектора состояния системы в промежутке между последними двумя пересечениями оси  $e_1 = 0$  представлены в таблицах 1-3.

Таблица 1 – Результаты моделирования при наличии зоны нечувствительности

$\Delta_i$	0.5	0.45	0.4	0.35	0.3	0.25	0.2	0.15	0.1	0.05
$ e_{2,max} $	1.45	1.38	1.3	1.21	1.12	1.02	0.91	0.79	0.65	0.46

Результаты численного моделирования показывают, что при наличии неидеальностей типа “зона нечувствительности” и “гистерезис” имеет место зависимость вида  $|e_{2,max}| \approx C\sqrt{\Delta}$  ( $C = 2$  для системы с зо-

Таблица 2 – Результаты моделирования при наличии гистерезиса

$\Delta_h$	0.5	0.45	0.4	0.35	0.3	0.25	0.2	0.15	0.1	0.05
$ e_{2,max} $	2.75	2.61	2.47	2.31	2.14	1.95	1.74	1.51	1.23	0.88

Таблица 3 – Результаты моделирования при наличии задержки

$\tau$	0.5	0.45	0.4	0.35	0.3	0.25	0.2	0.15	0.1	0.05
$ e_{2,max} $	8.13	7.31	6.50	5.69	4.88	4.07	3.25	2.45	1.64	0.82

ной нечувствительности,  $C = 4$  для системы с гистерезисом), что согласуется с полученными ранее теоретическими оценками. Для системы с задержкой в элементах переключения зависимость близка к линейной.

## Глава 3

# Каскадный наблюдатель для систем с произвольным относительным порядком

В предыдущей главе был проведен анализ свойства устойчивости нулевого решения  $ST$  системы и предложен основанный на использовании этого алгоритма метод построения наблюдателей для систем второго относительного порядка. В данной главе на основании полученных результатов для этой системы при наличии погрешности измерения выходного сигнала будет предложен алгоритм построения каскадного наблюдателя для системы произвольного относительного порядка. Каждая из систем каскада при этом будет аналогична по структуре наблюдателю для двумерной системы. Также будет рассмотрена возможность использования в каскаде систем более высоких порядков. Основные результаты главы опубликованы в работах [30; 49].

### 3.1. Введение

В данной главе перейдем к рассмотрению случая произвольного относительного порядка  $r > 2$  исходной системы (1.1), то есть будет рассмотрена задача наблюдения для системы (1.5) произвольной размерности.

Сначала с помощью линейного классического наблюдателя Люенбергера для системы (1.5) будет получена оценка фазового вектора системы, такая, что ошибка оценивания после некоторого момента времени не будет превышать константы (но не будет асимптотически точной), определяемой коэффициентами линейной обратной связи. После этого будет решаться задача построения асимптотического наблюдателя для системы в отклонениях.

Система для ошибок наблюдения линейного наблюдателя может быть рассмотрена как последовательность систем второго порядка с неизвестными входами, имеющими структуру, аналогичную системе (1.5) второго порядка. Причем для первой системы из последовательности известен выход (выход исходной системы (1.1)).

Для каждой из систем последовательности может быть построен свой наблюдатель вида, предложенного в главе 2. В силу полученных выше результатов для систем второго относительного порядка, в частности для систем с погрешностью измерения выхода, параметры первого наблюдателя каскада могут быть выбраны таким образом, что оценка части вектора состояния, полученная с его помощью, будет асимптотически точна. Далее, рассматривая в качестве выхода следующей системы из последовательности оценку, полученную на предыдущем шаге, может быть восстановлен весь вектор состояния динамической системы (1.5). В данной главе будет предложен алгоритм выбора параметров такого каскадного наблюдателя, обеспечивающий асимптотическую точность получаемых оценок. Таким образом, будет завершено решение поставленной изначально задачи построения асимптотического наблюдателя для линейных динамических систем с неопределенностью.

Таким образом устроенный каскадный наблюдатель будет иметь совокупную размерность, значительно превышающую размерность исходной системы. Для уменьшения общей размерности наблюдателя возможно построение его как каскада систем повышенной размерности. Такой каскад, состоящий из систем размерности 3 или выше, будет состоять из меньшего числа систем, совокупная размерность которых будет меньше размерности каскада систем второго порядка. Однако для систем аналогичных системе алгоритма “super-twisting” размерности выше двух задача выбора параметров обеспечивающих устойчивость

малоизучена, и ее решение является целью дальнейших исследований, выходящих за рамки данной работы.

### 3.2. Предварительная оценка

Рассматривается система вида (1.5) размерности  $r > 2$ :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}}_1 = -\beta_r \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + b_1^u u, \\ \dot{\tilde{y}}_2 = -\beta_{r-1} \tilde{y}_1 + \tilde{y}_3 + b_2^u u, \\ \vdots \\ \dot{\tilde{y}}_{r-1} = -\beta_2 \tilde{y}_1 + \tilde{y}_r + b_{r-1}^u u, \\ \dot{\tilde{y}}_r = -\beta_1 \tilde{y}_1 - \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i \tilde{x}_i + b_r^u u + \eta, \\ y = \tilde{y}_1, \end{cases}$$

где  $u(t)$  – известное входное воздействие, а  $\eta(t)$  – неизвестное ограниченное возмущение системы.

Перед построением асимптотической оценки вектора состояния системы, построим вспомогательный наблюдатель, основанный на линейных обратных связях классической структуры (см., например [11]):

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}}_1 = -\beta_r y + l_1(y - \bar{y}_1) + \bar{y}_2 + b_1^u u, \\ \dot{\tilde{y}}_2 = -\beta_{r-1} y + l_2(y - \bar{y}_1) + \bar{y}_3 + b_2^u u, \\ \vdots \\ \dot{\tilde{y}}_{r-1} = -\beta_2 y + l_{r-1}(y - \bar{y}_1) + \bar{y}_r + b_{r-1}^u u \\ \dot{\tilde{y}}_r = -\beta_1 y + l_r(y - \bar{y}_1) - \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i \bar{x}'_i + b_r^u u, \end{cases} \quad (3.1)$$

где  $\bar{x}'_i$  – оценки части  $x'$  вектора состояния исходной системы, полученные с помощью наблюдателя (1.4), а  $l_i$  – постоянные действительные коэффициенты обратной связи, способ выбора которых будет указан далее.

Ошибка оценивания  $\varepsilon = \tilde{y} - \bar{y}$  при использовании такого наблюдателя будет удовлетворять уравнениям:

$$\dot{\varepsilon} = A_l \varepsilon + b \xi(t), \quad (3.2)$$

где

$$\xi(t) = \eta(t) - \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i (\tilde{x}_i - \bar{x}'_i) = \eta(t) - \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i e_{x,i},$$

и матрицы  $A_l$  и  $b$  имеют следующий вид:

$$A_l = \begin{pmatrix} -l_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -l_2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -l_{r-1} & 0 & \dots & 0 & 1 & \\ -l_r & 0 & \dots & 0 & 0 & \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В силу асимптотической точности оценок  $\bar{x}'_i$ , для любого положительного  $m \in \mathbb{R}$  найдется такое  $t_0 > 0$ , что  $|\sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i e_{x,i}(t)| \leq m$  при  $t > t_0$ . Значит, не нарушая общности, можно считать, что входной сигнал  $\xi(t)$  в системе (3.2) всюду ограничен, т.е.

$$|\xi(t)| \leq \xi_0,$$

причем считаем, что мажоранта неизвестного сигнала  $\xi_0$  известна.

Очевидно, что спектр матрицы  $A_l$  системы (3.2) может быть произвольно задан выбором коэффициентов обратной связи  $l_i$ . В самом деле

$$\chi(s) = \det(sI - A_l) = s^r + l_1 s^{r-1} + \dots + l_{r-1} s + l_r.$$

Выберем параметры  $l_i$  такими, что матрица  $A_l$  будет гурвицевой, то есть такими, что все корни характеристического полинома матрицы будут лежать в левой полуплоскости комплексной плоскости.

В этом случае система (3.2) будет линейной стационарной системой с гурвицевой матрицей и ограниченным входным воздействием  $\xi(t)$ . Из



этого следует ограниченность вектора  $\varepsilon(t)$  при  $t \in [0; +\infty)$ . Мажоранта для  $\varepsilon(t)$  определяется как свойствами матрицы  $A_l$ , так и начальным приближением, то есть  $\varepsilon(0) = \tilde{y}(0) - \bar{y}(0)$ . Пусть  $\bar{y}(0) = O_{1 \times n}$ . Тогда  $\varepsilon(0) = \tilde{y}(0)$  и для вектора состояния будет справедлива оценка (см., например, [36, с. 131]):

$$|\varepsilon(t)| \leq C_0 \left( |\tilde{y}(0)| - \frac{1}{\gamma} \right) e^{-\gamma t} + \frac{C_0 \xi_0}{\gamma},$$

где  $C_0 = \text{const} > 0$  – константа, определяемая матрицей  $A_l$ , такая что  $|e^{A_l t}| \leq C_0 e^{-\gamma t}$ ;  $\gamma > 0$  – константа, определяемая степенью устойчивости матрицы  $A_l$ :  $\text{Re}(s_i) < -\gamma$ , для всех  $s_i$  – корней характеристического полинома матрицы  $A_l$ . Первое слагаемое в правой части стремится к нулю экспоненциально, а значит для любого  $\varepsilon_0 > C_0 \xi_0 / \gamma$  с некоторого момента времени будет справедлива оценка

$$|\varepsilon(t)| < \varepsilon_0.$$

Таким образом, задача оценивания фазового вектора  $\tilde{y}$  сводится к оцениванию вектора состояния  $\varepsilon(t)$  системы (3.2), причем известна оценка для нормы этого вектора и первый компонент  $\varepsilon_1 = y - \bar{y}_1$ . В дальнейшем будем считать известный сигнал  $\varepsilon_1$  выходом системы (3.2). Восстановив  $\varepsilon(t) = \tilde{y} - \bar{y}$  можно, зная  $\bar{y}$ , восстановить  $\tilde{y}$ , таким образом решив поставленную задачу наблюдения для системы (1.5), и, следовательно, исходную задачу: восстановление неизвестного вектора состояния системы (1.1).

**Пример 3.1.** Продолжим рассмотрение Примера 1.6. Построим пред-

варительную оценку для системы:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}}_1 = -2\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + 4u, \\ \dot{\tilde{y}}_2 = 5\tilde{y}_1 + \tilde{y}_3 + 6u, \\ \dot{\tilde{y}}_3 = -5\tilde{y}_1 + \tilde{y}_4 - 28u, \\ \dot{\tilde{y}}_4 = 7\tilde{y}_1 + \tilde{y}_5 + 20u, \\ \dot{\tilde{y}}_5 = -9\tilde{y}_1 + 11\tilde{x}_1 + 10\tilde{x}_2 - 21u + \eta, \\ y = \tilde{y}_1. \end{cases}$$

Для этого будем использовать наблюдатель вида (3.1):

$$\begin{cases} \dot{\bar{y}}_1 = -2y + 5\varepsilon_1 + \bar{y}_2 + 4u, \\ \dot{\bar{y}}_2 = 5y + 10\varepsilon_1 + \bar{y}_3 + 6u, \\ \dot{\bar{y}}_3 = -5y + 10\varepsilon_1 + \bar{y}_4 - 28u, \\ \dot{\bar{y}}_4 = 7y + 5\varepsilon_1 + \bar{y}_5 + 20u, \\ \dot{\bar{y}}_5 = -9y + \varepsilon_1 + 11\bar{x}'_1 + 10\bar{x}'_2 - 21u + \eta, \end{cases}$$

где  $\varepsilon_1 = y - \bar{y}_1$ , а  $\bar{x}'_1, \bar{x}'_2$  – полученные асимптотически точные оценки  $\tilde{x}_1$  и  $\tilde{x}_2$  (см. Пример 1.6).

Ошибка наблюдения для данного линейного наблюдателя будет удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 = -5\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon}_2 = -10\varepsilon_1 + \varepsilon_3, \\ \dot{\varepsilon}_3 = -10\varepsilon_1 + \varepsilon_4, \\ \dot{\varepsilon}_4 = -5\varepsilon_1 + \varepsilon_5, \\ \dot{\varepsilon}_5 = -\varepsilon_1 + \xi(t), \\ y_\varepsilon = y - \bar{y}_1 = \varepsilon_1. \end{cases}$$

где  $\varepsilon_i = \tilde{y}_i - \bar{y}_i$ . Новый ограниченный входной сигнал системы определяется соотношением:

$$\xi(t) = \eta(t) + 11e_{x,1} + 10e_{x,2}.$$

Характеристический полином матрицы  $A_l$  такой системы равен

$$\chi(s) = \det(sI - A_l) = s^5 + 5s^4 + 10s^3 + 10s^2 + 5s + 1.$$

Очевидно, что матрица системы гурвицева с единственным собственным значением  $s_1 = -1$ . Таким образом, для получения асимптотически точной оценки системы вида (1.5) осталось получить асимптотически точную оценку для системы вида (3.2) с ограниченным входным сигналом и ограниченным вектором состояния.

### 3.3. Каскадный наблюдатель состояния

В данном разделе будет предложен основанный на результатах, полученных в Главе 2, метод построения наблюдателя для систем вида (3.2). Предлагаемый наблюдатель будет представлять из себя каскад двумерных систем, каждая из которых служит для получения оценки очередной компоненты вектора состояния системы.

Рассмотрим две первые компоненты системы (3.2) как отдельную динамическую систему:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 = -l_1\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon}_2 = -l_2\varepsilon_1 + \varepsilon_3, \\ y_1 = y_\varepsilon = \varepsilon_1. \end{cases}$$

В силу сказанного выше,  $|\varepsilon_3(t)| < \varepsilon_0$ . То есть, такая подсистема представляет собой систему второго порядка с неизвестным ограниченным входным воздействием  $\varepsilon_3$ . Значит, как было показано в Главе 2, для

восстановления неизвестного компонента  $\varepsilon_2$  может быть использован наблюдатель вида:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\varepsilon}}_1 = -l_1 y_1 + \bar{\varepsilon}_2 + k_1 [\tilde{\varepsilon}_1]^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{\tilde{\varepsilon}}_2 = -l_2 y_1 + \mu_1 [\tilde{\varepsilon}_1]^0, \end{cases}$$

где  $\tilde{\varepsilon}_1 = y_1 - \tilde{\varepsilon}_1$ . Уравнения для ошибки наблюдения будут иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{e}}_1 = \bar{\varepsilon}_2 - k_1 [\tilde{e}_1]^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{\tilde{e}}_2 = \varepsilon_3 - \mu_1 [\tilde{e}_1]^0, \end{cases}$$

где  $\bar{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 - \bar{\varepsilon}_2$ . В силу Теоремы 2.1, если параметры  $\mu_1$  и  $k_1$  выбраны таким образом, что  $\nu(\mu_1, \varepsilon_0, k_1) < 1$ , то  $\bar{\varepsilon}_2$  будет являться асимптотически точной оценкой компонента  $\varepsilon_2$  состояния системы (3.2):

$$\varepsilon_2(t) - \bar{\varepsilon}_2(t) = \delta_2(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Рассмотрим теперь уравнения для второй и третьей компоненты вектора состояния системы (3.2) как отдельную систему:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_2 = -l_2 \varepsilon_1 + \varepsilon_3, \\ \dot{\varepsilon}_3 = -l_3 \varepsilon_1 + \varepsilon_4, \end{cases}$$

$$y_2 = \bar{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 + \delta_2(t).$$

В качестве выхода этой системы будет использовать полученную ранее асимптотически точную оценку вектора  $\varepsilon_2$ . То есть, такая подсистема может быть рассмотрена как двумерная система с ограниченным входным сигналом  $|\varepsilon_4(t)| < \varepsilon_0$  и погрешностью измерения  $\delta_2(t)$ , бесконечно малой при  $t \rightarrow +\infty$ . Для восстановления неизвестной компоненты  $\varepsilon_3$  может быть использован следующий наблюдатель:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\varepsilon}}_2 = -l_2 y_\varepsilon + \bar{\varepsilon}_3 + k_2 [y_2 - \tilde{\varepsilon}_2]^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{\tilde{\varepsilon}}_3 = -l_3 y_\varepsilon + \mu_2 [y_2 - \tilde{\varepsilon}_2]^0. \end{cases}$$

Уравнения для ошибки оценивания в этом случае следующие:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{e}}_2 = \bar{e}_3 - k_2[\tilde{e}_2 + \delta_2(t)]^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{\tilde{e}}_3 = \varepsilon_4 - \mu_2[\tilde{e}_2 + \delta_2(t)]^0, \end{cases}$$

где  $\tilde{e}_2 = \varepsilon_2 - \bar{\varepsilon}_2$ , а  $\bar{e}_3 = \varepsilon_3 - \bar{\varepsilon}_3$ . В силу Теоремы 2.4 и Следствия 2, и поскольку погрешность измерения  $\delta_2(t)$  сходится к нулю, в случае, если параметры  $\mu_2$  и  $k_2$  наблюдателя выбраны таким образом, что  $\nu(\mu_2, \varepsilon_0, k_2) < 1$ ,  $\bar{\varepsilon}_3$  будет являться асимптотически точной оценкой компоненты  $\varepsilon_3$  вектора состояния системы (3.2):

$$\varepsilon_3(t) - \bar{\varepsilon}_3(t) = \delta_3(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Имея точную оценку для  $\varepsilon_3$  можно аналогичным способом построить двумерную систему для оценивания  $\varepsilon_4$ , после чего возможно получить оценку для  $\varepsilon_5$ , и так далее.

Единственное отличие имеет место при выборе параметров  $\mu_{r-1}$  и  $k_{r-1}$  для последней системы каскада. Неизвестным входом для подсистемы, состоящей из двух последних компонент вектора состояния, будет являться вход самой системы – сигнал  $\xi(t)$ . Следовательно, параметры должны быть выбраны таким образом, чтобы выполнялось неравенство  $\nu(\mu_{r-1}, \xi_0, k_{r-1}) < 1$ .

Таким образом, построен каскадный асимптотический наблюдатель

состояния для системы (3.2):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{\varepsilon}}_1 = -l_1 y_\varepsilon + \bar{\varepsilon}_2 + k_1 [y_\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_1]^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{\tilde{\varepsilon}}_2 = -l_2 y_\varepsilon + \mu_1 [y_\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_1]^0, \\ \dot{\tilde{\varepsilon}}_2 = -l_2 y_\varepsilon + \bar{\varepsilon}_3 + k_2 [\bar{\varepsilon}_2 - \tilde{\varepsilon}_2]^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{\tilde{\varepsilon}}_3 = -l_3 y_\varepsilon + \mu_2 [\bar{\varepsilon}_2 - \tilde{\varepsilon}_2]^0, \\ \dots \\ \dot{\tilde{\varepsilon}}_{r-1} = -l_{r-1} y_\varepsilon + \bar{\varepsilon}_r + k_{r-1} [\bar{\varepsilon}_{r-1} - \tilde{\varepsilon}_{r-1}]^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{\tilde{\varepsilon}}_r = -l_r y_\varepsilon + \mu_{r-1} [\bar{\varepsilon}_{r-1} - \tilde{\varepsilon}_{r-1}]^0. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

При соответствующем выборе параметров  $k_i, \mu_i$  компоненты  $\bar{\varepsilon}_i$  будут являться асимптотически точными оценками компонент  $\varepsilon_i$  системы (3.2). Следовательно, получена асимптотически точная оценка вектора состояния системы (1.5), и, в свою очередь, решена поставленная исходно задача оценки вектора состояния системы (1.1):

**Теорема 3.1.** Пусть для системы (1.1) выполнены Предположения 1.1, 1.2, 1.3 и 1.4. Тогда для неизвестного вектора состояния  $x$  (с точностью до невырожденных преобразований  $T_1, T_2, T_3$ ) системы (1.1) может быть построена асимптотически точная оценка с помощью наблюдателей вида (1.4), (3.1) и (3.3). Параметры  $l_i$  наблюдателя (3.1) должны быть выбраны таким образом, что матрица  $A_l$  – гурвицева. Параметры  $\mu_i$  и  $k_i$  каскадного наблюдателя (3.3) должны быть выбраны таким образом, что

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu(\mu_i, \varepsilon_0, k_i) < 1, \quad 1 \leq i \leq r-2, \\ \nu(\mu_{r-1}, \xi_0, k_{r-1}) < 1, \end{array} \right.$$

Приведем теперь полный алгоритм построения оценки вектора состояния системы (1.1):

1. Систему (1.1) привести к канонической форме с выделением нулевой динамики (1.3).
2. Для первой подсистемы системы (1.3), соответствующей части  $x'$  вектора состояния, построить наблюдатель вида (1.4).
3. Преобразовать подсистему, соответствующую части  $y'$  вектора состояния к виду (1.5).
4. Для системы (1.5) построить предварительную оценку с помощью наблюдателя (3.1).
5. Для оценки ошибок наблюдения линейного наблюдателя построить каскад наблюдателей (3.3).
6. По векторам состояния систем (3.1), (3.3) восстановить вектор  $\tilde{y}$ .

**Пример 3.2.** Завершим построение оценки вектора состояния системы из Примера 3.1. Для выбора параметров каскадного наблюдателя вида (3.3) фиксируем конкретное ограничение для неизвестного входного сигнала системы:

$$|\xi(t)| \leq \xi_0 = 0.1.$$

При такой величине возмущения, величина ошибки наблюдения линейного наблюдателя, приведенного в Примере 3.1 будет удовлетворять (начиная с некоторого момента времени) неравенству:

$$|\varepsilon_i(t)| \leq 2$$

Для построения оценки вектора  $\varepsilon(t)$  может, следовательно, быть ис-

пользован следующий наблюдатель:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{\varepsilon}}_1 = -5y_\varepsilon + \bar{\varepsilon}_2 + 1.2[y_\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_1]^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{\tilde{\varepsilon}}_2 = -10y_\varepsilon + 3[y_\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_1]^0, \\ \dot{\tilde{\varepsilon}}_2 = -10y_\varepsilon + \bar{\varepsilon}_3 + 1.5[\bar{\varepsilon}_2 - \tilde{\varepsilon}_2]^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{\tilde{\varepsilon}}_3 = -10y_\varepsilon + 2.5[\bar{\varepsilon}_2 - \tilde{\varepsilon}_2]^0, \\ \dot{\tilde{\varepsilon}}_3 = -10y_\varepsilon + \bar{\varepsilon}_4 + 1.2[\bar{\varepsilon}_3 - \tilde{\varepsilon}_3]^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{\tilde{\varepsilon}}_4 = -5y_\varepsilon + 3[\bar{\varepsilon}_3 - \tilde{\varepsilon}_3]^0, \\ \dot{\tilde{\varepsilon}}_4 = -5y_\varepsilon + \bar{\varepsilon}_5 + [\bar{\varepsilon}_4 - \tilde{\varepsilon}_4]^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{\tilde{\varepsilon}}_5 = -y_\varepsilon + [\bar{\varepsilon}_4 - \tilde{\varepsilon}_4]^0. \end{array} \right.$$

Ошибка оценивания такого наблюдателя удовлетворяет уравнениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{e}}_1 = \bar{e}_2 - 1.2[\tilde{e}_1]^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{\tilde{e}}_2 = \varepsilon_3 - 3[\tilde{e}_1]^0, \\ \dot{\tilde{e}}_2 = \bar{e}_3 - 1.5[\tilde{e}_2 - \bar{e}_2]^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{\tilde{e}}_3 = \varepsilon_4 - 2.5[\tilde{e}_2 - \bar{e}_2]^0, \\ \dot{\tilde{e}}_3 = \bar{e}_4 - 1.2[\tilde{e}_3 - \bar{e}_3]^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{\tilde{e}}_4 = \varepsilon_5 - 3[\tilde{e}_3 - \bar{e}_3]^0, \\ \dot{\tilde{e}}_4 = \bar{e}_5 - [\tilde{e}_4 - \bar{e}_4]^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{\tilde{e}}_5 = \xi(t) - [\tilde{e}_4 - \bar{e}_4]^0, \end{array} \right.$$

где  $\tilde{e}_i = \varepsilon_i - \tilde{\varepsilon}_i$ , а  $\bar{e}_i = \varepsilon_i - \bar{\varepsilon}_i$ . В силу Теоремы 3.1, ошибки  $\bar{e}_i \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Значит, величины  $\bar{y}_i + \bar{e}_i$  являются асимптотически точными оценками неизвестных компонент вектора  $\tilde{y}$ . Таким образом, получена оценка оставшейся части  $y'$  вектора состояния системы (1.3), и решена исходная задачи построения асимптотического наблюдателя для системы из Примера 1.3.



На Рис. 5 представлено сравнение траектории систем (3.2) и их оценок, полученных с помощью наблюдателя (3.3). В качестве возмущения было выбрано  $\xi(t) = 0.1\text{sign}(\varepsilon_1(t))$ . Численное интегрирование производилось методом Эйлера первого порядка с шагом интегрирования  $10^{-4}$ .

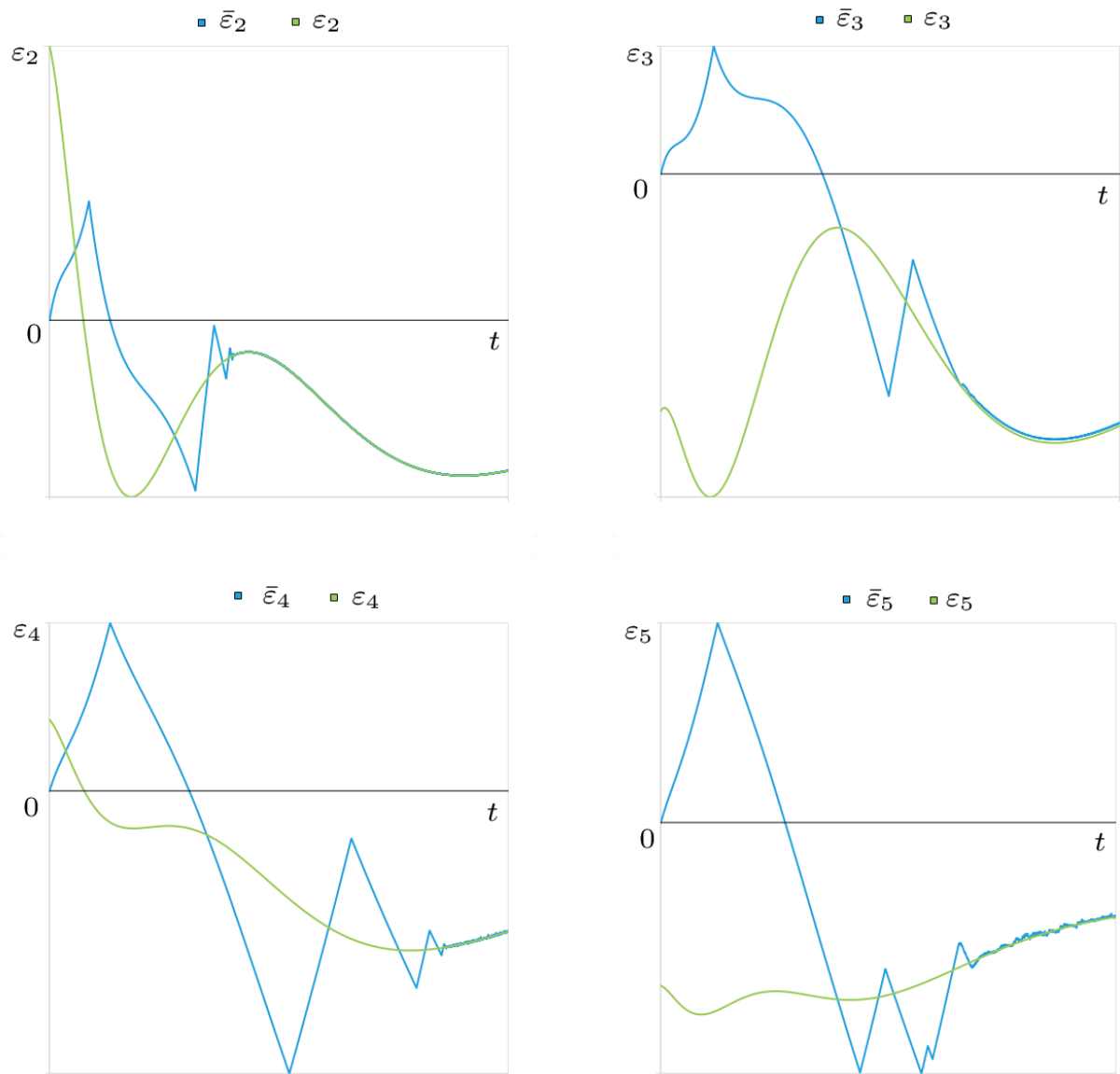


Рисунок 5 – Траектории системы (3.2) и их оценки

### 3.4. Каскад систем более высоких порядков

Предложенный в предыдущем разделе каскадный наблюдатель (3.3) для системы (3.2) обладает повышенным порядком, то есть его раз-

мерность выше размерности системы, для оценки вектора состояния которой он используется (если размерность системы (3.2) равна  $r$ , то размерность (3.3) равна  $2(r - 1)$ ). В данном разделе будет рассмотрена возможность уменьшения размерности наблюдателя за счет использования в качестве элементов каскада системы более высоких порядков, чем два, основанных на использовании обобщения алгоритма “super-twisting”.

В работе [25] было рассмотрено следующее обобщение алгоритма “super-twisting”:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 - k_1[z_1 + \delta(t)]^{\frac{r-1}{r}}, \\ \dot{z}_2 = z_3 - k_2[z_1 + \delta(t)]^{\frac{r-2}{r}}, \\ \dots \\ \dot{z}_{r-1} = z_r - k_{r-1}[z_1 + \delta(t)]^{\frac{1}{r}}, \\ \dot{z}_r = \xi(t) - k_r[z_1 + \delta(t)]^0, \end{cases} \quad (3.4)$$

где  $\delta(t)$  и  $\xi(t)$  – произвольные ограниченные измеримые сигналы, для которых известны мажоранты:  $|\delta(t)| \leq \Delta$ ,  $|\xi(t)| \leq \xi_0$ .

Основное утверждение, доказанное в работе следующее:

**Утверждение 3.1** ([25]). Для любых значений  $\Delta$  и  $\xi_0$  найдется такой набор параметров  $k_i > 0$ , что траектории системы (3.4) будут сходиться в область

$$\begin{aligned} |z_1| &\leq g_1 \Delta, \\ |z_2| &\leq g_2 \Delta^{\frac{r-1}{r}}, \\ &\dots \\ |z_{r-1}| &\leq g_{r-1} \Delta^{\frac{2}{r}}, \\ |z_r| &\leq g_r \Delta^{\frac{1}{r}}, \end{aligned}$$

где  $g_i$  – положительные константы, зависящие от параметров  $k_i$ , при любых сигналах  $\delta(t), \xi(t)$  из рассматриваемых классов.

Очевидно, из этого утверждения следует, что если  $\delta(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , то  $|z_i(t)| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Это означает, что для восстановления вектора состояния системы (3.2) может быть использован, при должном выборе параметров, наблюдатель следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_1 = -l_1 y_\varepsilon + \bar{e}_2 + k_1 [e_1]^{\frac{r-1}{r}}, \\ \dot{\bar{e}}_2 = -l_2 y_\varepsilon + \bar{e}_3 + k_2 [e_1]^{\frac{r-2}{r}}, \\ \dots \\ \dot{\bar{e}}_{r-1} = -l_{r-1} y_\varepsilon + \bar{e}_r + k_{r-1} [e_1]^{\frac{1}{r}}, \\ \dot{\bar{e}}_r = -l_r y_\varepsilon + k_r [e_1]^0, \end{cases}$$

где  $e_1 = y_\varepsilon - \bar{e}_1$ . Ошибка оценивания  $e = \varepsilon - \bar{\varepsilon}$  будет в этом случае удовлетворять системе:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - k_1 [e_1]^{\frac{r-1}{r}}, \\ \dot{e}_2 = e_3 - k_2 [e_1]^{\frac{r-2}{r}}, \\ \dots \\ \dot{e}_{r-1} = e_r - k_{r-1} [e_1]^{\frac{1}{r}}, \\ \dot{e}_r = \xi(t) - k_r [e_1]^0, \end{cases}$$

то есть системе вида (3.4) с  $\delta(t) \equiv 0$ . Значит, при некотором наборе параметров  $k_i$  такой наблюдатель будет давать асимптотически точную оценку вектора состояния системы (3.2).

Однако, поскольку для общего случая не известны условия, обеспечивающие устойчивость системы, использование такого вида полно-размерного наблюдателя затруднительно. Поиск же достаточных условий устойчивости, позволяющих выбирать параметры  $k_i$  является целью дальнейших исследований, выходящих за рамки данной работы.

Тем не менее, для некоторых случаев, когда размерность системы (3.4) мала, в литературе были предложены численные методы находж-

дения параметров  $k_i$ , обеспечивающих выполнение Утверждения 3.1. Так, в работах [50; 51], с помощью метода функций Ляпунова для систем размерностей  $r = 3$  и  $r = 4$  авторами были предложены алгоритмы выбора коэффициентов  $k_i$  как решения задач максимизации некоторых непрерывных функций нескольких переменных на компакте. Численное решение этих задач оптимизации позволило авторам получить следующие значения параметров  $k_i$ , стабилизирующие системы (3.4):

$$\begin{aligned} r = 3 : \quad & k_1 = 3.34k_3^{\frac{1}{3}}, k_2 = 5.3k_3^{\frac{2}{3}}, k_3 > \xi_0, \\ r = 4 : \quad & k_1 = 8.6k_4^{\frac{1}{4}}, k_2 = 21k_4^{\frac{2}{4}}, k_3 = 16.25k_4^{\frac{3}{4}}, k_4 > \xi_0. \end{aligned}$$

Эти результаты позволяют построить каскадный наблюдатель, аналогичный (3.3) из систем более высоких порядков. Так, например, для подсистемы из трех первых компонент вектора состояния системы (3.2):

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 = -l_1\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon}_2 = -l_2\varepsilon_1 + \varepsilon_3, \\ \dot{\varepsilon}_3 = -l_3\varepsilon_1 + \varepsilon_4, \end{cases} \\ y_\varepsilon = \varepsilon_1$$

может быть построен наблюдатель следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\varepsilon}}_1 = -l_1y_\varepsilon + \bar{\varepsilon}_2 + k_1[y_\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_1]^{\frac{2}{3}}, \\ \dot{\tilde{\varepsilon}}_2 = -l_2y_\varepsilon + \bar{\varepsilon}_3 + k_2[y_\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_1]^{\frac{1}{3}}, \\ \dot{\tilde{\varepsilon}}_3 = -l_3y_\varepsilon + k_3[y_\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_1]^0. \end{cases}$$

Система в отклонениях будет в таком случае иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{e}}_1 = \bar{e}_2 - k_1[\tilde{e}_1]^{\frac{2}{3}}, \\ \dot{\tilde{e}}_2 = \bar{e}_3 - k_2[\tilde{e}_1]^{\frac{1}{3}}, \\ \dot{\tilde{e}}_3 = \varepsilon_4 - k_3[\tilde{e}_1]^0, \end{cases}$$

где  $\tilde{e}_1 = \varepsilon_1 - \tilde{\varepsilon}_1$ ,  $\bar{e}_i = \varepsilon_i - \bar{\varepsilon}_i$ ,  $i = 2, 3$ . При соответствующем выборе параметров  $k_i$  ошибки оценивания  $\bar{e}_i$  будут стремиться к 0 при  $t \rightarrow +\infty$ . Аналогично предложенному в предыдущем разделе методу построения каскада двумерных систем, полученная оценка  $\bar{e}_3$  может быть использована в следующей системе каскада для получения оценок для  $\varepsilon_4$  и  $\varepsilon_5$ , и так далее.

Таким образом может быть построен каскадный наблюдатель из систем более высокой размерности, и, таким образом, меньшей общей размерности, чем каскадный наблюдатель из систем второго порядка.

**Пример 3.3.** Построим для системы из Примера 3.1 каскадный наблюдатель из систем третьего порядка. Он будет иметь следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{e}}_1 = -5y_\varepsilon + \bar{e}_2 + k_{11}[y_\varepsilon - \tilde{e}_1]^{\frac{2}{3}}, \\ \dot{\tilde{e}}_2 = -10y_\varepsilon + \bar{e}_3 + k_{21}[y_\varepsilon - \tilde{e}_1]^{\frac{1}{3}}, \\ \dot{\tilde{e}}_3 = -10y_\varepsilon + k_{31}[y_\varepsilon - \tilde{e}_1]^0, \\ \dot{\tilde{e}}_3 = -10y_\varepsilon + \bar{e}_4 + k_{12}[\bar{e}_3 - \tilde{e}_3]^{\frac{2}{3}}, \\ \dot{\tilde{e}}_4 = -5y_\varepsilon + \bar{e}_5 + k_{22}[\bar{e}_3 - \tilde{e}_3]^{\frac{1}{3}}, \\ \dot{\tilde{e}}_5 = -y_\varepsilon + k_{32}[\bar{e}_3 - \tilde{e}_3]^0. \end{array} \right.$$

Ошибка наблюдения будет удовлетворять системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{e}}_1 = \bar{e}_2 - k_{11}[\tilde{e}_1]^{\frac{2}{3}}, \\ \dot{\tilde{e}}_2 = \bar{e}_3 - k_{21}[\tilde{e}_1]^{\frac{1}{3}}, \\ \dot{\tilde{e}}_3 = \varepsilon_4 - k_{31}[\tilde{e}_1]^0, \\ \dot{\tilde{e}}_3 = \bar{e}_4 - k_{12}[\bar{e}_3 - \tilde{e}_3]^{\frac{2}{3}}, \\ \dot{\tilde{e}}_4 = \bar{e}_5 - k_{22}[\bar{e}_3 - \tilde{e}_3]^{\frac{1}{3}}, \\ \dot{\tilde{e}}_5 = \xi(t) - k_{32}[\bar{e}_3 - \tilde{e}_3]^0, \end{array} \right.$$

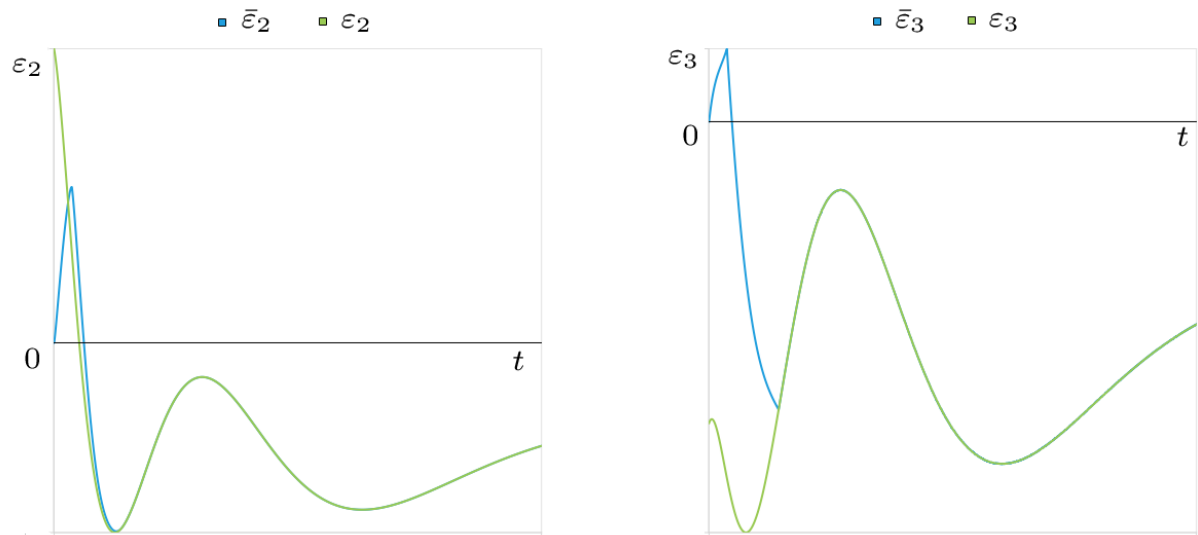
где  $\tilde{e}_i = \varepsilon_i - \tilde{\varepsilon}_i$ , а  $\bar{e}_i = \varepsilon_i - \bar{\varepsilon}_i$ . Параметры наблюдателя могут быть

выбраны следующим образом:

$$k_{11} = 4.8, \quad k_{21} = 11, \quad k_{31} = 3,$$

$$k_{12} = 3.34, \quad k_{22} = 5.3, \quad k_{32} = 1.$$

Тогда, в соответствии с Утверждением 3.1,  $\bar{\epsilon}_i$  будет стремиться к 0 при  $t \rightarrow +\infty$ . При этом, общая размерность такого наблюдателя равна 6, что меньше размерности построенного в Примере 3.2 каскадного наблюдателя, основанного на двумерных системах, размерность которого была 8.



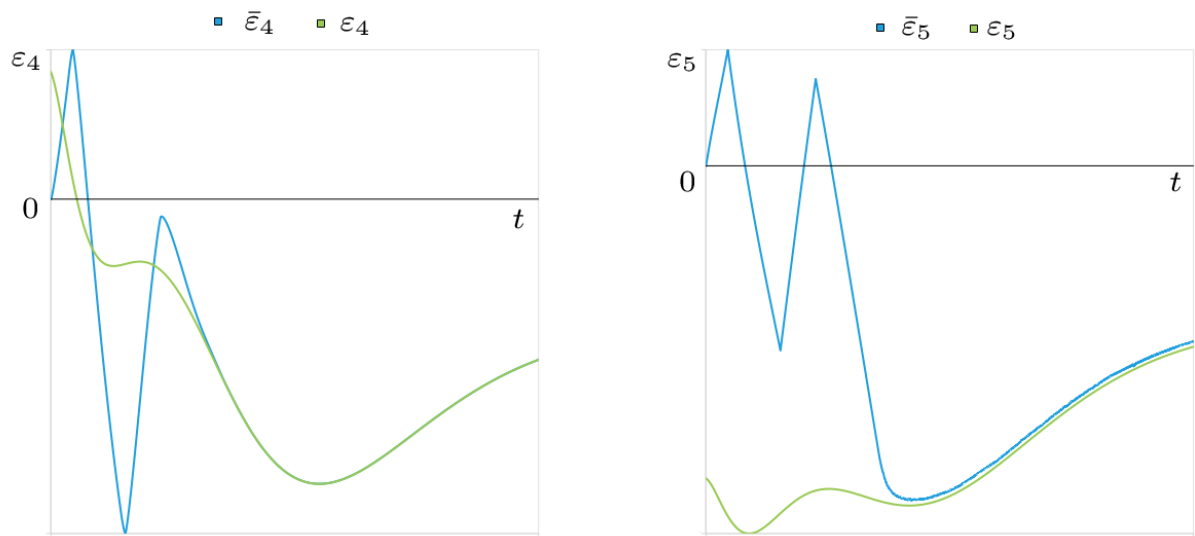


Рисунок 6 – Траектории системы (3.2) и их оценки

## Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Приведен алгоритм сведения задачи наблюдения для линейных систем с неопределенностью общего вида к задаче наблюдения для систем максимального относительного порядка особой структуры.
2. Для случая второго относительного порядка предложен метод построения наблюдателя систем с неопределенностью, сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия асимптотической точности получаемых с помощью такого наблюдателя оценок. Для случаев, когда система уравнения для ошибки наблюдения не является глобально асимптотически устойчивой, получены оценки области локальной устойчивости системы.
3. Для двумерного случая получены точные оценки ошибки оценивания в случае наличия в системе погрешности измерения выходного сигнала.
4. Получены оценки области, в которую сходятся траектории двумерной системы при наличии в системе некоторых типов неидеальности элементов переключения: гистерезиса, зоны нечувствительности, и задержки.
5. На основании результатов для двумерного случая, для случая произвольного относительного порядка предложен метод построения каскадного наблюдателя. Получены достаточные условия асимптотической точности получаемых оценок.
6. Предложен алгоритм построения каскадного наблюдателя, состоящего из систем более высоких размерностей.



Дальнейшие исследования могут вестись в следующих возможных направлениях. Может быть проведено исследование рассмотренного в главе 3 алгоритма построения наблюдателей произвольного порядка с целью получения алгебраических достаточных условий устойчивости системы и расширения множества допустимых параметров для предложенного наблюдателя. Также интерес представляет исследование скорости сходимости предлагаемых в работе наблюдателей в зависимости от параметров и модификация алгоритмов наблюдения для возможности получения оценок заранее заданной точности за заранее заданный промежуток времени.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю — Василию Владимировичу Фомичеву — за постановку задач и всестороннюю поддержку на всех этапах работы.

Автор также выражает благодарность коллективу кафедры Нелинейных динамических систем и процессов управления факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова за поддержку и предоставленные ему благоприятные условия для работы.

## Список литературы

1. *Raina G., Towsley D., Wischik D.* Part II: Control Theory for Buffer Sizing // ACM CCR. — 2005. — Vol. 35, no. 2. — P. 79–82.
2. Adaptive entitlement control of resource containers on shared servers / X. Liu [et al.] // 9th IFIP/IEEE International Symposium on Integrated Network Management. — 2005. — P. 163–176.
3. *Luna J., Abdallah C.* Control in computing systems: Part I // Proceedings of the IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design. — 2011. — P. 25–31.
4. *Hutchinson S., Hager G., Corke P.* A tutorial on visual servo control // IEEE Transactions on Robotics and Automation. — 1996. — Vol. 12, no. 5. — P. 651–670.
5. *Bocker J., Mathapati S.* State of the Art of Induction Motor Control // 2007 IEEE International Electric Machines & Drives Conference. Vol. 2. — 2007. — P. 1459–1464.
6. Design and Control of Concentric-Tube Robots / P. E. Dupont [et al.] // IEEE Transactions on Robotics. — 2010. — Vol. 26, no. 2. — P. 209–225.
7. Application of modern synthesis to aircraft control: Three case studies / D. Gangsaas [et al.] // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1986. — Vol. 31, no. 11. — P. 995–1014.
8. *Fossen T. I.* A survey on Nonlinear Ship Control: from Theory to Practice // IFAC Proceedings Volumes. — 2000. — Vol. 33, no. 21. — P. 1–16.

9. *Swan G. W.* General Applications of Optimal Control Theory in Cancer Chemotherapy // *Mathematical Medicine and Biology: A Journal of the IMA.* — 1988. — Vol. 5, no. 4. — P. 303–316.
10. *Burgner-Kahrs J., Rucker D. C., Choset H.* Continuum Robots for Medical Applications: A Survey // *IEEE Transactions on Robotics.* — 2015. — Vol. 31, no. 6. — P. 1261–1280.
11. *Luenberger D.* An introduction to observers // *IEEE Transactions on Automatic Control.* — 1972. — Vol. 16. — P. 596–602.
12. *Darouach M., Zasadzinski M., Xu S.* Full-order observers for linear systems with unknown inputs // *IEEE Transactions on Automatic Control.* — 1994. — Vol. 39. — P. 606–609.
13. *Li Z., Wen C., Soh Y.* Observer-based stabilization of switching linear systems // *Automatica.* — 2003. — Vol. 39, no. 3. — P. 517–524.
14. *Caravani P., De Santis E.* Observer-based stabilization of linear switching systems // *International Journal of Robust and Nonlinear Control.* — 2009. — Vol. 19, no. 14. — P. 1541–1563.
15. *Sun L., Zheng Z.* Disturbance-Observer-Based Robust Backstepping Attitude Stabilization of Spacecraft Under Input Saturation and Measurement Uncertainty // *IEEE Transactions on Industrial Electronics.* — 2017. — Vol. 64, no. 10. — P. 7994–8002.
16. *Ильин А. В., Коровин С. К., Фомичев В. В.* Алгоритмы обращения линейных скалярных динамических систем: метод управляемой модели // *Дифференциальные уравнения.* — 1997. — Т. 33, № 3. — С. 329—339.
17. *Ильин А. В., Коровин С. К., Фомичев В. В.* Алгоритмы обращения управляемых линейных систем // *Дифференциальные уравнения.* — 1998. — Т. 34, № 6. — С. 744—750.

18. Ильин А. В., Коровин С. К., Фомичев В. В. Робастное обращение векторных линейных систем // Дифференциальные уравнения. — 1998. — Т. 34, № 11. — С. 1478—1486.
19. Dong Z., Liu K., Wang S. Sliding Mode Disturbance Observer-Based Adaptive Dynamic Inversion Fault-Tolerant Control for Fixed-Wing UAV // Drones. — 2022. — Т. 6, № 10.
20. Liu C.-S., Peng H. Disturbance Observer Based Tracking Control // Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. — 1997. — May. — Vol. 122, no. 2. — P. 332–335.
21. Disturbance Observer-Based Adaptive Tracking Control With Actuator Saturation and Its Application / H. Pan [et al.] // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. — 2016. — Vol. 13, no. 2. — P. 868–875.
22. Distributed finite-time tracking control for multi-agent systems: An observer-based approach / Y. Zhao [et al.] // Systems & Control Letters. — 2013. — Vol. 62, no. 1. — P. 22–28.
23. Levant A. Sliding Order and Sliding Accuracy in Sliding Mode Control // International Journal of Control. — 1993. — Vol. 58. — P. 1247–1263.
24. Levant A. Robust exact differentiation via sliding mode technique // Automatica. — 1998. — Vol. 34, no. 3. — P. 379–384.
25. Levant A. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control // International Journal of Control. — 2003. — Vol. 76. — P. 924–941.
26. Darouach M., Zasadzinski M., Hayar M. Reduced-order Observer Design for Descriptor Systems with Unknown Inputs // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1996. — Vol. 41. — P. 1068–1072.

27. *Goncharov O., Fomichev V.* Observer for multivariable systems of arbitrary relative order // Computational Mathematics and Modeling. — 2013. — Vol. 24, no. 2. — P. 182–202.
28. *Marx B., Koenig D., Georges D.* Robust fault diagnosis for linear descriptor systems using proportional integral observers // Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control. — 2004. — Vol. 1. — P. 457–462.
29. New unified  $H_\infty$  dynamic observer design for linear systems with unknown inputs. / N. Gao [et al.] // Automatica. — 2016. — Vol. 65. — P. 43–52.
30. *Фомичев В. В., Высоцкий А. О.* Каскадный метод построения наблюдателей для систем с неопределенностью // Дифференциальные уравнения. — М., 2018. — Т. 54, № 11. — С. 1533—1539.
31. *Филлипов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью // Математический сборник. — 1960. — Т. 93, № 1. — С. 99—128.
32. *Филлипов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М. : Наука, 1985. — 224 с.
33. *Kalman R. E.* Mathematical description of linear dynamical systems // Journal of The Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control. — 1963. — Vol. 1. — P. 152–192.
34. *Tuel W.* On the transformation to (phase-variable) canonical form // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1966. — Vol. 11, no. 3. — P. 607.
35. *Rane D.* A simplified transformation to (phase-variable) canonical form // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1966. — Vol. 11, no. 3. — P. 608.

36. Ильин А., Коровин С., Фомичев В. Методы робастного обращения динамических систем. — М. : Физматлит, 2009. — 219 с.
37. Ильин А. В., Коровин С. К., Фомичев В. В. Об уравнениях и свойствах нулевой динамики линейных управляемых стационарных систем // Дифференциальные уравнения. — 2006. — Т. 42, № 12. — С. 1626—1636.
38. Luenberger D. Canonical forms for linear multivariable systems // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1967. — Vol. 12, no. 3. — P. 290—293.
39. Фомичев В. В., Высоцкий А. О. Критерий устойчивости и точные оценки для алгоритма «супер-скручивания» // Дифференциальные уравнения. — М., 2023. — Т. 59, № 2. — С. 252—256.
40. Фомичев В. В., Высоцкий А. О. О вариации параметра нелинейности в алгоритме "super-twisting" // Дифференциальные уравнения. — М., 2023. — Т. 59, № 11. — С. 1571—1574.
41. Фомичев В. В., Высоцкий А. О. Точная оценка ошибки наблюдения для алгоритма «супер-скручивания» при наличии погрешности измерений // Дифференциальные уравнения. — М., 2022. — Т. 58, № 12. — С. 1716—1718.
42. Высоцкий А. О. Наблюдатели для динамических систем с неопределенностью при условии неидеальности реле // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. — М., 2022. — № 1. — С. 3—8.
43. Емельянов С. В., Коровин С. К., Левантовский Л. В. Скользящие режимы высших порядков в бинарных системах управления // Докл. АН СССР. — 1986. — Т. 287, № 6. — С. 1338—1342.

44. *Moreno J., Osorio M.* Strict Lyapunov Functions for the Super-Twisting Algorithm // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2012. — Vol. 57. — P. 1035–1040.
45. *Seeber R., Horn M.* Stability proof for a well-established super-twisting parameter setting // Automatica. — 2017. — Vol. 84.
46. Sliding Mode Control and Observation / L. Fridman [et al.]. — Springer, 2014. — 320 p.
47. *Moreno J., Osorio M.* A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers // 47th IEEE conference on decision and control. — 2008. — P. 2856–2861.
48. *Seeber R., Horn M.* Necessary and sufficient stability criterion for the super-twisting algorithm // 2018 15th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS). — 2018. — P. 120–125.
49. *Фомичев В. В., Высоцкий А. О.* Алгоритм построения каскадного асимптотического наблюдателя для системы с максимальным относительным порядком // Дифференциальные уравнения. — М., 2019. — Т. 55, № 4. — С. 567—573.
50. *Cruz-Zavala E., Moreno J.* Levant's Arbitrary-Order Exact Differentiator: A Lyapunov Approach // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2019. — Vol. 64, no. 7. — P. 3034–3039.
51. *Mendoza-Avila J., Moreno J., Fridman L.* Continuous Twisting Algorithm for Third-Order Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2020. — Vol. 65, no. 7. — P. 2814–2825.

## Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ:

1. Фомичев В. В., Высоцкий А. О. Каскадный метод построения наблюдателей для систем с неопределенностью // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 11. — С. 1533–1539. — (RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0.855). Перевод:

Fomichev V. V., Vysotskii A. O. Cascade observer design method for systems with uncertainty // Differential Equations. — 2018. — Vol. 54, no. 11. — P. 1509–1516. — (RSCI, Web of Science, Scopus, Five Year Impact Factor 2022 — 0.6, SJR — 0.57).

А.О. Высоцкому принадлежат все теоремы.

2. Фомичев В. В., Высоцкий А. О. Алгоритм построения каскадного асимптотического наблюдателя для системы с максимальным относительным порядком // Дифференциальные уравнения. — 2019. — Т. 55, № 4. — С. 567–573. — (RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0.855). Перевод:

Fomichev V. V., Vysotskii A. O. Algorithm for designing a cascade asymptotic observer for a system of maximal relative order // Differential Equations. — 2019. — Vol. 55, no. 4. — P. 553–560. (RSCI, Web of Science, Scopus, Five Year Impact Factor 2022 — 0.6, SJR — 0.57).

А.О. Высоцкому принадлежат все теоремы.

3. Высоцкий А.О. Наблюдатели для динамических систем с неопределенностью при условии неидеальности реле // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. — 2022 — № 1. — С. 3-8. — (RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0.245).

4. Фомичев В. В., Высоцкий А. О. Точная оценка ошибки наблюдения



для алгоритма «супер-скручивания» при наличии погрешности измерений // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т. 58, № 12. — С. 1716–1718. — (RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0.855)

Перевод:

Fomichev V. V., Vysotskii A.O. Sharp Observation Error Estimate for the “Super-Twisting” Algorithm in the Presence of Measurement Error // Differential Equations. — 2022. — Vol. 58, No. 12. — P. 1704-1707. — (RSCI, Web of Science, Scopus, Five Year Impact Factor 2022 — 0.6, SJR — 0.57).

А.О. Высоцкому принадлежат все теоремы.

5. Фомичев В. В., Высоцкий А. О. Критерий устойчивости и точные оценки для алгоритма «супер-скручивания» // Дифференциальные уравнения. — 2023. — Т. 59, № 2. — С. 252–256. — (RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0.855). Перевод:

Fomichev V. V., Vysotskii A. O. Stability criterion and sharp estimates for the “super-twisting” algorithm // Differential Equations. — 2023. — Vol. 59, no. 2. — P. 260–264. — (RSCI, Web of Science, Scopus, Five Year Impact Factor 2022 — 0.6, SJR — 0.57).

А.О. Высоцкому принадлежат все теоремы.

6. Фомичев В. В., Высоцкий А. О. О вариации параметра нелинейности в алгоритме “super-twisting” // Дифференциальные уравнения. — 2023. — Т. 59, № 11. — С. 1571–1574. — (RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0.855). Перевод:

Fomichev V. V., Vysotskii A. O. On the variation of the nonlinearity parameter in the “super-twisting” algorithm // Differential Equations. — 2023. — Vol. 59, no. 11. — P. 1579–1582. — (RSCI, Web of Science, Scopus, Five Year Impact Factor 2022 — 0.6, SJR — 0.57).

А.О. Высоцкому принадлежат все теоремы.