ОТЗЫВ НАУЧНОГО РУКОВОДИТЕЛЯ

на диссертацию

Березнюка Вадима Юрьевича

«Коммутаторная длина степеней

и асферичность групп, заданных графами»,

представленную на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

по специальности

1.1.5 — математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

В 1959 году Шюценберже заметил, что

в свободной группе неединичные коммутаторы не являются истинными степенями,

и это не такой тривиальный факт, как может показаться на первый взгляд. Дело в том, что между коммутаторами и степенями есть неочевидные связи, например, Каллер (1981) обнаружил такое тождество, выполненное вообще для любых элементов любой группы: $[a,b]^3 = [a^{-1}ba, a^{-2}bab^{-1}][bab^{-1}, b^2]$, то есть куб любого коммутатора в любой группе можно разложить не только в произведение трёх коммутаторов (что очевидно), но и в произведение двух коммутаторов (что вряд ли кто-то осмелится назвать очевидным). В более общем виде *оценка Каллера* состоит в том, что

$[a,b]^n$ *раскладывается в произведение* k *коммутаторов, если* $n \leqslant 2k-1$.

То, что оценка Каллера точная в свободной группе, называют *гипотезой Комерфорда–Комерфорда–Эдмундса*:

равенство $[x_1,y_1]\ldots[x_k,y_k] = z^n$, *где* $n \geqslant 2k$,
в свободной группе влечёт, что $z = 1$.

Данкану и Хауи (1991) удалось доказать, что это действительно так. Позже выяснилось, что аналогичный факт верен и в любых свободных произведениях групп без кручения; этот результат был получен в 2018 году в моей совместной работе с Ивановым, а также (одновременно, независимо и другими методами) в работе Л. Чена.

В свободных произведениях групп с кручением ситуация сложнее: что-то на эту тему доказано у меня с Ивановым и у Чена, а почти окончательный результат получен в нашей совместной работе с Вадимом:

в свободном произведении $A * B$ *минимальная возможная коммутаторная длина* n*-й степени элемента, не сопряжённого элементам свободных сомножителей, есть одно их двух чисел (просто зависящих от* A, B *и* n*).*

Вадиму удалось самостоятельно добить эту задачу, то есть получить исчерпывающий ответ. Простейший нетривиальный частный случай здесь такой:

> *если группы A и B не содержат элементов порядка два, но хотя бы одна из них содержит элементы порядка три, то минимальная возможная коммутаторная длина пятой степени элемента группы $A*B$, не сопряжённого элементам свободных сомножителей, равна*
> – **двум** *или* **трём** (наш совместный результат с Вадимом, глава 1 диссертации),
> – *а на самом деле,* **двум** *всегда* (Березнюк, глава 2 диссертации).

Вся эта тема очень геометрическая: результаты основаны на лемме о столкновениях (К., 1993), и диссертация содержит много красивых рисунков.

Глава 3 диссертации посвящена немного другой теме. Не вдаваясь в детали, скажу так: Вадиму удалось (очень сильно) обобщить теорему Д. Грубера (2015) и получить новые графические условия асферичности, аналогичные некоторым классическим условиям.

Все результаты диссертации были опубликованы в хороших журналах (и выложены в открытый доступ во Всемирной паутине).

Считаю, что диссертация полностью отвечает всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а автор, Вадим Юрьевич Березнюк, заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5 — математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Доктор физико-математических наук
доцент кафедры высшей алгебры
механико-математического факультета МГУ
Клячко А.А.

19.05.23

Подпись А. А. Клячко заверяю.

Декан механико-математического факультета МГУ
член-корреспондент РАН
Шафаревич А. И.