

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Егоренков Владимир Александрович

**Многоэтапный итерационный процесс
для реализации консервативных разностных схем
при моделировании 2D и 3D полупроводниковой плазмы, индуцированной
оптическим импульсом.**

Специальность 1.2.2 — «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

АВТОРЕФЕРАТ

**диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук**

Москва — 2023

Работа выполнена на кафедре вычислительных методов факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: **Логинова Мария Михайловна**,
кандидат физико-математических наук, научный сотрудник

Официальные оппоненты: **Ожигов Юрий Игоревич**,
доктор физико-математических наук, профессор,
кафедры суперкомпьютеров и квантовой информатики
факультета вычислительной математики и кибернетики
Московского Государственного Университета
имени М.В. Ломоносова
Макаров Владимир Анатольевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой общей физики и
волновых процессов физического факультета
Московского Государственного Университета
имени М.В. Ломоносова
Савенков Евгений Борисович,
доктор физико-математических наук, ведущий
научный сотрудник отдела №11
Федерального исследовательского центра
"Институт прикладной математики имени
М.В. Келдыша Российской академии наук"

Защита диссертации состоится «15» ноября 2023 г. в 15.30 часов на заседании диссертационного совета МГУ.012.1 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, аудитория №685.

E-mail: ilgova@cs.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский проспект, д.27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»:
<https://istina.msu.ru/dissertations/595862554/>

Автореферат разослан « » _____ 2023г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН

Ильин А. В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. С момента появления первых лазеров в 1960-х годах исследование нелинейных волновых оптических процессов в различных средах приобрело особую научную и прикладную значимость. На протяжении последних десятилетий нелинейная оптика и лазерная физика являются одними из важнейших направлений в современной науке, привлекающих внимание многих ученых. В частности, актуальной научно-технической проблемой является вопрос перехода к полностью оптическим технологиям обработки, хранения и передачи информации. В настоящее время во всем мире огромное внимание уделяется построению ультрабыстрого оптического переключателя и полностью оптического компьютера в перспективе. В основе данных технологий лежит явление оптической бистабильности (ОБ).

Математическая модель, описывающая генерацию полупроводниковой плазмы под действием оптического импульса, представляет собой систему нестационарных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими начальными и краевыми условиями. Из-за сильной нелинейности рассматриваемых процессов и необходимости проведения расчетов на больших временных интервалах при решении этой системы с помощью методов компьютерного моделирования особое внимание следует уделять надежности и точности применяемых численных методов и их реализации в виде компьютерного кода.

В литературе для решения задач, аналогичных рассматриваемой в диссертационной работе, широкое распространение получили различные разностные схемы, основанные на идее методов расщепления, которые являются экономичными и достаточно просты для реализации, в том числе и на многопроцессорных компьютерах. Однако, на практике этот подход для рассматриваемого класса задач обладает рядом недостатков (отсутствием консервативности у разностной схемы, отсутствием асимптотической устойчивости), которые приводят к потере важных свойств решения дифференциальной задачи при расчетах на длительных временных интервалах. В связи с этим, существует необходимость в разработке новых эффективных и экономичных численных методов, позволяющих проводить расчеты с высокой точностью на длительных временных интервалах. В диссертации с этой целью разработаны оригинальные двухэтапный и трехэтапный итерационные процессы, реализующие консервативные разностные схемы.

Одной из особенностей рассматриваемой проблемы является необходимость решения задачи Неймана для уравнения Пуассона, записанного относительно потенциала лазеро-

индуцированного электрического поля полупроводника. В настоящее время для решения краевых задач для эллиптических уравнений в прямоугольных областях повсеместно используется наиболее эффективный из прямых методов - быстрое дискретное преобразование Фурье (БДПФ), преимущества которого хорошо известны. Однако, в рассматриваемой в диссертации уравнение Пуассона решается совместно с уравнением типа реакция-конвекция-диффузия относительно концентрации свободных электронов, в конвективном слагаемом которого учитывается подвижность электронов. В литературе отсутствуют исследования эффективности применения прямых методов (в том числе БДПФ) к решению такой задачи. В диссертации этот пробел восполнен. Было обнаружено, что использование прямых методов для таких задач неэффективно: происходит быстрое накопление вычислительной погрешности, что приводит к нарушению условия разрешимости задачи Неймана. В то же время итерационные методы лишены данного недостатка.

Под действием оптического импульса в полупроводнике могут формироваться контрастные пространственно-временные структуры - домены высокой концентрации заряженных частиц (домены высокого поглощения). Взаимодействие падающего импульса с этими доменами может привести к его частичному отражению. Это, в свою очередь, может оказать существенное влияние на характеристики, в том числе надежность, ОБ элемента. Однако в настоящий момент модели, адекватно описывающие данный процесс, изучены слабо и требуют применения новых и эффективных численных методов.

Цели и задачи. Основной целью работы является разработка оригинального многоэтапного итерационного процесса для реализации консервативных разностных схем при моделировании 2D и 3D задач генерации полупроводниковой плазмы; демонстрация его преимуществ по сравнению с известными в литературе методами; проведение исследования процессов, происходящих в полупроводнике под действием интенсивного оптического импульса на основе компьютерного моделирования.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Для исследуемой задачи записать консервативную разностную схему и построить многоэтапный итерационный процесс для ее реализации. Провести аналитическое и численное исследование точности и работоспособности предложенного подхода.

2. Построить новую модель взаимодействия светового импульса с полупроводником, учитывающей отражение падающей волны от границ индуцированных ей же контрастных динамических структур. Для этого в систему уравнений вводится нелинейное уравнение Шредингера, записанное относительно комплексной амплитуды падающего импульса с учетом его продольной дифракции.

3. Разработать программный комплекс, реализующий предложенные в работе численные подходы к решению задачи генерации полупроводниковой плазмы, позволяющий проводить исследование эффективности и сравнения численных методов по различным критериям.

4. Провести компьютерные эксперименты процесса генерации лазеро-индуцированной полупроводниковой плазмы для 2D и 3D случаев; продемонстрировать возможность реализации абсорбционной ОБ; изучить влияние параметров системы на режимы изменения характеристик полупроводника; изучить влияние учета волны, отраженной от лазеро-индуцированного домена высокого поглощения.

Объектом исследования является система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая процесс генерации полупроводниковой плазмы, индуцированной оптическим импульсом. **Предметом исследования** являются численные методы для решения рассматриваемой задачи и нелинейные явления, происходящие в полупроводнике под действием оптического импульса.

Научная новизна.

1. Для задачи взаимодействия оптического импульса с полупроводником в 2D и 3D постановках предложен оригинальный многостадийный итерационный процесс позволяющий реализовывать экономичные консервативные разностные схемы и обладающий асимптотической устойчивостью и консервативностью на итерациях. Продемонстрированы преимущества данного подхода перед широко используемыми методами расщепления.

2. Разработан итерационный метод, обладающий консервативностью на итерациях, для нахождения начального распределения характеристик полупроводника при воздействии на него внешнего электрического поля (случай постановки неоднородных граничных условий).

3. Проведено сравнение эффективности численных подходов для решения 3D уравнения Пуассона с граничными условиями Неймана, включенного в систему нестационарных дифференциальных уравнений и нелинейно связанного с уравнением типа реакция-конвекция-диффузия, записанного относительно концентрации свободных электронов, в котором учитывается их подвижность. Продемонстрировано, что несмотря на повсеместное использование БДФ для решения эллиптических задач в прямоугольных областях, применение прямых методов для рассматриваемой в работе задачи приводит к нарушению условия разрешимости задачи Неймана и искажению полученного решения.

4. Предложена новая математическая модель взаимодействия оптического импульса с полупроводником, учитывающая продольную дифракцию оптического пучка. Это позволило

продемонстрировать отражение части падающей волны от индуцированной ею же контрастной структуры в полупроводнике.

5. Показана возможность реализации S - и N -образных гистерезисных зависимостей концентрации свободных носителей заряда полупроводника от входной интенсивности падающего оптического импульса при его прохождении через полупроводник.

6. В условиях существования оптической бистабильности обнаружен режим формирования спиральных волн концентрации свободных электронов полупроводника при его нахождении во внешнем электрическом поле.

Теоретическая и практическая значимость.

1. Предложенный многостадийный итерационный процесс является надежным и эффективным численным методом, обладающим консервативностью и асимптотической устойчивостью. Он может быть применен для реализации экономичных консервативных разностных схем, построенных для различных систем нелинейных многомерных уравнений (или одного уравнения). Следует подчеркнуть, что разработанный в работе итерационный метод может иметь широкое применение и в других научных областях для задач, описываемых подобными системами уравнений.

2. Выявлено принципиальное ограничение в использовании прямых численных методов для решения задачи Неймана для уравнения Пуассона, включенного в систему нестационарных дифференциальных уравнений и нелинейно связанного с уравнением типа реакция-конвекция-диффузия. Его необходимо учитывать при решении подобных систем дифференциальных уравнений, описывающих процессы из других областей науки, например в физике плазмы, задачах хемотаксиса.

3. Для обеспечения надежности ОБ элементов необходимо учитывать отражение оптического импульса от границы лазеро-индуцированного домена высокого поглощения, формирующегося в полупроводнике.

4. Обнаруженные спиральные волны концентрации свободных электронов, формирующиеся в полупроводнике под воздействием оптического импульса в условиях присутствия внешнего электрического поля, должны учитываться при построении электронно-оптических переключателей и в системах обработки информации оптическими методами.

Методы исследования. В работе используются методы теории дифференциальных уравнений, методы вычислительной математики и компьютерного моделирования.

Положения, выносимые на защиту.

1. Многоэтапный итерационный процесс, который наряду с методами расщепления является экономичным, но обладает асимптотической устойчивостью, реализующий консервативные разностные схемы для решения многомерных задач нелинейного взаимодействия оптического импульса с полупроводником. Доказательство его консервативности, включая консервативность на итерациях.

2. Преимущество применения итерационных методов при реализации консервативных разностных схем, аппроксимирующих систему нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих генерацию лазера-индуцированной полупроводниковой плазмы, для решения входящей в нее разностной задачи Неймана для уравнения Пуассона, которые, в отличие от прямых методов, обеспечивают выполнение условия разрешимости задачи Неймана.

3. Результаты комплексных исследований, проведенных на основе разработанного комплекса программ, по математическому моделированию сложных динамических нелинейных процессов, включающих, в частности, формирование контрастных пространственно-временных структур в полупроводнике под действием оптического излучения.

4. Обоснование на основе математического моделирования фундаментальной роли продольной дифракции светового пучка при его нелинейном распространении в среде в случае формирования лазера-индуцированных контрастных пространственно-временных структур.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на 25 Российских и международных конференциях:

- “International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE” (Almeria, Spain, 23-27 июня 2013; Costa Ballena, Cadiz, Spain, 4-8 июля 2017; Rota, Cadiz, Spain, 9-13 июля 2018, 30 июня - 6 июля 2019).

- “International Conference on Advanced Optoelectronics and Lasers, CAOL” (Sudak, Ukraine, 9-13 сентября 2013).

- “The 10th and the 11th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications” (Madrid, Spain, 7-11 июля 2014; Orlando, Florida, USA, 1-5 июля 2016).

- “SPIE Photonic Europe” (Brussels, Belgium, 13-17 апреля 2014).

- “SPIE Optics + Photonics” (San Diego, California, USA, 17-21 августа 2014, 9-13 августа 2015, 19-23 августа 2018).

- “Seventeenth International Conference on Computational Methods and Experimental Measurements” (Opatija, Croatia, 5-7 мая 2015).

- “8th international congress on industrial and applied mathematics, ICIAM” (Beijing, China, 10-14 августа 2015).

- “Тихоновские чтения” (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, Россия, 26-29 октября 2015, 23-27 октября 2017, 29 октября – 1 ноября 2018, 29 октября – 1 ноября 2019).

- “Sixth Conference on Numerical Analysis and Applications, NAA'16” (Lozenetz, Bulgaria, 15-20 июня 2016).

- “Современные проблемы математической физики и вычислительной математики” (Москва, Россия, 31 октября - 3 ноября 2016).

- “Ломоносовские чтения” (Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, Россия, 17-26 апреля 2017, 15-25 апреля 2019).

- “Frontiers in Optics” (Washington DC, USA, 17-21 сентября 2017).

- “SPIE Photonics West” (San Francisco, USA, 27 января - 1 февраля 2018).

- “International Conference on Ultrafast Optical Science “UltrafastLight-2019” (Москва, Lebedev Physical Institute, Россия, 30 сентября - 4 октября 2019).

- “Квантовая информатика 2021” (Москва, Россия, 30 марта - 4 апреля 2021).

- “SPIE Optics + Photonics” (San Diego, California, USA, 25-29 августа 2013).

Отдельные результаты работы докладывались на научном семинаре лаборатории математического моделирования в физике факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова.

Достоверность результатов. Работоспособность и эффективность представленных численных методов демонстрируется в численных экспериментах и обосновывается согласованностью выводов аналитического исследования и численного моделирования; непротиворечивостью имеющимся в литературе результатам; сопоставлением полученных результатов с имеющимися аналитическими решениями; выполнением разностных аналогов законов сохранения дифференциальных задач на решении разностных задач и проведении расчетов на сгущающихся сетках. Для некоторых частных постановок задачи корректность модели подтверждена строгими математическими результатами, оформленными в виде сформулированных и доказанных теорем

Публикации. Основные результаты работы представлены в восемнадцати публикациях [1-18], из них четырнадцать [1-14] в изданиях, индексируемых в Web of Science Core Collection, Scopus и РИНЦ, в том числе три статьи в журналах, входящих в Q1 [9 - 11]; еще три работы [16-18] опубликованы в изданиях, индексируемых в РИНЦ.

Личный вклад автора. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором под научным руководством к.ф.-м.н. М. М. Логиновой и при научном консультировании д.ф.-м.н., проф. В. А. Трофимова. Во всех совместных работах использовался разработанный автором многоэтапный итерационный процесс, реализующий консервативную разностную схему, записанную для задачи генерации полупроводниковой плазмы под действием оптического импульса. Все используемые в ходе исследований численные алгоритмы, за исключением быстрого дискретного преобразования Фурье, были реализованы автором в виде программного комплекса, проведено компьютерное моделирование, визуализация и описание результатов численных экспериментов. Анализ полученных результатов проводился автором с частичной помощью соавторов, при этом вклад автора был определяющим. Соавторы помогали автору с редактурой текста и его переводом на английский язык. В работах [1-3] автором проводились вычисления и анализ результатов для 2D случая (результаты исследования 1D случая проводились М. М. Логиновой). В работах [7, 8, 12, 14] автором была предложена и исследована новая математическая модель взаимодействия оптического импульса с полупроводником, учитывающая продольную дифракцию оптического пучка. В статьях [7, 12] автором было проведено аналитическое исследование рассматриваемой системы уравнений в дифференциальной и разностной формах (показаны ограниченность функций, консервативность разностной схемы, сходимости итерационного процесса и т. д.). В работе [9] автором проведено исследование по выбору оптимально критерия сходимости итерационного процесса при решении 2D уравнения Пуассона. В работе [10] для численного решения задачи оптической бистабильности автором предложены алгоритмы нормировки численного решения.

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и списка публикаций автора по теме диссертации. Общий объем работы составляет 216 страниц, включая 66 рисунков и 5 таблиц. Список литературы содержит 221 наименование.

Благодарности. Автор выражает благодарность своему научному руководителю к.ф.-м.н. М. М. Логиновой, проф., д.ф.-м.н. В. А. Трофимову за ценные советы, рекомендации и поддержку работы, а также коллективу кафедры вычислительных методов за творческую обстановку.

Содержание работы

Во введении приводится обзор научной литературы по теме диссертации, характеризующий состояние проблемы, обосновывается актуальность темы исследований, обсуждается цель работы, ее практическая значимость и научная новизна.

Глава 1 состоит из 5 параграфов. В первом и втором параграфах главы 1 рассматриваются различные математические постановки задачи взаимодействия оптического импульса с полупроводником. В частности, одна из них описывается следующей системой, состоящей из 3D безразмерных уравнений относительно характеристик полупроводника и уравнения, описывающего эволюцию интенсивности падающего импульса:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= \gamma(n - N), \quad 0 < x < L_x, \quad 0 < y < L_y, \quad 0 < z < L_z, \quad t > 0, \\
 \frac{\partial N}{\partial t} &= G(n, N, \varphi, I) - R(n, N), \quad 0 \leq x \leq L_x, \quad 0 \leq y \leq L_y, \quad 0 \leq z \leq L_z, \quad t > 0, \\
 \frac{\partial n}{\partial t} &= \kappa_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial n}{\partial x} - \mu_x n \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \kappa_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial n}{\partial y} - \mu_y n \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \kappa_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial n}{\partial z} - \mu_z n \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \\
 &+ G(n, N, \varphi, I) - R(n, N), \quad 0 < x < L_x, \quad 0 < y < L_y, \quad 0 < z < L_z, \quad t > 0, \\
 \frac{\partial I}{\partial z} + \delta_0 \delta(n, N, \varphi) I &= 0, \quad 0 \leq x \leq L_x, \quad 0 \leq y \leq L_y, \quad 0 < z \leq L_z, \quad t > 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь x, y – поперечные координаты, нормированные на радиус падающего оптического пучка, z – продольная координата, вдоль которой распространяется оптическое излучение и она нормирована на выбранную характерную длину, L_x, L_y – безразмерные ширины поперечного сечения полупроводника, L_z – безразмерная длина полупроводника, t – время, измеряемое в единицах времени рекомбинации свободных носителей зарядов. Функции $n(x, y, z, t)$ и $N(x, y, z, t)$ – концентрации свободных электронов в зоне проводимости полупроводника и ионизированных доноров, нормированные на максимально возможное в данных условиях значение концентрации доноров. Функция $\varphi(x, y, z, t)$ – безразмерный потенциал лазеро-индуцированного электрического поля. Функция $I(x, y, z, t)$ описывает профиль интенсивности и временную форму оптического импульса, нормированную на максимальное значение интенсивности на входе в нелинейную среду. μ_x, μ_y, μ_z – коэффициенты подвижности свободных электронов по поперечной и продольной координате соответственно; $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z$ – их коэффициенты диффузии. Параметр γ зависит, в частности, от максимально возможной концентрации свободных носителей заряда. δ_0 – максимальное значение нелинейного коэффициента поглощения среды. Функции $G(n, N, \varphi, I)$ и $R(n, N)$ описывают генерацию

электронов с донорного уровня и излучательную рекомбинацию свободных зарядов полупроводника. Функция $\delta(n, N, \varphi)$ описывает нелинейный коэффициент поглощения полупроводника.

Граничные и начальные условия задаются в зависимости от присутствия или отсутствия внешнего электрического поля, действующего вдоль одной или нескольких осей координат. Каждый из возможных случаев рассматривается в диссертации отдельно. В зависимости от поставленных граничных условий ставятся задачи нахождения начальных характеристик полупроводника.

Важно отметить, что для рассматриваемой задачи справедлив закон сохранения заряда:

$$Q(t) = \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \int_{z=0}^{L_z} (n(x, y, z, t) - N(x, y, z, t)) dx dy dz = 0, \quad t > 0. \quad (2)$$

Под консервативностью численного метода для поставленной задачи подразумевается выполнение разностного аналога данного закона (сохранения инварианта на сетке). Заметим, что для рассматриваемой задачи условие разрешимости задачи Неймана для уравнения Пуассона, записанного относительно потенциала лазера-индуцированного электрического поля, совпадает с законом сохранения заряда (2). Следовательно, при построении разностной схемы для решения задачи (1) с соответствующими граничными и начальными условиями, ее консервативность будет играть ключевую роль для разрешимости задачи Неймана для уравнения Пуассона.

Для учета дифракционных эффектов в работе предложена новая математическая модель, где уравнение относительно интенсивности оптического импульса заменяется нелинейным уравнением Шредингера относительно его комплексной амплитуды A :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + iD_x \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + iD_y \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + iD_z \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{\beta_A \delta_0}{2} \delta(n, N, \varphi) A = 0, \quad 0 < x < L_x, -L_y < y < L_y, 0 < z < L_z, t > 0. \quad (3)$$

Здесь D_x, D_y, D_z – коэффициенты дифракции, $D_z = 1/(4\pi\chi)$, $\beta_A = \pi\chi$, χ – проекция волнового числа на ось z . Коэффициент поглощения δ_0 равен нулю вне области полупроводника. Интенсивность оптического излучения связана с комплексной амплитудой следующим соотношением $I = |A|^2$. Для уравнения (3) ставятся соответствующие начальные и граничные условия.

В третьем параграфе первой главы обсуждается подход к нормировке решения уравнения Пуассона с граничными условиями Неймана для обеспечения его единственности.

Так как решение задачи Неймана находится с точностью до константы, то, в случае нелинейной зависимости коэффициента поглощения от потенциала электрического поля, сдвиг распределения потенциала электрического поля во время решения эволюционной задачи или при нахождении начального распределения характеристик полупроводника может привести к существенным изменениям решения всей системы нестационарных уравнений.

В четвертом параграфе первой главы приведены различные аналитические оценки решения дифференциальной задачи.

В пятом параграфе первой главы сформулированы ее краткие выводы.

Глава 2 состоит из 10 параграфов и посвящена численным методам решения задач, поставленных в главе 1. Как известно, для решения нелинейных многомерных задач широко применяются разностные схемы, основанные на методе расщепления (суммарной аппроксимации). В диссертационной работе разработан альтернативный подход – многостадийный итерационный процесс реализующий консервативные разностные схемы. Ключевое различие между методом расщепления и итерационным методом продемонстрировано на рис. 1, где функция f представляет собой некую сеточную функцию, а \hat{f} , \bar{f} , $\bar{\bar{f}}$ – ее значение на верхнем и дополнительных временных слоях, соответственно. При использовании итерационного метода решение задачи происходит на верхнем временном слое с использованием значений, полученных на предыдущем слое и предыдущих итерациях, без введения дополнительных временных слоев. При этом процесс повторяется до тех пор, пока не будет удовлетворен критерий сходимости. В случае использования метода расщепления задача решается на введенных дополнительных временных слоях, прежде чем будет получено решение на верхнем слое.

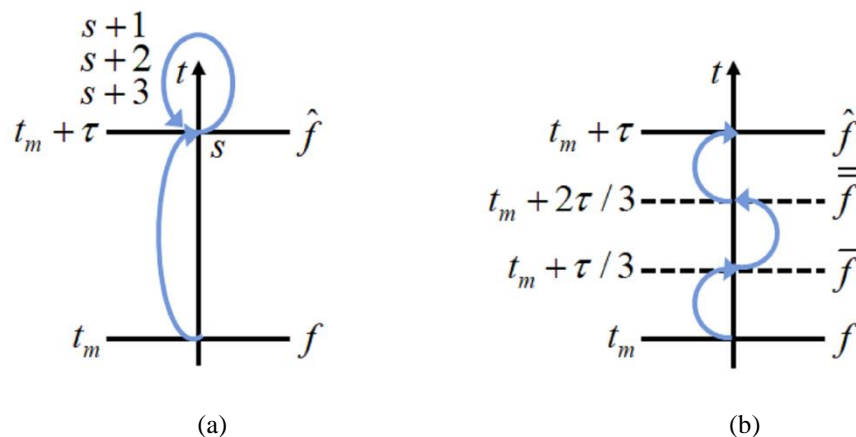


Рис. 1. Схема вычислений в 3D случае при использовании трехэтапного итерационного процесса (a) и метода расщепления (b).

В первом и третьем параграфах главы 2 для задачи генерации полупроводниковой плазмы построены нелинейные симметричные консервативные конечно-разностные схемы (схемы типа Кранка-Николсона) второго порядка аппроксимации по времени и пространству во внутренних точках области в 2D и 3D случаях с учетом и без учета дифракционных эффектов. Сформулированы и доказаны теоремы о порядке аппроксимации и консервативности построенных схем.

Во втором параграфе главы 2 обсуждаются некоторые аналитические оценки разностного решения 2D задачи взаимодействия оптического импульса с полупроводником.

В четвертом и шестом параграфах главы 2 представлены оригинальные многоэтапные итерационные процессы для реализации описанных выше симметричных консервативных конечно-разностных схем в 2D и 3D случаях (двухэтапный и трехэтапный итерационные процессы соответственно). Для примера ниже приведен двухэтапный итерационный процесс (ДЭИП) реализующий конечно-разностную схему, записанную для 2D аналога задачи (1), в области $G = \{0 \leq x \leq L_x\} \times \{0 \leq y \leq L_y\} \times \{0 \leq t \leq L_t\}$ на равномерных сетках $\Omega = \omega_x \times \omega_y \times \omega_t$ и $\bar{\Omega}' = \omega'_x \times \omega'_y \times \bar{\omega}_t$:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \{x_l = lh_x, l = \overline{0, P_x}, h_x = L_x/P_x\}, \\ \omega_y &= \{y_j = jh_y, j = \overline{0, P_y}, h_y = L_y/P_y\}, \quad \omega'_y = \{y'_j = (j-0.5)h_y, j = \overline{0, P_y+1}, h_y = L_y/P_y\}, \\ \omega_t &= \{t_m = m\tau, m = \overline{0, P_t}, \tau = L_t/P_t\}, \quad \bar{\omega}_t = \{\bar{t}_m = (m-0.5)\tau, m = \overline{0, P_t}, \tau = L_t/P_t\}. \end{aligned}$$

Сеточные функции n_h, N_h, φ_h определяются на сетке Ω , а сеточная функция I_h на $\bar{\Omega}'$ следующим образом:

$$n_{ij}^m = n(x_l, y_j, t_m), \quad N_{ij}^m = N(x_l, y_j, t_m), \quad \varphi_{ij}^m = \varphi(x_l, y_j, t_m), \quad I_{ij}^m = I(x_l, y'_j, \bar{t}_m).$$

Для записи разностной схемы используются следующие безиндексные обозначения:

$$\begin{aligned} f &= f_{ij}^m, \quad f_{l\pm 1} = f_{l\pm 1j}^m, \quad f_{l\pm 1} = f_{l\pm 1}^m, \quad \hat{f} = f_{ij}^{m+1}, \\ f_{l\pm 0.5} &= (f_l + f_{l\pm 1})/2, \quad f_{j\pm 0.5} = (f_j + f_{j\pm 1})/2, \quad f^{\pm 0.5} = (\hat{f} + f)/2, \\ f_x &= \frac{f_{l+1} - f}{h_x}, \quad f_{\bar{x}} = \frac{f - f_{l-1}}{h_x}, \quad f_y = \frac{f_{j+1} - f}{h_y}, \quad f_{\bar{y}} = \frac{f - f_{j-1}}{h_y}, \\ f_{\bar{x}\bar{x}} &= \frac{f_{l+1} - 2f + f_{l-1}}{h_x^2}, \quad f_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{f_{j+1} - 2f + f_{j-1}}{h_y^2}, \end{aligned}$$

где f – одна из следующих функций: n , N , φ .

$$\Lambda \varphi = \varphi_{\bar{x}\bar{x}}^{0.5} + \varphi_{\bar{y}\bar{y}}^{0.5}, \quad I^m = I_{ij}^m, \quad \hat{I}^m = I_{ij+1}^m, \quad I = 0.5(I_{ij}^{m+1} + I_{ij+1}^{m+1}).$$

Сеточные функции G , R , δ и \hat{G} , \hat{R} , $\hat{\delta}$ определяются следующим образом:

$$G = G(n, N, \varphi, I)^{0.5}, \quad R = R(n, N), \quad \delta = \delta(n, N, \varphi),$$

$$\hat{G} = G(\hat{n}, \hat{N}, \hat{\varphi}, I)^s, \quad \hat{R} = R(\hat{n}, \hat{N}), \quad \hat{\delta} = \delta(\hat{n}, \hat{N}, \hat{\varphi}),$$

$$G = (\hat{G} + G) / 2, \quad R = (\hat{R} + R) / 2, \quad \delta = (\hat{\delta} + \delta) / 2,$$

где s , $s+1$ – номер итерации, с которой берется значение функций на $m+1$ -ом временном слое.

Для удобства записи также введены следующие разностные операторы:

$$Z_{\bar{x}\bar{x}}(n, \varphi) = \frac{\mu_x}{h_x} (n_{l+0.5} \varphi_x - n_{l-0.5} \varphi_x), \quad Z_{\bar{y}\bar{y}}(n, \varphi) = \frac{\mu_y}{h_y} (n_{j+0.5} \varphi_y - n_{j-0.5} \varphi_y),$$

$$Z_{\bar{x}\bar{x}}^{0.5}(n, \varphi) = (Z_{\bar{x}\bar{x}}(\hat{n}, \hat{N}) + Z_{\bar{x}\bar{x}}(n, \varphi)) / 2, \quad Z_{\bar{y}\bar{y}}^{0.5}(n, \varphi) = (Z_{\bar{y}\bar{y}}(\hat{n}, \hat{N}) + Z_{\bar{y}\bar{y}}(n, \varphi)) / 2,$$

$$f = (\hat{f} + f) / 2.$$

С помощью введенных обозначений первый этап двухэтапного итерационного процесса записывается в следующем виде:

$$\frac{\hat{N} - N}{\tau} = G - R, \quad l = \overline{0, P_x}, \quad j = \overline{0, P_y},$$

$$\frac{\hat{n} - n}{\tau} = \kappa_x \left(n_{\bar{x}\bar{x}}^{s+1} - Z_{\bar{x}\bar{x}}^s(n, \varphi) \right) + \kappa_y \left(n_{\bar{y}\bar{y}}^{s+1} - Z_{\bar{y}\bar{y}}^s(n, \varphi) \right) + G - R, \quad l = \overline{1, P_x - 1}, \quad j = \overline{1, P_y - 1}, \quad (4)$$

$$\Lambda \hat{\varphi} = \gamma(\hat{n} - \hat{N}), \quad l = \overline{1, P_x - 1}, \quad j = \overline{1, P_y - 1},$$

$$\frac{\hat{I}^{m+1} - I^{m+1}}{h_y} + \delta_0 \delta I^{m+1} = 0, \quad l = \overline{0, P_x}, \quad j = \overline{1, P_y}.$$

Второй этап итерационного процесса записывается в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{N}^{s+2} - N}{\tau} &= G - R, \quad l = \overline{0, P_x}, \quad j = \overline{0, P_y}, \\
\frac{\hat{n}^{s+2} - n}{\tau} &= \kappa_x \left(n_{\bar{x}x} - Z_{\bar{x}x}(n, \varphi) \right) + \kappa_y \left(n_{\bar{y}y} - Z_{\bar{y}y}(n, \varphi) \right) + G - R, \quad l = \overline{1, P_x - 1}, \quad j = \overline{1, P_y - 1}, \\
\Lambda \hat{\varphi} &= \gamma(\hat{n} - \hat{N}), \quad l = \overline{1, P_x - 1}, \quad j = \overline{1, P_y - 1}, \\
\frac{\hat{I}^{s+2}_{m+1} - I^{s+1}_{m+1}}{h_y} + \delta_0 \delta I^{s+2}_{m+1} &= 0, \quad l = \overline{0, P_x}, \quad j = \overline{1, P_y}.
\end{aligned} \tag{5}$$

В качестве начального приближения функций на нулевой итерации берутся их значения с предыдущего временного слоя:

$$\hat{n}^0 = n, \quad \hat{N}^0 = N, \quad \hat{\varphi}^0 = \varphi, \quad \hat{I}^{m+1}_0 = \hat{I}^m, \quad l = \overline{0, P_x}, \quad j = \overline{0, P_y}.$$

Критерий сходимости итерационного процесса определяется неравенствами:

$$|\hat{n}^{s+2} - \hat{n}^s| < |\hat{n}^s| \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad |\hat{N}^{s+2} - \hat{N}^s| < |\hat{N}^s| \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad |\hat{I}^{s+2}_{m+1} - \hat{I}^s_{m+1}| < |\hat{I}^s_{m+1}| \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad l = \overline{0, P_x}, \quad j = \overline{0, P_y}.$$

Помимо этого, для проведения сравнительного анализа эффективности разрабатываемого метода, записаны схемы на основе методов расщепления (схема переменных направлений для 2D и схема стабилизации для 3D), позволяющие решить поставленные задачи.

Для всех рассмотренных методов сформулированы и доказанные теоремы о консервативности и консервативности на итерациях (для итерационных методов).

В пятом параграфе главы 2 доказана равномерная ограниченность для разностного решения, полученного с использованием ДЭИП и сходимость самого итерационного процесса.

В седьмом параграфе главы 2 рассмотрен вопрос построения консервативных разностных схем для нахождения начальных распределений характеристик полупроводника в зависимости от наличия или отсутствия внешнего электрического поля вдоль одной или нескольких осей координат.

В восьмом параграфе главы 2 рассматриваются численные методы для решения уравнения Пуассона, записанного относительно лазеро-индуцированного потенциала электрического поля и входящего в систему нестационарных разностных уравнений. Так как в слагаемое, описывающее конвективный перенос в уравнении относительно концентрации свободных электронов, входит подвижность электронов, то между концентрацией свободных электронов и лазеро-индуцированным электрическим полем полупроводника осуществляется

нелинейная обратная связь. Численные эксперименты с использованием быстрого дискретного преобразования Фурье показали, что использование прямых методов для решения уравнения Пуассона с граничными условиями Неймана в рассматриваемом случае приводит к нарушению условия разрешимости задачи Неймана.

В связи с этим, для решения уравнения Пуассона с граничными условиями Неймана в работе использовался итерационный метод, которые широко применяются при решении стационарных задач математической физики. В этом случае они могут интерпретироваться как методы установления: решение стационарного уравнения рассматривается как предельный случай при $t \rightarrow \infty$ решения нестационарного уравнения. Тогда уравнение Пуассона относительно потенциала электрического поля преобразуется к виду:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{t}} = \Delta \varphi + \gamma(n - N), \quad (6)$$

где \bar{t} - искусственное время. Для численного решения уравнения (6) можно записать двухслойную разностную схему:

$$-\Lambda \hat{\varphi} + \frac{1}{\bar{\tau}} (\hat{\varphi} - \varphi) = \gamma(\hat{n} - \hat{N}), \quad \bar{\tau} = const > 0, \quad (8)$$

$\bar{\tau}$ - итерационный параметр. В этом случае условием существования единственного решения полученного уравнения (оно также может рассматриваться как аппроксимация уравнения Гельмгольца) является выполнение неравенства $\bar{\tau} > 0$, которое очевидно справедливо при любом $\bar{\tau} = const > 0$. Следовательно, отклонение от точного выполнения закона сохранения заряда обусловленное накоплением вычислительной погрешности, не будет влиять на разрешимость задачи Неймана для уравнения Пуассона. В 3D случае уравнение (6) решалось с помощью метода стабилизации (метода Дугласа).

Так же в данном параграфе приводятся варианты нормировки разностного решения задачи Неймана для уравнения Пуассона, использующиеся для обеспечения единственности решения. Рассмотрена эффективность использования критериев остановки для итерационного процесса, при использовании его для нахождения потенциала электрического поля.

В девятом параграфе главы 2 описан программный комплекс, реализующий описанные во 2-й главе численные методы.

В десятом параграфе главы 2 сформулированы ее краткие выводы.

Глава 3 посвящена исследованию эффективности построенных разностных схем с помощью методов компьютерного моделирования и состоит из четырех параграфов.

В первом параграфе главы 3 на примере 2D случая проводится сравнение эффективности консервативной нелинейной разностной схемы, реализованной на основе двухэтапного итерационного процесса, со схемами, основанными на методе расщепления. Проведен анализ полученных результатов на предмет консервативности схем и сохранения симметричности разностного решения. На основе результатов расчетов с разными шагами по времени продемонстрирована асимптотическая устойчивость предложенного двухэтапного итерационного процесса. Полученные в данном параграфе результаты демонстрируют преимущество итерационного метода перед методом расщепления, так как он позволяет проводить более точные расчеты на длительных временных интервалах без необходимости уменьшать шаг по времени (Рис. 2).

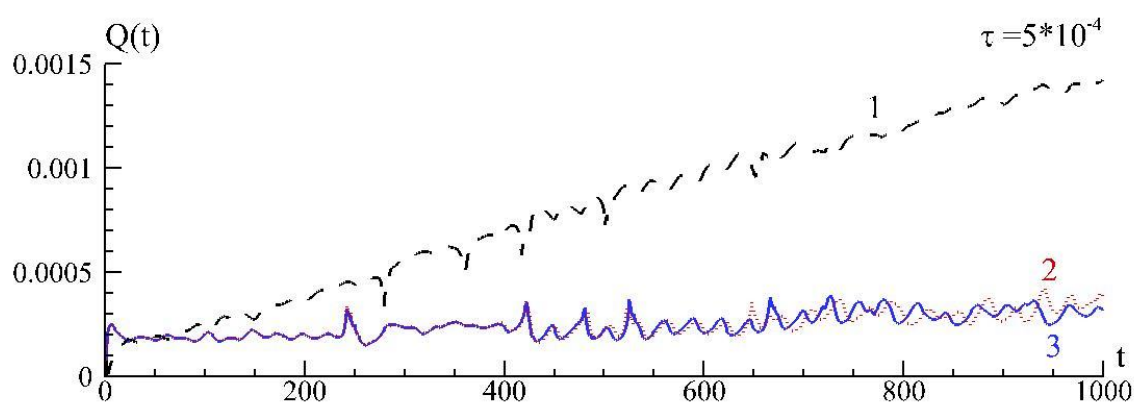


Рис. 2. Эволюция инварианта $Q(t)$, рассчитанного с шагом $\tau = 5 \cdot 10^{-4}$ с применением метода расщепления (1, черная линия, пунктир), метода расщепления с итерациями (2, красная линия, точки) и двухэтапного итерационного процесса (3, синяя сплошная линия).

В данном параграфе также обсуждается влияние точности решения задачи Неймана для уравнения Пуассона, входящего в систему дифференциальных уравнений с нелинейной обратной связью, на решение других уравнений системы. Продемонстрировано, что при использовании итерационного метода для решения уравнения Пуассона важное значение имеет выбор критерия его остановки: использование недостаточно жесткого критерия может привести к ошибкам в решении других уравнений системы (например, потере симметрии); применение же избыточно жесткого критерия приводят к существенному увеличению числа итераций и неоправданному росту машинного времени. Поэтому в работе проведено исследование выбора оптимального критерия остановки итерационного процесса, используемого для решения уравнения Пуассона, и показано, что таким является критерий, основанный на оценке точности невязки.

Во втором параграфе главы 3 рассматривается влияние точности нахождения начального распределения характеристик полупроводника на решение эволюционной задачи. Показано, что

недостаточная точность его вычисления может привести к искажению разностного решения задачи. Изучено влияние выбора нормировки потенциала электрического поля на распределение характеристик полупроводника в случае, когда коэффициент поглощения зависит от данной величины.

Третий параграф главы 3 посвящен сравнению разностных схем для 3D задачи. С помощью расчетов на сгущающейся по времени сетках показано, что предложенная в главе 2 нелинейная разностная схема для 3D задачи обладает асимптотической устойчивостью. При этом особое внимание уделяется сравнению эффективности использования прямого метода (быстрого дискретного преобразования Фурье из пакета Intel MKL) и итерационных методов решения задачи Неймана для уравнения Пуассона, входящего в систему нелинейных уравнений. Особенностью рассматриваемой системы является наличие нелинейной обратной связи между потенциалом электрического поля полупроводника и концентрациями заряженных частиц, присутствие которой определяется через подвижность электронов. Это может приводить к искажению правой части уравнения Пуассона и, как следствие, нарушению условия разрешимости задачи Неймана. Для выявления причины нарушения условия разрешимости были проведены расчеты с нулевым значением коэффициента подвижности электронов ($\mu_x = \mu_y = \mu_z = 0$), который входит в «конвективное» слагаемое в уравнении относительно концентрации свободных электронов и отвечает за существование нелинейной обратной связи в системе. Представленные в данном параграфе компьютерные эксперименты наглядно демонстрируют, что использование прямого метода в системе с нелинейной обратной связью приводит к нарушению консервативности решения, что, в свою очередь, влечет за собой нарушение условий разрешимости задачи Неймана. Итерационные методы позволяют избежать влияния данных ошибок на условие разрешимости задачи Неймана.

В четвертом параграфе главы 3 сформулированы ее краткие выводы.

Глава 4 состоит из пяти параграфов и посвящена результатам компьютерного моделирования с помощью предложенного многостадийного итерационного метода.

В первом параграфе данной главы рассматривается механизм формирования гистерезисных зависимостей характеристик полупроводника от входной интенсивности в 2D случае (Рис. 3). Исследуется влияние длительности оптического импульса на формирование гистерезисной петли характеристик полупроводника.

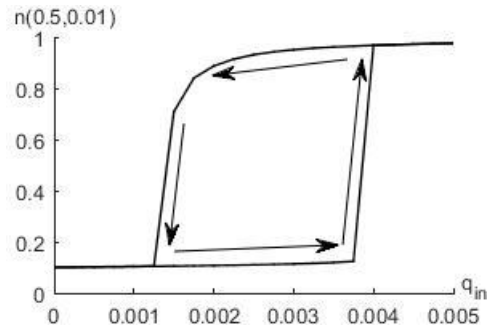


Рис. 3. Гистерезисная петля концентрации свободных электронов.

Второй параграф посвящен моделированию задачи взаимодействия оптического импульса с полупроводником, находящимся во внешнем электрическом поле в 2D случае (случай неоднородных граничных условий). Рассматриваются различные варианты воздействия внешнего электрического поля и его влияние на распределение характеристик полупроводника. В частности, продемонстрирована возможность формирования спиральных волн концентраций свободных электронов (Рис. 4).

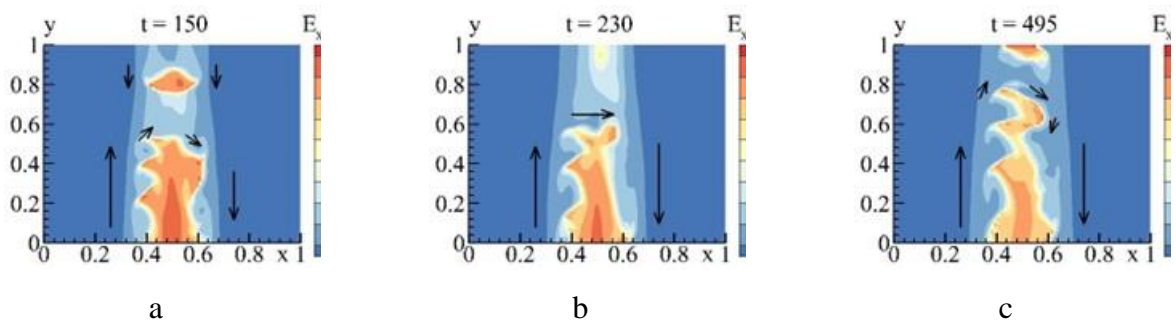


Рис. 4. Распределение концентрации свободных электронов при значении внешнего электрического поля $E_x = 2$ в моменты времени $t=150$ (a), 230 (b), 495 (c). Черными стрелками обозначено направление движения доменов с высокой концентрацией.

В третьем параграфе продемонстрировано, что разработанный в работе численный метод позволяет проводить компьютерное моделирование сложных 3D пространственно-временных структур на больших временных интервалах, при этом решение сохраняет симметрию (Рис. 5), а инвариант задачи сохраняется с высокой точностью.

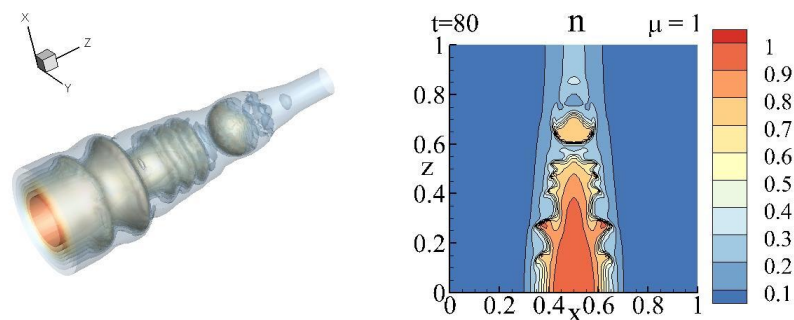


Рис. 5. Распределение концентрации свободных электронов в 3D случае в момент времени $t=80$.

В четвертом параграфе главы 4 продемонстрирована фундаментальная роль учета дифракционных эффектов при воздействии оптического импульса на полупроводник. Из-за наличия резкой границы между областями высокого и низкого поглощения происходит отражение оптического излучения от границы этих областей, что приводит к значительным изменениям в процессе распространения падающего импульса (Рис. 6).

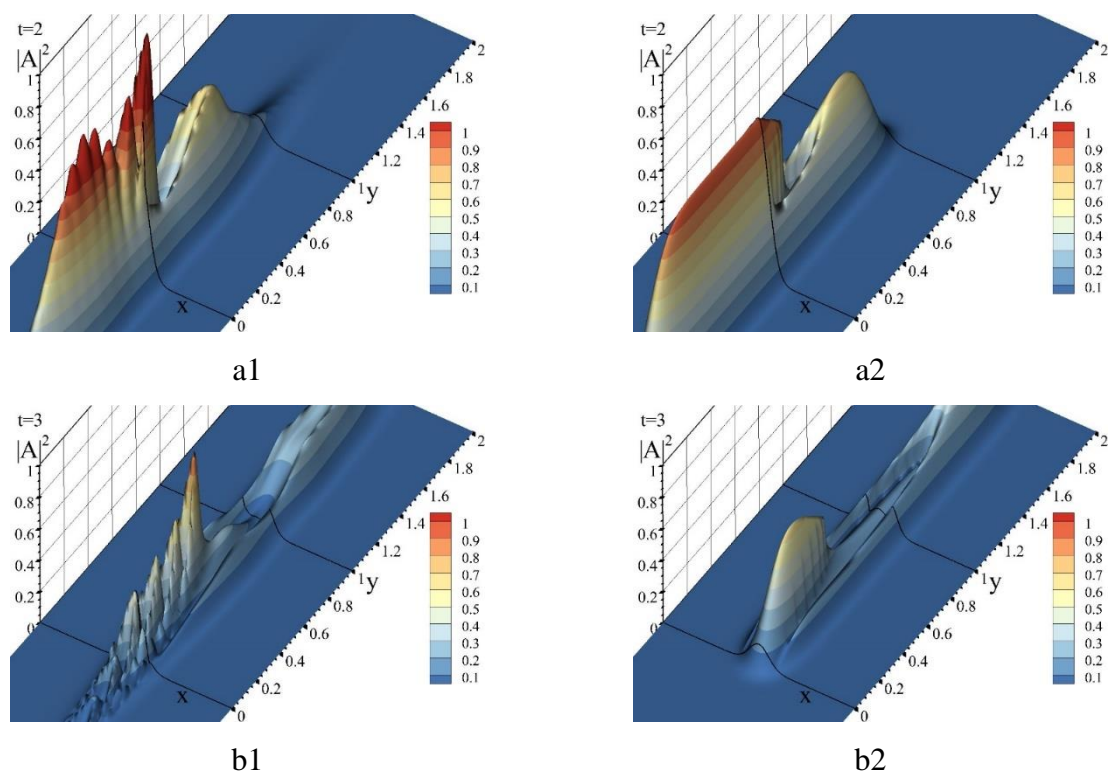


Рис. 6. Эволюция интенсивности оптического импульса $|A|^2$ в случае учета продольной дифракции (a1, b1) и без ее учета (a2, b2). Изображены распределения интенсивности в моменты времени: $t=2$ (a1, a2), 3 (b1, b2).

В пятом параграфе четвертой главы сформулированы ее краткие выводы.

В заклучении приводятся основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Построены оригинальные двухэтапный и трехэтапный итерационные процессы, позволяющие реализовывать консервативные разностные схемы для многомерных задач взаимодействия оптического импульса с полупроводником, описываемых системами нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Предложенные итерационные методы обладают рядом важных преимуществ: экономичностью, свойством консервативности (включая консервативность на итерациях) и асимптотической устойчивостью.

2. Продемонстрировано преимущество использования итерационных методов перед прямыми методами при решении задачи Неймана для уравнения Пуассона, включенного в систему нестационарных дифференциальных уравнений и нелинейно связанного с уравнением типа реакция-конвекция-диффузия. Показано, что в случае использования прямых методов нарушается условие разрешимости задачи Неймана.

3. Для вычисления начальных характеристик полупроводника в случае постановки неоднородных граничных условий, на основе метода установления разработан консервативный (в том числе, на итерациях) итерационный метод. Для обеспечения единственности решения задачи Неймана для уравнения Пуассона предложены подходы к нормировке полученных значений потенциала электрического поля.

4. Предложена новая математическая модель взаимодействия оптического импульса с полупроводником, учитывающая продольную дифракцию оптического пучка и продемонстрирован эффект отражения дифрагирующего светового импульса от границы индуцированного им домена высокого поглощения в полупроводнике. Данный результат относится к новому направлению лазерной физики: градиентной нелинейной оптике.

5. Продемонстрировано формирование в полупроводнике, помещенном во внешнее электрическое поле, сложных пространственно-временных структур - спиральных волн концентрации свободных электронов. Построены гистерезисные зависимости характеристик полупроводника от интенсивности падающего импульса, которые подтверждают реализацию оптической бистабильности в системе оптический импульс – полупроводник.

Публикации автора по теме диссертации в изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете

1. Trofimov V. A., Loginova M. M., Egorenkov V. A. Laser-induced 2D periodic structures of charged particles concentration in semiconductor under the condition of optical bistability existence // Proceedings of SPIE. – 2013. – Vol. 8847. – P. 88470G (15 pages). [WoS; Scopus SJR=0.17]

2. Trofimov V. A., Loginova M. M., Egorenkov V. A. Influence of external electric field on laser- induced wave process occurring in semiconductor under the femtosecond pulse acting // Proceedings of SPIE. – 2014. – Vol. 9127. – P. 912709 (12 pages). [WoS; Scopus SJR=0.17]

3. Trofimov V. A., Egorenkov V. A., Loginova M. M. Helical auto-waves electron-hole plasma in semiconductor induced by femtosecond pulse at presence of external electric field // Proceedings of SPIE. –2014. – Vol. 9200. – P. 920004 (13 pages). [WoS; Scopus SJR=0.17]

4. Trofimov V. A., Egorenkov V. A., Loginova M. M. Developing of 2D helical waves in semiconductor under the action of femtosecond laser pulse and external electric field // Proceedings of SPIE. – 2015. – Vol. 9586. – P. 95860K (14 pages). [WoS; Scopus SJR=0.17]
5. Trofimov V. A., Egorenkov V. A., Loginova M. M. Ultrafast switching based on field optical bistability in nano-film of semiconductor // Proceedings of SPIE. – 2016. – Vol. 9920. – P. 992029 (11 pages). [WoS; Scopus SJR=0.17]
6. Trofimov V. A., Loginova M. M., Egorenkov V. A. Conservative finite-difference scheme for computer simulation of field optical bistability // Numerical Analysis and Its Applications (NAA 2016). Lecture Notes in Computer Science. – 2017. – Vol. 10187. – P. 682–689. [WoS IF=0.3, Q4; Scopus SJR=0.32, Q4]
7. Trofimov V. A., Loginova M. M., Egorenkov V. A. Fast and slow light observation at laser pulse interaction with contrast structures induced in semiconductor due to its nonlinear absorption and optical beam diffraction // Proceedings of SPIE. – 2018. – Vol. 10755. – P. 107550A (16 pages). [WoS; Scopus SJR=0.17]
8. Trofimov V. A., Loginova M. M., Egorenkov V. A. Switching waves dynamics in optical bistable cavity-free system at femtosecond laser pulse propagation in semiconductor under light diffraction // Proceedings of SPIE. – 2018. – Vol. 10522. – P. 105221M (7 pages). [WoS; Scopus SJR=0.17]
9. Trofimov V. A., Loginova M. M., Egorenkov V. A. Conservative finite-difference scheme and two-stage iteration process of its realization for the 2D problem of semiconductor plasma generation by femtosecond pulse // Communications in Computational Physics. – 2018. – Vol. 23(5). – P. 1512–1533. [WoS IF=3.07, Q1; Scopus SJR=1.06, Q1]
10. Trofimov V. A., Loginova M. M., Egorenkov V. A. A mathematical model of optical bistability and the multiplicity of its solutions // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2019. – Vol. 354. – P. 663–681. [WoS IF=2.52, Q1; Scopus SJR=0.8, Q2]
11. Trofimov V. A., Loginova M. M., Egorenkov V. A. Conservative finite-difference scheme for computer simulation of contrast 3D spatial-temporal structures induced by a laser pulse in a semiconductor // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2020. – Vol. 43(7). – P. 4895–4917. [WoS IF=2.39, Q1; Scopus SJR=0.63, Q1]
12. Trofimov V. A., Loginova M. M., Egorenkov V. A. Conservative finite-difference scheme for the 2D problem of femtosecond laser pulse interaction with kink structure of high absorption in semiconductor. // International Journal of Computer Mathematics. – 2020. – Vol. 97(1-2). – P. 207–244. [WoS IF=1.72, Q2; Scopus SJR=0.53, Q2] -
13. Trofimov V. A., Loginova M. M., Egorenkov V. A. Numerical methods for solving the 3D Neumann problem of laser-induced plasma evolution in a semiconductor: Direct and iteration methods

// Computational and Mathematical Methods. – 2021. – Vol. 3(3). – P. e1089. [WoS IF=0.5, Q3; Scopus SJR=0.3, Q3]

14. Trofimov V. A., Loginova M. M., Egorenkov V. A. Multi-Stages Iterative Process for Conservative Economic Finite-Difference Schemes Realization for the Problem of Nonlinear Laser Pulse Interaction with a Medium // Nonlinear phenomena in complex systems. – 2021. – Vol. 24(3). – P. 242-259. [RSCI; WoS; Scopus SJR=0.25, Q4; РИНЦ ИФ=0.296]

Иные публикации.

15. Trofimov V. A., Loginova M. M., Egorenkov V. A. Conservative finite-difference schemes for 2D problem of femtosecond pulse propagation in semiconductor // Proceedings of the CMMSE'2013. – Almería, Spain, 2013. – Vol. 5. – P. 1767–1776.

16. Trofimov V. A., Loginova M. M., Egorenkov V. A. 2D wave structure induced by femtosecond laser pulse in semiconductor // Advanced Optoelectronics and Lasers (CAOL). IEEE Conference Publications. – 2013. – P. 296–298. [Scopus]

17. Trofimov V. A., Loginova M. M., Egorenkov V. A. New two-step iteration process for solution of semiconductor plasma generation problem with arbitrary boundary conditions in 2D case // WIT transactions on modelling and simulation. – 2015. – Vol. 59. – P. 85–96.

18. Trofimov V. A., Loginova M. M., Egorenkov V. A. Realization of S-type and N-type hysteresis loops at femtosecond laser pulse action in semiconductor // Frontiers in Optics 2017, OSA Technical Digest (online) (Optica Publishing Group). - 2017. - Paper JTU3A.58. (2 pages). [Scopus]