



15 февраля 2024 г.

## ОТЗЫВ

на диссертационную работу  
Гаража Александры Андреевны  
«Инварианты Жордана–Кронекера пары элементов алгебры Ли»  
представленную на соискание учёной степени кандидата  
физико-математических наук по специальности  
1.1.5 — «Математическая логика, алгебра, теория чисел и  
дискретная математика»

**Актуальность темы.** Тема диссертации относится к теории интегрируемых систем на алгебрах Ли. Одной из центральных проблем теории является построение полной системы интегралов в инволюции. На алгебраическом языке это означает построение максимального семейства попарно коммутирующих элементов симметрической алгебры  $S(\mathfrak{g})$  для алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  относительно скобки Ли–Пуассона. Теорема Садэтова, доказывающая гипотезу Мищенко–Фоменко гарантирует существование такой системы интегралов.

Универсальный метод построения системы интегралов в инволюции (*метод сдвига аргумента*) был предложен Мищенко и Фоменко (1978). В соответствии с этим методом, по каждому элементу  $A \in \mathfrak{g}^*$  строится Пуассон-коммутативная подалгебра  $F_A$  в  $S(\mathfrak{g})$ . Свойства и приложения подалгебр Мищенко–Фоменко  $F_A$  изучались многими авторами как с точки зрения теории интегрируемых систем, так и с алгебраической точки зрения. Кроме того, в последние время значительное внимание получила проблема квантования подалгебр  $F_A$ , инициированная Винбергом (1990).

Ещё один способ построения полных семейств интегралов в инволюции разработан Болсиновым и Чжан (2016). В его основе лежат методы линейной алгебры и теорема Жордана–Кронекера о канонической форме пары кососимметрических билинейных форм. Именно этот подход играет ключевую роль в приложениях к классическим алгебрам Ли, рассматриваемым в диссертации.

Тематика диссертации относится к активно развивающейся области исследований, опирающейся как на классические методы линейной алгебры, так и на новые подходы, возникшие из теории квантовых групп и вёртексных алгебр.

**Содержание, научная новизна и значимость исследований.** В главе 1 объясняется общий метод Болсинова и Чжан и его применение к каноническому виду Жордана–Кронекера пары кососимметрических форм  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{B}_A$  для произвольного элемента  $A$  алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ . Показано, что классический метод сдвига аргумента Мищенко и Фоменко возникает как частный случай для регулярного элемента  $A$  редуктивной алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ .

Основы комбинаторной и алгебраической техники метода разрабатываются в главе 2, вычислением кронекеровой части полной системы функций в биинволюции для произвольной квадратной матрицы.

В главе 3 различные аспекты метода модифицируются в зависимости от типа классической алгебры Ли. Объясняются дополнительные ограничения на элементы  $A$ , необходимые в случае серий  $B$  и  $D$ . Здесь же доказываются основные результаты диссертации для всех классических алгебр Ли, касающиеся построения кронекеровой части полной системы функций в биинволюции. Кроме этого, в главе 3 доказывается постоянство индексов Кронекера пары форм  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$  в случае серий  $A$  и  $C$  для элементов  $A \in \mathfrak{g}$  принадлежащих одному и тому же пласту (т.е., максимальному неприводимому подмножеству, состоящему из присоединённых орбит фиксированной размерности). Показано, что это общее свойство не переносится на серии  $B$  и  $D$ , но оно остаётся справедливым при дополнительных ограничениях на пласт.

Основная часть заключительной главы 4 посвящена построению жордановой компоненты полной системы функций в биинволюции. Её удаётся построить для всех пар форм  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$  в случае серий  $A$  и  $C$ , а также для многих пар в случае серий  $B$  и  $D$ , с дополнительными ограничениями на элемент  $A \in \mathfrak{g}$ . В последнем параграфе главы 4 получено явное описание предельных подалгебр Мищенко–Фоменко с помощью систем свободных образующих.

Таким образом, в диссертации представлены следующие новые результаты:

- Для классических алгебр Ли серий  $A$  и  $C$  полная система интегралов в инволюции построена для произвольных элементов алгебр Ли.
- Для классических алгебр Ли серий  $B$  и  $D$  полная система интегралов в инволюции построена для большого класса элементов алгебр Ли, удовлетворяющих дополнительным условиям.
- Исследована зависимость индексов Кронекера от пластов, содержащих фиксированные элементы алгебр Ли. Показано, что индексы постоянны внутри пласта для серий  $A$  и  $C$ , и что они могут варьироваться для серий

$B$  и  $D$ .

- Исследовано поведение систем интегралов в инволюции в предельных переходах и показано, что для многих семейств элементов алгебр Ли предельные подалгебры порождаются построенными полными системами интегралов в инволюции.

Наиболее значительный результат диссертации — это обобщение метода сдвига аргумента Мищенко–Фоменко для произвольных элементов классических алгебр Ли. Этот новый и оригинальный метод основан на исследовании канонического вида Жордана–Кронекера пары кососимметрических форм  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{B}_A$ , связанных с элементом  $A \in \mathfrak{g}$ . Тем самым дано решение важной проблемы теории интегрируемых систем на классических алгебрах Ли — построены полные системы интегралов в инволюции. Результаты диссертации будут, без сомнения, стимулировать дальнейшие исследования в этой области, включая развитие метода для всех простых алгебр Ли и алгебр Ли более широкого класса.

В контексте недавних исследований, посвящённых решению проблемы квантования Винберга в терминах явных образующих [9], [14], можно предположить, что результаты диссертации послужат отправной точкой для развития направления, связанного с квантованием полных систем интегралов в инволюции; т.е., их поднятием в универсальную обёртывающую алгебру.

**Достоверность результатов и качество изложения.** Теоремы и утверждения, сформулированные в диссертации сопровождаются подробными доказательствами. Ошибок в рассуждениях я не обнаружил. При этом, комбинаторные конструкции глав 2 и 3, касающиеся кронекеровой части полной системы функций в биинволюции, полностью согласуются с результатами публикаций [9] и [14], полученными другими методами.

Результаты изложены с достаточной степенью детализации, они сопровождаются несколькими примерами, иллюстрирующими ключевые конструкции и утверждения.

**Общее заключение.** Результаты представленные к защите и выводы, полученные в диссертации прошли дополнительную проверку в процессе рецензирования журналами с высокой репутацией. Они отвечают высоким стандартам требований, предъявляемым к диссертациям и установленным «Положением о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова». Результаты диссертации, без сомнения, окажут существенное влияние на развитие теории классических и квантовых интегрируемых систем на алгебрах Ли. Диссертант Александра Андреевна Гаража заслуживает присуждения ей учёной степени кандидата физико-математических наук. Я рекомендую её к защите в диссертационном совете МГУ.011.4 (МГУ.01.17)

Молев Александр Иванович  
к. ф.-м. н., профессор

Подпись А. И. Молева удостоверяю: