ОТЗЫВ
научного руководителя о диссертационной работе
Козика Игоря Александровича
«Исследование и применение связи дискретного и непрерывного времени при моделировании траекторий гауссовских процессов с учетом высоких выбросов», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.4 – теория вероятностей и математическая статистика

Данная диссертация посвящена актуальной задаче о соотношении дискретного и непрерывного времени при исследовании распределений выбросов за высокий уровень гауссовских случайных процессов и полей. Актуальность задачи связана с выбором решетки дискретизации при компьютерном моделировании траекторий случайных процессов с учетом высоких выбросов, что важно в задачах теории надежности и безопасности технических систем, в задачах финансовой математики при изучении вероятностей рисков разорения, в других областях теории вероятностей, математической статистики и их приложений. В случае стационарного гауссовского процесса задача была рассмотрена в 2004 году. Что же касается гауссовских случайных полей, а также нестационарных процессов, то здесь имеется несколько принципиальных трудностей, связанных с соотношением величины шага дискретизации, степенью гладкости траекторий, и степенью гладкости дисперсии исследуемого процесса или поля в окрестностях точек достижения ее абсолютного максимума. И. А. Козик, глубоко развив технику исследования соотношения распределений траекторий высоких выбросов в дискретном и непрерывном времени, успешно преодолел эти трудности и доказал несколько важных утверждений о соотношениях асимптотик в зависимости от трех вышеуказанных факторов. Им введена классификация типов густоты (плотности) решеток, в зависимости от которой высокие выбросы пропускаются или не пропускаются при дискретном моделировании, а также важный промежуточный случай (случай фазового перехода), когда высокий выброс лишь фиксируется, но не описывается полностью. Отметим, что в случае полей густота решетки также может зависеть от координат.

Рассматриваемая диссертация, объемом 98 страниц, состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы, насчитывающего 28 наименований. Основные идеи и положения изложены в 4 статьях, которые опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.4 и индексированных РИНЦ, Scopus и Web of Science. Перечисленные публикации соответствуют теме диссертации и полностью отражают ее содержание. Полученные результаты докладывались диссертантом на 4 конференциях.

Во введении дается обзор работ по теме диссертации, а также обзор истории проблематики исследования, в сфере которого работа автора становится логическим продолжениям в сторону оценок максимума при дискретизации. Напоминается, что фактически первое исследование асимптотики максимума стационарного гауссовского процесса в непрерывном времени было предложено в 1969 году в работе Дж. Пикандса. После чего метод, предложенный Дж. Пикандсом, был исправлен и существенно развит В.И. Питербаргом и В.П. Присяжнюком. Также приводится ряд практических задач, решения которых становятся приложениями теоретических результатов.

В первой главе описывается концепция дискретизации стационарного гауссовского процесса в зависимости от одного из трех типов решетки: плотной решетки, решетки Пикандса и разреженной решетки. Густая решетка не пропускает выбросы при поиске асимптотики максимума гауссовского процесса, и полученное значение асимптотики соответствует непрерывному случаю. Решетка Пикандса зависит от константы, определяющей длину шага решетки, и эта константа также оказывает существенное влияние на получаемую асимптотику. Разреженная решетка полностью меняет асимптотику рассматриваемой вероятности, сводя ее к рассмотрению значения процесса в одной или нескольких конкретных точках.

В первом разделе главы приведены определения для стационарного гауссовского процесса и одномерных решеток, после чего следует формулировка локальной леммы (лемма 1) на дискретном времени для стационарного гауссовского процесса с ее последующим доказательством. Во втором разделе полученный ранее результат расширяется поиском асимптотики вероятности достижения максимума на решетке уже на фиксированном отрезке (теорема 1) и его доказательством. Для обоих основных результатов первой главы также приведены вспомогательные результаты. Необходимо заметить, что существенная сложность заключается в техническом аспекте, поскольку каждый переход необходимо проводить индивидуально для каждой решетки.

Во второй главе исследуется асимптотика вероятности достижения максимума в дискретном времени для нестационарного гауссовского процесса (теорема 2). Для этого вводятся все необходимые ограничения на поведение дисперсии и функции корреляции нестационарного гауссовского процесса. В данном случае сложность доказательства существенно возрастает технически, поскольку на каждый из трех типов взаимосвязи степенного поведения дисперсии и функции корреляции процесса накладываются по три типа решетки.

В третьей главе произведен переход от гауссовского стационарного процесса из первой главы к двухпараметрическому гауссовскому полю. При данном переходе сложность кратно возрастает: вместо рассмотрения одной функции ковариации необходимо рассмотреть две, а вместо трех одномерных решеток становится необходимо рассмотреть шесть двумерных, являющихся парами одномерных решеток разных типов.

В первом разделе приведены все необходимые определения и доказана локальная лемма (лемма 4) для двухпараметрического гауссовского поля с рассмотрением обеих ковариационных функций и всех шести решеток. Во втором разделе главы для сокращения технически сложного доказательства теоремы (теорема 3) для двухпараметрического гауссовского поля в дискретном времени на измеримом по Жордану множестве в качестве наиболее показательных случаев были взяты только четыре решетки: плотные по обеим координатам, решетки Пикандса по обеим координатам, плотная решетка по одной координате и решетка Пикандса по другой, а также плотная решетка по одной координате и разреженная решетка по другой координате. Для перехода от леммы к теореме опять же даны все вспомогательные результаты.

В четвертой главе исследуются приложения результатов первой и второй глав к ставшим уже классическими задачам поиска асимптотики вероятности максимума дробного броуновского движения, а также задачи о разорении для дробного броуновского движения. Для постановки обеих задач в главе приведены все необходимые определения, после чего получены необходимые асимптотики для каждого типа решетки.

В пятой главе диссертации рассматривается влияние интенсивности гауссовского белого шума на сигнал выходного блока вестибулярного аппарата космонавта при визуальном управлении движением в открытом космосе. Данное исследование выполнялось по просьбе руководства подготовки эксперимента на борту МКС (международной космической станции): В.А. Садовничего, К.В. Тихоновой, В.В. Александрова.

В первом разделе приводится описание математической модели Ходжкина–Хаксли афферентного первичного нейрона с модификацией Сото–Александрова. В этом представлении модель имеет вид системы дифференциальных уравнений второго порядка, и для нее приводится бифуркационная диаграмма. Во втором разделе производится стохастизация ранее полученной модели с помощью случайной добавки, в качестве которой служит белый гауссовский шум. Для этой модели рассмотрен переход из области притяжения точечного аттрактора (режим ожидания выходного сигнала от волосковой клетки) в область притяжения периодического аттрактора (режим возбуждения) и обратного перехода. Чередование таких переходов является математической интерпретацией основового закона нейрофизиологии «Всё или ничего». В третьем разделе изучается возможность управления стохастизированной моделью второго раздела путем добавления тока кратковременной стимуляции. Показано, что при наличии такой добавки, случайный шум небольшой амплитуды не препятствует управляемому переходу из режима ожидания в режим возбуждения; шум средней величины конкурирует с управлением и может как допустить переход, так и скомпенсировать управление, не допустив перехода; в случае шума большой амплитуды стимуляция, как правило, подавляется, и система ведет себя так же, как если бы управления не было.

Диссертационная работа И.А. Козика является законченным научным исследованием и содержит новые интересные результаты, научная достоверность которых не вызывает сомнения. Все результаты работы аккуратно сформулированы и строго доказаны. Необходимо отметить систематичность полученных результатов: при написании работы И.А. Козик рассматривал смежные задачи и области, не фокусируясь на отдаленных проблемах и вопросах. Автореферат корректно отражает содержание диссертации. Работа основана на 4 научных работах И.А. Козика, опубликованных в рецензируемых научных изданиях и индексированных РИНЦ, Scopus и Web of Science. И.А. Козик неоднократно докладывал результаты диссертационного исследования на конференциях, а также научных семинарах Московского Государственного Университета.

Таким образом, в диссертационной работе И.А. Козика «Исследование и применение связи дискретного и непрерывного времени при моделировании траекторий гауссовских процессов с учетом высоких выбросов», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.4 – теория вероятностей и математическая статистика, решен ряд важных и трудных задач современной теории вероятностей. Считаю, что работа удовлетворяет всем требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова» и рекомендуется к защите в диссертационном совете МГУ.011.3(01.07).

Научный руководитель
главный научный сотрудник кафедры теории вероятностей, заведующий Лабораторией теории вероятностей
Механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова
(119991 Москва, Ленинские горы 1, МГУ, Главное здание,
механико-математический факультет, тел. +74959391423, факс +74959392090,
сайт: https://www.math.msu.ru/)
доктор доктор физико-математических наук, профессор
(тел.: +74959391403, E-mail: vladimirilich.piterbarg@gmail.com)

В.И. Питербарг

«22» марта 2024

Подпись профессора В.И. Питербарга удостоверяю.
Декан механико-математического факультета
МГУ имени М.В. Ломоносова
член-корр. РАН, доктор физико-математических наук, профессор

А.И. Шафаревич

«22» марта 2024