

4

**Заключение диссертационного совета МГУ.011.3
по диссертации на соискание ученой степени доктора наук
Решение диссертационного совета от 13 сентября 2024 г. № 14
о присуждении Булинской Екатерине Владимировне, гражданке РФ,
ученой степени доктора физико-математических наук**

Диссертация «Вероятностно-геометрические свойства пространственного ветвящегося случайного блуждания» по специальности 1.1.4 – «теория вероятностей и математическая статистика» принята к защите диссертационным советом 21.06.2024, протокол № 12.

Соискатель **Булинская Екатерина Владимировна**, 1986 года рождения, в 2009 г. с отличием окончила механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова. С 2009 по 2012 обучалась в аспирантуре по кафедре теории вероятностей (научный руководитель – профессор Е.Б. Яровая). В 2012 году защитила диссертацию «Ветвящиеся процессы Беллмана–Харриса и их применения к ветвящимся случайным блужданиям» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в диссертационном совете Д 501.001.85 при МГУ. Диссертационный совет единогласно признал выдающимся исследованием диссертацию Е.Вл. Булинской, решение было подтверждено ВАК РФ. Соискатель работает доцентом кафедры математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

В 2022 году за цикл работ, составивших основу докторской диссертации, Е.Вл. Булинская стала победителем Первого Всероссийского конкурса молодых математиков России в номинации «Молодые ученые до 35 лет».

Диссертация выполнена на кафедре математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета ФГБОУ ВО «МГУ имени М.В. Ломоносова».

Официальные оппоненты:

- **Лифшиц Михаил Анатольевич** — доктор физико-математических наук, профессор, профессор факультета математики и компьютерных наук Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет»
- **Смородина Наталия Васильевна** — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории прикладных вероятностных и алгоритмических методов Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Санкт-

Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова Российской академии наук»

- **Топчий Валентин Алексеевич** — доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории комбинаторных и вычислительных методов алгебры и логики Омского филиала Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук».

Оппоненты дали положительные отзывы на диссертацию. Выбор официальных оппонентов обосновывался компетентностью в соответствующей отрасли науки, наличием публикаций в соответствующей сфере исследований.

Соискатель имеет всего 22 опубликованные работы, в том числе 15 работ по теме диссертации, из них 15 статей опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности и отрасли наук.

[1] Булинская Е. Вл. Докритическое каталитическое ветвящееся случайное блуждание с конечной или бесконечной дисперсией числа потомков // Труды МИАН. — 2013. — Т. 282. — С. 69–79.

WoS JIF – 0.5/ 0.67 п.л.

[2] Bulinskaya E. Vl. Finiteness of hitting times under taboo // Statistics and Probability Letters. — 2014. — Vol. 85, no. 1. — Pp. 15–19.

WoS JIF – 0.8/ 0.42 п.л.

[3] Булинская Е. Вл. Полная классификация каталитических ветвящихся процессов // Теория вероятностей и ее применения. — 2014. — Т. 59, № 4. — С. 639–666.

WoS JIF – 0.6/ 1.64 п.л.

[4] Булинская Е. Вл. Сильная и слабая сходимость размера популяции в надкритическом каталитическом ветвящемся процессе // Доклады РАН. — 2015. — Т. 465, № 4. — С. 398–402.

WoS JIF – 0.6/ 0.497 п.л.

[5] Bulinskaya E. Vl. Spread of a catalytic branching random walk on a multidimensional lattice // Stochastics Processes and their Applications. — 2018. — Vol. 128, no. 7. — Pp. 2325–2340.

WoS JIF – 1.4/ 1.16 п.л.

6

[6] Булинская Е. Вл. Флуктуации фронта распространения каталитического ветвящегося блуждания // Теория вероятностей и ее применения. — 2019. — Т. 64, № 4. — С. 642–670.

WoS JIF – 0.6/ 1.39 п.л.

[7] Булинская Е. Вл. Максимум каталитического ветвящегося случайного блуждания // Успехи математических наук. — 2019. — Т. 74, № 3. — С. 187–188.

WoS JIF – 0.9/ 0.17 п.л.

[8] Bulinskaya E. Vl. Multidimensional catalytic branching random walk with regularly varying tails // Proceedings of the 2nd International Conference in Mathematics and Statistics, Prague, Czech Republic, July 8-10, 2019. — ACM International Conference Proceeding Series. — New York: ACM, 2019. — Pp. 6–13.

SCOPUS SJR – 0.25/ 0.87 п.л.

[9] Bulinskaya E. Vl. Isotropic multidimensional catalytic branching random walk with regularly varying tails // Компьютерные исследования и моделирование. — 2019. — Т. 11, № 6. — С. 1033–1039.

SCOPUS SJR – 0.22/ 0.56 п.л.

[10] Bulinskaya E. Vl. On the maximal displacement of catalytic branching random walk // Сибирские электронные математические известия. — 2020. — Т. 17. — С. 1088–1099.

SCOPUS SJR – 0.416/ 0.79 п.л.

[11] Bulinskaya E. Vl. Maximum of catalytic branching random walk with regularly varying tails // Journal of Theoretical Probability. — 2021. — Vol. 34, no. 1. — Pp. 141–161.

WoS JIF – 0.8/ 1.14 п.л.

[12] Bulinskaya E. Vl. Catalytic branching random walk with semiexponential increments // Mathematical Population Studies. — 2021. — Vol. 28, no. 3. — Pp. 123–153.

WoS JIF – 1.8/ 1.54 п.л.

[13] Булинская Е. Вл. Время первого достижения высокого уровня каталитическим ветвящимся блужданием // Труды МИАН. — 2022. — Т. 316. — С. 105–112.

WoS JIF – 0.5/ 0.53 п.л.

[14] Булинская Е. Вл. Распространение фронта ветвящегося случайного блуждания с периодическими источниками ветвления // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика. — 2024. — № 1. — С. 31–40.

WoS JIF – 0.4/ 0.78 п.л.

[15] Булинская Е. Вл. Распространение ветвящегося случайного блуждания на периодических графах // Труды МИАН. — 2024. — Т. 324. — С. 73–82.

WoS JIF – 0.5/ 0.77 п.л.

На диссертацию и автореферат дополнительных отзывов не поступало.

Диссертационный совет отмечает, что представленная диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук является научно-квалификационной работой высокого уровня, в которой на основании выполненных автором исследований получены важные результаты.

Диссертация посвящена исследованию ветвящихся случайных блужданий (ВСБ). Процессы такого рода позволяют одновременно учитывать два механизма случайности. Один связан со случайными перемещениями частиц в пространстве, а другой позволяет описывать (случайные) процессы размножения и гибели частиц. Таким образом, ВСБ может рассматриваться как обобщение и случайного блуждания, и ветвящегося процесса – классических объектов теории вероятностей. Особых методов изучения (разработанных в диссертации) требуют модели ВСБ, в которых среди всех точек пространства имеется конечное или счетное множество катализаторов, т.е. источников размножения и гибели частиц. Такие модели называются каталитическими ветвящимися случайными блужданиями (КВСБ). Наличие даже единственного катализатора уже вызывает существенные сложности, а в диссертации рассматривается КВСБ по любой d -мерной решетке с произвольным конечным или периодическим счетным множеством катализаторов. Некоторые результаты автора справедливы, даже если перемещением частиц управляет марковская цепь с произвольным конечным или счетным пространством состояний (не обладающим структурой решетки). Соответствующая модель носит название каталитического ветвящегося процесса (КВП). Главное внимание в диссертации уделяется различным вероятностно-геометрическим аспектам эволюции в пространстве и времени популяции частиц. Е.Вл. Булинской получен ряд неулучшаемых результатов, многие из которых носят приоритетный характер. К ним относится описание предельной формы фронта распространения надлежащим образом нормированного облака

частиц. При этом обнаружены новые эффекты, связанные с тяжестью распределения скачков перемещающихся частиц.

В первой главе для КВП решена глобальная проблема их полной классификации. Она произведена на основе перронова корня определенной матрицы, предложенной автором диссертации (что является далеко идущим обобщением известной классификации ветвящихся процессов Бьенеме–Гальтона–Ватсона). Для этого Е.Вл.Булинской привлечен и развит мощный аппарат табу-вероятностей, а также сложная техника построения вспомогательных процессов Беллмана–Харриса с большим числом частиц разных типов. Установленные в диссертации предельные теоремы для общих и локальных численностей частиц подтверждают естественность введения классов докритических, критических и надкритических процессов. Получено уравнение, определяющее мальтусовский параметр, задающий скорость роста в надкритическом случае. Найдены вероятности локального и глобального вырождения популяции. Доказаны новые предельные теоремы о сходимости (с ростом времени) почти наверное и по вероятности для преобразованных векторов, составленных из общих и локальных численностей частиц в произвольных точках пространства, к явно указанному случайному вектору. Искусное сочетание разнообразной техники (в том числе анализ системы нелинейных интегральных уравнений и применение многомерной теории восстановления) позволило получить неулучшаемые результаты. Они представляют не только самостоятельный интерес, но также применяются в следующих главах.

Во второй главе изучена эволюция в пространстве и времени должным образом нормированного случайного облака частиц, т.е. решается чрезвычайно сложная задача. Е.Вл. Булинской впервые предложен общий подход к разделению пространства на области, асимптотически содержащие и не содержащие частицы изучаемого процесса. При этом рассмотрены вероятностно-геометрические аспекты формирования фронта распространения нормированного случайного облака частиц КВСБ на многомерной целочисленной решетке. Получено полное описание нормирующих функций для положений частиц случайного облака, обеспечивающих существование нетривиальной предельной формы фронта, а также дано описание этих предельных форм. Автор диссертации показано, что как скорость распространения популяции, так и предельная форма фронта существенным образом зависят от «тяжести» хвостов распределения скачков блуждания. Установлено, что в зависимости от характеристик случайного блуждания частиц асимптотическое разделение пространства на зону, содержащую частицы, и зону, свободную от них, может происходить как в смысле сильной, так и слабой сходимости. Исследованы случаи легких,

9

умеренно тяжёлых и тяжёлых хвостов распределения шага случайного блуждания по решетке произвольной размерности, т.е. дана полная картина. В диссертации доказано, что предельной формой фронта является нетривиальная поверхность, причём она оказывается детерминированной в случае легких и умеренно тяжелых хвостов, но случайной, когда хвосты являются тяжёлыми. Кроме того, предложен новый оригинальный подход, позволяющий измерять «амплитуду» флуктуаций положений облака частиц относительно масштабированной предельной поверхности. Полученные окончательные результаты обнаруживают новые неожиданные эффекты, существенно обобщают ряд предшествующих работ и носят приоритетный характер. При доказательствах важную роль, помимо многомерной теории восстановления, играет сочетание весьма разнообразной техники, включающей теорию больших уклонений, мартингальную замену меры и метод каплинга. К достоинствам работы относятся также примеры визуализации предельной формы фронта распространения популяции.

Третья глава посвящена решению разнообразных задач, относящихся к исследованию ВСБ по Z^d , когда множество катализаторов конечно или бесконечно и периодически. Одна из них была поставлена академиком РАН А.Н. Ширяевым: когда впервые популяция выйдет за пределы определенного множества? Ответ для блуждания по Z дает доказанная предельная теорема (в смысле сходимости почти наверное) для времени первого достижения частицами высокого уровня, растущего линейно по времени. Для критического и докритического ВСБ по одномерной решетке впервые получены результаты о максимуме популяции за всю историю существования этих вырождающихся процессов. Е.Вл. Булинская завершает исследование в докритическом случае общих и локальных численностей для КВСБ по Z^d с одним катализатором. Ею установлены новые условные предельные теоремы. При этом удалось отказаться от конечности дисперсии рассматриваемых величин. Для моделей с бесконечным числом периодически расположенных источников ветвления дано описание поведения фронта распространения популяции, когда распределения скачков блуждания удовлетворяют условию Крамера. Отметим, что для периодически расположенных источников ветвления получены результаты в важном случае, когда интенсивности катализаторов могут быть различными. Заслуживает внимания красивый результат автора, показывающий, что предельная форма множества, занимаемого частицами, в рассматриваемой модели является компактной и выпуклой, причём облако частиц приближается к этой предельной форме в метрике Хаусдорфа. Приводится ряд интересных иллюстрирующих примеров.

10

Для решения исследуемых сложных задач, решаемых в диссертации, потребовалось сочетание ряда вероятностных и аналитических методов. Помимо методов, упомянутых ранее, следует также отметить преобразования Лапласа и Лежандра–Фенхеля, выпуклый анализ и представление комплекснозначных мер в терминах банаховых алгебр, тауберовы теоремы и теоремы о связи между дробными моментами случайных величин и дробными производными их преобразований Лапласа.

Диссертация носит теоретический характер и является целостным законченным трудом очень высокого научного уровня. В ней решены актуальные сложные задачи современной теории ветвящихся случайных блужданий, разработаны новые методы, позволяющие описать предельную форму фронта распространения случайного облака частиц КВСБ. Совокупность разработанных теоретических положений, несомненно, является крупным научным достижением. Полученные результаты могут быть использованы широким кругом специалистов в области теории случайных процессов, работающих в МГУ им. М.В. Ломоносова, Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, ПОМИ РАН, Институте математики им. С.Л. Соболева и в других научных центрах.

Диссертация представляет собой самостоятельное законченное исследование, обладающее внутренним единством. Положения, выносимые на защиту, содержат новые научные результаты и свидетельствуют о большом личном вкладе автора в науку:

1. Проведена полная классификация КВП с произвольным конечным числом катализаторов, которая соответствует выполненному автором моментному анализу общих и локальных численностей частиц.
2. Доказаны предельные теоремы в сильной и слабой формах для нормированных общих и локальных численностей частиц в КВП с произвольным конечным числом катализаторов.
3. Найдены функции, нормирующие положения частиц в надкритическом КВСБ, для существования нетривиальной предельной формы фронта распространения популяции. Установлен детерминированный предел в смысле сходимости почти наверное для легких и умеренно тяжелых хвостов распределения скачка блуждания, а в случае тяжелых хвостов получен случайный предел в смысле слабой сходимости.
4. Выявлен характер флуктуаций нормированного семейства частиц в окрестности предельной формы фронта.

5. Разработаны методы вычислений вероятностей конечности времен достижения с запретами для марковских цепей с произвольным пространством состояний.

6. В случае надкритического КВСБ по целочисленной прямой доказана предельная теорема для момента первого достижения популяцией высокого уровня, а при исследовании критического и докритического КВСБ установлены предельные теоремы для максимума положений всех частиц, когда-либо существовавших в рамках изучаемого процесса.

7. Для докритического КВСБ с одним катализатором получено полное описание предельного поведения локальных численностей частиц, при условии их невырождения, в предположениях о конечной или бесконечной дисперсии числа потомков одной частицы.

8. Для надкритического ВСБ с бесконечным периодическим множеством катализаторов доказаны предельные теоремы о расстоянии Хаусдорфа между случайным нормированным облаком частиц и предельным детерминированным множеством в R^d отдельно в случаях одинаковых и различных характеристик катализаторов.

На заседании 13.09.2024 диссертационный совет принял решение присудить Булинской Е.Вл. ученую степень доктора физико-математических наук.

При проведении тайного голосования диссертационный совет в количестве 21 человек, из них 11 докторов наук по специальности 1.1.4 – теория вероятностей и математическая статистика, участвовавших в заседании, из 24 человек, входящих в состав совета, проголосовали: за 21, против 0, недействительных бюллетеней 0.

Заместитель председателя
диссертационного совета МГУ.011.3,
доктор физико-математических наук, доцент

Ломов И.С.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.3,
доктор физико-математических наук

Шерстюков В.Б.

13 сентября 2024 года

