

Отзыв
официального оппонента на диссертацию
Харчевой Ирины Сергеевны
«Бильярдные книжки как способ реализации особенностей
интегрируемых систем»,
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
1.1.3 – геометрия и топология

Диссертация Харчевой Ирины Сергеевны посвящена исследованию вопроса о реализации грубых молекул теории Фоменко-Цишанга бильярдными книжками. Конструкция бильярдных книжек была введена В.В. Ведюшкиной (Фокичевой) относительно недавно, и основана на склейке по общим границам двумерных плоских бильярдных. Преимуществом такой конструкции является ее изящность и простота, поскольку бильярдная книжка построена из областей, ограниченных софокусными квадратами, при этом она определяет широкий класс интегрируемых систем. В связи с этим интересным является вопрос об исследовании эквивалентности построенных таким образом систем другим известным интегрируемым системам.

Ответить на вопрос о грубой лиувиллевой эквивалентности (существовании гомеоморфизма между базами слоений Лиувилля, который локально поднимается до послойного гомеоморфизма слоений Лиувилля) интегрируемых систем позволяет теория, разработанная А.Т. Фоменко и связанная с изучением инвариантов Фоменко-Цишанга. Гамильтоновой системе ставится в соответствие молекула (граф), которая позволяет описать структуру слоения изоэнергетической поверхности на торы Лиувилля и особые слои. Вершины этого графа соответствуют особым слоям. В зависимости от типа перестройки лиувиллевых торов вершине ставится в соответствие некоторый атом, что и определяет грубую молекулу. Две интегрируемые гамильтоновы системы грубо лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их грубые молекулы совпадают.

В своей диссертационной работе И.С. Харчевой было доказано, что бильярдными книжками можно моделировать любой атом (т.е. любую невырожденную бифуркацию двумерных торов), а также любую грубую молекулу (т.е. базу любого слоения Лиувилля с невырожденными особенностями). Это важный теоретический результат, носящий глобальный характер, который также интересен с точки зрения приложений и конструктивного описания интегрируемых систем. Отметим, что для доказательства диссертантом был разработан аппарат, позволяющий описывать бильярды в терминах перестановок. При этом само доказательство дано в виде алгоритма, что удобно как с точки зрения восприятия материала, так и для конструктивной реализации конкретных атомов и молекул в виде бильярдных книжек. При этом алгоритм проиллюстрирован большим количеством рисунков и описан для конкретных примеров.

Помимо основного результата, касающегося реализации атомов и грубых молекул бильярдными книжками, И.С. Харчевой получены вспомогательные результаты, которые также представляют самостоятельный интерес. Опишем структуру диссертации и подчеркнем основные положения, доказанные автором.

Диссертация полным объемом в 124 страницы состоит из Введения, 6 глав, Заключения и списка литературы, включающего 53 наименования. Из них 5 наименований –

это статьи автора по теме диссертации в рецензируемых научных журналах, 16 наименований – тезисы докладов автора по теме диссертации.

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, связанной как с тематикой математических бильярдов (которая исследовалась в работах В.В. Козлова, Д.В. Трещева, В. Драговича, М. Раднович и др.), так и с теорией интегрируемых систем и топологических инвариантов (развиваемой в работах А.Т. Фоменко, А.В. Болсинова, А.А. Ошемкова и др.). Во введении также сформулированы цели и задачи диссертационной работы, перечислены основные результаты и положения, выносимые на защиту.

В **первой главе** даны необходимые сведения из теории математических бильярдов, а также приведено понятие бильярдной книжки. Отдельный раздел первой главы посвящен описанию построения особых траекторий. В первой главе также доказана лемма о коммутирующих перестановках, которая является критерием задания корректной динамики на бильярдных книжках. Этот результат был получен диссертантом и является новым.

Вторая глава посвящена обзору результатов, касающихся теории топологической классификации интегрируемых систем. В этой главе приведены определения атома и грубой молекулы, описана их связь с грубой Лиувиллевой эквивалентностью интегрируемых систем. Описана конструкция атомов без звездочек и со звездочками, а также даны сведения из теории представления атомов f -графами. Отметим, что описание конструкции удачно дополнено и проиллюстрировано примерами.

В **третьей главе** описано фазовое пространство произвольной бильярдной книжки. Основная сложность в определении фазового пространства связана с окрестностью границы, по которой склеиваются листы книжки. Введение фазового пространства позволяет определить два независимых интеграла и изоэнергетическое многообразие. Основным результатом, приведенным в данной главе, является теорема о том, что для бильярдных книжек изоэнергетическое множество является трехмерным кусочно-гладким топологическим многообразием. Основная часть доказательства этой теоремы посвящена исследованию окрестности границы для различных случаев отражения траектории материальной точки. Результаты этой теоремы являются новыми и приводятся диссертантом в качестве положения, выносимого на защиту. Последний раздел третьей главы посвящен обобщению теории инвариантов Фоменко-Цишанга на случай бильярдных книжек.

В **четвертой главе** рассматриваются бильярдные книжки класса **a** и класса **b**. Как доказано в последующих главах, этих двух классов достаточно для моделирования произвольной грубой молекулы.

Для таких бильярдных книжек введено понятие перестановки на квадрике, которое оказывается удобным аппаратом для доказательства различных фактов о бильярдных книжках описанных классов. В частности, в терминах перестановок на квадриках переформулирована лемма о коммутирующих перестановках.

Описан алгоритм построения бильярдной книжки по семейству перестановок на квадриках и доказано, что при некоторых дополнительных (легко проверяемых) условиях бильярдная книжка, соответствующая фиксированному набору перестановок, единственна.

Сформулирован и доказан кусочно-гладкий аналог теоремы Лиувилля для бильярдных книжек указанных классов. Описано соответствие между торами и независимыми циклами в разложении композиции перестановок. Эти результаты также являются новыми.

Пятая глава посвящена доказательству одного из основных результатов диссертации – возможности реализации трехмерных бифуркаций (т.е. произвольных 3-атомов)

бильярдными книжками. Отметим, что доказательство приведено в качестве алгоритма построения бильярдных книжек в терминах перестановок на квадраках, что упрощает его восприятие. Также оно проиллюстрировано примерами реализации атомов B и D_2 , а также атома со звездочкой A^* (Отметим, что алгоритмы для атомов со звездочками и без отличаются).

В последнем разделе главы алгоритм переформулирован в терминах f -графов.

В **шестой главе** доказана возможность реализации баз слоений Лиувилля (грубых молекул) бильярдными книжками. В этом случае доказательство так же, как и в предыдущей главе, сформулировано в виде алгоритмов. Помимо вспомогательных алгоритмов, приведен алгоритм склейки двух произвольных 3-атомов по выбранному ребру, а также алгоритм реализации произвольной грубой молекулы, проиллюстрированный схемой. В последующих разделах приведены примеры реализации конкретных грубых молекул.

В **заключении** подводятся итоги работы и обсуждаются возможные направления развития описанной деятельности. Отмечается, что открытым остается вопрос о реализации меченых молекул – более тонкого инварианта, позволяющего ответить на вопрос о лиувиллевой эквивалентности интегрируемых систем.

Таким образом, диссертантом получены следующие результаты

- Доказано утверждение о том, что в случае бильярдных книжек изоэнергетическая поверхность является кусочно-гладким топологическим многообразием;
- Описана конструкция построения бильярдных книжек по конечному числу перестановок квадрак;
- Доказан кусочно-гладкий аналог теоремы Лиувилля для бильярдных книжек класса \mathbf{b} ;
- Доказана возможность реализации произвольного 3-атома с помощью бильярдных книжек. Приведен алгоритм реализации;
- Доказана возможность реализации произвольной грубой молекулы с помощью бильярдных книжек. Приведен алгоритм реализации.

Результаты диссертационного исследования И.С. Харчевой являются новыми, получены автором самостоятельно и изложены в статьях диссертанта, опубликованных в ведущих научных журналах. Также результаты прошли апробацию на международных конференциях и научных семинарах.

Проделанная И.С. Харчевой работа технически сложная, требует высокого уровня осведомленности в различных областях современной математики, таких как топология, симплектическая геометрия, теория интегрируемых систем. Результаты диссертации обоснованы, изложенные доказательства математически строгие.

В своей работе И.С. Харчева расширила теорию топологических инвариантов на случай бильярдных книжек и описала конструкцию реализации грубых молекул. Полученные результаты носят глобальный теоретический характер, а также удачно проиллюстрированы примерами. Они могут быть интересны специалистам в области интегрируемых систем и математических бильярдов, при этом результаты сформулированы в виде алгоритмов, что способствует их практическому применению.

В качестве замечаний можно отметить:

1. при формулировке некоторых утверждений нет ссылок на литературные источники и не указывается авторство диссертанта, что приводит к путанице;

2. не совсем четко сформулирована лемма 4.2. Упоминается, что множества не пересекаются, а затем сказано, что N_0 принадлежит их объединению. Судя по всему, множество N_0 нужно было выделить в отдельную категорию. В строгой формулировке лемма верна;

3. наличие опечаток, например, на стр. 15 вместо фразы "лемме о коммутирующих перестановок" должно быть "лемме о коммутирующих перестановках" или на стр. 74 должна быть запятая после фразы "ограниченное на гиперболу" , а на стр. 78 вместо повторной ссылки на леммы 5.5 и 5.7 должна быть ссылка на алгоритмы 1 и 2.

Отметим, что приведенные замечания носят редакционный характер, никоим образом не влияют на высокую оценку работы И.С. Харчевой и не снижают ее научную значимость.

Таким образом, считаю, что диссертационная работа «Биллиардные книжки как способ реализации особенностей интегрируемых систем» соответствует критериям, определенным пп. 2.1 – 2.5 «Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова», и оформлена согласно приложениям 5, 6 «Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова». Содержание работы соответствует специальности 1.1.3 – геометрия и топология. По моему мнению автор диссертации, Харчева Ирина Сергеевна, заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 – геометрия и топология.

Официальный оппонент,
кандидат физико-математических наук,
научный сотрудник
лаборатории механики природных катастроф
ФГБУН «Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского
Российской академии наук»
119526, Россия, г. Москва, проспект Вернадского, д. 101, корп. 1
e-mail: annatsvetkova25@gmail.com
Телефон: 8-495-433-75-44

5 мая 2023 года

А.В. Цветкова

Подпись А.В. Цветковой заверяю
Ученый секретарь ИПМех РАН



М.А. Котов