ОТЗЫВ
официального оппонента о диссертации
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук
Алмохамеда Муатаза
на тему: «Обратные задачи для эволюционных
дифференциальных уравнений второго и высших порядков»
по специальности 1.1.2. «Дифференциальные уравнения и
математическая физика»

Актуальность темы.

Диссертация М. Алмохамеда посвящена изучению вопросов единственности решений обратных задач для эволюционных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. Актуальность темы обусловлена тем, что исследование абстрактных дифференциальных уравнений дает возможность выявить самые основные свойства как самих операторов, так и решений операторных уравнений, которые позволяют эффективно исследовать уже более конкретные задачи в приложениях к математической физике. То есть позволяют посмотреть на проблемы, так сказать, «сверху», выявить самые общие закономерности.

Важность же изучения обратных задач связана с тем, что такие задачи возникают на практике. В частности, обратные задачи, исследуемые в диссертации, относятся к задачам «определения источника», когда неизвестные заранее внешние воздействия восстанавливаются при помощи дополнительных условий «наблюдения за процессом». Такие задачи можно также интерпретировать как задачи управления: требуется найти управление, переводящее эволюционный процесс из начального состояния в определенное конечное состояние.

Более конкретно, в диссертации установлены критерии единственности решения следующих обратных задач.

Обратная задача 1. (ОЗ1).

В комплексном банаховом пространстве E рассматривается уравнение второго порядка

$$u''(t) = Au(t) + g,\ 0 < t < T, \tag{1}$$

с начальными данными Коши

$$u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1 \tag{2}$$

и с дополнительным условием финального переопределения

$$\alpha u(T) + \beta u'(T) = u_2. \tag{3}$$

Здесь неизвестными являются функция $u(t) : [0, T] \to E$ и элемент $g \in E$, элементы u_0, u_1, u_2 – известные элементы из E, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha| + |\beta| > 0$.

Оператор A предполагается линейным и замкнутым оператором с областью определения $D(A) \subset E$, которая не обязательно плотна в E. Никаких иных дополнительных условий (типа монотонности, самосопряженности и пр.) не предполагается.

Обратная задача 2. (ОЗ2).

В комплексном банаховом пространстве E рассматривается уравнение произвольного порядка n

$$u^{(n)}(t) = Au(t) + g,\ 0 < t < T,\ n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

с начальными данными Коши

$$u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1, \ldots u^{(n-1)}(0) = u_{n-1} \tag{5}$$

и с дополнительным условием финального переопределения

$$u^{(q)}(T) = u_n, \quad \text{где} \quad q \quad \text{одно из чисел} \quad 0, 1, \ldots, n-1. \tag{6}$$

Здесь также функция $u(t) : [0, T] \to E$ и элемент $g \in E$ являются неизвестными, а оператор A обладает теми же свойствами, что и в ОЗ1.

Дополнительное условие (3) в ОЗ1 является условием третьего рода. В частном случае $\beta = 0$ такая обратная задача была исследована в работах научного руководителя диссертанта И.В.Тихонова и Ю.С.Эйдельмана, где ими был установлен критерий единственности решения этой задачи. Поэтому вполне естественной и актуальной является задача обобщить такие результаты на случай финального переопределения третьего рода и на случай уравнений высших порядков. Такая задача и стала предметом исследований диссертанта.

Краткая характеристика основного содержания работы и новизна полученных результатов.

Диссертационное исследование, изложенное на 127 страницах, состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 115 наименований.

Диссертант в *главе 1* подробно исследовал частный случай $\alpha = 0$ в ОЗ1 (тогда условие (3) приобретает вид $u'(T) = u_2$), где им установлен очень простой и удобный для проверки критерий единственности такой обратной задачи.

Именно, чтобы ОЗ1 (с $\alpha = 0, \beta = 1$) имела не более одного решения необходимо и достаточно, чтобы ни одно из чисел $\lambda_k = -k^2\pi^2/T^2, k \in \mathbb{N}$, не являлось бы собственным значением оператора A.

Важно, что при этом на оператор A не накладывается никаких дополнительных ограничений, кроме линейности и замкнутости. Ранее при исследовании единственности решения от оператора A требовалось выполнение тех или иных дополнительных условий. Например, в работах Д.Г.Орловского это были условия самосопряженности или позитивности оператора.

Далее в главе 1 проиллюстрировано применение указанного критерия для ряда модельных задач для уравнений с частными производными. Формально эти примеры ранее специально не рассматривались.

В *главе 2* установлен критерий единственности решения ОЗ1 в случае общего условия переопределения (3) $(\alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha| + |\beta| > 0)$. Именно, вводится характеристическая функция

$$L(\lambda) = \alpha \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}T - 1}{\lambda} + \beta \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}T}{\sqrt{\lambda}} \equiv \alpha L_1(\lambda) + \beta L_2(\lambda) \qquad (7)$$

и устанавливается следующий критерий единственности.

Для того, чтобы ОЗ1 имела не более одного решения необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль характеристической функции $L(\lambda)$ не являлся бы собственным значением оператора A.

Отметим, что ранее единственность решения ОЗ1 была установлена только если $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, а оператор A является самосопряженным и позитивным.

Далее в главе 2 автор изучает распределение и свойства нулей характеристической функции (7). На основании этого исследования установлены простые и наглядные достаточные условия единственности или неединственности решения ОЗ1. Например, доказываются такие утверждения.

Утверждение 1. Пусть у оператора A нет вещественных собственных значений. Тогда при любом выборе параметров $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и при любом $T > 0$ однородная обратная задача 1 имеет только тривиальное решение.

Утверждение 2. Пусть у оператора A нет отрицательных вещественных собственных значений. Тогда $\forall\ \alpha, \beta > 0,\ T > 0$ однородная обратная задача 1 имеет только тривиальное решение.

Утверждение 3. Предположим. что одно из чисел $\lambda_k = -k^2\pi^2/T^2$ является собственным значением оператора A. Тогда однородная обратная задача 1 при любом выборе параметров $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ имеет нетривиальное решение $u(t) = \frac{T^2}{4k^2\pi^2}(1 - \cos\frac{2k\pi t}{T})f_k,\ \ g = f_k$, где $f_k \neq 0, f_k \in D(A), Af_k = -\frac{4k^2\pi^2}{T^2} f_k$.

Еще один параграф главы 2 посвящен исследованию вопросов существования кратных нулей характеристической функции $L(\lambda)$ в (7) и, как следствие, существования так называемых присоединенных решений однородной ОЗ1. Это совершенно новые результаты. При этом приведены конкретные примеры обратных задач для уравнений с частными производными, где реализуются присоединенные решения.

Заметим, что при $\alpha = 0$ доказанный в главе 2 критерий единственности для переопределения третьего рода совпадает с критерием единственности для переопределения второго рода, доказанным в главе 1, а при $\beta = 0$ – совпадает с критерием единственности для переопределения первого рода, полученным в работах И.В.Тихонова и Ю.С.Эйдельмана. Таким образом, можно констатировать, что автором в диссертации полностью решена задача о единственности решения обратной задачи определения неизвестной правой части для уравнения второго порядка с любым линейным оператором, удовлетворяющим только лишь условию замкнутости и с любым вариантом финального переопределения.

В *главе 3* диссертант доказывает общий критерий единственности для ОЗ2 с любыми параметрами $n \in \mathbb{N}$ и $q \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Случаи $n = 1, q = 0$ и $n = 2, q = 0$ ранее были изучены И.В.Тихоновым и Ю.С.Эйдельманом, а случай $n = 2, q = 1$ рассмотрен в главе 1 диссертации. При этом установленные в этих случаях критерии единственности укладываются в доказанные в главе 3 общий критерий, как частные случаи (с более простой и удобной для проверки формулировкой).

Кроме того, отдельно рассмотрен случай обратной задачи

$$\frac{d^4u(t)}{dt^4} = Au(t) + g,\ 0 < t < T, \tag{8}$$

$$u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1, u''(0) = u_2, u'''(0) = u_3, \tag{9}$$

$$u''(T) = u_4, \tag{10}$$

и показано, что общий критерий для этого случая имеет особенно простой вид.

Именно, для того, чтобы обратная задача (8)–(10) имела не более одного решения необходимо и достаточно, чтобы ни одно из чисел $\lambda_k = -4k^4\pi^4/T^4, k \in \mathbb{N}$, не являлось бы собственным значением оператора A.

При нарушении этого условия получены в явной форме элементарные решения соответствующей однородной обратной задачи.

Таким образом, опять можно констатировать, что и вопрос о единственности решения ОЗ2 автором диссертации закрыт.

Также в главе 3 приводятся примеры конкретных обратных задач для уравнений с частными производными, на которых иллюстрируется применение доказанного общего критерия единственности.

Замечания по диссертации.

1. Следовало бы более четко указать, что результаты главы 2 включают в себя как частные случаи ранее полученные результаты для случаев финального переопределения первого и второго рода. Некоторые комментарии по этому даются на стр. 39 и 40, но их формулировка содержит ошибки в грамматическом построении фраз, что затрудняет их чтение и понимание смысла.

2. В главах 1 и 2 приведены 2 варианта эквивалентных формулировок критерия единственности: для общего вида задачи и для ее однородного варианта. Но порядок следования формулировок разный: если в главе 1 сначала дается формулировка для однородной задачи, а затем для общей, то в главе 2 в обратном порядке, что несколько странно и при чтении вызывает дополнительные вопросы, почему и для чего так сделано.

3. В качестве пожелания хотелось бы предложить автору в дальнейшем рассмотреть вопросы существования решений исследуемых обратных задач.

Отмечу, что указанные замечания никак не умаляют достоинств работы и носят, скорее, редакционный характер.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Подводя итог, можно сказать, что автором решена задача о единственности решений обратных задач определения правой части для абстрактных уравнений второго порядка с финальным переопределением третьего рода, включая в себя переопределения 1-го и 2-го рода как частные случаи, а также обратных задач определения правой части для абстрактного уравнения высокого порядка.

Установлены критерии единственности и получены более простые с точки зрения проверки достаточные условия единственности.

Также построены важные для приложений присоединенные решения линейной однородной обратной задачи для уравнения второго порядка в тех случаях, когда соответствующая характеристическая функция имеет кратные нули.

Обоснованность и достоверность научных положений и выводов.

Все положения диссертации четко сформулированы, снабжены полными и подробными доказательствами с четким прослеживанием и объяснением логических цепочек рассуждений.

По результатам диссертации опубликовано 20 работ, в том числе 3 статьи в научных изданиях, рекомендованных Ученым Советом МГУ и входящих в системы цитирования Scopus, Web of Science и RSCI.

Результаты диссертации могут быть использованы в научных исследованиях, проводимых в Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова, Институте математики СО РАН им. С.Л.Соболева, Новосибирском государственном университете, Национальном исследовательском ядерном университете «МИФИ».

Диссертационная работа соответствует специальности 1.1.2. «Дифференциальные уравнения и математическая физика», а именно следующим ее направлениям:

– начальные, краевые и смешанные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений;

– спектральные задачи для дифференциальных операторов;

– теория дифференциально-операторных уравнений;

– теория функционально-дифференциальных уравнений и нелокальных краевых задач.

Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

Диссертация Алмохамеда Муатаза отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М. В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.2. – «Дифференциальные уравнения и математическая физика» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1–2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. Таким образом, соискатель Алмохамед Муатаз заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2 – «Дифференциальные уравнения и математическая физика».

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,

профессор кафедры высшей математики Института общей профессиональной подготовки Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,

Камынин Виталий Леонидович

12.12.2023

Контактные данные:

тел. +7 916 614 47 81, e-mail: vlkamynin@mephi.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация: 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения».

Адрес организации: 115409, Москва, Каширское шоссе, 31, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Институт общей профессиональной подготовки, кафедра высшей математики

Тел. 495 788-56-99, e-mail: info@mephi.ru