

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

*На правах рукописи*



**Украинский Дмитрий Владимирович**

**Аналитические решения уравнений газовой динамики,  
механика пузырька в неньютоновских жидкостях  
и кумуляция энергии**

Специальность 1.1.9 — Механика жидкости, газа и плазмы

**ДИССЕРТАЦИЯ**  
на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук, профессор  
Голубятников Александр Николаевич

Москва — 2022

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> . . . . .	<b>4</b>
<b>ГЛАВА 1. О существовании аналитических периодических по времени решений уравнений газовой динамики</b> . . . . .	<b>18</b>
§ 1.1. Задача о периодических движениях газа при целом показателе адиабаты . . . . .	18
§ 1.2. Случай рационального показателя адиабаты . . . . .	25
§ 1.3. Основные результаты главы . . . . .	27
<b>ГЛАВА 2. Построение безударных решений задач одномерной газовой динамики в виде степенных рядов</b> . . . . .	<b>28</b>
§ 2.1. Преобразования времени и лагранжевой координаты . . . . .	28
§ 2.2. Задача о колебаниях самогравитирующего газового слоя . . . . .	30
§ 2.3. Задача о периодическом движении поршней . . . . .	32
§ 2.4. Задача о согласованном движении газа и одного из поршней за счет колебаний температуры на его поверхности . . . . .	40
§ 2.5. Построение решений в виде разложений по степеням лагранжевых координат . . . . .	53
§ 2.6. Задача о периодическом движении поршней в постоянном гравитационном поле . . . . .	58
§ 2.7. Форма Вебера и задача о сильном сжатии газа . . . . .	64
§ 2.8. Построение решений в виде разложений по степеням специальных функций от времени . . . . .	74
§ 2.9. Основные результаты главы . . . . .	79
<b>ГЛАВА 3. Преобразование полугодографа</b> . . . . .	<b>80</b>
§ 3.1. Различные виды преобразования полугодографа . . . . .	80
§ 3.2. Обобщение решения задачи об однородном разлете газа Ван-дер-Ваальса . . . . .	82
§ 4.3. Основные результаты главы . . . . .	84
<b>ГЛАВА 4. Трехволновой резонанс в стационарной сверхзвуковой задаче газовой динамики</b> . . . . .	<b>85</b>
§ 4.1. Постановка задачи, вывод уравнений и граничных условий . . . . .	85

§ 4.2. Решение амплитудно-фазовых уравнений . . . . .	89
§ 4.3. Пример течения . . . . .	93
§ 4.4. Основные результаты главы . . . . .	94
<b>ГЛАВА 5. Динамика сферического пузырька в несжимаемых вязких степенных жидкостях . . . . .</b>	<b>95</b>
§ 5.1. Постановка задачи . . . . .	95
§ 5.2. Задача о сжатии при сохранении кинетической энергии . . . . .	97
§ 5.3. Задача о сжатии с постоянной скоростью диссипации . . . . .	98
§ 5.4. Колебания и резонанс пузырька . . . . .	99
§ 5.5. Задача о сжатии пузырька скачком внешнего давления . . . . .	102
§ 5.6. Основные результаты главы . . . . .	109
<b>ГЛАВА 6. Точное решение об обжати полости в вязкой теплопроводной сжимаемой среде . . . . .</b>	<b>111</b>
§ 6.1. Постановка задачи . . . . .	111
§ 6.2. Разделение переменных . . . . .	113
§ 6.3. Сферическая симметрия . . . . .	115
§ 6.4. Реологические сжимаемые жидкости . . . . .	117
§ 6.5. Случай несферической симметрии . . . . .	119
§ 6.6. Основные результаты главы . . . . .	123
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .</b>	<b>125</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ . . . . .</b>	<b>127</b>
<b>СПИСОК ИЛЛЮСТРАТИВНОГО МАТЕРИАЛА . . . . .</b>	<b>139</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Построение точных решений нелинейных уравнений механики в виде степенных рядов можно назвать классическим подходом. Например, ряды Зундмана [1] позволяют разрешить задачу трех тел при ненулевом моменте импульса системы и отсутствии тройного столкновения. Указанные конструкции представляют собой разложения координат и времени по специальной параметрической переменной, вводимой для регуляризации правых частей уравнений движения, в которых остается возможность столкновения двух точечных масс. Вопросы регуляризации с учетом сохранения канонической формы уравнений изучались Леви-Чивитой [2].

В газовой динамике также применялись методы построения решений с помощью рядов. В книге Л. И. Седова [3] указано решение сферически-симметричной задачи вблизи начала координат в виде разложения по рациональным степеням модуля радиус-вектора с нахождением коэффициентов, являющихся функциями времени. В статье В. П. Карликова [4] приведено решение системы осесимметрических уравнений в виде ряда по натуральным степеням радиальной переменной с вычислением нестационарных коэффициентов, зависящих также от широтной переменной. Стоит упомянуть цикл статей А. Н. Голубятникова [5–8] о движении слабых разрывов и слабых ударных волн в том числе по неоднородному фону. А. В. Аксенов получил в [9] решение периодической по пространству задачи Коши методом возмущений. А. Г. Петров построил в [10] периодическое по времени решение с помощью разложения по амплитуде стоячей волны с точностью до величин второго порядка малости.

Среди точных решений уравнений газовой динамики важное место занимают работы о распространении взрывных волн. Здесь можно отметить ставшие классическими решение задачи о сходящейся ударной волне (Г. Гудерлей [11], Л. Д. Ландау [12] и К. П. Станюкович [13]) и решение задачи о сильном взрыве (Л. И. Седов [3, 14–16], Дж. И. Тейлор [17, 18] и Дж. фон Нейман [19]).

Задача о точечном взрыве с противодавлением была решена численно в работах коллектива Д. Е. Охицимского [20] (расчет проводился совместно с М. В. Келдышем и Л. И. Седовым), Г. Г. Гольдштейна и Дж. фон Неймана [21], а также Г. Броуда [22]. Для задач с цилиндрической и плоской симмет-

рией вычисления были проведены В. П. Коробейниковым и П. И. Чушкиным [23].

Вопрос об асимптотическом затухании ударных волн был исследован Л. Д. Ландау [24] и Ю. Л. Якимовым [25].

Решение задач о сильном взрыве в атмосфере переменной плотности было получено В. П. Карликовым [26, 27]. В данной постановке решение не является автомодельным и получено для линеаризованных уравнений. В соавторстве с В. П. Коробейниковым было проведено теоретическое исследование по нахождению формы и параметров фронта взрывной волны [28], а также решена задача о сильном взрыве в проводящей среде [29].

Ряд задач о движении поршня в газовой трубе и их решения, в том числе с учетом вопросов оптимизации, можно найти в книге [30].

Решения уравнений газовой динамики, представляющие собой аналитические функции, фактически являются течениями без образования ударных волн. Одним из наиболее важных с практической точки зрения классов движений являются решения о безударном сжатии. Соответствующие задачи в сферической и цилиндрической постановках рассмотрены в монографии А. Н. Крайко [31]. Автомодельное сжатие с образованием ударной волны и получением конечной величины энергии в момент коллапса построено в работе А. Н. Голубятникова [32].

В работах [33–35] развита теория построения точных решений одномерной нестационарной газовой динамики с плоскими волнами в виде разложений по степеням различных лагранжевых переменных и специальных функций от времени.

Доказательство сходимости решений уравнений в частных производных в виде степенных рядов тесно связано с теорией Коши-Ковалевской и принципом мажорант [36–39]. В случае, если система уравнений имеет нормальную форму, то аналитичность правых частей и начальных условий порождает локальную аналитичность решения. Одними из наиболее интересных результатов по развитию данной теории в случае линейных уравнений являются работы Хольмгрена [40] (вопрос единственности решения в том числе при неаналитических начальных условиях), Леви [41] и Хермандера [42] (случай бесконечно дифференцируемых, но не аналитических коэффициентов), Лере [43] (пересечение начальной поверхности с характе-

ристическими направлениями).

Вопрос построения мажоранты, учитывающей симметрию постановки механической задачи, освещен в работе В. М. Тешукова [44], а также в книге Н. Х. Ибрагимова [45]. Нелокальная задача Коши о движении жидкости со свободной границей и применение шкалы банаховых пространств для доказательства существования и единственности ее решения изучаются в работе Л. В. Овсянникова [46]. Применение метода Галеркина для доказательства разрешимости задачи с начальными условиями о динамике мелкой вращающейся жидкости представлено в статье [47].

Одним из наиболее существенных нелинейных эффектов в квадратичных гиперболических системах является трехволновой параметрический резонанс, заключающийся в перекачке энергии между тройкой медленно-изменяющихся мод при синхронизации линейных фаз [48].

История трехволновых взаимодействий в гидромеханике началась в середине двадцатого века, здесь можно отметить работы Брезертонна [49] и Мак-Голдрика [50]. Авторы рассматривали капиллярно-гравитационные волны на поверхности жидкости, для которых получили амплитудно-фазовые уравнения и их решение. Позднее эффекты, связанные с явлением нелинейного взаимодействия, были подтверждены экспериментально [51, 52]. Данные методы также распространены на многие другие задачи, здесь особенно стоит отметить области нелинейной оптики, физики плазмы, радиотехники и электроники [53]. Для гиперболических систем уравнений достаточно общего вида нелинейные взаимодействия волн рассматриваются в работе [54].

Трехволновые взаимодействия присутствуют и в газовой динамике. Например, решение неустановившейся задачи в нелинейном акустическом приближении можно найти в книге О. В. Руденко и С. И. Солуяна [55]. Для стационарной газовой динамики задача о трехволновом резонансе в плоском сверхзвуковом сопле решена в [56]. Нелинейным взаимодействиям акустических и вихревых мод в гиперзвуковом пограничном слое посвящена работа [57].

Существуют также и взаимодействия волн более высоких порядков. В частности, для чисто гравитационных волн характерен четырехволновой резонанс. Данному вопросу посвящены теоретические [58, 59] и экспериментальные [60, 61] исследования (большой вклад внесли Бенни, Лонге-

Хиггинс, Мак-Голдрик и Филлипс).

Исследование неньютоновских уравнений состояния сред и присущих им физических эффектов с каждым днем становится все более востребованной задачей.

Среда называется дилатантной, если ее эффективная вязкость возрастает при увеличении скорости деформации. Такое свойство характерно для дисперсных систем с частичками достаточно больших размеров, суспензий. Примером дилатантной среды может служить смесь воды с кукурузным крахмалом или порошком железа в высокой концентрации [62].

Псевдопластические среды являются прямой противоположностью дилатантных, для них характерно снижение эффективной вязкости при нарастании скорости деформации. К таким средам относят различные полимеры, пищевые и нефтяные продукты, жидкие биологические материалы [62].

Множество технических и природных процессов происходит именно в дисперсных, многофазных средах [63–65]. Жидкость с пузырьками газа внутри представляет собой классический пример двухфазной системы, при этом одной из самых интересных для задач энергетики. Здесь важную роль сыграл феномен концентрации энергии при сжатии вакуумного сферического пузырька в неограниченном объеме идеальной несжимаемой жидкости, рассмотренный Релеем и Безантом [66]. В случае ньютоновской жидкости задача была решена Е. И. Забабахиным [67, 68], при этом наличие линейной вязкости препятствует концентрации энергии лишь при очень малых числах Рейнольдса.

Случай степенной неньютоновской жидкости рассматривался в работах [69, 70], посвященных численному анализу динамики границы полости вдали от момента коллапса. Вопрос о концентрации энергии при сжатии в точку был подробно исследован в работе [71].

Поведение пузырька при других реологических моделях жидкости изучалось в статьях [72–79], обзор ключевых результатов приведен в публикации [80].

Значительный рост давления в окрестности точки фокусировки приводит к необходимости учета сжимаемости среды. Данный вопрос изучался коллективами Я. Б. Зельдовича и И. М. Гельфанда. Результаты приведены в работе К. В. Брушлинского и Я. М. Каждана [81]. За рубежом задача была

исследована Хантером [82].

В статье [32] для получения конечной концентрации энергии в совершенном газе было использовано двойственное [83] решение к задаче о точечном взрыве [3] — параметры газа по обе стороны от ударной волны взаимно аналитически продолжаются, после чего знак времени меняется на противоположный. Тем не менее за счет автомодельности решения и наличия сильного разрыва поршню необходимо совершить бесконечную работу для обеспечения построенного сжатия.

В книге [68, с. 110] отмечено, что при схлопывании пузырька в сжимаемой жидкости «может играть роль нагревание внутренних слоев из-за вязкости». Данное замечание учтено в работе [84], где построено решение с неограниченной концентрацией энергии в сжимаемой нелинейно-вязкой теплопроводной среде. Указанный подход может быть также применен к вязкоупругим средам [85].

Как было отмечено Е. И. Забабахиным [68, 86, 87], кумуляция энергии неустойчива, то есть она существует теоретически, но создание нужных для ее реализации условий на практике крайне затруднено. В ситуации со схлопыванием пузырька неустойчивость связана с потерей сферической формы.

Говоря о кумуляции важно выделить работу М. А. Лаврентьева по кумулятивным струям [88]. Они образуются также и в задаче о захлопывании пузырька около стенки [89], что объясняет разрушающий эффект кавитации. Здесь важным фактором является наличие начальной деформации полости, несферичность ее поверхности.

Подробности применения теории кавитирующих пузырьков в современных задачах энергетики представлены в работе коллектива Р. И. Нигматулина [90].

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, шести глав и заключения. Список литературы содержит 136 наименований, в списке иллюстративного материала указано 66 рисунков. Полный объем диссертации составляет 142 страницы.

В работе представлен ряд методов построения аналитических решений задач газовой динамики и механики пузырька в неньютоновских вязких жидкостях, в том числе при наличии явления кумуляции (концентрации) энергии, приведена их вычислительная реализация средствами компьютер-

ной алгебры.

В первых трех главах развита теория построения точных решений начальных и краевых задач одномерной нестационарной динамики совершенного газа с плоскими волнами при переменной удельной энтропии в виде разложений по степеням лагранжевых координат и специальных функций от времени. Представленный подход фактически подразумевает отсутствие образования ударных волн в процессе движения газа в трубе с двумя поршнями. Особое внимание уделено получению периодических по времени решений. Приводятся доказательства существования и глобальной аналитичности данных решений на основе метода С. В. Ковалевской и принципа мажорант.

В рамках каждой задачи выведены рекуррентные соотношения, которые позволяют определить неизвестные члены рядов по начальным или краевым условиям. С функциональной точки зрения коэффициенты разложений устроены достаточно сложно, однако для их точного вычисления можно воспользоваться средствами компьютерной алгебры. Таким образом решен ряд задач о периодических колебаниях пары поршней без учета и с учетом силы тяжести при заданных краевых условиях на одном из них, а также задача о сильном безударном сжатии газа.

Исследована теория преобразования полуугодографа — специального метода, позволяющего применить указанные выше идеи к решению задач с неоднородным распределением удельной энтропии при произвольном уравнении состояния газа. Метод апробирован на примере обобщения решения задачи об однородном разлете газа Ван-дер-Ваальса.

В четвертой главе изучен трехволновой резонанс в стационарной сверхзвуковой задаче газовой динамики. Выведены и решены в эллиптических функциях амплитудно-фазовые уравнения, определены необходимые для взаимодействия мод граничные условия. Приведена картина течения в плоском сверхзвуковом сопле с криволинейной формой верхней и нижней стенок.

В пятой главе рассмотрена сферически-симметричная задача о динамике однородного газового пузырька в несжимаемой степенной неньютоновской жидкости. Решены задачи о сохранении при сжатии кинетической энергии жидкости и скорости вязкой диссипации. Исследована классическая задача о схлопывании вакуумной полости скачком внешнего давления, полностью изучен вопрос о концентрации энергии. Доказано, что для большей части

дилатантных жидкостей концентрация энергии невозможна. Для остальных моделей построена поверхность зависимости значений концентрации энергии от показателя реологического закона и безразмерного коэффициента консистенции, указана критическая кривая, разделяющая области с концентрацией энергии и без нее. Наибольшей концентрацией энергии и наименьшей вязкой диссипацией обладают модели, близкие к чисто пластической среде.

В шестой главе представлено точное решение с однородной деформацией задачи о сжатии поршнем в точку нелинейно-вязкой теплопроводной среды с уравнениями состояния совершенного газа. Разделение переменных в уравнении притока тепла приводит к трехмерному уравнению Пуассона с постоянной правой частью для натурального логарифма плотности, что дает возможность рассмотрения произвольной системы пузырьков и струек внутри среды. При этом кинетическая энергия среды при сжатии сохраняется, а для внутренней энергии удается добиться неограниченного роста за счет работы поршня. Подробно исследованы случаи полной сферической симметрии и реологическая модель степенной жидкости.

**Актуальность темы исследования.** Разработка новых аналитических подходов к решению задач механики жидкости и газа важна для изучения новых явлений природы и техники, постановок новых физических задач и конструирования на их основе новых устройств и приборов, а также для создания новых асимптотических и численных математических методов с использованием различных классов точных решений.

Данная область исследований необходима для развития механики сплошной среды в целом и создания новых специальных курсов по динамике жидкости, газа и плазмы.

**Степень разработанности темы** представлена в приведенном выше обзоре построенных методов и решенных задач.

**Цели и задачи работы.** Основными целями и задачами диссертации являются:

1. Построение аналитических периодических по времени решений уравнений одномерной нестационарной газовой динамики с плоскими волнами.
2. Исследование течений газа без образования ударных волн путем построения решений в виде степенных рядов.
3. Изучение явления трехволнового резонанса в плоских сверхзвуко-

вых соплах.

4. Решение проблемы концентрации энергии при сжатии сферической полости в несжимаемой вязкой степенной жидкости.

5. Учет свойств сжимаемости и теплопроводности при обжатии полости в нелинейно-вязкой среде.

**Объект и предмет исследований.** Объектом исследований в данной диссертации служат уравнения газовой динамики и механики пузырька. Основным предметом исследований являются модели газа (в том числе с учетом свойств теплопроводности и нелинейной вязкости), а также модель степенной неньютоновской жидкости.

**Научная новизна.** В работе впервые представлены следующие результаты:

1. Доказано существование аналитических периодических по времени одномерных движений совершенного газа в трубе между двумя подвижными поршнями.

2. Решен ряд задач с периодическими краевыми условиями на поршнях при неоднородных начальных распределениях параметров газа.

3. Развита теория построения точных решений уравнений динамики совершенного газа в виде степенных рядов. Теория обобщена на случай произвольных термодинамических уравнений состояния.

4. Решена задача о трехволновом резонансе в стационарной сверхзвуковой газовой динамике.

5. Полностью изучен вопрос о концентрации энергии при сжатии сферической полости в несжимаемой вязкой степенной жидкости.

6. Исследовано влияние свойств сжимаемости и теплопроводности на концентрацию энергии. Результаты обобщены на случай произвольной системы пузырьков и струек в однородно сжимающейся среде.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Результаты диссертации могут быть использованы:

1. При описании безударных газодинамических явлений, возникающих во время движения газа в трубе, закрытой подвижными поршнями с обоих концов.

2. При решении задач о течениях газов в трубопроводах.

3. При проектировании плоских сверхзвуковых сопел с криволинейны-

ми формами стенок.

4. Для получения больших величин концентрации энергии при коллапсе среды.

5. При изучении механизмов концентрации энергии в астрофизических задачах.

**Методология и методы исследования.** В качестве основной методологии и основных методов исследования в настоящей работе используются:

1. Теория Коши-Ковалевской. Разложение функций в степенные ряды.

2. Символьные преобразования и вычисления в системах компьютерной алгебры.

3. Аналитические и численные методы решения систем дифференциальных уравнений в частных производных. Теория специальных функций.

4. Асимптотические методы и аппарат математического анализа.

5. Обратные методы решения начальных и краевых задач.

**Положения, выносимые на защиту.**

1. Существуют аналитические периодические по времени одномерные движения газа в трубе при наличии пары подвижных поршней. Классу безударных течений принадлежат построенные с помощью разложения в степенные ряды решения задач о периодических колебаниях поршней без учета и с учетом силы тяжести при заданных краевых условиях на одном из них, а также решение задачи о сильном сжатии газа. Представленный метод построения решений допускает обобщение на случай произвольных термодинамических уравнений состояния.

2. При течении газа в плоском сверхзвуковом сопле с криволинейной формой стенок возможен трехволновой резонанс.

3. При сжатии скачком давления вакуумной сферической полости в неограниченном объеме несжимаемой вязкой степенной жидкости возможна концентрация энергии во всем диапазоне параметров, соответствующем псевдопластическим жидкостям, и, частично, в мягких дилатантных. Наибольшей концентрацией энергии и наименьшей вязкой диссипацией обладают модели, близкие к предельной чисто пластической среде. Зависимость безразмерного коэффициента консистенции от показателя степени нелинейности модели, определяющая границу области с концентрацией энергии, имеет точку максимума.

4. При однородном сжатии сферическим поршнем из состояния покоя в точку нелинейно-вязкой теплопроводной среды с термодинамическими уравнениями состояния совершенного газа, содержащей произвольную систему пузырьков и струек, можно добиться, за счет работы поршня, неограниченного роста внутренней энергии к моменту коллапса. При этом кинетическая энергия среды будет сохраняться, а положение поршня в случае полной сферической симметрии задачи может быть выбрано так, чтобы поток тепла на нем равнялся нулю.

**Степень достоверности результатов.** Достоверность результатов, представленных в диссертации, обеспечивается использованием классических моделей механики сплошных сред и строгих математических методов их исследования, сравнением результатов с полученными ранее результатами других авторов, публикацией результатов исследований в рецензируемых научных журналах, соответствующих паспорту специальности, и презентацией докладов по проведенным исследованиям на профильных научных семинарах и конференциях.

**Апробация результатов.** Основные результаты, полученные в диссертации, были апробированы на следующих научных семинарах и конференциях:

1. *Украинский Д. В.* Трехволновые взаимодействия в газовой динамике // Конференция «Ломоносов-2016», 14.04.2016, Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова [91].

2. *Украинский Д. В.* Трехволновой резонанс в задачах газовой динамики // Конференция «Ломоносов-2017», 13.04.2017, Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова [92].

3. *Украинский Д. В.* Трехволновой резонанс в задачах газовой динамики // Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды», 15.11.2017, Москва, МИАН имени В. А. Стеклова [93].

4. *Украинский Д. В.* Трехволновой резонанс в задачах газовой динамики // Семинар по моделям механики сплошной среды с внутренними степенями свободы под руководством проф. А. В. Аксенова и проф. А. Н. Голубятникова, 14.12.2017, Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова.

5. *Украинский Д. В.* О периодических по времени решениях задач одномерной газовой динамики // Конференция «Ломоносов-2018», 12.04.2018,

Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова [94].

6. *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* Трехволновой резонанс в двумерной стационарной задаче газовой динамики // Всероссийская школа-семинар «Волновые явления в неоднородных средах» (Волны-2018), 29.05.2018, Можайск («Красновидово»), МГУ имени М. В. Ломоносова [95].

7. *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* О периодических по времени решениях задач одномерной газовой динамики // Всероссийская конференция молодых ученых-механиков «YSM-2018», 07.09.2018, Сочи («Буревестник»), МГУ имени М. В. Ломоносова [96].

8. *Украинский Д. В.* Класс нелинейных периодических решений уравнений газовой динамики // Конференция-конкурс молодых учёных НИИ механики МГУ имени М. В. Ломоносова, 15.10.2018, Москва, НИИ механики МГУ имени М. В. Ломоносова [97].

9. *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* Точные аналитические решения уравнений газовой динамики, определяемые гамильтоновой системой // Конференция «Ломоносовские чтения-2019», 18.04.2019, Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова [98].

10. *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* Точные аналитические решения уравнений газовой динамики // Международная конференция «Современные проблемы математики и механики», 15.05.2019, Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова [99].

11. *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* Периодические и резонансные решения в газовой динамике // Всероссийская конференция и школа для молодых ученых «Математические проблемы механики сплошных сред», Новосибирск, Институт гидродинамики имени М. А. Лаврентьева СО РАН [100].

12. *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* О периодических решениях в нелинейных задачах механики сплошной среды и их численной реализации // Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования» (СКТеММ-19), 19.06.2019, Москва, МИАН имени В. А. Стеклова [101].

13. *Украинский Д. В.* О построении точных аналитических решений уравнений газовой динамики в виде специальных степенных рядов и их вычислительная реализация // Конференция-конкурс молодых учёных НИИ ме-

ханики МГУ имени М. В. Ломоносова, 22.10.2020, Москва, НИИ механики МГУ имени М. В. Ломоносова [102].

14. *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* К построению решений уравнений газовой динамики в рядах по специальным переменным и их численной реализации // Конференция «Ломоносовские чтения-2020», 23.10.2020, Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова [103].

15. *Украинский Д. В.* О схлопывании и резонансе сферического пузырька в степенных неньютоновских жидкостях // Конференция «Ломоносов-2021», Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова [104].

16. *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* Метод полугодиграфа в задачах газовой динамики с произвольным распределением энтропии // Конференция «Ломоносовские чтения-2021», 23.04.2021, Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова [105].

17. *Украинский Д. В.* Периодические и резонансные решения в газовой динамике // Семинар по механике сплошных сред под руководством акад. А. Г. Куликовского, проф. В. П. Карликова, чл.-кор. О. Э. Мельника и проф. А. Н. Осипцова, 26.05.2021, Москва, НИИ механики МГУ имени М. В. Ломоносова.

18. *Украинский Д. В.* Периодические и резонансные решения в газовой динамике и механике пузырька в неньютоновских жидкостях // Семинар кафедры газовой и волновой динамики под руководством акад. Р. И. Нигматулина и проф. Н. Н. Смирнова, 20.12.2021, Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова.

19. *Украинский Д. В.* Периодические и резонансные решения в газовой динамике и механике пузырька в неньютоновских жидкостях // Семинар имени акад. Г. Г. Черного под руководством акад. В. А. Левина и проф. А. Н. Крайко, 22.12.2021, Москва, НИИ механики МГУ имени М. В. Ломоносова.

20. *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* О существовании периодических по времени решений в газовой динамике // Международная конференция, совместное заседание Московского математического общества и Семинара имени И. Г. Петровского «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», 28.12.2021, Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова [106].

21. *Украинский Д. В.* Периодические и резонансные решения одномерной газовой динамики и механика пузырька в неньютоновских вязких жид-

костях // Семинар по механике сплошных сред под руководством акад. А. Г. Куликовского, проф. В. П. Карликова, чл.-кор. О. Э. Мельника и проф. А. Н. Осипцова, 09.03.2022, Москва, НИИ механики МГУ имени М. В. Ломоносова.

22. *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* О концентрации энергии в сжимаемой вязкой теплопроводной жидкости // Конференция «Ломоносовские чтения-2022», 20.04.2022, Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова [107].

23. *Украинский Д. В.* Аналитические решения уравнений газовой динамики и механики пузырька // Семинар кафедры газовой и волновой динамики под руководством акад. Р. И. Нигматулина и проф. Н. Н. Смирнова, 06.06.2022, Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова.

24. *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* К проблеме концентрации энергии // Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования» (СКТеММ-22), 28.06.2022, Москва, МИАН имени В. А. Стеклова [108].

**Публикация статей.** Основные результаты диссертации опубликованы в следующих рецензируемых научных журналах, индексируемых системами Web of Science, Scopus, RSCI:

1. *Ukrainskii D. V., Golubiatnikov A. N.* On the periodical solutions for single-dimensional gas dynamics // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – 1129 012035 [33].

2. *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* Трехволновой резонанс в двумерной стационарной задаче газовой динамики // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2019. – № 2. – С. 63–67 [56, 109].

3. *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* О точных аналитических решениях уравнений газовой динамики // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2020. – № 3. – С. 141–150 [34, 110].

4. *Украинский Д. В.* О точных решениях уравнений газовой динамики в рядах по лагранжевой координате и их вычислительная реализация // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2020. – № 6. – С. 139–150 [35, 111].

5. *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* О динамике сферического пузырька в неньютоновских жидкостях // Известия Российской академии

наук. *Механика жидкости и газа*. – 2021. – №4. – С. 52–62 [71, 112].

6. *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* Одно точное решение об обжатии полости в вязкой теплопроводной сжимаемой среде // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. – 2022. – №4. – С. 77–85 [84, 113].

**Личный вклад.** Все аналитические построения и численные расчеты в данной работе, а также подготовка графических материалов проведены автором лично. Постановки задач и обсуждение результатов принадлежат научному руководителю. Личный вклад автора в публикациях [33, 34, 56, 71, 84, 95, 96, 98–101, 103, 105–110, 112, 113] составляет 4/5, в публикациях [35, 91–94, 97, 102, 104, 111] — 1.

**Благодарность.** Автор глубоко признателен своему научному руководителю за идеи и помощь в подготовке диссертации, а также всему коллективу кафедры гидромеханики за всестороннее обучение и формирование научного мировоззрения.

## ГЛАВА 1\*

# О СУЩЕСТВОВАНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Настоящая глава посвящена получению математических оценок параметров движения поршней и распределения энтропии вдоль трубы, при которых решения уравнений газовой динамики являются аналитическими периодическими по времени функциями. В этом случае движение газа фактически является течением без образования ударных волн и в силу периодичности существует неограниченно долго. Исследования сначала проводятся для случая целого показателя адиабаты и далее обобщаются на случай произвольного рационального.

### § 1.1. Задача о периодических движениях газа при целом показателе адиабаты

Уравнения одномерной нестационарной газовой динамики с плоскими волнами в случае адиабатических течений совершенного газа могут быть записаны в виде одного нелинейного уравнения [114–118]

$$\gamma\sigma(m)x_{mm} = x_{tt}x_m^{\gamma+1} + \sigma'(m)x_m, \quad (1.1.1)$$

где  $t$  — время,  $x(m, t)$  — закон движения частицы газа с массовой лагранжевой переменной  $m$ ,  $\sigma(m)$  — энтропийная функция,  $\gamma$  — показатель адиабаты.

Введением новой лагранжевой переменной

$$b(m) = \int_0^m \sigma^{1/\gamma}(\xi) d\xi$$

можно избавиться от второго слагаемого в правой части уравнения (1.1.1)

$$x_{bb} = x_{tt}x_b^{\gamma+1}F(b), \quad (1.1.2)$$

где  $F(b) = (1/\gamma)\sigma^{-1/\gamma}(m(b))$ .

Стоит заметить, что при задании функции  $F(b)$  переменная  $m$  и функ-

---

\* При подготовке данной главы диссертации использовались следующие публикации автора, в которых, согласно «Положению о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова», отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [106].

ция  $\sigma(m)$  находятся из соотношений

$$m(b) = \gamma \int_0^b F(\xi) d\xi,$$

$$\sigma(m) = (\gamma F(b(m)))^{-\gamma}.$$

С использованием переменной  $b(m)$  функции плотности, давления и температуры имеют следующий вид:

$$\rho(b, t) = \gamma F(b) x_b^{-1},$$

$$p(b, t) = x_b^{-\gamma},$$

$$\theta(b, t) = \frac{p}{R\rho} = \left( \gamma R F(b) x_b^{\gamma-1} \right)^{-1},$$

где  $R$  — газовая постоянная.

Для уравнения (1.1.2) можно поставить задачу Коши, если определить условия вида

$$x(0, t) = x_0(t), \quad x_b(0, t) = x_1(t). \quad (1.1.3)$$

Заметим, что первое из условий представляет собой закон движения поршня, находящегося в точке  $b = 0$ , а второе — фактически задает термодинамические параметры на нем (удобнее всего задавать температуру). Таким образом, с механической точки зрения условия (1.1.3) являются односторонними краевыми.

Рассматривается конечный отрезок времени  $t \in [0, T]$ . При введении безразмерных величин с помощью параметров  $\xi = T$ ,  $\eta = F(0)$  и  $\zeta = x_1(0)$  по формулам

$$t = \xi \tilde{t}, \quad F = \eta \tilde{F}, \quad x_1 = \zeta \tilde{x}_1,$$

$$b = \xi \eta^{-1/2} \zeta^{-(\gamma+1)/2} \tilde{b}, \quad x = \xi \eta^{-1/2} \zeta^{-(\gamma-1)/2} \tilde{x}, \quad x_0 = \xi \eta^{-1/2} \zeta^{-(\gamma-1)/2} \tilde{x}_0$$

приходим к той же системе (1.1.2)–(1.1.3), но в терминах величин с верхней волной. Далее волна опускается. Отрезок времени становится единичным.

Пусть функции  $x_0(t)$ ,  $x_1(t)$  и  $F(b)$  заданы и являются аналитическими на всей вещественной оси. Ставится задача об определении места установки второго поршня (координаты  $b = B$ ), при котором можно утверждать, что решение односторонней проблемы (1.1.2)–(1.1.3) представляет собой анали-

тическую функцию на всем прямоугольнике  $(b, t) \in [0, B] \times [0, 1]$ .

Построим решение задачи Коши (1.1.2)–(1.1.3) в виде степенного ряда. Для доказательства его сходимости будем использовать теорию Коши-Ковалевской [38, с. 50] и, в частности, метод мажорант.

Заменой искомой функции  $X = x(b, t) - bx_1(t) - x_0(t)$  система (1.1.2)–(1.1.3) приводится к задаче с нулевыми условиями

$$X_{bb} = (X_{tt} + b\ddot{x}_1(t) + \ddot{x}_0(t))(X_b + x_1(t))^{\gamma+1}F(b) = Z(b, t, X_b, X_{tt}), \quad (1.1.4)$$

$$X(0, t) = 0, \quad X_b(0, t) = 0. \quad (1.1.5)$$

Здесь точка над символом означает дифференцирование по  $t$  для функции одной переменной. Величина  $Z$  в правой части уравнения (1.1.4) является аналитической функцией всех своих аргументов в случае целых значений показателя адиабаты.

Следуя принципу построения мажоранты [38, с. 50], введем переменные  $\beta$  и  $\tau$  с помощью задачи

$$\beta_b = \tau_t, \quad \beta(0, t) = 0,$$

$$\tau_b = 0, \quad \tau(0, t) = t,$$

единственным решением которой является  $\beta = b$  и  $\tau = t$ . После чего запишем систему (1.1.4)–(1.1.5) в квазилинейном однородном виде ( $v = X_t$ ,  $w = X_b$ )

$$w_b = 0 \cdot w_t + Z_1(v, w, \tau, \beta) \cdot v_t + 0 \cdot \beta_t + Z_2(v, w, \tau, \beta) \cdot \tau_t, \quad w(0, t) = 0, \quad (1.1.6)$$

$$v_b = 1 \cdot w_t + 0 \cdot v_t + 0 \cdot \beta_t + 0 \cdot \tau_t, \quad v(0, t) = 0, \quad (1.1.7)$$

$$\beta_b = 0 \cdot w_t + 0 \cdot v_t + 0 \cdot \beta_t + 1 \cdot \tau_t, \quad \beta(0, t) = 0, \quad (1.1.8)$$

$$\tau_b = 0 \cdot w_t + 0 \cdot v_t + 0 \cdot \beta_t + 0 \cdot \tau_t, \quad \tau(0, t) = t, \quad (1.1.9)$$

где

$$Z_1 = (w + x_1(\tau))^{\gamma+1}F(\beta),$$

$$Z_2 = (\beta\ddot{x}_1(\tau) + \ddot{x}_0(\tau))(w + x_1(\tau))^{\gamma+1}F(\beta).$$

Рассмотрим произвольное положительное число  $R$  и разложим функ-

ции  $Z_1, Z_2$  в степенные ряды на множестве  $|v| \leq R, |w| \leq R, |\tau| \leq R, |\beta| \leq R$

$$Z_1 = \sum_{i,j,k,n=0}^{\infty} z_{ijkn}^{(1)} v^i w^j \tau^k \beta^n, \quad (1.1.10)$$

$$Z_2 = \sum_{i,j,k,n=0}^{\infty} z_{ijkn}^{(2)} v^i w^j \tau^k \beta^n. \quad (1.1.11)$$

Из свойств сходимости рядов (1.1.10)–(1.1.11) следует, что существует число  $N$ , при котором справедливо неравенство  $|z_{ijkn}^{(l)} R^{i+j+k+n}| \leq N$  для  $l = 1, 2$  и любых наборов целых неотрицательных индексов  $\{ijkn\}$ . Величину  $N$  можно неограниченно увеличивать при фиксированных  $z_{ijkn}^{(l)}$  и  $R$ . Соответственно, введем дополнительное требование  $N \geq 1$  для мажорирования всех коэффициентов квазилинейной системы (1.1.6)–(1.1.9), поскольку среди них присутствуют единичные.

Таким образом, при  $|v| < R, |w| < R, |\tau| < R, |\beta| < R$  в качестве мажоранты правых частей уравнений (1.1.6)–(1.1.9) можно взять функцию

$$Y_1 = \frac{N}{(1 - \frac{v}{R})(1 - \frac{w}{R})(1 - \frac{\tau}{R})(1 - \frac{\beta}{R})}.$$

Тем более, при условии

$$|v| + |w| + |\tau| + |\beta| < R \quad (1.1.12)$$

в роли мажоранты выступает функция

$$Y_2 = \frac{N}{1 - (v + w + \tau + \beta)/R}.$$

В отличие от [38, с. 50], где в качестве мажоранты правых частей начальных условий также берется сумма геометрической прогрессии, возьмем в данной роли непосредственно функцию  $Y(t) = t \geq 0$ .

В итоге, мажорантной задачей для (1.1.6)–(1.1.9) будет являться система

$$\frac{\partial r_q}{\partial b} = \frac{N}{1 - (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)/R} \left( \frac{\partial r_1}{\partial t} + \frac{\partial r_2}{\partial t} + \frac{\partial r_3}{\partial t} + \frac{\partial r_4}{\partial t} \right), \quad r_q(0, t) = t, \quad (1.1.13)$$

где  $q = 1, 2, 3, 4$ .

В силу симметрии задачи (1.1.13) ее решение ищется в одинаковом для всех  $q$  виде  $r_q(b, t) = r(b, t)$  и представляется следующим образом (рассматривается такое значение  $R$ , что  $0 \leq t \leq 1 < R/4$ ):

$$r(b, t) = (1/2) \left( R/4 + t - (R/4 - t) \sqrt{1 - \frac{4RNb}{(R/4 - t)^2}} \right). \quad (1.1.14)$$

Решение мажорантной задачи (1.1.14) является аналитической функцией в области

$$0 \leq b < \frac{(R/4 - t)^2}{4RN}, \quad (1.1.15)$$

вид которой изображен серым цветом на рисунке 1.1. Значит, решение исходной задачи также будет аналитично на множестве (1.1.15) при одновременном выполнении условия (1.1.12). Зафиксируем величину  $R$  с помощью равенства

$$R = \frac{4}{1 - \varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad (1.1.16)$$

где  $\varepsilon$  — задаваемый параметр.

Из системы (1.1.6)–(1.1.9) известно, что  $w_b(0, t) = \ddot{x}_0(t)x_1^{\gamma+1}(t)F(0)$  и  $v_b(0, t) = 0$ . Наличие конечных производных гарантирует дифференцируемость и, как следствие, непрерывность функций  $w$  и  $v$  в точке  $b = 0$  при всех  $t \in [0, 1]$ . Поскольку  $w(0, t) \equiv 0$  и  $v(0, t) \equiv 0$ , по определению непрерывности существует такое число  $\delta$ , что при любых  $b$  из множества  $|b| < \delta$  выполняются неравенства  $|w(b, t)| < R/4$  и  $|v(b, t)| < R/4$ .

Следовательно, если выбрать

$$B < \min \left\{ \frac{R\varepsilon^2}{64N}, \delta \right\} < R/4, \quad (1.1.17)$$

то условия (1.1.12) и (1.1.15) будут удовлетворены одновременно. Важно заметить, что величина  $B$  не входит в постановку исходной и мажорантной задач и не влияет на их решение. Неравенство (1.1.17) не дает возможности вычислить подходящие значения  $B$  в явном виде, но говорит о существовании таких значений. Данный результат будет использован в качестве аналитического обоснования примеров, рассмотренных в следующей главе.

Таким образом, решение проблемы (1.1.2)–(1.1.3) является аналити-

ческой функцией на прямоугольнике  $[0, B] \times [0, 1]$ . Течение газа в трубе не приводит к образованию ударных волн. Более того, если решение представляет собой колебательный процесс с единичным периодом для всех значений  $b \in [0, B]$ , то оно будет аналитическим на данном отрезке трубы при любых  $t$ . Этот случай обсуждается в конце параграфа.

Требование аналитичности функций  $x_0(t)$ ,  $x_1(t)$  и  $F(b)$  на всей вещественной оси является избыточным, по построению достаточно, чтобы радиус круга сходимости с центром в 0 для каждой из этих функций был строго больше 4.

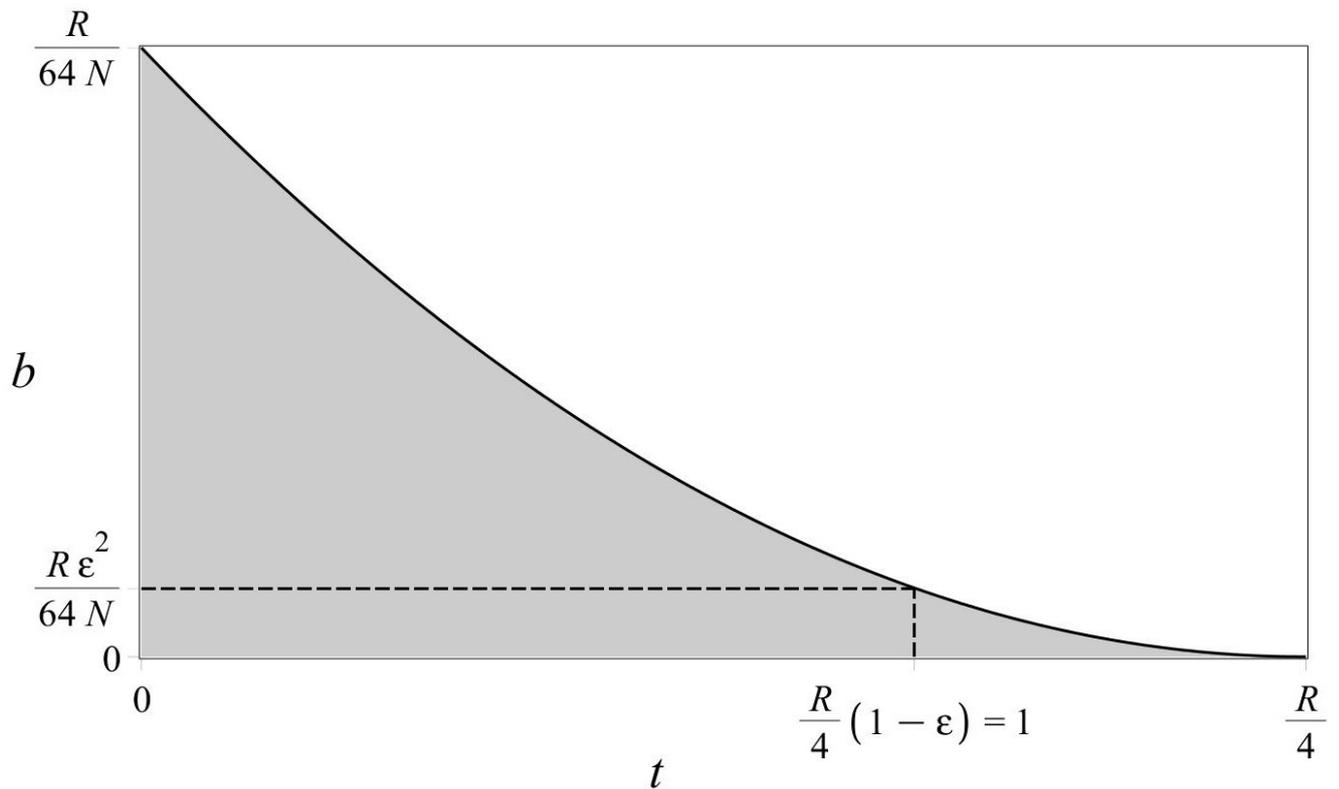


Рисунок 1.1 — Область аналитичности решения мажорантной задачи.

Вычислим коэффициенты Тейлора аналитического решения проблемы (1.1.2)–(1.1.3)

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t)b^n. \quad (1.1.18)$$

Для функции  $F(b)$  также используем разложение в степенной ряд

$$F(b) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n b^n. \quad (1.1.19)$$

При перемножении рядов будем использовать правило Коши [119]. Отметим

формулу возведения ряда в степень

$$\begin{aligned}
D^J(b, t) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} D_n(t) b^n \right)^J = \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{\circ J}(t) b^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{n_{J-1}=0}^n \sum_{n_{J-2}=0}^{n_{J-1}} \sum_{n_{J-3}=0}^{n_{J-2}} \dots \sum_{n_1=0}^{n_2} D_{n-n_{J-1}}(t) D_{n_{J-1}-n_{J-2}}(t) \times \right. \\
&\quad \left. \times D_{n_{J-2}-n_{J-3}}(t) \dots D_{n_2-n_1}(t) D_{n_1}(t) \right) b^n, \tag{1.1.20}
\end{aligned}$$

где  $J = 2, 3, \dots$  и  $D_n^{\circ J}(t)$  — обозначение для  $n$ -го члена разложения функции  $D^J(b, t)$  по степеням  $b$ . В рассматриваемом случае в рамках формулы (1.1.20) будет использоваться  $D(b, t) = x_b(b, t)$ ,  $D_n(t) = (n+1)x_{n+1}(t)$  и  $J = \gamma + 1$ .

Подставляя формулы (1.1.18)–(1.1.19) в уравнение (1.1.2) получаем следующие рекуррентные соотношения:

$$\sum_{k=0}^{n-2} D_k^{\circ \gamma+1}(t) \sum_{l=0}^{n-2-k} \ddot{x}_l(t) F_{n-2-k-l} = (n-1)n x_n(t), \tag{1.1.21}$$

где  $n = 2, 3, \dots$ . Например, при  $n = 2$

$$x_1^{\gamma+1}(t) \ddot{x}_0(t) F_0 = 2 x_2(t). \tag{1.1.22}$$

Для наглядности приведем рекуррентные формулы при  $\gamma = 2$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-2} \left( \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^j (k-j+1)x_{k-j+1}(t) (j-i+1)x_{j-i+1}(t) (i+1)x_{i+1}(t) \right) \times \\
&\quad \times \sum_{l=0}^{n-2-k} \ddot{x}_l(t) F_{n-2-k-l} = (n-1)n x_n(t).
\end{aligned}$$

Таким образом, все коэффициенты ряда (1.1.18) находятся последовательно и однозначно по двум заданным функциям  $x_0(t)$  и  $x_1(t)$ . Заметим, что точный расчет членов по формулам (1.1.21) можно производить средствами компьютерной алгебры.

Поскольку формулы (1.1.21) содержат только операции сложения, умно-

жения и дифференцирования,  $T_0$ -периодические условия (1.1.3) порождают  $T_0$ -периодическое по времени решение  $x(b, t)$ . Для произвольного  $x_n(t)$  свойство периодичности доказывается посредством математической индукции на основе соотношений (1.1.21), базой для которой является равенство (1.1.22).

Требование к функциям  $x_0(t)$  и  $x_1(t)$  для доказательства абсолютной и равномерной сходимости ряда (1.1.18) на множестве  $[0, B] \times [0, 1]$  снижается в случае их периодичности до аналитичности на периоде  $[0, 1]$ .

## § 1.2. Случай рационального показателя адиабаты

Уравнения газовой динамики также могут быть записаны с помощью системы

$$x_{tt} + p_m = 0, \quad (1.2.1)$$

$$px_m^\gamma = \sigma(m). \quad (1.2.2)$$

Рассмотрим произвольный рациональный показатель адиабаты вида

$$\gamma = \frac{l-1}{L+1} > 1. \quad (1.2.3)$$

Например, при  $l = 8$  и  $L = 4$  величина  $\gamma = 7/5$  (двухатомный газ), а для  $l = 6$  и  $L = 2$  значение  $\gamma = 5/3$  (одноатомный газ). Если  $L \geq 0$ , то  $l \geq 3$ .

С помощью введения новых неизвестных функций  $p = q^{-(l-1)}$  и  $x_t = (l-1)u$  система (1.2.1)–(1.2.2) может быть записана в форме

$$u_m = f(m)q^L q_t, \quad (1.2.4)$$

$$q_m = q^l u_t, \quad (1.2.5)$$

где  $f(m) = (1/\gamma)\sigma^{1/\gamma}(m)$ . Стоит заметить, что во время вывода данных уравнений используется соотношение  $x_{mt} = x_{tm}$ . При неотрицательном  $L$  величина  $q$  входит в правые части (1.2.4)–(1.2.5) аналитически.

Для изучения задачи Коши к уравнениям (1.2.4)–(1.2.5) добавляются условия на поршне при  $m = 0$

$$u(0, t) = u_0(t), \quad q(0, t) = q_0(t). \quad (1.2.6)$$

Пусть  $t \in [0, T]$ . Можно считать, что система (1.2.4)–(1.2.6) записана в

безразмерном виде с помощью параметров  $T$ ,  $q_0(0)$  и  $f(0)$ . Тогда  $t \in [0, 1]$ .

Заменами  $U = u - u_0(t)$  и  $Q = q - q_0(t)$  задача (1.2.4)–(1.2.6) приводится к эквивалентной, но с нулевыми условиями

$$U_m = f(m)(Q + q_0(t))^L Q_t + f(m)(Q + q_0(t))^L \dot{q}_0(t), \quad U(0, t) = 0, \quad (1.2.7)$$

$$Q_m = (Q + q_0(t))^l U_t + (Q + q_0(t))^l \dot{u}_0(t), \quad Q(0, t) = 0. \quad (1.2.8)$$

К системе (1.2.7)–(1.2.8) можно применить рассуждения предыдущего параграфа. Требуя для каждой из функций  $q_0(t)$ ,  $u_0(t)$  и  $f(m)$  аналитичность на интервале с центром в нуле и радиусом, строго большим 4, получим аналитичность решения на прямоугольнике  $(m, t) \in [0, M] \times [0, 1]$  с помощью выбора  $M$  по аналогии с формулой (1.1.17).

Поскольку числа  $L$  и  $l$  являются целыми неотрицательными, общее аналитическое решение задачи (1.2.4)–(1.2.6) строится, как и прежде, с помощью формулы Коши для перемножения рядов.

Рассмотрим разложения

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) m^n, \quad q = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(t) m^n, \quad (1.2.9)$$

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n m^n.$$

Тогда

$$n u_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^k q_j^{\circ L}(t) f_{k-j} \dot{q}_{n-1-k}(t), \quad (1.2.10)$$

$$n q_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} q_k^{\circ l}(t) \dot{u}_{n-1-k}(t), \quad (1.2.11)$$

где  $n = 1, 2, \dots$  и коэффициенты  $q_j^{\circ L}(t)$ ,  $q_k^{\circ l}(t)$  определены в соответствии с формулой (1.1.20).

Все члены рядов (1.2.9) вычисляются по заданным функциям  $u_0(t)$  и  $q_0(t)$  с помощью операций сложения, умножения и дифференцирования.  $T_0$ -периодические условия на поршне, находящемся при  $m = 0$ , порождают  $T_0$ -периодическое по времени во всей трубе решение  $\{u(m, t), q(m, t)\}$ .

В окончании данной главы отметим, что если заменить  $k = -l$  и  $K =$

– $L$  в (1.2.3), то показатель адиабаты будет иметь вид

$$\gamma = \frac{k+1}{K-1} > 1.$$

В терминах  $k$  и  $K$  система (1.2.4)–(1.2.5) переписывается

$$q_t = \phi(m)q^K u_m, \quad u_t = q^k q_m, \quad (1.2.12)$$

где  $\phi(m) = f^{-1}(m) = \gamma \sigma^{-1/\gamma}(m)$ . В свою очередь,  $p = q^{k+1}$  и  $x_t = -(k+1)u$ . В такой форме уравнений величина  $q$  входит в правые части аналитическим образом при целых неотрицательных  $k$  и  $K$ , на основе которых, как и прежде, можно получить любой рациональный показатель адиабаты.

Добавляя начальные условия вида

$$q(m, 0) = q_1(m), \quad u(m, 0) = u_1(m) \quad (1.2.13)$$

и требуя аналитичность функций  $q_1(m)$ ,  $u_1(m)$  и  $\phi(m)$ , к задаче (1.2.12)–(1.2.13) также можно применять проведенные рассуждения на основе принципа мажорант [38, с. 50].

### § 1.3. Основные результаты главы

1. Для задачи с периодическими краевыми условиями на поршнях при неоднородном распределении энтропии в случае произвольного рационального показателя адиабаты построено доказательство существования и единственности аналитического решения, периодического по времени.

2. В качестве достаточных условий абсолютной и равномерной сходимости степенных рядов используются ограничение на расстояние между поршнями в терминах специально введенной лагранжевой переменной, а также требования к аналитичности энтропийной функции и граничных условий на одном из поршней, задающих конкретный вид решения задачи.

3. Доказательство основано на рассуждениях теории Коши-Ковалевской и применении принципа мажорант.

4. Приведенные оценки параметров движения поршней и распределения энтропии вдоль трубы служат аналитическим обоснованием примеров, рассмотренных в следующей главе.

## ГЛАВА 2\*

### ПОСТРОЕНИЕ БЕЗУДАРНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ОДНОМЕРНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ В ВИДЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Ключевая цель данной главы — показать разнообразие возможных периодических по времени течений газа в трубах при наличии двух поршней и неоднородности энтропийной функции без образования ударных волн и представить методы построения соответствующих решений в виде разложений по степеням различных лагранжевых координат или специальных функций от времени. Так, решаются задачи о периодических колебаниях поршней без учета и с учетом силы тяжести, о согласованном движении газа и одного из поршней при колебаниях температуры на его поверхности, включая частный случай неподвижного поршня. С использованием формы Вебера системы уравнений газовой динамики приводится теория построения решений в виде степенных рядов по переменной удельной энтропии, в рамках которой решается задача о сильном безударном сжатии газа.

#### § 2.1. Преобразования времени и лагранжевой координаты

Естественный вид независимых переменных, присущих системе уравнений в частных производных, можно получить при построении решений с разделением этих переменных. Уравнения одномерной нестационарной газовой динамики

$$x_{tt} + p_m = 0, \quad (2.1.1)$$

$$px_m^\gamma = \sigma(m) \quad (2.1.2)$$

приводят к разделению переменных вида [3]

$$x = a(t)b(m), \quad p = c(m)/a^\gamma(t).$$

Уравнение движения (2.1.1) дает уравнение для определения  $a(t)$

$$\ddot{a} = -\lambda a^{-\gamma}, \quad (2.1.3)$$

---

\* При подготовке данной главы диссертации использовались следующие публикации автора, в которых, согласно «Положению о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова», отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [33–35, 94, 96–103, 110, 111].

откуда

$$\frac{\dot{a}^2}{2} = \frac{\lambda}{(\gamma - 1)a^{\gamma-1}} + E, \quad (2.1.4)$$

а также связь между  $c(m)$  и  $b(m)$

$$c' = \lambda b,$$

которую можно записать в виде

$$b' = \lambda b \left( \frac{dc(b)}{db} \right)^{-1}. \quad (2.1.5)$$

Здесь  $\lambda$  — постоянная разделения переменных,  $E$  — постоянная интегрирования. Для функций одной переменной используются обозначения производных: точка — по времени, штрих — по массе.

Интеграл адиабатичности (2.1.2) содержит энтропийную функцию  $\sigma$ , за счет которой рассматриваемую функцию  $c$  можно считать произвольной.

Выражение  $\ddot{a}$  и  $\dot{a}$  через  $a$  с помощью формул (2.1.3) и (2.1.4), а также  $b'$  через  $b$  с помощью формулы (2.1.5) свидетельствует о том, что для газовой динамики естественными переменными служат именно  $a$  и  $b$ , то есть преобразования от времени и массовой лагранжевой координаты. Это позволяет перейти к уравнениям с коэффициентами, зависящими от  $a$  и  $b$ .

Классический пример решения с разделением переменных в газовой динамике — решение задачи Лагранжа о согласованном движении поршня в трубе под действием газа [30, задача 25.33]

$$x = \frac{a(t)m}{\rho_0}, \quad p = \frac{2\rho_0 p_0 + \lambda m^2}{2\rho_0 a^\gamma(t)}. \quad (2.1.6)$$

Здесь  $\rho_0$  и  $p_0$  — постоянные, а функция  $a(t)$  удовлетворяет уравнению (2.1.4) при условии  $a(0) = 1$ .

Данное решение можно обобщить, если перейти от переменной  $m$  к ее преобразованию  $b(m)$ . В переменных  $a$  и  $b$  уравнение (2.1.1) переписывается в форме

$$2 \left( \frac{\lambda}{(\gamma - 1)a^{\gamma-1}} + E \right) x_{aa} - \lambda a^{-\gamma} x_a + \varphi(b) p_b = 0, \quad (2.1.7)$$

где  $\varphi(b) = b'$ .

Решение будет иметь вид

$$x = ab, \quad p = c(b)/a^\gamma.$$

При этом уравнение (2.1.7) устанавливает связь между функциями  $\varphi(b)$  и  $c(b)$

$$\varphi(b) = \lambda b \left( \frac{dc(b)}{db} \right)^{-1}.$$

Таким образом, можно по заданному  $\varphi(b)$  найти  $c(b)$  или по нужному виду  $c(b)$  найти  $\varphi(b)$ , то есть конкретизировать замену  $b(m)$  с точностью до произвольной постоянной. Энтропийная функция имеет вид  $\sigma(b) = c(b)\varphi^\gamma(b)$ .

## § 2.2. Задача о колебаниях самогравитирующего газового слоя

С учетом наличия массовой силы  $g(m)$  уравнение движения (2.1.1) принимает форму

$$x_{tt} + p_m = g(m). \quad (2.2.1)$$

Для самогравитирующего газа  $g(m) = -Gm$ , где  $G$  — гравитационная постоянная. Пусть энтропийная функция имеет вид

$$\sigma(m) = \sigma_0 + \lambda m^2/2.$$

Рассмотрим разделение переменных [3]

$$x = a(t)m, \quad p = \sigma(m)/a^\gamma(t).$$

В этом случае закон сохранения энтропии (2.1.2) удовлетворяется тождественно, а уравнение (2.2.1) переписывается в форме

$$\ddot{a}(t) + \lambda a^{-\gamma}(t) + G = 0. \quad (2.2.2)$$

Полагая  $\gamma = 2$  в (2.2.2) для простоты, приходим к интегралу энергии

$$\frac{\dot{a}^2}{2} = E + \frac{\lambda}{a} - Ga. \quad (2.2.3)$$

При определенных условиях уравнение (2.2.3) имеет периодические ре-

шения. Для этого нужно, чтобы у правой части (2.2.3) было два различных действительных корня. Это справедливо в случае  $E^2 + 4\lambda G > 0$ . При таких величинах параметров решение будет колебаться между значениями

$$a_{2,1} = \frac{E \pm \sqrt{E^2 + 4\lambda G}}{2G}.$$

При  $\lambda < 0$  величина  $a$  не будет обращаться в 0. В этом случае полная масса газа не превосходит  $M = \sqrt{2\sigma_0/|\lambda|}$ , то есть рассматривается газовый слой. Предположим, что  $E = 1$ ,  $G = 1$  и  $M = 1$  (добиться этого можно выбором нужной системы единиц). Тогда  $\lambda > -1/4$ ,  $a_1 = (1 - \sqrt{1 + 4\lambda})/2$  и  $a_2 = (1 + \sqrt{1 + 4\lambda})/2$ .

Рассмотрим семейство положительных характеристик. Они описываются уравнением  $dm/dt = \sqrt{2p\rho}$ . На каждом полупериоде зависимость  $a(t)$  взаимно-однозначная, поэтому данное соотношение можно переписать в виде

$$\frac{dm}{\sqrt{1 - m^2}} = \pm \sqrt{|\lambda|} \frac{da}{a\sqrt{2(a_2 - a)(a - a_1)}}.$$

Интегрируя, получаем однопараметрическое семейство

$$\arcsin m \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{a + 2\lambda}{a\sqrt{1 + 4\lambda}} + C_f = 0, \quad (2.2.4)$$

где  $C_f$  является параметром семейства, положительный знак выбирается в случае отрицательного  $\dot{a}$  и отрицательный — в случае положительного.

Формула (2.2.4) фактически имеет вид  $\Phi_1(m) + \Phi_2(a) + C_f = 0$ . Таким образом, характеристики, соответствующие разным значениям  $C_f$ , не пересекаются. В газе не образуется ударных волн. Построенное решение является классическим примером безударного периодического течения.

При рассмотрении семейства отрицательных характеристик в (2.2.4) нужно заменить  $\arcsin m$  на  $\arccos m$

$$\arccos m \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{a + 2\lambda}{a\sqrt{1 + 4\lambda}} + C_f = 0.$$

Правило выбора знака остается прежним.

Пусть  $\lambda = -0.21$ , в этом случае  $a_1 = 0.3$  и  $a_2 = 0.7$ . На рисунке 2.1

представлена картина семейства положительных характеристик при положительном значении  $\dot{a}$ .

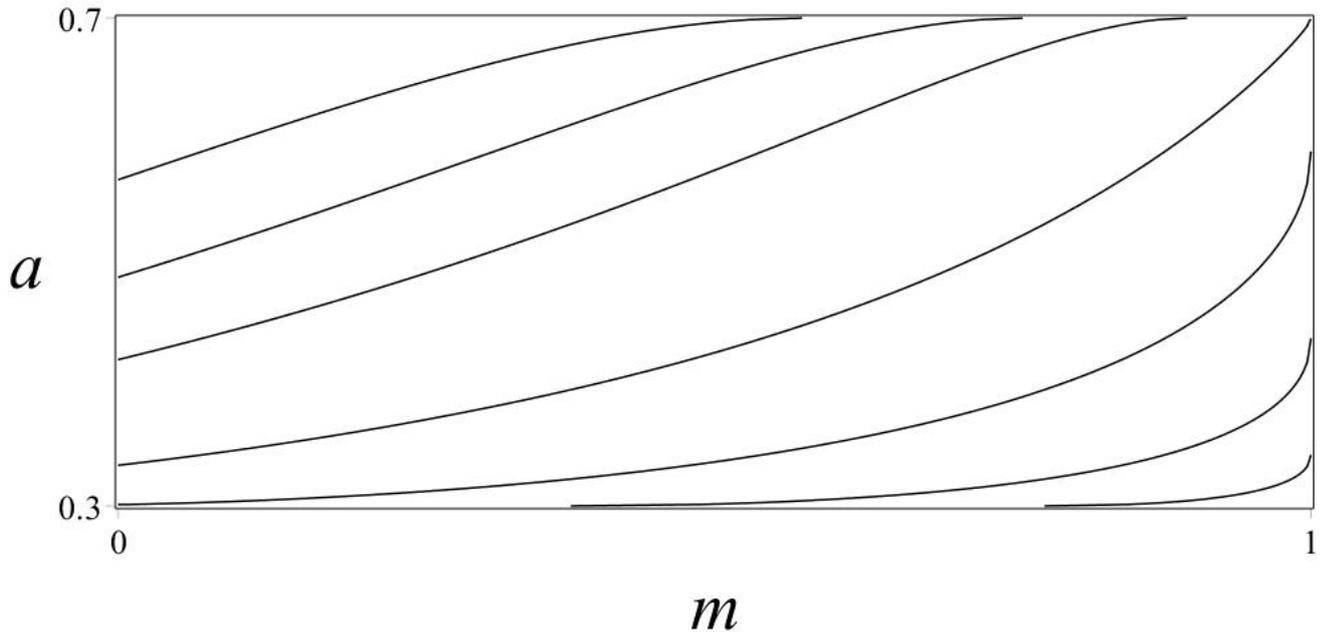


Рисунок 2.1 — Картина характеристик в задаче о колебаниях самогравитирующего газового слоя.

### § 2.3. Задача о периодическом движении поршней

В предыдущей главе были получены рекуррентные формулы (1.2.10)–(1.2.11), позволяющие вычислить аналитическое решение вида (1.2.9) задачи (1.2.4)–(1.2.6) по задаваемым функциям  $u_0(t)$ ,  $q_0(t)$  и  $f(m)$ . При  $\gamma = 7/5$ , что соответствует случаю  $l = 8$  и  $L = 4$ , формулы (1.2.10)–(1.2.11) имеют вид

$$n u_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^k \sum_{n_3=0}^j \sum_{n_2=0}^{n_3} \sum_{n_1=0}^{n_2} q_{j-n_3}(t) q_{n_3-n_2}(t) q_{n_2-n_1}(t) q_{n_1}(t) f_{k-j} \dot{q}_{n-1-k}(t), \quad (2.3.1)$$

$$n q_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{n_7=0}^k \sum_{n_6=0}^{n_7} \sum_{n_5=0}^{n_6} \sum_{n_4=0}^{n_5} \sum_{n_3=0}^{n_4} \sum_{n_2=0}^{n_3} \sum_{n_1=0}^{n_2} q_{k-n_7}(t) q_{n_7-n_6}(t) q_{n_6-n_5}(t) q_{n_5-n_4}(t) \times \\ \times q_{n_4-n_3}(t) q_{n_3-n_2}(t) q_{n_2-n_1}(t) q_{n_1}(t) \dot{q}_{n-1-k}(t). \quad (2.3.2)$$

Рассмотрим задачу о периодическом движении поршня при сохранении на нем термодинамических параметров и экспоненциально изменяющейся вдоль трубы энтропийной функции

$$u_0(t) = A(2\pi/T) \sin(2\pi t/T), \quad q_0(t) = C, \quad f(m) = D \exp(\delta m/M). \quad (2.3.3)$$

Здесь  $M$  — полная масса газа (отнесенная к площади поперечного сечения трубы) и безразмерный параметр  $\delta$  определяет величину неоднородности удельной энтропии. В этом случае

$$\rho(0, t) = (\gamma D)^{-1} C^{-(L+1)}, \quad p(0, t) = C^{-(l-1)}, \quad R\theta(0, t) = \gamma D C^{-(l-L-2)},$$

$$x(0, t) = (l-1)A[1 - \cos(2\pi t/T)] + x(0, 0), \quad \sigma(m) = (\gamma D)^\gamma \exp(\gamma \delta m/M).$$

Для получения такого движения необходимо поддерживать на поршне постоянную температуру и приложить силу  $F_p$  величиной

$$F_p = M_p x_{tt}(0, t) + S_p p(0, t) = (l-1)A(2\pi/T)^2 M_p \cos(2\pi t/T) + S_p C^{-(l-1)},$$

где  $M_p$  — масса поршня и  $S_p$  — площадь его поверхности.

Функции (2.3.3) являются аналитическими на всей вещественной оси, поэтому к рассматриваемой задаче применимы результаты предыдущей главы. Введем растяжения с помощью параметров  $T$ ,  $C = q_0(0)$  и  $D = f(0)$

$$u = C^{-(l-L-2)/2} D^{1/2} \tilde{u}, \quad u_0 = C^{-(l-L-2)/2} D^{1/2} \tilde{u}_0, \quad q = C \tilde{q}, \quad q_0 = C \tilde{q}_0,$$

$$f = D \tilde{f}, \quad m = T C^{-(l+L)/2} D^{-1/2} \tilde{m}, \quad t = T \tilde{t}.$$

В задаче появляются безразмерные числа

$$\alpha = A(2\pi/T) C^{(l-L-2)/2} D^{-1/2} = \frac{\gamma A(2\pi/T)}{\sqrt{\gamma p(0, 0)/\rho(0, 0)}},$$

$$\mu = M T^{-1} C^{(l+L)/2} D^{1/2} = \frac{M}{T \sqrt{\gamma p(0, 0)\rho(0, 0)}}.$$

Таким образом, задача будет иметь вид

$$\tilde{u}_{\tilde{m}} = \tilde{f}(\tilde{m}) \tilde{q}^L \tilde{q}_{\tilde{t}}, \quad \tilde{q}_{\tilde{m}} = \tilde{q}^l \tilde{u}_{\tilde{t}}, \quad \tilde{t} \in [0, 1], \quad \tilde{m} \in [0, \mu], \quad (2.3.4)$$

$$\tilde{u}(0, \tilde{t}) = \tilde{u}_0(\tilde{t}) = \alpha \sin(2\pi \tilde{t}), \quad \tilde{q}(0, \tilde{t}) = \tilde{q}_0(\tilde{t}) = 1, \quad \tilde{f}(\tilde{m}) = \exp(\delta \tilde{m}/\mu), \quad (2.3.5)$$

$$\tilde{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{u}_n(\tilde{t}) \tilde{m}^n, \quad \tilde{q} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{q}_n(\tilde{t}) \tilde{m}^n. \quad (2.3.6)$$

Плотность, давление, температура и скорость газа выражаются через

функции  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{q}$  и  $\tilde{f}$  следующим образом:

$$\rho = \frac{\rho(0,0)}{\tilde{q}^{L+1}\tilde{f}}, \quad p = \frac{p(0,0)}{\tilde{q}^{l-1}}, \quad R\theta = \frac{p(0,0)/\rho(0,0)}{\tilde{q}^{l-L-2}\tilde{f}^{-1}}, \quad v = \sqrt{\frac{\gamma p(0,0)}{\rho(0,0)}}(L+1)\tilde{u}. \quad (2.3.7)$$

Введем обозначения

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho(0,0)}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{p(0,0)}, \quad \tilde{\theta} = R\theta \frac{\rho(0,0)}{p(0,0)}, \quad \tilde{v} = v \sqrt{\frac{\rho(0,0)}{\gamma p(0,0)}}. \quad (2.3.8)$$

Для вычисления аналитического решения (2.3.6) задачи (2.3.4)–(2.3.5) при  $\gamma = 7/5$  (воздух) необходимо воспользоваться формулами (2.3.1)–(2.3.2). Пусть поршень совершает колебания с амплитудой  $(l-1)A = 1$  м и периодом  $T = 4$  с, полная масса газа в трубе на единицу площади поперечного сечения  $M = 100$  кг/м<sup>2</sup>. Газ у поршня в начальный момент времени находится в состоянии  $p(0,0) = 101330$  кг/(м·с<sup>2</sup>) и  $\rho(0,0) = 1.225$  кг/м<sup>3</sup>. Предположим также, что энтропийная функция убывает вдоль трубы на 20%. Тогда параметры задачи будут иметь вид  $\alpha \approx 0.001$ ,  $\mu \approx 0.060$  и  $\delta = -(5/7) \ln(5/4)$ .

Решение для 10 первых коэффициентов в частичных суммах каждого из рядов (2.3.6) представлено на рисунках 2.2–2.5. На графиках соответственно показаны скорость, плотность, давление, температура как функции массы и времени. Решения изображены на двух периодах для наглядности. Необходимые для существования аналитического решения начальные условия изображены на графиках при  $\tilde{t} = 0$ . Таким образом, начальная скорость газа отсутствует. Второй поршень расположен в точке  $\tilde{m} = \mu$  и также двигается периодически, термодинамические параметры на нем не сохраняются.

В предыдущей главе было построено доказательство абсолютной и равномерной сходимости решений в виде степенных рядов при достаточно близком расположении поршней в терминах массовой переменной. Недостатком данного доказательства можно назвать отсутствие числовой оценки необходимой близости. Но при проведении расчета задач важно понимать область изменения лагранжевой координаты.

На рисунках 2.6–2.7 представлены невязки уравнений (2.3.4). Здесь

$$\tilde{\epsilon}_1 = \tilde{f}(\tilde{m})\tilde{q}^L\tilde{q}_{\tilde{t}} - \tilde{u}_{\tilde{m}}, \quad \tilde{\epsilon}_2 = \tilde{q}^l\tilde{u}_{\tilde{t}} - \tilde{q}_{\tilde{m}}.$$

Видно, что уже для 10 членов рядов невязки крайне малы, порядка  $10^{-11}$ . Данные значения можно сравнить с характерным значением функций  $\tilde{u}_{\tilde{m}}$  и  $\tilde{q}_{\tilde{m}}$ , изображенных на рисунках 2.8–2.9. Они равны  $2 \cdot 10^{-3}$  и  $6 \cdot 10^{-3}$  соответственно. Следовательно, нормированные невязки имеют порядок  $10^{-8}$ . Важно отметить, что, согласно графикам 2.6–2.7, величина невязок убывает при уменьшении массовой переменной, как и следовало ожидать на основе построенного в предыдущей главе доказательства аналитичности решения. На рисунках 2.10–2.11 представлен относительный вариант невязок уравнений (2.3.4)

$$\tilde{\epsilon}_1 = \frac{\tilde{f}(\tilde{m})\tilde{q}^L\tilde{q}_{\tilde{t}}}{\tilde{u}_{\tilde{m}}}, \quad \tilde{\epsilon}_2 = \frac{\tilde{q}^L\tilde{u}_{\tilde{t}}}{\tilde{q}_{\tilde{m}}}.$$

На основе данных графиков видно, что отклонения величин  $\tilde{\epsilon}_1$  и  $\tilde{\epsilon}_2$  от 1 пренебрежимо малы по сравнению со значением  $10^{-2}$ .

Таким образом, графики 2.6–2.7 и 2.10–2.11 говорят о том, что при наперед заданной области  $\tilde{m} \in [0, \mu]$  построенное решение ведет себя регулярно. Это можно считать своего рода вычислительной оценкой рассматриваемого расстояния между поршнями.

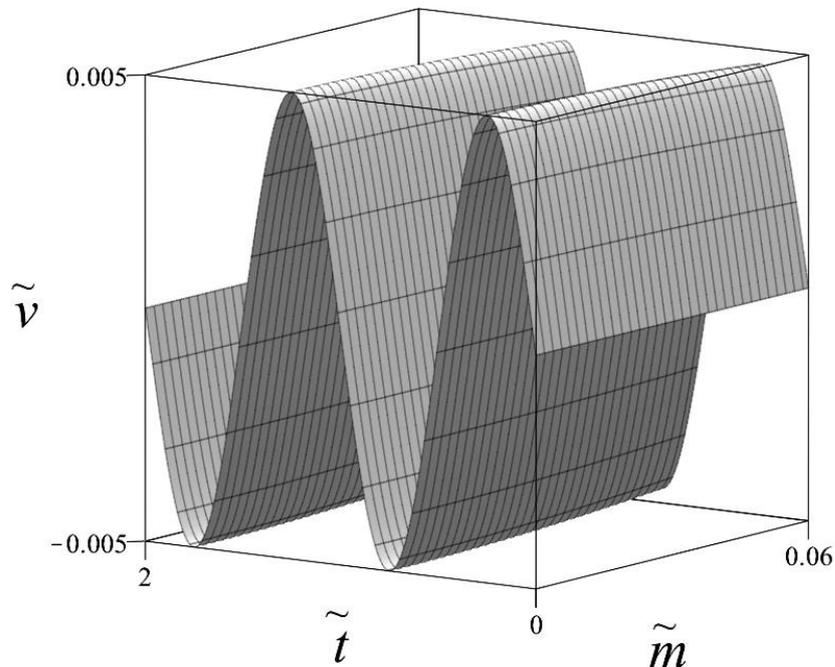


Рисунок 2.2 — График безразмерной скорости в задаче (2.3.4)–(2.3.6).

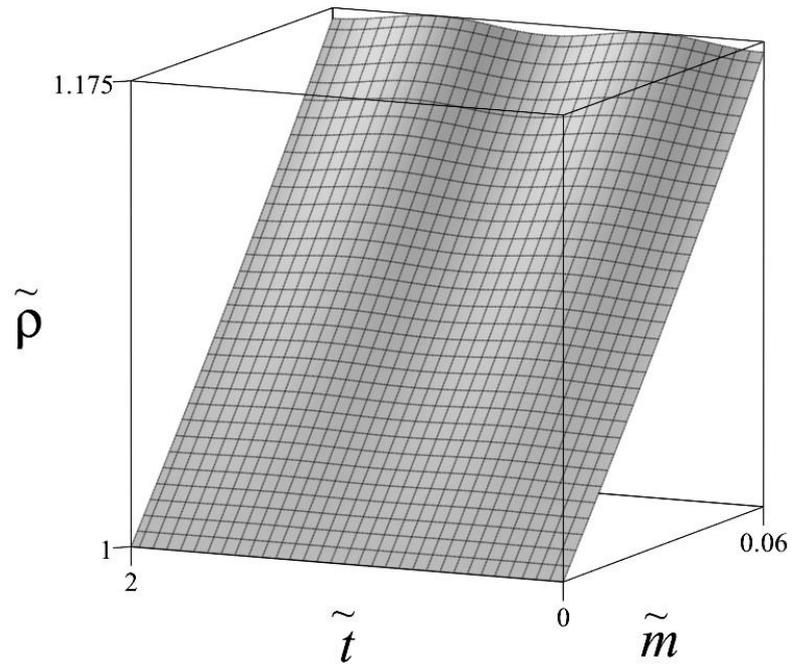


Рисунок 2.3 — График безразмерной плотности в задаче (2.3.4)–(2.3.6).

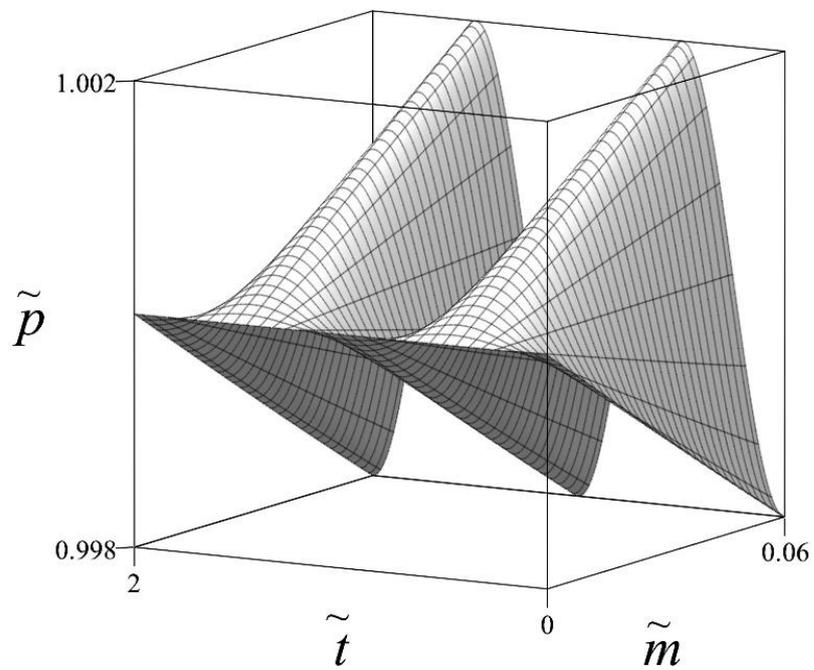


Рисунок 2.4 — График безразмерного давления в задаче (2.3.4)–(2.3.6).

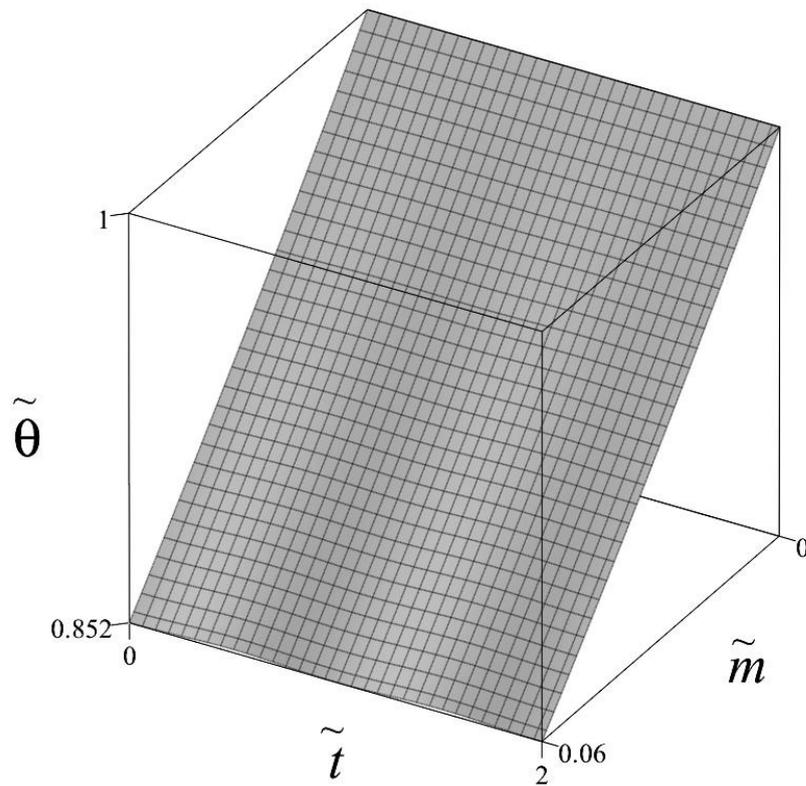


Рисунок 2.5 — График безразмерной температуры в задаче (2.3.4)–(2.3.6).

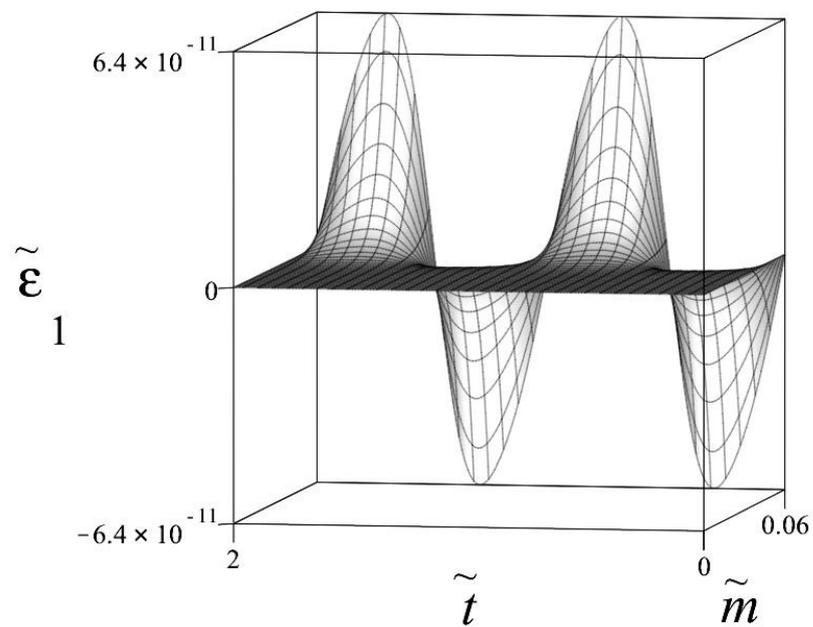


Рисунок 2.6 — Невязка  $\tilde{\epsilon}_1$  в задаче (2.3.4)–(2.3.6).

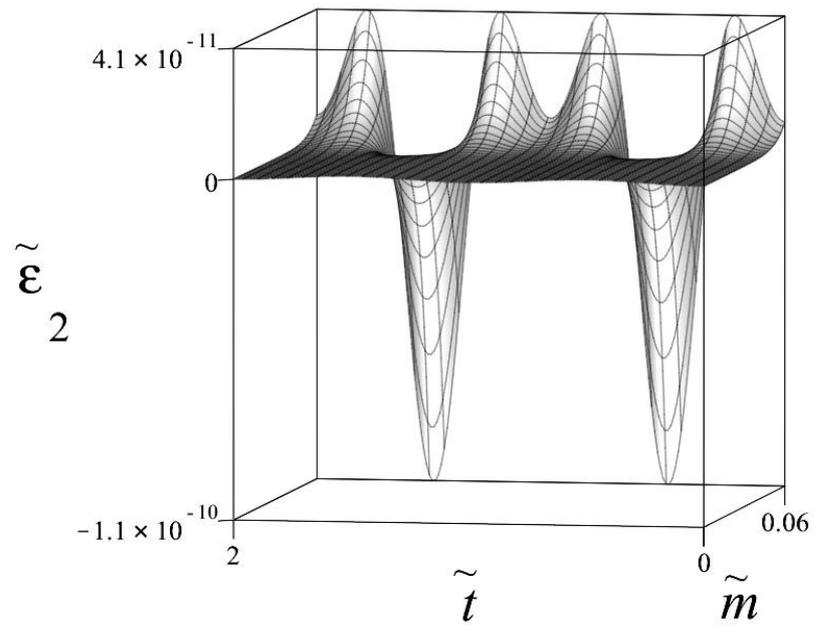


Рисунок 2.7 — Невязка  $\tilde{\epsilon}_2$  в задаче (2.3.4)–(2.3.6).

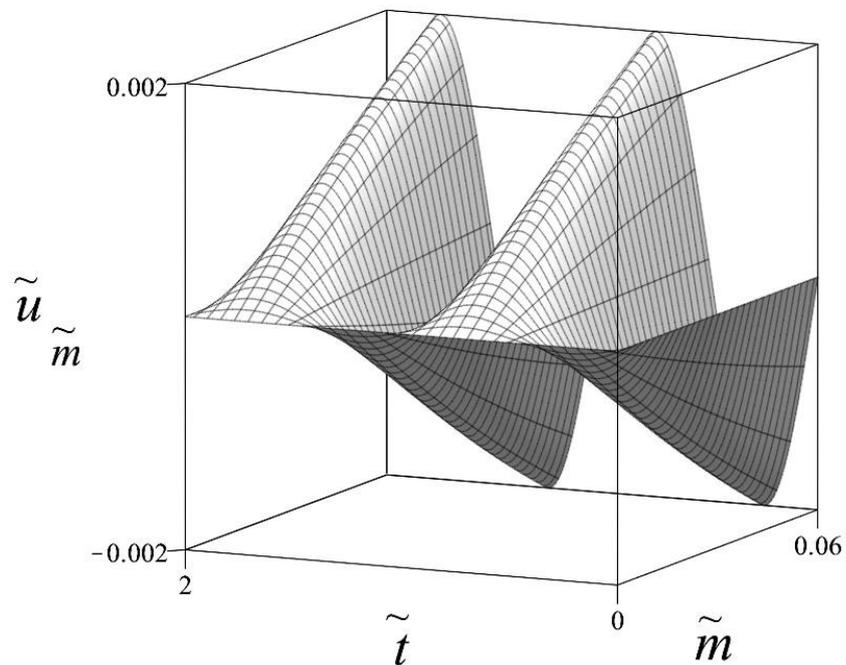


Рисунок 2.8 — График  $\tilde{u}_{\tilde{m}}$  в задаче (2.3.4)–(2.3.6).

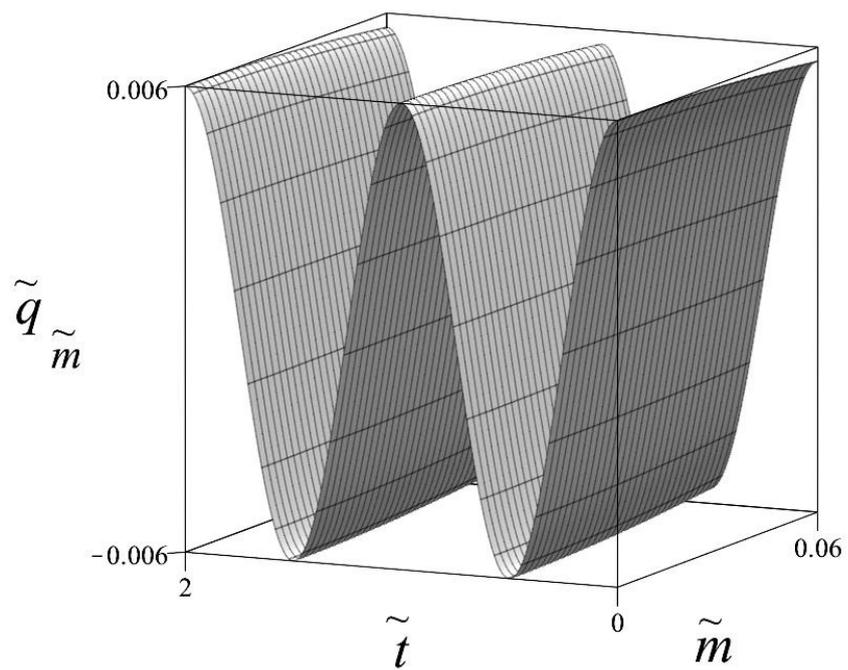


Рисунок 2.9 — График  $\tilde{q}_{\tilde{m}}$  в задаче (2.3.4)–(2.3.6).

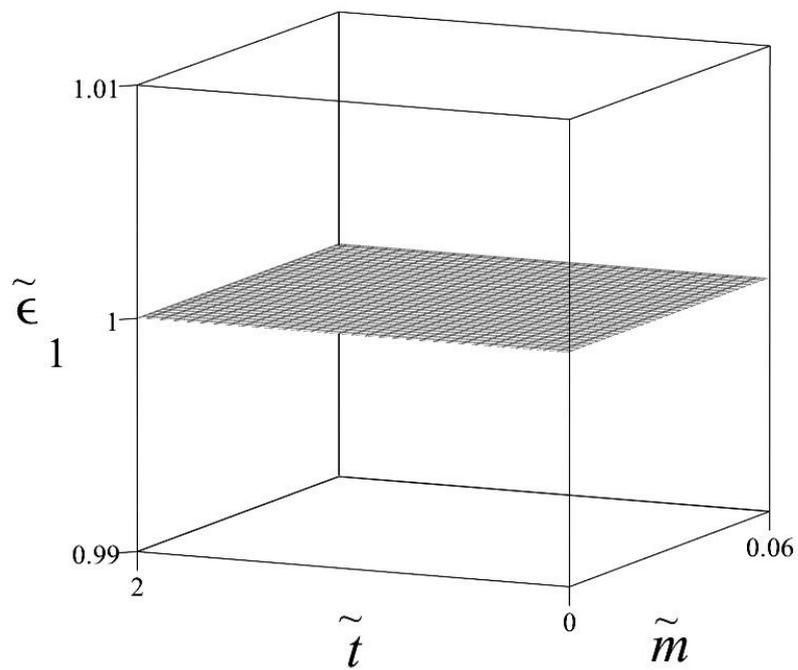


Рисунок 2.10 — Невязка  $\tilde{\epsilon}_1$  в задаче (2.3.4)–(2.3.6).

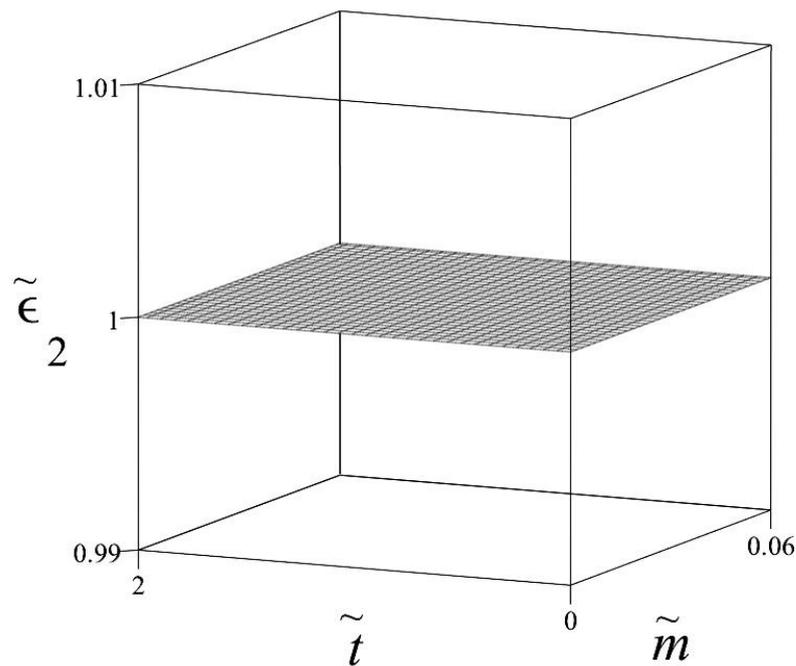


Рисунок 2.11 — Невязка  $\tilde{\epsilon}_2$  в задаче (2.3.4)–(2.3.6).

В принципе, проблематика допускает и другую интерпретацию. На основе графиков 2.6–2.7 и 2.10–2.11 можно сделать вывод, что при обрывании рядов на первых 10 коэффициентах получается высокоточное приближенное решение задачи в виде частичных сумм.

#### § 2.4. Задача о согласованном движении газа и одного из поршней за счет колебаний температуры на его поверхности

Предположим, что на поршень, находящийся при  $m = 0$ , с открытой стороны трубы действует атмосферное давление  $p_a$  (либо некоторое другое постоянное давление), а с внутренней стороны — давление, изменяющееся по закону  $p(0, t) = p_a [1 + \beta \cos(2\pi t/T)]$ , где  $|\beta| < 1$ . Например, поверхность поршня теплоизолирована и не передает тепло наружу, а изнутри подогревается или охлаждается по формуле

$$R\theta(0, t) = \sigma^{1/\gamma}(0) p_a^{(\gamma-1)/\gamma} [1 + \beta \cos(2\pi t/T)]^{(\gamma-1)/\gamma}.$$

При этом также  $\rho(0, t) = \sigma^{-1/\gamma}(0) p_a^{1/\gamma} [1 + \beta \cos(2\pi t/T)]^{1/\gamma}$ .

В случае согласованного движения газа и поршня закон движения

поршня будет иметь вид

$$M_p x_{tt}(0, t) = -S_p p(0, t) + S_p p_a = -S_p p_a \beta \cos(2\pi t/T),$$

$$x(0, t) = -\frac{T^2 S_p p_a \beta}{4\pi^2 M_p} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right].$$

Здесь предполагается, что начальная скорость поршня отсутствует и его начальное положение выбрано за точку отсчета оси  $Ox$ .

Величины  $u_0(t)$  и  $q_0(t)$  для данной задачи выражаются в виде

$$u_0(t) = \frac{x_t(0, t)}{l-1} = -\frac{T S_p p_a \beta}{2\pi M_p (l-1)} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \quad (2.4.1)$$

$$q_0(t) = p^{-1/(l-1)}(0, t) = p_a^{-1/(l-1)} [1 + \beta \cos(2\pi t/T)]^{-1/(l-1)}. \quad (2.4.2)$$

Пусть энтропийная функция задана по закону (2.3.3), как и в предыдущей задаче

$$f(m) = D \exp(\delta m/M), \quad \sigma(m) = (\gamma D)^\gamma \exp(\gamma \delta m/M). \quad (2.4.3)$$

Функции (2.4.1)–(2.4.3) являются аналитическими на всей вещественной оси. В случае (2.4.2) этому способствует неравенство  $|\beta \cos(2\pi t/T)| < 1$  при любых  $t$ . Таким образом, к рассматриваемой задаче также применимы результаты предыдущей главы.

Функция  $u_0(t)$  в рамках (2.4.1) допускает введение параметра  $A$  по аналогии с (2.3.3)

$$A = -\frac{T^2 S_p p_a \beta}{4\pi^2 M_p (l-1)}, \quad u_0(t) = A(2\pi/T) \sin(2\pi t/T).$$

Отметим, что  $A$  в данной задаче вычисляется в том числе по физическим характеристикам поршня. Поскольку величины  $M_p/S_p$  и  $M$  имеют одинаковую размерность, можно ввести безразмерное число  $\lambda = M/(M_p/S_p)$ . Тогда

$$A = -\frac{T^2 \lambda p_a \beta}{4\pi^2 M (l-1)}. \quad (2.4.4)$$

Введем также безразмерные величины по формулам

$$u = K^{-(l-L-2)/2} D^{1/2} \tilde{u}, \quad u_0 = K^{-(l-L-2)/2} D^{1/2} \tilde{u}_0, \quad q = K \tilde{q}, \quad q_0 = K \tilde{q}_0,$$

$$f = D\tilde{f}, \quad m = TK^{-(l+L)/2}D^{-1/2}\tilde{m}, \quad t = T\tilde{t},$$

где  $K = q_0(0) = p_a^{-1/(l-1)}(1 + \beta)^{-1/(l-1)}$ . Таким образом, к безразмерным коэффициентам  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\beta$  и  $\lambda$  добавляются числа

$$\alpha = A(2\pi/T)K^{(l-L-2)/2}D^{-1/2} = \frac{\gamma A(2\pi/T)}{\sqrt{\gamma p(0,0)/\rho(0,0)}},$$

$$\mu = MT^{-1}K^{(l+L)/2}D^{1/2} = \frac{M}{T\sqrt{\gamma p(0,0)\rho(0,0)}}.$$

Стоит отметить, что в данной задаче остаются справедливыми формулы (2.3.7)–(2.3.8).

Итоговая задача имеет вид

$$\tilde{u}_{\tilde{m}} = \tilde{f}(\tilde{m})\tilde{q}^L\tilde{q}_{\tilde{t}}, \quad \tilde{q}_{\tilde{m}} = \tilde{q}^l\tilde{u}_{\tilde{t}}, \quad \tilde{t} \in [0, 1], \quad \tilde{m} \in [0, \mu], \quad (2.4.5)$$

$$\tilde{f}(\tilde{m}) = \exp(\delta\tilde{m}/\mu), \quad \tilde{u}(0, \tilde{t}) = \tilde{u}_0(\tilde{t}) = \alpha \sin(2\pi\tilde{t}), \quad (2.4.6)$$

$$\tilde{q}(0, \tilde{t}) = \tilde{q}_0(\tilde{t}) = \left[ \frac{1}{1 + \beta} + \frac{\beta}{1 + \beta} \cos(2\pi\tilde{t}) \right]^{-1/(l-1)}, \quad (2.4.7)$$

$$\tilde{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{u}_n(\tilde{t})\tilde{m}^n, \quad \tilde{q} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{q}_n(\tilde{t})\tilde{m}^n. \quad (2.4.8)$$

При  $\beta = 0$  задача (2.4.5)–(2.4.8) формально совпадает с задачей (2.3.4)–(2.3.6). Однако данную ситуацию рассматривать некорректно, поскольку в соответствии с соотношением (2.4.4) число  $\alpha$  зависит от числа  $\beta$  через параметр  $A$  и также будет равно нулю, что приведет к равновесному решению. Ниже отдельно рассматривается случай  $\lambda = 0$ , который соответствует неподвижному поршню. Физически речь в подобной задаче идет о рассмотрении массы поршня, намного большей массы газа в трубе.

Пусть  $\gamma = 7/5$ ,  $\delta = -(5/7)\ln(5/4)$ ,  $T = 4$  с,  $M = 100$  кг/м<sup>2</sup> и  $\rho(0,0) = 1.225$  кг/м<sup>3</sup> — как в предыдущей задаче. Рассмотрим  $\beta = 0.02$  и  $p(0,0) = 101330 \times 1.02$  кг/(м·с<sup>2</sup>), чтобы получить  $p_a = 101330$  кг/(м·с<sup>2</sup>), при этом начальная температура у поршня внутри трубы  $\theta(0,0) \approx 294$  К (для воздуха  $R = 287$  м<sup>2</sup>/(с<sup>2</sup>·К)). Зададим также  $\lambda = 0.5$ . Тогда амплитуда колебаний  $(l-1)|A| \approx 4.1$  м, а безразмерные параметры имеют вид  $\alpha \approx -0.004$  и  $\mu \approx 0.059$ .

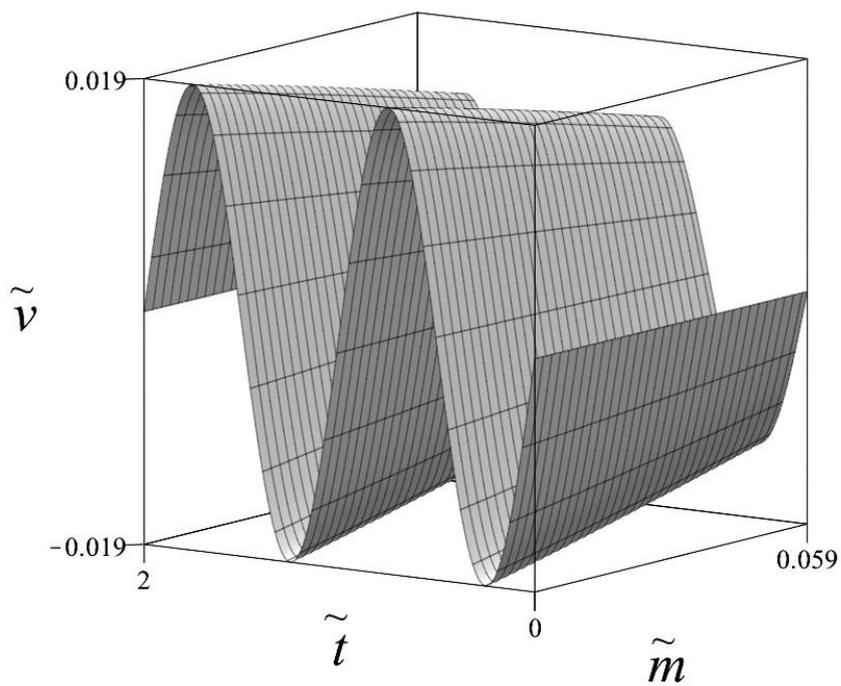


Рисунок 2.12 — График безразмерной скорости в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при  $\lambda \neq 0$ .

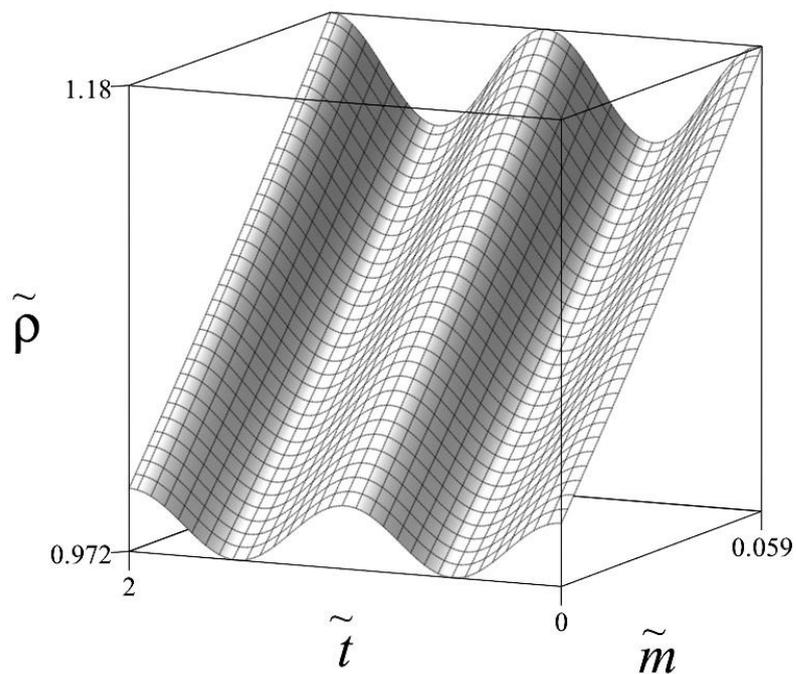


Рисунок 2.13 — График безразмерной плотности в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при  $\lambda \neq 0$ .

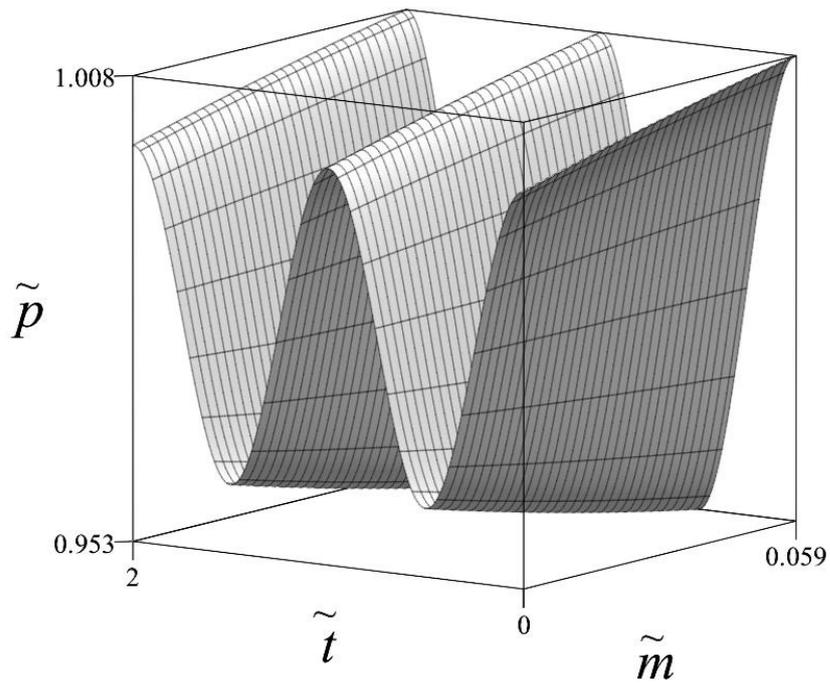


Рисунок 2.14 — График безразмерного давления в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при  $\lambda \neq 0$ .

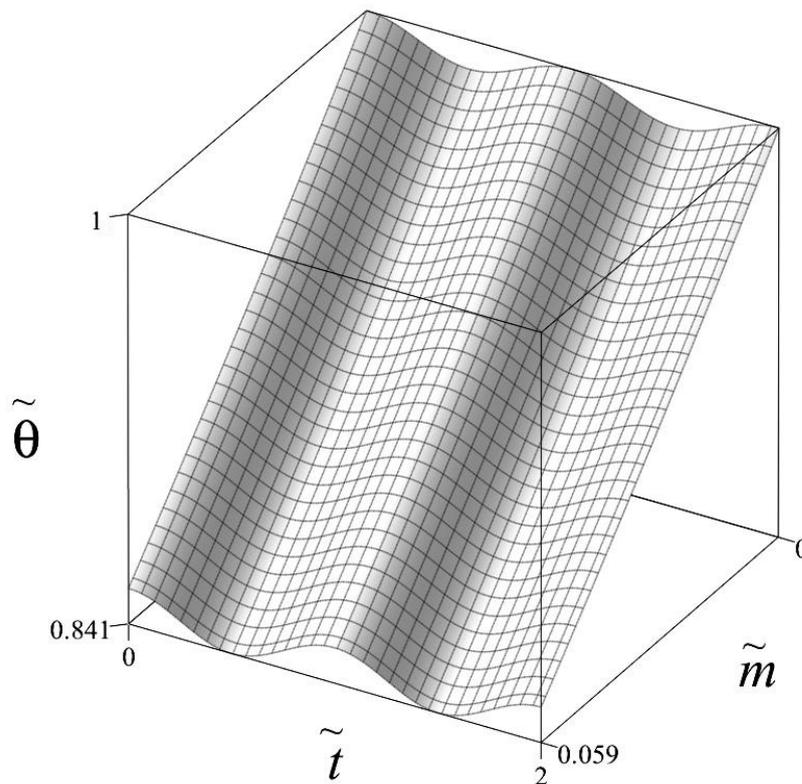


Рисунок 2.15 — График безразмерной температуры в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при  $\lambda \neq 0$ .

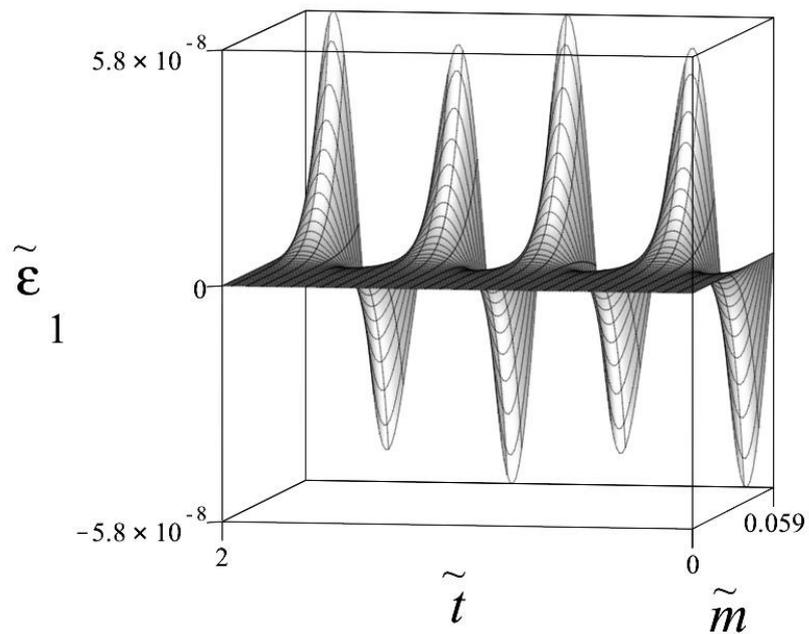


Рисунок 2.16 — Невязка  $\tilde{\epsilon}_1$  в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при  $\lambda \neq 0$ .

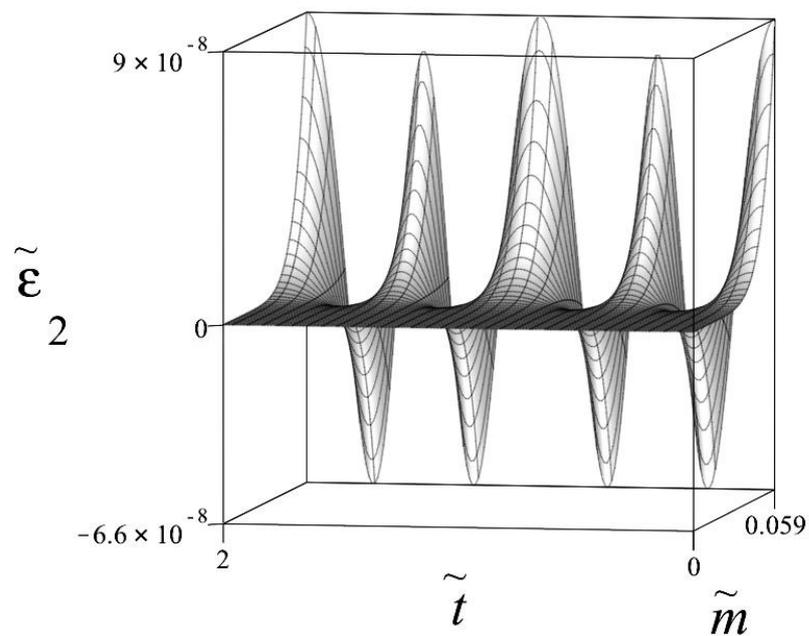


Рисунок 2.17 — Невязка  $\tilde{\epsilon}_2$  в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при  $\lambda \neq 0$ .

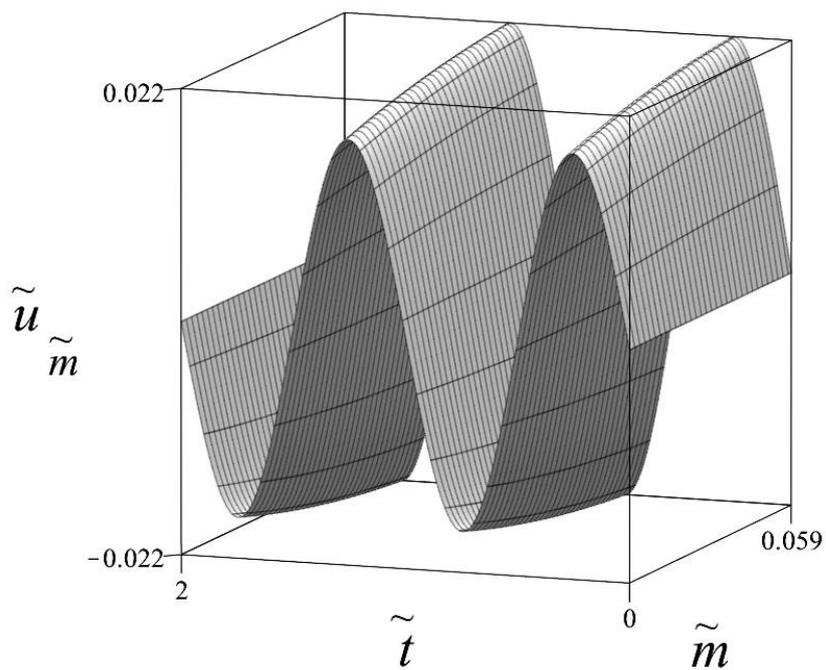


Рисунок 2.18 — График  $\tilde{u}_{\tilde{m}}$  в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при  $\lambda \neq 0$ .

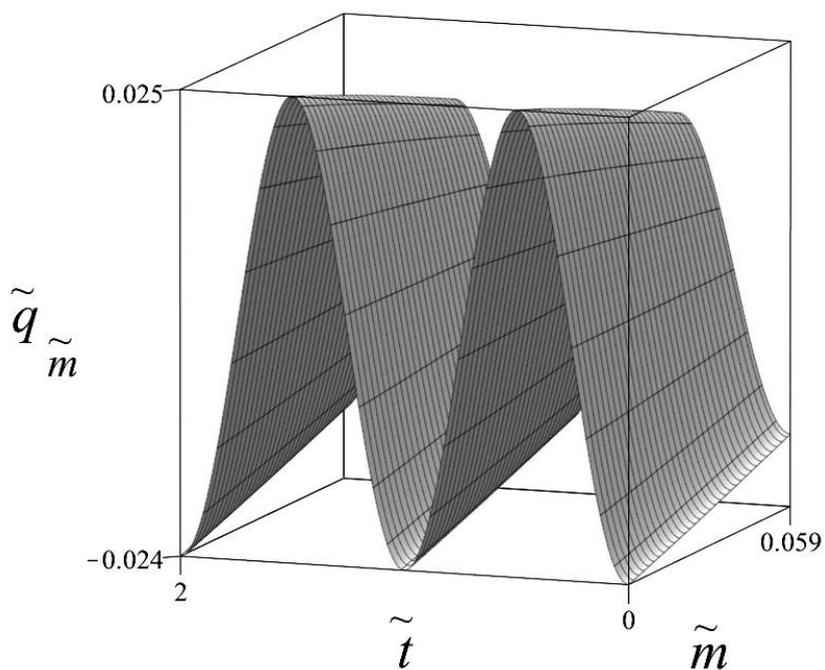


Рисунок 2.19 — График  $\tilde{q}_{\tilde{m}}$  в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при  $\lambda \neq 0$ .

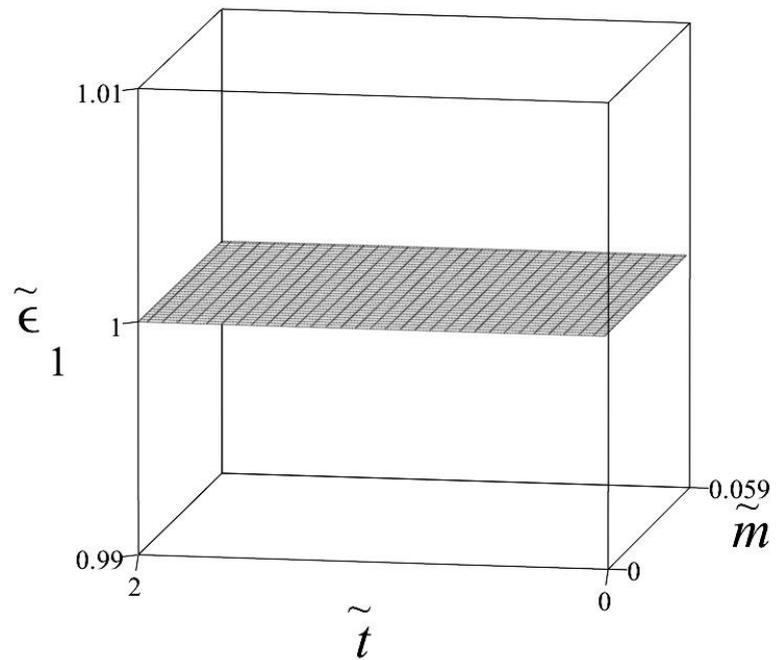


Рисунок 2.20 — Невязка  $\tilde{\epsilon}_1$  в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при  $\lambda \neq 0$ .

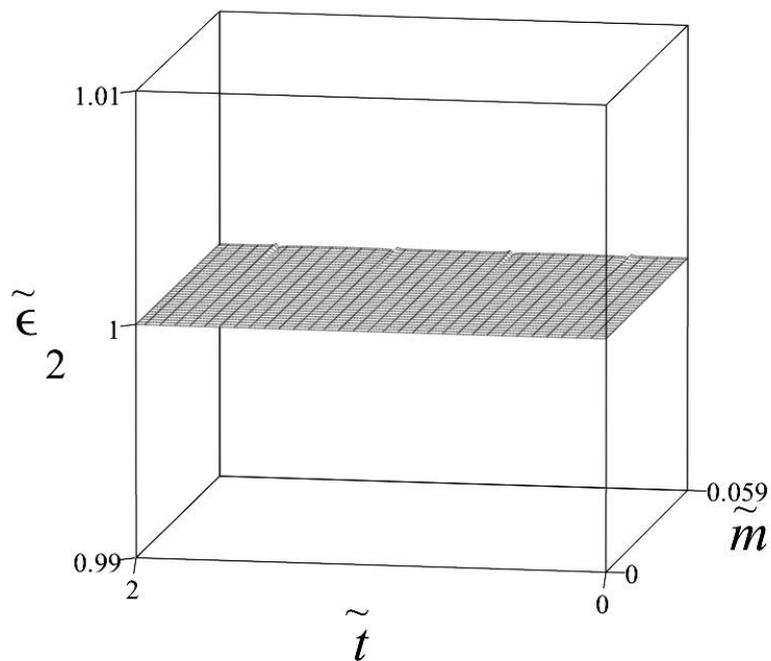


Рисунок 2.21 — Невязка  $\tilde{\epsilon}_2$  в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при  $\lambda \neq 0$ .

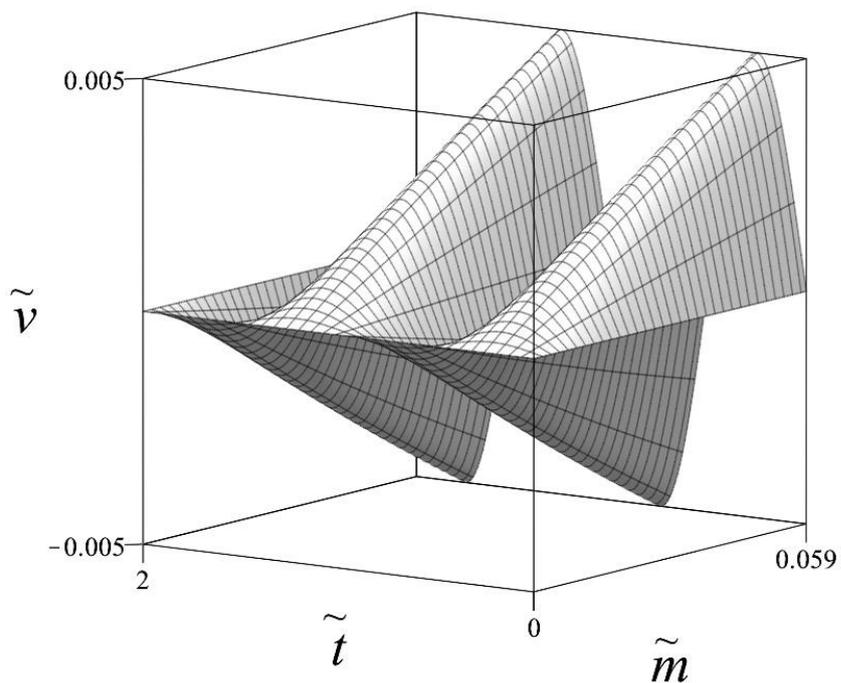


Рисунок 2.22 — График безразмерной скорости в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при  $\lambda = 0$ .

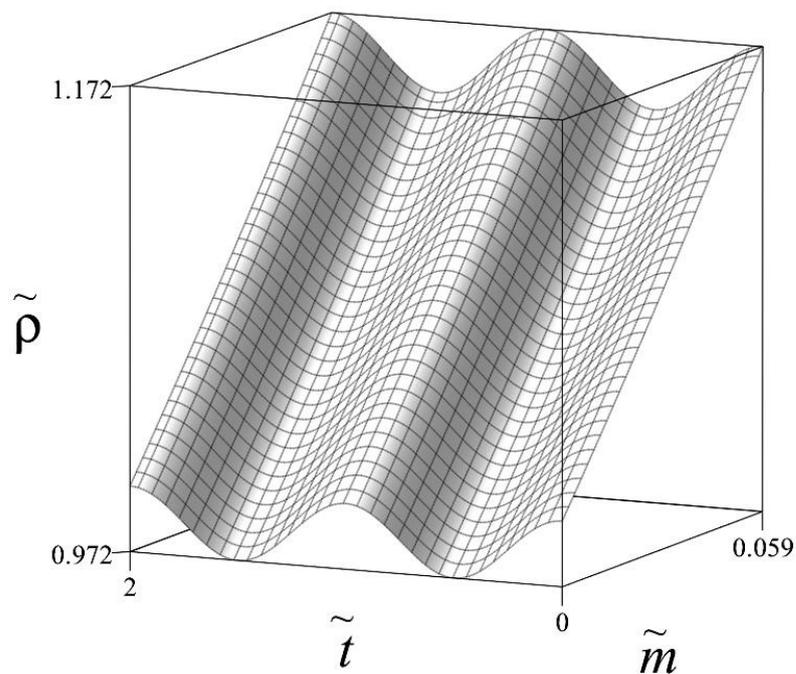


Рисунок 2.23 — График безразмерной плотности в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при  $\lambda = 0$ .

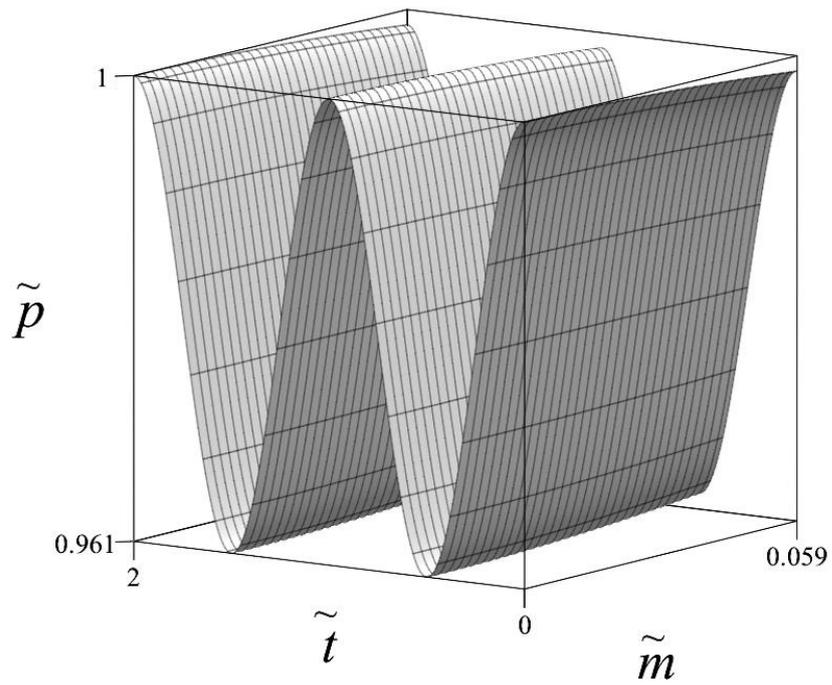


Рисунок 2.24 — График безразмерного давления в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при  $\lambda = 0$ .

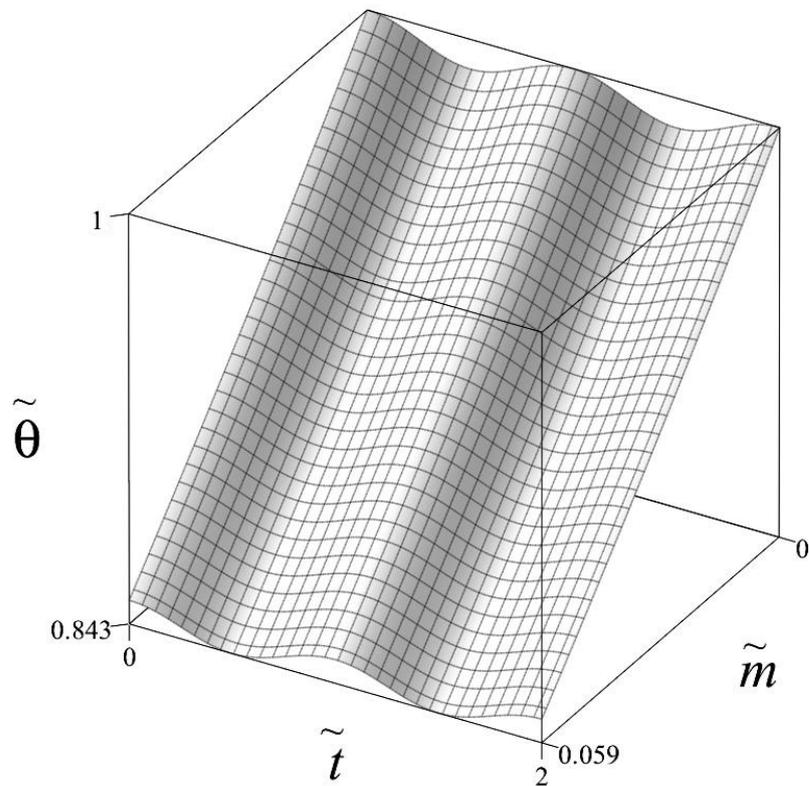


Рисунок 2.25 — График безразмерной температуры в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при  $\lambda = 0$ .

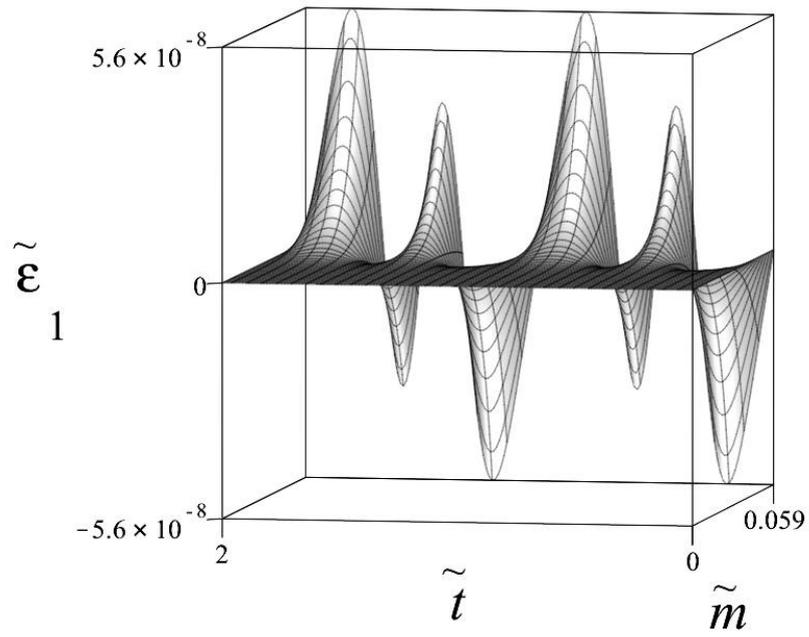


Рисунок 2.26 — Невязка  $\tilde{\epsilon}_1$  в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при  $\lambda = 0$ .

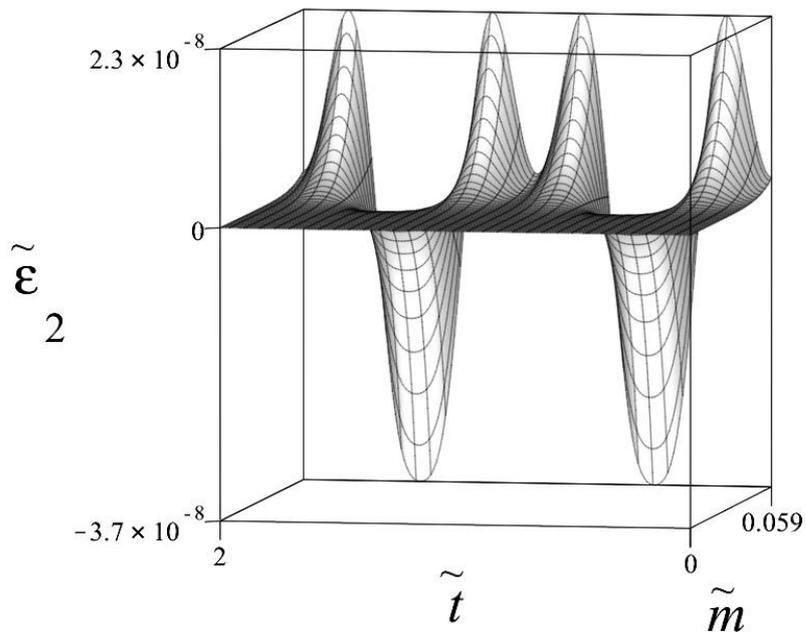


Рисунок 2.27 — Невязка  $\tilde{\epsilon}_2$  в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при  $\lambda = 0$ .

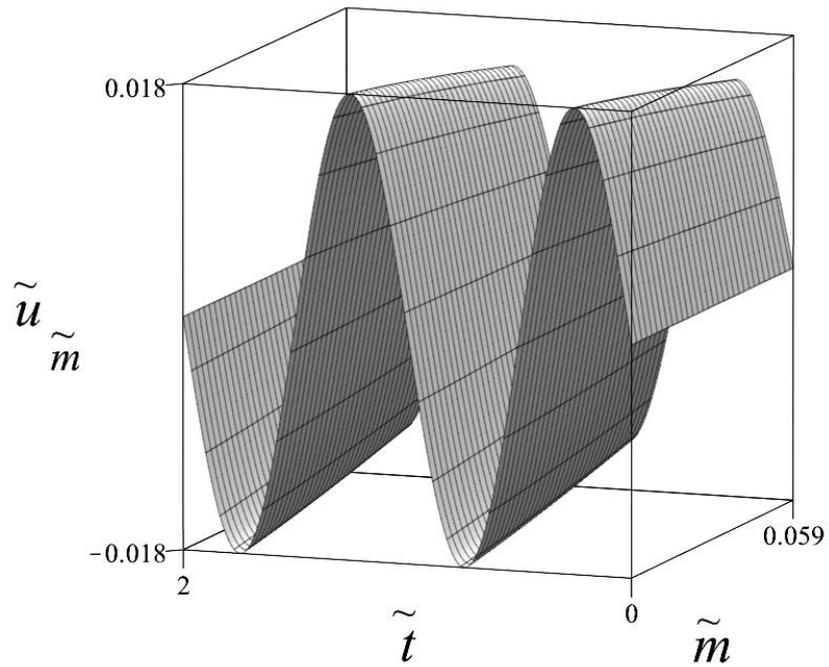


Рисунок 2.28 — График  $\tilde{u}_{\tilde{m}}$  в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при  $\lambda = 0$ .

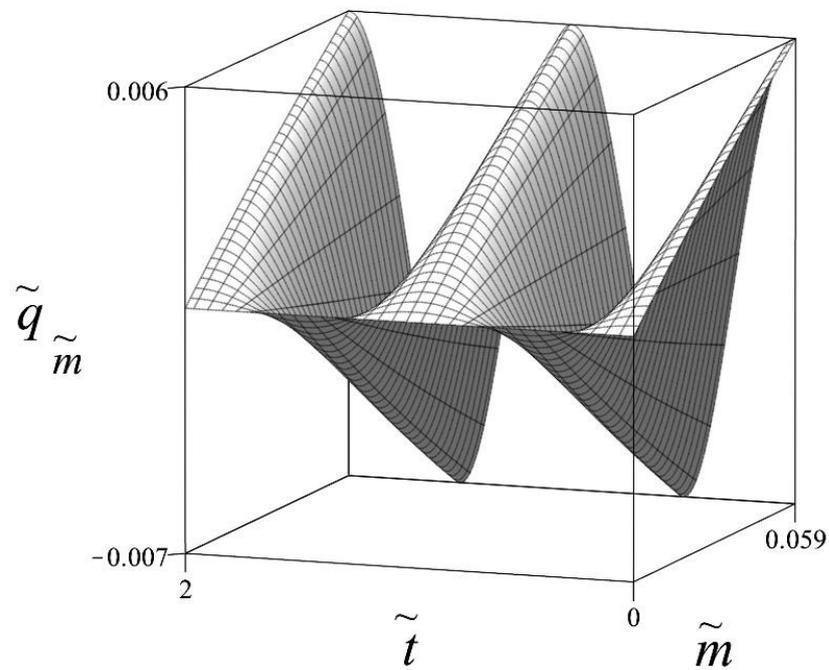


Рисунок 2.29 — График  $\tilde{q}_{\tilde{m}}$  в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при  $\lambda = 0$ .

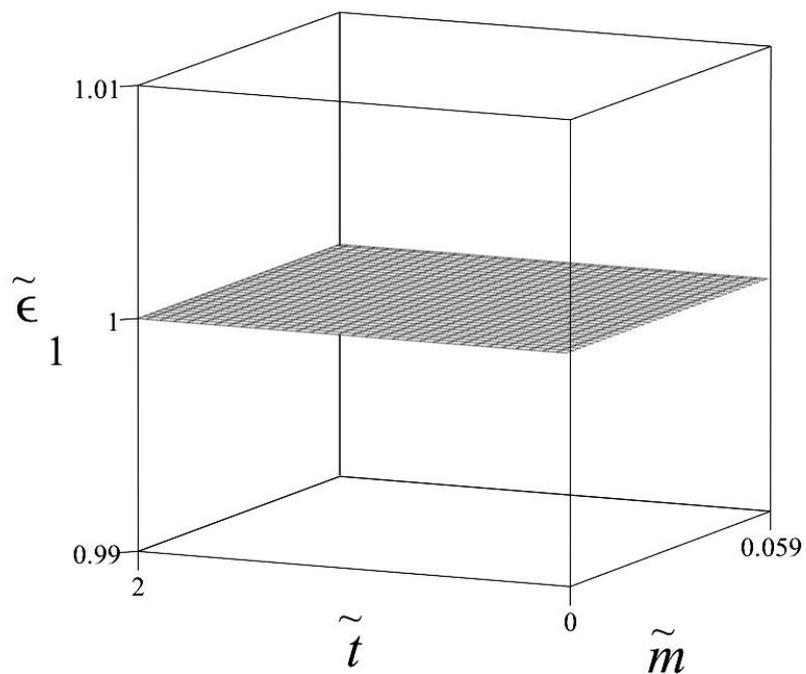


Рисунок 2.30 — Невязка  $\tilde{\epsilon}_1$  в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при  $\lambda = 0$ .

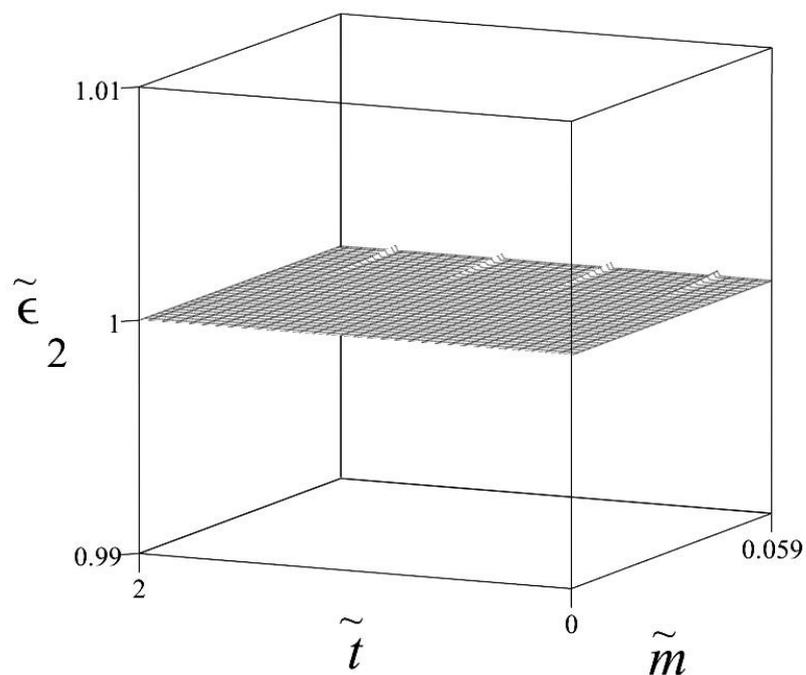


Рисунок 2.31 — Невязка  $\tilde{\epsilon}_2$  в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при  $\lambda = 0$ .

Решение (2.4.8) задачи (2.4.5)–(2.4.7) для первых 8 коэффициентов в частичных суммах каждого из рядов приведено на рисунках 2.12–2.21. Случай  $\lambda = 0$ , который дает  $A = 0$  и  $\alpha = 0$ , при неизменных остальных параметрах приведен на рисунках 2.22–2.31.

На рисунках 2.12–2.15 и 2.22–2.25 изображены графики безразмерных скорости, плотности, давления и температуры для каждой из двух задач. Начальная скорость в обоих случаях отсутствует.

Рисунки 2.16–2.21 и 2.26–2.31 посвящены изучению вопросов невязки уравнений в терминах рассуждений предыдущего параграфа. По-прежнему, невязки крайне малы на отрезке  $[0, \mu]$  и убывают к нулю при уменьшении  $\tilde{m}$ , решение ведет себя регулярно.

## § 2.5. Построение решений в виде разложений по степеням лагранжевых координат

Дифференцируя по времени закон сохранения (2.1.2), можно записать систему уравнений газовой динамики в квадратично-нелинейной форме

$$x_{tt} + p_m = g(m), \quad (2.5.1)$$

$$p_t x_m + \gamma p x_{mt} = 0. \quad (2.5.2)$$

Данные уравнения наиболее удобны для перемножения решений в виде рядов и позволяют при необходимости рассматривать произвольные вещественные значения показателя адиабаты.

В уравнениях (2.5.1)–(2.5.2) можно совершить замену переменной  $b = b(m)$ , тогда

$$x_{tt} + \varphi(b)p_b = g(b), \quad (2.5.3)$$

$$p_t x_b + \gamma p x_{bt} = 0, \quad (2.5.4)$$

где  $\varphi(b) = b'$ . Преобразование массовой переменной в законе сохранения (2.1.2) в свою очередь дает

$$p(\varphi(b)x_b)^\gamma = \sigma(b). \quad (2.5.5)$$

Пусть  $b(0) = 0$ .

Будем искать решение в виде рядов Тейлора по переменной  $b$  в окрест-

ности нуля

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)b^n, \quad (2.5.6)$$

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t)b^n. \quad (2.5.7)$$

По-прежнему предполагается, что в точках  $m = 0$  и  $m = M$  находятся поршни. Таким образом, функции  $A_0(t) = x(0, t)$  и  $B_0(t) = p(0, t)$  представляют собой закон движения поршня, расположенного при  $m = 0$ , и давление на нем соответственно.

Рекуррентные формулы при одинаковых степенях  $b$ , следующие из подстановки (2.5.6) и (2.5.7) в уравнение (2.5.3), зависят от разложения функций  $\varphi(b)$  и  $g(b)$  в степенные ряды

$$\varphi(b) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n b^n, \quad g(b) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n b^n$$

и имеют вид

$$B_1(t) = \frac{D_0 - \ddot{A}_0(t)}{C_0}, \quad B_n(t) = \frac{D_{n-1} - \ddot{A}_{n-1}(t) - \sum_{k=1}^{n-1} k C_{n-k} B_k(t)}{n C_0}, \quad (2.5.8)$$

где  $n = 2, 3, \dots$ . Важно заметить, что  $C_0 = \varphi(0) \neq 0$ , поскольку иначе  $b(m) \equiv 0$  по теореме о существовании и единственности решения задачи Коши. Формула (2.5.8) помогает находить неизвестные  $B_n(t)$  по известным величинам с предыдущих шагов.

Рекуррентные формулы для определения неизвестных  $A_n(t)$  можно вывести, воспользовавшись законом сохранения (2.5.5). Для удобства его можно предварительно разрешить относительно  $x_b$ . При этом коэффициенты находятся последовательно из алгебраических соотношений, получающихся с помощью вычисления  $n$ -й производной по  $b$  от левой и правой частей в точке  $b = 0$  с использованием формул Лейбница и Фаа-ди-Бруно [119]. Для конкретизации итогового решения необходимо задать степенной ряд для энтропийной функции  $\sigma(b)$ , а также величины  $A_0(t)$  и  $B_0(t)$ .

Вычислить неизвестные  $A_n(t)$  также можно на основе продифференцированного закона сохранения энтропии. При подстановке (2.5.6) и (2.5.7) в

уравнение адиабатичности (2.5.4) рекуррентные соотношения принимают вид линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{A}_1(t) + \frac{\dot{B}_0(t)}{\gamma B_0(t)} A_1(t) = 0,$$

$$\dot{A}_n(t) + \frac{\dot{B}_0(t)}{\gamma B_0(t)} A_n(t) = - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k A_k(t) \dot{B}_{n-k}(t) + \gamma B_{n-k}(t) \dot{A}_k(t)}{\gamma B_0(t)} \equiv -K_n(t), \quad (2.5.9)$$

где  $n = 2, 3, \dots$  и давление на поршне отлично от нулевого,  $B_0(t) \neq 0$ . Разрешая уравнения (2.5.9) относительно  $A_n(t)$ , получаем следующие рекуррентные формулы ( $K_1 \equiv 0$ ):

$$A_n(t) = \frac{1}{B_0^{1/\gamma}(t)} \left( A_n(0) B_0^{1/\gamma}(0) - \int_0^t K_n(\tau) B_0^{1/\gamma}(\tau) d\tau \right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.5.10)$$

Согласно (2.5.8) и (2.5.10) все члены рядов также находятся последовательно по заданным функциям  $A_0(t)$  и  $B_0(t)$ , однако вместо задания степенного ряда для энтропийной функции нужно задать постоянные  $A_n(0)$ , которые фактически определяют начальное положение частиц (и начальное распределение плотности  $\rho = 1/x_m$ )

$$x(m, 0) = A_0(0) + A_1(0)b(m) + A_2(0)b^2(m) + \dots$$

В частности, если положить

$$A_0(0) = 0, \quad A_1(0) = 1, \quad A_2(0) = A_3(0) = \dots = A_n(0) = \dots = 0,$$

то  $b(m) = x(m, 0)$  и решение ищется в виде разложения в степенной ряд по лагранжевой начальной координате частиц.

Как и прежде, неизвестные коэффициенты рядов по заданным величинам удобно находить посредством систем компьютерной алгебры. В настоящей диссертации для подобных целей используются символьные вычисления в математическом пакете Maple.

Например, можно получить решение (2.1.6), если задать

$$A_0(t) = 0, \quad B_0(t) = \frac{p_0}{a^\gamma(t)}, \quad b(m) = x(m, 0) = \frac{m}{\rho_0}.$$

Существует возможность найти необходимые  $A_n(0)$  для получения требуемой начальной плотности  $\rho(m, 0)$  при заданном  $b(m)$ . В этом случае известно разложение

$$\rho^{-1}(b, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n b^n.$$

Тогда в силу соотношения  $\rho^{-1}(b, 0) = x_b(b, 0)\varphi(b)$  последовательно находятся величины

$$A_1(0) = \frac{W_0}{C_0}, \quad A_n(0) = \frac{W_{n-1}}{nC_0} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n} \frac{C_{n-k}}{C_0} A_k(0), \quad n = 2, 3, \dots$$

С точки зрения физической реализации граничного условия для давления допускается задавать на поршне температуру, приводящую к нужной зависимости давления от времени. Связь между давлением и искомой температурой  $\theta_p(t)$  определяется из уравнения состояния газа и условия адиабатичности и имеет вид

$$R \theta_p(t) = C_0 A_1(0) B_0^{1/\gamma}(0) B_0^{(\gamma-1)/\gamma}(t).$$

Важно заметить, что данная температура вычисляется на основе только тех величин, которые известны на этапе постановки задачи.

Поскольку функции  $A_0(t)$  и  $B_0(t)$  задаются независимо друг от друга, существует возможность рассмотрения согласованного движения поршня с массой  $M_p$  и площадью поверхности  $S_p$  под действием давления газа и других внешних сил с равнодействующей  $F_p$ . В этом случае связь между функциями имеет вид второго закона Ньютона

$$M_p \ddot{A}_0(t) = -S_p B_0(t) + F_p.$$

Закон движения второго поршня определяется необходимым для существования решения образом. Он представляет собой функцию  $x(M, t)$ , точный вид которой находится после вычисления всех неизвестных коэффициентов соответствующего ряда. Аналогичное справедливо и для начальных данных  $p(m, 0)$  и  $x_t(m, 0)$ .

Возможно также рассмотреть задачу о нахождении необходимого вида

краевых условий  $A_0(t)$  и  $B_0(t)$  для получения требуемых начальных данных  $p(m, 0)$  и  $x_t(m, 0)$ , а именно нужных коэффициентов  $B_n(0)$  и  $\dot{A}_n(0)$ .

Для решения подобной задачи будем искать  $A_0(t)$  и  $B_0(t)$  также в виде степенного ряда

$$A_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n t^n, \quad U_n = \frac{A_0^{(n)}(0)}{n!}, \quad (2.5.11)$$

$$B_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n t^n, \quad V_n = \frac{B_0^{(n)}(0)}{n!}. \quad (2.5.12)$$

При этом сразу получается, что  $U_1 = \dot{A}_0(0)$  и  $V_0 = B_0(0)$ , то есть эти коэффициенты зафиксированы изначально. Коэффициент  $U_0 = A_0(0)$  отражает начальное положение поршня, которое может быть выбрано за точку отсчета оси координат  $Ox$ , в таком случае  $U_0 = 0$ .

Для дальнейших выкладок важно заметить, что величина  $A_1(0) = (\rho(0, 0)C_0)^{-1}$  является отличной от нуля.

При подстановке (2.5.11) и (2.5.12) в (2.5.8) и (2.5.10) находятся остальные коэффициенты

$$V_1 = -\frac{\gamma V_0 \dot{A}_1(0)}{A_1(0)}, \quad U_2 = \frac{D_0 - C_0 B_1(0)}{2}, \quad (2.5.13)$$

$$U_3 = \frac{C_0}{6A_1(0)} \left( 2\gamma V_0 \dot{A}_2(0) + 2V_1 A_2(0) + \gamma B_1(0) \dot{A}_1(0) \right), \quad (2.5.14)$$

$$V_2 = \frac{\gamma V_0}{2A_1(0)} \left( 2C_0 B_2(0) + C_1 B_1(0) - D_1 \right) + \frac{1 + \gamma}{2\gamma V_0} V_1^2 \quad (2.5.15)$$

и так далее. С ростом номеров коэффициентов формулы становятся чрезмерно громоздкими за счет перекрестной рекуррентной природы. Однако будет несложным указать алгоритм итеративного нахождения коэффициентов в общем виде и показать (посредством математической индукции) возможность их нахождения.

Пусть  $n = 1, 2, \dots$ . Прежде всего для удобства стоит связать коэффициенты  $U_{n+1}$  и  $V_n$  в смысловую пару, находящуюся на одной итерации. При нахождении очередной такой пары все предыдущие пары уже известны. При разворачивании рекуррентных выражений на каждом шаге до оператора, воздействующего на функции  $A_0(t)$  и  $B_0(t)$ , становится видно, что получение

очередных требуемых  $\dot{A}_{2n-1}(0)$ ,  $B_{2n-1}(0)$ ,  $\dot{A}_{2n}(0)$ ,  $B_{2n}(0)$  достигается именно за счет подбора нужных  $V_{2n-1}$ ,  $U_{2n}$ ,  $U_{2n+1}$ ,  $V_{2n}$  соответственно. За счет свойств дифференцирования рекуррентные формулы устроены так, что подбор представляет собой решение линейного уравнения, у которого коэффициент при неизвестной отличен от нуля благодаря условию  $A_1(0) \neq 0$ .

Все шаги можно реализовать с использованием символьных вычислений в математическом пакете. Алгоритм для нахождения пары  $V_{2n-1}$ ,  $U_{2n}$  через задание  $\dot{A}_{2n-1}(0)$ ,  $B_{2n-1}(0)$  выглядит следующим образом (для последующей пары процедура аналогичная). Нужно рассмотреть  $A_{2n-1}$  как функцию  $t$  и  $V_{2n-1}$ , а  $B_{2n-1}$  как функцию  $t$  и  $U_{2n}$ , при этом все  $V_k$  и  $U_{k+1}$ , где  $k = 0, 1, \dots, 2n - 2$ , на данном этапе уже просто известные числа с предыдущих этапов. Далее нужно вычислить решение задачи вплоть до коэффициентов  $A_{2n-1}(t, V_{2n-1})$  и  $B_{2n-1}(t, U_{2n})$  по формулам (2.5.8) и (2.5.10) на основе функций

$$A_0(t, U_{2n}) = \sum_{k=0}^{2n-1} U_k t^k + U_{2n} t^{2n}, \quad B_0(t, V_{2n-1}) = \sum_{k=0}^{2n-2} V_k t^k + V_{2n-1} t^{2n-1},$$

после чего найти корни уравнений  $\dot{A}_{2n-1}(0, V_{2n-1}) = \dot{A}_{2n-1}(0)$  и  $B_{2n-1}(0, U_{2n}) = B_{2n-1}(0)$ .

Данный алгоритм фактически отражает рассуждения математической индукции, базу для которой составляют формулы (2.5.13)—(2.5.15).

## § 2.6. Задача о периодическом движении поршней в постоянном гравитационном поле

По аналогии с параграфом 2.3, рассмотрим задачу о периодическом движении поршня при сохраняющихся на нем термодинамических параметрах, однако теперь будем также учитывать действие силы тяжести  $g(m) = -g$ , где  $g$  — величина ускорения свободного падения. Пусть

$$x(0, t) = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \quad p(0, t) = p_0, \quad x(m, 0) = \frac{M}{\delta\rho_0} \left[1 - \exp\left(-\frac{\delta m}{M}\right)\right].$$

В данном случае начальная плотность изменяется вдоль трубы по экспоненциальному закону  $\rho(m, 0) = \rho_0 \exp(\delta m/M)$ . Кроме того,  $p_0 = p(0, 0)$  и  $\rho_0 = \rho(0, 0)$ .

Для введения безразмерных величин выберем параметры  $T/(2\pi)$ ,  $p_0$  и  $\rho_0$ . Рассмотрим растяжения

$$\tilde{t} = \frac{2\pi t}{T}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{p_0}, \quad \tilde{m} = \frac{m}{(T/(2\pi))\sqrt{p_0\rho_0}}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{(T/(2\pi))\sqrt{p_0/\rho_0}}.$$

Тогда  $\tilde{\rho} = \rho/\rho_0$  и  $\tilde{v} = v\sqrt{\rho_0/p_0}$ .

Таким образом, в переменных с верхней волной задача будет иметь вид

$$\tilde{x}_{\tilde{t}\tilde{t}} + \tilde{p}_{\tilde{m}} + \tilde{g} = 0, \quad \tilde{p}_{\tilde{t}}\tilde{x}_{\tilde{m}} + \gamma\tilde{p}\tilde{x}_{\tilde{m}\tilde{t}} = 0, \quad \tilde{t} \in [0, 2\pi], \quad \tilde{m} \in [0, \mu], \quad (2.6.1)$$

$$\tilde{x}(0, \tilde{t}) = \alpha \sin \tilde{t}, \quad \tilde{p}(0, \tilde{t}) = 1, \quad \tilde{x}(\tilde{m}, 0) = \frac{\mu}{\delta} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\delta\tilde{m}}{\mu}\right) \right], \quad (2.6.2)$$

$$\tilde{g} = \sqrt{\frac{\rho_0}{p_0}} \frac{T}{2\pi} g, \quad \alpha = \sqrt{\frac{\rho_0}{p_0}} \frac{2\pi}{T} A, \quad \mu = \frac{M}{(T/(2\pi))\sqrt{p_0\rho_0}}. \quad (2.6.3)$$

Здесь  $\tilde{g}$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$  и  $\mu$  — безразмерные числа.

Выберем  $\alpha = 0.1$  и  $\delta = \mu$ . Последнее условие позволяет сближать поршни за счет варьирования  $\mu$ , не изменяя решения задачи функционально. Пусть также  $\gamma = 7/5$ ,  $T = 4$  с,  $p_0 = 101330$  кг/(м·с<sup>2</sup>) и  $\rho_0 = 1.225$  кг/м<sup>3</sup>. Поскольку  $g = 9.81$  м/с<sup>2</sup>, то  $\tilde{g} \approx 0.022$ . Кроме того,  $A \approx 18.3$  м — достаточно большая амплитуда колебаний поршня в трубе, расположение которой интерпретируется как вертикальное к горизонту. При  $\mu = 1$  величина  $M \approx 224.3$  кг/м<sup>2</sup>.

Решение задачи (2.6.1)–(2.6.3) будем строить в виде рядов

$$\tilde{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}_n(\tilde{t})\tilde{b}^n, \quad \tilde{p} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{B}_n(\tilde{t})\tilde{b}^n, \quad (2.6.4)$$

где  $\tilde{b} = \tilde{x}(\tilde{m}, 0) = 1 - \exp(-\tilde{m})$ . Для первых 16 коэффициентов в частичных суммах каждого из рядов (2.6.4) решение приведено на рисунках 2.32–2.39. На фигурах 2.32–2.35 изображены графики давления, закона движения, скорости и плотности соответственно.

Важно заметить, что уравнение движения в (2.6.1) допускает относительную формулировку вида

$$-\frac{\tilde{x}_{\tilde{t}\tilde{t}} + \tilde{p}_{\tilde{m}}}{\tilde{g}} = 1. \quad (2.6.5)$$

Левая часть (2.6.5) используется в данной задаче в качестве невязки уравнения движения,  $\tilde{\varepsilon}_1 = -(\tilde{x}_{\tilde{t}\tilde{t}} + \tilde{p}_{\tilde{m}}) / \tilde{g}$ . Ее график представлен на рисунке 2.36. Отклонение величины  $\tilde{\varepsilon}_1$  от 1 не превосходит 0.003 по модулю.

На рисунке 2.37 изображена невязка уравнения адиабатичности в (2.6.1) вида

$$\tilde{\varepsilon}_2 = \frac{\tilde{p}_{\tilde{t}} \tilde{x}_{\tilde{m}}}{\gamma \tilde{p}} + \tilde{x}_{\tilde{m}\tilde{t}}.$$

Ее величина имеет порядок  $10^{-6}$ , что можно отнести к характерному значению 0.025 функции  $\tilde{x}_{\tilde{m}\tilde{t}}$ , приведенной на фигуре 2.38. Относительный вариант невязки уравнения адиабатичности

$$\tilde{\varepsilon}_2 = -\frac{\tilde{p}_{\tilde{t}} \tilde{x}_{\tilde{m}}}{\gamma \tilde{p} \tilde{x}_{\tilde{m}\tilde{t}}}$$

представлен на рисунке 2.39 и имеет отклонение от 1 порядка  $6 \cdot 10^{-5}$ .

Важно отметить, что все построенные невязки убывают (или модуль их отклонения от единицы убывает) при уменьшении  $\tilde{m}$ , чего можно добиться, уменьшая  $\mu$ .

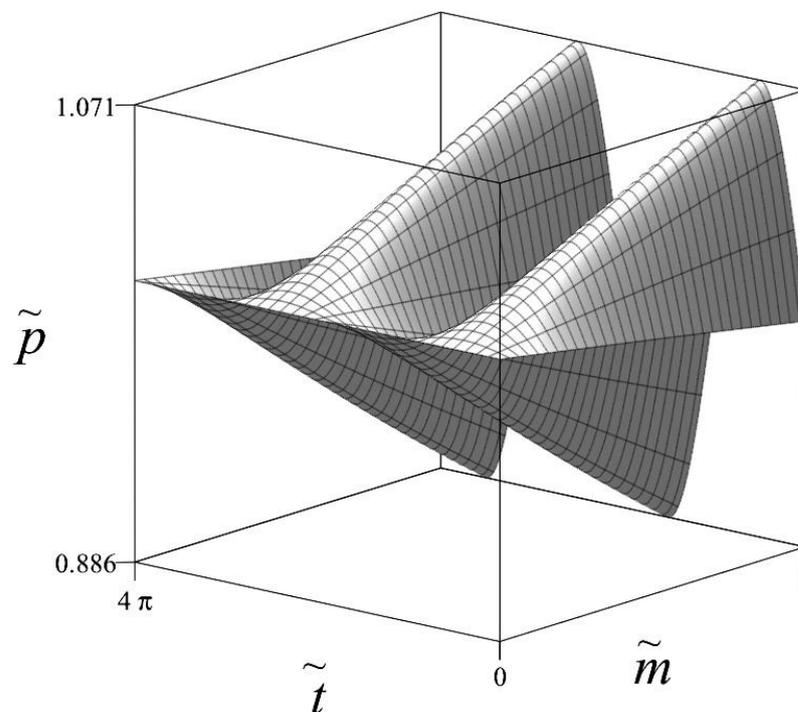


Рисунок 2.32 — График безразмерного давления в задаче (2.6.1)–(2.6.4).

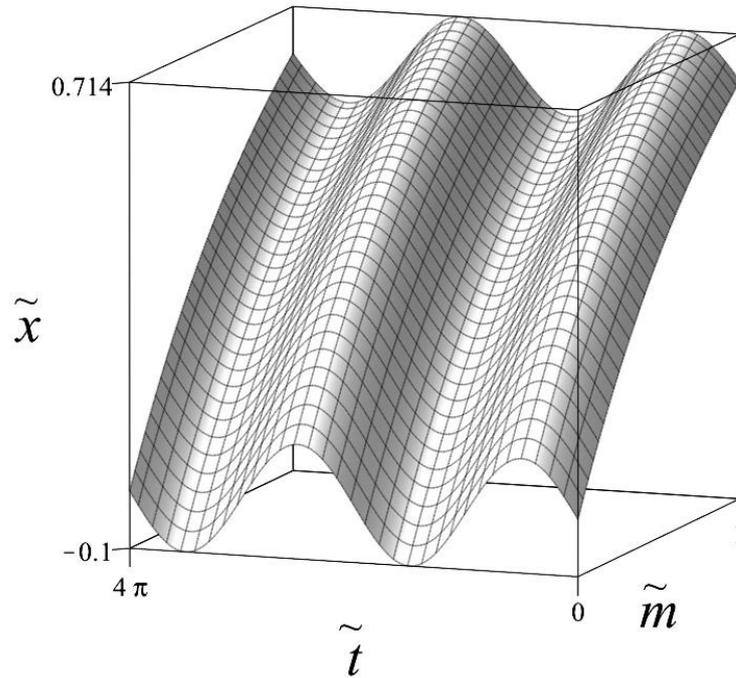


Рисунок 2.33 — График безразмерного закона движения в задаче (2.6.1)–(2.6.4).

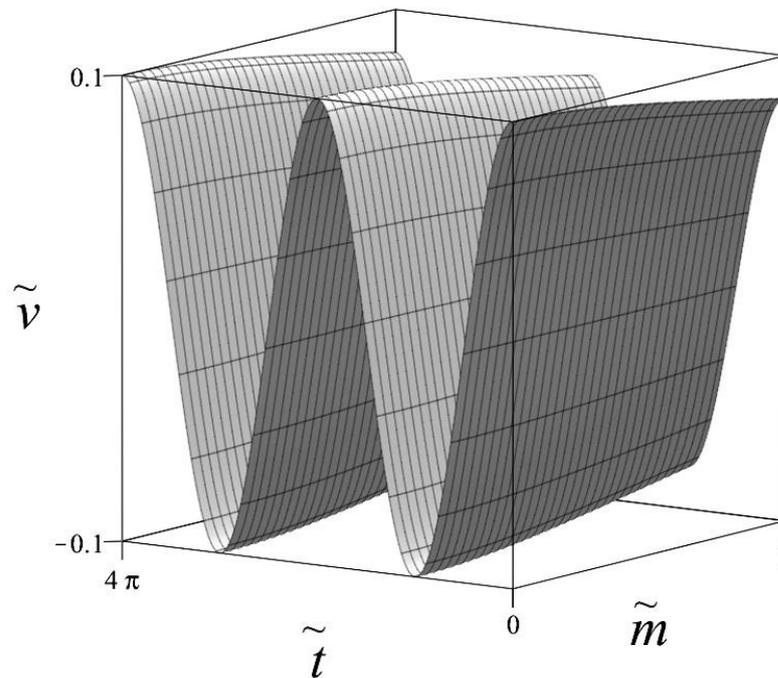


Рисунок 2.34 — График безразмерной скорости в задаче (2.6.1)–(2.6.4).

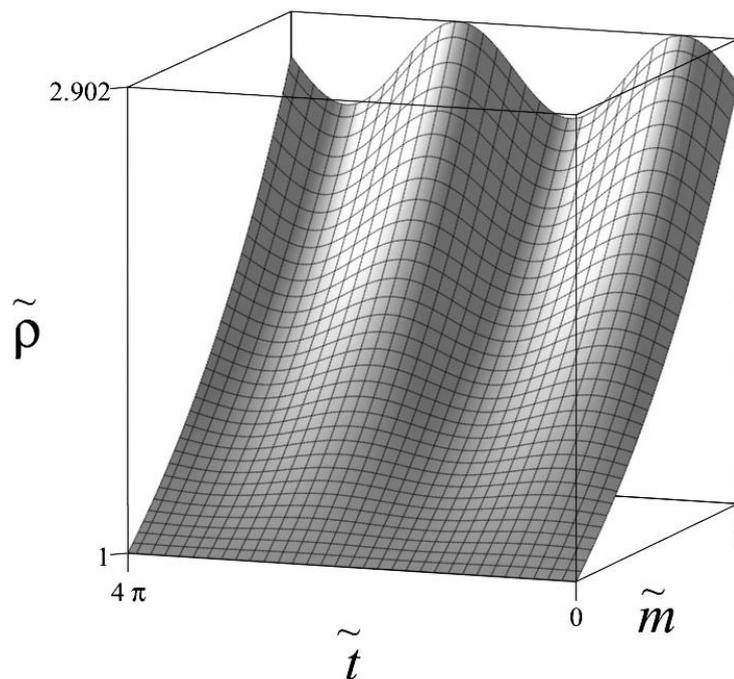


Рисунок 2.35 — График безразмерной плотности в задаче (2.6.1)–(2.6.4).

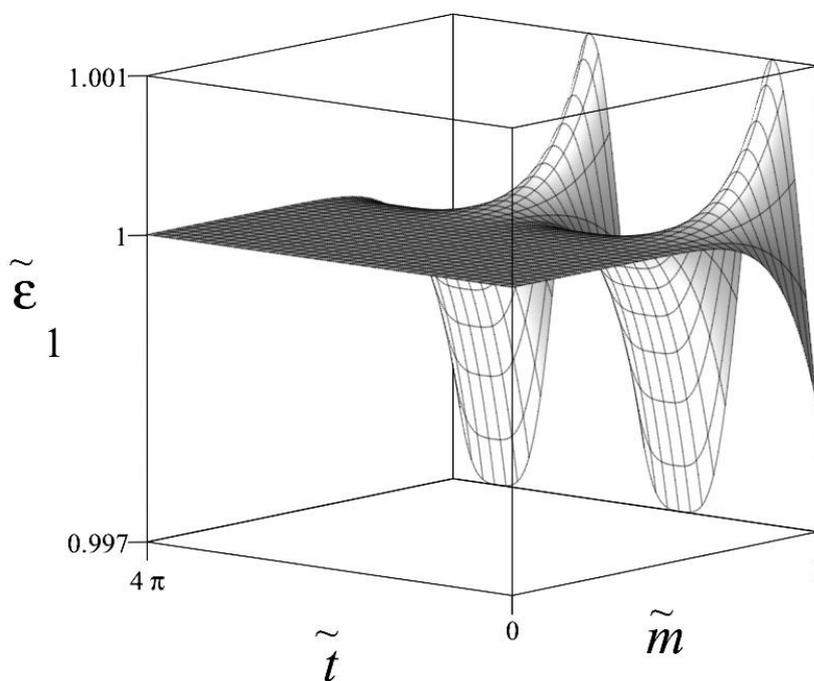


Рисунок 2.36 — Невязка  $\tilde{\epsilon}_1$  в задаче (2.6.1)–(2.6.4).

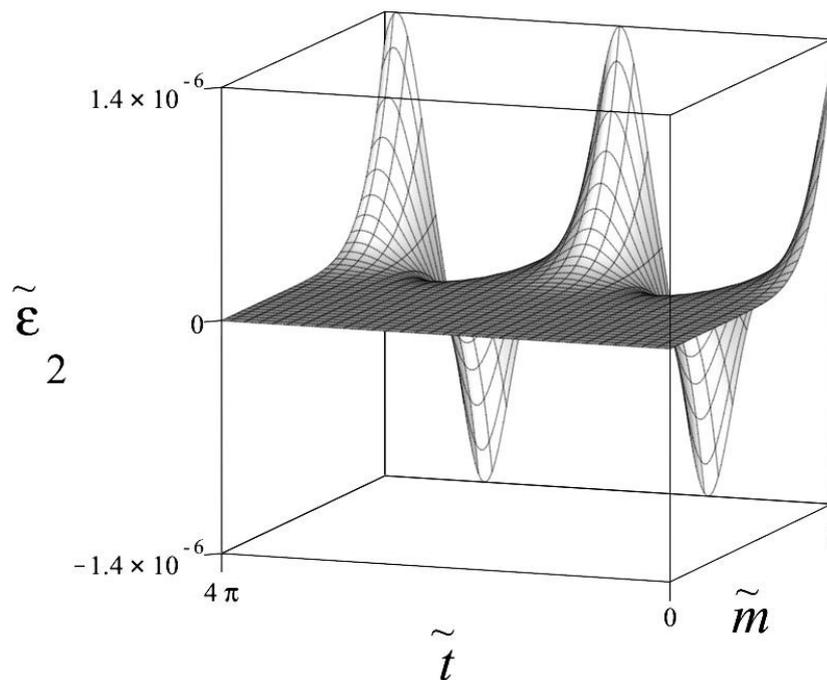


Рисунок 2.37 — Невязка  $\tilde{\epsilon}_2$  в задаче (2.6.1)–(2.6.4).

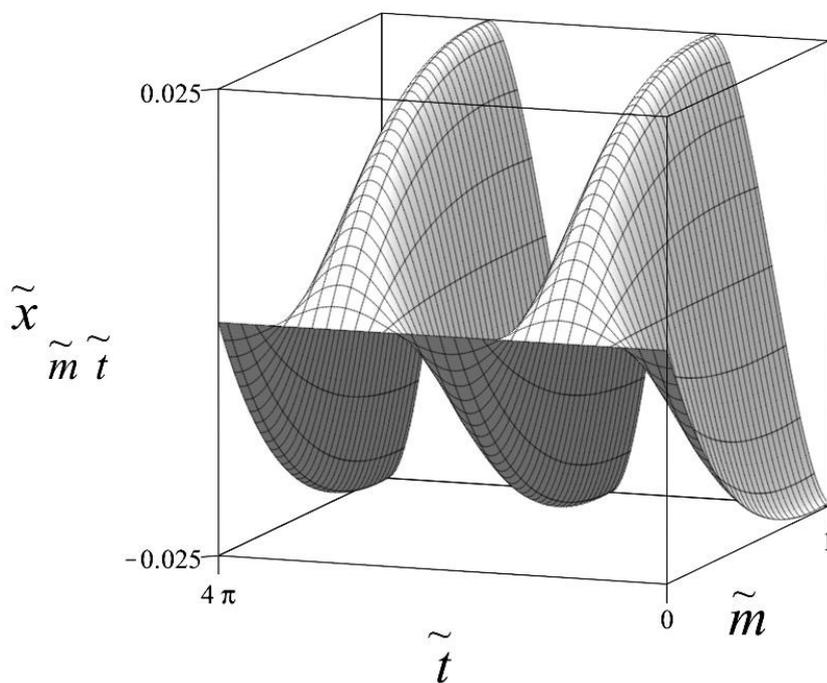


Рисунок 2.38 — График  $\tilde{x}_{\tilde{m}\tilde{t}}$  в задаче (2.6.1)–(2.6.4).

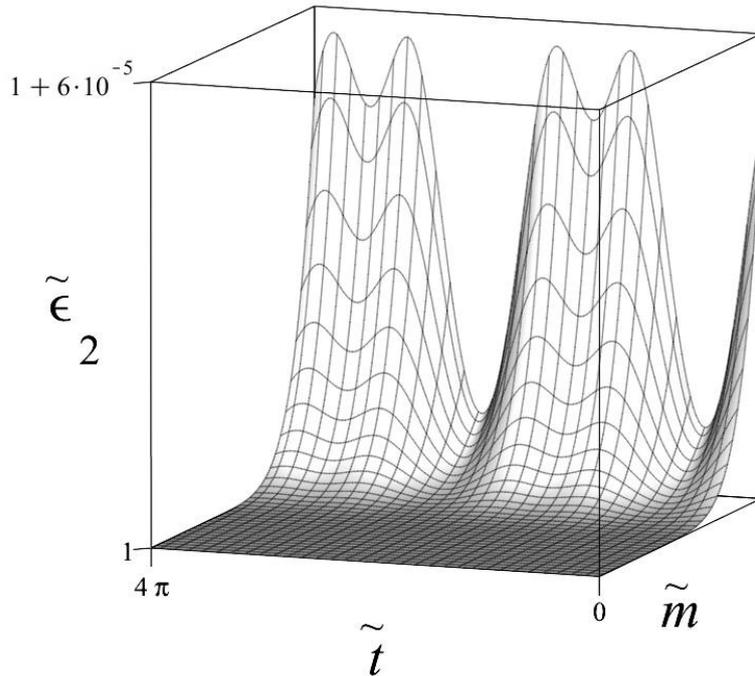


Рисунок 2.39 — Невязка  $\tilde{\epsilon}_2$  в задаче (2.6.1)–(2.6.4).

## § 2.7. Форма Вебера и задача о сильном сжатии газа

Уравнения газовой динамики (2.5.1)–(2.5.2) могут быть сформулированы в так называемой форме Вебера [120], которая обеспечивает инвариантность системы относительно преобразования лагранжевых координат. В этом случае

$$x_{tt}x_{\xi} + h_{\xi} - \frac{h}{c_p}s_{\xi} = 0, \quad (2.7.1)$$

$$h_t x_{\xi} + (\gamma - 1)h x_{\xi t} = 0. \quad (2.7.2)$$

Здесь  $h = h(\xi, t)$  — удельная энтальпия,  $s = s(\xi)$  — удельная энтропия,  $c_p$  — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении и  $\xi$  — произвольная лагранжева координата.

Однако имеет смысл взять переменную удельную энтропию в качестве лагранжевой координаты, то есть положить  $\xi = s$ . Тогда система (2.7.1)–(2.7.2) примет вид

$$x_{tt}x_s + h_s - \frac{h}{c_p} = 0, \quad (2.7.3)$$

$$h_t x_s + (\gamma - 1)h x_{st} = 0. \quad (2.7.4)$$

Аналогичным образом можно построить решения в виде степенных рядов

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) s^n, \quad h = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(t) s^n.$$

Важной особенностью данного случая является отсутствие в уравнении (2.7.3) дополнительного произвола, связанного с наличием функции  $b' = \varphi(b)$ , которую также необходимо раскладывать в ряд Тейлора.

Рекуррентные формулы для коэффициентов рядов устроены следующим образом:

$$A_n(t) = \frac{1}{H_0^{1/(\gamma-1)}(t)} \left( A_n(0) H_0^{1/(\gamma-1)}(0) - \int_0^t L_n(\tau) H_0^{1/(\gamma-1)}(\tau) d\tau \right), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$L_1(t) = 0, \quad L_n(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n} \frac{A_k(t) \dot{H}_{n-k}(t) + (\gamma-1) H_{n-k}(t) \dot{A}_k(t)}{(\gamma-1) H_0(t)}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

$$H_n(t) = \frac{H_{n-1}(t)}{nc_p} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{n} \ddot{A}_k(t) A_{n-k}(t), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Вычисление всех членов происходит последовательно, сначала  $A_1(t)$ , потом  $H_1(t)$ , затем  $A_2(t)$  и так далее, по задаваемым функциям  $A_0(t)$  и  $H_0(t)$ , которые при отсчете удельной энтропии от нуля на поршне имеют смысл закона движения поршня и удельной энтальпии на нем.

Физически удельную энтальпию на поршне допускается задавать с помощью температуры  $\theta_p(t) = H_0(t)/c_p$ . Предполагается, что удельная энтальпия на поршне отлична от нуля.

Также, для получения конкретного решения следует задать величины  $A_n(0)$ , которые фактически определяют начальное положение частиц как функцию энтропии  $x(s, 0) = A_0(0) + A_1(0)s + A_2(0)s^2 + \dots$

Стоит отметить, что плотность и давление выражаются через удельную энтропию и время по формулам

$$\rho(s, t) = \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{h(s, t)}{\sigma(s)} \right)^{1/(\gamma-1)}, \quad p(s, t) = \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{h(s, t)}{\sigma^{1/\gamma}(s)} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

В свою очередь, энтропийная функция связана непосредственно с удельной

энтропией соотношением

$$\sigma(s) = \sigma_0 \exp(s/c_V),$$

где  $c_V$  — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме,  $\gamma = c_p/c_V$ .

В качестве примера решается задача о росте температуры на неподвижной стенке, приводящем к сжатию газа подвижным поршнем. Пусть

$$x(0, t) = 0, \quad h(0, t) = H (1 + 0.1 (t/T)^2), \quad x(s, 0) = A(s/\kappa)^2, \quad c_p = 2\kappa.$$

В данном примере допускается задавать четыре масштаба за счет появления «температурной» размерности, в связи с чем для введения безразмерных величин выбираются параметры  $H$ ,  $A$ ,  $\kappa$  и  $\sigma_0$ . Тогда  $T = A/\sqrt{H}$ .

Рассмотрим растяжения

$$\tilde{x} = x/A, \quad \tilde{h} = h/H, \quad \tilde{s} = s/\kappa, \quad \tilde{t} = (\sqrt{H}/A)t, \quad \tilde{c}_p = c_p/\kappa, \quad \tilde{\sigma} = \sigma/\sigma_0,$$

в этом случае задача будет иметь вид

$$\tilde{x}_{\tilde{t}\tilde{t}}\tilde{x}_{\tilde{s}} + \tilde{h}_{\tilde{s}} - \frac{\tilde{h}}{\tilde{c}_p} = 0, \quad \tilde{h}_{\tilde{t}}\tilde{x}_{\tilde{s}} + (\gamma - 1)\tilde{h}\tilde{x}_{\tilde{s}\tilde{t}} = 0, \quad \tilde{s} \in [0, \Psi], \quad \tilde{t} \geq 0, \quad (2.7.5)$$

$$\tilde{x}(0, \tilde{t}) = \tilde{A}_0(\tilde{t}) \equiv 0, \quad \tilde{h}(0, \tilde{t}) = \tilde{H}_0(\tilde{t}) = 1 + 0.1\tilde{t}^2, \quad \tilde{x}(\tilde{s}, 0) = \tilde{s}^2, \quad \tilde{c}_p = 2. \quad (2.7.6)$$

Кроме того,

$$\tilde{\sigma} = \exp(\gamma\tilde{s}/\tilde{c}_p), \quad \rho = \rho_0\tilde{\rho}, \quad p = p_0\tilde{p},$$

где используются обозначения

$$\rho_0 = \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{H}{\sigma_0} \right)^{1/(\gamma-1)}, \quad p_0 = \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{H}{\sigma_0^{1/\gamma}} \right)^{\gamma/(\gamma-1)},$$

$$\tilde{\rho} = \left( \frac{\tilde{h}}{\tilde{\sigma}} \right)^{1/(\gamma-1)}, \quad \tilde{p} = \left( \frac{\tilde{h}}{\tilde{\sigma}^{1/\gamma}} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

Отметим, что

$$H = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0}, \quad \sigma_0 = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma}.$$

Пусть  $\gamma = 7/5$  (воздух),  $p_0 = 101330$  кг/(м·с<sup>2</sup>) и  $\rho_0 = 1.225$  кг/м<sup>3</sup>. В

задаче присутствует безразмерный параметр  $\psi$ , который определяет область изменения лагранжевой координаты, степень неоднородности энтропии. Заддим  $\psi = 0.1$ , что соответствует изменению удельной энтропии от 0 на стенке, находящейся при  $\tilde{s} = 0$ , до  $50.3 \text{ м}^2/(\text{с}^2 \cdot \text{К})$  на поршне, находящемся при  $\tilde{s} = \psi$ . Решение вида

$$\tilde{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}_n(\tilde{t}) \tilde{s}^n, \quad \tilde{h} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{H}_n(\tilde{t}) \tilde{s}^n \quad (2.7.7)$$

задачи (2.7.5)–(2.7.6) для 10 первых коэффициентов в частичных суммах каждого из рядов представлено на рисунках 2.40–2.46.

Наблюдается сильное сжатие газа, подвижный поршень прижимается к неподвижной стенке. Частицы с большей энтропией обладают более высокой температурой. График  $\tilde{x}$  приведен для моментов  $\tilde{t}$  от 0 до 10. Безразмерные удельная энтальпия  $\tilde{h}$ , давление  $\tilde{p}$  и плотность  $\tilde{\rho}$  помимо данного отрезка также отдельно приведены для  $\tilde{t} \in [0, 0.1]$  с целью подчеркнуть неоднородность распределения термодинамических параметров вдоль трубы. С течением времени данная неоднородность становится менее заметной. За время  $\tilde{t} = 10$  давление успевает вырасти в 4400 раз, а плотность — в 400 раз.

Предположим, что первоначальное расстояние между поршнем и стенкой (длина трубы) равно 1 м, что соответствует значению  $A = 10^2$  м (поскольку  $\tilde{x}(\psi, 0) = 10^{-2}$ ). Как видно из рисунка 2.40, при  $\tilde{t} = 10$  поршень успевает подойти к стенке весьма близко, вычисления дают  $\tilde{x}(\psi, 10) \approx 2.5 \cdot 10^{-5}$ . Данный процесс осуществляется за

$$t = 10 \frac{A}{\sqrt{H}} = 10A \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho_0}{p_0}} \approx 1.86 \text{ с.}$$

Вычислим невязку уравнений при переходе от рядов к их частичным суммам. Важно заметить, что невязку уравнения (2.7.3), оно же первое уравнение в (2.7.5), можно определить в относительном виде (в силу положительности удельной энтальпии  $h$ ), если переписать (2.7.3) в форме

$$c_p (x_{tt} x_s + h_s) / h - 1 = 0. \quad (2.7.8)$$

Обозначим  $\tilde{\varepsilon}_1 = \tilde{c}_p (\tilde{x}_{\tilde{t}\tilde{t}} \tilde{x}_{\tilde{s}} + \tilde{h}_{\tilde{s}}) / \tilde{h} - 1$ . Величина  $\tilde{\varepsilon}_1$  представлена на рисунке

2.47. Исходя из данного графика, видно, что безразмерное уравнение (2.7.8) выполняется с пренебрежимо малой относительной погрешностью, ее порядок  $10^{-10}$ . Невязку оставшегося уравнения определим в виде

$$\tilde{\varepsilon}_2 = \frac{\tilde{h}_{\tilde{t}} \tilde{x}_{\tilde{s}}}{(\gamma - 1) \tilde{h}} + \tilde{x}_{\tilde{s}\tilde{t}}.$$

Ее порядок составляет  $10^{-9}$ , что можно нормировать на характерное значение 0.075 функции  $\tilde{x}_{\tilde{s}\tilde{t}}$ . Графики  $\tilde{\varepsilon}_2$  и  $\tilde{x}_{\tilde{s}\tilde{t}}$  приведены на рисунках 2.48 и 2.49 соответственно. На рисунке 2.50 изображен график функции

$$\tilde{\varepsilon}_2 = \frac{\tilde{h}_{\tilde{t}} \tilde{x}_{\tilde{s}}}{(\gamma - 1) \tilde{h} \tilde{x}_{\tilde{s}\tilde{t}}} + 1,$$

которая представляет собой относительный вариант невязки  $\tilde{\varepsilon}_2$  и имеет порядок  $10^{-7}$ . Из фигур 2.48–2.50 видно, что погрешностью уравнения (2.7.4), оно же второе уравнение в (2.7.5), также можно пренебречь.

Важно отметить, что в рассмотренном примере, как и прежде, максимальная погрешность убывает при уменьшении верхней границы области изменения лагранжевой координаты.

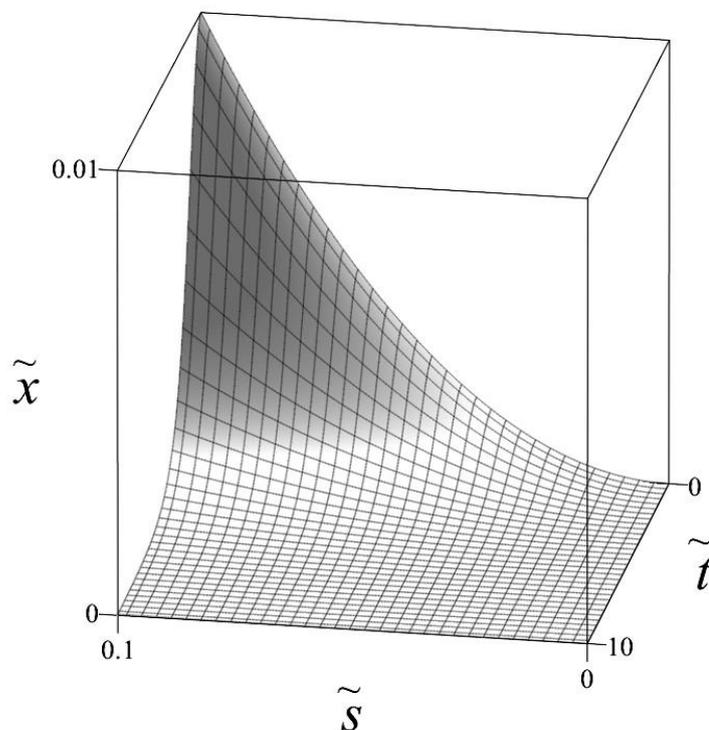


Рисунок 2.40 — График безразмерного закона движения в задаче (2.7.5)–(2.7.7).

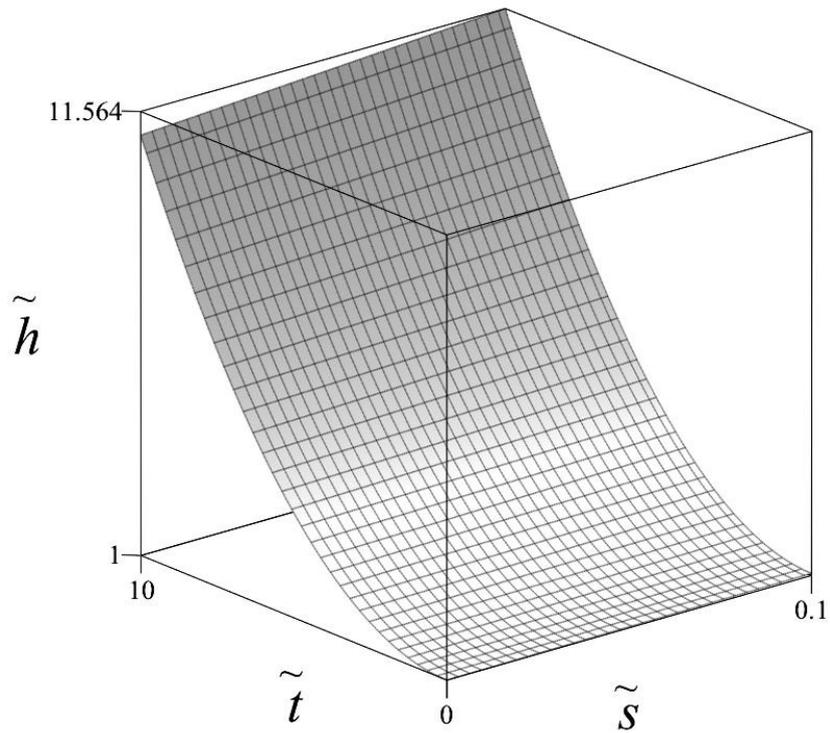


Рисунок 2.41 — График безразмерной энтальпии в задаче (2.7.5)–(2.7.7) при  $\tilde{t}$  от 0 до 10.

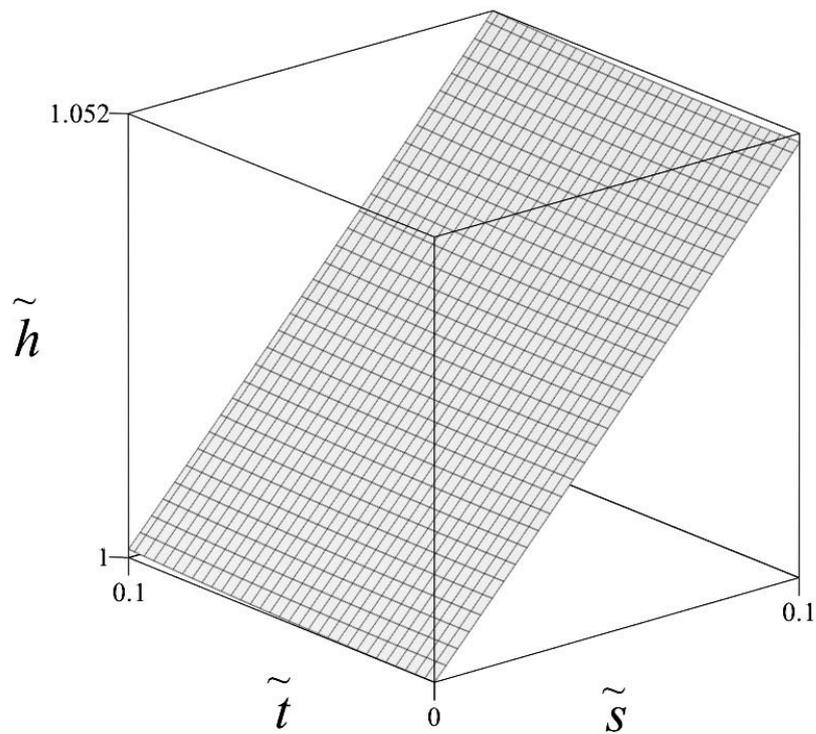


Рисунок 2.42 — График безразмерной энтальпии в задаче (2.7.5)–(2.7.7) при  $\tilde{t}$  от 0 до 0.1.

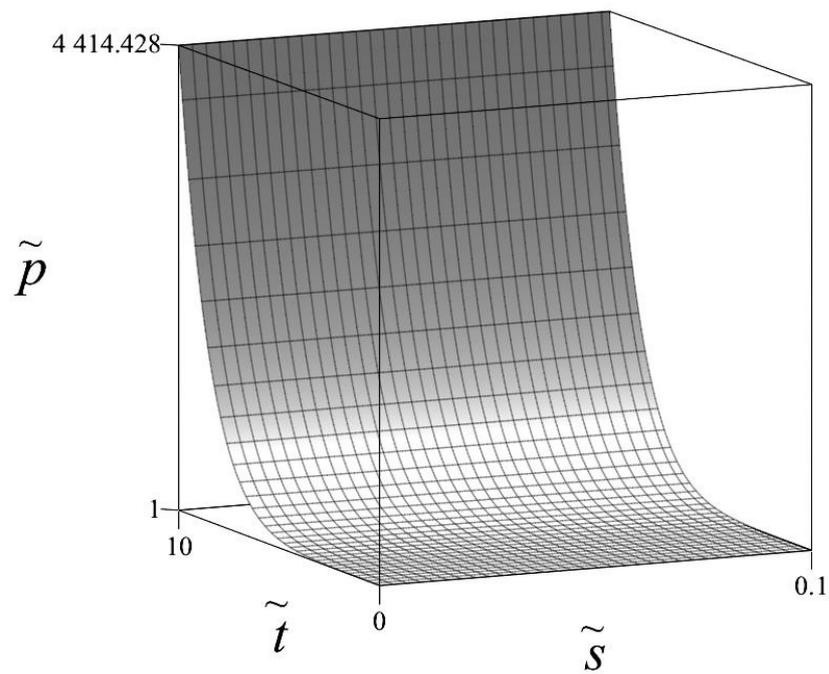


Рисунок 2.43 — График безразмерного давления в задаче (2.7.5)–(2.7.7) при  $\tilde{t}$  от 0 до 10.

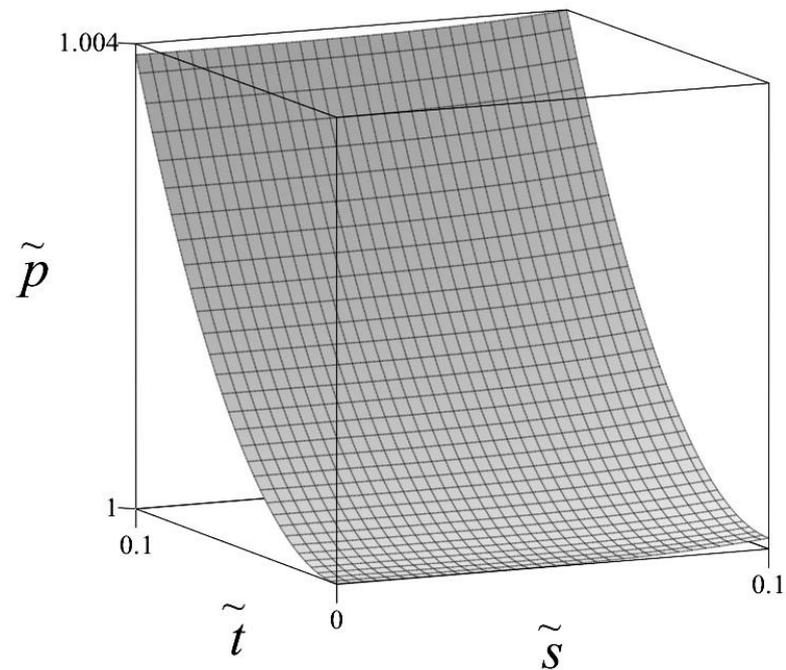


Рисунок 2.44 — График безразмерного давления в задаче (2.7.5)–(2.7.7) при  $\tilde{t}$  от 0 до 0.1.

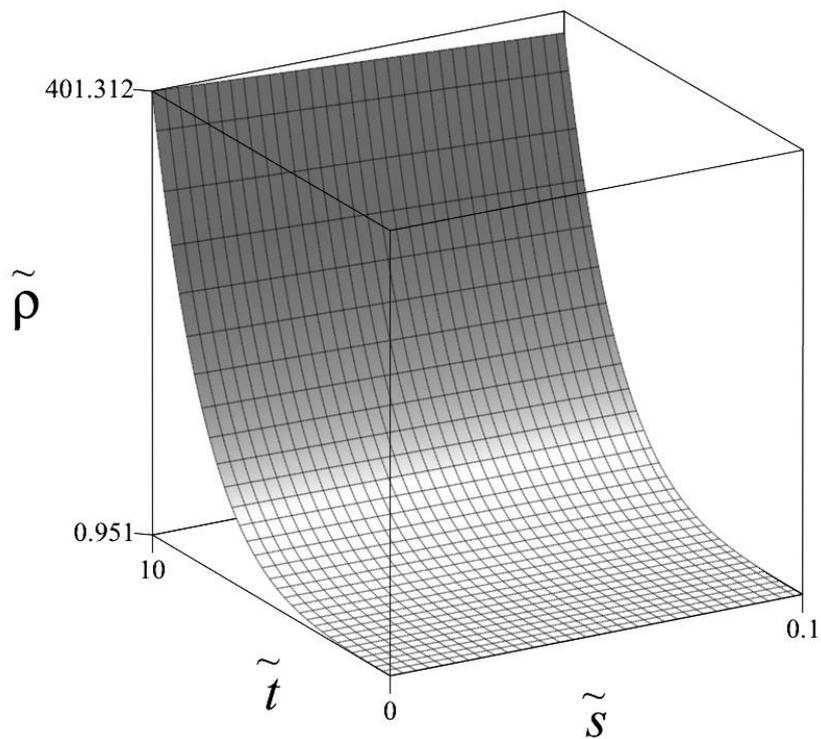


Рисунок 2.45 — График безразмерной плотности в задаче (2.7.5)–(2.7.7) при  $\tilde{t}$  от 0 до 10.

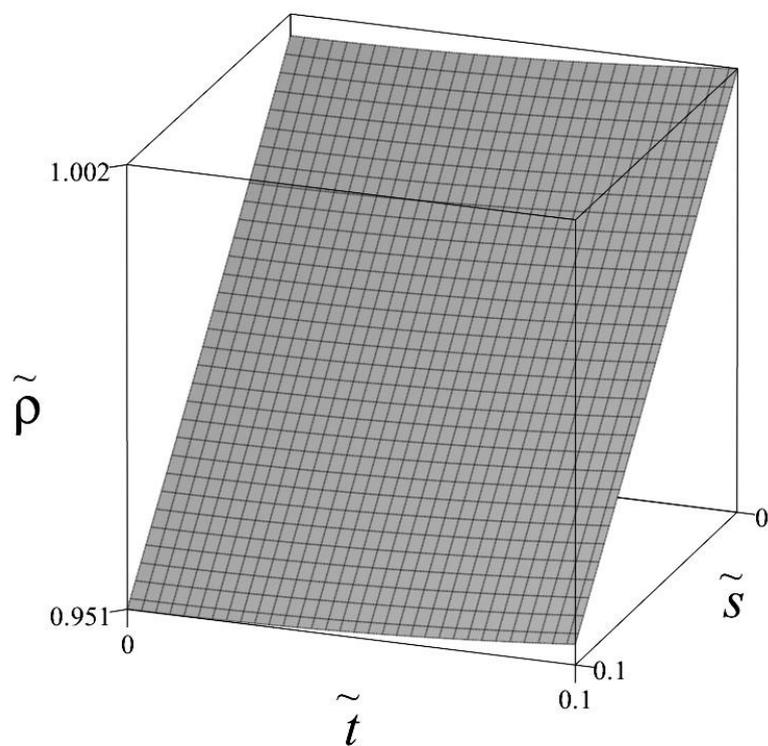


Рисунок 2.46 — График безразмерной плотности в задаче (2.7.5)–(2.7.7) при  $\tilde{t}$  от 0 до 0.1.

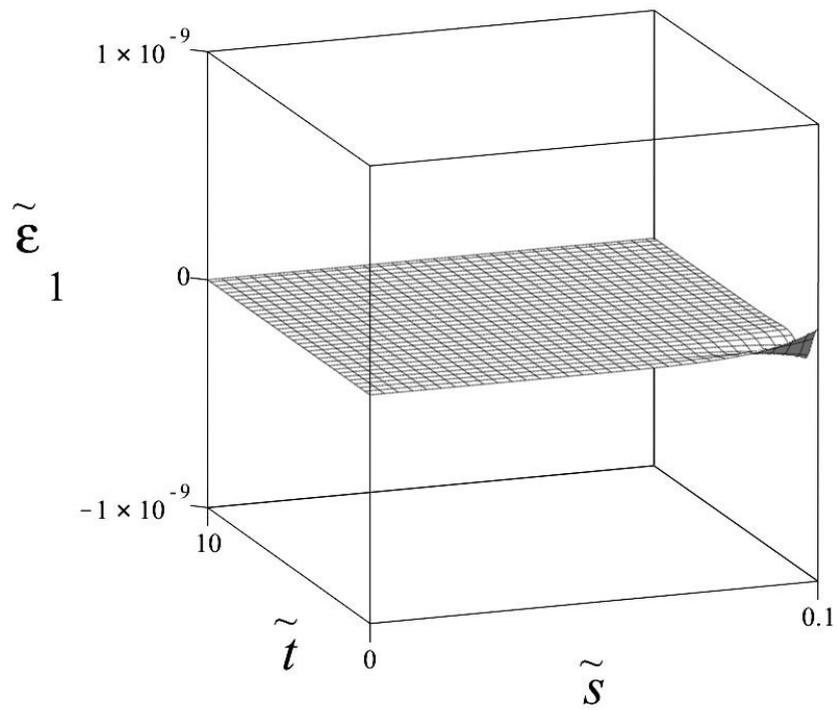


Рисунок 2.47 — Невязка  $\tilde{\varepsilon}_1$  в задаче (2.7.5)–(2.7.7).

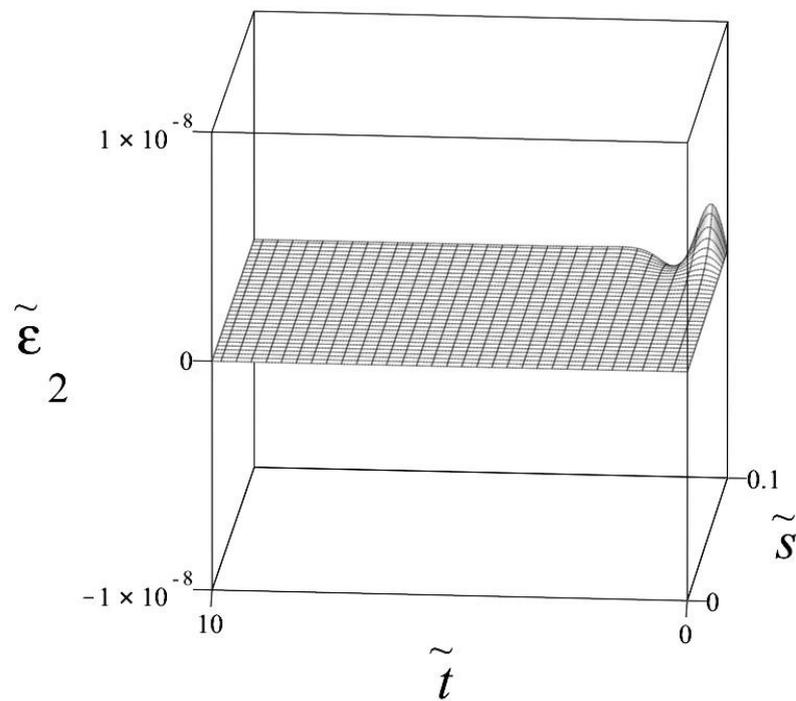


Рисунок 2.48 — Невязка  $\tilde{\varepsilon}_2$  в задаче (2.7.5)–(2.7.7).

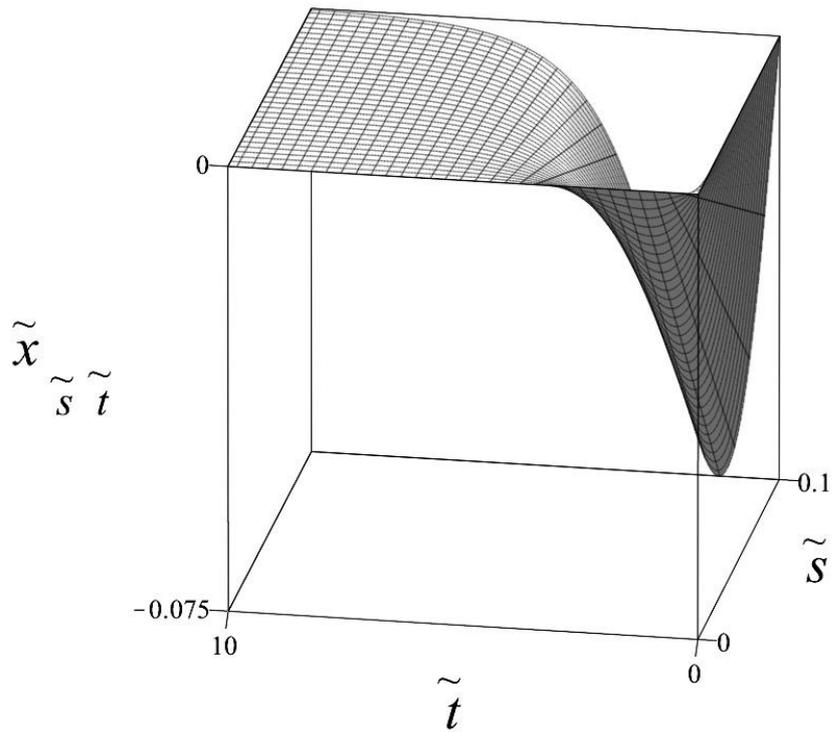


Рисунок 2.49 — График  $\tilde{x}_{\tilde{s}\tilde{t}}$  в задаче (2.7.5)–(2.7.7).

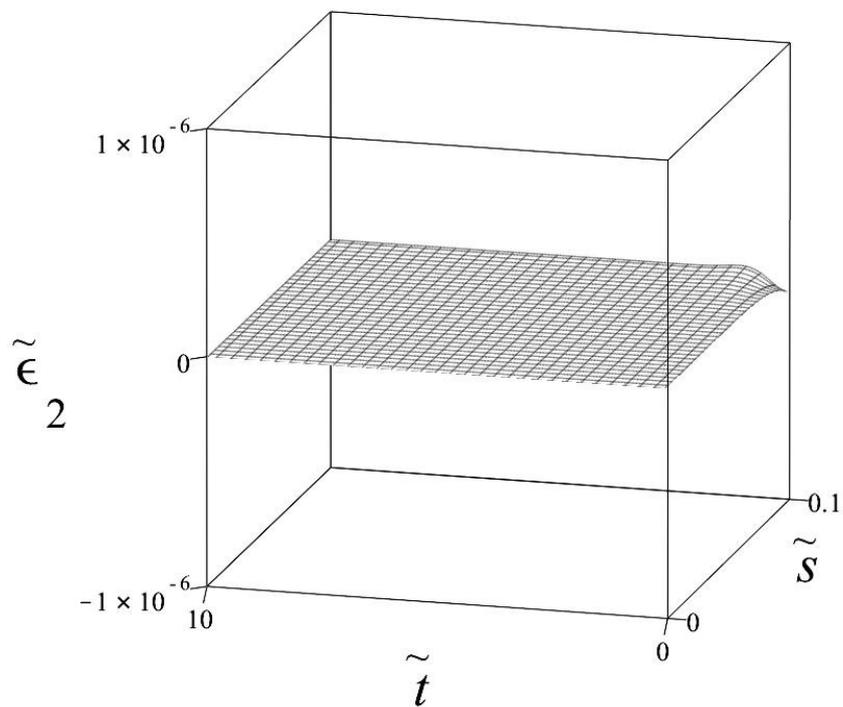


Рисунок 2.50 — Невязка  $\tilde{\epsilon}_2$  в задаче (2.7.5)–(2.7.7).

## § 2.8. Построение решений в виде разложений по степеням специальных функций от времени

В уравнениях (2.5.1)–(2.5.2) можно совершить замену переменной  $a = a(t)$ . Пусть  $a$  удовлетворяет дифференциальному уравнению  $\dot{a}^2/2 = U(a)$  и условию  $a(0) = 0$ , то есть определяется некоторым гамильтонианом. Преобразованная система будет иметь вид

$$2U(a)x_{aa} + \frac{dU(a)}{da}x_a + p_m = g(m), \quad (2.8.1)$$

$$p_a x_m + \gamma p x_{ma} = 0. \quad (2.8.2)$$

В уравнение (2.8.1) входит потенциал  $U(a)$ , который определяет характер динамики, и массовая сила  $g(m)$ . Для самогравитирующего газа в однородном поле тяготения, как было отмечено ранее, будем иметь  $g(m) = -g - Gm$ . Можно также учесть наличие в заряженном газе замороженного удельного электрического заряда в рамках идеальной электрогидродинамики [30, 121].

Будем искать решение в виде ряда Тейлора по переменной  $a$  в окрестности нуля

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(m)a^n, \quad (2.8.3)$$

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(m)a^n. \quad (2.8.4)$$

При этом начальные условия выражаются через первые члены рядов в виде

$$x(m, 0) = A_0(m), \quad x_t(m, 0) = \pm\sqrt{2U(0)}A_1(m), \quad p(m, 0) = B_0(m). \quad (2.8.5)$$

По теореме о существовании и единственности решения задачи Коши для  $a(t)$ , нельзя считать  $U(0) = 0$ , что приводит к  $a \equiv 0$ .

При подстановке (2.8.3)–(2.8.4) в уравнение адиабатичности (2.8.2) и перемножении рядов по правилу Коши при одинаковых степенях  $a$  получаются рекуррентные соотношения вида

$$B_n(m)A'_0(m) + \gamma B_0(m)A'_n(m) = - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n} \left[ A'_k(m)B_{n-k}(m) + \gamma B_k(m)A'_{n-k}(m) \right], \quad (2.8.6)$$

где  $n = 1, 2, \dots$  и правая часть равняется нулю при  $n = 1$ . Следует заметить, что функция  $A'_0(m)$ , вообще говоря, не может быть тождественно равна нулю в силу ее механического смысла — величина обратная начальной плотности,  $A'_0(m) = x_m(m, 0) = \rho^{-1}(m, 0)$ .

Рекуррентные соотношения, следующие из уравнения движения (2.8.1), зависят от разложения функции  $U(a)$

$$U(a) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n a^n \quad (2.8.7)$$

и имеют вид

$$2n(n-1)C_0 A_n(m) + \sum_{k=1}^{n-1} k(n+k-2)C_{n-k} A_k(m) + B'_{n-2}(m) = \delta_n^2 g(m), \quad (2.8.8)$$

где  $n = 2, 3, \dots$  и  $\delta_j^i$  — символы Кронекера. При  $n > 2$  правая часть равна нулю. Как было замечено выше,  $U(0) = C_0 > 0$ .

Соотношения (2.8.6) и (2.8.8) устроены так, что все члены рядов находятся последовательно на основе функций  $A_0(m)$ ,  $A_1(m)$  и  $B_0(m)$ , заданных начальными условиями (2.8.5). Рекуррентные формулы имеют вид

$$B_1(m) = -\frac{\gamma B_0(m) A'_1(m)}{A'_0(m)}, \quad A_2(m) = \frac{g(m) - B'_0(m)}{4C_0} - \frac{C_1 A_1(m)}{4C_0}, \quad (2.8.9)$$

$$B_{n-1}(m) = -\frac{\gamma B_0(m) A'_{n-1}(m)}{A'_0(m)} - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{n-1-k}{n-1} \times \\ \times \frac{A'_k(m) B_{n-1-k}(m) + \gamma B_k(m) A'_{n-1-k}(m)}{A'_0(m)}, \quad (2.8.10)$$

$$A_n(m) = -\frac{B'_{n-2}(m)}{2n(n-1)C_0} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n+k-2)}{2n(n-1)} \frac{C_{n-k}}{C_0} A_k(m), \quad (2.8.11)$$

где  $n = 3, 4, \dots$

Соотношения (2.8.9)–(2.8.11) позволяют вычислять коэффициенты рядов для произвольного разложения (2.8.7) функции  $U(a)$ . При проведении расчетов целесообразно пользоваться средствами компьютерной алгебры, поскольку ручное вычисление коэффициентов сопряжено с громоздкими вы-

кладками.

Ниже представлен список некоторых преобразований  $a(t)$  и соответствующий им вид потенциала  $U(a)$

$$a(t) = \sin t, \quad U(a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a^2,$$

$$a(t) = \operatorname{sh} t, \quad U(a) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a^2,$$

$$a(t) = \operatorname{th} t, \quad U(a) = \frac{1}{2} - a^2 + \frac{1}{2}a^4,$$

$$a(t) = \operatorname{tg} t, \quad U(a) = \frac{1}{2} + a^2 + \frac{1}{2}a^4.$$

Из соотношений (2.8.9)–(2.8.11) следует, что равновесные начальные условия, то есть условия вида

$$A_0 = A_0(m), \quad A_1(m) \equiv 0, \quad B_0(m) = \int g(m)dm + C,$$

всегда приводят к равновесному решению

$$x(m, t) \equiv A_0(m), \quad p(m, t) \equiv B_0(m).$$

Таким образом, начальное равновесие сохраняется во все последующие моменты времени при любом  $U(a)$ .

Для того чтобы использовать построенные решения в расчетах, необходимо совершить переход от рядов к их частичным суммам. С целью контроля точности такой процедуры можно вычислить сохраняющуюся во времени энтропийную функцию  $\sigma(m)$ , известную из начальных условий по формуле (2.1.2), и сравнить ее точное значение с этой же величиной, но уже вычисленной на основе построенных частичных сумм рядов. При этом удобно воспользоваться относительной погрешностью

$$r(m, t) = \left| \frac{p(m, t) (x_m(m, t))^Y - B_0(m) (A'_0(m))^Y}{B_0(m) (A'_0(m))^Y} \right|. \quad (2.8.12)$$

Здесь предполагается, что ряды  $p(m, t)$  и  $x(m, t)$  представлены с помощью своих частичных сумм. Относительная энтропийная погрешность (2.8.12) фактически представляет собой невязку закона сохранения энтропии (2.1.2).

Граничные условия в рамках данного подхода определяются необходимым для существования решения образом, например в виде непротекания на поверхностях пары поршней, в области между которыми происходит рассматриваемое движение газа. Законы движения поршней находятся после вычисления решения задачи и представляются функциями  $x(0, t)$  и  $x(M, t)$ , где  $t \in [0, M]$ .

Однако можно рассмотреть задачу о линейном выражении закона движения одного из поршней через функцию  $a(t)$ . Пусть координате поршня отвечает точка  $m = M$ , задача Коши поставлена в переменных  $(m, a)$  на прямой  $a = 0$ , и начальные условия  $\{A_0(m), A_1(m), B_0(m)\}$  согласуются, по предположению, с краевыми условиями, так что отсутствуют начальные разрывы. Требуется определить подходящее  $U(a)$ , то есть найти  $a(t)$  и соответствующий закон движения поршня  $x(M, t) = A_0(M) + A_1(M)a(t)$ , где  $A_1(M) \neq 0$ .

Для удобства можно выбрать  $A_1(M) = 1$ , тогда  $x_t(M, 0) = \dot{a}(0) = \pm\sqrt{2C_0}$ . В данном случае разложения (2.8.3)–(2.8.4) функций  $x$  и  $p$  по степеням  $a(t) = x(M, t) - x(M, 0)$  будут давать ряд Тейлора по переменной  $x(M, t)$  в окрестности точки  $x(M, 0)$ .

В соответствии с (2.8.3) получается, что

$$A_2(M) = A_3(M) = \dots = A_n(M) = \dots = 0.$$

Этим равенствам можно удовлетворить, если на каждой итерации рекуррентных формул непосредственно перед вычислением очередного  $A_n(m)$  полагать

$$C_1 = g(M) - B'_0(M) \quad \text{при } n = 2, \quad C_{n-1} = -\frac{B'_{n-2}(M)}{n-1} \quad \text{при } n = 3, 4, \dots$$

Таким образом, функция  $U(a)$  выстраивается в процессе решения задачи Коши в переменных  $(m, a)$ . В конечном счете

$$U(a) = C_0 + g(M)a - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B'_n(M)}{n+1} a^{n+1} = C_0 + g(M)a - \int_0^a p_m(M, \xi) d\xi.$$

Вид  $U(a)$  зависит от показателя адиабаты, начальных условий, массовой силы и задаваемого наперед  $C_0$ . Все эти величины влияют на вычисление коэффициентов решения задачи Коши в виде рядов, на основе которых

строится  $U(a)$ . Зависимость  $a$  от  $t$  определяется через потенциал  $U(a)$  из соответствующих дифференциального уравнения и начального условия.

Указанные рассуждения оказываются полезными при решении следующей задачи. Пусть начальные данные имеют вид

$$A_0(m) = m/\rho_0, \quad A_1(m) = m/M, \quad B_0(m) = p_0, \quad (2.8.13)$$

а массовые силы отсутствуют,  $g(m) = 0$ . Функция  $A_1(m)$  рассматривается безразмерной.

Линейность начальной скорости по  $m$  и постоянство начальных плотности и давления в соответствии с (2.8.9)–(2.8.11) приводят к тому, что при любых постоянных  $C_n$  имеют место зависимости  $x(m, t) = m\phi_1(t)$  и  $p(m, t) = \phi_2(t)$ , где  $\phi_1(t)$  и  $\phi_2(t)$  — некоторые функции времени. Отсюда следует, что  $x(0, t) \equiv 0$ , то есть поршень в точке  $m = 0$  неподвижен.

Задача нахождения закона движения поршня в точке  $m = M$  в виде  $x(M, t) = A_0(M) + A_1(M)a(t)$  дает, в свою очередь, что  $C_n = 0$  для любого натурального  $n$ , поскольку  $B'_{n-1}(M) = 0$ . Следовательно,  $U(a) \equiv C_0$  и  $a(t) = \pm\sqrt{2C_0}t = Vt$ . В итоге, закон движения второго поршня будет иметь вид  $x(M, t) = M/\rho_0 + Vt$ .

Таким образом, с помощью определения в рамках изложенной теории  $a(t) = x(M, t) - x(M, 0) = Vt$  при начальных условиях (2.8.13) и отсутствии массовых сил, решается задача Коши с граничными условиями

$$x_{tt} + p_m = 0, \quad p_t x_m + \gamma p x_{mt} = 0, \quad t \geq 0, \quad m \in [0, M], \quad (2.8.14)$$

$$x(m, 0) = m/\rho_0, \quad x_t(m, 0) = Vm/M, \quad p(m, 0) \equiv p_0, \quad (2.8.15)$$

$$x(0, t) \equiv 0, \quad x(M, t) = M/\rho_0 + Vt, \quad (2.8.16)$$

которая моделирует процесс расширения (сжатия) газа в трубе с подвижным поршнем при  $m = M$  и неподвижной стенкой при  $m = 0$ . Задача (2.8.14)–(2.8.16) имеет точное решение, принадлежащее классу решений с однородной деформацией [3]

$$x(m, t) = m \frac{1 + (\rho_0/M)Vt}{\rho_0}, \quad p(m, t) = \frac{p_0}{[1 + (\rho_0/M)Vt]^\gamma}. \quad (2.8.17)$$

Решение, получаемое по формулам (2.8.9)–(2.8.11), представляет собой разложение в ряд Тейлора по переменной  $Vt$  в окрестности 0 решения (2.8.17).

Следует отметить, что в данной задаче функция  $r(m, t)$  равна относительной погрешности частичной суммы ряда давления

$$r(m, t) = \left| \frac{p(m, t) - [1 + (\rho_0/M)Vt]^{-\gamma} p_0}{[1 + (\rho_0/M)Vt]^{-\gamma} p_0} \right|.$$

При  $|(\rho_0/M)Vt| < 1$  ряд функции  $[1 + (\rho_0/M)Vt]^{-\gamma}$  сходится.

## § 2.9. Основные результаты главы

1. В рамках одномерной нестационарной газовой динамики с плоскими волнами разработан подход к построению безударных решений задач о движении газа в трубе при наличии пары поршней и неоднородной удельной энтропии в виде степенных рядов по лагранжевым координатам или специальным функциям от времени.

2. Все члены рядов находятся последовательно из рекуррентных формул по заданным краевым или начальным условиям, для вычисления коэффициентов целесообразно использовать средства компьютерной алгебры.

3. Решены задачи о периодических колебаниях поршней без учета и с учетом силы тяжести, о согласованном движении газа и одного из поршней при колебаниях температуры на его поверхности, включая частный случай неподвижного поршня, а также задача о сильном сжатии газа.

4. Сформулированы математические обоснования и теоретические предпосылки развитого подхода.

5. Допускается выбирать квадратично-нелинейную форму уравнений газовой динамики, наиболее удобную для перемножения рядов и обеспечивающую возможность рассмотрения произвольных действительных значений показателя адиабаты.

6. Подробно исследованы разложения по степеням массовой координаты, начального положения частиц и переменной удельной энтропии.

7. Рассмотрена задача о построении решения в виде степенного ряда по закону движения одного из поршней в окрестности его начального положения.

## ГЛАВА 3\*

### ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОЛУГОДОГРАФА

Метод годографа [12, 116–118] позволяет линеаризовать систему уравнений одномерной нестационарной газовой динамики с плоскими волнами в случае баротропных течений и решить точно класс задач Коши с аналитическими начальными условиями (например, можно отметить работу [9]). В данной главе излагается метод полугодографа, дающий возможность распространить идеи построения решений в виде степенных рядов, которым была посвящена предыдущая глава в частном случае модели совершенного газа, на случай более общих уравнений состояния.

Для этого совершается переход от переменных: скорость, удельный объем как функций времени и массы к переменным: время, скорость как функций массы и удельного объема при заданной произвольной зависимости давления от последней пары переменных. В результате система остается квадратично-нелинейной, а функция давления становится известной и входит в виде переменных коэффициентов в линейном уравнении, что позволяет эффективно строить решения в рядах для задач с переменной удельной энтропией. При этом остается удобным ставить условия на поршне.

#### § 3.1. Различные виды преобразования полугодографа

Вводя переменные  $v = x_t$  и  $w = x_m$ , уравнение движения газа при отсутствии массовых сил можно записать в виде

$$v_t + p_m = 0, \quad (3.1.1)$$

$$v_m - w_t = 0. \quad (3.1.2)$$

Здесь соотношение (3.1.2) фактически играет роль уравнения совместности — равенство смешанных производных.

Пусть уравнение состояния газа имеет вид

$$p = p(m, w). \quad (3.1.3)$$

---

\* При подготовке данной главы диссертации использовались следующие публикации автора, в которых, согласно «Положению о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова», отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [105].

Например, для адиабатического процесса в случае газа Ван-дер-Ваальса [116, 122]

$$p(m, w) = \frac{\sigma(m)}{(w - b)^\gamma} - \frac{a}{w^2}. \quad (3.1.4)$$

Данная модель является более общей по сравнению с моделью совершенного газа. Параметр  $a$  учитывает силы притяжения между молекулами, а параметр  $b$  — их суммарный объем.

Таким образом, давление является известной величиной в терминах  $m$  и  $w$ , что наводит на мысль сделать их новыми независимым переменным, считая  $v$  и  $t$  искомыми функциями. В этом случае система уравнений газовой динамики (3.1.1)–(3.1.3) принимает вид

$$v_w + p_m(m, w) t_w - p_w(m, w) t_m = 0, \quad (3.1.5)$$

$$v_m t_w - v_w t_m = 1. \quad (3.1.6)$$

Уравнение (3.1.6) фактически говорит о том, что якобиан преобразования пар новых зависимых и независимых переменных должен быть равен единице.

Какой бы ни была зависимость  $p(m, w)$ , система (3.1.5)–(3.1.6) остается квадратично-нелинейной, что удобно для построения решений в виде степенных рядов. Например, при поиске решения в виде разложений по массовой лагранжевой переменной

$$t = \sum_{n=0}^{\infty} t_n(w) m^n, \quad v = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(w) m^n$$

с учетом известности

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(w) m^n$$

получаются следующие рекуррентные соотношения:

$$t_1(w) = \frac{p_1(w) t'_0(w) + v'_0(w)}{p'_0(w)}, \quad v_1(w) = \frac{1 + t_1(w) v'_0(w)}{t'_0(w)}, \quad (3.1.7)$$

$$\begin{aligned} n p'_0(w) t_n(w) = & \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) [p_{k+1}(w) t'_{n-1-k}(w) - p'_{n-1-k}(w) t_{k+1}(w)] + \\ & + n p_n(w) t'_0(w) + v'_{n-1}(w), \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

$$n t'_0(w) v_n(w) = \sum_{k=1}^{n-1} [k t_k(w) v'_{n-k}(w) - (n-k) t'_k(w) v_{n-k}(w)] + n t_n(w) v'_0(w), \quad (3.1.9)$$

где  $n = 2, 3, \dots$ . Функции  $t(0, w) = t_0(w)$  и  $v(0, w) = v_0(w)$  конкретизируют рассматриваемое решение.

Предполагается, что при  $m = 0$  и  $m = M$  расположены поршни. Данное обстоятельство показывает преимущество преобразования полуугодографа по сравнению с обычным преобразованием годографа — граничные условия фактически ставятся так же, как и до преобразования.

Дополнительно заметим, что если сделать новыми независимыми переменными  $m$  и  $p$ , считая  $v$  и  $t$  искомыми функциями, а  $w$  — заданной (определяется моделью газа), то получится следующая система уравнений:

$$v_p = t_m, \quad (3.1.10)$$

$$t_p v_m - t_m v_p = w_p(m, p). \quad (3.1.11)$$

После введения в системе (3.1.10)–(3.1.11) функции  $u$  по формулам  $v = u_m$  и  $t = u_p$  первое уравнение будет удовлетворяться в силу равенства смешанных производных, а второе примет вид

$$u_{mm} u_{pp} - u_{mp}^2 = w_p(m, p). \quad (3.1.12)$$

Уравнение (3.1.12) называется неоднородным уравнением Монжа-Ампера. Оно является достаточно хорошо изученным (можно отметить книгу [123, §7.2.2] и серию работ Д. В. Туницкого [124–131]), однако его использование не всегда удобно. Например, в случае модели газа Ван-дер-Ваальса целесообразнее пользоваться системой (3.1.4)–(3.1.6).

### § 3.2. Обобщение решения задачи об однородном разлете газа Ван-дер-Ваальса

Рассмотрим задачу об однородном разлете (сжатии) газа в случае произвольной модели  $p(m, w)$ . Пусть  $t = t_0(w)$ . На основе уравнения (3.1.6) получается соотношение

$$v = v_1(w)m + v_0(w), \quad v_1(w) = 1/t'_0(w).$$

Уравнение (3.1.5), в свою очередь, определяет условие, которому должна удовлетворять модель для существования данного решения

$$p(m, w) = \frac{t_0''(w)}{2t_0'(w)}m^2 - \frac{v_0'(w)}{t_0'(w)}m + p_0(w). \quad (3.2.1)$$

Здесь  $t_0(w)$ ,  $v_0(w)$  и  $p_0(w)$  — задаваемые функции.

Наоборот, рассмотрим модель Ван-дер-Ваальса  $p(m, w)$  в виде (3.1.4). В этом случае уравнение (3.2.1) дает

$$\sigma(m) = \sigma_2 m^2 + \sigma_1 m + \sigma_0,$$

где

$$\sigma_2 = -\frac{(v_1^2(w))'}{4}(w-b)^\gamma, \quad \sigma_1 = -v_1(w)v_0'(w)(w-b)^\gamma, \\ \sigma_0 = \left(p_0(w) + \frac{a}{w^2}\right)(w-b)^\gamma.$$

Таким образом, функции  $t_0(w)$ ,  $v_0(w)$  и  $p_0(w)$  будут иметь вид

$$t_0(w) = \tau_0 + \int \frac{dw}{v_1(w)}, \quad v_0(w) = u_0 - \sigma_1 \int \frac{dw}{v_1(w)(w-b)^\gamma}, \quad (3.2.2)$$

$$v_1^2(w) = u_1 + \frac{4\sigma_2}{(\gamma-1)(w-b)^{\gamma-1}}, \quad p_0(w) = \frac{\sigma_0}{(w-b)^\gamma} - \frac{a}{w^2}. \quad (3.2.3)$$

Здесь  $\tau_0$ ,  $u_0$  и  $u_1$  — постоянные интегрирования.

Решение об однородном разлете (сжатии) газа Ван-дер-Ваальса (3.2.2)–(3.2.3) можно обобщить в виде степенных рядов по массовой лагранжевой координате. Для конкретизации формул (3.1.7)–(3.1.9) необходимо разложить в ряд заданную энтропийную функцию

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n m^n,$$

после чего определить

$$p_0(w) = \frac{\sigma_0}{(w-b)^\gamma} - \frac{a}{w^2}, \quad p_n(w) = \frac{\sigma_n}{(w-b)^\gamma}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Решение (3.2.2)–(3.2.3) является частным случаем данного класса решений.

При необходимости приведения задачи к безразмерному виду удобно воспользоваться параметрами  $a$ ,  $b$  и  $M$

$$m = M\tilde{m}, \quad w = b\tilde{w}, \quad v = \sqrt{a/b} \tilde{v}, \quad t = Mb\sqrt{b/a} \tilde{t}, \quad p = b^{-2}a\tilde{p}, \quad \sigma = b^{\gamma-2}a\tilde{\sigma}.$$

Опуская волну сверху у растянутых переменных, уравнения (3.1.4)–(3.1.6) принимают вид

$$v_w + \frac{\sigma'(m)}{(w-1)^\gamma} t_w + \left[ \frac{\gamma\sigma(m)}{(w-1)^{\gamma+1}} - \frac{2}{w^3} \right] t_m = 0,$$

$$v_m t_w - v_w t_m = 1, \quad w \gg 1, \quad m \in [0, 1].$$

### § 4.3. Основные результаты главы

1. Для одномерных нестационарных движений газа с плоскими волнами совершено преобразование: время и скорость сделаны новыми неизвестными функциями, а масса и удельный объем — новыми независимыми переменными, в результате чего давление становится заданным в терминах пары последних величин и определяется выбранной моделью газа, а квадратичная нелинейность преобразованной системы делает удобным построение решений в классе степенных рядов с учетом неоднородности удельной энтропии.

2. Постановка граничных условий на поршне имеет такой же вид, как и до преобразования, что является преимуществом метода по сравнению с обычным преобразованием годографа.

3. Получено решение в виде разложений по степеням массовой лагранжевой переменной, которое используется в частном случае для обобщения решения задачи об однородном разлете (сжатии) газа Ван-дер-Ваальса.

## ГЛАВА 4\*

### ТРЕХВОЛНОВОЙ РЕЗОНАНС В СТАЦИОНАРНОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ ЗАДАЧЕ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

В настоящей главе исследуется вопрос существования нелинейного трехволнового резонанса [48, 53] в стационарной задаче газовой динамики. Рассматривается изэнтропическое потенциальное течение совершенного газа, слабо возмущающее однородный сверхзвуковой фон. Решение системы ищется в виде трех медленно изменяющихся волн с особым резонансным соотношением, при котором выводятся так называемые амплитудно-фазовые уравнения. Указанная система решается, после чего изучается вопрос о том, каким граничным условиям построенное решение должно удовлетворять, и как их можно интерпретировать физически.

#### § 4.1. Постановка задачи, вывод уравнений и граничных условий

Рассмотрим двумерное стационарное изэнтропическое потенциальное течение совершенного идеального газа. Введем систему координат  $Oxy$  и запишем систему уравнений газовой динамики в форме

$$\frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right) + h = C, \quad (4.1.1)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \left( h(\gamma - 1) - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \left( h(\gamma - 1) - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right) - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0, \quad (4.1.2)$$

где  $\varphi$  — потенциал скорости,  $h$  — удельная энтальпия,  $C$  — постоянная в интеграле Бернулли (4.1.1),  $\gamma$  — показатель адиабаты. Уравнение (4.1.2) есть следствие уравнений неразрывности и адиабатичности.

Пусть течение представляет собой относительно малые возмущения однородного сверхзвукового фона. Фоновое поле скорости параллельно оси  $Ox$ . Тогда  $\varphi$  и  $h$  будут иметь вид

$$h(x, y) = h_0 + \varepsilon H(x, y, \varepsilon), \quad \varphi(x, y) = V_0 x + \varepsilon \Phi(x, y, \varepsilon),$$

---

\* При подготовке данной главы диссертации использовались следующие публикации автора, в которых, согласно «Положению о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова», отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [56, 91–93, 95, 109].

где  $h_0$  — фоновая энтальпия,  $V_0$  — фоновая скорость.

Осуществив подстановку, получим слабонелинейное уравнение на возмущение  $\Phi$ , низшая степень нелинейности которого — квадратичная

$$\begin{aligned} & \left[ a_0^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - (V_0^2 - a_0^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right] - \left[ (\gamma + 1) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + (\gamma - 1) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right] \times \\ & \times V_0 \varepsilon - \left[ 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \left( \frac{\gamma + 1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\gamma - 1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \left( \frac{\gamma - 1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\gamma + 1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right) \right] \varepsilon^2 = 0, \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

где  $a_0 = \sqrt{h_0(\gamma - 1)}$  — фоновая скорость звука. В дальнейшем звездочкой обозначается комплексное сопряжение, а штрихом — операция дифференцирования по аргументу.

Будем искать возмущения в виде трех гармонических волн, для каждой из которых пары волновых чисел связаны дисперсионным уравнением, соответствующим линейному приближению, а амплитуда  $\alpha_j$  и сдвиг фазы  $\beta_j$  медленно изменяются по координате  $x$  [48]. Таким образом, рассматривается

$$\Phi = \sum_{j=1}^3 (\Phi_j(\varepsilon x) \exp(i\theta_j) + \Phi_j^*(\varepsilon x) \exp(-i\theta_j)), \quad (4.1.4)$$

$$\Phi_j(\varepsilon x) = \alpha_j(\varepsilon x) \exp(i\beta_j(\varepsilon x)), \quad \theta_j = k_j y - l_j x, \quad l_j = \frac{k_j}{\sqrt{M_0^2 - 1}}, \quad (4.1.5)$$

где  $M_0 = V_0/a_0 > 1$  — фоновое число Маха.

Подставим (4.1.4) в (4.1.3) и заметим, что величины первого порядка малости сократятся в силу выполнения дисперсионных соотношений в (4.1.5). Для величин второго порядка будем иметь

$$\begin{aligned} & (V_0^2 - a_0^2) \sum_{j=1}^3 l_j (\Phi_j'(\varepsilon x) \exp(i\theta_j) - \Phi_j^{*'}(\varepsilon x) \exp(-i\theta_j)) = \\ & = \frac{\gamma + 1}{2} V_0 \left[ \sum_{j=1}^3 l_j (\Phi_j(\varepsilon x) \exp(i\theta_j) - \Phi_j^*(\varepsilon x) \exp(-i\theta_j)) \right] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[ \sum_{j=1}^3 l_j^2 (\Phi_j(\varepsilon x) \exp(i\theta_j) + \Phi_j^*(\varepsilon x) \exp(-i\theta_j)) \right] + \\
& + \frac{\gamma - 1}{2} V_0 \left[ \sum_{j=1}^3 l_j (\Phi_j(\varepsilon x) \exp(i\theta_j) - \Phi_j^*(\varepsilon x) \exp(-i\theta_j)) \right] \times \\
& \times \left[ \sum_{j=1}^3 k_j^2 (\Phi_j(\varepsilon x) \exp(i\theta_j) + \Phi_j^*(\varepsilon x) \exp(-i\theta_j)) \right] + \\
& + V_0 \left[ \sum_{j=1}^3 k_j (\Phi_j(\varepsilon x) \exp(i\theta_j) - \Phi_j^*(\varepsilon x) \exp(-i\theta_j)) \right] \times \\
& \times \left[ \sum_{j=1}^3 k_j l_j (\Phi_j(\varepsilon x) \exp(i\theta_j) + \Phi_j^*(\varepsilon x) \exp(-i\theta_j)) \right]. \quad (4.1.6)
\end{aligned}$$

Предположим, что выполняется специальное резонансное условие синхронизации фаз:  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \equiv 0$ . Выберем некоторое волновое число  $k_1$ , тогда  $k_2 = rk_1$  и  $k_3 = -(1+r)k_1$ . Пусть  $r \in \mathbb{Z} \setminus \{-3, \pm 2, \pm 1, 0\}$ . Уравнение (4.1.6) допускает ортогонализацию с помощью умножения на  $\exp(-i\theta_j)$  (где  $j = 1, 2, 3$ ) и интегрирования по  $y$  на интервале  $[0, 2\pi/k_1]$ . В результате получаем амплитудно-фазовые уравнения взаимодействия трех нелинейных волн

$$\Phi_1'(\xi) = C_1 \Phi_2^*(\xi) \Phi_3^*(\xi), \quad (4.1.7)$$

$$\Phi_2'(\xi) = C_2 \Phi_3^*(\xi) \Phi_1^*(\xi), \quad (4.1.8)$$

$$\Phi_3'(\xi) = C_3 \Phi_1^*(\xi) \Phi_2^*(\xi). \quad (4.1.9)$$

Здесь

$$C_j = -\frac{\lambda}{l_j} \left[ \frac{\gamma + 1}{2} (l_m l_n^2 + l_n l_m^2) + \frac{\gamma - 1}{2} (l_m k_n^2 + l_n k_m^2) + k_m k_n l_n + k_n k_m l_m \right],$$

$$C_1 = -\sigma r(1+r)k_1^2, \quad C_2 = -\sigma(1+r)k_1^2, \quad C_3 = \sigma r k_1^2,$$

$$\lambda = \frac{V_0}{V_0^2 - a_0^2}, \quad \sigma = \frac{\gamma + 1}{2} V_0 \lambda^2, \quad \xi = \varepsilon x.$$

Отметим важные свойства коэффициентов уравнений взаимодействия: они вещественны, не равны нулю, не одного знака, а их произведение всегда положительно.

Данные коэффициенты также можно получить с помощью усредненно-го лагранжиана Уизема [132].

В силу неравенства треугольника, резонансного условия и линейности дисперсионного соотношения аналогичные трехмерные задачи газовой динамики всегда вырождаются в коллинеарный случай. Отсутствие дисперсии в среде усложняет физическую реализацию резонансных условий в виде синхронизации фаз [55].

Если в решаемой задаче фон не сверхзвуковой, то явление трехволнового взаимодействия не будет существовать, оно присуще гиперболическим системам.

При  $r = 1$  и  $r = -2$  две волны сливаются, в результате чего будет иметь место двухволновое взаимодействие [53, §8.5] результирующей моды со своей второй гармоникой. При  $r = 2$  и  $r = -3$  явления трехволнового и двухволнового взаимодействий происходят одновременно — первая волна резонирует со своей второй гармоникой и одновременно с этим происходит резонанс всей тройки. Уравнения данных взаимодействий также можно получить с помощью указанной ортогонализации.

Обсудим физическую интерпретацию решения. Можно считать, что течение задается произвольными значениями  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$  в точке  $x = 0$ , а также граничными условиями непротекания через две поверхности, в области между которыми происходит рассматриваемое движение газа. Фактически речь идет о волнистых верхней и нижней стенках в плоском сопле.

Для нахождения формы поверхностей  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  вычислим проекции вектора скорости  $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$

$$v_x = V_0 + 2\varepsilon \sum_{j=1}^3 l_j \alpha_j(\varepsilon x) \cos\left(-\frac{\pi}{2} + k_j y - l_j x + \beta_j(\varepsilon x)\right) + 2\varepsilon^2 \times$$

$$\times \sum_{j=1}^3 \left[ \alpha'_j(\varepsilon x) \cos(k_j y - l_j x + \beta_j(\varepsilon x)) + \alpha_j(\varepsilon x) \beta'_j(\varepsilon x) \cos\left(\frac{\pi}{2} + k_j y - l_j x + \beta_j(\varepsilon x)\right) \right],$$

$$v_y = 2\varepsilon \sum_{j=1}^3 k_j \alpha_j(\varepsilon x) \cos\left(\frac{\pi}{2} + k_j y - l_j x + \beta_j(\varepsilon x)\right),$$

после чего определим границы асимптотически, исходя из условия непроте-

кания  $v_n = 0$

$$-y'_i(x)v_x(x, y_i(x)) + v_y(x, y_i(x)) = 0, \quad y_i(x) = y_i(0) + \frac{2\varepsilon}{V_0} \times \\ \times \sum_{j=1}^3 \frac{k_j}{l_j} \alpha_j(0) \left[ \cos(k_j y_i(0) + \beta_j(0)) - \cos(k_j y_i(0) - l_j x + \beta_j(0)) \right] + O(\varepsilon^2),$$

где  $i = 1, 2$  и  $x \ll 1/\varepsilon$ .

Таким образом, задача решается полуобратным методом: принимается вид решения, содержащий некоторые неизвестные функции, которые находятся в процессе решения уравнений, после чего определяется, каким условиям данное решение удовлетворяет, то есть конкретизируется сама постановка задачи.

Рассматриваемое течение создается при обтекании поверхностей специальной формы и является решением усредненных уравнений газовой динамики с точностью до малых второго порядка включительно.

## § 4.2. Решение амплитудно-фазовых уравнений

Найдем решение системы нелинейных уравнений (4.1.7)–(4.1.9)

$$\Phi'_j(\xi) = C_j \Phi_m^*(\xi) \Phi_n^*(\xi), \quad j, m, n : \text{сycl.}$$

Соотношение

$$\left( \frac{\Phi_j(\xi) \Phi_j^*(\xi)}{C_j} \right)' = \frac{\Phi'_j(\xi) \Phi_j^*(\xi) + \Phi_j(\xi) \Phi_j^{*'}(\xi)}{C_j} = \Phi_1^* \Phi_2^* \Phi_3^* + \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3$$

приводит нас к первым интегралам (символ «=» служит для введения обозначения)

$$\frac{\alpha_1^2(\xi) - \alpha_1^2(0)}{C_1} = \frac{\alpha_2^2(\xi) - \alpha_2^2(0)}{C_2} = \frac{\alpha_3^2(\xi) - \alpha_3^2(0)}{C_3} =: Z(\xi). \quad (4.2.1)$$

Интегралы (4.2.1) описывают нелинейное взаимодействие волн — амплитуды мод могут усиливаться и ослабевать друг за счет друга. Данное явление называется трехволновым резонансом [53, 55].

Однако рост волн ограничен — пользуясь функцией  $Z$ , можно получить

оценку решения [49]

$$|Z| \leq \max_{j=1,2,3} \left\{ \frac{\alpha_j^2(0)}{|C_j|} \right\}.$$

Соотношение

$$\Phi_j'(\xi) \Phi_j^{*'}(\xi) = C_j^2 \Phi_m^*(\xi) \Phi_m(\xi) \Phi_n^*(\xi) \Phi_n(\xi)$$

приводит нас к выражению медленно изменяющихся сдвигов фаз через амплитуды

$$\beta_j'^2(\xi) = C_j^2 \frac{\alpha_m^2(\xi) \alpha_n^2(\xi)}{\alpha_j^2(\xi)} - \frac{\alpha_j'^2(\xi)}{\alpha_j^2(\xi)}. \quad (4.2.2)$$

Таким образом, для полного решения задачи необходимо определить лишь действительную функцию  $Z$ . С этой целью вычислим ее вторую производную, используя исходные уравнения

$$\begin{aligned} Z'' &= (\Phi_1^* \Phi_2^* \Phi_3^* + \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3)' = 2C_1 \Phi_2^*(\xi) \Phi_2(\xi) \Phi_3^*(\xi) \Phi_3(\xi) + \\ &+ 2C_2 \Phi_3^*(\xi) \Phi_3(\xi) \Phi_1^*(\xi) \Phi_1(\xi) + 2C_3 \Phi_1^*(\xi) \Phi_1(\xi) \Phi_2^*(\xi) \Phi_2(\xi) = \\ &= 2C_1 (C_2 Z + \alpha_2^2(0)) (C_3 Z + \alpha_3^2(0)) + 2C_2 (C_3 Z + \alpha_3^2(0)) (C_1 Z + \alpha_1^2(0)) + \\ &+ 2C_3 (C_1 Z + \alpha_1^2(0)) (C_2 Z + \alpha_2^2(0)). \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Домножим уравнение (4.2.3) на  $Z'$  и проинтегрируем по  $\xi$ , в результате получим уравнение для определения  $Z$

$$\begin{aligned} Z'^2 &= 4C_1 C_2 C_3 Z^3 + 4 (\alpha_1^2(0) C_2 C_3 + \alpha_2^2(0) C_3 C_1 + \alpha_3^2(0) C_1 C_2) Z^2 + \\ &+ 4 (\alpha_1^2(0) \alpha_2^2(0) C_3 + \alpha_2^2(0) \alpha_3^2(0) C_1 + \alpha_3^2(0) \alpha_1^2(0) C_2) Z + \text{const}. \end{aligned}$$

Из (4.2.1) находим, что  $Z(0) = 0$ . Таким образом, получаем для постоянной интегрирования выражение

$$\begin{aligned} \text{const} &= (\Phi_1^*(0) \Phi_2^*(0) \Phi_3^*(0) + \Phi_1(0) \Phi_2(0) \Phi_3(0))^2 = \\ &= 4 \alpha_1^2(0) \alpha_2^2(0) \alpha_3^2(0) \cos^2(\beta_1(0) + \beta_2(0) + \beta_3(0)). \end{aligned}$$

В результате приходим к нелинейному уравнению для определения  $Z$  [49],

которое имеет вид

$$Z'^2 = 4 (C_1 Z + \alpha_1^2(0)) (C_2 Z + \alpha_2^2(0)) (C_3 Z + \alpha_3^2(0)) - \\ - 4\alpha_1^2(0)\alpha_2^2(0)\alpha_3^2(0) \sin^2 (\beta_1(0) + \beta_2(0) + \beta_3(0)) = f(Z). \quad (4.2.4)$$

В общем случае решение уравнения (4.2.4) выражается через эллиптические функции

$$\int_0^Z \frac{dZ}{\pm \sqrt{f(Z)}} = \xi.$$

Если медленно изменяющиеся сдвиги фаз постоянны, то решение для амплитуд легко выписать в явном виде через функции Якоби (которые могут вырождаться в гиперболические функции при определенных условиях) с помощью соотношений (4.2.1) и (4.2.2) [50].

Для этого зафиксируем  $j$ ,  $m$  и  $n$  таким образом, чтобы именно коэффициент  $C_j$  отличался знаком от  $C_m$  и  $C_n$ . Например,  $j = 3$  при  $r = 3$ . Введем в рассмотрение следующие константы:

$$A_{mj} = C_j C_m C_n \left( \frac{\alpha_m^2(0)}{C_m} - \frac{\alpha_j^2(0)}{C_j} \right) < 0, \quad A_{nj} = C_j C_m C_n \left( \frac{\alpha_n^2(0)}{C_n} - \frac{\alpha_j^2(0)}{C_j} \right) < 0.$$

Используя интегралы (4.2.1), выражение (4.2.2) и введенные обозначения, получаем уравнение для определения  $\alpha_j$

$$\alpha_j'^2 = C_j^2 \left( \frac{A_{mj}}{C_j C_n} + \frac{C_m}{C_j} \alpha_j^2 \right) \left( \frac{A_{nj}}{C_j C_m} + \frac{C_n}{C_j} \alpha_j^2 \right).$$

С помощью растяжения функции и переменной, перепишем последнюю формулу в более подходящем виде

$$F_j = \sqrt{C_m C_n} \alpha_j, \quad u = \sqrt{A_{mj} A_{nj}} \xi, \\ F_j'(u)^2 = \left( 1 - \frac{1}{(-A_{mj})} F_j^2(u) \right) \left( 1 - \frac{1}{(-A_{nj})} F_j^2(u) \right). \quad (4.2.5)$$

Рассмотрим случаи:  $A_{mj} < A_{nj}$  и  $A_{mj} > A_{nj}$ . В каждом из них уравнение (4.2.5) приводится к специальному обыкновенному дифференциальному уравнению, решением которого является эллиптический синус Якоби. Таким

образом определяется  $\alpha_j$ . В свою очередь  $\alpha_m$  и  $\alpha_n$  определяются из интегралов (4.2.1) с помощью соотношений между эллиптическими функциями

$$\operatorname{cn}^2(u, k) + \operatorname{sn}^2(u, k) = 1, \quad \operatorname{dn}^2(u, k) + k^2 \operatorname{sn}^2(u, k) = 1.$$

Если  $-A_{mj} < -A_{nj}$ , то

$$\left( \frac{d(F_j/\sqrt{-A_{mj}})}{d(u/\sqrt{-A_{mj}})} \right)^2 = \left( 1 - \left( \frac{F_j}{\sqrt{-A_{mj}}} \right)^2 \right) \left( 1 - \frac{A_{mj}}{A_{nj}} \left( \frac{F_j}{\sqrt{-A_{mj}}} \right)^2 \right),$$

$$\frac{F_j}{\sqrt{-A_{mj}}} = \operatorname{sn} \left( \frac{u}{\sqrt{-A_{mj}}} + D, \sqrt{\frac{A_{mj}}{A_{nj}}} \right),$$

$$\alpha_j = \sqrt{-\frac{A_{mj}}{C_m C_n}} \operatorname{sn} \left( \sqrt{-A_{nj}} \xi + D, \sqrt{\frac{A_{mj}}{A_{nj}}} \right),$$

$$\alpha_m = \sqrt{\frac{A_{mj}}{C_j C_n}} \operatorname{cn} \left( \sqrt{-A_{nj}} \xi + D, \sqrt{\frac{A_{mj}}{A_{nj}}} \right),$$

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{A_{nj}}{C_j C_m}} \operatorname{dn} \left( \sqrt{-A_{nj}} \xi + D, \sqrt{\frac{A_{mj}}{A_{nj}}} \right).$$

Если  $-A_{mj} > -A_{nj}$ , то

$$\left( \frac{d(F_j/\sqrt{-A_{nj}})}{d(u/\sqrt{-A_{nj}})} \right)^2 = \left( 1 - \frac{A_{nj}}{A_{mj}} \left( \frac{F_j}{\sqrt{-A_{nj}}} \right)^2 \right) \left( 1 - \left( \frac{F_j}{\sqrt{-A_{nj}}} \right)^2 \right),$$

$$\frac{F_j}{\sqrt{-A_{nj}}} = \operatorname{sn} \left( \frac{u}{\sqrt{-A_{nj}}} + D, \sqrt{\frac{A_{nj}}{A_{mj}}} \right),$$

$$\alpha_j = \sqrt{-\frac{A_{nj}}{C_m C_n}} \operatorname{sn} \left( \sqrt{-A_{mj}} \xi + D, \sqrt{\frac{A_{nj}}{A_{mj}}} \right),$$

$$\alpha_m = \sqrt{\frac{A_{mj}}{C_j C_n}} \operatorname{dn} \left( \sqrt{-A_{mj}} \xi + D, \sqrt{\frac{A_{nj}}{A_{mj}}} \right),$$

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{A_{nj}}{C_j C_m}} \operatorname{cn} \left( \sqrt{-A_{mj}} \xi + D, \sqrt{\frac{A_{nj}}{A_{mj}}} \right).$$

Здесь  $D$  — начальная фаза колебаний функций Якоби. При  $\alpha_j(0) = 0$  величину  $D$  можно опустить.

В случае  $A_{mj} = A_{nj}$  эллиптический синус переходит в гиперболический тангенс, а эллиптический косинус и дельта-амплитуда (dn-функция) — в гиперболический косеканс, то есть решение представляется в элементарных функциях и не периодически, как прежде. Аналогичная ситуация имеет место в случае двухволнового резонанса, где вторая гармоника растет за счет основной моды.

### § 4.3. Пример течения

Построим контурный график плотности (линии уровня) для течения с трехволновым резонансом

$$\sigma \rho^{\gamma-1} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \left[ \frac{a_0^2}{\gamma-1} + \frac{V_0^2}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right],$$

где  $\sigma \equiv p/\rho^\gamma$  — постоянная изэнтропичности.

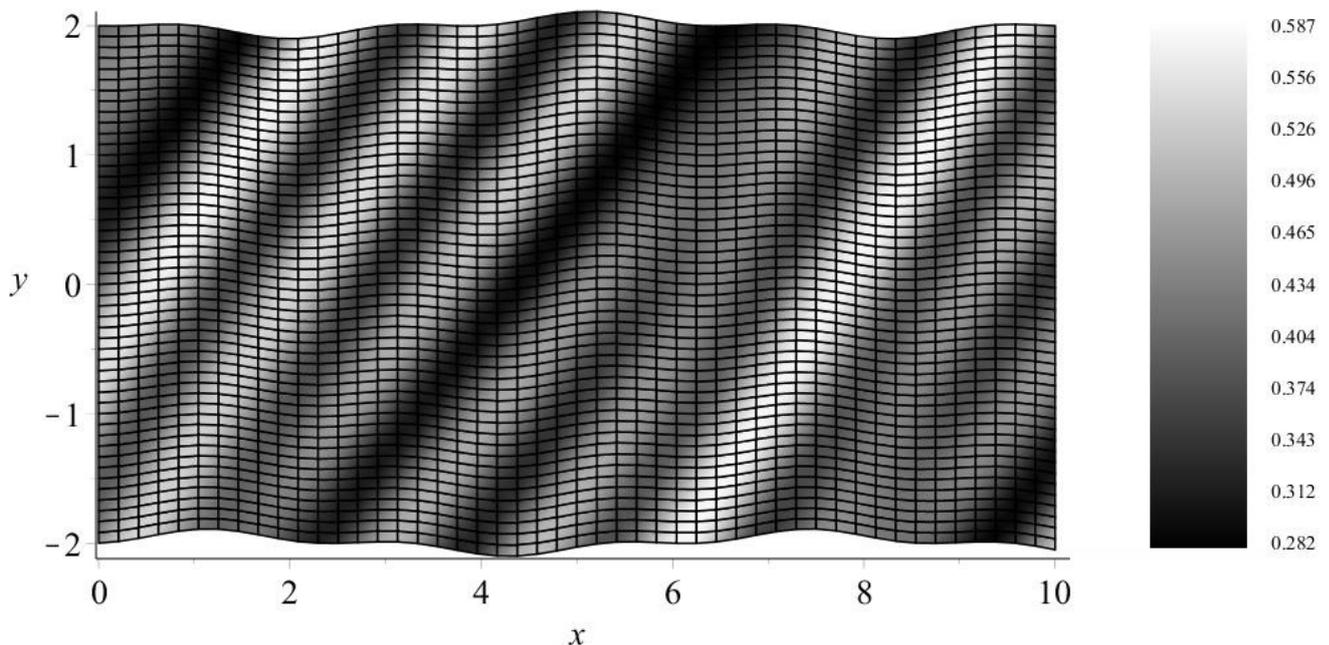


Рисунок 4.1 — Распределение плотности в плоском сверхзвуковом сопле со специальной формой верхней и нижней стенок.

Пусть медленно изменяющиеся сдвиги фаз постоянны. Введем систему единиц, в которой  $\sigma$ ,  $a_0$  и  $k_1$  равны единице. Зададим параметры в виде  $\gamma = 1.4$ ,  $M_0 = \sqrt{2}$ ;  $\varepsilon = 0.1$ ,  $r = 3$ ,  $\alpha_3(0) = \beta_1(0) = \beta_2(0) = \beta_3(0) = 0$ ,  $\alpha_1(0) =$

0.5,  $\alpha_2(0) = 0.25$ ,  $y_1(0) = -2$ ,  $y_2(0) = 2$ . Результаты расчета представлены на рисунке 4.1. Более светлые области на графике соответствуют большим значениям плотности, для наглядности на фигуру нанесена криволинейная координатная сетка.

Наблюдается периодическая картина распространения возмущений плотности в плоском сопле с волнистыми стенками, уплотнения сменяются разрежениями. Максимумы и минимумы располагаются вдоль характеристик основного потока, что объясняется малостью рассматриваемых возмущений. Указанное течение является примером построенного семейства решений.

#### **§ 4.4. Основные результаты главы**

1. Решена асимптотическая задача о трехволновом резонансе в стационарной сверхзвуковой газовой динамике, рассматриваемое движение газа есть решение усредненной системы уравнений с точностью до малых второго порядка включительно.

2. Выведены и решены амплитудно-фазовые уравнения, решение выражается в терминах эллиптических функций и представляет собой взаимодействие трех нелинейных волн в режиме синхронизации фаз, при котором амплитуды мод могут расти друг за счет друга, но не до бесконечности.

3. Определены необходимые граничные условия, моделирующие течение газа в плоском сопле с криволинейными верхней и нижней стенками, приведен пример волновой картины.

4. Найдены условия на первоначальные амплитуды волн, нарушающие периодичность решения по пространству.

5. Линейность дисперсионного соотношения вместе с неравенством треугольника и резонансным условием в виде синхронизации фаз приводят к вырождению тройки волновых векторов в коллинеарную систему.

## ГЛАВА 5\*

### ДИНАМИКА СФЕРИЧЕСКОГО ПУЗЫРЬКА В НЕСЖИМАЕМЫХ ВЯЗКИХ СТЕПЕННЫХ ЖИДКОСТЯХ

В настоящей главе рассматривается сферически-симметричная задача о динамике однородного газового пузырька в неограниченном объеме несжимаемой степенной неньютоновской жидкости. Специальное внимание уделяется поведению механических параметров в зависимости от показателя степени нелинейности модели и установлению их экстремальных свойств. Для исследования задачи используется уравнение живых сил, проинтегрированное по всему объему жидкости, что позволяет подбирать необходимое внешнее давление для реализации заданной динамики границы полости. Оказывается возможным найти такую неньютоновскую модель, при которой в процессе сжатия одновременно сохраняется кинетическая энергия жидкости и скорость вязкой диссипации. С помощью аналитических и численных методов удается полностью разрешить проблему о концентрации энергии при схлопывании вакуумного пузырька из состояния покоя в точку скачком внешнего давления. На основе данного решения делаются рекомендации о минимизации величины полной диссипации энергии при достаточно большом отношении внешнего давления к начальному давлению в полости, заполненной газом.

#### § 5.1. Постановка задачи

В общем случае система уравнений динамики несжимаемой степенной неньютоновской жидкости может быть записана в виде [62, 114, 115]

$$\nabla_i v^i = 0, \quad \rho \frac{dv_i}{dt} + \nabla_i p = \nabla_j \tau_i^j, \quad \tau_i^j = 2\mu |e|^{2\beta-1} e_i^j, \quad e^2 = e_{ij} e^{ij}, \quad \beta > 0. \quad (5.1.1)$$

Здесь  $v^i$  — компоненты вектора скорости,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\tau^{ij}$  — компоненты тензора вязких напряжений,  $e_{ij}$  — компоненты тензора скоростей деформаций,  $\mu$  — коэффициент консистенции,  $\beta$  — показатель степени неньютоновской модели.

---

\* При подготовке данной главы диссертации использовались следующие публикации автора, в которых, согласно «Положению о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова», отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [71, 104, 112].

Если перейти к уравнению живых сил, то получается

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{v_i v^i}{2} \right) = \nabla_j [(-pg^{ij} + \tau^{ij}) v_i] - 2\mu |e|^{2\beta+1}. \quad (5.1.2)$$

Рассматривается сферически-симметричная задача о динамике газовой полости внутри неограниченного объема жидкости. Пусть радиус полости обозначен через  $R(t)$ , в начальный момент времени  $t = 0$  он равен  $R_0$ . Давление внутри полости принимается однородным  $p_{\text{cav}}(R) = p_0(R_0/R(t))^{3\gamma}$ , где  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $p_0$  — начальное давление [63–65]. Давление в жидкости на бесконечности, вообще говоря, зависит от времени,  $p_\infty(t)$ .

В этом случае уравнение неразрывности в (5.1.1) с использованием кинематического условия на границе приводит к выражению скорости через радиус полости

$$v(r, t) = \frac{R^2(t)}{r^2} \frac{dR(t)}{dt}.$$

Кинетическая энергия жидкости, в свою очередь, принимает вид

$$E(t) = 2\pi\rho \int_{R(t)}^{\infty} r^2 v^2 dr = 2\pi\rho R^3(t) \left( \frac{dR(t)}{dt} \right)^2. \quad (5.1.3)$$

Свертка тензора скоростей деформаций также вычисляется через  $R(t)$

$$e^2 = \frac{6R^4(t)}{r^6} \left( \frac{dR(t)}{dt} \right)^2.$$

Уравнение (5.1.2) интегрируется по всему объему жидкости [133]. С использованием динамических граничных условий получается

$$\frac{dE(t)}{dt} + [p_\infty(t) - p_{\text{cav}}(R)] 4\pi R^2(t) \frac{dR(t)}{dt} + \frac{4\sqrt{2} 6^\beta \pi \mu}{\sqrt{3} \beta} \left| \frac{dR(t)}{dt} \right|^{2\beta+1} R(t)^{2-2\beta} = 0. \quad (5.1.4)$$

Уравнение (5.1.4) является основным в рамках исследований, приведенных в настоящей главе. Важно заметить, что при сжатии  $dR(t)/dt < 0$ .

С помощью задания функции  $R(t)$  в уравнении (5.1.4) можно определить необходимый вид  $p_\infty(t)$ , обеспечивающий реализацию заданной динамики границы полости.

При выборе конкретных физических величин используется система еди-

ниц СГС.

## § 5.2. Задача о сжатии при сохранении кинетической энергии

Рассматривается задача о сохранении при сжатии полости кинетической энергии жидкости,  $E(t) \equiv E_0$ . На основе соотношения (5.1.3) получается, что

$$R(t) = R_0 \left[ 1 - \left( \frac{25E_0}{8\pi\rho R_0^5} \right)^{1/2} t \right]^{2/5}, \quad (5.2.1)$$

при этом процесс сжатия длится конечный промежуток времени  $t \in [0, T]$ , где

$$T = \left( \frac{8\pi\rho R_0^5}{25E_0} \right)^{1/2}.$$

Необходимая для реализации соответствующего процесса зависимость давления на бесконечности от времени имеет вид

$$p_\infty(t) = \frac{T^{6\gamma/5} p_0}{(T-t)^{6\gamma/5}} + \frac{(2/3)^{1/2} (24/25)^\beta (\mu/\beta)}{(T-t)^{2\beta}}. \quad (5.2.2)$$

Видно, что для осуществления данного схлопывания необходимо преодолеть не только растущее давление внутри газовой полости за счет ее сжатия (первое слагаемое), но и растущую величину, связанную с диссипацией (второе слагаемое, обозначается через  $p_{\text{dis}}$  ниже). Стоит отметить, что оба члена справа в формуле (5.2.2) не ограничены при  $t \rightarrow T$ . В случае  $\gamma < (5/3)\beta$  второе слагаемое растет асимптотически быстрее.

Однако рассматриваемое сжатие имеет смысл осуществлять до значе- ний плотности внутри газовой полости, равных по величине плотности жидкости, то есть во многих случаях до одного порядка по радиусу, так как далее необходимо учитывать явление сжимаемости жидкости [68]. Схлопывание полости до радиуса  $R = R_*$  происходит за время

$$t = T \left[ 1 - (R_*/R_0)^{5/2} \right] = T_*,$$

при этом давление  $p_\infty(T_*)$  является максимальным.

Давление внутри газовой полости тем больше, чем больше показатель адиабаты. В случае с диссипативным членом и показателем степени ненью-

тоновской модели жидкости ситуация иная. Наименьшего значения безразмерная величина  $T_*^{2\beta} p_{\text{dis}}(T_*, \beta)/\mu$  достигает при

$$\beta = \left( \ln \frac{24/25}{(R_*/R_0)^5} \right)^{-1} = \beta_*.$$

Неравенство  $R_*/R_0 < (24/25)^{1/5}$  обеспечивает условие  $\beta_* > 0$ . В частности, при  $R_*/R_0 = 10^{-1}$  получается  $\beta_* = 0.087$ . При  $1 > R_*/R_0 \geq (24/25)^{1/5}$  значение величины  $T_*^{2\beta} p_{\text{dis}}(T_*, \beta)/\mu$  уменьшается с ростом показателя  $\beta$ .

### § 5.3. Задача о сжатии с постоянной скоростью диссипации

Рассматривается задача о постоянстве в процессе сжатия полости величины скорости вязкой диссипации. В этом случае

$$d(t) = \int_{R(t)}^{\infty} \tau^{ij} e_{ij} 4\pi r^2 dr = 4\sqrt{2/3} (6^\beta/\beta) \pi \mu \left| \frac{dR(t)}{dt} \right|^{2\beta+1} R(t)^{2-2\beta} \equiv d_0. \quad (5.3.1)$$

На основе соотношения (5.3.1) получается степенной закон динамики полости, аналогичный формуле (5.2.1)

$$R(t) = R_0 \left( 1 - \frac{t}{T_d} \right)^\lambda, \quad \lambda = (2\beta + 1)/3, \quad T_d = \lambda \sqrt{6} \left[ \frac{(8/3)\pi\mu R_0^3}{d_0(3\lambda - 1)} \right]^{1/(3\lambda)}.$$

Таким образом,

$$E(t) = \frac{2\pi\rho R_0^5 \lambda^2}{T_d^2} \left( 1 - \frac{t}{T_d} \right)^{5\lambda-2}.$$

Для псевдопластической модели с показателем нелинейности  $\beta = 1/10$  можно в процессе сжатия полости одновременно с постоянством величины скорости вязкой диссипации дополнительно добиться сохранения кинетической энергии жидкости. При  $\beta < 1/10$  кинетическая энергия неограниченно растет к моменту коллапса.

Необходимое внешнее давление при произвольном  $\beta$  имеет вид

$$p_\infty(t) = p_0 \left( 1 - \frac{t}{T_d} \right)^{-3\lambda\gamma} - \frac{\lambda\rho R_0^2}{2T_d^2} (5\lambda - 2) \left( 1 - \frac{t}{T_d} \right)^{2(\lambda-1)} + \frac{d_0 T_d}{4\pi\lambda R_0^3} \left( 1 - \frac{t}{T_d} \right)^{1-3\lambda}. \quad (5.3.2)$$

Первое и третье слагаемые в правой части формулы (5.3.2) растут неограниченно при  $t \rightarrow T_d$  для любых  $\beta$ , в то время как множитель  $(1 - t/T_d)^{2(\lambda-1)}$  во втором слагаемом (которое с точностью до знака равно отношению изменения кинетической энергии жидкости к изменению объема полости в процессе сжатия) меняет режим неограниченного возрастания на убывание к нулю при переходе параметра  $\beta$  через 1.

### § 5.4. Колебания и резонанс пузырька

Рассмотрим возмущение равновесного внешнего давления в виде периодической функции времени

$$p_\infty(t) = p_0 + p_1 \cos(\Omega t). \quad (5.4.1)$$

Возмущения радиуса полости при этом предполагаются относительно малыми

$$R(t) = R_0 + R_1(t), \quad R_1(0) = 0. \quad (5.4.2)$$

Известно [115], что в случае ньютоновской жидкости ( $\beta = 1/2$ ) уравнение (5.1.4) с учетом соотношений (5.4.1) и (5.4.2) допускает линеаризацию вида

$$\frac{d^2 R_1}{dt^2} + 2\delta \frac{dR_1}{dt} + \omega^2 R_1 = A \cos(\Omega t), \quad 2\delta = \frac{4\mu}{\rho R_0^2}, \quad \omega^2 = \frac{3\gamma p_0}{\rho R_0^2}, \quad A = -\frac{p_1}{\rho R_0}. \quad (5.4.3)$$

Уравнение (5.4.3) с учетом резонансного условия  $\Omega = \omega$  имеет решение

$$R(t) = R_0 + a \exp(-\delta t) \sin(\sqrt{\omega^2 - \delta^2} t) + \frac{A}{2\delta\omega} \sin(\omega t). \quad (5.4.4)$$

С помощью уравнения (5.1.4) можно определить вид функции  $p_\infty(t)$ , необходимый для сохранения динамики границы полости, соответствующей линейному резонансу (5.4.4), в рамках нелинейной постановки задачи для произвольной степенной неньютоновской жидкости. В этом случае внешнее давление определяется выражением

$$p_\infty(t) = p_0 (R_0/R)^{3\gamma} - (3/2)\rho \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \rho R \frac{d^2 R}{dt^2} - \sqrt{2/3} (6^\beta/\beta) \mu R^{-2\beta} \frac{|dR/dt|^{2\beta+1}}{dR/dt}, \quad (5.4.5)$$

где  $R(t)$  представлен формулой (5.4.4). Относительная малость возмущений уже не требуется.

Важно заметить, что  $p_\infty(t)$  это внешнее усилие, создаваемое для реализации того или иного режима динамики полости, поэтому для него в рамках модели несжимаемой жидкости допускаются отрицательные значения.

Пусть параметры задачи имеют вид  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>,  $\mu = 10^{-2}$  г/(см·с),  $\beta = 1/2$  (вода),  $\gamma = 1.4$  (воздух),  $p_0 = 10^6$  г/(см·с<sup>2</sup>),  $R_0 = 10^{-2}$  см. В этом случае коэффициент затухания  $\delta = 2 \cdot 10^2$  с<sup>-1</sup>, собственная частота  $\omega = 2 \cdot 10^5$  с<sup>-1</sup>. Пусть также  $p_1/p_0 = 10^{-2}$  и  $a = -A/(2\delta\omega)$ . Последний параметр фактически определяет величину  $dR/dt(0)$ .

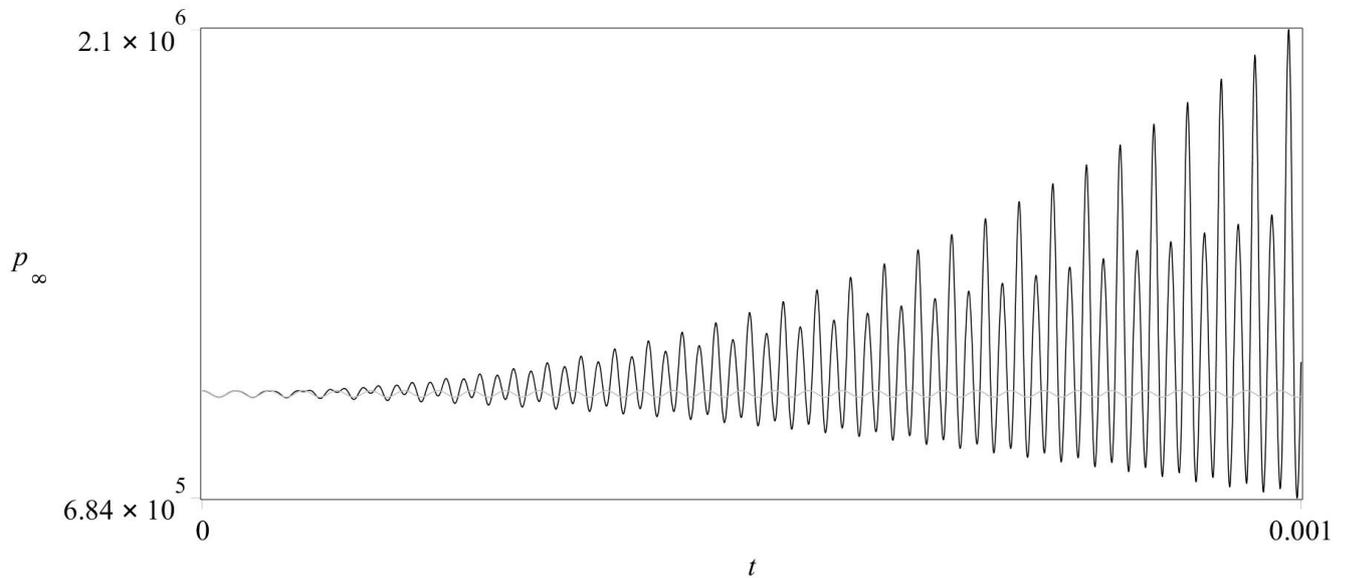


Рисунок 5.1 — Сравнение необходимых внешних давлений для обеспечения линейно-резонансного поведения радиуса полости в случае линейной (серая кривая) и нелинейной (черная кривая) постановок задач.

Со временем амплитуда колебаний радиуса полости растет все сильнее, до тех пор пока при  $t = 0.00859$  с полость не схлопнется в точку. На рисунке 5.1 представлены сравнительные графики необходимых внешних давлений от времени в случае нелинейной (черная кривая) и линейной (серая кривая) постановок задач. Видно, что данные функции с течением времени отличаются все сильнее, внешнее давление для нелинейного случая перестраивается на принципиально новый режим. В момент схлопывания полости внешнее давление в рамках нелинейной постановки задачи обращается в бесконечность.

Уменьшение отношения  $p_1/p_0$  до, например,  $10^{-4}$  при неизменных остальных параметрах обеспечивает выполнение условия  $R(t) > 0$  для любого мо-

мента времени, нелинейный вариант давления на бесконечности также становится ограниченным.

На уравнение живых сил можно посмотреть и с другой стороны. Пусть  $p_\infty(t)$  в уравнении (5.4.5) задано в виде (5.4.1) с учетом выполнения резонансного условия  $\Omega = \omega$ . В этом случае уравнение (5.4.5) фактически является нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка для нахождения  $R(t)$ . Таким образом решается задача об уточнении закона динамики газовой полости при переходе от линеаризованной постановки задачи к точной нелинейной. Для построения решения  $R(t)$  используется математический пакет Maple и его встроенная функция `dsolve`. В качестве численного метода выбирается метод Рунге-Кутты-Фельберга четвертого-пятого порядка (RK45) с интерполянтотом четвертой степени — стандартный метод в `dsolve`.

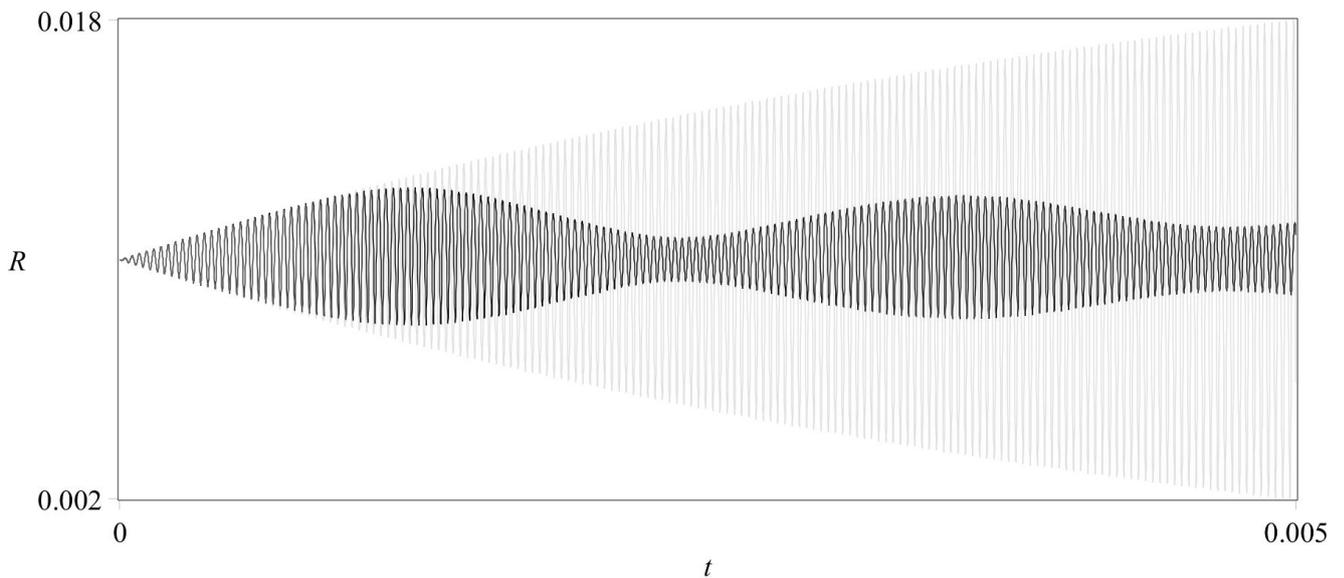


Рисунок 5.2 — Сравнение линейного (серая кривая) и нелинейного (черная кривая) законов динамики полости при гармоническом внешнем давлении с линейно-резонансной частотой.

Пусть параметры задачи имеют тот же вид, что и для примера на рисунке 5.1. На рисунке 5.2 представлены графики зависимости радиуса полости от времени для нелинейного (черная кривая) и линейного (серая кривая) решений. Как и в предыдущем примере, кривые совпадают на малых временах, но с ростом  $t$  появляются принципиальные расхождения. Особенно важно отметить тот факт, что в рамках нелинейного решения полость не схлопывается, у  $R(t)$  появляется огибающая, которая совершает затухающие колебания.

В приведенном примере возмущение давления на 1% дает рост и уменьшение радиуса полости в рамках нелинейного решения на более чем 20% в процессе колебаний, влияние центра пузырька сказывается слабо. При увеличении отношения  $p_1/p_0$  до, например, 1 при неизменных остальных параметрах наблюдаются такие колебания нелинейного решения, при которых полость расширяется по радиусу более чем в два раза и сжимается более чем в три раза относительно начального значения  $R_0$ . При этом центр оказывает существенное влияние, проявляется асимметрия сжатия и расширения.

### § 5.5. Задача о сжатии пузырька скачком внешнего давления

Рассмотрим классическую задачу о схлопывании полости в жидкости скачком внешнего давления [66–68].

Пусть в начальный момент времени давление на бесконечности скачком растет от значения  $p_0$  до некоторого значения  $p_\infty$  и далее продолжает сохраняться постоянным. Необходимо определить величину кинетической энергии жидкости при сжатии полости из состояния покоя до размеров  $R = R_*$ .

Для решения указанной задачи в уравнении (5.1.4) совершается переход от переменной  $t$  к переменной  $V = (4/3)\pi R^3(t)$ . При этом скорость схлопывания границы  $dR(t)/dt$  выражается через кинетическую энергию жидкости и радиус полости на основе соотношения (5.1.3). В результате получается нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее изменение энергии в процессе сжатия

$$\frac{dE(V)}{dV} = K \frac{E^\beta(V)}{V^{5\beta/3}} - \left[ p_\infty - p_0 \left( \frac{V_0}{V} \right)^\gamma \right], \quad (5.5.1)$$

где  $K$  — постоянная, зависящая от физических параметров жидкости.

При использовании переменной  $V$  начальным условием для уравнения (5.5.1) выступает равенство  $E(V_0) = 0$ , при этом  $V_* \leq V \leq V_0$ . Соответственно,  $V_0 = V(R_0)$  и  $V_* = V(R_*)$ . В точке  $V = 0$  уравнение сингулярно и требует специального исследования в ее окрестности.

Уравнение (5.5.1) приводится к безразмерному виду. Для этого вводятся замены  $V = V_0 z$  и  $E = p_\infty V_0 w$ . В результате

$$\frac{dw}{dz} = \sigma \frac{w^\beta}{z^{5\beta/3}} - \left( 1 - \frac{\theta}{z^\gamma} \right), \quad \sigma = \frac{(2/3)^{1/2} 4^\beta \nu}{\beta (p_\infty/\rho)^{1-\beta} R_0^{2\beta}}, \quad \theta = p_0/p_\infty, \quad (5.5.2)$$

где  $\nu = \mu/\rho$ .

При  $\beta = 1/2$  параметр  $\sigma$  связан с числом Рейнольдса  $Re = (R_0/\nu)\sqrt{p_\infty/\rho}$  соотношением  $\sigma = (4/Re)\sqrt{2/3}$ . Таким образом, величина  $\sigma$  играет роль обобщенного числа Рейнольдса в данной задаче.

Переход от переменной  $z$  к переменной  $x = 1/z$  позволяет избавиться от сингулярности в правой части уравнения (5.5.2) при  $z = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \theta x^\gamma - \sigma y^\beta x^{5\beta/3}}{x^2}, \quad y(1) = 0, \quad x \in [1, C], \quad (5.5.3)$$

где  $y(x) = w(1/x)$  и  $C = V_0/V_*$ .

Следует отметить, что уравнение (5.5.3) содержит 4 безразмерных параметра:  $\beta$ ,  $\sigma$ ,  $\theta$  и  $\gamma$ , от значений которых зависит поведение решения. Ниже будет приведен анализ типичных ситуаций.

Для дилатантной жидкости с параметром  $\beta = 1$  уравнение (5.5.3) линеаризуется и его аналитическое решение находится стандартными методами.

Величина полной диссипации энергии может быть представлена в виде

$$D = \int_0^{T_{R_*}} \int_{R(t)}^\infty \tau^{ij} e_{ij} 4\pi r^2 dr dt = p_\infty V_0 \left[ \left(1 - \frac{1}{C}\right) - \frac{\theta}{\gamma - 1} (C^{\gamma-1} - 1) - y(C) \right], \quad (5.5.4)$$

где  $T_{R_*}$  — время, за которое сжатие полости осуществляется вплоть до радиуса  $R_*$ . Следовательно, для вычисления полной диссипации необходимо найти величину  $y(C)$  — чем больше ее значение, тем меньше энергии теряется в процессе схлопывания.

Задача Коши (5.5.3) допускает следующее качественное исследование. Во-первых,  $y'(1) = 1 - \theta > 0$ , но с ростом  $x$  величина  $y'(x)$  становится отрицательной, функция  $y(x)$  допускает максимум в некоторой точке. Во-вторых, в любом экстремуме  $x_0 > 1$  справедливо соотношение

$$\sigma y^\beta(x_0) x_0^{5\beta/3} = 1 - \theta x_0^\gamma,$$

при использовании которого

$$y''(x_0) = -x_0^{-3} \left[ \gamma \theta x_0^\gamma + (5\beta/3) \sigma y^\beta(x_0) x_0^{5\beta/3} \right] < 0.$$

Следовательно, максимум в  $x_0$  является единственным экстремумом. Осо-

бенный интерес представляет изучение характера поведения решения при  $x > x_0$ .

Задача (5.5.3) может быть представлена в интегральном виде

$$y(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) - \frac{\theta}{\gamma - 1}(x^{\gamma-1} - 1) - \sigma \int_1^x y^\beta(\xi) \xi^{5\beta/3-2} d\xi. \quad (5.5.5)$$

Соотношение (5.5.5) позволяет заключить, что  $y(x)$  ограничена сверху значением 1. За счет члена  $\theta x^{\gamma-1}$  функция  $y(x)$  убывает неограниченно, что говорит о существовании некоторой точки  $x_1 > x_0$ , в которой  $y(x_1) = 0$ , точки остановки.

Таким образом, сжатие газовой полости в принципе может быть осуществлено лишь до некоторого предельного значения, после которого нужно рассматривать ее расширение.

Простейшую верхнюю оценку координаты точки остановки можно получить в виде

$$x_1 < \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\theta}\right)^{1/(\gamma-1)}. \quad (5.5.6)$$

Пусть числа  $\theta$  и  $\gamma$  заданы. Если определить  $C = \theta^{-1/\gamma}$ , то  $x_1 > C$ , иначе  $y'(x_1) \geq 0$ , что невозможно. Следовательно, при  $\theta = C^{-\gamma}$  гарантирована возможность сжатия газовой полости с показателем адиабаты  $\gamma$  до размеров  $V_* = V_0/C$ .

Далее рассматривается частный случай вакуумной полости ( $\theta = 0$ ), при условии что обратное не оговорено отдельно. Здесь особенно интересным является изучение вопроса о концентрации кинетической энергии жидкости, то есть исследование величины  $y(\infty)$ .

Если предположить, что существует точка  $x_1 > 1$ , в которой  $y(x_1) = 0$ , то отсюда, опять же, будет следовать тот факт, что  $y'(x_1) > 0$ , приводящий к противоречию. Таким образом, функция  $y(x)$  при стремлении  $x$  к бесконечности выходит на некоторое асимптотическое значение  $0 \leq y(\infty) < 1$ .

Рассмотрим функцию  $w$  и некоторую точку  $z \in (0, 1)$ . Поскольку  $w$  непрерывна на отрезке  $[0, z]$  и дифференцируема на интервале  $(0, z)$  имеет место классическая теорема Лагранжа [119]

$$w(z) = w(0) + w'(\delta z)z, \quad \delta \in (0, 1). \quad (5.5.7)$$

Переходя к  $x = 1/z$  и  $y(x) = w(1/x)$ , получаем на основе уравнения (5.5.2)

$$w'(\delta/x) = \sigma w^\beta(\delta/x) \frac{x^{5\beta/3}}{\delta^{5\beta/3}} - 1 = \sigma y^\beta(x/\delta) \frac{x^{5\beta/3}}{\delta^{5\beta/3}} - 1. \quad (5.5.8)$$

Таким образом, за счет соотношения (5.5.8) формула (5.5.7) переписывается в виде

$$y(x) = y(\infty) + \sigma y^\beta(x/\delta) \frac{x^{5\beta/3-1}}{\delta^{5\beta/3}} - 1/x, \quad \delta \in (0, 1). \quad (5.5.9)$$

Из (5.5.9) получаем, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y^\beta(x/\delta) \frac{x^{5\beta/3-1}}{\delta^{5\beta/3}} = 0. \quad (5.5.10)$$

Важно заметить, что величина  $\delta$  зависит от значения  $z$  (и, соответственно, от значения  $x$ ), но всегда лежит внутри интервала  $(0, 1)$ .

Следовательно, при  $\beta \geq 3/5$  значение  $y(\infty)$  обязательно должно равняться нулю, иначе возникает противоречие равенству (5.5.10). Значит, концентрации кинетической энергии жидкости при схлопывании вакуумной полости для таких  $\beta$  нет.

Область значений безразмерного параметра  $\sigma$  весьма широка. Пусть, например, заданы  $p_\infty = 10^6$  г/(см·с<sup>2</sup>) и  $R_0 = 10^{-2}$  см. В этом случае  $\sigma$  выражается через плотность  $\rho$ , коэффициент консистенции  $\mu$  и показатель степени нелинейности  $\beta$  неньютоновской жидкости следующим образом:

$$\sigma = (2/3)^{1/2} \frac{4^\beta \mu}{\beta \rho^\beta} \cdot 10^{10\beta-6}.$$

Для воды параметр  $\sigma$  имеет порядок  $3 \cdot 10^{-3}$ . Раствор цементного камня в воде 54.3% концентрации является псевдопластической жидкостью с параметрами  $\beta = 0.077$  и  $\mu = 18.715$  г/(см·с<sup>2(1- $\beta$ )</sup>) [62], а также  $\rho = 2$  г/см<sup>3</sup> [134]. В этом случае параметр  $\sigma$  получается порядка  $10^{-3}$ . Несмотря на то, что показатель  $\beta$  данного раствора сильно отличается от показателя  $\beta$  воды, безразмерные числа  $\sigma$  для них совпадают по порядку.

В работе [135] рассмотрены реологические свойства дилатантной жидкости — смеси кукурузного крахмала с этиленгликолем в различных концентрациях, для которой предложена эмпирическая формула связи параметра консистенции с показателем нелинейности (рассматриваются значения

$$0.55 \leq \beta \leq 1.46)$$

$$\mu = 2^{\beta-1/2} \frac{k_0}{2\beta - 1},$$

где  $k_0 = 13.8 \text{ г}/(\text{см} \cdot \text{с}^{2(1-\beta)})$ . Таким образом, при  $\beta$  равных 0.8, 1 и 1.2 получаются  $\sigma$  порядка  $7 \cdot 10^4$ ,  $5 \cdot 10^5$  и  $4 \cdot 10^7$  соответственно. Такие  $\beta$  соответствуют концентрациям крахмала порядка 35–40%, что дает значение плотности смеси около  $\rho = 1.25 \text{ г}/\text{см}^3$  [134].

При произвольном  $\beta$  решение уравнения (5.5.3) строится численно. Для этого используется математический пакет Maple и его встроенная функция dsolve. В качестве численного метода выбирается неявный метод Рунге-Кутты-Розенброка третьего-четвертого порядка с интерполянтном третьей степени — стандартный метод в dsolve для жестких систем.

Пусть безразмерный параметр  $\sigma = 1$ . На рисунке 5.3 представлен график зависимости численного значения  $y$  при  $x = 10^9$  от показателя  $\beta$ .

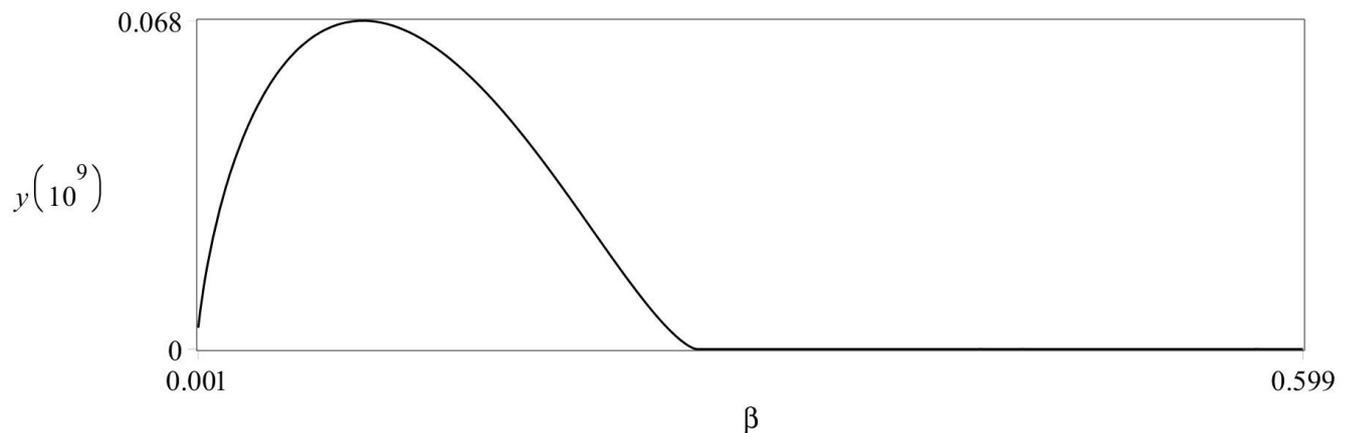


Рисунок 5.3 — Концентрация кинетической энергии жидкости при сжатии вакуумного пузырька с параметром  $\sigma = 1$  в зависимости от показателя степени неньютоновской модели.

В окрестности точки  $\beta = 0.09$  наблюдается максимум концентрации кинетической энергии, ее значение достигает порядка 6.8% от работы постоянного внешнего давления на сжатии вакуумной полости в идеальной жидкости из состояния покоя в точку. При  $\beta > 0.27$  концентрация кинетической энергии отсутствует.

Характер решения уравнения (5.5.3) сильно зависит от обобщенного числа Рейнольдса. На рисунке 5.4 представлены величины  $y(10^9)$  при различных  $\beta$  и  $\sigma$ , слева изображен график поверхности, а справа — контурный

график. Цифрами обозначены линии, соответствующие следующим значениям  $y(10^9)$ : 1 — 0.8, 2 — 0.7, 3 — 0.6, 4 — 0.5, 5 — 0.4, 6 — 0.3, 7 — 0.2, 8 — 0.1, 9 — 0.01.

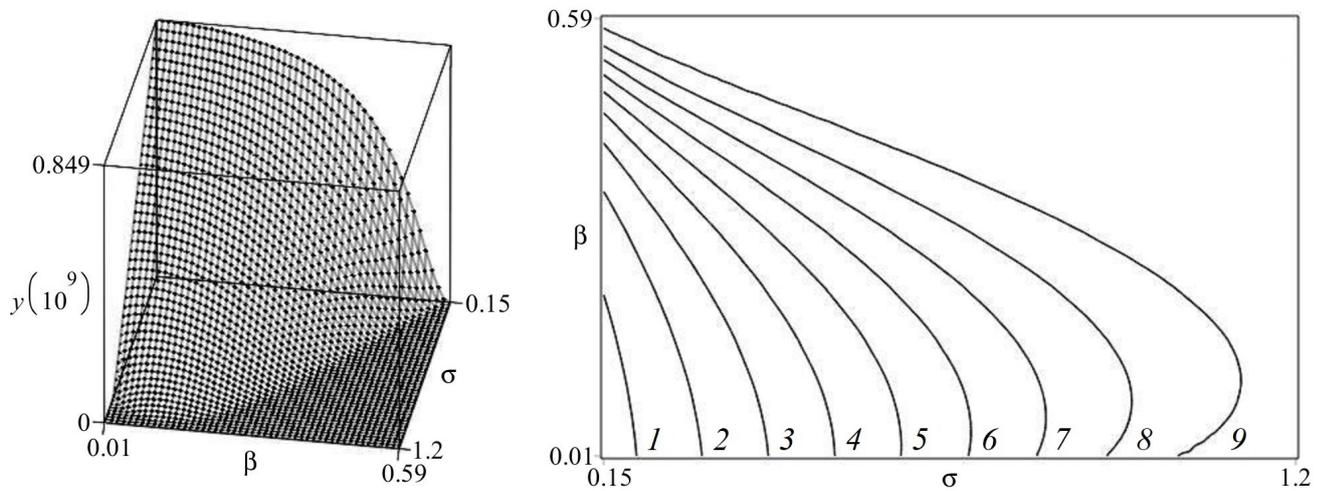


Рисунок 5.4 — Концентрация кинетической энергии жидкости при сжатии вакуумного пузырька в зависимости от различных величин параметров  $\beta$  и  $\sigma$ , график поверхности и контурный график.

Видно, что для каждого  $\beta$  существует критическое значение  $\sigma_{\text{crit}}(\beta)$ , при превышении которого концентрация энергии исчезает. При  $\beta = 0.116$  наблюдается максимум  $\sigma_{\text{crit}} = 1.16$ . Зависимость режима схлопывания вакуумной полости от  $\sigma$  согласуется с результатами Е. И. Забабахина для ньютоновских жидкостей [68] ( $\text{Re}_{\text{crit}} = 8.4$ , что соответствует  $\sigma_{\text{crit}} = 0.39$ ).

Для диапазона  $0.001 \leq \sigma \leq 0.15$  поверхность значений концентрации энергии приведена на рисунке 5.5. Наилучшими результатами обладают модели, близкие к предельной чисто пластической жидкости.

В случае полости, заполненной газом, величина  $y(C)$ , для которой  $\theta = C^{-\gamma}$ , зависит от  $\beta$  и  $\sigma$  аналогичным образом. Это позволяет дать соответствующие рекомендации относительно минимизации величины полной диссипации энергии (5.5.4).

На рисунке 5.6 представлен график полной диссипации (отнесенный к  $p_{\infty}V_0$ ) при  $\sigma = 1$ ,  $\gamma = 1.4$  и  $C = 10^3$  для разных показателей степени неньютоновской модели жидкости. Минимальное значение достигается при  $\beta = 0.093$ .

На рисунке 5.7 представлены величины  $D/(p_{\infty}V_0)$  для  $\gamma = 1.4$  и  $C = 10^3$  при различных параметрах  $\beta$  и  $\sigma$ . Как и на рисунке 5.4, слева изображен

график поверхности, а справа — контурный график. Цифрами обозначены кривые, соответствующие значениям  $D/(p_\infty V_0)$ : 0 — 0.1, 1 — 0.2, 2 — 0.3, 3 — 0.4, 4 — 0.5, 5 — 0.6, 6 — 0.7, 7 — 0.8, 8 — 0.9, 9 — 0.99.

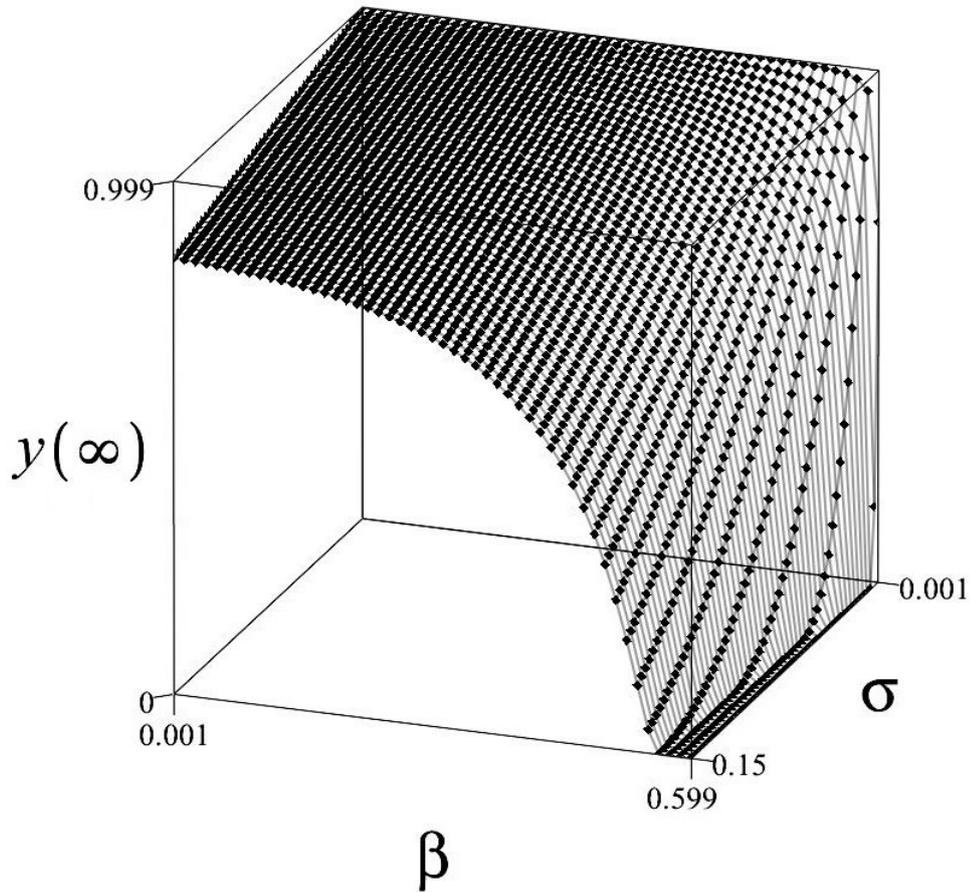


Рисунок 5.5 — Поверхность значений концентрации кинетической энергии жидкости при сжатии вакуумного пузырька в диапазоне  $0.001 \leq \sigma \leq 0.15$ .

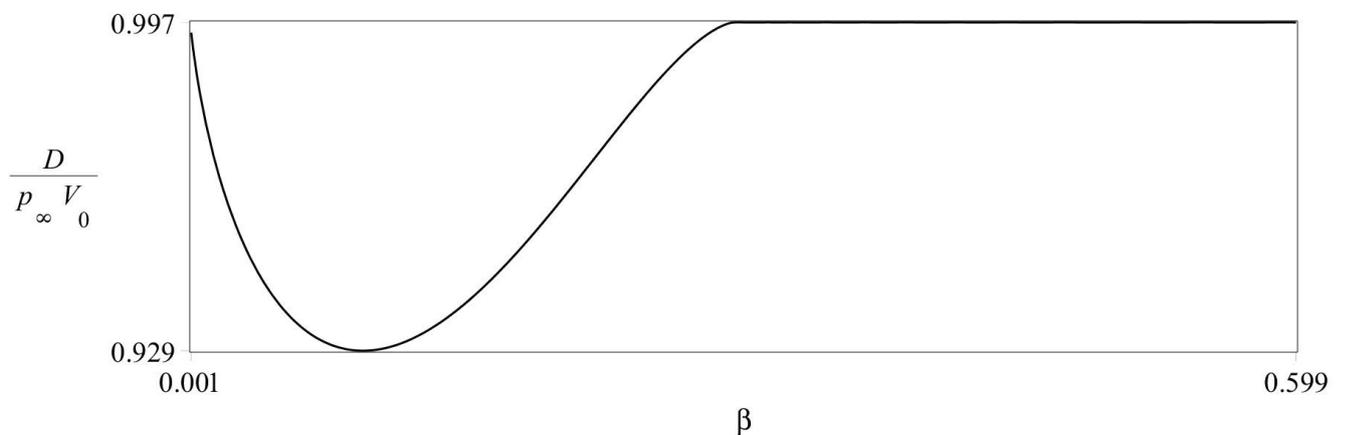


Рисунок 5.6 — Величина полной диссипации энергии при сжатии газовой полости с параметром  $\sigma = 1$  при  $\theta = C^{-\gamma}$  в зависимости от показателя степени неньютоновской модели жидкости.

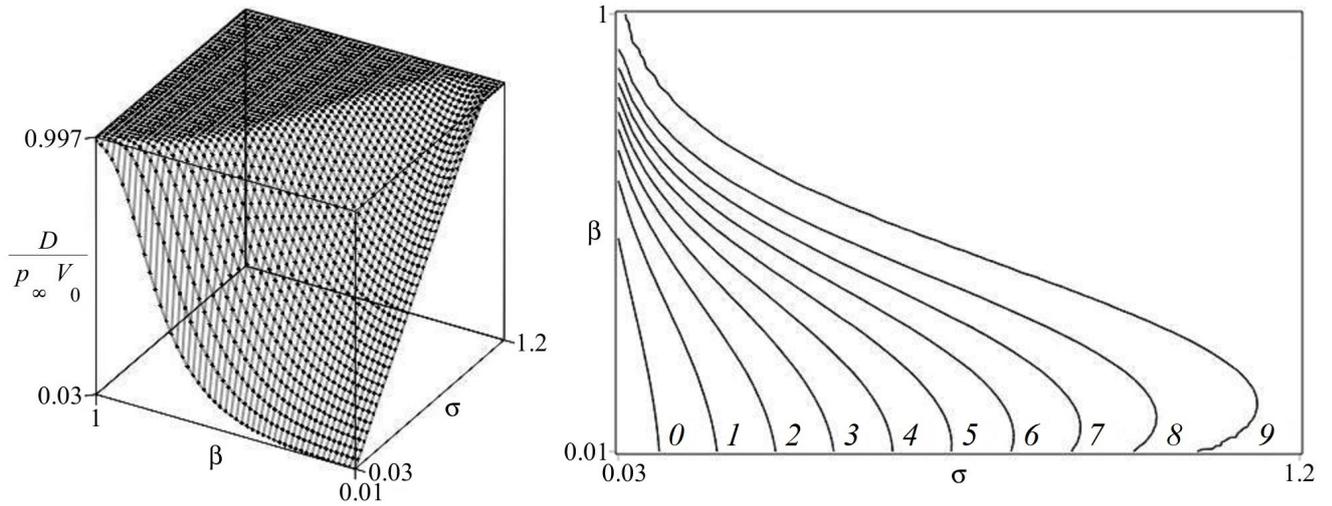


Рисунок 5.7 — Величина полной диссипации энергии при сжатии газовой полости в зависимости от различных значений параметров  $\beta$  и  $\sigma$  при  $\theta = C^{-\gamma}$ , график поверхности и контурный график.

Для пузырька воздуха в воде при параметрах  $Re = 10^3$  (например,  $p_\infty = 10^6$  г/(см·с<sup>2</sup>) и  $R_0 = 10^{-2}$  см) и  $\theta = 0.1$  максимум кинетической энергии достигается в точке  $x_0 = 5.1$  и равен  $y_{\max} = 0.571$ . В данном случае сжатие осуществляется вплоть до точки остановки  $x_1 = C = 53.2$ , то есть до  $R_* = 0.266 R_0$ . При этом оценка (5.5.6) дает  $x_1 < 5^{5/2} = 55.9$ . Полагая  $\theta = 0$  и переходя к рассмотрению вакуумной полости, получается  $y(10^9) = 0.983$ , что говорит о величине концентрации энергии, близкой к предельно допустимой.

Согласно теории сильного взрыва в несжимаемой жидкости [3] концентрация энергии  $E_0$  приводит к последующему взрыву, в результате чего часть  $E_0$  превращается в кинетическую энергию расширяющейся жидкости.

## § 5.6. Основные результаты главы

1. Рассмотрена задача о динамике однородного газового пузырька сферической формы в неограниченном объеме несжимаемой степенной неньютоновской жидкости.

2. Решены задачи об определении необходимого внешнего давления, приводящего к сохранению в процессе сжатия полости кинетической энергии жидкости и скорости вязкой диссипации, обнаружена псевдопластическая модель, при которой можно добиться одновременного постоянства данных величин.

3. Полностью разрешена проблема о концентрации энергии при сжа-

тии вакуумного пузырька в точку из состояния покоя скачком давления на бесконечности.

4. Доказано, что для большей части дилатантных жидкостей концентрация энергии невозможна.

5. Для остальных жидкостей численно построена поверхность значений концентрации энергии как функции показателя степени модели и безразмерного коэффициента консистенции, изучены ее экстремальные свойства — наилучшие результаты дают неньютоновские среды, близкие к чисто пластическим, кривая раздела области с концентрацией энергии имеет точку максимума.

6. На основе указанного решения даны дополнительные рекомендации о минимизации величины полной диссипации энергии при достаточно большом отношении величины давления на бесконечности к начальному давлению в газовом пузырьке.

## ГЛАВА 6\*

### ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОБ ОБЖАТИИ ПОЛОСТИ В ВЯЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ СЖИМАЕМОЙ СРЕДЕ

В настоящей главе дается точное частично сферически-симметричное решение задачи динамики нелинейно-вязкой теплопроводной сжимаемой среды, формулы термодинамического состояния которой соответствуют совершенному газу, при однородном давлении и скорости, пропорциональной расстоянию до центра симметрии [136, 3] и обратно пропорциональной времени, но с переменной плотностью, которая входит в коэффициент теплопроводности, а ее логарифм в результате разделения переменных удовлетворяет пространственному уравнению Пуассона. При этом допускается произвольная изотропная зависимость тензора напряжений только от однородного тензора скоростей деформаций, в результате чего полностью удовлетворяются уравнения движения. Решение моделирует обжатие в данной среде области существенно переменной плотности, например в случае полной сферической симметрии пузырька или капли. Возможны и несферические поверхности уровня плотности, в частности рассматриваются случаи осесимметричного распределения, моделирующие сжатие при наличии струек, а также системы из нескольких пузырьков. Течение может происходить из состояния покоя с конечной массой среды за счет движения сжимающего сферического поршня. Подробно исследуются степенные неньютоновские жидкости. Вычисляется полная энергия среды, анализируется ее поведение в момент сжатия в точку. При этом кинетическая энергия сохраняется и ограничена, а внутренняя энергия при определенных значениях параметров задачи стремится к бесконечности.

#### § 6.1. Постановка задачи

Рассматривается задача о сжатии нелинейно-вязкого теплопроводного совершенного газа с однородной деформацией, вызванное движением сферического поршня с постоянной скоростью  $v_p < 0$ .

Уравнения неразрывности и движения сплошной среды при отсутствии

---

\* При подготовке данной главы диссертации использовались следующие публикации автора, в которых, согласно «Положению о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова», отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [84, 107, 108, 113].

массовых сил имеют вид [114]

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = \nabla_j (\tau^{ij} \mathbf{e}_i), \quad (6.1.1)$$

где  $\rho$  — плотность,  $\mathbf{v}$  — скорость,  $p$  — давление,  $\tau^{ij}$  — компоненты тензора вязких напряжений и  $\mathbf{e}_i$  — базисные векторы.

К системе (6.1.1) нужно добавить уравнения состояния. Предполагается, что тензор вязких напряжений зависит только от тензора скоростей деформаций изотропным образом. Общий вид такой зависимости указан в добавлении 1 к книге [114]. Он представляет собой формулу Гамильтона-Кэли, которая состоит из трех тензорных членов — шарового тензора, линейной части и квадратичной с коэффициентами, зависящими от трех инвариантов тензора скоростей деформаций  $e_j^i$

$$\tau_j^i = \tau_j^i(e_j^i), \quad e_j^i = \frac{1}{2} (\nabla^i v_j + \nabla_j v^i).$$

Также считается, что справедливы термодинамические соотношения для совершенного газа

$$p = c_V(\gamma - 1)\rho T, \quad u = c_V T, \quad \sigma = A \exp(s/c_V) = p/\rho^\gamma$$

при постоянных удельной теплоемкости  $c_V$  и показателе адиабаты  $\gamma$ . Здесь  $u$  и  $s$  — удельные внутренняя энергия и энтропия соответственно,  $\sigma$  — энтропийная функция.

Для определения температуры  $T$  добавляется уравнение притока тепла

$$\rho T \frac{\partial s}{\partial t} = \tau^{ij} e_{ij} + \nabla_i (c_V \rho k \nabla^i T),$$

где коэффициент температуропроводности  $k$  рассматривается постоянным.

Кинематические и динамические условия на поршне имеют вид

$$v_n = v_p, \quad \mathbf{v}_\tau = 0, \quad (6.1.2)$$

$$-p \mathbf{n} + \tau^{ij} \mathbf{e}_j n_i = \mathbf{p}_p. \quad (6.1.3)$$

Таким образом, предполагается, что поршень за счет  $\mathbf{p}_p$  уравнивает лю-

бую поверхностную силу, создаваемую средой. Здесь  $\mathbf{n}$  — внешняя к среде нормаль,  $v_n$  — нормальная компонента скорости и  $\mathbf{v}_\tau$  — вектор касательной скорости.

Температура поршня считается равной температуре среды. Кроме этого, выставляется условие равенства для потоков тепла и работ поверхностных сил, что с учетом (6.1.2) и (6.1.3) дает

$$T = T_p, \quad q_n = q_p. \quad (6.1.4)$$

Ищется решение уравнений (6.1.1), которое удовлетворяет кинематическим условиям на поршне (6.1.2). Рассматривается сферически-симметричное движение с однородной деформацией, для которого скорость в декартовых координатах и давление имеют вид

$$v_i = x_i/t, \quad p = p(t).$$

Тогда компоненты  $v_i$  вектора  $\mathbf{v}$  представляют собой три лагранжевы переменные. Таким образом, ускорение равно нулю, а компоненты тензоров скоростей деформаций и вязких напряжений представляются в виде

$$e_j^i = \delta_j^i/t, \quad |e|^2 = e^{ij}e_{ij} = 3/t^2, \quad \tau_j^i = f(t)\delta_j^i, \quad \tau^{ij}e_{ij} = 3f(t)/t, \quad (6.1.5)$$

где  $\delta_j^i$  — символы Кронекера. Вид  $f(t)$  зависит от вида реологического состояния среды. Уравнения движения в (6.1.1) удовлетворяются.

При сжатии  $t < 0$ . Состояние покоя  $\mathbf{v} = 0$  в начальных условиях соответствует начальной точке  $t = -\infty$ . В момент  $t = 0$  происходит коллапс.

## § 6.2. Разделение переменных

Уравнение неразрывности приводит к разделению переменных для плотности

$$\rho = \rho_1(t)\rho_2(v_i), \quad \rho_1(t) = |t|^{-3},$$

что вместе с однородностью давления дает разделение переменных и для энтропийной функции

$$\sigma = \sigma_1(t)\sigma_2(v_i), \quad \sigma_1(t) = p(t)|t|^{3\gamma}, \quad \sigma_2(v_i) = \rho_2^{-\gamma}(v_i).$$

Переменные  $t$  и  $v_i$  в уравнении притока тепла также разделяются

$$-\Delta_{\mathbf{v}}(\ln \rho_2(v_i)) \equiv \lambda \equiv \frac{t^2}{k\sigma_1(t)} \left( \frac{d\sigma_1(t)}{dt} - (\gamma - 1)\tau^{ij}e_{ij}|t|^{3\gamma} \right), \quad (6.2.1)$$

где  $\Delta_{\mathbf{v}}$  — оператор Лапласа в переменных  $v_i$ .

Следовательно, для  $\ln \rho_2(v_i)$  получается уравнение Пуассона. Его решение приводит к формуле

$$\rho_2(v_i) = \rho_0 \exp \left( -\frac{\lambda|\mathbf{v}|^2}{6} + \varphi(v_i) \right), \quad (6.2.2)$$

где  $\varphi(v_i)$  — произвольное решение уравнения Лапласа:  $\Delta_{\mathbf{v}}\varphi(v_i) = 0$ .

Итак, имеется сферически-симметричное движение газа с однородным давлением и плотностью, допускающей разделение переменных  $t$  и  $v_i$ .

Формальное решение линейного неоднородного уравнения (6.2.1) для функции  $\sigma_1(t)$  может быть представлено в виде

$$\sigma_1(t) = \left( C + (\gamma - 1) \int \tau^{ij}e_{ij}|t|^{3\gamma} \exp \left( -\frac{\lambda k}{|t|} \right) dt \right) \exp \left( \frac{\lambda k}{|t|} \right). \quad (6.2.3)$$

Вычисление полной энергии между центром и поршнем дает

$$E = K + U = \int_{V_0} \left( \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} \right) \rho_2 dV = \int_{V_0} \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \rho_2 dV + \frac{4\pi\sigma_1(t)|v_p|^3}{3(\gamma - 1)|t|^{3(\gamma-1)}},$$

где  $V_0$  — объем шара радиуса  $|v_p|$ .

Из уравнения (6.2.1) следует, что для величины  $U$  выгодны значения  $\lambda \geq 0$ , связанные с увеличением роста  $\sigma_1(t)$ . В дальнейшем рассматриваются только неотрицательные  $\lambda$ .

Таким образом, кинетическая энергия при сжатии сохраняется и конечна, в то время как внутренняя энергия растет до бесконечности при  $t \rightarrow -0$ , если порядок функции  $\sigma_1(t)$  ниже, чем  $|t|^{3(\gamma-1)}$ . Если порядок  $\sigma_1(t)$  равен  $|t|^{3(\gamma-1)}$ , то получается постоянная. Если выше, то ноль.

В случае невязкого и нетеплопроводного газа энтропийная функция не будет зависеть от времени. Разделение переменных в интеграле адиабатичности дает

$$p(t) = \lambda_0|t|^{-3\gamma}, \quad \sigma(v_i) = \lambda_0\rho_2^{-\gamma}(v_i).$$

Функция  $\rho_2(v_i)$  в данной постановке остается произвольной, а внутренняя энергия принимает вид

$$U = \frac{4\pi\lambda_0|v_p|^3}{3(\gamma - 1)|t|^{3(\gamma-1)}}$$

и всегда растет неограниченно при  $|t| \rightarrow 0$ .

Рассмотренный метод построения решений применим и для случаев цилиндрической и плоской симметрий, когда  $e_1^1 = e_2^2 = 1/t$ ,  $e_3^3 = 0$  или  $e_1^1 = 1/t$ ,  $e_2^2 = e_3^3 = 0$  соответственно.

### § 6.3. Сферическая симметрия

В случае сферической симметрии для описания движения лучше использовать массовую лагранжеву переменную  $m$ , отсчитываемую от центра. Тогда радиальная координата равна

$$r(m, t) = v(m)t,$$

где  $v(m) < 0$  — радиальная скорость, являющаяся однозначной функцией переменной  $m$ , для которой предполагается  $v(0) = 0$ . В начальный момент времени  $t = -\infty$  газ покоится, а при  $t = 0$  — сжимается в точку.

Плотность газа имеет вид

$$\rho = (4\pi r^2 r_m)^{-1} = \rho_1(t)\rho_2(m),$$

$$\rho_1(t) = |t|^{-3}, \quad \rho_2(m) = (4\pi v^2(m)|v'(m)|)^{-1}.$$

Общее решение уравнения (6.2.1) для функции  $\rho_2(v)$  представляется в виде

$$\rho_2(v) = \rho_0 \exp\left(-\frac{\lambda v^2}{6} + \frac{\alpha}{v}\right), \quad (6.3.1)$$

откуда

$$m(v) = 4\pi\rho_0 \int_v^0 \xi^2 \exp\left(-\frac{\lambda\xi^2}{6} + \frac{\alpha}{\xi}\right) d\xi.$$

Для приведения соотношения (6.3.1) к безразмерному виду можно использовать модуль скорости поршня  $|v_p|$ .

При  $\alpha > 0$  вблизи центра имеется полость, характерные графики реше-

ния приведены на рисунке 6.1. Если  $\lambda = 0$  функция  $\rho_2(v)$  монотонно выходит на значение  $\rho_0$  при стремлении  $|v|$  к бесконечности, при  $\lambda > 0$  — стремится к 0. Кроме того, в последней ситуации существует максимум плотности в точке

$$v_* = -(3\alpha/\lambda)^{1/3}. \quad (6.3.2)$$

Допускается следующая физическая интерпретация: в первом случае вблизи центра имеется пузырек, во втором — капля с пузырьком. При  $\alpha = 0$  и  $\lambda > 0$  имеется капля без пузырька. Следует отметить, что движение поршня может быть медленным, но термодинамические параметры газа, например, плотность, с течением времени существенно растут.

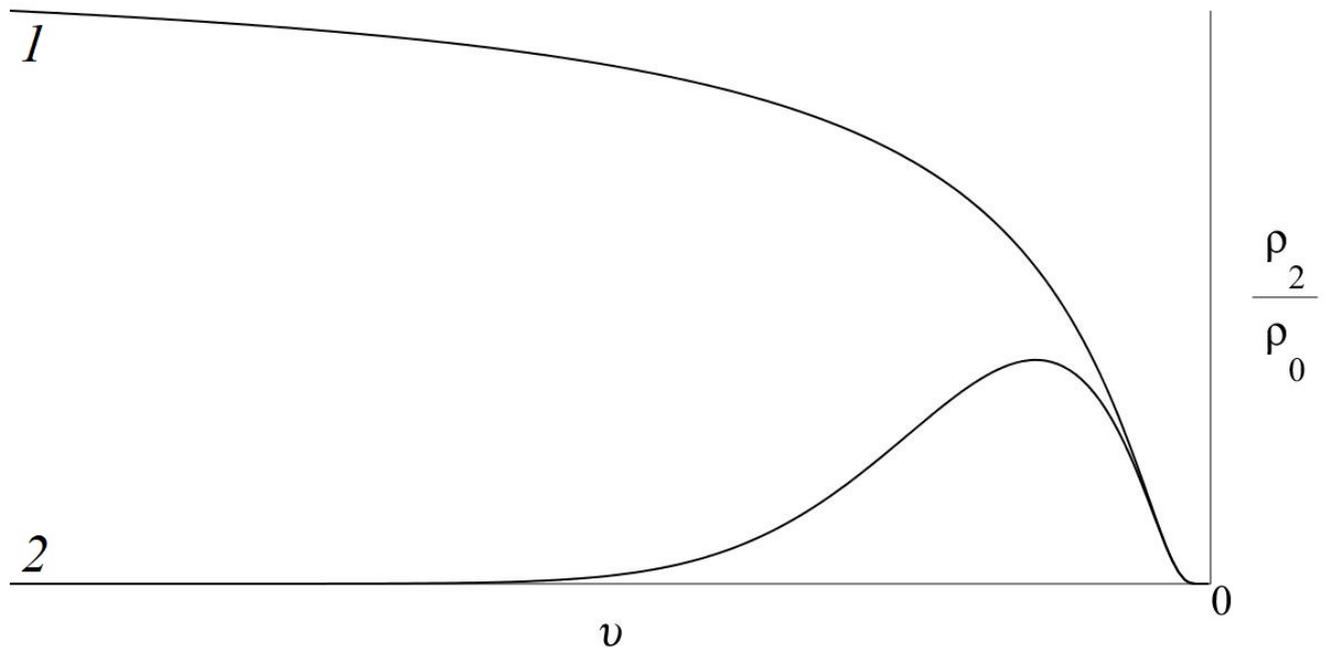


Рисунок 6.1 — Качественный график функции  $\rho_2/\rho_0$  в случаях  $\lambda = 0, \alpha = 1$  — кривая 1 и  $\lambda = 1, \alpha = 1$  — кривая 2.

Поскольку давление однородно, то при возрастании плотности с ростом  $|v|$  температура убывает и, следовательно, в пузырьке поток тепла направлен от центра. При убывании плотности с ростом  $|v|$  поток тепла направлен к центру. Если движение среды совершается под действием «вмороженного» в нее поршня, то его лучше расположить в точке максимума (6.3.2) функции  $\rho_2(v)$ , то есть принять  $v_p = v_*$ . При этом нет ухода тепла через поршень,  $q_p = 0$ . Потоки тепла создаются в том числе за счет действия сил вязкости, которые разогревают среду.

Решение имеет достаточно глубокую и широкую полость вблизи центра, границу которой можно отсчитывать от точки перегиба. Например, при  $\lambda = 0$  она расположена в  $v_{**} = -\alpha/2$  со значением  $\rho_2(v_{**})/\rho_0 = \exp(-2)$ .

Полная энергия газа в случае сферической симметрии имеет вид

$$E(m, t) = \int_0^m \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} \right) d\xi = \int_0^m \frac{v^2(\xi)}{2} d\xi + \frac{4\pi\sigma_1(t)|v(m)|^3}{3(\gamma - 1)|t|^{3(\gamma-1)}}.$$

#### § 6.4. Реологические сжимаемые жидкости

В решении (6.2.3) можно явно задать пределы интегрирования

$$\sigma_1(t) = \left( \sigma_1(-\infty) + (\gamma - 1) \int_{-\infty}^t \tau^{ij} e_{ij} |\theta|^{3\gamma} \exp\left(-\frac{\lambda k}{|\theta|}\right) d\theta \right) \exp\left(\frac{\lambda k}{|t|}\right). \quad (6.4.1)$$

За счет положительности интеграла внутри (6.4.1) функция  $\sigma_1(t)$  в случае  $\lambda > 0$  стремится к бесконечности при  $|t| \rightarrow 0$ , так же ведут себя плотность, давление и энергия.

Для исследования сходимости интеграла делается замена переменной  $\theta = -1/\eta$

$$\int_{-\infty}^t \tau^{ij} e_{ij} |\theta|^{3\gamma} \exp(-\lambda k/|\theta|) d\theta = \int_0^{1/|t|} \tau^{ij} e_{ij} \eta^{-(3\gamma+2)} \exp(-\lambda k\eta) d\eta.$$

Поскольку  $\exp(-\lambda k/|t|) \leq \exp(-\lambda k\eta) \leq 1$  и  $\tau^{ij} e_{ij} \eta^{-(3\gamma+2)} \geq 0$ , справедлива оценка

$$\begin{aligned} \exp(-\lambda k/|t|) \int_{\varepsilon}^{1/|t|} \tau^{ij} e_{ij} \eta^{-(3\gamma+2)} d\eta &\leq \int_{\varepsilon}^{1/|t|} \tau^{ij} e_{ij} \eta^{-(3\gamma+2)} \exp(-\lambda k\eta) d\eta \leq \\ &\leq \int_{\varepsilon}^{1/|t|} \tau^{ij} e_{ij} \eta^{-(3\gamma+2)} d\eta, \end{aligned} \quad (6.4.2)$$

где  $\varepsilon \rightarrow 0+$ , что отражает рассуждения классической теоремы о среднем значении интеграла. Исходя из (6.4.2) видно, что экспонента под интегралом

не влияет на его сходимость при  $\varepsilon \rightarrow 0+$ .

Сходимость зависит от выбора реологического закона  $\tau_j^i(e_j^i)$ . Например, если

$$\tau_j^i = 2\mu|e|^{2\beta-1}e_j^i, \quad \tau^{ij}e_{ij} = 2\sqrt{3}\mu 3^\beta |t|^{-(2\beta+1)},$$

что соответствует модели степенной неньютоновской жидкости, которая использовалась в предыдущей главе, сходимость интеграла для фиксированного момента  $t < 0$  будет достигаться при условии  $\beta > (3/2)\gamma$ , то есть в случае твердеющих дилатантных жидкостей. Расходимости интеграла также можно избежать, если начальный момент времени взять равным  $t = t_0 > -\infty$ , однако в этом случае необходимо обеспечить задание начальной скорости газа, что усложняет физическую реализацию решения.

Вычисление радиальной составляющей  $p_p^r$  вектора  $\mathbf{p}_p$ , необходимой для поддержания процесса сжатия, с учетом (6.1.3) и (6.1.5) дает

$$p_p^r = -p(t) + f(t) = -\left(\frac{\sigma_1(t)}{|t|^{3\gamma}} + \frac{2\mu 3^\beta}{\sqrt{3}|t|^{2\beta}}\right).$$

Интеграл в (6.4.1) легко вычисляется в случаях  $\lambda = 0$ ,  $\beta > (3/2)\gamma$  или  $\lambda > 0$ ,  $\beta = (3\gamma + 1)/2$ . При  $\lambda = 0$  и  $\beta > (3/2)\gamma$  имеем

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= \sigma_1(-\infty) + \frac{2\sqrt{3}\mu 3^\beta(\gamma - 1)}{(2\beta - 3\gamma)|t|^{2\beta-3\gamma}}, \\ -p_p^r &= \frac{\sigma_1(-\infty)}{|t|^{3\gamma}} + \frac{2\mu 3^\beta(2\beta - 3)}{\sqrt{3}(2\beta - 3\gamma)|t|^{2\beta}}. \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

Главным членом в (6.4.3) при  $|t| \rightarrow 0$  является второе слагаемое. Если  $\lambda > 0$  и  $\beta = (3\gamma + 1)/2$ , то получаем

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= \left(\sigma_1(-\infty) + \frac{2\sqrt{3}\mu 3^\beta(\gamma - 1)}{\lambda k} \left[1 - \exp\left(-\frac{\lambda k}{|t|}\right)\right]\right) \exp\left(\frac{\lambda k}{|t|}\right), \\ -p_p^r &= \left(\sigma_1(-\infty) + \frac{2\sqrt{3}\mu 3^\beta(\gamma - 1)}{\lambda k} \left[1 - \exp\left(-\frac{\lambda k}{|t|}\right)\right]\right) \times \\ &\quad \times \exp\left(\frac{\lambda k}{|t|}\right) \frac{1}{|t|^{3\gamma}} + \frac{2\mu 3^\beta}{\sqrt{3}|t|^{3\gamma+1}}. \end{aligned} \quad (6.4.4)$$

При  $|t| \rightarrow 0$  главным членом роста в (6.4.4) является  $\exp(\lambda k/|t|) |t|^{-3\gamma}$  с коэффициентом порядка единицы.

В случае сферической симметрии при  $\lambda = 0$  нельзя считать  $q_n = 0$  на поршне, вычисления при  $\beta > (3/2)\gamma$  показывают, что должен быть отток тепла

$$q_p = -c_V k \left( \rho \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{v=v_p} = \left( \sigma_1(-\infty) + \frac{2\sqrt{3}\mu_3\beta(\gamma-1)}{(2\beta-3\gamma)|t|^{2\beta-3\gamma}} \right) \frac{k\alpha}{(\gamma-1)|t|^{3\gamma+1}v_p^2}, \quad (6.4.5)$$

где  $v_p$  — задаваемая скорость поршня. Главным членом в (6.4.5) является второе слагаемое в скобках. Как отмечено в предыдущем параграфе, в случае  $\lambda > 0$  всегда можно выбрать скорость поршня в виде (6.3.2), тогда  $q_p = 0$ .

Во всех приведенных примерах вязкость играет существенную роль.

### § 6.5. Случай несферической симметрии

Анализ решения (6.2.2) при различных функциях  $\rho_2(v_i)$  может быть проведен, например, в случае осевой симметрии, где  $Ov_3$  — ось симметрии. Здесь рассмотрены две ситуации: аргумент экспоненты возмущается решениями уравнения Лапласа первой и второй степени по  $|\mathbf{v}|$ , не изменяющими поведения плотности в центре и на бесконечности. Графики изображаются на плоскости  $(v_1, v_3)$ , то есть при  $v_2 = 0$ .

Случай 1:

$$\rho_2(v_i) = \rho_0 \exp \left( -\frac{\lambda|\mathbf{v}|^2}{6} - \frac{\alpha}{|\mathbf{v}|} + \delta_1 v_3 \right). \quad (6.5.1)$$

На рисунке 6.2 приведена форма распределения плотности как функции  $(v_1, v_3)$  при  $\lambda = 1$ ,  $\alpha = 1$  и  $\delta_1 = 0.1$ . На рисунке 6.3 указаны линии уровня объемной фигуры, приведенной на рисунке 6.2. В результате сжатия при  $|t| \rightarrow 0$  значение функции  $\rho = |t|^{-3}\rho_2(v_i)$  будет увеличиваться, что можно интерпретировать как движение неоднородности плотности к центру, своего вида осесимметричная струйка.

Случай 2:

$$\rho_2(v_i) = \rho_0 \exp \left( -\frac{\lambda|\mathbf{v}|^2}{6} - \frac{\alpha}{|\mathbf{v}|} + \delta_2 [3v_3^2 - |\mathbf{v}|^2] \right). \quad (6.5.2)$$

На рисунке 6.4 приведена форма распределения плотности при  $\lambda = 1$ ,  $\alpha = 1$  и  $\delta_2 = 0.05$ . На рисунке 6.5 указаны линии уровня данной фигуры. Здесь будут две симметричные струйки, направленные к центру.

Графики пространственных фигур — полупрозрачные, соответственно, внутренность затемнена. На контурных графиках более светлые области соответствуют меньшим значениям плотности.

В принципе, можно рассмотреть любые гармонические функции  $\varphi(v_i)$ , например представляющие произвольное количество пузырьков с центрами в особых точках типа источника  $\sum_k (-\alpha_k)/|\mathbf{v} - \mathbf{v}_k|$ . На рисунке 6.6 указана система двух пузырьков для значений параметров  $\lambda = 1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\mathbf{v}_1 = (0, 0, 2)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (0, 0, -2)$ . В данной ситуации пузырьки равноудалены от центра. На рисунке 6.7 представлен случай, когда один из трех пузырьков расположен в центре:  $\lambda = 0$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\alpha_3 = 1$ ,  $\mathbf{v}_1 = (0, 0, 2)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (0, 0, -2)$ .

Заметим, что температура перед поршнем распределена не сферически-симметричным образом, но в условии (6.1.4) будут присутствовать только радиальные компоненты вектора потока тепла. Рационально выбирать скорость поршня так, чтобы средний по сфере поток тепла равнялся нулю.

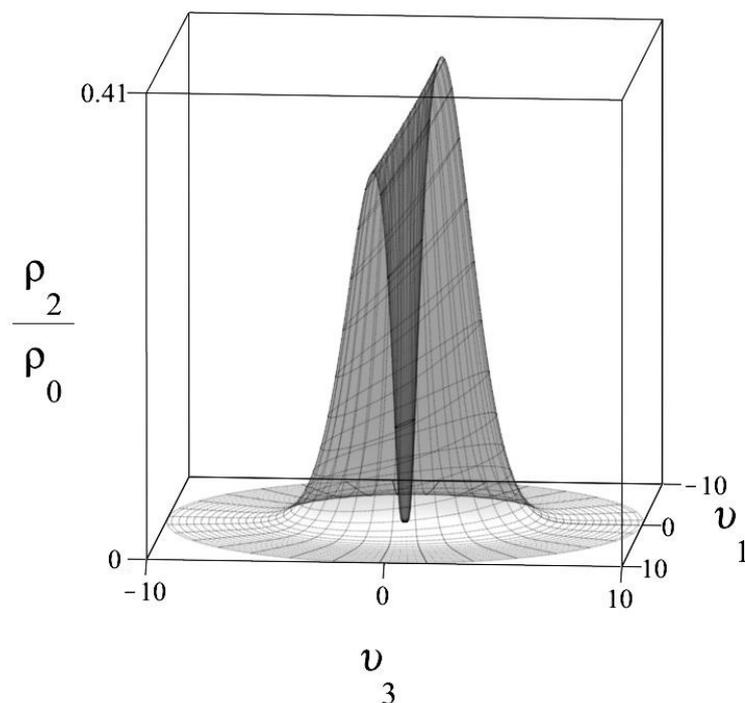


Рисунок 6.2 — Форма распределения плотности  $\rho_2$  для решения (6.5.1).

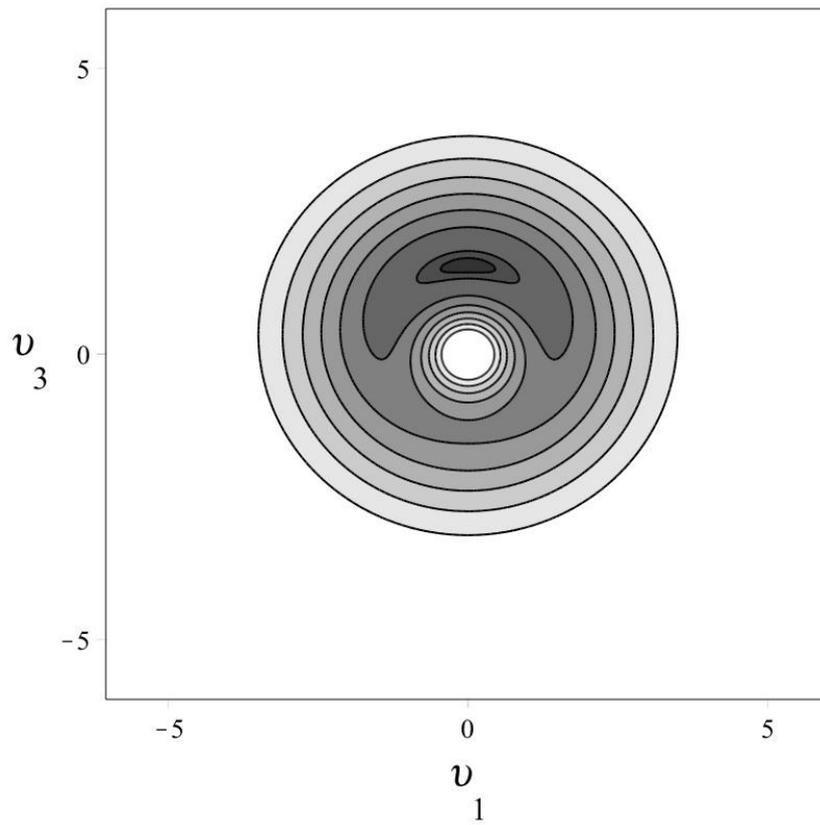


Рисунок 6.3 — Контурный график плотности  $\rho_2$  для решения (6.5.1).

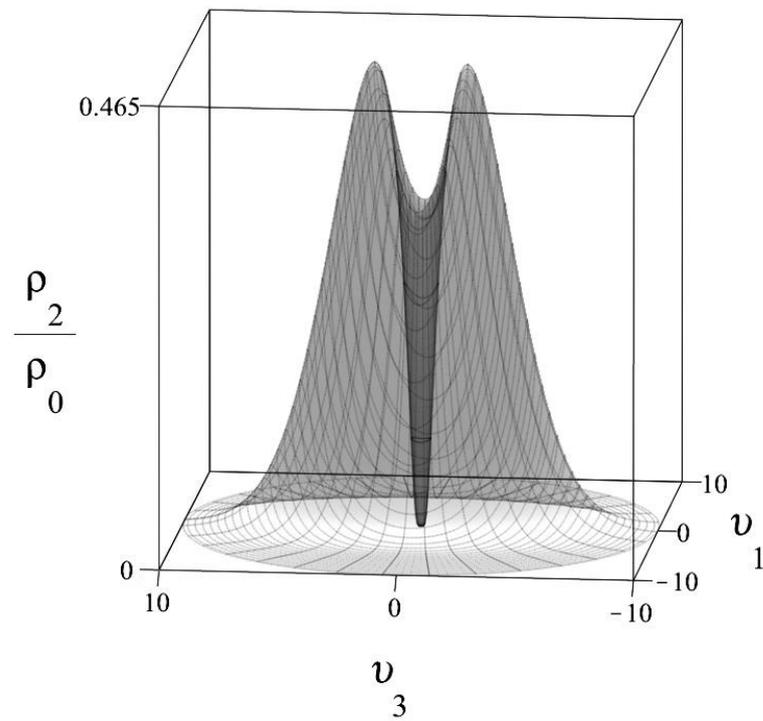


Рисунок 6.4 — Форма распределения плотности  $\rho_2$  для решения (6.5.2).

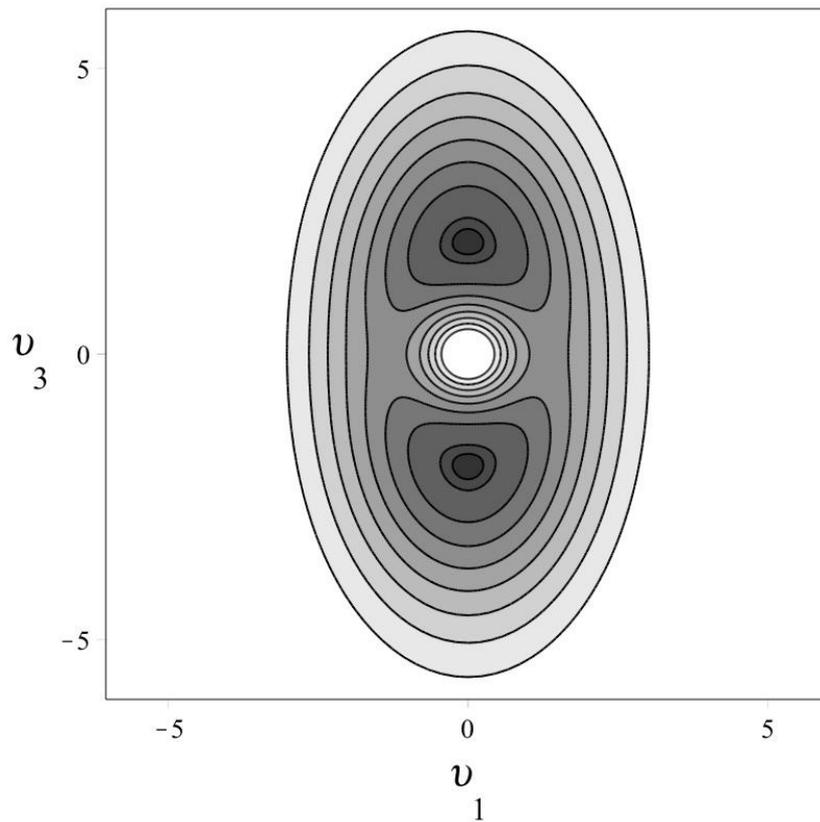


Рисунок 6.5 — Контурный график плотности  $\rho_2$  для решения (6.5.2).

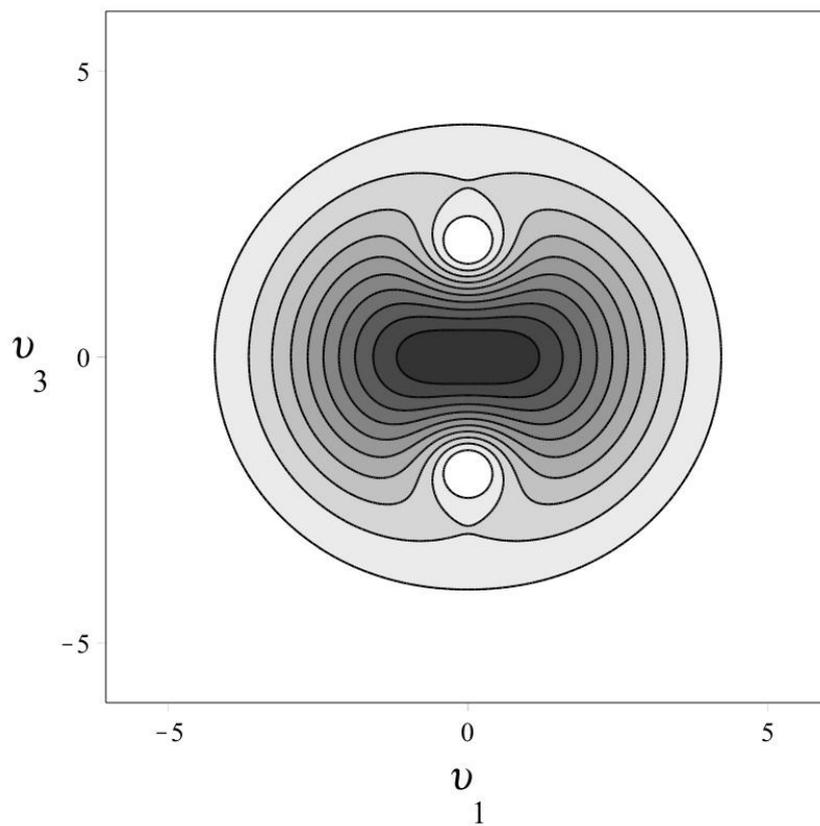


Рисунок 6.6 — Контурный график системы двух пузырьков, равноудаленных от центра.

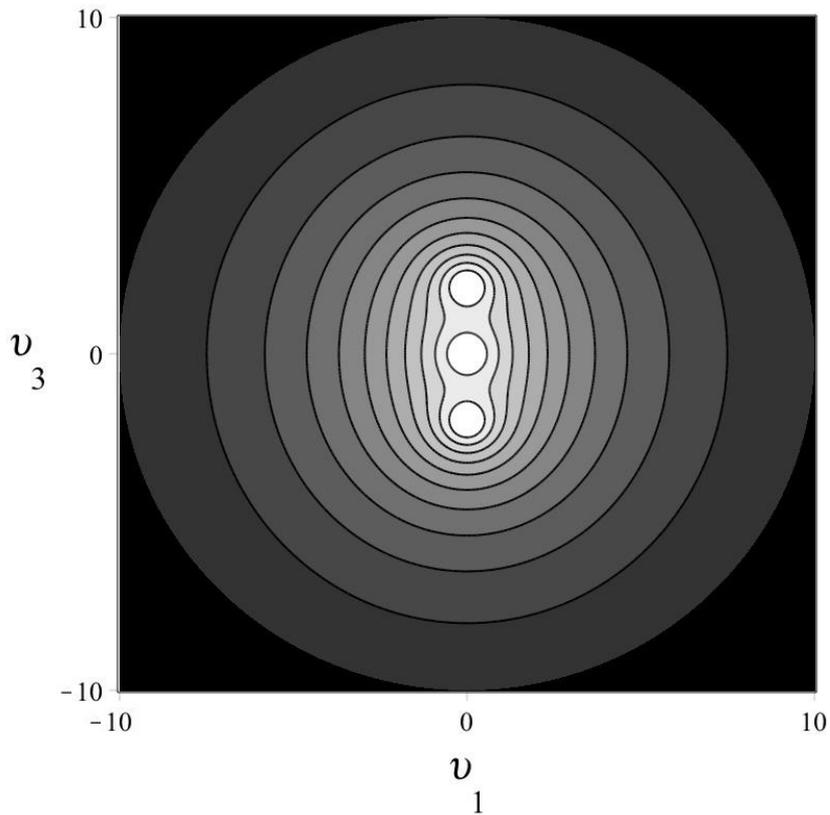


Рисунок 6.7 — Контурный график системы трех пузырьков, один из которых расположен в центре, а два остальных равноудалены от центра.

Данные исследования могут быть обобщены на вязкоупругие среды [85] и действие однородных сил, зависящих от времени, типа сил инерции, а также на зависимость коэффициентов вязкости и температуропроводности от давления. Существенным моментом в работе [85] была минимизация полной диссипации кинетической энергии при заданном импульсе, которая достигается на однородных деформациях.

Кроме того, приведенный подход к построению точных решений может быть применен и в релятивистской газовой динамике [108].

### § 6.6. Основные результаты главы

1. Дано точное частично сферически-симметричное решение в элементарных функциях уравнений динамики нелинейно-вязкой теплопроводной сжимаемой среды, закон термодинамического состояния которой соответствует совершенному газу.

2. Рассматривается вектор скорости вида  $\mathbf{v} = \mathbf{r}/t$ , в этом случае его декартовы компоненты можно принять за лагранжевы переменные.

3. Предполагается однородность давления и зависимость тензора вязких напряжений только от однородного тензора скоростей деформаций, что позволяет полностью удовлетворить уравнениям движения.

4. Течение может происходить из состояния покоя с конечной массой среды за счет движения сжимающего сферического поршня.

5. В результате разделения переменных получено трехмерное уравнение Пуассона, решение которого моделирует обжатие в данной среде области существенно переменной плотности, например пузырька или капли в случае полной сферической симметрии задачи.

6. Возможны и несферические поверхности постоянной плотности, рассмотрены примеры наличия осесимметричных струек внутри среды и систем из произвольного количества пузырьков.

7. Вычислена полная энергия среды и представлено ее поведение в момент сжатия в точку, при этом кинетическая энергия сохраняется и ограничена, а для внутренней энергии удается добиться неограниченного роста за счет работы поршня, подробно исследован случай степенных неньютоновских жидкостей.

8. В случае полной сферической симметрии задачи изучено распределение потоков тепла в среде — в окрестности сферического пузырька происходит отток, при этом в частном случае положение поршня может быть выбрано так, чтобы поток тепла на нем равнялся нулю.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации разработан ряд методов построения аналитических решений задач газовой динамики и механики пузырька в неньютоновских вязких жидкостях, в том числе при наличии явления кумуляции (концентрации) энергии, представлена их вычислительная реализация средствами компьютерной алгебры.

1. Развита теория построения точных решений начальных и краевых задач одномерной нестационарной динамики совершенного газа с плоскими волнами при переменной удельной энтропии в виде степенных рядов по различным лагранжевым переменным или специальным функциям от времени. Указанный подход фактически подразумевает отсутствие образования ударных волн в процессе течения газа в трубе с двумя поршнями. Особое внимание уделено получению периодических по времени движений. Приводятся доказательства существования и глобальной аналитичности соответствующих решений на основе метода С. В. Ковалевской и принципа мажорант.

2. В рамках каждого подхода выведены рекуррентные соотношения, которые позволяют найти неизвестные члены рядов по начальным или краевым условиям. С функциональной точки зрения коэффициенты разложений устроены достаточно сложно, однако для их точного вычисления можно воспользоваться средствами символьных преобразований в математических пакетах. Данным способом решен ряд задач о периодических колебаниях пары поршней без учета и с учетом силы тяжести при заданных краевых условиях на одном из них, а также задача о сильном безударном сжатии газа.

3. Исследована теория преобразования полуугодографа — специального метода, позволяющего применить указанные выше идеи к решению задач с переменной энтропийной функцией при произвольном законе термодинамического состояния газа. Метод апробирован на примере обобщения решения задачи об однородном разлете (сжатии) газа Ван-дер-Ваальса.

4. Изучен трехволновой резонанс в стационарной сверхзвуковой задаче газовой динамики. Выведены и решены в эллиптических функциях амплитудно-фазовые уравнения, определены необходимые для взаимодействия мод граничные условия. Представлена картина течения газа в плоском сверхзвуковом сопле с волнистыми верхней и нижней стенками.

5. Рассмотрена сферически-симметричная задача о динамике однород-

ной газовой полости в несжимаемой вязкой степенной жидкости. Найдены условия, при которых в процессе сжатия полости одновременно сохраняются кинетическая энергия жидкости и скорость вязкой диссипации. Исследована классическая задача о схлопывании вакуумного пузырька скачком внешнего давления, полностью изучен вопрос о концентрации энергии. Доказано, что для большинства дилатантных жидкостей концентрация энергии невозможна. Для остальных моделей построена поверхность зависимости величины концентрации энергии от показателя реологического закона и безразмерного коэффициента консистенции, указана критическая кривая, разделяющая области с концентрацией энергии и без нее. Наибольшей концентрацией энергии и наименьшей вязкой диссипацией обладают жидкости, близкие к предельной чисто пластической модели.

6. Дано точное решение с однородной деформацией задачи о сжатии поршнем из состояния покоя в точку нелинейно-вязкой теплопроводной среды с уравнениями состояния совершенного газа. Разделение переменных в уравнении притока тепла приводит к пространственному уравнению Пуассона с постоянной правой частью для натурального логарифма плотности, что позволяет рассматривать произвольные системы пузырьков и струек внутри среды. При этом кинетическая энергия среды при сжатии сохраняется, а для внутренней энергии удается добиться неограниченного роста за счет работы поршня. Исследованы детально случай полной сферической симметрии и реологическая модель степенной жидкости. Указанный подход к построению точных решений применим и в релятивистской газовой динамике.

Результаты диссертации могут быть использованы при описании безударных газодинамических явлений в трубах, проектировании сверхзвуковых сопел, для получения больших величин концентрации энергии при коллапсе среды, а также в других смежных областях науки и техники.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Sundman K.F.* Memoire sur le probleme des trois corps // *Acta mathematica.* – 1913. – V. 36. – P. 105–179.
2. *Levi-Civita T.* Sulla regolarizzazione del problema piano dei tre corpi // *Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* – 1915. – V. 24. – P. 61–75.
3. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
4. *Карликов В.П.* К общей теории осесимметричных движений газа // *Доклады Академии наук СССР.* – 1960. – Т. 133, N 5. – С. 1049–1052.
5. *Голубятников А.Н., Ковалевская С.Д.* Об ускорении слабых ударных волн // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа.* – 2015. – N 5. – С. 123–129.
6. *Голубятников А.Н., Ковалевская С.Д.* О распространении разрывов по неоднородному статическому фону // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа.* – 2017. – N 2. – С. 165–172.
7. *Голубятников А.Н.* Разрывы малой амплитуды решений уравнений механики сплошной среды // *Труды Математического института имени В.А. Стеклова.* – 2018. – Т. 300. – С. 65–75.
8. *Голубятников А.Н., Ковалевская С.Д.* Слабые ударные волны в заряженном газе // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа.* – 2019. – N 6. – С. 141–144.
9. *Аксенов А.В.* Нелинейные периодические волны в газе // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа.* – 2012. – N 5. – С. 88–98.
10. *Петров А.Г.* Возбуждение нелинейных периодических стоячих волн в сжимаемых средах // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа.* – 2015. – N 6. – С. 89–92.
11. *Guderley G.* Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstosse in der Nahe des Kugelmittelpunktes beziehungsweise der Zylinderachse // *Zeitschrift fur Luftfahrtforschung.* – 1942. – V. 19. – P. 302–312.
12. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Том VI. Гидродинамика. – М.: Наука, 1988. – 736 с.
13. *Станюкович К.П.* Неустановившиеся движения сплошной среды. –

- М.: Наука, 1971. – 856 с.
14. *Седов Л. И.* Движения воздуха при сильном взрыве // Доклады Академии наук СССР. – 1946. – Т. 52, N 1. – С. 17–20.
  15. *Седов Л. И., Коробейников В. П., Марков В. В.* Теория распространения взрывных волн // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. – 1986. – Т. 175. – С. 178–216.
  16. *Коробейников В. П.* Задачи теории точечного взрыва в газах // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. – 1973. – Т. 119. – С. 3–278.
  17. *Taylor G. I.* The formation of a blast wave by a very intense explosion. I. Theoretical discussion // Proceedings of the Royal Society. Series A. – 1950. – V. 201. – P. 159–174.
  18. *Taylor G. I.* The formation of a blast wave by a very intense explosion. II. The atomic explosion of 1945 // Proceedings of the Royal Society. Series A. – 1950. – V. 201. – P. 175–186.
  19. *von Neumann J.* The point source solution // John von Neumann. Collected Works. Volume 6 / Editor A. H. Taub. – New York: Pergamon Press, 1963. – P. 219–237.
  20. *Охоцимский Д. Е., Кондрашова И. Л., Власова З. И., Казакова Р. К.* Расчет точечного взрыва с учетом противодействия // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. – 1957. – Т. 50. – С. 3–66.
  21. *Goldstine H. H., von Neumann J.* Blast wave calculation // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1955. – V. 8. – P. 327–354.
  22. *Brode H. L.* Numerical solutions of spherical blast waves // Journal of Applied Physics. – 1955. – V. 26. – P. 766–775.
  23. *Коробейников В. П., Чушкин П. И.* Плоский, цилиндрический и сферический взрыв в газе с противодействием // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. – 1966. – Т. 87. – С. 4–33.
  24. *Ландау Л. Д.* Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения // Прикладная математика и механика. – 1945. – Т. 9, N 4. – С. 286–292.
  25. *Якимов Ю. Л.* Об асимптотических решениях уравнений одномерного неустановившегося движения идеального газа и об асимптотических

- законах затухания ударных волн // Прикладная математика и механика. – 1955. – Т. 19, № 6. – С. 681–692.
26. *Карликов В. П.* Решение линеаризованной осесимметричной задачи о точечном взрыве в среде с переменной плотностью // Доклады Академии наук СССР. – 1955. – Т. 101, № 6. – С. 1009–1012.
  27. *Карликов В. П.* Линеаризованное решение задачи о сильном взрыве в среде с линейным распределением плотности // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 1960. – № 1. – С. 60–65.
  28. *Коробейников В. П., Карликов В. П.* Определение формы и параметров фронта ударной волны при взрыве в неоднородной среде // Доклады Академии наук СССР. – 1963. – Т. 148, № 6. – С. 1271–1274.
  29. *Коробейников В. П., Карликов В. П.* О взаимодействии сильных взрывных волн с электромагнитным полем // Доклады академии наук СССР. – 1960. – Т. 133, № 4. – С. 764–767.
  30. *Галин Г. Я., Голубятников А. Н., Каменярж Я. А., Карликов В. П., Куликовский А. Г., Петров А. Г., Свешникова Е. И., Шикина И. С., Эглит М. Э.* Механика сплошных сред в задачах: [в 2-х томах] / Под редакцией М. Э. Эглит. – М.: Московский лицей, 1996.  
Т. 1: Теория и задачи. – 396 с.  
Т. 2: Ответы и решения. – 394 с.
  31. *Крайко А. Н.* Теоретическая газовая динамика: классика и современность. М.: Торус Пресс. – 2010. – 440 с.
  32. *Голубятников А. Н.* Об ускорении ударных волн и концентрации энергии // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. – 2013. – Т. 281. – С. 162–169.
  33. *Ukrainskii D. V., Golubiatnikov A. N.* On the periodical solutions for single-dimensional gas dynamics // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – 1129 012035.
  34. *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* О точных аналитических решениях уравнений газовой динамики // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2020. – № 3. – С. 141–150.
  35. *Украинский Д. В.* О точных решениях уравнений газовой динамики в рядах по лагранжевой координате и их вычислительная реализация //

- Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2020. – N 6. – С. 139–150.
36. *Cauchy A. L.* Memoire sur l'emploi du calcul des limites dans l'integration des equations aux derivees partielles // Comptes rendus de l'Academie des Sciences. Serie 1. – 1842. – V. 7. – P. 17–58.
  37. *von Kowalevsky S. V.* Zur Theorie der partiellen Differential-Gleichungen // Journal fur die reine und angewandte Mathematik. – 1875. – V. 80. – P. 1–32.
  38. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 832 с.
  39. *Олейник О. А.* Теорема С. В. Ковалевской и современная теория уравнений с частными производными // Соросовский образовательный журнал. – 1997. – N 8. – С. 116–121.
  40. *Holmgren E.* Uber Systeme von linearen partiellen Differential-Gleichungen // Ofversigt af Kongliga Vetenskaps-Akademiens Forhandlingar. – 1901. – V. 58. – P. 91–103.
  41. *Lewy H.* An example of a smooth linear partial differential equation without solution // Annals of Mathematics. – 1957. – V. 66. – P. 155–158.
  42. *Hormander L.* Differential operators of principal type // Mathematische Annalen. – 1960. – V. 140. – P. 124–146.
  43. *Leray J.* Uniformisation de la solution du probleme lineaire analytique de Cauchy pres de la variete qui porte les donnees de Cauchy // The Bulletin de la Societe Mathematique de France. – 1957. – V. 85. – P. 389–429.
  44. *Тешуков В. М.* Центрированные волны в пространственных течениях газа // Динамика сплошной среды. Сборник научных трудов Института гидродинамики СО АН СССР. – 1979. – Вып. 39. – С. 102–118.
  45. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. – М.: Наука, 1983. – 280 с.
  46. *Овсянников Л. В.* Задача Коши в шкале банаховых пространств // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. – 2013. – Т. 281. – С. 7–15.
  47. *Смирнов А. П., Шеина Е. А.* Локальные и глобальные решения уравнений мелкой воды // Прямые и обратные задачи математической физики

- / Под редакцией А. Н. Тихонова, А. А. Самарского. – М.: Издательство Московского университета, 1991. – С. 218–222.
48. *Филлипс О. М.* Взаимодействия волн // Нелинейные волны / Под редакцией С. Лейбовича, А. Сибасса. – М.: Мир, 1977. – С. 197–220.
49. *Bretherton F.P.* Resonant interactions between waves. The case of discrete oscillations // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1964. – V. 20. – P. 457–479.
50. *McGoldrick L.F.* Resonant interactions among capillary-gravity waves // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1965. – V. 21. – P. 305–331.
51. *McGoldrick L.F.* An experiment on second-order capillary-gravity resonant wave interactions // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1970. – V. 40. – P. 251–271.
52. *Martin S., Simmons W., Wunsch C.* The excitation of resonant triads by single internal waves // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1972. – V. 53. – P. 17–44.
53. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. – М.: Мир, 1988. – 696 с.
54. *Majda A., Rosales R.* Resonantly interacting weakly nonlinear hyperbolic waves I: a single space variable // *Studies in Applied Mathematics*. – 1984. – V. 71. – P. 149–179.
55. *Руденко О. В., Солюян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. – М.: Наука, 1975. – 288 с.
56. *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* Трехволновой резонанс в двумерной стационарной задаче газовой динамики // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*. – 2019. – N 2. – С. 63–67.
57. *Гапонов С. А., Терехова Н. М.* Трехволновые взаимодействия возмущений в гиперзвуковом пограничном слое на непроницаемой и пористой поверхностях // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. – 2009. – N 3. – С. 36–46.
58. *Venney D.J.* Non-linear gravity wave interactions // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1962. – V. 14. – P. 577–584.
59. *Longuet-Higgins M.S., Phillips O.M.* Phase velocity effects in tertiary wave interactions // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1962. – V. 12. – P. 333–336.

60. *Longuet-Higgins M.S., Smith N.D.* An experiment on third-order resonant wave interactions // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1966. – V. 25. – P. 417–435.
61. *McGoldrick L.F., Phillips O.M., Huang N.E., Hodgson T.H.* Measurements of third-order resonant wave interactions // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1966. – V. 25. – P. 437–456.
62. *Кутепов А. М., Полянин А. Д., Запрянов З. Д., Вязьмин А. В., Казенин Д. А.* Химическая гидродинамика: справочное пособие. – М.: Квантум, 1996. – 336 с.
63. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
64. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. Часть 1. – М.: Наука, 1987. – 464 с.
65. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. Часть 2. – М.: Наука, 1987. – 360 с.
66. *Lord Rayleigh (Strutt J. W.)* On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity // *Philosophical Magazine. Series 6*. – 1917. – V. 34, N 200. – P. 94–98.
67. *Забабахин Е. И.* Заполнение пузырьков в вязкой жидкости // *Прикладная математика и механика*. – 1960. – Т. 24, N 6. – С. 1129–1131.
68. *Забабахин Е. И., Забабахин И. Е.* Явления неограниченной кумуляции. – М.: Наука, 1988. – 171 с.
69. *Yang W.J., Yeh H.C.* Theoretical study of bubble dynamics in purely viscous fluid // *American Institute of Chemical Engineers*. – 1966. – V. 12, N 5. – P. 927–931.
70. *Shima A., Tsujino T.* The behaviour of bubbles in polymer solutions // *Chemical Engineering Science*. – 1976. – V. 31. – P. 863–869.
71. *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* О динамике сферического пузырька в неньютоновских жидкостях // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. – 2021. – N 4. – С. 52–62.
72. *Shima A., Tsujino T.* The behavior of bubbles in non-Newtonian Lubricants // *Journal of Lubrication Technology*. – 1977. – V. 99, N 4. – P. 455–461.
73. *Shima A., Tsujino T.* The behavior of gas bubbles in the Casson fluid //

- Journal of Applied Mechanics. – 1978. – V. 45, N 1. – P. 37–42.
74. *Shima A., Tsujino T.* The effect of polymer concentration on the bubble behaviour and impulse pressure // *Chemical Engineering Science.* – 1981. – V. 36. – P. 931–935.
75. *Shima A., Tsujino T.* On the dynamics of bubbles in polymer aqueous solutions // *Applied Scientific Research.* – 1982. – V. 38. – P. 255–263.
76. *Brujan E.A.* The effect of polymer additives on the bubble behavior and impulse pressure // *Chemical Engineering Science.* – 1993. – V. 48. – P. 3519–3527.
77. *Brujan E.A.* The behavior of bubbles in Bueche model fluids // *Polymer Engineering and Science.* – 1994. – V. 34, N 20. – P. 1550–1559.
78. *Brujan E.A.* Bubble dynamics in a compressible shear-thinning liquid // *Fluid Dynamics Research.* – 1998. – V. 23, N 5. – P. 291–318.
79. *Brujan E.A.* Collapse of cavitation bubbles in blood // *Europhysics Letters.* – 2000. – V. 50, N 2. – P. 175–181.
80. *Brujan E.A.* Cavitation bubble dynamics in non-Newtonian fluids // *Polymer Engineering and Science.* – 2009. – V. 49, N 3. – P. 419–431.
81. *Брушлинский К. В., Каждан Я. М.* Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики // *Успехи математических наук.* – 1963. – Т. 18, Вып. 2 (110). – С. 3–23.
82. *Hunter C.* On the collapse of an empty cavity in water // *Journal of Fluid Mechanics.* – 1960. – V. 8. – P. 241–263.
83. *Богоявленский О. И.* Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
84. *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* Одно точное решение об обжатии полости в вязкой теплопроводной сжимаемой среде // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа.* – 2022. – N 4. – С. 77–85.
85. *Голубятников А. Н.* Оптимизация ускорения вязкоупругого тела // *Тезисы докладов международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды».* – 2017. – С. 79–80.
86. *Забабахин Е. И.* Кумуляция энергии и ее границы // *Успехи физических наук.* – 1965. – Т. 85, N 4. – С. 721–726.
87. *Забабахин Е. И.* Неустойчивость неограниченной кумуляции // *Письма*

- в Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1979. – Т. 30, N 2. – С. 97–99.
88. *Лаврентьев М. А.* Кумулятивный заряд и принципы его работы // Успехи математических наук. – 1957. – Т. 12, Вып. 4 (76). – С. 41–56.
89. *Воинов О. В., Воинов В. В.* О схеме захлопывания кавитационного пузырька около стенки и образования кумулятивной струйки // Доклады Академии наук СССР. – 1976. – Т. 227, N 1. – С. 63–66.
90. *Нигматулин Р. И., Лэхи (мл.) Р. Т., Талейархан Р. П., Вест К. Д., Блок Р. С.* О термоядерных процессах в кавитирующих пузырьках // Успехи физических наук. – 2014. – Т. 184, N 9. – С. 947–960.
91. *Украинский Д. В.* Трехволновые взаимодействия в газовой динамике // Материалы международного молодежного научного форума «Ломоносов-2016». – 2016.
92. *Украинский Д. В.* Трехволновой резонанс в задачах газовой динамики // Материалы международного молодежного научного форума «Ломоносов-2017». – 2017.
93. *Украинский Д. В.* Трехволновой резонанс в задачах газовой динамики // Тезисы докладов международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». – 2017. – С. 197.
94. *Украинский Д. В.* О периодических по времени решениях задач одномерной газовой динамики // Материалы международного молодежного научного форума «Ломоносов-2018». – 2018.
95. *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* Трехволновой резонанс в двумерной стационарной задаче газовой динамики // Сборник трудов всероссийской школы-семинара «Волновые явления в неоднородных средах» (Волны-2018). Секция «Гидродинамические волны и течения». – 2018. – С. 35–37.
96. *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* О периодических по времени решениях задач одномерной газовой динамики // Всероссийская конференция молодых ученых-механиков «YSM-2018». Тезисы докладов. – М.: Издательство Московского университета, 2018. – С. 155.
97. *Украинский Д. В.* Класс нелинейных периодических решений уравнений газовой динамики // Тезисы конференции-конкурса молодых учёных НИИ механики МГУ имени М. В. Ломоносова. – 2018. – С. 28.

98. *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* Точные аналитические решения уравнений газовой динамики, определяемые гамильтоновой системой // «Ломоносовские чтения-2019». Секция механики. Тезисы докладов. – М.: Издательство Московского университета, 2019. – С. 76–77.
99. *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* Точные аналитические решения уравнений газовой динамики // «Современные проблемы математики и механики». Материалы международной конференции. – М.: МАКС Пресс, 2019. – С. 679–681.
100. *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* Периодические и резонансные решения в газовой динамике // Тезисы докладов всероссийской конференции и школы для молодых ученых «Математические проблемы механики сплошных сред». – Новосибирск: Институт гидродинамики имени М. А. Лаврентьева СО РАН, 2019. – С. 69.
101. *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* О периодических решениях в нелинейных задачах механики сплошной среды и их численной реализации // «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования» (СКТеММ-19). Тезисы докладов международной конференции. – Якутск: Издательский дом СВФУ, 2019. – С. 21.
102. *Украинский Д. В.* О построении точных аналитических решений уравнений газовой динамики в виде специальных степенных рядов и их вычислительная реализация // Тезисы конференции-конкурса молодых учёных НИИ механики МГУ имени М. В. Ломоносова. – 2020. – С. 30.
103. *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* К построению решений уравнений газовой динамики в рядах по специальным переменным и их численной реализации // «Ломоносовские чтения-2020». Секция механики. Тезисы докладов. – М.: Издательство Московского университета, 2020. – С. 68.
104. *Украинский Д. В.* О схлопывании и резонансе сферического пузырька в степенных неньютоновских жидкостях // Материалы международного молодежного научного форума «Ломоносов-2021». – 2021.
105. *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* Метод полугодиграфа в задачах газовой динамики с произвольным распределением энтропии // «Ломоносовские чтения-2021». Секция механики. Тезисы докладов. – М.: Издательство Московского университета, 2021. – С. 70.

106. *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* О существовании периодических по времени решений в газовой динамике // Международная конференция, совместное заседание Московского математического общества и Семинара имени И. Г. Петровского «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы». Тезисы докладов. – М.: Издательство Московского университета, 2022. – С. 190–191.
107. *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* О концентрации энергии в сжимаемой вязкой теплопроводной жидкости // «Ломоносовские чтения-2022». Секция механики. Тезисы докладов. – М.: Издательство Московского университета, 2022. – С. 64.
108. *Голубятников А. Н., Украинский Д. В.* К проблеме концентрации энергии // «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования» (СКТеММ-22). Тезисы докладов международной конференции. – Якутск: Издательский дом СВФУ, 2022. – С. 14.
109. *Golubyatnikov A. N., Ukrainskii D. V.* Three-wave resonance in a two-dimensional stationary problem of gas dynamics // *Moscow University Mechanics Bulletin*. – 2019. – V. 74, N 2. – P. 47–50.
110. *Golubyatnikov A. N., Ukrainskii D. V.* On exact analytical solutions of gas dynamic equations // *Fluid Dynamics*. – 2020. – V. 55, N 3. – P. 423–432.
111. *Ukrainskii D. V.* Exact solutions of gas dynamics equations in series in the Lagrangian coordinate and their numerical realization // *Fluid Dynamics*. – 2020. – V. 55, N 6. – P. 858–869.
112. *Golubyatnikov A. N., Ukrainskii D. V.* Dynamics of a spherical bubble in non-Newtonian liquids // *Fluid Dynamics*. – 2021. – V. 56, N 4. – P. 492–502.
113. *Golubyatnikov A. N., Ukrainskii D. V.* An exact solution on compression of a cavity in a viscous heat-conducting compressible medium // *Fluid Dynamics*. – 2022. – V. 57, N 4. – P. 494–502.
114. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Том 1. – М.: Наука, 1994. – 528 с.
115. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Том 2. – М.: Наука, 1994. – 560 с.
116. *Черный Г. Г.* Газовая динамика. – М.: Наука, 1988. – 424 с.
117. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. – М.: Наука,

1981. – 368 с.
118. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М.: Наука, 1978. – 687 с.
119. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* Лекции по математическому анализу. – М.: Дрофа, 2004. – 640 с.
120. *Слезкин Н. А.* Лекции по гидромеханике. – М.: Издательство Московского университета, 1984. – 225 с.
121. *Куликовский А. Г., Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика. – М.: Физматгиз, 1962. – 246 с.
122. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Том V. Статистическая физика. Часть 1. – М.: Наука, 1976. – 584 с.
123. *Полянин А. Д., Зайцев В. Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. – М.: Физматлит, 2002. – 432 с.
124. *Туницкий Д. В.* О задаче Коши для уравнений Монжа-Ампера гиперболического типа // Математические заметки. – 1992. – Т. 51, N 6. – С. 80–90.
125. *Туницкий Д. В.* Задача Коши для гиперболических уравнений Монжа-Ампера // Известия Российской академии наук. Серия математическая. – 1993. – Т. 57, N 4. – С. 174–191.
126. *Туницкий Д. В.* Многозначные решения гиперболических уравнений Монжа-Ампера // Дифференциальные уравнения. – 1993. – Т. 29, N 12. – С. 2178–2189.
127. *Туницкий Д. В.* О глобальной разрешимости гиперболических уравнений Монжа-Ампера // Известия Российской академии наук. Серия математическая. – 1997. – Т. 61, N 5. – С. 177–224.
128. *Туницкий Д. В.* О гиперболических системах уравнений Монжа-Ампера // Математический сборник. – 2006. – Т. 197, N 8. – С. 119–158.
129. *Туницкий Д. В.* О некоторых категориях систем уравнений Монжа-Ампера // Математический сборник. – 2009. – Т. 200, N 11. – С. 109–144.
130. *Туницкий Д. В.* О глобальной разрешимости задачи Коши для гиперболических систем Монжа-Ампера // Известия Российской академии

- наук. Серия математическая. – 2018. – Т. 82, N 5. – С. 167–226.
131. *Туницкий Д. В.* Многочленные решения гиперболических уравнений Монжа–Ампера: разрешимость, интегрируемость, аппроксимация // Математический сборник. – 2020. – Т. 211, N 3. – С. 71–123.
132. *Уизем Д. Б.* Волны с дисперсией и вариационные принципы // Нелинейные волны / Под редакцией С. Лейбовича, А. Сибасса. – М.: Мир, 1977. – С. 151–180.
133. *Plesset M. S.* The dynamics of cavitation bubbles // Journal of Applied Mechanics. – 1949. – V. 16, N 3. – P. 277–282.
134. *Бабичев А. П., Бабушкина Н. А., Братковский А. М., Бродов М. Е., Быстров М. В., Виноградов Б. В., Винокурова Л. И., Гельман Э. Б., Генне А. П., Григорьев И. С., Гуртовой К. Г., Егоров В. С., Елецкий А. В., Зарембо Л. К., Иванов В. Ю., Ивашинаева В. Л., Игнатьев В. В., Имамов Р. М., Инюшкин А. В., Кадобнова Н. В., Карасик И. И., Кикоин К. А., Криворучко В. А., Кулаков В. М., Лазарев С. Д., Лифшиц Т. М., Любарский Ю. Э., Марин С. В., Маслов И. А., Мейлихов Е. З., Мигачев А. И., Миронов С. А., Мусатов А. Л., Никитин Ю. П., Новицкий Л. А., Обухов А. И., Ожогин В. И., Писарев Р. В., Писаревский Ю. В., Птускин В. С., Радциг А. А., Рудаков В. П., Сумм Б. Д., Сюняев Р. А., Хлопкин М. Н., Хлюстиков И. Н., Черепанов В. М., Чертов А. Г., Шапиро В. Г., Шустряков В. М., Якимов С. С., Яновский В. П.* Физические величины: справочник / Под редакцией И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.
135. *Griskey R. G., Nechrebecki D. G., Notheis P. J., Balmer R. T.* Rheological and pipeline flow behaviour of corn starch dispersions // Journal of Rheology. – 1985. – V. 29, N 3. – P. 349–360.
136. *Овсянников Л. В.* Новое решение уравнений гидродинамики // Доклады Академии наук СССР. – 1956. – Т. 111, N 1. – С. 47–49.

## СПИСОК ИЛЛЮСТРАТИВНОГО МАТЕРИАЛА

<b>Рисунок 1.1</b> — Область аналитичности решения мажорантной задачи .	23
<b>Рисунок 2.1</b> — Картина характеристик в задаче о колебаниях самогравитирующего газового слоя . . . . .	32
<b>Рисунок 2.2</b> — График безразмерной скорости в задаче (2.3.4)–(2.3.6) . . . . .	35
<b>Рисунок 2.3</b> — График безразмерной плотности в задаче (2.3.4)–(2.3.6) . . . . .	36
<b>Рисунок 2.4</b> — График безразмерного давления в задаче (2.3.4)–(2.3.6) . . . . .	36
<b>Рисунок 2.5</b> — График безразмерной температуры в задаче (2.3.4)–(2.3.6) . . . . .	37
<b>Рисунок 2.6</b> — Невязка $\tilde{\epsilon}_1$ в задаче (2.3.4)–(2.3.6) . . . . .	37
<b>Рисунок 2.7</b> — Невязка $\tilde{\epsilon}_2$ в задаче (2.3.4)–(2.3.6) . . . . .	38
<b>Рисунок 2.8</b> — График $\tilde{u}_{\tilde{m}}$ в задаче (2.3.4)–(2.3.6) . . . . .	38
<b>Рисунок 2.9</b> — График $\tilde{q}_{\tilde{m}}$ в задаче (2.3.4)–(2.3.6) . . . . .	39
<b>Рисунок 2.10</b> — Невязка $\tilde{\epsilon}_1$ в задаче (2.3.4)–(2.3.6) . . . . .	39
<b>Рисунок 2.11</b> — Невязка $\tilde{\epsilon}_2$ в задаче (2.3.4)–(2.3.6) . . . . .	40
<b>Рисунок 2.12</b> — График безразмерной скорости в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при $\lambda \neq 0$ . . . . .	43
<b>Рисунок 2.13</b> — График безразмерной плотности в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при $\lambda \neq 0$ . . . . .	43
<b>Рисунок 2.14</b> — График безразмерного давления в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при $\lambda \neq 0$ . . . . .	44
<b>Рисунок 2.15</b> — График безразмерной температуры в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при $\lambda \neq 0$ . . . . .	44
<b>Рисунок 2.16</b> — Невязка $\tilde{\epsilon}_1$ в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при $\lambda \neq 0$ . . . . .	45
<b>Рисунок 2.17</b> — Невязка $\tilde{\epsilon}_2$ в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при $\lambda \neq 0$ . . . . .	45
<b>Рисунок 2.18</b> — График $\tilde{u}_{\tilde{m}}$ в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при $\lambda \neq 0$ . . . . .	46
<b>Рисунок 2.19</b> — График $\tilde{q}_{\tilde{m}}$ в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при $\lambda \neq 0$ . . . . .	46
<b>Рисунок 2.20</b> — Невязка $\tilde{\epsilon}_1$ в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при $\lambda \neq 0$ . . . . .	47
<b>Рисунок 2.21</b> — Невязка $\tilde{\epsilon}_2$ в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при $\lambda \neq 0$ . . . . .	47

<b>Рисунок 2.22</b> — График безразмерной скорости в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при $\lambda = 0$ . . . . .	48
<b>Рисунок 2.23</b> — График безразмерной плотности в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при $\lambda = 0$ . . . . .	48
<b>Рисунок 2.24</b> — График безразмерного давления в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при $\lambda = 0$ . . . . .	49
<b>Рисунок 2.25</b> — График безразмерной температуры в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при $\lambda = 0$ . . . . .	49
<b>Рисунок 2.26</b> — Невязка $\tilde{\epsilon}_1$ в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при $\lambda = 0$ . . . . .	50
<b>Рисунок 2.27</b> — Невязка $\tilde{\epsilon}_2$ в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при $\lambda = 0$ . . . . .	50
<b>Рисунок 2.28</b> — График $\tilde{u}_{\tilde{m}}$ в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при $\lambda = 0$ . . . . .	51
<b>Рисунок 2.29</b> — График $\tilde{q}_{\tilde{m}}$ в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при $\lambda = 0$ . . . . .	51
<b>Рисунок 2.30</b> — Невязка $\tilde{\epsilon}_1$ в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при $\lambda = 0$ . . . . .	52
<b>Рисунок 2.31</b> — Невязка $\tilde{\epsilon}_2$ в задаче (2.4.5)–(2.4.8) при $\lambda = 0$ . . . . .	52
<b>Рисунок 2.32</b> — График безразмерного давления в задаче (2.6.1)–(2.6.4) . . . . .	60
<b>Рисунок 2.33</b> — График безразмерного закона движения в задаче (2.6.1)–(2.6.4) . . . . .	61
<b>Рисунок 2.34</b> — График безразмерной скорости в задаче (2.6.1)–(2.6.4) . . . . .	61
<b>Рисунок 2.35</b> — График безразмерной плотности в задаче (2.6.1)–(2.6.4) . . . . .	62
<b>Рисунок 2.36</b> — Невязка $\tilde{\epsilon}_1$ в задаче (2.6.1)–(2.6.4) . . . . .	62
<b>Рисунок 2.37</b> — Невязка $\tilde{\epsilon}_2$ в задаче (2.6.1)–(2.6.4) . . . . .	63
<b>Рисунок 2.38</b> — График $\tilde{x}_{\tilde{m}\tilde{t}}$ в задаче (2.6.1)–(2.6.4) . . . . .	63
<b>Рисунок 2.39</b> — Невязка $\tilde{\epsilon}_2$ в задаче (2.6.1)–(2.6.4) . . . . .	64
<b>Рисунок 2.40</b> — График безразмерного закона движения в задаче (2.7.5)–(2.7.7) . . . . .	68
<b>Рисунок 2.41</b> — График безразмерной энтальпии в задаче (2.7.5)–(2.7.7) при $\tilde{t}$ от 0 до 10 . . . . .	69
<b>Рисунок 2.42</b> — График безразмерной энтальпии в задаче (2.7.5)–(2.7.7) при $\tilde{t}$ от 0 до 0.1 . . . . .	69
<b>Рисунок 2.43</b> — График безразмерного давления в задаче (2.7.5)–(2.7.7) при $\tilde{t}$ от 0 до 10 . . . . .	70

<b>Рисунок 2.44</b> — График безразмерного давления в задаче (2.7.5)–(2.7.7) при $\tilde{t}$ от 0 до 0.1 . . . . .	70
<b>Рисунок 2.45</b> — График безразмерной плотности в задаче (2.7.5)–(2.7.7) при $\tilde{t}$ от 0 до 10 . . . . .	71
<b>Рисунок 2.46</b> — График безразмерной плотности в задаче (2.7.5)–(2.7.7) при $\tilde{t}$ от 0 до 0.1 . . . . .	71
<b>Рисунок 2.47</b> — Невязка $\tilde{\epsilon}_1$ в задаче (2.7.5)–(2.7.7) . . . . .	72
<b>Рисунок 2.48</b> — Невязка $\tilde{\epsilon}_2$ в задаче (2.7.5)–(2.7.7) . . . . .	72
<b>Рисунок 2.49</b> — График $\tilde{x}_{\tilde{t}}$ в задаче (2.7.5)–(2.7.7) . . . . .	73
<b>Рисунок 2.50</b> — Невязка $\tilde{\epsilon}_2$ в задаче (2.7.5)–(2.7.7) . . . . .	73
<b>Рисунок 4.1</b> — Распределение плотности в плоском сверхзвуковом сопле со специальной формой верхней и нижней стенок . . . . .	93
<b>Рисунок 5.1</b> — Сравнение необходимых внешних давлений для обеспечения линейно-резонансного поведения радиуса полости в случае линейной (серая кривая) и нелинейной (черная кривая) постановок задач . . . . .	100
<b>Рисунок 5.2</b> — Сравнение линейного (серая кривая) и нелинейного (черная кривая) законов динамики полости при гармоническом внешнем давлении с линейно-резонансной частотой . . . . .	101
<b>Рисунок 5.3</b> — Концентрация кинетической энергии жидкости при сжатии вакуумного пузырька с параметром $\sigma = 1$ в зависимости от показателя степени неньютоновской модели . . . . .	106
<b>Рисунок 5.4</b> — Концентрация кинетической энергии жидкости при сжатии вакуумного пузырька в зависимости от различных величин параметров $\beta$ и $\sigma$ , график поверхности и контурный график . . . . .	107
<b>Рисунок 5.5</b> — Поверхность значений концентрации кинетической энергии жидкости при сжатии вакуумного пузырька в диапазоне $0.001 \leq \sigma \leq 0.15$ . . . . .	108
<b>Рисунок 5.6</b> — Величина полной диссипации энергии при сжатии газовой полости с параметром $\sigma = 1$ при $\theta = C^{-\gamma}$ в зависимости от показателя степени неньютоновской модели жидкости . . . . .	108
<b>Рисунок 5.7</b> — Величина полной диссипации энергии при сжатии газовой полости в зависимости от различных значений параметров $\beta$ и $\sigma$ при $\theta = C^{-\gamma}$ , график поверхности и контурный график . . . . .	109

- Рисунок 6.1** — Качественный график функции  $\rho_2/\rho_0$  в случаях  $\lambda = 0$ ,  
 $\alpha = 1$  — кривая 1 и  $\lambda = 1$ ,  $\alpha = 1$  — кривая 2 . . . . . 116
- Рисунок 6.2** — Форма распределения плотности  $\rho_2$  для решения (6.5.1) 120
- Рисунок 6.3** — Контурный график плотности  $\rho_2$  для решения (6.5.1) . 121
- Рисунок 6.4** — Форма распределения плотности  $\rho_2$  для решения (6.5.2) 121
- Рисунок 6.5** — Контурный график плотности  $\rho_2$  для решения (6.5.2) . 122
- Рисунок 6.6** — Контурный график системы двух пузырьков,  
равноудаленных от центра . . . . . 122
- Рисунок 6.7** — Контурный график системы трех пузырьков, один из  
которых расположен в центре, а два остальных равноудалены от  
центра . . . . . 123