ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

На правах рукописи

Черных Георгий Сергеевич

Операции и умножения, связанные с SU- и c_1-сферическими бордизмами

1.1.3 — Геометрия и топология

Диссертация на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор
Панов Тарас Евгеньевич

Москва — 2023

Содержание

Введение

Актуальность темы исследования и степень её разработанности

В диссертации рассматривается важный классический раздел алгебраической топологии — теория комплексных и SU- бордизмов, а также изучается промежуточная теория — c_1-сферических бордизмов W. В диссертации решена задача классификации всех SU-линейных операций в комплексных кобордизмах в терминах хорошо известных геометрических операций ∂_i, приведены вычисления спектральной последовательности Адамса–Новикова [16] для спектра SU-бордизмов, позволяющие доказать результаты о группах коэффициентов Ω_n^{SU}, решена задача обобщения результатов В. М. Бухштабера [6] о формальной группе F_W в c_1-сферических бордизмов на случай произвольных SU-билинейных умножений на W, и кроме того, доказана точность по Ландвеберу формальной группы F_W.

Актуальность изучения промежуточной теории W заключается в том, что эта теория возникает при попытке вычисления классического кольца SU-бордизмов Ω^{SU}. Однако в отличие от теории SU-бордизмов, на теории c_1-сферических бордизмов нет естественного умножения. Несмотря на это на W можно разными способами определить мультипликативную структуру, что приводит к задаче описания таких умножений и их колец коэффициентов. С другой стороны, в отличие от теории SU-бордизмов теория W является комплексно ориентируемой, что мотивирует изучение соответствующих комплексных ориентаций и формальных групп. Наконец, теория W выделяется в теории комплексных бордизмов как прямое слагаемое с помощью SU-линейных проекторов (также с помощью них обычно определяется и умножение на W). Однако таких проекторов много, среди них нет какого-то выделенного, и поэтому возникает задача описания таких SU-линейных проекторов, и вообще SU-линейных операций в комплексных кобордизмах.

Комплексные бордизмы, или *U-бордизмы*, — это теория бордизмов стабильно комплексных многообразий. Геометрически, стабильно комплексная структура (U-структура) на многообразии M представляет из себя комплексную структуру на стабильном касательном расслоении, т. е. редукцию структурной группы стабильного касательного расслоения к группе $U(N)$. Гомотопически, стабильно комплексная структура задаётся гомотопическим классом поднятия отображения $M \to BO(2N)$, классифицирующего стабильное касательное расслоение, до отображения $M \to BU(N)$. Классы бордизма стабильно комплексных многообразий образуют градуированное кольцо по отношению к операциям дизъюнктного объединения и прямого произведения, называемое *кольцом комплексных бордизмов* и обозначаемое через MU_*. Это кольцо коэффициентов *теории комплексных бордизмов*, обобщённой теории (ко)гомологий, определяемой *спектром Тома* $MU = \{MU(n)\}$, где $MU(n)$ — пространство Тома универсального $U(n)$-расслоения $EU(n) \to BU(n)$. Для CW-пары (X, A) её группы бордизмов и кобордизмов определяются как

$$MU_n(X, A) = \lim_{k\to\infty} \pi_{2k+n}\bigl((X/A) \wedge MU(k)\bigr),$$
$$MU^n(X, A) = \lim_{k\to\infty} \bigl[\Sigma^{2k-n}(X/A), MU(k)\bigr] \quad \text{для конечной CW-пары } (X, A).$$

В частности, $\Omega_*^U = \pi_*(MU) = MU_*(pt) = \lim_{k\to\infty} \pi_{2k+*}\bigl(MU(k)\bigr)$. Мы также имеем $\Omega_U^* = MU^*(pt) = \Omega_{-*}^U$ — *кольцо комплексных кобордизмов*, градуированное неположительно.

SU-бордизмы — это теория бордизмов гладких многообразий со специальной унитарной структурой в стабильном касательном расслоении. Геометрически, SU-структура на многообразии M определяется редукцией структурной группы стабильного касательного расслоения на M к группе $SU(N)$. Гомотопически, SU-структура — это гомотопический класс поднятия отображения $M \to BO(2N)$, классифицирующего стабильное касательное расслоение, до отображения $M \to BSU(N)$. Многообразие M допускает SU-структуру тогда и только тогда, когда оно допускает стабильно комплексную структуру с $c_1(\mathcal{T}M) = 0$. *Кольцо SU-бордизмов* $\Omega_*^{SU} = \pi_*(MSU)$ является кольцом коэффициентов *теории SU-бордизмов*, определяемой спектром Тома $MSU = \{MSU(n)\}$.

История вопроса

Теория бордизмов и кобордизмов находилась в состоянии бурного роста и развития в начале 1960-х годов. Большинство ведущих топологов того времени внесли свой вклад в эту область. Идея бордизма была впервые сформулирована в явном виде Понтрягиным [17], который связал теорию оснащенных многообразий с изучением стабильных гомотопических групп сфер, используя понятие трансверсальности. В ранних работах, как например у Рохлина [19], теория бордизмов называлась «внутренними гомологиями», имея в виду идею гомологических циклов, восходящую к Пуанкаре. Первая изученная теория бордизмов — неориентированные бордизмы — стала предметом фундаментальной работы Тома [48], который полностью вычислил кольцо неориентированных бордизмов $\varOmega^{O}$. Описание кольца ориентированных бордизмов $\varOmega^{SO}$ было закончено к концу 1950-х годов работами Новикова [14, 15] (мультипликативная структура по модулю кручения) и Уолла [50] (произведения элементов конечного порядка); важные более ранние результаты были получены Томом [48] (описание кольца $\varOmega^{SO} \otimes \mathbb{Q}$), Авербухом [2] (отсутствие нечётного кручения), Милнором [40] (аддитивная структура по модулю кручения), а также Рохлиным [19].

Кульминацией в развитии этой теории стало вычисление кольца комплексных (унитарных) бордизмов $\varOmega^{U}$, выполненное в работах Милнора [40] и Новикова [14, 15]. Было показано, что кольцо $\varOmega^{U}$ изоморфно градуированному кольцу многочленов $\mathbb{Z}[a_i\colon i \geqslant 1]$ от бесконечного числа переменных, с одной образующей в каждой четной размерности, $\deg a_i = 2i$. Этот результат нашел многочисленные приложения в алгебраической топологии и смежных разделах науки. В работе 1967 года [16] С. П. Новиков ввёл спектральную последовательность, которая стала известна как спектральная последовательность Адамса–Новикова, и привнёс в теорию кобордизмов методы теории формальных групп, получившие дальнейшее развитие и популяризацию в работах топологов его школы, а также Д. Квиллена и многих других. Связь комплексных кобордизмов и формальных групп занимает центральное место во многих современных разделах стабильной теории гомотопий, например, в хроматической теории (см., например, [45]), восходящей к работам Дж. Моравы, Д. Равенела, М. Хопкинса и многих других и получившей бурное развитие в последнее время. Мы даём основные определения теории комплексных (унитарных) бордизмов в разделе 1.2, так как в дальнейшем она понадобится нам для описания структуры кольца SU-бордизмов.

Изучение SU-бордизмов в 1960-х годах обозначило границы применимости методов алгебраической топологии. Кольцо коэффициентов $\varOmega^{SU}$ считается известным. Оно не является кольцом многочленов, хотя и становится таковым при обращении двойки. Наибольший вклад здесь внесли Новиков [15] (описание кольца $\varOmega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$), Коннер и Флойд [32] (произведения элементов конечного порядка), Уолл [51] и Стонг [21] (мультипликативная структура кольца $\varOmega^{SU}/\mathrm{Tors}$). Тем не менее, как было замечено Стонгом [21, с. 247], «исчерпывающее описание мультипликативной структуры кольца $\varOmega^{SU}/\mathrm{Tors}$ чрезвычайно сложно». Наилучшее из имеющихся на данный момент описание кольца $\varOmega^{SU}/\mathrm{Tors}$ заключается в весьма нетривиальном вложении его как подкольца в кольцо многочленов $\varOmega^{W}$, являющееся в свою очередь кольцом коэффициентов теории Коннера–Флойда c_1-сферических многообразий (см. детали в разделе 4.5).

Коннер и Флойд [32] и Стонг [21] определили *c_1-сферические бордизмы* W, промежуточную теорию между SU- и U-бордизмами, следуя аналогичной конструкции Уолла [50] для ориентированных бордизмов. Теория W была ключевым техническим средством для вычисления Коннера и Флойда кручения в SU-бордизмах. В [32] они определили группу коэффициентов

$$\varOmega^{W}_{2n} = \mathrm{Ker}(\varDelta\colon \varOmega^{U}_{2n} \to \varOmega^{U}_{2n-4})$$

(для некоторой операции $\varDelta$ в комплексных бордизмах, см. конструкцию 2.2.1 и обозначения (2.2.3)) и отождествили ее с подгруппой в $\varOmega^{U}_{2n}$, состоящая из тех классов бордизмов $[M^{2n}]$, у которых равны нулю все характеристические числа Чженя, содержащие множитель c_1^2 (см. теорему 4.4.9). Связь между группами $\varOmega^{SU}_{*}$ и $\varOmega^{W}_{*}$ описывается следующей точной последовательностью Коннера и Флойда:

$$0 \longrightarrow \varOmega^{SU}_{2n-1} \xrightarrow{\theta} \varOmega^{SU}_{2n} \xrightarrow{\iota} \varOmega^{W}_{2n} \xrightarrow{\partial} \varOmega^{SU}_{2n-2} \xrightarrow{\theta} \varOmega^{SU}_{2n-1} \longrightarrow 0, \tag{0.0.1}$$

где θ обозначает умножение на образующую $\theta \in \varOmega^{SU}_{1} \cong \mathbb{Z}/2$, ι — забывающий гомоморфизм, а $\partial\colon \varOmega^{W}_{2n} \to \varOmega^{W}_{2n-2}$ сопоставляет классу комплексных бордизмов $[M^{2n}] \in \varOmega^{W}_{2n}$ класс

SU-бордизмов подмногообразия $N^{2n-2} \subset M^{2n}$, двойственного к классу $c_1(M)$ (см. (4.4.2)). Эта точная последовательность имеет форму точной пары, для которой производная пара может быть отождествлена с членом E_2 спектральной последовательности Адамса–Новикова для спектра MSU (см. лемму 3.2.9).

В [21] Стонг расширил группы Ω_*^W до целой промежуточной теории c_1-сферических бордизмов $MSU \to W \to MU$ (см. раздел 4.4). В обеих работах [32] и [21] на W определяется некоторая мультипликативная структура (заметим, что подгруппа Ω_*^W не является подкольцом в Ω_*^U) с помощью некоторых SU-линейных проекторов $\pi\colon MU \to W$. Стонг [21] показал, что кольцо коэффициентов теории W полиномиально по отношению к умножению, заданному с помощью используемого им проектора. Хотя Коннер–Флойд и Стонг определили свои проекторы различным образом, в последующей литературе, касающейся SU- и c_1-сферических бордизмов, эти два проектора использовались взаимозаменяемо, так как неявно предполагалось, что они совпадают. Как показано в предложении 4.1.12, проекторы Коннера–Флойда и Стонга различны, несмотря на то что они определяют одно и то же умножение на W.

Спектральная последовательность Адамса–Новикова и техника формальных групп, привнесённая в топологию фундаментальной работой Новикова [16], позволили развить новый систематический подход к более ранним геометрическим вычислениям Коннера–Флойда и Стонга в кольце SU-бордизмов. Так, как было указано выше, точная последовательность Коннера–Флойда (0.0.1), связывающая градуированные компоненты колец Ω_*^{SU} и Ω_*^W, допускает внутреннее описание в терминах нетривиальных дифференциалов в спектральной последовательности Адамса–Новикова для спектра MSU (см. раздел 3.2). Этот подход далее развивался в контексте бордизмов многообразий с особенностями в работах Миронова [12], Ботвинника [29] и Вершинина [49]. Главной целью здесь было описание кольца коэффициентов Ω_*^{Sp} еще одной классической теории бордизмов — симплектических бордизмов (в настоящее время называемых также кватернионными бордизмами), которое по-прежнему остается неизвестным. Спектральная последовательность Адамса–Новикова также стала основным инструментом для вычисления стабильных гомотопических групп сфер [45].

Новый интерес к SU-многообразиям был стимулирован изучением зеркальной симметрии и других геометрических конструкций, мотивированных теоретической физикой; ключевую роль здесь играет понятие многообразия Калаби–Яу. Под многообразием Калаби–Яу обычно понимают кэлерово SU-многообразие; оно обладает Риччи-плоской метрикой в силу теоремы Яу. Связь между многообразиями Калаби–Яу и SU-бордизмами кратко обсуждается в разделе 4.3.

(Стабильной) *операцией* f степени n в комплексных кобордизмах называется семейство аддитивных отображений

$$f\colon MU^k(X,A) \to MU^{k+n}(X,A),$$

функториальных по (X,A) и коммутирующих с изоморфизмами надстройки. Множество всех операций образует алгебру, обозначаемую A^U. Её можно отождествить с множеством отображений спектра MU в себя:

$$A^U \cong [MU, MU]_* = MU^*(MU) = \varprojlim MU^{*+2N}(MU(N)).$$

Имеется изоморфизм левых Ω_U^*-модулей

$$A^U \cong \Omega_U^* \,\widehat{\otimes}\, S,$$

где S — *алгебра Ландвебера–Новикова*, порождённая операциями $S_\omega = \varphi^*(s_\omega^U)$, являющимися образами при изоморфизме Тома φ^* универсальных характеристических классов $s_\omega^U \in MU^*(BU)$, соответствующих симметризациям мономов $t_1^{i_1} \cdots t_k^{i_k}$, индексированных всевозможными разбиениями $\omega = (i_1, \ldots, i_k)$. Таким образом, любой элемент $a \in A^U$ может быть единственным образом записан в виде бесконечного ряда $a = \sum_\omega \lambda_\omega S_\omega$, где $\lambda_\omega \in \Omega_U U^*$. Структура алгебры Хопфа на S была описана в [34] и [16, §5].

Забывающий морфизм $MSU \to MU$ снабжает спектр MU естественной структурой MSU-модуля, и операция $f\colon MU \to MU$ называется *SU-линейной*, если она является отображением MSU-модулей. Из стандартных свойств спектров, не имеющих кручения в гомологиях и гомотопических группах, вытекает, что MSU-линейность операции $f\colon MU \to MU$ достаточно проверять лишь на гомотопических группах $\Omega^U_* = \pi_*(MU)$. Точнее говоря, операция f является SU-линейной тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию $f(ab) = af(b)$ для любых элементов $a \in \Omega^{SU}_*$, $b \in \Omega^U_*$ (см. теорему 2.1.3).

Проекторы Стонга и Коннера–Флойда оказываются SU-линейными, и следовательно, определяемое ими умножение задаёт на W структуру MSU-алгебры. Это свойство играет важную роль в вычислениях с кольцом Ω^W_*.

В работе [32] Коннером и Флойдом были определены геометрические операции $\partial_i \in [MU, MU]_{-2i} = [MU, \Sigma^{2i} MU]$, впоследствии изученные С. П. Новиковым [16]. Операция ∂_i сопоставляет классу комплексных бордизмов $[M] \in \Omega^U_{2n}$ класс бордизма подмногообразия $M_i \subset M$, двойственного к $(\det \mathcal{T}M)^{\oplus i}$ (i-кратная прямая сумма детерминанта касательного расслоения). В частности, $\partial_1 = \partial\colon MU_{2n} \to MU_{2n-2}$ представляет из себя «граничный оператор», отправляющий $[M]$ в класс бордизма подмногообразия, двойственного к $c_1(\mathcal{T}M)$. Ясно, что $\partial[M]$ лежит в образе забывающего отображения $\Omega^{SU}_* \to \Omega^U_*$. Более того, можно убедиться, что операции ∂_i являются SU-линейными.

В главе 1 диссертации приводятся основные определения и конструкции из стабильной теории гомотопий и теории комплексных кобордизмов, используемые в дальнейшем. В главе 2 автором описывается алгебра всех SU-линейных операций в комплексных кобордизмах и доказывается, что они все порождаются операциями ∂_i (см. теорему 2.3.4). Глава 3 посвящена вычислению спектральной последовательности Адамса–Новикова для спектра MSU. В разделах 4.5 и 5.1 автор приводит несколько описаний проекторов $\pi\colon MU \to W$, указываем условия, характеризующие SU-линейные проекторы и SU-линейные проекторы, коммутирующие с операцией ∂, а также описываем все SU-линейные умножения в теории c_1-сферических бордизмов W и приводим условие, выделяющее умножения, задаваемые SU-линейными проекторами и SU-линейными проекторами, коммутирующими с операцией ∂. Общий алгебраический подход к экзотическим умножениям в комплексных кобордизмах и их связь с проекторами, коммутирующими с ∂, изучались в работе [5] (см. предложение 5.1.6). Заметим, что условие SU-линейности обобщает условие мультипликативности проектора $MU \to W$ для SU-билинейного умножения на W, но мультипликативных проекторов из $MU \to W$ не существует ни для какого SU-билинейного умножения на W (см. следствие 5.3.2).

Важным свойством теории W^*, отличающим её от теории SU-бордизмов, является комплексная ориентируемость. Соответствующие формальные группы изучались В. М. Бухштабером в [6]. В главе 5 подробно изучены комплексные ориентации теории W и соответствующие им формальные группы, обобщены соответствующие результаты В. М. Бухштабера, а также доказана точность по Ландвеберу этих формальных групп.

Цели и задачи диссертации

Основные цели работы состоят в следующем:

- привести подробное вычисление кольца SU-бордизмов, основанное на применении спектральной последовательности Адамса–Новикова, следуя подходу С. П. Новикова [16];
- описать множество всех SU-линейных когомологических операций в комплексных кобордизмах;
- описать SU-линейные проекторы из теории комплексных кобордизмовMU в теорию c_1-сферических бордизмов W, описать произвольные и получающиеся из проекторов SU-билинейные умножения на W и вычислить соответствующие кольца коэффициентов теории W с произвольным SU-билинейным умножением;
- вычислить кольцо коэффициентов теории W с произвольным SU-билинейным умножением;
- следуя подходу В. М. Бухштабера [6], вычислить по модулю разложимых элементов коэффициенты формальной группы в теории W для произвольной комплексной ориентации и SU-билинейного умножения и обобщить результаты [6] о подкольцах в $W^*(pt)$, порождённых коэффициентами соответствующих формальных групп;

- доказать точность по Ландвеберу теории W с произвольным SU-билинейным умножением.

Приложения, выносимые на защиту

Основными результатами работы являются следующие:

1. В главе 2 описаны все SU-линейные операции в комплексных кобордизмах в терминах введённых Коннером и Флойдом геометрических операций ∂_k, затем обобщённых С. П. Новиковым.

2. В главе 3 приведены подробные вычисления структуры A^U-модуля $MU^*(MSU)$ и кольца Ω_*^{SU} с помощью спектральной последовательности Адамса–Новикова, следуя подходу С. П. Новикова.

3. В разделах 4.5 и 5.1 описаны SU-билинейные умножения в теории c_1-сферических бордизмов W^*, описаны SU-линейные проекторы $MU \to W$, выделены проекторы, коммутирующие с операцией $\partial = \Delta_{(1,0)}$, выделены SU-билинейные умножения, задающиеся произвольными проекторами и проекторами, коммутирующими с ∂.

4. В теореме 4.5.9 для произвольного SU-билинейного умножения $*$ на W описано кольцо коэффициентов $(\Omega_*^W, *)$.

5. В разделах 5.2 и 5.3, следуя подходу В. М. Бухштабера, для произвольного SU-билинейного умножения и произвольной комплексной ориентации на W вычислены соответствующие формальные группы по модулю разложимых элементов. Отсюда доказано обобщение результатов В. М. Бухштабера о том, что для произвольного умножения и произвольной ориентации коэффициенты формальной группы не порождают всё кольцо $W^*(pt)$, но при обращении двойки или простых чисел Ферма больших 3, для любого умножения существует такая ориентация, что коэффициенты формальной группы порождают кольцо $W^*(pt)$.

6. Доказана теорема 5.4.5 о точности по Ландвеберу теории W^* для произвольного SU-билинейного умножения.

Объект и предмет исследования

Предметом изучения является теория SU-бордизмов и её минимальное комплексно ориентированное расширение — теория c_1-сферических бордизмов W.

Объектом изучения являются SU-линейные когомологические операции в комплексных кобордизмах, спектральная последовательность Адамса–Новикова для спектра SU-бордизмов, SU-линейные умножения на теории W и SU-линейные проекторы $MU \to W$, формальные группы, соответствующие комплексным ориентациям теории W.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются оригинальными, получены автором самостоятельно, и заключаются в следующем:

1. Приведены подробные вычисления структуры A^U-модуля $MU^*(MSU)$ и групп Ω_*^{SU} с помощью спектральной последовательности Адамса–Новикова, следуя подходу С. П. Новикова.

2. Доказано, что все SU-линейные операции в комплексных кобордизмах выражаются в виде ряда от геометрических операций ∂_k.

3. Решена задача классификации всех возможных SU-билинейных умножений в теории c_1-сферических бордизмов W^* и SU-линейных проекторов $MU \to W$, в том числе, выделены проекторы, коммутирующие с операцией $\partial = \Delta_{(1,0)}$, выделены SU-билинейные умножения, задающиеся произвольными проекторами и проекторами, коммутирующими с ∂.

4. Решена задача вычисления кольца коэффициентов $(\Omega_*^W, *)$ для произвольного SU-билинейного умножения $*$ на W.

5. Следуя подходу В. М. Бухштабера, для произвольного SU-билинейного умножения и произвольной комплексной ориентации на W вычислены соответствующие формальные группы по модулю разложимых элементов. Отсюда доказано обобщение результатов В. М. Бухштабера о том, что для произвольного умножения и произвольной ориентации коэффициенты формальной группы не порождают всё кольцо $W^*(pt)$, но при обращении двойки или простых чисел Ферма больших 3, для любого умножения существует такая ориентация, что коэффициенты формальной группы порождают кольцо $W^*(pt)$.

6. Доказано, что для произвольного SU-билинейного умножения теория c_1-сферических кобордизмов W^* является точной по Ландвеберу.

Методы исследования

В работе используются методы стабильной теории гомотопий, теории комплексных кобордизмов, спектральной последовательности Адамса–Новикова, теории формальных групп.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер. Её результаты и методы могут быть использованы специалистами в области алгебраической топологии и теории кобордизмов.

Степень достоверности

Результаты, выносимые автором на защиту, получены лично.

Содержащиеся в диссертации результаты обоснованы при помощи строгих математических доказательств и опубликованы в открытой печати.

Результаты других авторов, используемые в диссертации, отмечены соответствующим ссылками.

Апробация результатов диссертации

Основные результаты докладывались на следующих всероссийских и международных научных конференциях:

1. «Ломоносов 2019», г. Москва, 8–12 апреля 2019 г.;

2. Школа-конференция «Siberian summer school: Current developments in Geometry», г. Новосибирск, 26–30 августа 2019 г.;

3. «One day seminar in Toric Topology», г. Осака, 14 ноября 2019 г.;

4. «Toric Topology 2019 in Okayama», г. Окаяма, 18–22 ноября 2019 г. (Workshop for young researchers, 22 ноября);

5. International seminar for young researchers «Algebraic, combinatorial and toric topology», онлайн, г. Москва, 18 декабря 2020 г.;

6. Вторая конференция Математических центров России, Секция «Геометрия и топология», г. Москва, 8 ноября 2022 г.;

7. Международная школа «Торическая топология, комбинаторика и анализ данных», г. Санкт-Петербург, 3–9 октября 2022 г.;

8. Молодежный забег МЦМУ МИАН, г. Москва, 13 марта 2023 г.;

9. Студенческая школа-конференция «Математическая весна» 2023, г. Нижний Новгород, 27–30 марта 2023 г.;

и научно-исследовательских семинарах:

1. Семинар «Алгебраическая топология и её приложения» им. М. М. Постникова под руководством чл.-корр. РАН В. М. Бухштабера, проф. А. В. Чернавского, проф. И. А. Дынникова, проф. Т. Е. Панова, доц. Л. А. Алания, в.н.с. А. А. Гайфуллина, проф. Д. В. Миллионщикова и доц. Д. В. Гугнина, МГУ, 30 апреля 2019 г., 6 октября 2020 г. и 11 октября 2022 г.;

2. Совместный спецсеминар НМУ и лаборатории алгебраической топологии и ее приложений ФКН ВШЭ «Торическая топология, комбинаторика и теория гомотопий» под руководством проф. Т. Е. Панова, НМУ, 19 и 26 сентября 2022 г. и 17 апреля 2023 г.;

3. Семинар отдела геометрии и топологии МИАН «Геометрия, топология и математическая физика» под руководством академика РАН С. П. Новикова и чл.-корр. РАН В. М. Бухштабера, МИАН, МГУ, 21 декабря 2022 г.;

4. Совместный семинар ПОМИ–МКН им. А.А.Суслина «Теория мотивов Воеводского и алгебраические группы» под руководством чл.-корр. РАН И. А. Панина и проф. Н. А. Вавилова, ПОМИ, СПБГУ, 22 февраля 2023 г.;

5. Семинар «Геометрия, топология и их приложения» под руководством академика И. А. Тайманова, ИМ СО РАН, онлайн, 17 апреля 2023 г.

Публикации автора

Основное содержание диссертации опубликовано в трёх печатных работах [52, 53, 54], три из которых [52, 53, 54] изданы в рецензируемых научных журналах, входящих в базы данных Scopus, Web of Science и RSCI.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и библиографии. Общий объём диссертации составляет 93 страницы. Библиография включает 54 наименования на 4 страницах.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности.

Тема диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.3 — «Геометрия и топология» по направлению исследований «13. Алгебраическая топология».

Содержание работы

Во **введении** формулируется цель работы, кратко излагаются основные результаты и указывается место данных исследований в теории комплексных, специальных унитарных и c_1-сферических бордизмов.

В **главе 1** приведён обзор основных сведений из стабильной теории гомотопий и теории кобордизмов, необходимых в дальнейшем.

В **разделе 1.1** приведены основные факты и определения из общей теории спектров. А именно, вводятся понятия спектров, стабильной гомотопической категории, функторов Σ^∞ и Ω^∞, градуированных абелевых групп морфизмов $[E,F]_*$, гомотопических групп спектров $\pi_*(E)$, функторов надстройки и «денадстройки» Σ^k, $k \in \mathbb{Z}$, корасслоенных последовательностей спектров. Обсуждается связь спектров с обобщёнными теориями (ко)гомологий. Также обсуждается смэш-произведение $E \wedge F$ на спектрах, понятия кольцевых и модульных спектров и возникающие мультипликативные теории (ко)гомологий. Вводится понятие алгебры $A^E = [E,E]_{-*} = E^*(E)$ когомологических операций теории когомологий E^*. Наконец, обсуждаются ориентации векторных расслоений относительно теорий когомологий, комплексно ориентированные теории и соответствующие формальные группы. Формулируется теорема Лазара (теорема 1.1.1) о полиномиальности кольца определения универсальной формальной группы. Также вводится понятие изоморфизма двойственности Пуанкаре–Атья

$D_E\colon E^*(M^n) \xrightarrow{\cong} E_{n-*}(M^n)$ для многообразий M^n с ориентированным относительно теории E^* стабильным касательным расслоением.

В **разделе 1.2** приводятся основные факты о теории комплексных бордизмов. Сначала даётся определение стабильно комплексной структуры на вещественном расслоении ζ над пространством X, то есть, класса эквивалентности комплексных структур на расслоениях $\zeta \oplus \mathbb{R}^k$, где отождествляются комплексная структура J на $\zeta \oplus \mathbb{R}^k$ и комплексная структура $J \oplus i$ на $\zeta \oplus \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{C} \cong \zeta \oplus \mathbb{R}^{k+2}$. Гомотопически это равносильно поднятию отображения $X \to BO$, классифицирующего расслоение ζ, до отображения $X \to BU$. Стабильно комплексным многообразием называется многообразие со стабильно комплексной структурой на касательном расслоении. В конструкции 1.2.1 даётся геометрическое определение теории бордизмов стабильно комплексных многообразий, теории комплексных бордизмов $U_*(X)$. Гомотопическое определение теории комплексных бордизмов $MU_*(X)$ через спектр Тома MU даётся в конструкции 1.2.2. В теореме 1.2.3 даётся набросок доказательства совпадения геометрического и гомотопического определений теории комплексных бордизмов. В конструкции 1.2.4 даётся геометрическое описание двойственной теории когомологий, теории комплексных кобордизмах, в терминах комплексно ориентированных отображений. Далее приводятся конструкции умножений и двойственности Пуанкаре–Атья в теории комплексных кобордизмов. Приводятся структурные результаты о кольце коэффициентов $\varOmega_*^U$ теории комплексных бордизмов. Согласно теореме Милнора и Новикова (теорема 1.2.6),

$$\varOmega_*^U \cong \mathbb{Z}[a_i,\, i \geqslant 1], \quad \deg a_i = 2i,$$

и два стабильно комплексных многообразия бордантны тогда и только тогда, когда у них совпадают все характеристические числа Чженя. Полиномиальные образующие задаются условием на специальное характеристическое число s_i (иногда называемое числом Милнора). Для всякого целого числа $i \geqslant 1$, положим

$$m_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i+1 \neq p^k \text{ ни для какого простого } p; \\ p, & \text{если } i+1 = p^k \text{ для некоторого простого } p \text{ и целого } k > 0. \end{cases}$$

Класс бордизма стабильно комплексного многообразия M^{2i} может быть принят за $2i$-мерную образующую a_i тогда и только тогда, когда $s_i[M^{2i}] = \pm m_i$.

Наконец, обсуждается формальная группа, соответствующая стандартной комплексной ориентации теории комплексных бордизмов, её геометрическое описание и теорема Квиллена (теорема 1.2.7) об универсальности этой формальной группы.

В следующем **разделе 1.3** вводятся SU-многообразия и SU-бордизмы. По теореме Новикова, кольцо коэффициентов SU-бордизмов с обращённой двойкой $\varOmega_*^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac12]$ есть кольцо многочленов с одной образующей в каждой четной размерности $\geqslant 4$:

$$\varOmega_*^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\tfrac12] \cong \mathbb{Z}[\tfrac12][y_i,\, i \geqslant 2], \quad \deg y_i = 2i.$$

Класс бордизма SU-многообразия M^{2i} может быть принят за $2i$-мерную образующую y_i тогда и только тогда, когда $s_i[M^{2i}] = \pm m_i m_{i-1}$, с точностью до умножения на степень 2. Дополнительное соотношение делимости в размерностях вида $2p^k$ получается из простого наблюдения, что s_i-число SU-многообразия M^{2i} размерности $2i = 2p^k$ делится на p (предложение 1.3.2).

В **разделе 1.4** рассматривается алгебра операций A^U в комплексных кобордизмах и приводится её нестандартное точное представление на $MU_*(BU)$, восходящее к С. П. Новикову (конструкция 1.4.3). В теореме 1.4.5 формулируются необходимые свойства когомологической спектральной последовательности Адамса–Новикова.

В **главе 2** решается задача классификации SU-линейных операций в комплексных кобордизмах.

В **разделе 2.1** исследуются общее свойство SU-линейности операции и доказывается следующая

Теорема 2.1.3. *Операция $f \in [MU, MU]_*$ является SU-линейной тогда и только тогда, когда её действие на $\varOmega_*^U$ является SU-линейным.*

В **разделе 2.2**, следуя конструкции С. П. Новикова [16], определяются SU-линейные операции ∂_k, $k = 1, 2, \ldots$, сопоставляющие классу комплексных бордизмов многообразия $[M]$ класс его подмногообразия N, двойственного к $\det \mathcal{T}M^{\oplus k}$. Здесь также определяется важнейшая для теории c_1- сферических бордизмов операция Δ, переводящая класс комплексных бордизмов многообразия $[M]$ в класс его подмногообразия N, двойственного к $\det \mathcal{T}M \oplus \overline{\det \mathcal{T}M}$.

Наконец в **разделе 2.3** описывается MSU-модуль MU (предложение 2.3.1), из чего выводится следующая

Теорема 2.3.4. *Операции ∂_k образуют топологический базис левого Ω_U^*-модуля SU-линейных операций из $[MU, MU]_*$. То есть, любая SU-линейная операция $f \in [MU, MU]_*$ единственным образом записывается в виде ряда $f = \sum_{i\geqslant 0} \mu_i \partial_i$ с $\mu_i \in \Omega_U^{-2i-*}$.*

В теореме 2.3.6 описывается мультипликативную структуру кольца SU-линейных операций относительно композиции в терминах коэффициентов формальной группы комплексных кобордизмов.

Основные результаты второй главы опубликованы в работе автора [53].

Глава 3 посвящена вычислению спектральной последовательности Адамса–Новикова для спектра MSU.

В **разделе 3.1** определяется структура A^U-модуля на $MU^*(MSU)$, необходимая для вычисления спектральной последовательностью Адамса–Новикова. A^U-модуль $MU^*(MSU)$ может быть отождествлён с фактормодулем $A^U/(A^U\Delta + A^U\partial)$ (теорема 3.1.2), где $\partial = \partial_1$.

Спектральная последовательность Адамса–Новикова для спектра MSU вычисляется в **разделе 3.2**, где также получены следствия о структуре кольца SU-бордизмов Ω_*^{SU}. При вычислении групп $\mathrm{Ext}^{*,*}(MU^*(MSU), \Omega_U^*)$ появляются группы $\Omega_*^W = \mathrm{Ker}(\Delta\colon \Omega_*^U \to \Omega_{*-4}^U)$. В теореме 3.2.8 доказано, что ядро забывающего гомоморфизма $\Omega_*^{SU} \to \Omega_*^U$ состоит из элементов конечного порядка, и каждый элемент кручения из Ω_*^{SU} имеет порядок 2.

Это приводит нас к следующему описанию свободной части и кручения в кольце Ω_*^{SU} (теорема 3.2.11):

а) $\mathrm{Tors}\, \Omega_n^{SU} = 0$, кроме $n = 8k + 1$ и $8k + 2$, когда $\mathrm{Tors}\, \Omega_n^{SU}$ является $\mathbb{Z}/2$-векторным пространством ранга, равного числу разбиений числа k.

б) Группа $\Omega_{2i}^{SU}/\,\mathrm{Tors}$ изоморфна $\mathrm{Ker}(\partial\colon \Omega_{2i}^W \to \Omega_{2i-2}^W)$ при $2i \not\equiv 4 \mod 8$ и изоморфна $\mathrm{Im}(\partial\colon \Omega_{2i+2}^W \to \Omega_{2i}^W)$ при $2i \equiv 4 \mod 8$.

Основные результаты второй главы опубликованы в работе автора [52].

в) Существуют классы SU-бордизма $w_{4k} \in \Omega_{8k}^{SU}$, $k \geqslant 1$, такие, что всякий элемент конечного порядка в Ω^{SU} единственным образом представляется в виде $P \cdot \theta$ или $P \cdot \theta^2$, где P — многочлен от переменных w_{4k} с коэффициентами 0 и 1. Элемент $w_{4k} \in \Omega_{8k}^{SU}$ определяется тем условием, что он представляет полиномиальную образующую ω_{4k} в $H_{8k}(\Omega_*^W, \partial)$.

Основные результаты третьей главы опубликованы в работе автора [52].

В **главе 4** определяется и изучается теория c_1-сферических бордизмов W_*, исследуется её связь с SU-бордизмами и решается задача описания всех SU-билинейных умножений на W и вычисляются соответствующие кольца коэффициентов.

В **разделе 4.1** вводится мультипликативная структура на группе Ω_*^W. Сначала показывается, что $\Omega_*^W \subset \Omega_*^U$ является прямым слагаемым и выделяющий его проектор можно построить двумя различными способами, восходящими к Коннеру–Флойду [32] и Стонгу [21] соответственно. Прямая сумма $\Omega_*^W = \bigoplus_{i\geqslant 0} \Omega_{2i}^W$ *не* является подкольцом в Ω_*^U: мы имеем $[\mathbb{C}P^1] \in \Omega_2^W$, однако $[\mathbb{C}P^1] \times [\mathbb{C}P^1] \notin \Omega_4^W$. Тем не менее, Ω^W становится коммутативным кольцом с единицей относительно *подкрученного произведения*

$$a * b = a \cdot b + 2[V^4] \cdot \partial a \cdot \partial b,$$

где $\cdot$ обозначает произведение в кольце Ω_*^U, а $[V^4] = [\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1] - [\mathbb{C}P^2]$. Кроме того, это умножение имеет вид $\pi(a \cdot b)$ для проектора π, построенного Коннером и Флойдом или Стонгом. В теореме 4.1.9 показывается, что несмотря на то, что определяемое ими умножение одинаково, проекторы Коннера–Флойда и Стонга всё-таки различны.

Структура кольца Ω^W с введённым выше умножением даётся теоремой 4.1.13: Ω^W является кольцом многочленов над целыми числами, с одной образующей в каждой четной размерности, кроме 4:

$$\Omega^W \cong \mathbb{Z}[x_1, x_i,\, i \geqslant 3], \quad x_1 = [\mathbb{C}P^1], \quad \deg x_i = 2i,$$

где $s_i(x_i) = \pm m_i m_{i-1}$ при $i \geqslant 3$. Граничный оператор $\partial\colon \Omega_*^W \to \Omega_{*-2}^W$, $\partial^2 = 0$, удовлетворяет равенству

$$\partial(a * b) = a * \partial b + \partial a * b - x_1 * \partial a * \partial b,$$

а полиномиальные образующие кольца Ω^W могут быть выбраны так, что удовлетворяются соотношения

$$\partial x_1 = 2, \quad \partial x_{2i} = x_{2i-1}.$$

Мультипликативная структура кольца Ω^{SU} описывается в **разделе 4.2**. Забывающее отображение $\iota\colon \Omega_*^{SU} \to \Omega_*^W$ является кольцевым гомоморфизмом, причём его ядром является в точности кручение в Ω_*^{SU}. Таким образом, факторкольцо $\Omega_*^{SU}/\mathrm{Tors}$ может быть описано как подкольцо в Ω^W.

Мы имеем

$$\Omega_*^W \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] \cong \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}][x_1, x_{2k-1}, 2x_{2k} - x_1 x_{2k-1}\colon k \geqslant 2],$$

где $x_1^2 = x_1 * x_1$ есть ∂-цикл, и каждый из элементов x_{2k-1} и $2x_{2k} - x_1 x_{2k-1}$ при $k \geqslant 2$ также есть ∂-цикл.

Из описания кольца Ω_*^W следует существование неразложимых элементов $y_i \in \Omega_{2i}^{SU}$, $i \geqslant 2$ таких, что $s_i(y_i) = m_i m_{i-1}$, если i нечетно, $s_2(y_2) = -48$, и $s_i(y_i) = 2m_i m_{i-1}$, если i четно и $i > 2$. Эти элементы отображаются следующим образом под действием забывающего гомоморфизма $\iota\colon \Omega_*^{SU} \to \Omega_*^W$:

$$y_2 \mapsto 2x_1^2, \quad y_{2k-1} \mapsto x_{2k-1}, \quad y_{2k} \mapsto 2x_{2k} - x_1 x_{2k-1}, \quad k \geqslant 2.$$

В частности, кольцо $\Omega_*^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{2}][y_i\colon i \geqslant 2]$ вкладывается в $\Omega_*^W \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ в качестве подкольца многочленов, порожденного элементами x_1^2, x_{2k-1} и $2x_{2k} - x_1 x_{2k-1}$.

В **разделе 4.3** кратко освещается проблема нахождения у классов SU-бордизмов хороших геометрических представителей. В теоремах 4.3.1 и 4.3.2 приводятся результаты Лимонченко, Лю и Панова о том, что классы y_i могут быть представлены целочисленными линейными комбинациями гиперповерхностей Калаби–Яу в произведениях проективных пространств или квазиторическими SU-многообразиями при $i \geqslant 5$.

Также приводятся примеры представителей оставшихся маломерных классов y_2, y_3 и y_4, последний из которых построен автором.

В **разделе 4.4** определяется спектр W c_1-сферических бордизмов, как спектр, представляющий теорию бордизмов стабильно комплексных многообразий, у которых детерминантное расслоение индуцируется из $\mathbb{C}P^1$ (c_1-сферических стабильно комплексных многообразий). Получающийся спектр является MSU-модулем (произведение c_1-сферического многообразия на SU-многообразие остаётся c_1-сферическим), структура MSU-модуля W описывается предложением 4.4.1. Также доказывается, что изучавшиеся раньше группы Ω_*^W служат группами коэффициентов теории W_* (теорема 4.4.6) и спектр W является слоем операции $\Delta\colon MU \to \Sigma^4 MU$ (предложение 4.4.10).

В **разделе 4.5** приводится несколько описаний проекторов $\pi\colon MU \to W$ и указываем условия, характеризующие SU-линейные проекторы. Мы выражаем SU-линейный проектор Стонга $\pi_0\colon MU \to W$ в виде ряда от операций ∂_i в терминах коэффициентов формальной группы комплексных кобордизмов (предложение 4.1.10) и показываем, что любой другой проектор $\pi\colon MU \to W$ имеет вид $\pi_0(1 + f\Delta)$ для некоторой операции $f \in [MU, \Sigma^{-4}MU]$ (теорема 4.5.2), где $\Delta \in [MU, \Sigma^4 MU]$ — операция Коннера–Флойда, удовлетворяющая $W = \operatorname{Ker}\Delta$. В этих терминах SU-линейные проекторы соответствуют SU-линейным операциям f.

Там же доказываются следующие теоремы.

Теорема 4.5.8. *Любое SU-билинейное умножение на W со стандартной единицей (т. е. получающейся с помощью забывания из единицы MSU) имеет вид*

$$a \tilde{*} b = ab + (2[V] + \omega)\partial a \partial b$$

для $[V] = [\mathbb{C}P^1]^2 - [\mathbb{C}P^2]$ *и* $\omega \in \Omega_4^W$*. Все такие умножения ассоциативны и коммутативны. Более того, из* SU*-линейных проекторов получаются в точности те умножения, для которых* $\omega = 2\widetilde{\omega}$*,* $\widetilde{\omega} \in W_4$*.*

Так как группа Ω_4^W изоморфна $\mathbb{Z}$ с образующей $[K] = 9[\mathbb{C}P^1]^2 - 8[\mathbb{C}P^2]$, мы получаем, что любое SU-билинейное умножение имеет вид

$$a *_q b = ab + (2[V] + q[K])\partial a \partial b, \quad q \in \mathbb{Z}$$

Теорема 4.5.9. *Относительно умножения* $*_q$ *кольцо* Ω_*^W *имеет вид*

$$(\Omega_W^*, *_q) = \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, \ldots]/(x_1 *_q x_1 = (4q+1)x_2).$$

Образующие x_i *при* $i \neq 2$ *выделяются условием* $s_i(x_i) = \pm m_i m_{i-1}$*, а* x_2 *определяется из условия* $x_1 *_q x_1 = (4q+1)x_2$*, и образующие можно выбрать так, что будут выполнены равенства*

$$\partial(a *_q b) = a\partial b + \partial a b - x_1 \partial a \partial b,$$

$$\partial x_1 = 2, \quad \partial x_{2i} = x_{2i-1}.$$

В частности, ни для какого SU*-билинейного умножения* $a *_q b$*, кроме* $a * b = a *_0 b = ab + 2\alpha_{12}\partial a \partial b$*, задаваемого проектором Стонга* π_{St}*, кольцо* Ω_W^* *не является полиномиальным.*

Основные результаты четвёртой главы опубликованы в работе автора [53].

В **главе 5** изучаются комплексные ориентации теории W и соответствующие им формальные группы. Решается задача вычисления соответствующих формальных групп по модулю разложимых элементов и доказываются обобщения результатов В. М. Бухштабера [6] о кольцах, порождаемых коэффициентами формальных групп, на случай произвольных SU-билинейных умножений на W. Кроме того, доказывается точность по Ландвеберу этих формальных групп.

В **разделе 5.1** изучаются общие свойства комплексных ориентаций спектра W. Любая комплексная ориентация $w \in \widetilde{W}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ получается с помощью SU-линейного проектора из некоторой ориентации $\widetilde{u} \in \widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ в комплексных кобордизмах (предложение 5.1.1). Кроме того, спектр W является «минимальным комплексно ориентируемым расширением» спектра MSU (предложение 5.1.2). Из комплексной ориентируемости W следует, что мы можем описать все SU-линейные операции $MU \to W$ (теорема 5.1.3) и описать те SU-линейные проекторы $MU \to W$, которые коммутируют с операцией ∂ (теорема 5.1.5), а также соответствующие им умножения. В [5] показано, что такие умножения продолжаются до умножений на всём спектре MU.

В **разделе 5.2**, следуя подходу В. М. Бухштабера [6], для произвольного SU-билинейного умножения и произвольной комплексной ориентации на W вычисляется соответствующая формальная группа F_W с точностью до разложимых элементов:

Предложение 5.2.8. *Имеет место равенство*

$$F_W(u,v) = u + v - ([\mathbb{C}P^1] + 2\lambda)uv + (4[V] + 3\omega_2 - 2(2\ell+1)^2(2[V] + q[K]))(uv^2 + vu^2) + \\ + \sum_{k \geqslant 3} \Bigl(a_k\bigl(1 + (-1)^k(k+1)\bigr) + m_k\omega_k\Bigr)\frac{(u+v)^{k+1} - u^{k+1} - v^{k+1}}{m_k} \mod J^2,$$

где a_i *— полиномиальные образующие кольца* Ω_*^U *с* $s_i(a_i) = -m_i$*,* $\lambda \in \Omega_2^U$*,* $\partial\lambda = 2\ell$*,* $\omega_i \in \Omega_{2i}^W$*.*

В **разделе 5.3** доказываются следующие теоремы:

Теорема 5.3.1. *Ни для какой комплексной ориентации* w *и ни для какого* SU*-билинейного умножения* $*_q$ *на* W *коэффициенты соответствующей формальной группы* F_W *не порождают всего кольца* $(\Omega_*^W, *_q)$*.*

Следствие 5.3.2. *Ни для какого* SU*-билинейного умножения на* W *не существует мультипликативных проекторов* $MU \to W$*.*

Теорема 5.3.3. *Пусть A — подкольцо в Ω_*^W, порождённое коэффициентами формальной группы F_W. Тогда существует ориентация на W, такая, что $A[\frac{1}{2}] = \Omega_*^W[\frac{1}{2}]$.*

Теорема 5.3.7. *Рассмотрим множество $\mathcal{P}$ простых чисел вида $p = 2^k + 1$ (простых чисел Ферма), строго больших 3. Рассмотрим теорию $W^*[\mathcal{P}^{-1}]$, получаемую из теории W^* обращением всех $p \in \mathcal{P}$ (тензорным умножением на кольцо $\mathbb{Z}[\mathcal{P}^{-1}] = \mathbb{Z}[1/p, p \in \mathcal{P}]$).*

Тогда для теории $W^*[\mathcal{P}^{-1}]$ существует такая комплексная ориентация, что коэффициенты соответствующей формальной группы порождают всё кольцо $\Omega_W^*[\mathcal{P}^{-1}]$.

Наконец в **5.4** доказывается точность по Ландвеберу спектра W:

Теорема 5.4.5. *Формальная группа $F_W(u,v)$ над кольцом $(\Omega_W^*, *_q)$ точна по Ландвеберу (для любого умножения $*_q$).*

Следствие 5.4.6. *Для любого SU-билинейного умножения $*_q$ на теории W^* имеют место естественные изоморфизм теорий гомологий $W_*(-) = MU_*(-) \otimes_{\Omega_*^U} (\Omega_*^W, *_q)$ и изоморфизм мультипликативных теорий когомологий $W^*(-) = MU^*(-) \otimes_{\Omega_U^*} (\Omega_W^*, *_q)$ на конечных комплексах.*

Основные результаты пятой главы опубликованы в работах автора [53, 54].

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность чл.-корр. РАН Виктору Матвеевичу Бухштаберу за внимание к работе и многочисленные полезные обсуждения, замечания и комментарии.

Автор выражает самую глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Тарасу Евгеньевичу Панову за постановку задачи, постоянное внимание к работе, многочисленные плодотворные обсуждения, помощь в написании работы и общую поддержку.

Автор выражает искреннюю благодарность всему коллективу кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического факультета МГУ за дружелюбную и чрезвычайно вдохновляющую научную атмосферу.

Наконец, автор благодарит своих родителей за поддержку во время обучения на факультете.

Глава 1

Предварительные сведения

1.1 Спектры

Здесь мы кратко изложим основные определения и факты из теории спектров, которые мы будем использовать в дальнейшем. Подробности можно найти, например, в [3, 20, 38, 47, 27].

1.1.1 Стабильная гомотопическая категория

Спектром называется последовательность пунктированных клеточных пространств $E = (E_0, E_1, \ldots)$ с заданными пунктированными структурными отображениями $\sigma_n^E\colon \Sigma E_n \to E_{n+1}$. Между спектрами можно определить стабильные отображения, или морфизмы, и их стабильные гомотопии, что приводит к определению *стабильной гомотопической категории спектров* $\mathcal{SHC}$. Множество (стабильных гомотопических классов) морфизмов между спектрами E и F обозначается $[E, F]$. Отметим, что для двух спектров E и F последовательность отображений $f_n\colon E_n \to F_n$, определённая для достаточно больших $n > N$ и согласованная со структурными отображениями, задаёт морфизм $E \to F$. Если для двух таких последовательностей отображений f_n и g_n, начиная с некоторого номера, f_n гомотопно g_n, то эти последовательности определяют один и тот же морфизм в $\mathcal{SHC}$. В частности, если для достаточно больших номеров n отображения f_n становятся гомотопическими эквивалентностями, то соответствующий морфизм спектров является изоморфизмом в $\mathcal{SHC}$ или, иначе говоря, (стабильной) эквивалентностью спектров.

Для любого пунктированного клеточного пространства X определён надстроечный спектр $\Sigma^\infty X = (X, \Sigma X, \ldots)$ с тождественными структурными отображениями. Этим определяется функтор Σ^∞ из гомотопической категории (пунктированных) пространств $\mathcal{H}o(\mathrm{Top}^*)$ в $\mathcal{SHC}$. При этом для конечного клеточного пространства X имеет место равенство $[\Sigma^\infty X, E] = \varinjlim\limits_{k\to\infty} [\Sigma^k X, E_k]$, где прямой предел берётся вдоль отображений $[\Sigma^k X, E_k] \xrightarrow{\Sigma} [\Sigma^{k+1} X, \Sigma E_k] \xrightarrow{(\sigma_k^E)_*} [\Sigma^{k+1} X, E_{k+1}]$. Надстроечный спектр $\Sigma^\infty S^0$, состоящий из сфер, называется спектром сфер и обозначается через S. При этом функтор Σ^∞ обладает правым сопряжённым $\Omega^\infty\colon \mathcal{SHC} \to \mathcal{H}o(\mathrm{Top}^*)$, то есть, имеет место равенство $[\Sigma^\infty X, E] = [X, \Omega^\infty E]$ для любых пунктированного пространства X и спектра E.

На категории спектров определены функторы сдвигов $s_1(E) = (E_1, E_2, \ldots)$, $s_{-1}(E) = (pt, E_0, E_1, \ldots)$ и функтор надстройки $\Sigma E = (\Sigma E_0, \Sigma E_1, \ldots)$. Функторы сдвига являются взаимообратными автоэквивалентностями категории $\mathcal{SHC}$, а функтор надстройки естественно изоморфен функтору сдвига s_1. То есть, в категории спектров функтор надстройки становится эквивалентностью. Мы будем обозначать его итерации через Σ^k для $k \in \mathbb{Z}$, вводя таким образом «отрицательную» надстройку над спектрами. Надстройка согласована с надстройкой пространств в том смысле, что функторы Σ и Σ^∞ коммутируют (с точностью до естественного изоморфизма). Заметим, что для любого спектра $E = (E_0, E_1, \ldots)$ композиции структурных отображений $\sigma_{n+k}^E \circ \ldots \circ \Sigma^{k-1}\sigma_n^E\colon \Sigma^k E_n \to E_{n+k}$ для фиксированного n определяют естественный морфизм $\Sigma^{-n}\Sigma^\infty E_n \to E$.

Автоэквивалентность надстройки позволяет ввести градуировку на морфизмах спектров $[E, F]_n = [\Sigma^n E, F]$, $n \in \mathbb{Z}$. Так как все спектры являются сколь угодно кратными надстройками, неудивительно, что множества морфизмов между ними, в действительности, образуют абелевы группы (с биаддитивной композицией).

Для спектров определены *гомотопические группы* $\pi_n(E) = [S, E]_n = [\Sigma^n \Sigma^\infty S^0, E] = \lim\limits_{k\to\infty} [S^{n+k}, E_k]$, $n \in \mathbb{Z}$. При этом изоморфизмами в $\mathcal{SHC}$ являются те и только те морфизмы, которые индуцируют изоморфизм на гомотопических группах («слабые гомотопические эквивалентности»). В силу сопряжённости функторов Σ^∞ и Ω^∞ имеет место равенство $\pi_k(E) = [\Sigma^\infty S^k, E] = [S^k, \Omega^\infty E] = \pi_k(\Omega^\infty E)$.

В категории $\mathcal{SHC}$ есть выделенный класс циклических последовательностей морфизмов

$$\cdots \to \Sigma^{-1} Z \to X \to Y \to Z \to \Sigma X \to \cdots,$$

называемый *корасслоенными* (или *расслоенными*, или *(ко)точными)* последовательностями, в которых композиции соседних морфизмов равны нулю и обладающих тем свойством, что для любого спектра E последовательности абелевых групп

$$\cdots \to [E, Z]_{*+1} \to [E, X]_* \to [E, Y]_* \to [E, Z]_* \to [E, X]_{*-1} \to \cdots$$

и

$$\cdots \to [Z, E]_{*-1} \to [X, E]_* \to [Y, E]_* \to [Z, E]_* \to [X, E]_{*+1} \to \cdots$$

точны. Кроме того, любой морфизм $X \to Y$ можно встроить в две такие последовательности $\cdots \to \Sigma^{-1} C \to X \to Y \to C \to \Sigma X \to \cdots$ и $\cdots \to F \to X \to Y \to \Sigma F \to \Sigma X \to \cdots$. При этом C и F называются соответственно *кослоем* и *слоем* морфизма $X \to Y$. При этом приведённые последовательности фактически отличаются лишь сдвигом, то есть, C естественно эквивалентен ΣF. Функтор Σ^∞ переводит гомотопическую корасслоенную последовательность Пуппе

$$X \xrightarrow{f} Y \to C(f) \to \Sigma X \to \cdots$$

в половину корасслоенной последовательности надстроечных спектров

$$\Sigma^\infty X \to \Sigma^\infty Y \to \Sigma^\infty C(f) \to \Sigma \Sigma^\infty X \to \cdots,$$

то есть, $\Sigma^\infty C(f)$ является кослоем морфизма $\Sigma^\infty X \xrightarrow{\Sigma^\infty(f)} \Sigma^\infty Y$.

1.1.2 Смэш-умножение и теории (ко)гомологий

На гомотопической категории спектров есть *смэш-умножение* $E \wedge F$, обладающее свойствами ассоциативности и коммутативности. Единицей для него служит спектр сфер. Смэш-произведение с надстроечным спектром $\Sigma^\infty X \wedge E$ естественно изоморфно спектру $(X \wedge E_0, X \wedge E_1, \ldots)$, поэтому такое произведение обозначается $X \wedge E$. В частности, $\Sigma^\infty X \wedge \Sigma^\infty Y \simeq \Sigma^\infty(X \wedge Y)$, то есть, функтор Σ^∞ коммутирует с умножением. При этом $S^k \wedge E \simeq \Sigma^k E$ и, следовательно, $(\Sigma E) \wedge F \simeq \Sigma(E \wedge F)$. На морфизмах смэш-умножение биаддитивно, то есть, определяет гомоморфизм абелевых групп $[E_1, F_1] \otimes_{\mathbb{Z}} [E_2, F_2] \to [E_1 \wedge E_2, F_1 \wedge F_2]$. Кроме того, умножение уважает градуировку на морфизмах, то есть, переводит $[E_1, F_1]_n \otimes_{\mathbb{Z}} [E_2, F_2]_m$ в $[E_1 \wedge E_2, F_1 \wedge F_2]_{n+m}$. При умножении корасслоенной последовательности на спектр она остаётся корасслоенной.

Каждый спектр E определяет на $\mathcal{SHC}$ *теорию гомологий* и *теорию когомологий* (то есть, последовательность функторов в категорию абелевых групп, снабжённых изоморфизмом надстройки и переводящих корасслоенные последовательности в точные последовательности абелевых групп) по формулам $E_n(F) = \pi_n(E \wedge F)$ и $E^n(F) = [F, E]_{-n}$, $n \in \mathbb{Z}$. Композиция такой теории (ко)гомологий на спектрах с функтором Σ^∞ даёт приведённую (экстраординарную) теорию (ко)гомологий на пространствах. Для клеточного пространства X мы имеем $\widetilde{E}_n(X) = \lim\limits_{k\to\infty} [S^{n+k}, E_k \wedge X]$, а для конечного клеточного пространства X выполнено $\widetilde{E}^n(X) = \lim\limits_{k\to\infty} [\Sigma^{k-n} X, E_k]$. В частности, гомотопические группы $\pi_*(-)$ представляют собой теорию гомологий, определяемую спектром сфер. Неприведённая теория (ко)гомологий на пространствах получается добавлением отмеченной точки $E^*(X) = \widetilde{E}^*(X_+)$, $E_*(X) = \widetilde{E}_*(X_+)$. На пары пространств теории (ко)гомологий продолжаются через взятие факторпространства $E^*(X,A) = \widetilde{E}^*(X/A)$, $E_*(X,A) = \widetilde{E}_*(X/A)$. Имеют место равенства $E_*(pt) = E^{-*}(pt) = \pi_*(E)$.

При этом любая теория (ко)гомологий определяется некоторым спектром, единственным с точностью до изоморфизма.

Спектр E называется *кольцевым*, если на нём заданы умножение $\mu\colon E \wedge E \to E$ и единица $S \to E$, удовлетворяющие обычным кольцевым аксиомам в $\mathcal{SHC}$. Спектр F называется *(левым) модулем* над кольцевым спектром E, если задано отображение $E \wedge F \to F$, удовлетворяющее обычным аксиомам левого модуля над кольцом. Если спектр E кольцевой, то группы коэффициентов $E_*(pt) = \pi_*(E)$ становятся градуированным коммутативным кольцом, при этом группы $E_*(X)$ и $E^{-*}(X)$ становятся естественными модулями над ним. Кроме того, соответствующая теория (ко)гомологий на пространствах снабжается стандартной теорией умножений, в частности, $\cup$- и $\cap$-*умножениями*

$$E^n(X) \otimes_{\pi_*(E)} E^m(X) \xrightarrow{\cup} E^{n+m}(X),$$

$$E^n(X) \otimes_{\pi_*(E)} E_m(X) \xrightarrow{\cap} E_{m-n}(X).$$

При композиции с отображением $\varepsilon\colon E_*(X) \to E_*(pt)$, индуцированным отображением в точку, $\cap$-умножение становится спариванием гомологий и когомологий

$$E^n(X) \otimes_{\pi_*(E)} E_m(X) \xrightarrow{\langle\,,\rangle} \pi_{m-n}(E).$$

Если F — модуль над E, то аналогично теория $F^*(-)$ обретает структуру модуля над теорией $E^*(-)$.

Обычно $\cup$-умножение и модульное умножение обозначаются просто точкой или и вовсе их обозначение опускается (как в случае обычного умножения).

Во многих хороших случаях, в частности, в рассматриваемых ниже случаях спектров бордизмов, умножение задаётся гомотопически согласованным набором отображений $\mu_{n,m}\colon E_n \wedge E_m \to E_{n+m}$ (см. [20, Предложение 13.80]).

1.1.3 Некоторые дополнительные свойства спектров

Здесь мы перечислим некоторые более специальные факты о спектрах, которые понадобятся нам для доказательства леммы 2.1.4.

Спектр называется *конечным*, если он эквивалентен спектру вида $\Sigma^k\Sigma^\infty X$ для конечного комплекса X. Спектр называется *связным*, если его отрицательные гомотопические группы равны нулю. Тогда его отрицательные целочисленные группы гомологий также равны нулю. Спектр называется спектром *конечного типа*, если его гомотопические группы конечно порождены. Тогда его группы целочисленных гомологий также конечно порождены.

Для любого спектра E определены его остовы $E^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$, $E^{(n)} \hookrightarrow E$. При этом спектр связен тогда и только тогда, когда $E^{(n)} \simeq *$ при $n < 0$. Кроме того, имеют место равенства $H_k(E^{(n)},\mathbb{Z}) = H_k(E,\mathbb{Z})$ при $k < n$, $H_k(E^{(n)},\mathbb{Z}) = 0$ при $k > n$ и группа $H_n(E^{(n)},\mathbb{Z})$ свободна (аналогично случаю пространств).

При этом спектр является спектром конечного типа тогда и только тогда, когда его остовы эквивалентны конечным спектрам.

Для связных спектров имеют место формулы универсальных коэффициентов для целочисленных гомологий, аналогичные формулам для случая пространств.

Спектр, соответствующий обычным гомологиям с коэффициентами в абелевой группе G, называется спектром Эйленберга–Маклейна группы G и обозначается HG.

Если R — коммутативное кольцо, то HR — коммутативный кольцевой спектр. Для любого спектра E определено отображение $E \to E \wedge H\mathbb{Q}$, получающееся смэш-умножением на E отображения единицы $S \to H\mathbb{Q}$ для спектра $H\mathbb{Q}$. Тогда спектр $E \wedge H\mathbb{Q}$ мы будем обозначать $E_\mathbb{Q}$ и называть *рационализацией* спектра E.

Отображение $E \to E_\mathbb{Q}$ задаёт отображение рационализации на группах гомологий $E_*(X) \to (E_\mathbb{Q})_*(X) = E_*(X) \otimes \mathbb{Q}$. В частности, это верно для гомотопических групп $\pi_*(E) = E_*(S^0)$

Аналогичное равенство для когомологий верно только для конечных спектров, то есть, $E^*(X) \to (E_\mathbb{Q})^*(X) = E_*(X) \otimes \mathbb{Q}$ является рационализацией для конечных спектров X.

Кроме того, рационализация обладает следующим универсальным свойством: любой морфизм $E \to F$, для которого $\pi_*(F)$ являются рациональными векторными пространствами (что равносильно тому, что $F_{\mathbb{Q}} = F$), единственным образом пропускается через $E \to E_{\mathbb{Q}} \to F$. Иными словами, $[E, F_{\mathbb{Q}}] = [E_{\mathbb{Q}}, F_{\mathbb{Q}}]$.

Кроме того, рационализация является градуированным спектром Эйленберга–Маклейна $E_{\mathbb{Q}} \simeq \bigvee\limits_{n \in \mathbb{Z}} H(\pi_n(E) \otimes \mathbb{Q})$.

Наконец, для двух спектров E и F существует естественная когомологическая спектральная последовательность Атья–Хирцебруха сигнатуры $E_2^{p,q} = H^p(E, F^q(S^0)))$, присоединённая к $[E, F]_*$. Причём образы дифференциалов этой спектральной последовательности лежат в подгруппах кручения для конечного спектра E. Это следует из двух фактов: во-первых, дифференциалы спектральной последовательности Атья–Хирцебруха могут быть отождествлены с инвариантами Постникова для (коостовов) спектра F (см. [39], [47, Remark 4.34]), и во-вторых, после рационализации инварианты Постникова становятся равны нулю, так как они являются препятствием к тому, чтобы спектр был градуированным спектром Эйленберга–Маклейна. Следовательно, после рационализации спектра F листы спектральной последовательности тоже рационализуются (для конечного E), а дифференциалы становятся равны нулю, то есть, их образы лежали в подгруппах кручения. Это верно и в том случае, если E является связным спектром конечного типа, так как каждый дифференциал зависит лишь от некоторого остова E, который конечен.

1.1.4 Алгебра когомологических операций

Все группы $E^*(F)$ являются естественными модулями над ассоциативной алгеброй эндоморфизмов $A^E = E^*(E) = [E, E]_{-*}$ — *алгеброй когомологических операций*. Любое естественное преобразование теорий когомологий $E^*(-)$ на пространствах индуцируется эндоморфизмом спектра E. Однако, вообще говоря, разные эндоморфизмы спектра E могут индуцировать одинаковые преобразования теории когомологий на пространствах — разность двух таких морфизмов индуцирует нулевое отображение на $E^*(X)$ для любого пространства X. Такие морфизмы называются *фантомными* и, вообще говоря, существуют ненулевые фантомные эндоморфизмы. Однако в достаточно хороших случаях, в частности, для спектра комплексных бордизмов, рассматриваемого в следующем разделе, можно показать отсутствие фантомных эндоморфизмов. В этом случае алгебра A^E есть в точности алгебра естественных преобразований теории когомологий $E^*(-)$ на пространствах. Заметим, что, A^E всегда есть алгебра естественных преобразований теории когомологий $E^*(-)$ на спектрах.

Для кольцевого спектра E любой элемент $x \in \pi_{-n}(E) = E^n(pt)$ определяет когомологическую операцию умножения на x (которую мы будем обозначать просто через x) из $E^n(E)$, представляемую композицией $E \simeq S \wedge E \xrightarrow{x \wedge 1} \Sigma^n E \wedge E \to \Sigma^n E$. Таким образом мы имеем вложение колец $E^*(pt) \subset A^E$, задающее структуру левого $E^*(pt)$-модуля на A^E. Заметим, что, вообще говоря, A^E не является $E^*(pt)$-алгеброй, так как не все элементы A^E коммутируют с $E^*(pt)$.

1.1.5 Ориентации векторных расслоений и формальные группы

Для вещественного векторного расслоения ξ ранга n над клеточным пространством X его *пространством Тома* $Th(\xi)$ называется факторпространство $D(\xi)/S(\xi)$ соответствующего расслоения на диски по расслоению на сферы (гомотопический тип получающегося пространства не зависит от выбора метрики в расслоении ξ). При этом $Th(\xi)$ является гомотопическим кослоем сферического расслоения $S(\xi) \to X$, а также вложения $E(\xi) \setminus X \hookrightarrow E(\xi)$, где $X \hookrightarrow E(\xi)$ — вложение нулевого сечения в тотальное пространство расслоения ξ. Эквивалентно можно сказать, что $Th(\xi)$ есть факторпространство $\widetilde{S}(\xi)/X_\infty$, где $\widetilde{S}(\xi)$ — индуцированное расслоение на n-мерные сферы, полученное компактификацией каждого слоя, а X_∞ — образ сечения добавленных «бесконечно удалённых» точек.

Имеет место гомеоморфизм $Th(\xi \times \eta) = Th(\xi) \wedge Th(\eta)$. В частности, $Th(\xi \oplus \mathbb{R}) = \Sigma Th(\xi)$.

Кроме того, морфизму расслоений $\xi \to \eta$ соответствует отображение пространств Тома $Th(\xi) \to Th(\eta)$. В частности, любому отображению баз $f\colon X \to Y$ соответствует отображение

$Th(f^*(\xi)) \to Th(\xi)$. Кроме того, для каждой точки $x \in X$ мы имеем вложенную сферу $S^n_x \subset Th(\xi)$.

Вещественное векторное расслоение ξ ранга n называется *ориентируемым* относительно кольцевой теории когомологий E^*, если существует такой класс $u^E(\xi) \in \widetilde{E}^n(Th(\xi))$, называемый *классом Тома*, что для любой точки $x \in X$ его ограничение $u^E(\xi)|_{S^n_x}$ является образом $1 \in \widetilde{E}^0(S^0)$ при изоморфизме надстройки. В таком случае имеют место *изоморфизмы Тома*

$$\varphi^*_{u^E(\xi)}\colon E^*(X) \xrightarrow{\sim} \widetilde{E}^{*+n}(Th(\xi)),$$

$$\varphi_*^{u^E(\xi)}\colon \widetilde{E}_*(Th(\xi)) \xrightarrow{\sim} \widetilde{E}_{*-n}(X).$$

Это изоморфизмы $\pi_*(E)$-модулей.

Кольцевая теория когомологий E^* называется *комплексно-ориентированной*, если все комплексные расслоения снабжены согласованными мультипликативными классами Тома в этой теории, где согласованность и мультипликативность означают соответственно, что $u^E(f^*(\xi)) = f^*(u^E(\xi))$ и $u^E(\xi \oplus \eta) = u^E(\xi)u^E(\eta)$. Тогда в такой теории определены *классы Чженя* c_i^E, удовлетворяющие обычным аксиомам. Из принципа расщепления следует, что для комплексной ориентации теории достаточно определить класс Тома одномерного универсального (тавтологического) расслоения η^1 над $\mathbb{C}P^\infty$. Такой класс $u^E \in \widetilde{E}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ должен удовлетворять условию $u^E|_{\mathbb{C}P^1} = \Sigma^2 1$. Его обычно и называют *комплексной ориентацией* теории E^*. По определению тогда $u^E = c_1^E(\overline{\eta^1})$.

Для комплексно ориентированной теории имеет место равенство $E^*(\mathbb{C}P^\infty) = E^*(pt)[[u]]$, где u — выбранная комплексная ориентация. Тогда любая другая комплексная ориентация имеет вид $\widetilde{u} = u + \ldots \in \widetilde{E}^2(\mathbb{C}P^\infty)$. Кроме того, $E^*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) = E^*(pt)[[u, v]]$. Тогда если обозначить через $m\colon \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \to \mathbb{C}P^\infty$ умножение в $\mathbb{C}P^\infty$, классифицирующее тензорное произведение одномерных комплексных расслоений, то мы получаем формальный ряд от двух переменных $m^*(u) = F_{E,u}(u, v) \in E^*(pt)[[u, v]]$. Этот ряд обладает следующими свойствами:

$$F_{E,u}(0, v) = v, \quad F_{E,u}(u, 0) = u,$$

$$F_{E,u}(F_{E,u}(u, v), w) = F_{E,u}(u, F_{E,u}(v, w)),$$

$$F_{E,u}(u, v) = F_{E,u}(v, u).$$

Такие формальные ряды называются *(одномерными коммутативными) формальными группами.* В частности, рассматриваемый ряд имеет вид $F_{E,u} = u + v + \sum_{i,j>0} a_{ij}u^i v^j$. По определению

$$c_1^E(\xi \otimes \eta) = F_{E,u}(c_1^E(\xi), c_1^E(\eta)).$$

Формальная группа зависит от выбранной ориентации, но если $\widetilde{u} = g(u) = u + \ldots \in E^*(pt)[[u]]$, то

$$F_{E,\widetilde{u}}(u, v) = g(F_{E,u}(g^{-1}(u), g^{-1}(v))),$$

где $g^{-1}(u)$ — функционально обратный ряд к $g(u)$, существующий поскольку $g(u)$ начинается с u. В таком случае говорят, что формальные группы *(строго) изоморфны*, а $g(u)$ — *(строгий) изоморфизм* $F_{E,u} \xrightarrow{\sim} F_{E,\widetilde{u}}$.

Если $f\colon E \to F$ — кольцевой морфизм между кольцевыми спектрами и u^E — комплексная ориентация для E, то $f(u^E)$ — комплексная ориентация для F. При этом если $F_{E,u^E}(u, v) = u + v + \sum_{i,j>0} a_{ij}u^i v^j$, то

$$F_{F,f(u^E)} = f_*(F_{E,u^E}(u, v)) = u + v + \sum_{i,j>0} f_*(a_{ij})u^i v^j,$$

где f_* — действие f на когомологиях точки $E^*(pt) \to F^*(pt)$.

Вообще если $f\colon R_1 \to R_2$ — гомоморфизм колец и $F_1(u, v)$ — формальная группа над R_1, то действием f на её коэффициенты мы получаем формальную группу $f_*(F_2)$ над R_2. Имеет место следующая теорема

Теорема 1.1.1 (Лазара, [36]). *Существуют градуированное кольцо L^* и формальная группа $F_L = \sum \alpha_{ij}u^i v^j$ над ним, такие, что для любой формальной группы F над любым кольцом R существует единственный гомоморфизм $f\colon L \to R$ такой, что $f_*(F_L) = F$. При этом кольцо L^* изоморфно $\mathbb{Z}[a_1, a_2, \ldots]$ с градуировкой $\deg a_i = -2i$.*

Универсальное кольцо L^* называется *кольцом Лазара*. Заметим, что $\deg \alpha_{ij} = 2 - 2i - 2j$. Формальные группы $u + v + \sum a_{ij}u^i v^j$ над градуированными кольцами, удовлетворяющие $\deg a_{ij} = 2 - 2i - 2j$ называются *градуированными*. Легко видеть, что кольцо Лазара порождается коэффициентами универсальной формальной группы F_L. Гомоморфизм $f\colon L^* \to R$, соответствующий формальной группе F над R, называется *классифицирующим* формальную группу F.

Если расслоения ξ и $\xi \oplus \eta$ ориентируемы в теории E^*, то ориентируемо и расслоение η. Так как тривиальные расслоения ориентируемы в любой теории, отсюда следует, что в комплексно ориентированной теории ориентируемыми будут и стабильно комплексные расслоения (см. определение в следующем разделе). Отсюда также следует равносильность ориентируемости (стабильных) касательного и нормального расслоений многообразий.

Если (стабильное) касательное расслоение n-мерного многообразия M ориентируемо в теории E^*, то говорят, что само многообразие ориентируемо в теории E^*. В этом случае определён *фундаментальный класс* $[M]_E \in E_n(M)$ и имеет место изоморфизм *двойственности Пуанкаре–Атья* $D_E\colon E^*(M) \xrightarrow[\simeq]{\cap [M]_E} E_{n-*}(M)$.

Более подробно об этих конструкциях и их геометрических интерпретациях в случае теории комплексных кобордизмов написано в следующем разделе.

1.2 Комплексные бордизмы

1.2.1 Определения и основные свойства

В этом разделе мы кратко изложим основные определения и конструкции теории комплексных бордизмов (также известных как *унитарные бордизмы* или *U-бордизмы*). Более подробное изложение можно найти в [32], [21], [8], [30] и [20]. Все многообразия далее подразумеваются гладкими, компактными и без края (если не оговорено противное).

Обозначим через η^n универсальное (тавтологическое) комплексное n-мерное векторное расслоение над бесконечномерным грассманианом $BU(n)$. Пусть ζ — вещественное $2n$-мерное векторное расслоение над клеточным пространством X. *Комплексную структуру* на ζ можно определить одним из следующих эквивалентных способов:

(1) как класс эквивалентности изоморфизмов вещественных векторных расслоений $\zeta \to \xi$, где ξ – комплексное n-мерное расслоение над пространством X, и два таких изоморфизма считаются эквивалентными, если один получается из другого с помощью композиции с изоморфизмом комплексных расслоений;

(2) как гомотопический класс отображений вещественных $2n$-мерных векторных расслоений $\zeta \to \eta_n$, являющихся изоморфизмами на каждом слое;

(3) как гомотопический класс поднятий отображения $X \to BO(2n)$, классифицирующего расслоение ζ, до отображения $X \to BU(n)$.

Стабильно комплексная структура (также *унитарная структура* или *U-структура*) на многообразии расслоении ζ — это класс эквивалентности комплексных структур на стабилизации расслоения ζ, то есть, класс эквивалентности изоморфизмов вещественных векторных расслоений

$$c_\zeta\colon \zeta \oplus \mathbb{R}^k \xrightarrow{\cong} \xi, \tag{1.2.1}$$

где ξ — комплексное векторное расслоение, и $\mathbb{R}^k$ обозначает тривиальное вещественное k-мерное расслоение на X. Две такие комплексные структуры *эквивалентны*, если они отличаются на изоморфизм комплексных расслоений и прибавление тривиального комплексного слагаемого $\mathbb{C}^m$. Изоморфизм (1.2.1) определяет поднятие отображения $X \to BO(2l)$, классифицирующего расслоение $\zeta \oplus \mathbb{R}^k$, до отображения $X \to BU(l)$; здесь $2l = \dim_{\mathbb{R}} \xi = \dim_{\mathbb{R}} \zeta + k$. Композиция $c_{\mathcal{T}}$ с изоморфизмом комплексных расслоений не меняет гомотопический класс поднятия, а прибавление тривиального комплексного слагаемого $\mathbb{C}^m$ к (1.2.1) приводит к композиции поднятия с каноническим отображением $BU(l) \to BU(l+m)$. Следовательно, стабильно комплексные структуры на расслоении ζ находятся в естественном биективном соответствии с гомотопическими классами поднятий классифицирующего отображения $X \to BO$ до отображения $X \to BU$.

В частности, понятие стабильно комплексной структуры имеет смысл для стабильных расслоений $X \to BO$, для которых это по определению просто гомотопический класс поднятия $X \to BU$.

Стабильно комплексной структурой на многообразии M^n (возможно, с краем) называется стабильно комплексная структура на касательном расслоении $\mathcal{T}M$, то есть, класс эквивалентности изоморфизмов

$$c_{\mathcal{T}M}\colon \mathcal{T}M \oplus \mathbb{R}^k \xrightarrow{\cong} \xi, \tag{1.2.2}$$

Замечание 1. Вместо того, чтобы определять стабильно комплексную структуру на M как класс эквивалентности изоморфизмов (1.2.2), можно определить её, фиксировав единственный изоморфизм для достаточно большого k. Это следует из того, что прибавление тривиального комплексного слагаемого индуцирует взаимно однозначное соответствие между комплексными структурами на расслоениях $\mathcal{T}M \oplus \mathbb{R}^k$ для разных k при $k \geqslant 2$, см. [32, теорема 2.3].

Замечание 2. Вместо того, чтобы определять стабильно комплексную структуру на M через стабильное касательное расслоение, можно определить её через стабильное нормальное расслоение. Если рассмотреть вложение $M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$, то класс изоморфизма нормального расслоения $\nu(M)$ не будет зависеть от вложения при больших N (так как при больших N любые два вложения будут изотопны, см., например, [33]). Тогда при дальнейшем увеличении N к нормальному расслоению просто будет прибавляться тривиальное слагаемое. В таком случае стабильно комплексную структуру на M можно определить как комплексную структуру на стабильном нормальном расслоении, с точностью до той же эквивалентности, что описана выше для касательной структуры. Такие стабильно комплексные структуры находятся в естественной биекции с «касательными», так как имеет место равенство между стабильными расслоениями $\nu(M) = -\mathcal{T}M$, как гомотопическими классами отображений $M \to BO$ (на классифицирующих пространствах есть структура H-групп и отображение $BU \to BO$ согласовано с ними).

Стабильно комплексное многообразие (также *унитарное многообразие* или *U-многообразие*) — это пара $(M, c_{\mathcal{T}M})$, состоящая из многообразия и стабильно комплексной структуры на нём.

Комплексные (ко)бордизмы — это обобщённая теория (ко)гомологий, возникающая из U-многообразий. Она может быть определена как геометрически, так и гомотопически.

В геометрическом подходе группа бордизмов $U_n(X)$ определяются как множество классов бордизмов непрерывных отображений $M \to X$, где M — n-мерное U-многообразие. Подробнее геометрический подход описан в [32, §1] (см. также [30, приложение D], [20, Глава 12] и [21, Глава II]). Мы здесь кратко напомним ключевые моменты.

Конструкция 1.2.1 (геометрические U-бордизмы)**.** Говорят, что стабильно комплексное многообразие M *бордантно нулю*, если существует такое стабильно комплексное многообразие с краем W, что $\partial W = M$, причем стабильно комплексная структура на многообразии M совпадает с индуцированной на крае многообразия W. Индуцированная стабильно комплексная структура на ∂W определяется с помощью изоморфизма $\mathcal{T}W|_{\partial W} \cong \mathcal{T}M \oplus \mathbb{R}$. Этот изоморфизм зависит от того, рассматриваем мы внутреннюю или внешнюю нормаль к подмногообразию M в W в качестве базиса для $\mathbb{R}$, и от того, ставим ли мы эту нормаль в начало или конец касательного репера к M. Мы будем использовать выбор, при котором внешняя нормаль ставится в конец репера. Тогда, используя стабильно комплексную структуру на многообразии W, с помощью изоморфизма

$$\mathcal{T}M \oplus \mathbb{R}^{k+1} \cong \mathcal{T}W|_{\partial W} \oplus \mathbb{R}^k \cong \xi$$

мы получаем стабильно комплексную структуру на крае $M = \partial W$.

Если бы мы выбрали внутреннюю нормаль вместо внешней, то получилась бы другая стабильно комплексная структура на $M = \partial W$. А именно, если $c_{\mathcal{T}M}\colon \mathcal{T}M \oplus \mathbb{R}^{k+1} \xrightarrow{\cong} \xi$ — стабильно комплексная структура на M, описанная выше, то несложно видеть, что стабильно комплексная структура, получающаяся с помощью внутренней нормали, эквивалентна следующей:

$$\mathcal{T}M \oplus \mathbb{R}^{k+1} \oplus \mathbb{C} \xrightarrow{c_{\mathcal{T}M} \oplus \tau} \xi \oplus \mathbb{C} \tag{1.2.3}$$

где $\tau\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — комплексное сопряжение.

Для произвольного стабильно комплексного многообразия $(M, c_{\mathcal{T}M})$ мы будем называть стабильно комплексную структуру (1.2.3) *противоположной* к структуре $c_{\mathcal{T}M}$ и обозначать её через $-c_{\mathcal{T}M}$. Если структура $c_{\mathcal{T}M}$ ясна из контекста, мы будем писать M вместо $(M, c_{\mathcal{T}M})$ и $-M$ вместо $(M, -c_{\mathcal{T}M})$.

Для фиксированного неотрицательного целого числа n и топологической пары (X, A) рассмотрим пары (M, f), состоящие из компактного n-мерного U-многообразия с краем M и непрерывного отображения пар $f\colon (M, \partial M) \to (X, A)$. Скажем, что такая пара (M, f) *бордантна нулю*, если существуют компактное $(n+1)$-мерное U-многообразие W с краем и непрерывное отображение $F\colon W \to X$, такие, что

(a) M является регулярным подмногообразием в ∂W, и U-структура на M совпадает с ограничением U-структуры на ∂W;

(b) $F|_M = f$ и $F(\partial W \setminus M) \subset A$.

Пары (M_1, f_1) и (M_2, f_2) называются *бордантными*, если дизъюнктное объединение $(M_1, f_1) \sqcup (-M_2, f_2)$ бордантно нулю. Бордантность является отношением эквивалентности: рефлексивность следует из существования такой стабильно комплексной структуры на цилиндре $M \times I$, что $\partial(M \times I) = M \sqcup (-M)$, а при доказательстве транзитивности используется склеивание многообразий и сглаживание углов. Классы эквивалентности мы далее будем называть *классами бордизмов*.

Обозначим через $[M, f]$ или просто через $[M]$ класс бордизмов пары (M, f). По отношению к операции дизъюнктного объединения классы бордизмов $[M, f]$ образуют абелеву группу (обратным элементом к классу $[M]$ служит класс $[-M]$), которую мы пока обозначим $U_n(X, A)$, и будем называть (геометрической) *группой унитарных* (или *комплексных*) *бордизмов* пары (X, A). Геометрические U-бордизмы — это обобщённая теория гомологий, удовлетворяющая всем аксиомам Стинрода–Эйленберга, за исключением аксиомы размерности.

Гомотопический подход к определению комплексных (ко)бордизмов основывается на понятии *спектра Тома* MU, которое мы также кратко напомним.

Конструкция 1.2.2 (гомотопические U-бордизмы)**.** Обозначим через $MU(n)$ пространство Тома универсального комплексного n-мерного векторного расслоения η^n над $BU(n)$. *Спектр Тома* $MU = (Y_0, Y_1, \ldots)$ состоит из пространств $Y_{2k} = MU(k)$, $Y_{2k+1} = \Sigma Y_{2k}$ со следующими структурными отображениями: $\Sigma Y_{2k} \to Y_{2k+1}$ — тождественное, а $\Sigma Y_{2k+1} \to Y_{2k+2}$ — отображение пространств Тома $\Sigma^2 MU(k) = S^2 \wedge MU(k) \to MU(k+1)$, соответствующее отображению расслоений $\eta^k \oplus \mathbb{C} \to \eta^{k+1}$, классифицирующему $\eta^k \oplus \mathbb{C}$ (и индуцированному естественным вложением $BU(k) \to BU(k+1)$). Спектр MU определяет обобщённую теорию (ко)гомологий, известную как (гомотопические) *унитарные (ко)бордизмы*. Соответствующие группы бордизмов клеточной пары (X, A) равны по определению

$$MU_n(X, A) = \lim_{k \to \infty} \pi_{2k+n}\bigl((X/A) \wedge MU(k)\bigr), \tag{1.2.4}$$

а для конечной клеточной пары её группы кобордизмов равны

$$MU^n(X, A) = \lim_{k \to \infty} \bigl[\Sigma^{2k-n}(X/A), MU(k)\bigr]. \tag{1.2.5}$$

Неприведённые группы бордизмов пространства X тогда определяются как $MU_n(X) := MU_n(X, \varnothing)$. Заметим, что пунктированное пространство $X/\varnothing$ представляет собой дизъюнктное объединение X_+ пространства X и добавленной отмеченной точки. Из $(2k-1)$-связности пространства $MU(k)$ следует, что для конечной клеточной пары (X, A) группа бордизмов $MU_n(X, A)$ изоморфна $\pi_{2N+n}((X/A) \wedge MU(N))$ для достаточно большого N, и аналогично для $MU^n(X, A)$.

По определению группы гомотопических бордизмов и кобордизмов точки удовлетворяют равенству

$$MU_n(pt) = MU^{-n}(pt) = \pi_{2N+n}(MU(N))$$

для достаточно большого N, и $MU_n(pt) = 0$ для $n < 0$.

Эквивалентность геометрического и гомотопического подходов к определению комплексных бордизмов устанавливается следующим результатом Коннера и Флойда.

Теорема 1.2.3 ([32, (3.1)]). *Обобщённые теории гомологий $MU_*(\cdot)$ и $U_*(\cdot)$ изоморфны на категории клеточных пар и непрерывных отображений.*

Идея доказательства. Доказательство следует подходу Тома [48], использованному им в случае ориентированных бордизмов (см. также [31, Chapter 1]). Сначала определяется естественное преобразование теорий гомологий $\varphi_*\colon U_*(X,A) \to MU_*(X,A)$ между теориями гомологий, а затем доказывается, что оно индуцирует изоморфизм на гомологиях точки.

Очевидно, достаточно определить преобразование $\varphi_*\colon U_*(X) \to MU_*(X)$ только в абсолютном случае, так как на относительный случай сводится к абсолютному переходом к факторпространству.

Возьмём геометрический класс бордизмов $[M,f] \in U_n(X)$, представленный непрерывным отображением $f\colon M \to X$ из U-многообразия M. Вложим M в евклидово пространство $\mathbb{R}^{n+2k}$ и обозначим через ν нормальное расслоение этого вложения: $\mathcal{T}M \oplus \nu \cong \mathbb{R}^{n+2k}$. Как было отмечено выше в Замечании 2 для достаточно большого k мы можем перевести стабильно комплексную структуру на многообразии M в комплексную структуру на нормальном расслоении ν.

Отображение Понтрягина–Тома

$$S^{2k+n} \to Th(\nu)$$

отождествляет замкнутую трубчатую окрестность многообразия M в $\mathbb{R}^{2k+n} \subset S^{2k+n}$ с тотальным пространством $D(\nu)$ расслоения на диски, ассоциированного с ν, и отображает замыкание дополнения до этой трубчатой окрестности в отмеченную точку пространства Тома $Th(\nu) = D(\nu)/S(\nu)$.

Определим теперь отображение $D(\nu) \to X \times D(\eta^k)$, первая компонента которого является композицией $D(\nu) \longrightarrow M \xrightarrow{f} X$, а вторая компонента — отображение расслоений на диски, соответствующее классифицирующему отображению $\nu \to \eta^k$ для определённой выше комплексной структуры на расслоении ν. Аналогично поступая с расслоениями на сферы, мы получаем отображение пар

$$\big(D(\nu), S(\nu)\big) \to \big(X \times D(\eta^k), X \times S(\eta^k)\big)$$

и, следовательно, отображение пространств Тома

$$Th(\nu) \to (X_+) \wedge MU(k).$$

Взяв композицию с отображением Понтрягина–Тома, мы получим отображение $S^{2k+n} \to (X/\varnothing) \wedge MU(k)$, представляющее гомотопический класс бордизмов в группе $MU_n(X)$, см. (1.2.4). Нужно только проверить, что отображения, получающиеся из бордантных пар (M,f), гомотопны, и следовательно, мы получаем корректно определённое естественное преобразование $\varphi_*\colon U_*(\cdot) \to MU_*(\cdot)$.

Чтобы показать, что $\varphi_*\colon U_*(pt) \to MU_*(pt)$ является изоморфизмом, строится обратное отображение $MU_*(pt) \to U_*(pt)$. Возьмём гомотопический класс отображений $g\colon S^{2k+n} \to MU(k)$, представляющий элемент гомотопической группы бордизмов $MU_n(pt)$. Меняя, если необходимо, g внутри его гомотопического класса, мы можем считать, что g гладко и трансверсально вдоль нулевого сечения $BU(k) \subset MU(k)$. Тогда прообраз $M := g^{-1}(BU(k))$ является n-мерным подмногообразием в S^{2k+n}. При этом нормальное расслоение ν подмногообразия M в S^{2k+n} индуцируется из нормального расслоения $BU(k)$ в $MU(k)$, то есть из η^k. Следовательно, мы получаем комплексную структуру на нормальном расслоении ν, которая, как было указано выше, определяет некоторую стабильно комплексную структуру на многообразии M. Получившийся геометрический класс бордизмов $[M] \in U_n(pt)$ и определяет искомое обратное отображение к φ. $\square$

Далее мы будем обозначать как геометрические, так и гомотопические группы унитарных бордизмов через $MU_*(\cdot)$. При этом группы коэффициентов мы будем обозначать, следуя геометрической традиции, через $\varOmega_n^U := MU_n(pt)$ и $\varOmega_U^n := MU^n(pt)$.

Конструкция 1.2.4 (геометрические U-кобордизмы)**.** Для (компактного, но, возможно, с краем) многообразия M классы кобордизмов $MU^*(M)$ можно описать следующим геометрическим образом (см. [43] и [30, Construction D.3.2]). Класс кобордизмов $x \in MU^n(M)$ соответствует *комплексно-ориентированному отображению* $N \to M$ *коразмерности* n, то есть, $N \hookrightarrow M \times \mathbb{R}^{2k-n} \xrightarrow{pr_1} M$, где N — замкнутое многообразие, $\dim N = \dim M - n$, в частности, $\operatorname{codim}_{M\times\mathbb{R}^{2k-n}} N = 2k$ и задана комплексная структура на нормальном расслоении к N (заметим, что n здесь может быть отрицательным). Опять же рассматриваются такие отображения с точностью до комплексной стабилизации и бордизма. Заметим, что в силу компактности M можно рассматривать вложения $N \hookrightarrow E(\xi)$ с комплексным нормальным расслоением в произвольные векторные расслоения над M. Соответствие между гомотопическим и геометрическим описанием кобордизмов устанавливается следующим образом. Для элемента $x \in MU^n(M)$, заданного гомотопическим классом отображений $\Sigma^{2k-n}M_+ = Th(M\times\mathbb{R}^{2k-n}) \to MU(k)$, выберем в этом классе отображение g, трансверсальное нулевому сечению $BU(k) \subset MU(k)$, и рассмотрим $N = g^{-1}(BU(k))$. Обратно для комплексно ориентированного отображения $N \hookrightarrow M \times \mathbb{R}^{2k-n} \to M$ конструкция Понтрягина–Тома даёт отображение $Th(M \times \mathbb{R}^{2k-n}) = \Sigma^{2k-n}M_+ \to Th(\nu(N)) \to MU(k)$. В частности, для многообразия M его подмногообразия коразмерности n со стабильно комплексной структурой в нормальном расслоении (эквивалентно, в касательном) представляют классы кобордизмов из $MU^n(M)$ (для $n > 0$). Для отрицательных $n < 0$ элементы $MU^n(M)$ представляют, например, расслоения $X \to M$ со слоями размерности $-n$ со стабильно комплексной структурой в касательном расслоении вдоль слоёв. При этом если $f\colon M \to K$ — гладкое отображение, а элемент $x \in MU^n(K)$ представлен комплексно-ориентированным отображением $N \subset K \times \mathbb{R}^{2k-n} \to K$, то $f^*(x) \in MU^n(M)$ представляется отображением $N \times_K M \to M$, где $N \times_K M \subset M \times \mathbb{R}^{2k-n}$ — прообраз N при отображении $f \times \mathrm{id}\colon M \times \mathbb{R}^{2k-n} \to K \times \mathbb{R}^{2k-n}$ (надо сперва гомотопировать отображение f так, чтобы $f \times \mathrm{id}$ стало трансверсально N). Если $N \to K$ — расслоение со стабильно комплексной структурой вдоль слоёв, то $N \times_K M \to M$ — просто индуцированное расслоение. Если $N \subset K$ — подмногообразие со стабильно комплексной структурой в нормальном расслоении, то $N \times_K M = f^{-1}(N) \subset M$.

Замечание 3. Заметим, что любой конечный клеточный комплекс гомотопически эквивалентен компактному многообразию с краем (для этого достаточно рассмотреть замкнутую ε-окрестность регулярного вложения данного комплекса в евклидово пространство). Таким образом, данное выше геометрическое описание групп $MU^*(M)$ для компактных многообразий M фактически даёт геометрическое описание групп $MU^*(X)$ для любых конечных клеточных комплексов X.

Замечание 4. В случае некомпактного многообразия M имеется аналогичная конструкция, в которой только вместо компактности N нужно требовать собственность отображения $N \to M$.

Конструкция 1.2.5 (произведения)**.** Для прямого произведения расслоений $\eta^m \times \eta^n$ существует соответствующее классифицирующее отображение $BU(m) \times BU(n) \to BU(m+n)$ (единственное с точностью до гомотопии) и отображение расслоений $\eta^m \times \eta^n \to \eta^{m+n}$. Последнее индуцирует отображение пространств Тома

$$MU(m) \wedge MU(n) \to MU(n+m),$$

которое ассоциативно и коммутативно с точностью до гомотопии. Эти отображения задают умножение $MU \wedge MU \to MU$. Кроме того, тривиальное k-мерное комплексное расслоение над точкой задаёт отображение пространств Тома $S^{2k} \to MU(k)$ и спектров $S \to MU$. Вместе с умножением это превращает MU в коммутативный кольцевой спектр. В частности, определено умножение в комплексных (ко)бордизмах, превращающее их в мультипликативную теорию (ко)гомологий. В частности, для любого пространства X существуют каноническое спаривание (*произведение Кронекера*)

$$\langle\ ,\ \rangle\colon MU^m(X) \otimes MU_n(X) \to \varOmega^{MU}_{n-m},$$

$\cap$-*произведение*

$$\cap\colon MU^m(X) \otimes MU_n(X) \to MU_{n-m}(X),$$

и $\cup$-*произведение* (или просто *произведение*)

$$\cup\colon MU^m(X)\otimes MU^n(X)\to MU^{m+n}(X),$$

определяемые следующим образом. Рассмотрим класс кобордизмов $x\in MU^m(X)$, представленный отображением $\Sigma^{2s-m}X_+\to MU(s)$, и класс бордизмов $\alpha\in MU_n(X)$, представленный отображением $S^{2k+n}\to X_+\wedge MU(k)$. Тогда $\langle x,\alpha\rangle\in\Omega^U_{n-m}$ представляется композицией

$$S^{2k+2s+n-m}\xrightarrow{\Sigma^{2s-m}\alpha}\Sigma^{2s-m}X_+\wedge MU(k)\xrightarrow{x\wedge\mathrm{id}}MU(s)\wedge MU(k)\to MU(l+k)$$

Если $\varDelta\colon X_+\to(X\times X)_+=X_+\wedge X_+$ — диагональное отображение, то $x\cap\alpha\in MU_{n-m}(X)$ представляется композицией отображений

$$\begin{aligned}S^{2k+2s+n-m}&\xrightarrow{\Sigma^{2s-m}\alpha}\Sigma^{2s-m}X_+\wedge MU(k)\xrightarrow{\Sigma^{2s-m}\varDelta\wedge\mathrm{id}}X_+\wedge\Sigma^{2s-m}X_+\wedge MU(k)\\&\xrightarrow{\mathrm{id}\wedge x\wedge\mathrm{id}}X_+\wedge MU(s)\wedge MU(k)\to X_+\wedge MU(s+k)\end{aligned}$$

$\cup$-произведение определяется аналогично; оно превращает $MU^*(X)=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}MU^n(X)$ в градуированное коммутативное кольцо, называемое *кольцом комплексных кобордизмов пространства* X. Прямая сумма

$$\Omega_U^*:=MU^*(pt)=\bigoplus_n MU^n(pt)$$

часто называется просто *кольцом комплексных кобордизмов*. Оно градуировано неположительными целыми числами. Мы также будем использовать обозначение Ω_*^U для неотрицательно градуированного кольца $MU_*(pt)=\bigoplus_n MU_n(pt)$ — *кольца комплексных бордизмов*, где $MU_n(pt)=MU^{-n}(pt)$. Каждое кольцо $MU^*(X)$ является алгеброй над Ω_U^*, а каждая группа $MU_*(X)$ — модулем над Ω_*^U.

Геометрически $\cap$-произведение $x\cap\alpha\in MU_{n-m}(M)$ класса $x\in MU^m(M)$, заданного комплексно-ориентированным отображением $N\to M$ и класса $\alpha\in MU_n(M)$, заданного отображением $K\to M$, задаётся отображением $N\times_M K\to M$, где, как и в конструкции 1.2.4, $N\times_M K$ есть трансверсальный прообраз $N\subset M\times\mathbb{R}^{2k-m}$ в $K\times\mathbb{R}^{2k-m}$. В частности, из стабильно комплексной структуры на K и стабильно комплексной структуры на нормальном расслоении к N мы получаем стабильно комплексную структуру на $N\times_M K$. Забывая при этом отображение в M и рассматривая только само стабильно комплексное многообразие $N\times_M K$, мы получаем $\langle x,\,\alpha\rangle\in\Omega^U_{n-m}$.

Аналогично, $\cup$-произведение классов, заданных комплексно-ориентированными отображениями $N_1\to M$ и $N_2\to M$, задаётся отображением $N_1\times_M N_2\to M$. В частности, $\cup$-произведение классов кобордизмов, заданных подмногообразиями, задаётся их трансверсальным пересечение, а умножение в кольце $\Omega_U^*=\Omega^U_{-*}$ (когда $M=pt$) соответствует декартову произведению многообразий.

Стабильно комплексное n-многообразие M имеет *фундаментальный класс бордизмов* $[M]\in MU_n(M)$, который геометрически определяется как класс тождественного отображения $M\to M$. В этом случае определены изоморфизмы *двойственности Пуанкаре–Атья* [23], см. также [30, Construction D.3.4]:

$$D_U\colon MU^k(M)\xrightarrow{\cong}MU_{n-k}(M),\quad x\mapsto x\cap[M].$$

Геометрически этот изоморфизм фактически тавтологичен, то есть, переводит класс кобордизмов, заданный комплексно-ориентированным отображением $N\to M$ в класс бордизмов отображения $N\to M$ (в силу стабильной комплексной структуры на M комплексная структура на нормальном расслоении к $N\subset M\times\mathbb{R}^{2k-n}$ приводит к стабильно-комплексной структуре на N).

1.2.2 Структурные результаты

Мы имеем

$$H^*(BU(n);\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}[c_1,\dots,c_n],\quad \deg c_i=2i,$$

где c_i — универсальные характеристические классы Чженя. Для данного разбиения $\omega = (i_1, \ldots, i_k)$ числа $n = |\omega| = i_1 + \ldots + i_k$ на натуральные числа определим моном $c_\omega = c_{i_1} \cdots c_{i_k}$ степени $2|\omega|$ и соответствующий характеристический класс $c_\omega(\xi)$ комплексного n-мерного расслоения ξ. Соответствующее касательное *характеристическое число Чженя* стабильно касательного многообразия M определяется как

$$c_\omega[M] := \langle c_\omega(\mathcal{T}M), [M]_\mathbb{Z} \rangle.$$

Здесь $[M]_\mathbb{Z}$ — фундаментальный гомологический класс многообразия M, и $\mathcal{T}M$ рассматривается как комплексное расслоение благодаря изоморфизму (1.2.1). Мы часто будем писать $c_\omega(M)$ вместо $c_\omega(\mathcal{T}M)$ для стабильно комплексного многообразия M. Число $c_\omega[M]$ полагается равным нулю, если $2|\omega| \neq \dim M$. Важно отметить, что у комплексно бордантных многообразий числа Чженя равны, то есть, $c_\omega[M]$ зависит только от класса бордизма $[M]$, что отражается в обозначении.

Один важный характеристический класс — это класс s_n. Он определяется как многочлен от классов Чженя $c_1, \ldots, c_n$, который получается, если выразить симметрический многочлен $x_1^n + \cdots + x_n^n$ через элементарные симметрические многочлены $\sigma_i(x_1, \ldots, x_n)$, а затем заменить каждый σ_i на c_i. Определим соответствующее характеристическое число как

$$s_n[M] := \langle s_n(\mathcal{T}M), [M]_\mathbb{Z} \rangle.$$

Оно известно как *s-число* или *число Милнора* многообразия M.

Для каждого целого $i \geqslant 1$ положим

$$m_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i+1 \neq p^k \text{ ни для какого простого } p; \\ p, & \text{если } i+1 = p^k \text{ для некоторого простого } p \text{ и целого } k > 0. \end{cases} \tag{1.2.6}$$

Следующий фундаментальный результат Милнора и Новикова описывает структуру кольца Ω_*^U комплексных бордизмов точки.

Теорема 1.2.6 (Милнор [40], Новиков [14, 15])**.**

а) Кольцо комплексных бордизмов Ω_*^U является полиномиальным кольцом над $\mathbb{Z}$ с одной образующей в каждой положительной чётной размерности:

$$\Omega_*^U \cong \mathbb{Z}[a_i \colon i \geqslant 1], \quad \deg a_i = 2i.$$

б) Класс бордизмов стабильно комплексного многообразия M^{2i} может быть взят в качестве $2i$-мерной полиномиальной образующей a_i, если и только если

$$s_i[M^{2i}] = \pm m_i.$$

в) Два стабильно комплексных многообразия бордантны тогда и только тогда, когда у них равны все характеристические числа Чженя.

Изоморфизм колец $\Omega_*^U \cong \mathbb{Z}[a_i \colon i \geqslant 1]$, $\deg a_i = 2i$, был впервые доказан Новиковым [14] в 1960 году с помощью спектральной последовательности Адамса и структурной теории алгебр Хопфа. Более подробное изложение этого доказательства дано в [15]. Работа Милнора [40] содержала доказательство аддитивного изоморфизма (включающее отсутствие кручения в Ω_*^U и вычисление рангов); кольцевая структура Ω_*^U должна была войти во вторую часть [40], которая не была опубликована. Другое, геометрическое доказательство кольцевого изоморфизма было дано Стонгом в 1965 году и включено в его монографию [21].

Часть в) теоремы 1.2.6 можно переформулировать, сказав, что гомоморфизм вычисления универсальных характеристических чисел $e \colon \Omega_{2n}^U \to H_{2n}(BU)$ (сопоставляющий классу бордизмов $[M]$ класс гомологий $e[M] \in H_*(BU)$, такой, что $\langle c_\omega, x \rangle = c_\omega[M]$ для всех $c_\omega \in H^*(BU)$) является мономорфизмом в каждой размерности. Данный гомоморфизм (для характеристических чисел стабильных нормальных расслоений) совпадает с композицией

$$\Omega_{2n}^U = \pi_{2n}(MU) \longrightarrow H_{2n}(MU) \xrightarrow{\cong} H_{2n}(BU)$$

(стабильного) гомоморфизма Гуревича и (стабильного) изоморфизма Тома. Из результата Серра о конечности стабильных гомотопических групп сфер в положительных размерностях следует, что рациональный стабильный гомоморфизм Гуревича $\pi_*(E) \otimes \mathbb{Q} \to H_*(E) \otimes \mathbb{Q}$ является изоморфизмом для любого спектра E. Следовательно, инъективность отображения $e\colon \Omega^U_{2n} \to H_{2n}(BU)$ вытекает из отсутствия кручения в Ω^U_*.

1.2.3 Формальная группа комплексных кобордизмов

Теория комплексных кобордизмов обладает канонической комплексной ориентацией. Гомотопически она задаётся морфизмом $\Sigma^{-2}\mathbb{C}P^\infty \to MU$, соответствующим вложению нулевого сечения $\mathbb{C}P^\infty \hookrightarrow MU(1)$, что даёт требуемый элемент $x_{MU} \in \widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$.

При этом вложение $\mathbb{C}P^\infty \hookrightarrow MU(1)$ является гомотопической эквивалентностью. Это следует из того, что вложение $\mathbb{C}P^\infty \hookrightarrow D(\eta^1)$ в расслоение на диски для универсального расслоения над $\mathbb{C}P^\infty$, очевидно, является гомотопической эквивалентность. А с другой стороны, факторизация $D(\eta^1) \to MU(1)$ по расслоению на сферы $S(\eta^1)$ также является гомотопической эквивалентностью, так как пространство $S(\eta^1)$ есть S^∞, и следовательно, стягиваемо. Иными словами, можно считать, что каноническая ориентация $x_{MU} \in \widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ задаётся морфизмом $\Sigma^{-2}MU(1) \to MU$.

Геометрически эту комплексную ориентацию можно описать следующим образом. Как и для любой комплексно-ориентированной теории, мы имеем $\widetilde{MU}^*(\mathbb{C}P^\infty) = \varprojlim \widetilde{MU}^*(\mathbb{C}P^n)$. Следовательно, чтобы задать элемент $x_{MU} \in \widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$, необходимо и достаточно согласовано задать его ограничения на $\mathbb{C}P^n$. Геометрически $x_{MU}|_{\mathbb{C}P^n} \in \widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^n)$ задаётся классом кобордизмов произвольной гиперплоскости $\mathbb{C}P^{n-1} \subset \mathbb{C}P^n$ (как подмногообразия коразмерности 2 со стабильно комплексным нормальным расслоением). Это определение согласовано, так как ограничение класса $[\mathbb{C}P^{n-1} \subset \mathbb{C}P^n]$ гиперплоскости на гиперплоскость $\mathbb{C}P^{n-1} \subset \mathbb{C}P^n$ задаётся их трансверсальным пересечением, что также есть гиперплоскость $\mathbb{C}P^{n-2} \subset \mathbb{C}P^{n-1}$.

Наличие комплексной ориентации приводит к наличию классов Тома и изоморфизмов Тома для комплексных расслоений, а также к теории классов Чженя c_i^U в комплексных кобордизмах, удовлетворяющих обычным свойствам.

В частности, имеет место обычное равенство

$$MU^*(BU) = \Omega_U^*[[c_1^U, c_2^U, \ldots, c_i^U, \ldots]].$$

При этом, по определению, $c_1^U(\bar\eta^1) = x_{MU}$.

Комплексная ориентация также приводит к *формальной группе комплексных кобордизмов*

$$F_U(u,v)u + v + \sum_{i,j\geqslant 1} \alpha_{ij} u^i v^j \in \Omega_U^*[[u,v]].$$

Она даёт универсальную формулу для первого класса Чженя в кобордизмах от тензорного произведения одномерных комплексных расслоений: $c_1^U(\xi \otimes \zeta) = F_U(c_1^U(\xi), c_1^U(\zeta))$.

Формальная группа комплексных кобордизмов универсальна среди всех формальных групп в следующем смысле.

Теорема 1.2.7 ([42]). *Гомоморфизм $f\colon L^* \to \Omega_U^*$, классифицирующий формальную группу F_U, является изоморфизмом. То есть, сама формальная группа F_U является универсальной в смысле Лазара, и, следовательно, для любой формальной группы F над любым кольцом R существует единственный гомоморфизм $\psi\colon \Omega_U^* \to R$ такой, что $\psi_*(F_U) = F$.*

Сама теория комплексных кобордизмов также является универсальной комплексно ориентированной теорией в том смысле, что для любого спектра E комплексные ориентации теории E^* находятся в естественной биекции с кольцевыми морфизмами $MU \to E$. Кольцевой морфизм $f\colon MU \to E$ при этом соответствует ориентации $f(x_{MU}) \in \widetilde{E}^2(\mathbb{C}P^\infty)$. Обратно, если E^* комплексно ориентирована, то $[MU, E] = \varprojlim \widetilde{E}^{2n}(MU(n))$, и морфизм задаётся классами Тома универсальных расслоений $u^E(\eta^n) \in \widetilde{E}^{2n}(MU(n))$. На соответствующих теориях гомологий это преобразование $MU_*(X) \to E_*(X)$ переводит класс бордизмов $x \in MU_n(X)$, заданный отображением $f\colon M^n \to X$ в $f_*([M]_E) \in E_n(X)$, где $[M]_E \in E_n(M)$ — фундаментальный класс стабильно комплексного многообразия M в теории E_*.

Формальную группу комплексных кобордизмов можно описать несколько иначе. Для любого клеточного пространства X мы имеем изоморфизмы $H^2(X,\mathbb{Z}) \cong [X, \mathbb{C}P^\infty] \cong [X, MU(1)]$. Отсюда, беря композицию с $MU(1) \to \Sigma^2 MU$, мы получаем естественное отображение $H^2(X) \to MU^2(X)$. Оно инъективно, так как левым обратным к нему является естественное отображение $MU^2(X) \to H^2(X,\mathbb{Z})$, являющееся частью естественного преобразования $MU^*(-) \to H^*(-,\mathbb{Z})$, соответствующего стандартной комплексной ориентации теории целочисленных когомологий.

То есть, мы получаем подмножество $H^2(X,\mathbb{Z}) \subset MU^2(X)$. Заметим, что это подмножество, вообще говоря, не является аддитивной подгруппой и, в частности, вложение $H^2(X,\mathbb{Z}) \subset MU^2(X)$ не является гомоморфизмом абелевых групп. Так как сложение в $H^2(X,\mathbb{Z})$ задаётся как раз умножением в $\mathbb{C}P^\infty$, классифицирующим тензорное произведение линейных расслоений, то сложение элементов в $H^2(X,\mathbb{Z})$ в точности соответствует операции формальной группы комплексных кобордизмов в $MU^2(X)$, то есть, если $x, y \in H^2(X,\mathbb{Z})$ соответствуют элементам $u_x, u_y \in MU^2(X)$, то $x+y$ соответствует $u_{x+y} = F_U(u_x, u_y)$.

Если X является многообразием, то подмножество $H^2(X,\mathbb{Z}) \subset MU^2(X)$ в точности соответствует классам кобордизмов, задаваемым подмногообразиями в X коразмерности 2 с комплексным нормальным расслоением. Действительно, такое подмногообразие с нормальным расслоением ν, классифицирующимся отображением $\nu \to \eta^1$, соответствует отображению $X \to Th(\nu) \to Th(\eta^1) = MU(1)$, что представляет собой элемент подмножества $H^2(X,\mathbb{Z}) \subset MU^2(X)$. Обратно, если мы имеем класс кобордизмов, представленный отображением $f\colon X \to \mathbb{C}P^\infty$, то представляющее отображение f гомотопно отображению $g\colon X \to \mathbb{C}P^n$, трансверсальному гиперплоскости $\mathbb{C}P^{n-1} \subset \mathbb{C}P^n$, и мы получаем подмногообразие $g^{-1}(\mathbb{C}P^{n-1}) \subset X$. Иными словами, вложение $H^2(X,\mathbb{Z}) = [X, \mathbb{C}P^\infty] \hookrightarrow MU^2(X)$ отображает $f\colon X \to \mathbb{C}P^\infty$ в $f^*(x_{MU})$, а каноническая ориентация x_{MU} задаётся подмногообразиями с комплексными нормальными расслоениями. Тогда, согласно геометрической конструкции обратного образа, $f^*(x_{MU})$ также задаётся подмногообразием с комплексным нормальным расслоением.

Таким образом, формальная группа комплексных кобордизмов становится операцией на подмножестве кобордизмов, задаваемых подмногообразиями коразмерности 2. Такие кобордизмы называются *геометрическими*, а формальную группу поэтому иногда называют *формальной группой геометрических кобордизмов*. Она была введена Новиковым в [16, §5, Appendix 1]. Подробности данной конструкции можно найти в [8] и [30, Appendix E].

1.3 SU-бордизмы

Специальной унитарной структурой (*SU-структурой*) на многообразии M называется стабильно комплексная структура $c_{\mathcal{T}M}$, см. (1.2.2), вместе с выбором SU-структуры на комплексном векторном расслоении ξ (то есть, редукции структурной группы к специальной унитарной группе), рассматриваемая с точностью до SU-изоморфизмов и добавления тривиальных комплексных слагаемых (что не влияет на SU-структуру). Эквивалентно можно сказать, что SU-структура задаётся тривиализацией одномерного комплексного расслоения $\det\xi$. Так как это расслоение не зависит от прибавления тривиальных комплексных слагаемых к ξ, в дальнейшем мы будем обозначать это детерминантное расслоение через $\det \mathcal{T}M$.

Гомотопически, SU-структура задаётся гомотопическим классом поднятия отображения $M \to BU$, классифицирующего ξ, до отображения $M \to BSU$. Из рассмотрения расслоенной последовательности $S^1 \to BSU \to BU \to \mathbb{C}P^\infty$ следует, что стабильно комплексное многообразие $(M, c_{\mathcal{T}M})$ допускает SU-структуру тогда и только тогда, когда первый (целочисленный) класс Чженя расслоения ξ равен нулю: $c_1(\xi) = 0$, и разные SU-структуры на данной стабильно комплексной структуре находятся в биекции с $H^1(M;\mathbb{Z})$, в частности, такая SU-структура единственна, если $H^1(M;\mathbb{Z}) = 0$. *SU-многообразием* мы будем называть стабильно комплексное многообразие с фиксированной SU-структурой на нём. Часто, допуская некоторую вольность речи, мы будем называть SU-многообразием стабильно комплексное многообразие M, для которого $c_1(M) = 0$, имея в виду, что такое многообразие допускает некоторую SU-структуру.

Аналогично комплексным бордизмам существует обобщённая теория гомологий, получающаяся из многообразий с SU-структурой — теория SU-бордизмов. Как и в случае U-бордизмов, она может быть определена геометрически или гомотопически.

В геометрическом подходе группа бордизмов $MSU_n(X)$ определяется как множество классов бордизмов непрерывных отображений $M \to X$, где M — n-мерное SU-многообразие. Гомотопический подход основывается на спектре Тома MSU. Пусть $\widetilde{\eta}^n$ — универсальное (тавтологическое) комплексное n-мерное расслоение над $BSU(n)$. Пространство Тома расслоения $\widetilde{\eta}^n$ обозначается $MSU(n)$. Спектр Тома $MSU = (Z_0, Z_1, \dots)$ имеет $Z_{2k} = MSU(k)$ и $Z_{2k+1} = \Sigma Z_{2k}$ со структурными отображениями аналогичными случаю комплексных бордизмов. Тогда группы *SU-бордизмов* и *кобордизмов* клеточной пары (X, A) определяются как и для любого спектра

$$MSU_n(X,A) = \lim_{k\to\infty} \pi_{2k+n}\big((X/A) \wedge MSU(k)\big),$$

$$MSU^n(X,A) = [X/A, MSU]_{-n} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \big[\Sigma^{2k-n}(X/A), MSU(k)\big] \text{ для конечной пары } (X,A).$$

Таким образом, аналогично случаю U-бордизмов, получаем мультипликативную обобщённую теорию (ко)гомологий.

Кольцо SU-бордизмов определяется как $\Omega_*^{SU} = MSU_*(pt)$.

В отличие от Ω_*^U, кольцо Ω_*^{SU} имеет кручение. Первый элемент кручения появляется уже в размерности 1: из того, что пространство Тома $MSU(k)$ не имеет клеток в размерностях от $2k+1$ до $2k+3$, следует, что $\Omega_1^{SU} = \pi_1^s = \mathbb{Z}/2$. Образующая θ группы Ω_1^{SU} представляется окружностью с нетривиальным оснащением, индуцирующим нетривиальную SU-структуру.

Первым структурным результатом о кольце Ω_*^{SU} была теорема Новикова 1962 года, показывающая, что Ω_*^{SU} становится полиномиальным кольцом после обращения двойки (хотя само Ω_*^{SU} не является полиномиальным даже по модулю кручения). Напомним, что по теореме 1.2.6 класс бордизмов $[M^{2i}] \in \Omega_{2i}^U$ является полиномиальной образующей в Ω_*^U, если и только если $s_i[M^{2i}] = \pm m_i$, где числа m_i определены в (1.2.6). Более сложные условия делимости на s_i-число позволяют определить и полиномиальные образующие в кольце $\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$.

Теорема 1.3.1 (Новиков [15, Приложение 1])**.** *$\Omega_*^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ представляет собой полиномиальное кольцо с одной образующей в каждой чётной размерности $\geqslant 4$:*

$$\Omega_*^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] \cong \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}][y_i \colon i \geqslant 2], \quad \deg y_i = 2i.$$

Класс бордизмов SU-многообразия M^{2i} может быть взят в качестве $2i$-мерной образующей y_i, если и только если

$$s_i[M^{2i}] = \pm m_i m_{i-1} \quad \textit{с точностью до степени двойки.}$$

Заметим, что с точностью до степеней двойки мы имеем

$$m_i m_{i-1} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \neq p^k,\ i \neq p^k - 1 \text{ ни для какого нечётного простого } p, \\ p, & \text{если } i = p^k \text{ или } i = p^k - 1 \text{ для некоторого нечётного простого } p. \end{cases}$$

Подробное доказательство теоремы 1.3.1 методом спектральной последовательности Адамса (из оригинальной работы С. П. Новикова [15]) см. в [1]. Другое доказательство, более геометрическими методами, см. в [21, глава X].

Необходимость дополнительного условия делимости в размерностях $2i = 2p^k$ вытекает из следующего простого наблюдения.

Предложение 1.3.2. *Если M^{2n} является SU-многообразием размерности $2n = 2p^k$ для некоторого простого p, то*

$$s_n[M^{2n}] = 0 \mod p.$$

Доказательство. Для $n = p^k$ мы имеем

$$s_n(M^{2n}) = x_1^n + \dots + x_n^n \equiv (x_1 + \dots + x_n)^n = c_1^n(M^{2n}) = 0 \mod p \qquad \square$$

Как и в случае унитарных бордизмов, из теоремы 1.3.1 следует, что класс SU-бордизмов SU-многообразия определяется своими характеристическими числами с точностью до 2-примарного кручения. Как показали Андерсон, Браун и Петерсон [22], характеристические числа в KO-теории вместе с обычными характеристическими числами уже полностью определяют класс SU-бордизмов.

1.4 Операции в комплексных кобордизмах и спектральная последовательность Адамса–Новикова

(Стабильной) *операцией* θ степени n в комплексных кобордизмах называется семейство аддитивных отображений

$$\theta\colon MU^k(X,A) \to MU^{k+n}(X,A),$$

определённых для всех клеточных пар (X,A), которые функториальны по (X,A) и коммутируют с изоморфизмами надстройки. Как было отмечено в разделе 1.1.4, для теории комплексных кобордизмов множество так определённых когомологических операций совпадает с множеством эндоморфизмов $[MU, MU]_{-*} = MU^*(MU)$. Это множество образует кольцо по отношению к сложению и композиции, и более того, оно является левым модулем над кольцом Ω_U^* (элементу $a \in \Omega_U^*$ соответствует операция умножения на a). Заметим, однако, что $MU^*(MU)$ не является алгеброй над Ω_U^*, так как Ω_U^* не лежит в центре $MU^*(MU)$. Мы, однако, всё равно будем называть это кольцо алгеброй и обозначать A^U; оно было описано в работах Ландвебера [34] и Новикова [16, §5].

Конструкция 1.4.1 (операции и характеристические классы)**.** Мы имеем изоморфизм Ω_U^*-модулей

$$A^U \cong MU^*(MU) = \varprojlim MU^{*+2N}(MU(N)).$$

Для элемента $a \in MU^n(MU)$ из A^U, представленного морфизмом спектров $a\colon MU \to \Sigma^n MU$, мы обозначим соответствующую операцию через

$$a_X^*\colon MU^*(X) \to MU^{*+n}(X),$$

где X — клеточное пространство. Действие операции a_X^* описывается следующим образом. Для элемента $x \in MU^m(X)$, представленного отображением $x\colon X \to \Sigma^m MU$, элемент $a_X^*(x) \in MU^{m+n}(X)$ представляется композицией

$$X \xrightarrow{x} \Sigma^m MU \xrightarrow{\Sigma^m a} \Sigma^{m+n} MU.$$

Таким образом определяется левое действие алгебры A^U на группах кобордизмов пространства X, превращающее $MU^*(-)$ в функтор со значениями в категории градуированных левых A^U-модулей.

Также аналогично определяется действие

$$a_*^X\colon MU_*(X) \to MU_{*-n}(X)$$

алгебры A^U на группах бордизмов. Для элемента $x \in MU_m(X)$, представленного отображением $x\colon \Sigma^m S \to MU \wedge X$, элемент $a_*^X(x) \in MU_{m-n}(X)$ представляется композицией

$$\Sigma^{m-n} S \xrightarrow{\Sigma^{-n} x} \Sigma^{-n}(MU \wedge X) \xrightarrow{\Sigma^{-n}(1\wedge a)} MU \wedge X.$$

Рассмотрим изоморфизмы Тома универсальных комплексных расслоений η^N

$$\varphi_*^N\colon \widetilde{MU}_{n+2N}(MU(N)) \to MU_n(BU(N)), \quad \varphi_N^*\colon MU^n(BU(N)) \to \widetilde{MU}^{n+2N}(MU(N)).$$

Так как $MU_n(BU) = \varinjlim MU_{n+2N}(BU(N))$, $MU^n(BU) = \varprojlim MU^{n+2N}(BU(N))$, $MU_n(MU) = \varinjlim \widetilde{MU}_{n+2N}(MU(N))$ и $MU^n(MU) = \varprojlim \widetilde{MU}^{n+2N}(MU(N))$, мы также имеем стабильные изоморфизмы Тома

$$\varphi_*\colon MU_n(MU) \to MU_n(BU), \quad \varphi^*\colon MU^n(BU) \to MU^n(MU).$$

Отсюда следует, что каждый универсальный характеристический класс $\alpha \in MU^n(BU)$ определяет операцию $a = \varphi^*(\alpha) \in MU^n(MU)$, и наоборот.

Если $x \in MU_m(X)$ представляется сингулярным многообразием $M^m \xrightarrow{f} X$, то $a_*^X x$ можно геометрически описать следующим образом. Пусть $\alpha = (\varphi^*)^{-1}a$ — характеристический класс, соответствующий элементу a. Рассмотрим $\alpha(-\mathcal{T}M) \in MU^n(M^m)$, где $\mathcal{T}M$ — касательное расслоение, а $-\mathcal{T}M$ — стабильное нормальное расслоение многообразия M. Применяя оператор двойственности Пуанкаре–Атья $D_U\colon MU^n(M^m) \to MU_{m-n}(M^m)$, мы получаем элемент $D_U\alpha(-\mathcal{T}M) \in MU_{m-n}(M)$, представляемый сингулярным многообразием $Y_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} M$. Тогда $a_*^X x \in MU_{m-n}(X)$ представляется композицией $Y_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} M \xrightarrow{f} X$. То есть, словами можно сказать, что a_*^X переводит класс бордизмов $[M, f]$ в класс бордизмов подмногообразия, двойственного $\alpha(-\mathcal{T}M)$, где α — характеристический класс, соответствующий операции a.

Если $y \in MU^p(M^m)$, задаётся подмногообразием $N^{m-p} \subset M^m \times \mathbb{R}^{2k-p}$ со стабильно комплексным нормальным расслоением $\nu(N)$, то $a_X^* y$ описывается аналогично, но без необходимости пользоваться тавтологическим оператором двойственности Пуанкаре–Атья. А именно, если $\alpha = (\varphi^*)^{-1}a$ — характеристический класс, соответствующий элементу a, то $\alpha(\nu(N)) \in MU^n(N^{m-p})$ представляется подмногообразием $Z_\alpha^{m-n-p} \subset N \times \mathbb{R}^{2s-n}$. Тогда $a_*^X x \in MU^{p+n}(M^m)$ представляется композицией $Z_\alpha^{m-p-n} \subset N \times \mathbb{R}^{2s-n} \subset M \times \mathbb{R}^{2k+2s-n-p}$.

Кроме того, пусть ξ — комплексное расслоение над пространством X с классом Тома $u^{MU}(\xi) \in \widetilde{MU}^m(Th(\xi))$ и $\alpha \in MU^n(BU)$ — характеристический класс, соответствующий элементу $a \in MU^n(MU)$. Тогда $a_{Th(\xi)}^*(u^{MU}(\xi)) = \alpha(\xi)u^{MU}(\xi) \in \widetilde{MU}^{n+m}(Th(\xi))$, где используется естественная $MU^*(X)$-модульная структура на $\widetilde{MU}^*(Th(\xi))$. В частности, $a_{\mathbb{C}P^\infty}^*(u) = \alpha(\bar{\eta})u$.

Имеется изоморфизм левых $\varOmega_U^*$-модулей

$$A^U = MU^*(MU) \cong \varOmega_U^* \mathbin{\widehat{\otimes}} S,$$

где $\widehat{\otimes}$ — пополненное тензорное произведение, а S — *алгебра Ландвебера-Новикова*, порождённая операциями $S_\omega = \varphi^*(s_\omega^U)$, соответствующими универсальным характеристическим классам $s_\omega^U \in MU^*(BU)$, которые получаются из симметризации мономов $t_1^{i_1} \cdots t_k^{i_k}$, индексированных разбиениями $\omega = (i_1, \ldots, i_k)$. Следовательно, каждый элемент $a \in A^U$ может быть единственным образом записан в виде бесконечного ряда $a = \sum_\omega \lambda_\omega S_\omega$, где $\lambda_\omega \in \varOmega_U^*$. Структура алгебры Хопфа на S описана в [34] и [16, §5].

Таким образом, в случае $X = pt$ мы имеем представления алгебры A^U на $\varOmega_U^* = MU^*(pt)$ и $\varOmega_*^U = MU_*(pt)$. В отличие от обычных (ко)гомологий верна следующая

Лемма 1.4.2 (см. [16, лемма 3.1 и лемма 5.2])**.** *Представления алгебры A^U на $\varOmega_U^* = MU^*(pt)$ и $\varOmega_*^U = MU_*(pt)$ точны.*

Замечание 5. Более общо, для двух спектров конечного типа E и F естественный гомоморфизм $F^*(E) \to \operatorname{Hom}^*(\pi_*(E), \pi_*(F))$ инъективен, если $\pi_*(F)$ и $H_*(E)$ не имеют кручения (см. лемму 2.1.4).

В дальнейшем мы обычно не будем делать различий в обозначении операции a и её действия на (ко)гомологиях пространства X, лишь иногда обозначая действие на (ко)гомологиях точки (т.е. гомотопических группах) через a_*.

Кроме представления алгебры A^U на бордизмах $MU_*(X)$ любого пространства X определим ещё одно представление алгебры A^U на $MU_*(BU)$ следующим образом.

Конструкция 1.4.3 (представление $\widetilde{a}$ алгебры A^U на $MU_*(BU)$, [16, §5])**.** Рассмотрим гомотопическую автоэквивалентность $\sigma\colon BU \times BU \to BU \times BU$, $(x, y) \mapsto (x - y, y)$. Так как композиция $m\sigma\colon BU \times BU \to BU \times BU \xrightarrow{+} BU$ совпадает с проекцией $pr_1\colon BU \times BU \to BU$, при автоэквивалентности σ из расслоения $\xi \times \xi = m^*(\xi)$ индуцируется расслоение $\sigma^*(\xi \times \xi) = pr_1^*(\xi) = \xi \times 0$. Следовательно, на уровне спектров Тома мы имеем эквивалентность MU-модулей $\varphi\colon MU \wedge BU_+ \simeq MU \wedge MU$, соответствующую (универсальному) гомологическому изоморфизму Тома φ_*. Рассмотрим теперь подкрученную эквивалентность $\widetilde{\varphi} = \tau \circ \varphi\colon MU \wedge BU_+ \simeq MU \wedge MU$, где τ переставляет множители $MU \wedge MU$ местами.

Пусть $a \in MU^n(MU)$ — элемент из A^U. Положим

$$\widetilde{a} := \widetilde{\varphi}_* a_*^{MU} \widetilde{\varphi}_*^{-1}\colon MU_m(BU) \to MU_{m-n}(BU).$$

Геометрически это представление описывается следующим образом. Рассмотрим класс бордизмов $[M,\xi] \in MU_m(BU)$, где ξ — стабильное расслоение многообразием $M \to BU$. Элемент $a \in MU^n(MU)$ определяет универсальный характеристический класс $\alpha = (\varphi^*)^{-1}a \in MU^n(BU)$ и, следовательно, класс $\alpha(\xi) \in MU^n(M)$. Рассмотрим двойственный по Пуанкаре-Атья класс $D_U(\alpha(\xi)) = [Y_a, f_a] \in MU_{m-n}(M)$, где $Y_a \xrightarrow{f_a} M$ — сингулярное многообразие в M. Тогда

$$\widetilde{a}[M,\xi] = [Y_a, f_a^*(\xi + \mathcal{T}M) - \mathcal{T}Y_a] \in MU_{m-n}(BU).$$

Применяя аугментацию $\varepsilon\colon MU_*(BU) \to \varOmega^U_*$, мы получаем

$$\varepsilon(\widetilde{a}[M,\xi]) = [Y_a] = \big\langle (\varphi^*)^{-1}a, [M,\xi] \big\rangle \in MU_{m-n}(pt) = \varOmega^U_{m-n}, \tag{1.4.1}$$

где $\langle\ ,\ \rangle$ обозначает кронекеровское произведение в (ко)бордизмах пространства BU.

Лемма 1.4.4. *Представление $a \mapsto \widetilde{a}$ алгебры A^U на $MU_*(BU)$ точно.*

Доказательство. Полагая $\xi = -\mathcal{T}M$ в конструкции 1.4.3, мы получаем

$$\widetilde{a}[M, -\mathcal{T}M] = [Y_a, -\mathcal{T}Y_a].$$

То есть, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{CD} \varOmega^U_* @>>> MU_*(BU) \\ @V{a_*}VV @VV{\widetilde{a}}V \\ \varOmega^U_* @>>> MU_*(BU) \end{CD}$$

Здесь горизонтальные отображения суть $[M] \mapsto [M, -\mathcal{T}M]$. Они очевидно инъективны. Из этого следует, что мы можем рассматривать представление $a \mapsto a_*$ на $MU_*(pt)$ как подпредставление в представлении $a \mapsto \widetilde{a}$ на $MU_*(BU)$. Так как представление $a \mapsto a_*$ точно по лемме 1.4.2, представление $a \mapsto \widetilde{a}$ также точно. □

Ниже мы приводим основные свойства когомологической спектральной последовательности Адамса–Новикова в комплексных кобордизмах. Подробности можно найти в [16]; см. также [13], [25], [29].

Теорема 1.4.5 (спектральная последовательность Адамса–Новикова в комплексных кобордизмах)**.** *Пусть X — связный спектр, целочисленные гомологии которого не имеют кручения и конечно порождены в каждой размерности. Тогда существует спектральная последовательность*

$$\{E_r^{p,q},\quad d_r\colon E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q+r-1},\quad r \geqslant 2\}$$

со следующими свойствами:

а) $E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^{p,q}_{A^U}(MU^*(X), MU^*(pt))$.

б) Существует фильтрация

$$\pi_n(X) = F^{0,n} \supset F^{1,n+1} \supset F^{2,n+2} \supset \ldots,\quad \bigcap_{s\geqslant 0} F^{s,n+s} = 0,$$

присоединённый биградуированный модуль которой совпадает с бесконечным членом спектральной последовательности: $E_\infty^{p,q} \cong F^{p,q}/F^{p+1,q+1}$.

в) Краевой гомоморфизм

$$\pi_n(X) = F^{0,n} \to E_\infty^{0,n} \to E_2^{0,n} = \mathrm{Hom}^n_{A^U}(MU^*(X), MU^*(pt))$$

совпадает с естественно определённым отображением.

Кроме того, если X — кольцевой спектр, то спектральная последовательность мультипликативна.

Замечание 6. Под естественным отображением $h\colon \pi_n(X) \to \mathrm{Hom}^n_{A^U}(MU^*(X), MU^*(pt))$ из пункта в) теоремы 1.4.5 подразумевается следующее. Если элемент $\alpha \in \pi_n(X)$ представляется отображением $f\colon \Sigma^n S \to X$, а элемент $\beta \in MU^p(X)$ — отображением $g\colon X \to \Sigma^p MU$, то элемент $h(\alpha)(\beta) \in MU^{p-n}(pt)$ представляется композицией

$$\Sigma^n S \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} \Sigma^p MU.$$

Глава 2

SU-линейные операции в комплексных кобордизмах

2.1 Эквивалентные определения SU-линейности

Мы изучаем когомологические операции и их свойства линейности по отношению к модульным спариваниям в теориях когомологий. Поэтому мы работаем в стабильной гомотопической категории, все спектры-модули, кольцевые спектры и свойства линейности (как в определении 2.1.1) далее рассматриваются в гомотопическом смысле. Мы для этого используем только моноидальную структуру стабильной гомотопической категории. Везде далее, когда мы говорим спектр или отображение (между спектрами), имеются в виду объекты и морфизмы в стабильной гомотопической категории.

Определение 2.1.1. Пусть R — коммутативный кольцевой спектр, а E и F — R-модули. Рассмотрим следующие условия на морфизм $f \in [E, F]$.

а) *R-линейность*, т. е. коммутативность следующего квадрата (в стабильной гомотопической категории):

$$\begin{tikzcd} R \wedge E \arrow[r, "1\wedge f"] \arrow[d] & R \wedge F \arrow[d] \\ E \arrow[r, "f"] & F \end{tikzcd}$$

б) *линейность относительно умножения на элементы* $\pi_*(R)$, т. е. коммутативность (в стабильной гомотопической категории) следующей диаграммы для любого $r \in \pi_k(R)$:

$$\begin{tikzcd} \Sigma^k E \arrow[r, "r\cdot"] \arrow[d, "\Sigma^k f"'] & E \arrow[d, "f"] \\ \Sigma^k F \arrow[r, "r\cdot"] & F \end{tikzcd}$$

в) $\pi_*(R)$*-линейность* гомоморфизма $\pi_*(f) \in \mathrm{Hom}(\pi_*(E), \pi_*(F))$.

Предложение 2.1.2. *Из свойства а) следует свойство б), а из свойства б) следует свойство в).*

Доказательство. а)$\Rightarrow$б). Диаграмму из пункта б) можно более подробно переписать в следующем виде:

$$\begin{tikzcd} S^k \wedge E \arrow[r, "r\wedge 1"] \arrow[d, "1\wedge f"'] & R \wedge E \arrow[r] \arrow[d, "1\wedge f"] & E \arrow[d, "f"] \\ S^k \wedge F \arrow[r, "r\wedge 1"] & R \wedge F \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

Левый квадрат коммутативен, а коммутативность правого квадрата есть в точности условие а). Коммутативность внешней диаграммы и означает выполнение свойства б).

б)⇒в). Для $r \in \pi_k(R)$ и $a \in \pi_n(E)$ условие $\pi_*(f)(ra) = r\pi_*(f)(a)$ выражается в коммутативности следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
 & R \wedge E \arrow[r] & E \arrow[dr, "f"] & \\
S^k \wedge S^n \arrow[ur, "r\wedge a"] \arrow[dr, "1\wedge a"'] & & & F \\
 & S^k \wedge E \arrow[uu, "r\wedge 1"] \arrow[r, "r\wedge f"] & R \wedge F \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Левый треугольник здесь коммутативен, а коммутативность правой части как раз и утверждается в б). □

Мы интересуемся SU-линейными операциями $f \in [MU, MU]_*$ в комплексных кобордизмах, что соответствует $R = MSU$, $E = MU$ и $F = \Sigma^k MU$ в обозначениях определения 2.1.1. Оказывается, что этом случае три определения SU-линейности совпадают:

Теорема 2.1.3. *Для случая SU-линейных операций $f \in [MU, MU]_*$ в комплексных кобордизмах все три условия из определения 2.1.1 эквивалентны.*

Доказательство этого факта будет состоять из трёх лемм. Во-первых, мы имеем следующий полезный результат, связывающий морфизмы между спектрами с их действием на гомотопических группах. Доказательство будет использовать понятия из подраздела 1.1.3.

Лемма 2.1.4 ([47, Lemma VII.3.2]). *Пусть E и F — связные спектры конечного типа, такие, что $H_*(E, \mathbb{Z})$ и $\pi_*(F)$ не имеют кручения. Тогда естественное отображение*

$$p\colon [E, F] \to \mathrm{Hom}(\pi_*(E), \pi_*(F))$$

инъективно.

Доказательство. Для связного спектра X конечного типа группы $H_*(X, \mathbb{Z})$ конечнопорождены, следовательно, группы $H_*(E, \mathbb{Z})$ являются свободными абелевыми группами конечного ранга. Тогда это же верно и для групп гомологий $H_*(E^{(n)}, \mathbb{Z})$ остовов $E^{(n)}$. Наконец, из формулы универсальных коэффициентов следует, что тогда то же верно и для групп когомологий $H^*(E^{(n)}, \mathbb{Z})$. Так как дифференциалы в когомологической спектральной последовательности Атья–Хирцебруха принимают значение в кручении, спектральная последовательность для спектров $E^{(n)}$ и F вырождается, и следовательно, группы $[E^{(n)}, F]_*$, к которым она сходится, также не имеют кручения. В таком случае имеет место равенство $[E, F] = \varprojlim [E^{(n)}, F]$ ([47, Corollary III.5.7]). Так как остовы $E^{(n)}$ являются конечными спектрами, мы имеем отображения рационализации $[E^{(n)}, F] \to [E^{(n)}, F_{\mathbb{Q}}] = [E^{(n)}, F] \otimes \mathbb{Q}$, инъективные в силу отсутствия кручения в $[E^{(n)}, F]$. Так как функтор $\varprojlim$ — точен слева, отображение $[E, F] \to \varprojlim [E^{(n)}, F_{\mathbb{Q}}]$ — также инъективно. Так как это отображение является композицией $[E, F] \to [E, F_{\mathbb{Q}}] \to \varprojlim [E^{(n)}, F_{\mathbb{Q}}]$, мы получаем, что отображение $[E, F] \to [E, F_{\mathbb{Q}}]$ также инъективно. Поскольку $[E, F_{\mathbb{Q}}] = [E_{\mathbb{Q}}, F_{\mathbb{Q}}]$, мы получаем, что $[E, F] \to [E_{\mathbb{Q}}, F_{\mathbb{Q}}]$ — инъективно. В итоге мы получаем следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
{[E, F]} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(\pi_*(E), \pi_*(F)) \arrow[d] \\
{[E_{\mathbb{Q}}, F_{\mathbb{Q}}]} \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\pi_*(E) \otimes \mathbb{Q}, \pi_*(F) \otimes \mathbb{Q})
\end{tikzcd}$$

В ней нижняя стрелка является изоморфизмом (так как $E_{\mathbb{Q}}$ и $F_{\mathbb{Q}}$ являются градуированными рациональными спектрами Эйленберга–Маклейна и $[H\mathbb{Q}, H\mathbb{Q}] = [S_{\mathbb{Q}}, H\mathbb{Q}] = [S, H\mathbb{Q}] = \mathbb{Q} = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$), а левая стрелка инъективна. Следовательно, верхняя стрелка также инъективна. □

Лемма 2.1.4 обобщается на морфизмы, включающие три спектра. Для любых спектров E, F, G существует естественное отображение $q\colon [E \wedge F, G] \to \mathrm{Hom}(\pi_*(E) \otimes \pi_*(F), \pi_*(G))$, определяемое следующим образом: для $f \in [E \wedge F, G]$ и $a \in \pi_k(E)$, $b \in \pi_n(F)$ элемент $q(f)(a,b) \in \pi_{k+n}(G)$ представляется отображением $S^k \wedge S^n \xrightarrow{a \wedge b} E \wedge F \xrightarrow{f} G$.

Лемма 2.1.5. *Пусть E, F и G — связные спектры конечного типа, такие, что $H_*(E, \mathbb{Z})$, $H_*(F, \mathbb{Z})$ и $\pi_*(G)$ не имеют кручения. Тогда естественное отображение*

$$q\colon [E \wedge F, G] \to \mathrm{Hom}(\pi_*(E) \otimes \pi_*(F), \pi_*(G))$$

инъективно.

Доказательство. Применяя лемму 2.1.4 к спектрам $E \wedge F$ и G, получаем, что отображение

$$[E \wedge F, G] \to \mathrm{Hom}(\pi_*(E \wedge F), \pi_*(G))$$

инъективно. Следовательно, нам достаточно доказать инъективность отображения

$$\mathrm{Hom}(\pi_*(E \wedge F), \pi_*(G)) \to \mathrm{Hom}(\pi_*(E) \otimes \pi_*(F), \pi_*(G)),$$

индуцированного естественным отображением $\pi_*(E) \otimes \pi_*(F) \to \pi_*(E \wedge F)$.

Мы имеем следующий коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\pi_*(E \wedge F), \pi_*(G)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(\pi_*(E) \otimes \pi_*(F), \pi_*(G)) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}(\pi_*(E \wedge F) \otimes \mathbb{Q}, \pi_*(G) \otimes \mathbb{Q}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\pi_*(E) \otimes \pi_*(F) \otimes \mathbb{Q}, \pi_*(G) \otimes \mathbb{Q})
\end{tikzcd}$$

Здесь левая стрелка представляется в виде композиции отображения $\mathrm{Hom}(\pi_*(E \wedge F), \pi_*(G)) \to \mathrm{Hom}(\pi_*(E \wedge F), \pi_*(G) \otimes \mathbb{Q})$, индуцированного гомоморфизмом $\pi_*(G) \to \pi_*(G) \otimes \mathbb{Q}$, который инъективен, так как $\pi_*(G)$ не имеет кручения, и естественного изоморфизма $\mathrm{Hom}(\pi_*(E \wedge F), \pi_*(G) \otimes \mathbb{Q}) \cong \mathrm{Hom}(\pi_*(E \wedge F) \otimes \mathbb{Q}, \pi_*(G) \otimes \mathbb{Q})$. Следовательно, левая стрелка в диаграмме выше инъективна.

Нижняя стрелка индуцирована отображением $\pi_*(E) \otimes \pi_*(F) \otimes \mathbb{Q} \to \pi_*(E \wedge F) \otimes \mathbb{Q}$, которое является изоморфизмом. Действительно, это естественное преобразование теорий гомологий $\pi_*(-) \otimes \pi_*(F) \otimes \mathbb{Q}$ и $\pi_*(- \wedge F) \otimes \mathbb{Q}$, которое является изоморфизмом на спектре сфер. Следовательно, нижняя стрелка в диаграмме выше является изоморфизмом.

Отсюда следует, что верхняя стрелка в коммутативном квадрате выше инъективна, что и требовалось. □

Замечание 7. При помощи индукции утверждение леммы 2.1.5 обобщается на случай смэш-произведения любого количества спектров.

Лемма 2.1.6. *В обозначениях определения 2.1.1 пусть R, E и F — связные спектры конечного типа, такие, что $H_*(R, \mathbb{Z})$, $H_*(E, \mathbb{Z})$ и $\pi_*(F)$ не имеют кручения. Тогда из свойства в) следует свойство а).*

Доказательство. Предположим, что $f \in [E, F]$ удовлетворяет условию в) из определения 2.1.1. Рассмотрим морфизмы $\varphi_1\colon R \wedge E \xrightarrow{1 \wedge f} R \wedge F \to F$, $\varphi_2\colon R \wedge E \to E \xrightarrow{f} F$ и положим $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Надо доказать, что $\varphi = 0$.

Применяя отображение $q\colon [R \wedge E, F] \to \mathrm{Hom}(\pi_*(R) \otimes \pi_*(E), \pi_*(F))$ к $\varphi\colon R \wedge E \to F$, мы получаем $q(\varphi)(r, a) = r f_*(a) - f_*(ra)$, что равняется нулю для любых $r \in \pi_*(R)$, $a \in \pi_*(E)$ в силу свойства в). Тогда из леммы 2.1.5 вытекает, что $\varphi = 0$. □

Доказательство теоремы 2.1.3. Утверждение вытекает из леммы 2.1.6, применённой к спектрам $R = MSU$, $E = MU$ и $F = \Sigma^k MU$. Группы $\pi_*(MU) = \Omega^U_* = \mathbb{Z}[a_1, a_2, \ldots]$ не имеют кручения. Так как группы $H_*(BU, \mathbb{Z})$ и $H_*(BSU, \mathbb{Z})$ свободны, из изоморфизма Тома следует, что $H_*(MU, \mathbb{Z})$ и $H_*(MSU, \mathbb{Z})$ также свободны. □

Наконец отметим несколько простых общих свойств R-модулей.

Предложение 2.1.7. *Пусть R — коммутативный кольцевой спектр, а E и F — R-модули. Тогда если $f\colon E \to F$ — R-линейная эквивалентность спектров, то обратная к ней эквивалентность также R-линейна.*

Таким образом, любая R-линейная эквивалентность спектров есть эквивалентность R-модулей и мы можем отождествить R-модули E и F.

Предложение 2.1.8. *Пусть R — коммутативный кольцевой спектр, а F — R-модуль. Тогда если $f\colon E \to F$ — эквивалентность спектров, то существует единственная структура R-модуля на E такая, что f является эквивалентность R-модулей.*

Таким образом, мы можем вводить структуру R-модуля с помощью эквивалентности спектров.

Предложение 2.1.9. *Пусть R — коммутативный кольцевой спектр и $x\colon S^k \to S$ — элемент из $\pi_k(S)$. Рассмотрим соответствующий элемент $\tilde{x}\colon S^k \to S \to R$ из $\pi_k(R)$. Тогда кослой C умножения $\Sigma^k R \xrightarrow{\cdot\tilde{x}} R$ есть $R \wedge S/x$, где S/x — кослой $S^k \xrightarrow{x} S$. Таким образом, согласно предложению 2.1.8 на кослое C возникает естественная R-модульная структура.*

Доказательство. Для доказательства утверждения достаточно заметить, что корасслоенная последовательность $S^k \xrightarrow{x} S \to S/x$ при умножении на R переходит в корасслоенную последовательность $\Sigma^k R \xrightarrow{\cdot\tilde{x}} R \to R \wedge S/x$. □

Для R-модулей E, F обозначим через $[E, F]^R_*$ градуированную абелеву группу R-линейных морфизмов.

Предложение 2.1.10. *Для свободного R-модуля $R \wedge X$ имеются естественные взаимообратные изоморфизмы абелевых групп $E\colon [R \wedge X, F]^R_* \cong [X, F]_*\colon M$, определяемые следующим образом. Для морфизма $X \xrightarrow{f} F$ имеем R-линейный морфизм $M(f)\colon R \wedge X \xrightarrow{1\wedge f} R \wedge F \to F$. Обратно, R-линейный морфизм $R \wedge X \xrightarrow{g} F$ соответствует морфизму $E(g)\colon X \simeq S \wedge X \xrightarrow{e\wedge 1} R \wedge X \xrightarrow{g} F$, где $e\colon S \to R$ — единица спектра R.*

2.2 Построение операций

Для любой формальной группы $F(u, v)$ существует единственный формальный ряд $[-1]_F(u)$ такой, что $F(u, [-1]_F(u)) = 0$. Для формальной группы комплексных кобордизмов мы будем обозначать этот ряд через $\bar{u}$ и далее черта над чем-то будет обозначать подстановку в этот ряд. Например, для одномерных комплексных расслоений имеет место равенство $\overline{c}_1^U(\xi) = [-1]_U(c_1^U(\xi)) = c_1^U(\bar{\xi})$.

Рассмотрим гомоморфизм $\det\colon U \to U(1)$. Он индуцирует отображение классифицирующих пространств $BU \to \mathbb{C}P^\infty$, которое мы также обозначим $\det$. Рассматривая его композицию со стандартной ориентацией $u^{MU}\colon \mathbb{C}P^\infty \to \Sigma^2 MU$, мы получаем универсальный характеристический класс в комплексных кобордизмах $d^U \in MU^2(BU)$, действующий как $d^U(\xi) = c_1^U(\det(\xi))$.

Так как $\det(-\xi) = \overline{\det(\xi)}$, мы получаем $\overline{d}^U(\xi) = d^U(-\xi) = c_1^U(\overline{\det(\xi)})$.

В терминах включения $H^2(BU, \mathbb{Z}) \hookrightarrow MU^2(BU)$ геометрических кобордизмов класс d^U является образом универсального первого класса Чженя $c_1 \in H^2(BU, \mathbb{Z})$.

Определим теперь SU-линейные операции $\Delta_{(k_1,k_2)}$ и $\Psi_{(k_1,k_2)}$, рассмотренные С. П. Новиковым в [16].

Конструкция 2.2.1 (операции $\Delta_{(k_1,k_2)}$). Для неотрицательных целых чисел k_1, k_2 определим операции

$$\Delta_{(k_1,k_2)} = \varphi^*\big((\overline{d}^U)^{k_1}(d^U)^{k_2}\big) \in (A^U)^{2k_1+2k_2}. \tag{2.2.1}$$

Обозначим $\Delta_{(k,0)}$ через ∂_k. Заметим, что $(\overline{d}^U)^{k_1}(d^U)^{k_2}$ есть формальный ряд от d^U, следовательно, операции $\Delta_{(k_1,k_2)}$ выражаются в виде ряда от ∂_k.

Соответствующая операция $\widetilde{\Delta}_{(k_1,k_2)}\colon MU_*(BU) \to MU_{*-2k_1-2k_2}(BU)$ (см. конструкцию 1.4.3) описывается геометрически следующим образом. Рассмотрим класс $[M,\xi] \in MU_n(BU)$. Пусть $i_1\colon Y_1 \hookrightarrow M$ и $i_2\colon Y_2 \hookrightarrow M$ — подмногообразия, двойственные к $\overline{\det(\xi)}$ и $\det(\xi)$ соответственно. Мы имеем $\nu(Y_1 \subset M) = \overline{(\det\xi)}|_{Y_1}$ и $\nu(Y_2 \subset M) = (\det\xi)|_{Y_2}$. Подмногообразие, двойственное к $\overline{\det(\xi)}^{\oplus k_1} \oplus \det(\xi)^{\oplus k_2}$ есть трансверсальное пересечение

$$Y_{k_1,k_2} = \underbrace{Y_1 \cdots Y_1}_{k_1} \cdot \underbrace{Y_2 \cdots Y_2}_{k_2}.$$

Тогда

$$\widetilde{\Delta}_{(k_1,k_2)}[M,\xi] = [Y_{k_1,k_2}, \xi|_{Y_{k_1,k_2}} + \nu] \in MU_{n-2k_1-2k_2}(BU).$$

В случае $\xi = -\mathcal{T}M$ мы получаем $(\Delta_{(k_1,k_2)})_*[M] = [M_{k_1,k_2}]$, где M_{k_1,k_2} — подмногообразие, двойственное к $(\det\mathcal{T}M)^{\oplus k_1} \oplus (\overline{\det\mathcal{T}M})^{\oplus k_2}$.

Действие $\Delta_{(k_1,k_2)}$ на канонической ориентации $u \in \widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ имеет вид

$$\Delta_{(k_1,k_2)}u = u\,\overline{u}^{k_1}u^{k_2} \tag{2.2.2}$$

Конструкция 2.2.2 (операции $\Psi_{(k_1,k_2)}$)**.** Для неотрицательных целых чисел k_1, k_2, положим $k = k_1 + k_2$. Пусть ξ — комплексное линейное расслоение над $\mathbb{C}P^n$. Рассмотрим проективизацию $p\colon \mathbb{C}P(\xi \oplus \mathbb{C}^k) \to \mathbb{C}P^n$. Касательное расслоение к многообразию $\mathbb{C}P(\xi \oplus \underline{\mathbb{C}}^k)$ стабильно расщепляется:

$$\mathcal{T}\mathbb{C}P(\xi \oplus \mathbb{C}^k) \oplus \mathbb{C} \cong p^*\mathcal{T}\mathbb{C}P^n \oplus (\bar\eta \otimes p^*(\xi \oplus \mathbb{C}^k)) = p^*\mathcal{T}\mathbb{C}P^n \oplus (\bar\eta \otimes p^*\xi) \oplus \bar\eta^{\oplus k},$$

где η — тавтологическое линейное расслоение над $\mathbb{C}P(\xi \oplus \mathbb{C}^k)$, см. [30, теорема D.4.1]. Мы введём новую стабильно комплексную структуру на $\mathbb{C}P(\xi \oplus \underline{\mathbb{C}}^k)$, используя изоморфизм вещественных расслоений

$$\mathcal{T}\mathbb{C}P(\xi \oplus \mathbb{C}^k) \oplus \mathbb{R}^2 \cong p^*\mathcal{T}\mathbb{C}P^n \oplus (\bar\eta \otimes p^*\xi) \oplus \bar\eta^{\oplus k_1} \oplus \eta^{\oplus k_2},$$

и обозначим полученное стабильно комплексное многообразие через $P^{(k_1,k_2)}(\xi)$.

Мы получаем класс бордизмов $[P^{(k_1,k_2)}(\xi), p] \in MU_{2n+2k}(\mathbb{C}P^n)$. Двойственные к нему классы кобордизмов $\chi_{(k_1,k_2)}(\xi) := (D_U)^{-1}[P^{(k_1,k_2)}(\xi), p] \in MU^{-2k}(\mathbb{C}P^n)$ определяют универсальный характеристический класс линейных расслоений, который мы обозначим $\chi_{(k_1,k_2)} \in MU^{-2k}(\mathbb{C}P^\infty)$.

Теперь мы можем распространить определение $\chi_{(k_1,k_2)}$ на комплексные расслоения произвольного ранга, полагая $\chi_{(k_1,k_2)}(\xi) := \chi_{(k_1,k_2)}(\det\xi)$. В результате мы получаем универсальный характеристический класс $\chi_{(k_1,k_2)} \in MU^{-2k}(BU)$ и соответствующую операцию

$$\Psi_{(k_1,k_2)} = \varphi^*\chi_{(k_1,k_2)} \in MU^{-2(k_1+k_2)}(MU) = (A^U)^{-2(k_1+k_2)}.$$

Геометрически, $(\Psi_{(k_1,k_2)})_*[M^{2n}]$ — это класс $(2n+2k_1+2k_2)$-многообразия $[\mathbb{C}P(\overline{\det\mathcal{T}M} \oplus \mathbb{C}^{k_1+k_2})]$ со стабильно комплексной структурой $p^*(\mathcal{T}M) \oplus (\bar\eta \otimes p^*(\overline{\det\mathcal{T}M})) \oplus \bar\eta^{\oplus k_1} \oplus \eta^{\oplus k_2}$.

Мы будем использовать следующие обозначения для некоторых из введённых операций:

$$\partial = \partial_1 = \Delta_{(1,0)}, \quad \Delta = \Delta_{(1,1)}, \quad \Psi = \Psi_{(1,1)}. \tag{2.2.3}$$

Заметим, что $\partial_*[M]$ задаётся подмногообразием, двойственным к $\det\mathcal{T}M$, которое имеет нулевой первый класс Чженя. То есть, $\partial_*[M]$ задаётся SU-многообразием. Следовательно, мы имеем следующее полезное свойство

Предложение 2.2.3. *Для любой SU-линейной операции f имеет место равенство $f\partial = f(1)\partial$.*

Доказательство. Согласно лемме 2.1.4 достаточно проверить требуемое равенство на гомотопических группах Ω^U_*. Из вышесказанного следует, что многообразие $\partial_*[M]$ является SU-многообразием, и следовательно, мы имеем $f_*(\partial_*[M]) = \partial_*[M]f_*(1) = (f(1)\partial)_*[M]$. $\square$

Операции ∂_* и Δ_* детально изучались Коннером и Флойдом [32], которые обозначали их просто через ∂ и Δ.

Предложение 2.2.4. *Операции $\Delta_{(k_1,k_2)}$ и $\Psi_{(k_1,k_2)}$ являются SU-линейными.*

Доказательство. Согласно теореме 2.1.3, достаточно проверить SU-линейность действия $\Delta_{(k_1,k_2)}$ и $\Psi_{(k_1,k_2)}$ на гомотопических группах $\pi_*(MU) = \Omega^U_*$. Пусть $[M] \in \Omega^U_m$, $[N] \in \Omega^{SU}_n$. Нужно доказать, что $\Delta_{(k_1,k_2)}([N \times M]) = [N] \cdot \Delta_{(k_1,k_2)}([M])$ и $\Psi_{(k_1,k_2)}([N \times M]) = [N] \cdot \Psi_{(k_1,k_2)}([M])$.

Из определения следует, что

$$\Delta_{(k_1,k_2)}([N \times M]) = \varepsilon D_U\big(\big(c_1^U(\det\mathcal{T}(N \times M))\big)^{k_1}\big(c_1^U(\overline{\det\mathcal{T}(N \times M)})\big)^{k_2}\big),$$

где $D_U\colon MU^*(N \times M) \xrightarrow{\cong} MU_{n+m-*}(N \times M)$ — оператор двойственности Пуанкаре–Атья, а $\varepsilon\colon MU_*(N \times M) \to MU_*(pt)$ — аугментация. Мы имеем $\det\mathcal{T}(N \times M) = \det\mathcal{T}N \otimes \det\mathcal{T}M = \det\mathcal{T}M$, так как N — SU-многообразие. Следовательно,

$$\Delta_{(k_1,k_2)}([N \times M]) = \varepsilon D_U\big(\big(c_1^U(\det\mathcal{T}(M))\big)^{k_1}\big(c_1^U(\overline{\det\mathcal{T}(M)})\big)^{k_2}\big).$$

Ясно, что в произведении $N \times M$ подмногообразием, двойственным к $\big(c_1^U(\det\mathcal{T}(M))\big)^{k_1}\big(c_1^U(\overline{\det\mathcal{T}(M)})\big)^{k_2}$, является $N \times \Delta_{(k_1,k_2)}([M])$, откуда следует доказываемое утверждение.

Аналогично имеем

$$\Psi_{(k_1,k_2)}([N \times M]) = [\mathbb{C}P(\overline{\det\mathcal{T}(N \times M)} \oplus \mathbb{C}^{k_1+k_2})]$$

с подкрученной стабильно-комплексной структурой.

Так как $\det\mathcal{T}(N \times M) = \det\mathcal{T}M$, мы получаем $\mathbb{C}P(\overline{\det\mathcal{T}(N \times M)} \oplus \mathbb{C}^{k_1+k_2}) = N \times \mathbb{C}P(\overline{\det\mathcal{T}M} \oplus \mathbb{C}^{k_1+k_2})$.

□

Описанные выше операции удовлетворяют следующим алгебраическим соотношениям.

Лемма 2.2.5 ([16]). *Выполнены равенства*

$$\partial^2 = \Delta\partial = 0, \quad \Delta\Psi = \mathrm{id}, \quad \partial\Psi = 0.$$

Доказательство. Первые два равенства следуют из предложения 2.2.3, так как $\partial(1) = \Delta(1) = 0$.

Согласно лемме 1.4.2 достаточно проверить оставшиеся соотношения на бордизмах точки Ω^U_*.

Равенство $\Delta_*\Psi_* = \mathrm{id}$ доказано в [32, теорема 8.1]. Равенство $\partial_*\Psi_* = 0$ приведено в [32, теорема 8.2], но его доказательство содержит неточность в вычислении характеристических классов. Поэтому ниже мы приводим исправленное доказательство.

Возьмём $[M^{2n}] \in \Omega^U_{2n}$. Тогда $\Psi_*[M^{2n}]$ представляется многообразием $\mathbb{C}P(\overline{\det\mathcal{T}M} \oplus \mathbb{C}^2)$ со стабильно комплексной структурой, задаваемой изоморфизмом

$$\mathcal{T}\mathbb{C}P(\overline{\det\mathcal{T}M} \oplus \mathbb{C}^2) \oplus \mathbb{R}^2 \cong p^*\mathcal{T}M \oplus (\bar\eta \otimes p^*\overline{\det\mathcal{T}M}) \oplus \bar\eta \oplus \eta.$$

Обозначим это стабильно комплексное многообразие через P^{2n+4}. Тогда $\partial_*\Psi_*[M^{2n}] = \partial_*[P^{2n+4}]$ представляется подмногообразием $N^{2n+2} \subset P^{2n+4}$, двойственным к $\det\mathcal{T}P^{2n+4} = \bar\eta$). Мы можем взять в качестве N^{2n+2} подмногообразие $\mathbb{C}P(\overline{\det\mathcal{T}M} \oplus \mathbb{C})$ со стабильно комплексной структурой

$$\mathcal{T}\mathbb{C}P(\overline{\det\mathcal{T}M} \oplus \mathbb{C}) \oplus \mathbb{R}^2 \cong p^*\mathcal{T}M \oplus (\bar\eta \otimes p^*\overline{\det\mathcal{T}M}) \oplus \eta.$$

Заметим, что $[N^{2n+2}]$ есть в точности $(\Psi_{(0,1)})_*[M^{2n}]$. Для того, чтобы увидеть, что N^{2n+2} бордантно нулю, посчитаем его полный класс Чженя. Обозначим $c_i = c_i(M)$, $d = c_1(\bar\eta)$, тогда в когомологиях N^{2n+2} мы имеем соотношение $d^2 = p^*c_1 \cdot d$. Мы получаем

$$\begin{aligned}
c(N^{2n+2}) &= (1 + p^*c_1 + \dots + p^*c_n)(1 + d - p^*c_1)(1 - d) \\
&= (1 + p^*c_1 + \dots + p^*c_n)(1 - p^*c_1) \\
&= 1 + p^*(c_2 - c_1^2) + p^*(c_3 - c_1c_2) + \dots + p^*(c_n - c_1c_{n-1})
\end{aligned}$$

(это вычисление было неверно проведено в [32, pp. 36–37]). Отсюда $c_\omega(N^{2n+2}) = p^* c'_\omega(M^{2n})$, где $c'_i = c_i - c_1 c_{i-1}$, и все характеристические числа $c_\omega[N^{2n+2}]$ равны нулю по соображениям размерности.

Равенство $\partial\Psi = \Psi_{0,1} = 0$ можно также получить геометрически, заметив, что стабильно комплексная структура на N^{2n+2} тривиальна на каждом слое $\mathbb{C}P^1 = S^2$ проективизации, и значит, она продолжается на ассоциированное расслоение на 3-мерные диски. $\square$

2.3 Описание SU-линейных операций в комплексных кобордизмах

Следующая эквивалентность неявно содержится в работе Коннера и Флойда [32, Глава III] и для вещественного случая восходит к работе Атья [23].

Предложение 2.3.1. *Имеется эквивалентность MSU-модулей*

$$MU \simeq MSU \wedge \Sigma^{-2}\mathbb{C}P^\infty.$$

Доказательство. Так как $\mathbb{C}P^\infty = MU(1)$, мы имеем отображение MSU-модулей

$$MSU \wedge \Sigma^{-2}\mathbb{C}P^\infty = MSU \wedge \Sigma^{-2}MU(1) \xrightarrow{1\wedge i} MSU \wedge MU \to MU.$$

Это отображение спектров Тома, индуцированное отображением пространств

$$BSU \times BU(1) \to BU \times BU \xrightarrow{\oplus} BU,$$

Данная композиция отображений является гомотопической эквивалентностью со следующим гомотопически обратным:

$$BU \to BSU \times BU(1), \quad \eta \mapsto (\eta - \det\eta) \times \det\eta.$$

Поэтому она индуцирует эквивалентность соответствующих спектров Тома. Так как мы получили MSU-линейную эквивалентность спектров, достаточно теперь воспользоваться следствием 2.1.7. $\square$

Предложение 2.3.2. *Для любого MSU-модуля E абелева группа SU-линейных операций $[MU, E]_k^{MSU}$ изоморфна $\widetilde{E}^{2-k}(\mathbb{C}P^\infty)$. Точнее говоря, если $u \in \widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ — каноническая ориентация в комплексных кобордизмах, то отображение*

$$[MU, E]_*^{MSU} \to \widetilde{E}^{2-*}(\mathbb{C}P^\infty), \quad f \mapsto f(u),$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Мы имеем

$$[MU, E]_*^{MSU} \simeq [MSU \wedge \Sigma^{-2}MU(1), E]_*^{MSU} \simeq [\Sigma^{-2}MU(1), E]_* = \widetilde{E}^{2-*}(\mathbb{C}P^\infty),$$

где первый изоморфизм следует из предложения 2.3.1, а второй из предложения 2.1.10. Под действием этих изоморфизмов SU-линейная операция $f\colon MU \to \Sigma^{-k}E$ переходит в композицию

$$\Sigma^{-2}MU(1) \simeq S \wedge \Sigma^{-2}MU(1) \xrightarrow{e\wedge 1} MSU \wedge \Sigma^{-2}MU(1) \xrightarrow{1\wedge i} MSU \wedge MU \to MU \xrightarrow{f} \Sigma^{-k}E$$

Поскольку f является SU-линейной, мы можем заменить в этой композиции два последних члена следующим образом:

$$S \wedge \Sigma^{-2}MU(1) \xrightarrow{e\wedge 1} MSU \wedge \Sigma^{-2}MU(1) \xrightarrow{1\wedge i} MSU \wedge MU \xrightarrow{1\wedge f} MSU \wedge \Sigma^{-k}E \to \Sigma^{-k}E$$

Так как e — единица, композиция выше совпадает с $\Sigma^{-2}MU(1) \xrightarrow{i} MU \xrightarrow{f} \Sigma^{-k}E$. Но отображение $\Sigma^{-2}MU(1) \xrightarrow{i} MU$ представляет каноническую ориентацию $u \in \widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$, и следовательно, вся композиция представляет $f(u) \in \widetilde{E}^{2-k}(\mathbb{C}P^\infty)$, что и требовалось. $\square$

Для комплексно-ориентированного спектра E мы имеем $E^*(\mathbb{C}P^\infty) = E^*[[u^E]]$, где $E^* = E^*(pt)$ — кольцо когомологий точки, $u^E \in \widetilde{E}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ — комплексная ориентация спектра E. Элементы $\widetilde{E}^*(\mathbb{C}P^\infty)$ представляются степенными рядами $f(u^E)$ от u^E с нулевым постоянным членом.

Следствие 2.3.3. *Для комплексно ориентируемой MSU-алгебры E (т.е. комплексно-ориентируемого MSU-модуля с MSU-билинейным умножением) SU-линейные операции $f_k \in [MU, E]_*^{MSU}$ образуют топологический базис модуля $[MU, E]_*^{MSU}$ над кольцом $E^*(pt)$ (то есть, любая SU-линейная операция $f \in [MU, E]_*^{MSU}$ единственным образом представляется в виде ряда $f = \sum e_k f_k$, $e_k \in E^*(pt)$) тогда и только тогда, когда элементы $f_k(u)$ образуют топологический базис в $\widetilde{E}^*(\mathbb{C}P^\infty) \subset E^*(pt)[[u^E]]$, где u — стандартная комплексная ориентация MU и u^E — какая-то ориентация E.*

Доказательство. Это прямо следует из предложения 2.3.2, так как соответствие $f \mapsto f(u)$ является $E^*(pt)$-линейным (так как умножение на E является MSU-билинейным, подгруппа SU-линейных операций $[MU, E]_*^{MSU}$ является $E^*(pt)$-подмодулем в $[MU, E]_*$) гомеоморфизмом $[MU, E]_*^{MSU}$ на $\widetilde{E}^{2-*}(\mathbb{C}P^\infty)$ (в топологиях индуцированных фильтрациями $MSU \wedge \Sigma^{-2}\mathbb{C}P^k \subset MU$ и $\mathbb{C}P^k \subset \mathbb{C}P^\infty$ соответственно), и следовательно, устанавливает биекцию между множествами топологических базисов над $E^*(pt)$. $\square$

Замечание 8. Например, топологический базис в $\widetilde{E}^*(\mathbb{C}P^\infty) \subset E^*(pt)[[u^E]]$ образуют элементы вида $\epsilon_k(u^E)^k + \ldots$, $k \geqslant 1$, где ϵ_k — обратимые элементы $E^0(pt)$.

Замечание 9. Если мы рассматриваем такой спектр E, что операции $[MU, E]_*$ не содержат фантомов, то есть, определяются действием на конечных спектрах X (только такие будут рассматриваться далее, даже более того, только такие, которые определяются действием на π_* согласно лемме 2.1.4, то есть, действием на S), то топология на $E^*(MU)$, определяемая фильтрацией $MSU \wedge \mathbb{C}P^k$ совпадает со стандартной, задаваемой фильтрацией $MU(k)$.

Теперь мы можем сформулировать главный результат этого раздела.

Теорема 2.3.4. *Следующие множества SU-линейных операций являются топологическими базисами в $[MU, MU]_*^{MSU}$:*

1) $\bar{\partial}_i$, $i \geqslant 0$;

2) ∂_i, $i \geqslant 0$;

3) Δ^k, $\partial\Delta^k$, $k \geqslant 0$.

Доказательство. В силу следствия 2.3.3 достаточно проверить, что для выписанных множеств SU-линейных операций f_k элементы $f_k(u)$ образуют топологический базис в $\widetilde{MU}^*(\mathbb{C}P^\infty) \subset \Omega_U^*[[u]]$, где u — стандартная ориентация комплексных кобордизмов.

Согласно формуле 2.2.2 мы имеем $\bar{\partial}_i(u) = u^{i+1}$ и $\partial_i(u) = u\bar{u}^i$, что образует топологические базисы в $\widetilde{MU}^*(\mathbb{C}P^\infty)$.

Аналогично $\Delta(u) = uu\bar{u} = u\partial u$, и следовательно, из SU-линейности получаем $\Delta^k(u) = u(\partial u)^k = u(u\bar{u})^k$ и $\partial\Delta^k(u) = (\partial u)^{k+1} = (u\bar{u})^{k+1}$, что также образует топологический базис в $\widetilde{MU}^*(\mathbb{C}P^\infty)$. $\square$

Для того, чтобы разложить операцию f по базису f_k (в частности, выразить элементы одного базиса через элементы другого базиса) достаточно разложить элемент $f(u)$ по базису $f_k(u)$. Таким образом, например, $\Delta_{k_1,k_2} = \sum c_{i,k_1,k_2}\bar{\partial}_i$, где $uu^{k_1}\bar{u}^{k_2} = \sum c_{i,k_1,k_2}u^{i+1}$.

Следствие 2.3.3 и теорема 2.3.4 легко обобщаются на случай SU-полилинейных операций, а именно имеет место

Теорема 2.3.5. *В условиях следствия 2.3.3, если $\{f_k^i\}$, $i = 1, \ldots, m$ набор из m топологических базисов в $[MU, E]_*^{MSU}$, то множество произведений $f_{k_1}^1 \cdot \ldots \cdot f_{k_m}^m$ (где произведение берётся в E) является топологическим базисом в множестве SU-полилинейных операций из MU в E. В частности, любая SU-полилинейная операция в комплексных кобордизмах единственным образом выражается в виде ряда $\sum \mu_{i_1,\ldots,i_k}\partial_{i_1} \cdot \ldots \cdot \partial_{i_k}$.*

Мы используем этот результат, когда будем изучать SU-билинейные умножения в разделе 4.5.

Мультипликативная структура (по отношению к композиции) кольца SU-линейных операций в базисе ∂_i может быть описана в терминах коэффициентов формальной группы комплексных кобордизмов.

Для произвольного целого числа $k \in \mathbb{Z}$ ряд *k-ой степени* $[k]_U(u)$ по отношению к формальной группе F_U определяется индуктивно следующим образом:

$$[0]_U(u) = 0, \quad [k]_U(u) = F_U\bigl([k-1]_U(u), u\bigr) \text{ при } k > 0, \quad [k]_U(u) = F_U\bigl([k+1]_U(u), \overline{u}\bigr) \text{ при } k < 0.$$

Мы имеем $[k](c_1^U(\xi)) = c_1^U(\xi^{\otimes k})$ и $[-k](c_1^U(\xi)) = c_1^U(\overline{\xi}^{\otimes k})$, $k \geqslant 0$, для комплексного одномерного расслоения ξ. Ряд $[-1]_U(u)$ мы ранее обозначали $\bar{u}$.

Теперь мы можем описать мультипликативную структуру кольца SU-линейных операций.

Теорема 2.3.6. *Для неотрицательных целых чисел k, m рассмотрим два степенных ряда*

$$(F_U(u,v))^k = \sum_{i,j \geqslant 0} \alpha_{ij}^{(k)} u^i v^j, \quad \bigl([1-m]_U(u)\bigr)^k u^m = \sum_{i \geqslant 0} \beta_i^{(k,m)} u^i.$$

Тогда

$$\partial_k(a \cdot b) = \sum_{i,j} \alpha_{ij}^{(k)}\, \partial_i a \cdot \partial_j b, \quad \partial_k \partial_m = \sum_i \beta_i^{(k,m)} \partial_i, \tag{2.3.1}$$

где $a, b \in [MU, MU]_*$ — произвольные операции, а $a \cdot b \in [MU \wedge MU, MU]_*$ обозначает их внешнее произведение.

Доказательство. Согласно леммам 2.1.4 и 2.1.5, указанные тождества достаточно проверить на гомотопических группах спектра MU, т. е. на элементах из $MU_* = \pi_*(MU)$.

Пусть $a = [M]$, $b = [N] \in MU_*$. Обозначим $u = c_1^U(\det \mathcal{T}M)$, $v = c_1^U(\det \mathcal{T}N)$. Тогда первое тождество вытекает из следующей выкладки

$$\begin{aligned}\partial_k([M \times N]) = \varepsilon D_U\Bigl(\bigl(c_1^U(\det \mathcal{T}(M \times N))\bigr)^k\Bigr) = \varepsilon D_U\Bigl(\bigl(c_1^U(\det \mathcal{T}M \otimes \det \mathcal{T}N)\bigr)^k\Bigr) = \\ = \varepsilon D_U\bigl((F_U(u,v))^k\bigr) = \varepsilon D_U\Bigl(\sum_{i,j} \alpha_{ij}^{(k)} u^i v^j\Bigr) = \sum_{i,j} \alpha_{ij}^{(k)} \partial_i([M]) \partial_j([N]),\end{aligned}$$

где последнее равенство следует из того, что подмногообразие $\partial_i(M) \times \partial_j(N)$ двойственно к $u^i v^j$ в произведении $M \times N$.

Для второго тождества обозначим $\partial_m([M]) = [N]$, где $i\colon N \hookrightarrow M$ — соответствующее вложение. Нормальное расслоение к N изоморфно ограничению $i^*(\det \mathcal{T}M)^{\oplus m}$, следовательно,

$$\det \mathcal{T}N \otimes i^*(\det \mathcal{T}M)^{\otimes m} = \det\bigl(\mathcal{T}N \oplus i^*(\det \mathcal{T}M)^{\oplus m}\bigr) \cong i^* \det \mathcal{T}M.$$

Значит, $\det \mathcal{T}N = i^*(\overline{\det \mathcal{T}M})^{\otimes(m-1)}$. Положим $u = c_1^U(\det \mathcal{T}M)$, тогда $c_1^U(\det \mathcal{T}N) = i^*[1-m]_U(u)$. С другой стороны, подмногообразие N двойственно к u^m, то есть, $i_*[N] = D_U(u^m) = u^m \cap [M]$. Тогда следующая выкладка доказывает второе тождество:

$$\begin{aligned}\partial_k[N] = \bigl\langle \bigl(c_1^U(\det \mathcal{T}N)\bigr)^k, [N] \bigr\rangle = \bigl\langle i^*\bigl([1-m]_U(u)\bigr)^k, [N] \bigr\rangle = \bigl\langle \bigl([1-m]_U(u)\bigr)^k, i_*[N] \bigr\rangle = \\ = \bigl\langle \bigl([1-m]_U(u)\bigr)^k, u^m \cap [M] \bigr\rangle = \bigl\langle \bigl([1-m]_U(u)\bigr)^k u^m, [M] \bigr\rangle = \sum_i \beta_i^{(k,m)} \partial_i([M]). \quad \square\end{aligned}$$

Замечание 10. Аналогично получается формула

$$\Delta_{(k_1,k_2)}(a \cdot b) = \sum_{i,j} \alpha_{ij}^{(k_1,k_2)}\, \partial_i a \cdot \partial_j b, \tag{2.3.2}$$

где $\sum_{i,j \geqslant 0} \alpha_{ij}^{(k_1,k_2)} u^i v^j = (F_U(u,v))^{k_1} (\overline{F_U(u,v)})^{k_2}$.

С помощью соотношений (2.3.1) можно уже записать произвольную композицию операций $f = \sum_i \lambda_i \partial_i$ в таком же виде. Хотя получаемое кольцо, вообще говоря, является довольно сложным, для некоторых SU-линейных операций их композицию написать легко. А именно рассмотрим для каждого $k \in \mathbb{Z}$ SU-линейную операцию τ_k, отвечающую ряду $\tau_k(u) = [k]_U(u)$.

Предложение 2.3.7. *Имеют место равенства* $\tau_k\tau_m = \tau_{km}$.

Доказательство. Это следует из того, что морфизм τ_k имеет вид $MSU \wedge \Sigma^{-2}\mathbb{C}P^\infty \xrightarrow{1\wedge[k]} MSU \wedge \Sigma^{-2}\mathbb{C}P^\infty$, где $[k]\colon \mathbb{C}P^\infty \to \mathbb{C}P^\infty$ — отображение степени k, классифицирующее расслоение $\mathcal{O}(k)$, и $[k][m] = [km]$. $\square$

Согласно предложению 2.2.4 операции $\Psi_{(k_1,k_2)}$ являются SU-линейными. Мы можем описать коэффициенты их разложения по базису $\bar{\partial}_i$. Напомним (см. конструкцию 2.2.2), что стабильно комплексным многообразием $P^{k_1,k_2}(\bar{\eta}_i)$, где η_i — тавтологическое расслоение над $\mathbb{C}P^i$, называется $\mathbb{C}P(\bar{\eta}_i \oplus \mathbb{C}^{k_1+k_2})$ со стабильно комплексной структурой $\mathcal{T}\mathbb{C}P(\bar{\eta}_i \oplus \mathbb{C}^{k_1+k_2}) \oplus \mathbb{R}^2 = p^*(\mathcal{T}\mathbb{C}P^i) \oplus \bar{\gamma} \otimes p^*(\bar{\eta}_i) \oplus \bar{\gamma}^{\oplus k_1} \oplus \gamma^{\oplus k_2}$, где γ — тавтологическое расслоение над $\mathbb{C}P(\bar{\eta}_i \oplus \mathbb{C}^{k_1+k_2})$.

Предложение 2.3.8. *Имеет место разложение* $\Psi_{(k_1,k_2)} = \sum c_{k_1,k_2,i}\bar{\partial}_i$*, где коэффициенты* $c_{k_1,k_2,i} \in \Omega^U_{2(k_1+k_2+i)}$ *находятся из нижнетреугольной системы* $\sum\limits_{i=0}^{k} c_{k_1,k_2,i}[\mathbb{C}P^{k-i}] = [P^{(k_1,k_2)}(\bar{\eta}_k)]$.

Доказательство. Так как, согласно предложению 2.2.4, операции $\Psi_{(k_1,k_2)}$ SU-линейны, мы имеем следующие разложения $\Psi_{(k_1,k_2)} = \sum c_{k_1,k_2,i}\bar{\partial}_i$. Тогда мы имеем $\Psi_{(k_1,k_2)}(u) = \sum c_{k_1,k_2,i}u^{i+1}$. С другой стороны, так как согласно конструкции 2.2.2 $\Psi_{(k_1,k_2)} = \varphi^*(\chi_{(k_1,k_2)})$, выполнено $\Psi_{(k_1,k_2)}(u) = u\chi_{(k_1,k_2)}(\bar{\eta})$, так как u — класс Тома расслоения $\bar{\eta}$. Следовательно, $\chi_{(k_1,k_2)}(\bar{\eta}) = \sum c_{k_1,k_2,i}u^i$.

Кроме того, u^i — класс пересечения i гиперплоскостей, и следовательно, $\langle u^i, [\mathbb{C}P^k]\rangle = [\mathbb{C}P^{k-i}]$. То есть, $\langle \chi_{(k_1,k_2)}(\bar{\eta}), [\mathbb{C}P^k]\rangle = \langle \sum c_{k_1,k_2,i}u^i, [\mathbb{C}P^k]\rangle = \sum c_{k_1,k_2,i}[\mathbb{C}P^{k-i}]$. С другой стороны, так как класс кобордизмов $\chi_{(k_1,k_2)}(\bar{\eta})$ задаётся расслоением над $\mathbb{C}P^\infty$, его спаривание $\langle \chi_{(k_1,k_2)}(\bar{\eta}), [\mathbb{C}P^k]\rangle$ задаётся ограничением расслоения на $\mathbb{C}P^k$, то есть, $[P^{(k_1,k_2)}(\bar{\eta}_k)]$.

В итоге мы получаем требуемые равенства $\sum\limits_{i=0}^{k} c_{k_1,k_2,i}[\mathbb{C}P^{k-i}] = [P^{(k_1,k_2)}(\bar{\eta}_k)]$.

$\square$

Глава 3

Спектральная последовательность Адамса–Новикова для спектра MSU

3.1 Структура A^U-модуля на $MU^*(MSU)$

Чтобы применить теорему 1.4.5 о спектральной последовательности Адамса–Новикова к спектру специальных унитарных бордизмов MSU, мы должны описать структуру A^U-модуля на $MU^*(MSU)$. Главный результат здесь (теорема 3.1.2) восходит к С. П. Новикову. Мы приводим полное доказательство, восполняя некоторые технические детали, отсутствующие в [16].

Естественное отображение $BSU \to BU$ индуцирует эпиморфизм $MU^*(BU) \to MU^*(BSU)$, ядром которого служит идеал $I(d^U)$, натянутый на определённый выше характеристический класс $d^U = c_1^U \circ \det$. Используя изоморфизмы Тома

$$\varphi^*\colon MU^*(BSU) \to MU^*(MSU) \quad \text{и} \quad \varphi^*\colon MU^*(BU) \to MU^*(MU),$$

мы получаем, что естественное отображение $MSU \to MU$ индуцирует эпиморфизм $MU^*(MU) \to MU^*(MSU)$ с ядром $\varphi^*(I(d^U))$. Так как $MU^*(MU) \to MU^*(MSU)$ индуцировано отображением спектров, это отображение A^U-модулей и мы получаем

$$MU^*(MSU) = A^U/\varphi^*(I(d^U)) \quad \text{как } A^U\text{-модуль.} \tag{3.1.1}$$

Это первое наше описание искомой структуры A^U-модуля.

Лемма 3.1.1. *Если для некоторых $a, b \in A^U$ выполнено равенство $a\partial + b\Delta = 0$, то $b = 0$.*

Доказательство. Достаточно умножить равенство $a\partial + b\Delta = 0$ справа на Ψ и воспользоваться соотношениями из леммы 2.2.5. □

Теперь мы можем сформулировать основной результат о $MU^*(MSU)$, который позволит нам вычислить соответствующую спектральную последовательность Адамса–Новикова.

Теорема 3.1.2 ([16, теорема 6.1])**.**

а) A^U-модуль $MU^*(MSU)$ изоморфен $A^U/(A^U\Delta \oplus A^U\partial)$.

б) Левый аннулятор ∂ равен $A^U\Delta \oplus A^U\partial$.

Доказательство. Исходное доказательство в [16] в некоторых моментах довольно схематично. Восполнение деталей потребовало некоторой технической работы. Доказательство будет состоять из трёх частей.

I. Покажем, что $\widetilde{\partial}(MU_*(BU)) = MU_*(BSU)$. Другими словами, класс бордизмов $[X, \xi] \in MU_m(BU)$ лежит в образе $\widetilde{\partial}$ тогда и только тогда, когда он представляется парой (X, ξ), где ξ — SU-расслоение, т. е. $c_1(\xi) = 0$.

Для доказательства включения $\widetilde{\partial}(MU_*(BU)) \supset MU_*(BSU)$ возьмём $[X,\xi] \in MU_m(BU)$ с $c_1(\xi) = 0$. Рассмотрим класс бордизмов $[X \times \mathbb{C}P^1, \xi \times \eta] \in MU_{m+2}(BU)$, где η — тавтологическое линейное расслоение над $\mathbb{C}P^1$. Согласно определению операции $\widetilde{\partial}$ (конструкция 1.4.3), $\widetilde{\partial}[X \times \mathbb{C}P^1, \xi \times \eta] = [Y, \zeta]$, где $Y \subset X \times \mathbb{C}P^1$ — подмногообразие коразмерности 2, двойственное к $\overline{\det(\xi \times \eta)} = \overline{\det(\eta)} = \bar{\eta}$. Следовательно, мы можем взять $Y = X \subset X \times \mathbb{C}P^1$, и тогда

$$\zeta = \xi \times \eta|_X + \mathcal{T}(X \times \mathbb{C}P^1)|_X - \mathcal{T}X = \xi$$

как стабильные расслоения. В итоге получаем, что $\widetilde{\partial}[X \times \mathbb{C}P^1, \xi \times \eta] = [X,\xi] \in \widetilde{\partial}(MU_*(BU))$.

Для доказательства обратного включения $\widetilde{\partial}(MU_*(BU)) \subset MU_*(BSU)$ возьмём $[Y,\zeta] = \widetilde{\partial}[X,\xi]$. Мы должны показать, что класс ζ представляется SU-расслоением. Но согласно конструкции 1.4.3,

$$\widetilde{\partial}[X,\xi] = [Y, \xi|_Y + \mathcal{T}X|_Y - \mathcal{T}Y] \in MU_{m-2}(BU),$$

где $Y \subset X$ — подмногообразие коразмерности 2, двойственное к расслоению $\overline{\det\xi}|_Y$. Тогда

$$c_1(\zeta) = c_1(\xi|_Y + \mathcal{T}X|_Y - \mathcal{T}Y) = c_1(\xi|_Y) + c_1(\nu(Y)) = c_1(\det\xi|_Y) + c_1(\overline{\det\xi}|_Y) = 0,$$

и значит, ζ — SU-расслоение.

II. Покажем, что $\mathrm{Ann}_L\partial = \varphi^*(I(d^U))$, где $\mathrm{Ann}_L\partial$ обозначает левый аннулятор ∂ в A^U. Пусть $a\partial = 0$ для некоторого $a \in A^U$. Тогда $\widetilde{a}\widetilde{\partial} = 0$, что по предыдущему пункту эквивалентно тому, что $\widetilde{a}|_{MU_*(BSU)} = 0$. Другими словами, $\widetilde{a}[X,\xi] = [Y_a, f_a^*(\xi + \mathcal{T}X) - \mathcal{T}Y_a] = 0$ для любого SU-расслоения ξ. В частности, $[Y_a] = 0$ в $\varOmega_U^*$. Но согласно (1.4.1) $[Y_a] = \langle(\varphi^*)^{-1}a, [X,\xi]\rangle$. Отсюда следует, что $(\varphi^*)^{-1}a \in MU^*(BU) = \mathrm{Hom}_{\varOmega_*^U}(MU_*(BU), \varOmega_*^U)$ лежит в идеале $I(d^U)$, потому что последний состоит в точности из тех гомоморфизмов $MU_*(BU) \to \varOmega_*^U$, которые обращаются в ноль на классах бордизмов SU-расслоений. То есть, $a \in \varphi^*(I(d^U))$ и $\mathrm{Ann}_L(\partial) \subset \varphi^*(I(d^U))$. Для доказательства противоположного включения заметим, что $a \in \varphi^*(I(d^U))$ влечёт, что $a_*\partial_* = 0$ (так как $\partial_*[M]$ есть SU-многообразие). Теперь лемма 1.4.2 показывает, что $a\partial = 0$, и следовательно, $a \in \mathrm{Ann}_L(\partial)$.

III. Покажем теперь, что $\varphi^*(I(d^U)) = A^U\varDelta \oplus A^U\partial$.

Из следствия 3.1.1 вытекает, что сумма $A^U\varDelta \oplus A^U\partial$ прямая.

Включение $A^U\varDelta \oplus A^U\partial \subset \varphi^*(I(d^U))$ следует из того, что по определению $\varDelta$ и ∂ лежат в $\varphi^*(I(d^U))$ (см. конструкцию 2.2.1) и $\varphi^*(\mathcal{I}(d^U))$ является левым A^U-модулем. Рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow A^U\varDelta \oplus A^U\partial \xrightarrow{i} \varphi^*(I(d^U)) \longrightarrow \varphi^*(I(d^U))/(A^U\varDelta \oplus A^U\partial) \longrightarrow 0 \qquad (3.1.2)$$

градуированных $\varOmega_U^*$-модулей. Обозначим

$$N = \varphi^*(I(d^U))/(A^U\varDelta \oplus A^U\partial).$$

Нам нужно показать, что $N = 0$.

Для начала покажем, что N не имеет $\varOmega_U^*$-кручения. Пусть $\lambda n = 0$ для ненулевого $\lambda \in \varOmega_U^*$ и $n = x + (A^U\varDelta + A^U\partial) \in N$, $x \in \varphi^*(I(d^U))$. То есть, $\lambda x = a\varDelta + b\partial$ для некоторых $a, b \in A^U$. Умножая справа на $\varPsi$ и используя лемму 2.2.5, получаем $a = \lambda x\varPsi$ и $b\partial = \lambda x - \lambda x\varPsi\varDelta = \lambda y$. Следовательно, $\widetilde{b}\widetilde{\partial} = \widetilde{\lambda}\widetilde{y}$ и для класса бордизмов $[Y,\zeta] \in MU_*(BSU)$ мы имеем

$$\big\langle(\varphi^*)^{-1}b, [Y,\zeta]\big\rangle = \big\langle(\varphi^*)^{-1}b, \widetilde{\partial}[X,\xi]\big\rangle = \varepsilon(\widetilde{b}\widetilde{\partial}[X,\xi]) = \varepsilon(\widetilde{\lambda}\widetilde{y}\,[X,\xi]) = \lambda\varepsilon(\widetilde{y}\,[X,\xi]),$$

где первое равенство следует из пункта I, а второе — из соотношений (1.4.1). Рассмотрим естественную проекцию $p\colon MU^*(BU) \to MU^*(BSU)$, двойственную посредством кронекеровского спаривания естественному включению $MU_*(BSU) \hookrightarrow MU_*(BU)$. Тогда из равенства выше вытекает, что $p((\varphi^*)^{-1}b) = \lambda w$ для некоторого $w \in MU^*(BSU)$. Мы имеем $w = p(t)$ для некоторого $t \in MU^*(BU)$, следовательно, $p((\varphi^*)^{-1}b - \lambda t) = 0$, и мы получаем, что $(\varphi^*)^{-1}b - \lambda t \in \mathrm{Ker}\,p = I(d^U)$. Значит, $b - \lambda\varphi^*(t) \in \varphi^*(I(d^U))$ и $b\partial = \lambda\varphi^*(t)\partial$ по пункту II. В итоге получаем, что $\lambda x = a\varDelta + b\partial = \lambda(x\varPsi\varDelta + \varphi^*(t)\partial)$. Так как A^U не имеет $\varOmega_U$-кручения, мы заключаем, что $x = x\varPsi\varDelta + \varphi^*(t)\partial \in A^U\varDelta \oplus A^U\partial$, и значит, $n = 0$. Что и требовалось.

Теперь рассмотрим следующие A^U-линейные отображения:

$$p_\Delta\colon A^U \to A^U\Delta, \qquad\qquad p_\partial\colon A^U \to A^U\partial,$$
$$a \mapsto 2a\Psi\Delta, \qquad\qquad a \mapsto a[\mathbb{C}P^1]\partial.$$

Эти отображения ведут себя подобно взаимно ортогональным проекторам, а именно, они удовлетворяют следующим равенствам

$$p_\Delta|_{A^U\Delta} = 2\,\mathrm{id}_{A^U\Delta}, \qquad p_\Delta|_{A^U\partial} = 0, \qquad p_\partial|_{A^U\partial} = 2\,\mathrm{id}_{A^U\partial}, \qquad p_\partial|_{A^U\Delta} = 0.$$

Это проверяется прямым вычислением с использованием леммы 2.2.5:

$$\begin{aligned} p_\Delta(a\Delta) &= 2a\Delta\Psi\Delta = 2a\Delta,\\ p_\Delta(b\partial) &= 2b\partial\Psi\Delta = 0,\\ p_\partial(a\Delta) &= a\Delta[\mathbb{C}P^1]\partial = 0,\\ p_\partial(b\partial) &= b\partial[\mathbb{C}P^1]\partial = 2b\partial. \end{aligned}$$

(Равенства $\Delta[\mathbb{C}P^1]\partial = 0$ и $\partial[\mathbb{C}P^1]\partial = 2\partial$ следуют из предложения 2.2.3 и равенств $\Delta_*[\mathbb{C}P^1] = 0$ и $\partial_*[\mathbb{C}P^1] = 2$.) Следовательно, мы имеем A^U-линейное отображение $p = p_\Delta + p_\partial\colon A^U \to A^U\Delta \oplus A^U\partial$, удовлетворяющее $p|_{A^U\Delta\oplus A^U\partial} = 2\,\mathrm{id}_{A^U\Delta\oplus A^U\partial}$. Теперь мы воспользуемся следующим чисто алгебраическим фактом.

Лемма 3.1.3. *Пусть* $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$ *— короткая точная последовательность R-модулей для некоторого коммутативного кольца R. Предположим, что A не имеет r-кручения для некоторого фиксированного $r \in R$, и существует такой гомоморфизм $p\colon B \to A$, что $p \circ i = r\,\mathrm{id}_A$. Тогда существует мономорфизм $s\colon rC \hookrightarrow B$.*

Доказательство. Рассмотрим $rc \in rC$. Если $rc = r\pi(b) = \pi(nb)$, то $rc = \pi(rb - i(p(b)))$ и $p(rb - i(p(b))) = rp(b) - rp(b) = 0$. Следовательно, существует такой элемент $x := rb - i(p(b)) \in B$, что $\pi(x) = rc$ и $p(x) = 0$. Если x' — другой такой элемент, то $\pi(x - x') = 0$, следовательно, $x - x' = i(y)$, и $0 = p(x - x') = p(i(y)) = ry$. Так как A не имеет r-кручения, $y = 0$ и $x = x'$. Таким образом, x определяется единственным образом, и мы получаем корректно определённый гомоморфизм $s\colon rC \to B$, $rc \mapsto x$, удовлетворяющий равенствам $p \circ s = 0$ и $\pi \circ s = \mathrm{id}_{rC}$. Из последнего равенства вытекает, что s инъективен. □

Применяя эту лемму к короткой точной последовательности (3.1.2) и отображению $p = p_\Delta + p_\partial$ (ограниченному на $\varphi^* I(d^U)$), мы заключаем, что $2N$ вкладывается в $\varphi^* I(d^U) \subset A^U$. Так как N не имеет 2-кручения, то сам N также вкладывается в $\varphi^* I(d^U) \subset A^U$. Кроме того, применяя $\otimes_{\Omega_U^*}\mathbb{Z}$ к (3.1.2), мы получаем короткую точную последовательность градуированных абелевых групп

$$0 \to \big((A^U\Delta) \otimes_{\Omega_U^*} \mathbb{Z}\big) \oplus \big((A^U\partial) \otimes_{\Omega_U^*} \mathbb{Z}\big) \xrightarrow{i\otimes_{\Omega_U^*}\mathbb{Z}} \varphi^*(I(d^U)) \otimes_{\Omega_U^*} \mathbb{Z} \to N \otimes_{\Omega_U^*} \mathbb{Z} \to 0. \tag{3.1.3}$$

Инъективность второго отображения следует из равенства $(p \otimes_{\Omega_U^*} \mathbb{Z})(i \otimes_{\Omega_U^*} \mathbb{Z}) = 2\,\mathrm{id}$ и отсутствия кручения в $((A^U\Delta) \otimes_{\Omega_U^*} \mathbb{Z}\big) \oplus \big((A^U\partial) \otimes_{\Omega_U^*} \mathbb{Z})$ (эта группа описана ниже). Заметим, что $M \otimes_{\Omega_U^*} \mathbb{Z} = M/JM$ для любого Ω_U^*-модуля M, где $J \subset \Omega_U^*$ обозначает идеал элементов ненулевой степени.

Теперь мы, используя подсчёт размерностей, покажем, что $N \otimes_{\Omega_U^*} \mathbb{Z}$ — конечная группа (в каждой размерности).

Так как Δ имеет правый обратный Ψ, A^U-модуль $A^U\Delta$ — свободный с одной образующей в размерности 4. То есть, $(A^U\Delta)^{2k} = MU^{2k-4}(MU)$. Следовательно,

$$((A^U\Delta) \otimes_{\Omega_U^*} \mathbb{Z})^{2k} = (MU^{*-4}(MU) \otimes_{\Omega_U^*} \mathbb{Z})^{2k} = H^{2k-4}(MU;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{p(k-2)},$$

где $p(k)$ — количество целочисленных разбиений числа k (так как $H^*(MU;\mathbb{Z}) \cong H^*(BU;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1, c_2, \ldots]$). Кроме того,

$$\begin{aligned}(A^U\partial)^{2k} = (A^U)^{2k-2}\partial &\cong (A^U)^{2k-2}/(\mathrm{Ann}_L\,\partial)^{2k-2}\\ &= (A^U)^{2k-2}/(\varphi^* I(d^U))^{2k-2} = MU^{2k-2}(MSU),\end{aligned}$$

где третье равенство следует из пункта II, а последнее — из равенства (3.1.1). Отсюда получаем, что

$$((A^U\partial)\otimes_{\Omega_U^*}\mathbb{Z})^{2k}\cong H^{2k-2}(MSU;\mathbb{Z})=\mathbb{Z}^{\widetilde{p}(k-1)},$$

где $\widetilde{p}(k)$ — число целочисленных разбиений числа k без 1 (так как $H^*(MSU;\mathbb{Z})\cong H^*(BSU;\mathbb{Z})=\mathbb{Z}[c_2,c_3,\ldots]$). Наконец, $(\varphi^*I(d^U))\otimes_{\Omega_U^*}\mathbb{Z}=\varphi_H^*I(c_1)$, где $\varphi_H^*\colon H^*(BU,\mathbb{Z})\to H^*(MU,\mathbb{Z})$ — изоморфизм Тома в целочисленных когомологиях, и $I(c_1)$ — идеал в $H^*(BU,\mathbb{Z})$, порождённый первым универсальным классом Чженя c_1. Следовательно,

$$((\varphi^*I(d^U))\otimes_{\Omega_U^*}\mathbb{Z})^{2k}=(\varphi_H^*I(c_1))^{2k}=\mathbb{Z}^{p(k-1)}.$$

Применяя полученные равенства к $(2k)$-ой однородной компоненте последовательности (3.1.3), мы получаем

$$0\to\mathbb{Z}^{p(k-2)+\widetilde{p}(k-1)}\to\mathbb{Z}^{p(k-1)}\to(N\otimes_{\Omega_U^*}\mathbb{Z})^{2k}\to 0.$$

Теперь из равенства $p(k-1)=p(k-2)+\widetilde{p}(k-1)$ следует, что группы $(N\otimes_{\Omega_U^*}\mathbb{Z})^{2k}$ конечны.

Таким образом, мы имеем такой градуированный Ω_U^*-подмодуль N в A^U, что $(N\otimes_{\Omega_U^*}\mathbb{Z})^{2k}$ — конечная группа для каждого k. Мы должны показать, что $N=0$. Рассмотрим Ω_U^*-линейную проекцию $p_\omega\colon A^U\to\Omega_U^*$, сопоставляющую элементу $a\in A^U$ его коэффициент λ_ω в представлении $a=\sum_\omega\lambda_\omega S_\omega$ в виде ряда от операций $S_\omega\in A^U$ Ландвебера–Новикова. Так как группа $N\otimes_{\Omega_U^*}\mathbb{Z}=N/JN$ конечна в каждой размерности, группа $p_\omega(N)/Jp_\omega(N)$ также конечна в каждой размерности. Нам нужно установить, что $p_\omega(N)=0$. Мы имеем следующую алгебраическую ситуацию. Пусть R — неположительно градуированное кольцо без кручения, и пусть $I\subset R$ — такой идеал, что группа $I/(R^{<0}I)$ состоит из кручения. Тогда утверждается, что $I=0$. Действительно, рассмотрим элемент $x\in I$ максимальной возможной степени. Тогда $nx\in R^{<0}I$ для некоторого ненулевого целого числа n. Но так как степень элемента x максимальна в I, каждый ненулевой элемент из $R^{<0}I$ имеет степень строго меньшую, чем $\deg x$. Значит, $nx=0$. Так как R не имеет кручения, мы заключаем, что $x=0$ и $I=0$. Возвращаясь к нашей ситуации, мы получаем, что $p_\omega(N)=0$ для всех ω. А значит, $N=0$, что и требовалось.

Итак, мы показали, что $\varphi^*(I(d^U))=A^U\Delta\oplus A^U\partial$. Сопоставляя это равенство с (3.1.1), мы получаем пункт а) теоремы, а соединяя с равенствами из пункта II, мы получаем $\mathrm{Ann}_L\partial=A^U\Delta\oplus A^U\partial$, что доказывает пункт б). $\square$

3.2 Вычисление спектральной последовательности

Применим теперь конструкцию спектральной последовательности Адамса–Новикова (теорема 1.4.5) к спектру SU-бордизмов $X=MSU$. В результате мы получим мультипликативную спектральную последовательность со вторым членом

$$E_2^{p,q}=\mathrm{Ext}_{A^U}^{p,q}(MU^*(MSU),MU^*(pt)),$$

сходящуюся к $\pi_*(MSU)=\Omega_*^{SU}$.

Из теоремы 3.1.2 следует, что имеется свободная резольвента левых A^U-модулей:

$$0\longleftarrow MU^*(MSU)\cong A^U/(A^U\partial+A^U\Delta)\longleftarrow A^U\xleftarrow{f_0}A^U\oplus A^U\xleftarrow{f_1}A^U\oplus A^U\xleftarrow{f_2}\ldots$$

где $A^U\to A^U/(A^U\partial+A^U)$ — естественная проекция, $f_0(a,b)=a\partial+b\Delta$ и $f_i(a,b)=(a\partial+b\Delta,0)$ для $i\geqslant 1$. Мы сформулируем это более аккуратно следующим образом:

Предложение 3.2.1. *Имеется следующая свободная резольвента левых A^U-модулей:*

$$0\longleftarrow MU^*(MSU)\longleftarrow R^0\xleftarrow{f_0}R^1\xleftarrow{f_1}R^2\xleftarrow{f_2}\ldots$$

где $R^0=A^U\langle u_0\rangle$ — свободный модуль с одной образующей в размерности 0, $R^i=A^U\langle u_i,v_i\rangle$ — свободный модуль с двумя образующими, $\deg u_i=2i$, $\deg v_i=2i+2$, $i\geqslant 1$, и $f_{i-1}(u_i)=\partial u_{i-1}$, $f_{i-1}(v_i)=\Delta u_{i-1}$.

Доказательство. Мы имеем $f_{i-1}f_i = 0$, поскольку $\partial^2 = \Delta\partial = 0$. Точность в члене R^0 — это утверждение теоремы 3.1.2. Чтобы проверить точность в R^i для $i \geqslant 1$, предположим, что $0 = f_{i-1}(au_i + bv_i) = (a\partial + b\Delta)u_{i-1}$. Тогда $a\partial + b\Delta = 0$, из чего следует, что $b = 0$ и $a\partial = 0$ по следствию 3.1.1. Значит, $a \in \mathrm{Ann}_L\partial$, и следовательно, $a = a'\partial + b'\Delta$ по теореме 3.1.2 б). В итоге получаем $au_i + bv_i = au_i = f_i(a'u_{i+1} + b'v_{i+1})$, что и требовалось. $\square$

Применяя теперь функтор $\mathrm{Hom}^q_{A^U}(-, MU^*(pt))$ к резольвенте из предложения 3.2.1 и используя изоморфизмы $\Omega_U^{-q} = \Omega_q^U$, мы получаем комплекс, гомологии которого суть члены $E_2^{*,q}$ спектральной последовательности:

$$0 \longrightarrow \Omega_q^U \xrightarrow{d^0} \Omega_{q-2}^U \oplus \Omega_{q-4}^U \xrightarrow{d^1} \Omega_{q-4}^U \oplus \Omega_{q-6}^U \xrightarrow{d^2} \ldots \tag{3.2.1}$$

Дифференциалы действуют как $d^0(a) = (\partial_* a, \Delta_* a)$ и $d^i(a,b) = (\partial_* a, \Delta_* a)$, $i \geqslant 1$.

В работе [32] Коннер и Флойд ввели в рассмотрение группы

$$\Omega_q^W = \mathrm{Ker}(\Delta_*\colon \Omega_q^U \to \Omega_{q-4}^U).$$

Так как $\partial^2 = \Delta\partial = 0$, мы получаем дифференциал $\partial_*\colon \Omega_k^W \to \Omega_{k-2}^W$.

Предложение 3.2.2. *Комплекс* (3.2.1) *квазиизоморфен своему подкомплексу*

$$0 \longrightarrow \Omega_q^W \xrightarrow{\partial_*} \Omega_{q-2}^W \xrightarrow{\partial_*} \Omega_{q-4}^W \xrightarrow{\partial_*} \ldots$$

Доказательство. Рассмотрим включение $i\colon \Omega_k^W \to \Omega_k^U \oplus \Omega_{k-2}^U$, $w \mapsto (w, 0)$, для $w \in \mathrm{Ker}\,\Delta_*$. Это отображение цепных комплексов, так как $i(\partial_* w) = (\partial_* w, 0) = (\partial_* w, \Delta_* w) = d(w,0) = di(w)$. Индуцированное отображение в гомологиях инъективно, так как из $i(w) = d(a,b)$ следует, что $(w,0) = (\partial_* a, \Delta_* a)$, и значит, $w = \partial_* a$ для $a \in \mathrm{Ker}\,\Delta_* = \Omega_*^W$. Чтобы доказать сюръективность, рассмотрим цикл $(a,b) \in \Omega_k^U \oplus \Omega_{k-2}^U$. Тогда $0 = d(a,b) = (\partial_* a, \Delta_* a)$. Поскольку отображение $\Delta_*\colon \Omega_{k+2}^U \to \Omega_{k-2}^U$ сюръективно (оно имеет правое обратное Ψ), существует элемент $b' \in \Omega_{k+2}^U$ такой, что $\Delta_* b' = b$. Тогда $a - \partial_* b' \in \mathrm{Ker}\,\Delta_*$ является ∂_*-циклом, и $(a,b) - i(a - \partial_* b') = (a,b) - (a - \partial_* b', 0) = (\partial_* b', b) = d(b', 0)$, то есть, $i(a - \partial_* b')$ гомологичен (a,b). $\square$

Замечание 11. Так как $\Omega_*^W = \mathrm{Ker}\,\Delta_* = \mathrm{Hom}_{A^U}(A^U/A^U\Delta, \Omega_U^*)$, предыдущее предложение можно переформулировать, сказав, что мы имеем резольвенту

$$0 \longleftarrow MU^*(MSU) \cong A^U/(A^U\partial + A^U\Delta) \longleftarrow A^U/A^U\Delta \xleftarrow{\cdot\partial} A^U/A^U\Delta \xleftarrow{\cdot\partial} \ldots \tag{3.2.2}$$

Аналогично проверяется, что это резольвента, а так как Δ имеет правую обратную Ψ, A^U-модуль $A^U/A^U\Delta$ проективен. То есть, мы получаем проективную резольвенту A^U-модуля $MU^*(MSU)$, с помощью которой также можно вычислять $\mathrm{Ext}^{p,q}_{A^U}(MU^*(MSU), -)$. Тогда комплекс из предложения 3.2.2 получается из резольвенты (3.2.2) применением функтора $\mathrm{Hom}^q_{A^U}(-, MU^*(pt))$.

Предложение 3.2.3 ([16, Лемма 7.1])**.** *Для члена E_2 спектральной последовательности выполнено*

а) $E_2^{0,q} = \mathrm{Ker}(\partial_*\colon \Omega_q^W \to \Omega_{q-2}^W) = (\mathrm{Ker}\,\partial_*) \cap (\mathrm{Ker}\,\Delta_*) \subset \Omega_q^U$*;*

б) $E_2^{p,q} = H_{q-2p}(\Omega_*^W, \partial_*)$ *для* $p > 0$.

в) краевой гомоморфизм $h\colon \Omega_q^{SU} \to E_2^{0,q}$ *совпадает с забывающим гомоморфизмом* $\Omega_q^{SU} \to \Omega_q^W$.

Следовательно, спектральная последовательность сконцентрирована в первом квадранте (т. е., $E_r^{p,q} = 0$ для $p < 0$ или $q < 0$), $E_r^{p,q} = 0$ для нечётных q или при $q < 2p$, и дифференциалы $d_r\colon E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q+r-1}$ тривиальны для чётных r.

Доказательство. Утверждения а) и б) прямо следуют из предложения 3.2.2. Для доказательства пункта в) напомним, что краевой гомоморфизм

$$h\colon \Omega_q^{SU} \to E_2^{0,q} = \mathrm{Hom}_{A^U}^q(MU^*(MSU), \Omega_U)$$

определяется следующим образом. Для элемента $\alpha \in \Omega_q^{SU}$, представленного отображением $f\colon S^q \to MSU$ и элемента $\beta \in MU^p(MSU)$, представленного отображением $g\colon MSU \to \Sigma^p MU$ элемент $h(\alpha)(\beta) \in \Omega_U^{p-q}$ представляется композицией $g \circ f\colon S^q \to \Sigma^p MU$. Отождествление $E_2^{0,q}$ с $\mathrm{Ker}(\partial_*\colon \Omega_q^W \to \Omega_{q-2}^W)$ сопоставляет A^U-гомоморфизму $\varphi\colon MU^*(MSU) \to \Omega_U^{*-q}$ элемент $\varphi(\iota)$, где $\iota \in U^0(MSU)$ — класс, представляемый каноническим отображением спектров $MSU \to MU$. Таким образом, краевой гомоморфизм представляет собой отображение $\Omega_q^{SU} \to \Omega_q^U$, $\alpha \mapsto h(\alpha)(\iota)$, что есть в точности гомоморфизм забывания, что доказывает в). Оставшиеся утверждения следуют из того, что комплекс Ω_*^W сконцентрирован в неотрицательных чётных размерностях. □

В частности, $d_2 = 0$ и $E_2 = E_3$. Мы будем обозначать этот член просто E.

Мы имеем $E^{1,2} = H_0(\Omega_*^W, \partial_*) = \mathbb{Z}/2$, так как $\Omega_0^W = \Omega_0^U = \mathbb{Z}$, $\Omega_2^W = \Omega_2^U = \mathbb{Z}$ с образующей $[\mathbb{C}P^1]$, и $\partial_*[\mathbb{C}P^1] = 2$. Рассмотрим образующую $\theta \in E^{1,2}$. По соображениям размерности это цикл всех дифференциалов, так как она лежит на «граничной линии» $q = 2p$.

Предложение 3.2.4. *Умножение на θ определяет изоморфизм $E^{p,q} \to E^{p+1,q+2}$ для $p > 0$ и эпиморфизм $E^{0,q} \to E^{1,q+2}$ с ядром $\mathrm{Im}\,\partial_*$.*

Доказательство. Для $p > 0$ отображение $E^{p,q} \xrightarrow{\cdot\theta} E^{p+1,q+2}$ есть просто тождественное отображение $H_{q-2p}(\Omega_*^W) \to H_{q-2p}(\Omega_*^W)$. Для $p = 0$ гомоморфизм $E^{0,q} \to E^{1,q+2}$ есть естественная проекция $\mathrm{Ker}(\partial_*\colon \Omega_q^W \to \Omega_{q-2}^W)$ на $H_q(\Omega_*^W)$, и значит, его ядро есть $\mathrm{Im}\,\partial_*$. □

Отсюда следует, что $E^{p,q} = \theta E^{p-1,q-2}$ для $p \geqslant 1$. В частности, $E^{k,2k} = \mathbb{Z}/2$ с образующей θ^k, и значит, единственные ненулевые элементы на граничной линии $q = 2p$ это $1, \theta, \theta^2, \theta^3, \dots$

Рассмотрим теперь $E^{0,4} = \mathrm{Ker}(\partial_*\colon \Omega_4^W \to \Omega_2^W)$. Заметим, что $\partial_*|_{\Omega_4^U} = 0$, так как единственное число Чженя для многообразий из Ω_2^U это c_1. Следовательно, $E^{0,4} = \Omega_4^W$. Кроме того, $\Omega_4^W \cong \mathbb{Z}$ с образующей

$$K = 9[\mathbb{C}P^1]^2 - 8[\mathbb{C}P^2]$$

(этот класс бордизмов имеет характеристические числа $c_1^2 = 0$ и $c_2 = 12$). Значит, K является образующей в $E^{0,4} = \mathbb{Z}$.

Имеется потенциально нетривиальный дифференциал $d_3\colon E^{0,4} \to E^{3,6}$, см. рис. 3.1.

Предложение 3.2.5 ([16, Лемма 7.2]). *Мы имеем $d_3(K) = \theta^3$.*

Доказательство. Пусть $d_3(K) = 0$. Мы также имеем $d_i(K) = 0$ для $i > 3$, поскольку $d_i(K) \in E_i^{i,i+3}$ лежит ниже граничной линии $p = 2q$. Отсюда следует, что K является циклом всех дифференциалов, и значит, представляет элемент в $E_\infty^{0,4}$. Тогда $E_2^{0,4} = E_\infty^{0,4}$, откуда следует, что краевой гомоморфизм $\Omega_4^{SU} \to E_2^{0,4}$ сюръективен. Но этот гомоморфизм, согласно предложению 3.2.3 в), совпадает с забывающим гомоморфизмом $\Omega_4^{SU} \to \Omega_4^W$, который не может быть сюръективным, например, потому, что $\mathrm{td}(K) = 1$, тогда как род Тодда 4-мерного SU-многообразия всегда чётен (это следует, например, из классической теоремы Рохлина о сигнатуре [18]). Таким образом, мы пришли к противоречию. □

Предложение 3.2.6. *Мы имеем $E_4^{p,q} = 0$ для $p \geqslant 3$ и $E_4 = E_\infty$.*

Доказательство. Возьмём d_3-цикл $x \in E^{p,q}$ с $p \geqslant 3$. Мы имеем $x = \theta^3 y$ для некоторого $y \in E^{p-3,q-6}$ и $0 = d_3 x = \theta^3 d_3 y$. Но $d_3 y \in E^{p,q-4}$, и умножение на θ^3 биективно в этой размерности согласно предложению 3.2.4. Значит, $d_3 y = 0$. Отсюда следует, что $x = \theta^3 y = d_3(Ky)$. То есть, x — граница, и $E_4^{p,q} = 0$ для $p \geqslant 3$. По соображениям размерности отсюда следует, что $d_i = 0$ для всех $i \geqslant 4$ и $E_\infty = E_4$. □

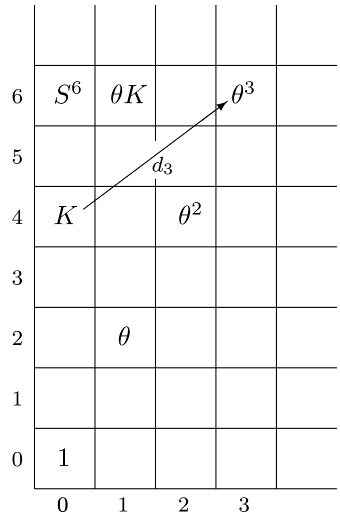

Рис. 3.1: Член $E_2 = E_3$ спектральной последовательности Адамса–Новикова для SU-бордизмов.

Отсюда получаем, что бесконечный член спектральной последовательности состоит только из трёх столбцов, и легко видеть, что $E_\infty^{1,*} = \theta E_\infty^{0,*}$, $E_\infty^{2,*} = \theta E_\infty^{1,*}$. Более того, в первых трёх столбцах мы имеем $E_\infty = \operatorname{Ker} d_3$ по соображениям размерности, и умножение на θ инъективно на $E_\infty^{1,*}$. В частности, $E_\infty^{k,2k} = E^{k,2k} = \mathbb{Z}/2$ с образующей θ^k для $0 \leqslant k \leqslant 2$, и $E_\infty^{k,2k} = 0$ для $k \geqslant 3$.

Из предложения 3.2.6 следует, что для фильтрации Адамса–Новикова на $\varOmega^{SU}$ выполнено $F^{p,q} = 0$ при $p \geqslant 3$, то есть, фильтрация состоит только из трёх членов:

$$\varOmega_n^{SU} = F^{0,n} \supset F^{1,n+1} \supset F^{2,n+2} = E_\infty^{2,n+2}.$$

Для нечётного $n = 2k+1$ мы имеем $F^{0,2k+1}/F^{1,2k+2} = E_\infty^{0,2k+1} = 0$ и $F^{2,2k+3} = E_\infty^{2,2k+3} = 0$ согласно предложению 3.2.3. Следовательно,

$$\varOmega_{2k+1}^{SU} = E_\infty^{1,2k+2}. \tag{3.2.3}$$

Для чётного $n = 2k$ мы имеем $F^{1,2k+1}/F^{2,2k+2} = E_\infty^{1,2k+1} = 0$, и значит, мы получаем короткую точную последовательность

$$0 \to E_\infty^{2,2k+2} \to \varOmega_{2k}^{SU} \to E_\infty^{0,2k} \to 0. \tag{3.2.4}$$

Пример 3.2.7. В малых размерностях мы имеем следующее.

- $\varOmega_0^{SU} = E_\infty^{0,0} = E^{0,0} \cong \mathbb{Z}$, так как $E_\infty^{2,2} = 0$.
- $\varOmega_1^{SU} = E_\infty^{1,2} = E^{1,2} \cong \mathbb{Z}/2$ с образующей θ.
- $\varOmega_2^{SU} = E_\infty^{2,4} \cong \mathbb{Z}/2$ с образующей θ^2, поскольку $0 = E^{0,2} = \operatorname{Ker} \partial_* \subset \varOmega_2^W$ (напомним, что группа $\varOmega_2^W$ порождена $[\mathbb{C}P^1]$ и $\partial_*[\mathbb{C}P^2] = 2$).
- $\varOmega_3^{SU} = E_\infty^{1,4} = \theta E_\infty^{0,2} = 0$.
- $\varOmega_4^{SU} = E_\infty^{0,4} \cong \mathbb{Z}$ с образующей $2K$. Равенство $\varOmega_4^{SU} = E_\infty^{0,4}$ следует из (3.2.4), так как $E_\infty^{2,6} = \theta^2 E_\infty^{0,2} = 0$. Образующей группы $E_\infty^{0,4} = \operatorname{Ker} d_3$ является $2K$, так как $d_3(K) = \theta^3$.
- $\varOmega_5^{SU} = E_\infty^{1,6} = \theta E_\infty^{0,4} = 0$, так как $\theta \cdot 2K = 0$.

Теорема 3.2.8 ([16, Следствие 7.1])**.**

а) *Ядро забывающего гомоморфизма $\Omega^{SU}_* \to \Omega^U_*$ состоит в точности из элементов кручения.*

б) *Каждый элемент кручения из Ω^{SU}_* имеет порядок 2. Более точно,*

$$\Omega^{SU}_{2k+1} = \theta\Omega^{SU}_{2k}, \quad \operatorname{Tors}\Omega^{SU}_{2k} = \theta^2\Omega^{SU}_{2k-2}.$$

Доказательство. Мы имеем $\Omega^{SU}_{2k+1} = E^{1,2k+2}_\infty = \theta E^{0,2k}_\infty = \theta\Omega^{SU}_{2k}$, так как отображение $\Omega^{SU}_{2k} \to E^{0,2k}_\infty$ сюръективно. Отсюда также следует, что Ω^{SU}_{2k+1} целиком состоит из элементов 2-кручения, что даёт пункты а) и б) в нечётных размерностях.

В чётных размерностях мы воспользуемся точной последовательностью (3.2.4). Так как $E^{0,2k}_\infty \subset E^{0,2k} \subset \Omega^W_* \subset \Omega^U_*$ свободно от кручения, а $E^{2,2k+2}_\infty = \theta^2 E^{0,2k-2}_\infty$ целиком состоит из 2-кручения, мы получаем $\operatorname{Tors}\Omega^{SU}_{2k} = E^{2,2k+2}_\infty = \theta^2 E^{0,2k-2}_\infty = \theta^2\Omega^{SU}_{2k-2}$, что доказывает пункт б). Чтобы закончить доказательство пункта а), осталось заметить, что ядро гомоморфизма $\Omega^{SU} \to \Omega^U$, согласно предложению 3.2.3 в), совпадает с ядром гомоморфизма $\Omega^{SU}_{2k} \to E^{0,2k}_\infty$, которое равно кручению в Ω^{SU}_{2k} по предыдущему. □

Следующая лемма даёт точную последовательность, полученную Коннером и Флойдом [32], которая играет ключевую роль при вычислении кручения в Ω^{SU}_*.

Лемма 3.2.9 ([16, Следствие 7.2]). *Имеется короткая точная последовательность $\mathbb{Z}/2$-модулей*

$$0 \to \Omega^{SU}_{2k-1} \to H_{2k-2}(\Omega^W_*, \partial_*) \to \Omega^{SU}_{2k-5} \to 0.$$

Доказательство. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Omega^{SU}_{2k-1} = E^{1,2k}_\infty & \longrightarrow & E^{1,2k} & \xrightarrow{d_3^{1,2k}} & E^{4,2k+2} & \xrightarrow{d_3^{4,2k+2}} & E^{7,2k+4} \\
 & & & & & & \cong\big\uparrow\cdot\theta^3 & & \cong\big\uparrow\cdot\theta^3 \\
 & & & & 0 \longrightarrow \Omega^{SU}_{2k-5} & \longrightarrow & E^{1,2k-4} & \xrightarrow{d_3^{1,2k-4}} & E^{4,2k-2}
\end{array}$$

Её строки точны согласно предложению 3.2.6 и (3.2.3). Из коммутативности диаграммы мы имеем $\operatorname{Im} d_3^{1,2k} = \operatorname{Ker} d_3^{4,2k+2} \cong \operatorname{Ker} d_3^{1,2k-4} = \Omega^{SU}_{2k-5}$. Отсюда получаем короткую точную последовательность

$$0 \to \Omega^{SU}_{2k-1} \to E^{1,2k} \to \Omega^{SU}_{2k-5} \to 0.$$

Осталось заметить, что $E^{1,2k} = H_{2k-2}(\Omega^W_*, \partial_*)$. □

Замечание 12. Точная последовательность из леммы 3.2.9 есть производная точная последовательность 5-членной точной последовательности Коннера–Флойда (4.4.2).

Гомологии комплекса (Ω^W_*, ∂_*) были вычислены Коннером и Флойдом в [32]. Мы приводим это вычисление в теореме 4.1.14. По поводу связи этого вычисления со спектральной последовательностью Адамса–Новикова см. [4, §5].

Теорема 3.2.10 ([32, Теорема 11.8]). *$H(\Omega^W_*, \partial_*)$ есть полиномиальная алгебра над $\mathbb{Z}/2$ следующего вида:*

$$H(\Omega^W_*, \partial_*) \cong \mathbb{Z}/2[\omega_2, \omega_{4k} \colon k \geqslant 2], \quad \deg\omega_2 = 4,\ \deg\omega_{4k} = 8k.$$

Замечание 13. Умножение в $H(\Omega^W_*, \partial_*)$ индуцировано умножением в Ω^U_*, см. раздел 4.5. Оно совпадает с умножением в члене E_2 спектральной последовательности Адамса–Новикова.

В итоге мы получаем следующую информацию о свободной части и кручении групп Ω^{SU}:

Теорема 3.2.11.

а) $\operatorname{Tors}\Omega^{SU}_n = 0$ *за исключением* $n = 8k+1$ *или* $8k+2$, *когда* $\operatorname{Tors}\Omega^{SU}_n$ *есть* $\mathbb{Z}/2$*-модуль размерности, равной количеству разбиений числа* k.

б) $\Omega^{SU}_{2i}/\operatorname{Tors}$ *изоморфно образу забывающего гомоморфизма* $\alpha\colon \Omega^{SU}_{2i}\to\Omega^{U}_{2i}$*, который равен* $\operatorname{Ker}(\partial_*\colon \Omega^W_{2i}\to\Omega^W_{2i-2})$*, если* $2i\not\equiv 4 \mod 8$*, и* $\operatorname{Im}(\partial_*\colon \Omega^W_{2i}\to\Omega^W_{2i-2})$*, если* $2i\equiv 4 \mod 8$*.*

в) Существуют классы SU-бордизмов $w_{4k}\in\Omega^{SU}_{8k}$*,* $k\geqslant 1$ *такие, что любой элемент кручения из* Ω^{SU} *единственным образом представляется в виде* $P\cdot\theta$ *или* $P\cdot\theta^2$*, где* P *— многочлен от* w_{4k} *с коэффициентами равными* 0 *или* 1*. Каждый элемент* $w_{4k}\in\Omega^{SU}_{8k}$ *определяется из условия, что он представляет полиномиальную образующую* ω_{4k} *в* $H_{8k}(\Omega^W_*,\partial_*)$ *для* $k\geqslant 2$*, а* $w_4\in\Omega^{SU}_8$ *— представляет* ω_2^2*.*

Замечание 14. Единственная неоднозначность в определении w_{4k} заключается в выборе ∂_*-цикла из Ω^W_{8k}, представляющего полиномиальную образующую ω_{4k} или ω_2^2 из теоремы 3.2.10. Коль скоро выбраны представители $w_{4k}\in\Omega^W_{8k}$, они уже однозначно поднимаются до $w_{4k}\in\Omega^{SU}_{8k}$, так как забывающий гомоморфизм $\alpha\colon\Omega^{SU}_{8k}\to\Omega^W_{8k}$ есть мономорфизм на $\operatorname{Ker}\partial_*$ в размерности $8k$, согласно утверждениям а) и б).

Доказательство теоремы 3.2.11. Докажем пункт а). Из теоремы 3.2.10 следует, что $H_{q-2p}(\Omega^W_*)=0$ кроме случаев $q-2p=8k$ или $q-2p=8k+4$. Сначала рассмотрим случай нечётного n. Лемма 3.2.9 даёт точную последовательность

$$0\to\Omega^{SU}_{8k-1}\to H_{8k-2}(\Omega^W_*)\to\Omega^{SU}_{8k-5}\to 0,$$

из которой следует, что $\Omega^{SU}_{8k-1}=\Omega^{SU}_{8k-5}=0$. Также мы имеем точную последовательность

$$0\to\Omega^{SU}_{8k+1}\to H_{8k}(\Omega^W_*)\to\Omega^{SU}_{8k-3}\to 0,$$

которая расщепляется, так как $H(\Omega^W_*)$ является $\mathbb{Z}/2$-модулем. То есть, $\Omega^{SU}_{8k+1}\oplus\Omega^{SU}_{8k-3}\cong H_{8k}(\Omega^W_*)\cong H_{8k+4}(\Omega^W_*)\cong\Omega^{SU}_{8k+5}\oplus\Omega^{SU}_{8k+1}$. Следовательно, $\Omega^{SU}_{8k-3}=\Omega^{SU}_{8k+5}$. Так как это верно для всех k, мы получаем, что $\Omega^{SU}_{8k+5}=0$. В итоге получаем, что единственной нетривиальной группой Ω^{SU}_n с нечётным n остаётся Ω^{SU}_{8k+1}, и лемма 3.2.9 даёт изоморфизм $\Omega^{SU}_{8k+1}\cong H_{8k}(\Omega^W_*)$. Теперь из теоремы 3.2.10 следует, что Ω^{SU}_{8k+1} — $\mathbb{Z}/2$-модуль размерности, равной числу разбиений k.

Для чётного $n=2m$ теорема 3.2.8 даёт $\operatorname{Tors}\Omega^{SU}_{2m}=\theta\Omega^{SU}_{2m-1}$. Согласно предыдущему абзацу, эта группа нетривиальна только при $2m=8k+2$. Умножение на θ определяет изоморфизм

$$\Omega^{SU}_{8k+1}=E^{1,8k+2}_\infty\xrightarrow{\cdot\theta}E^{2,8k+4}_\infty=\operatorname{Tors}\Omega^{SU}_{8k+2}.$$

Это доказывает пункт а).

Для доказательства пункта б) напомним, что $\operatorname{Tors}\Omega^{SU}_q$ совпадает с ядром забывающего гомоморфизма $\Omega^{SU}_q\to\Omega^W_q$ по теореме 3.2.8 а), а сам забывающий гомоморфизм совпадает с краевым гомоморфизмом $h\colon\Omega^{SU}_q\to E_2^{0,q}$, согласно предложению 3.2.3 в). Следовательно, $\Omega^{SU}/\operatorname{Tors}\cong\operatorname{Im}h$. Кроме того, $\operatorname{Im}h=\operatorname{Ker}(d_3\colon E_3^{0,*}\to E^{3,*+2})$ по предложению 3.2.6.

Тогда для $2i\neq 8k,8k+4$ мы имеем

$$d_3(E^{0,2i})=\theta^{-1}d_3(\theta E^{0,2i})=\theta^{-1}d_3(E^{1,2i+2})=0$$

так как $E^{1,2i+2}=H_{2i}(\Omega^W_*)=0$ по теореме 3.2.10. Следовательно, в этом случае получаем, что $\Omega^{SU}_{2i}/\operatorname{Tors}\cong\operatorname{Ker}d_3=E^{0,2i}=\operatorname{Ker}\partial_*$.

Для $2i=8k$ заметим, что

$$0=\Omega^{SU}_{8k-3}=E^{1,8k-2}_\infty=\operatorname{Ker}d_3^{1,8k-2}\subset E^{1,8k-2}.$$

Отсюда получаем

$$0=\operatorname{Ker}(d_3^{1,8k-2}\theta^{-2})=\operatorname{Ker}(\theta^{-2}d_3^{3,8k+2})=\operatorname{Ker}d_3^{3,8k+2}.\qquad(3.2.5)$$

А значит, $\operatorname{Im}d_3^{0,8k}\subset\operatorname{Ker}d_3^{3,8k+2}=0$, и $\Omega^{SU}_{8k}/\operatorname{Tors}\cong\operatorname{Ker}d_3^{0,8k}=E^{0,8k}=\operatorname{Ker}\partial_*$.

Осталось рассмотреть случай $2i = 8k+4$. Точная последовательность (3.2.4) даёт $\varOmega^{SU}_{8k+2} = E^{0,8k+4}_\infty$, так как $E^{2,8k+6}_\infty \subset E^{2,8k+6} = H_{8k+2}(\varOmega^W_*) = 0$. Рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \varOmega^{SU}_{8k+4} = E^{0,8k+4}_\infty \arrow[r] & E^{0,8k+4} \arrow[r, "d_3^{0,8k+4}"] \arrow[d, "\cdot\theta^3"] & E^{3,8k+6} \arrow[d, "\cdot\theta^3", "\cong"'] \\
& 0 \arrow[r] & E^{3,8k+10} \arrow[r, "d_3^{3,8k+10}"] & E^{6,8k+12}
\end{tikzcd}$$

Точность нижней строки следует из (3.2.5). Из этой диаграммы получаем, что

$$\varOmega^{SU}_{8k+4} \cong \operatorname{Ker} d_3^{0,8k+4} = \operatorname{Ker}(E^{0,8k+4} \xrightarrow{\cdot\theta^3} E^{3,8k+10}) = \operatorname{Ker}(E^{0,8k+4} \xrightarrow{\cdot\theta} E^{1,8k+6}) = \operatorname{Im}\partial_*,$$

где два последних равенства следуют из предложения 3.2.4. Это завершает доказательство пункта б).

Осталось доказать пункт в). Используя только что доказанный пункт б) и теорему 3.2.8 б), мы можем отождествить гомоморфизм $\varOmega^{SU}_{8n} \xrightarrow{\cdot\theta} \varOmega^{SU}_{8n+1}$ с проекцией $\operatorname{Ker}\partial_* \to \operatorname{Ker}\partial_*/\operatorname{Im}\partial_* = H_{8n}(\varOmega^W_*)$. Возьмём тогда элемент $\alpha \in \varOmega^{SU}_{8n+1}$ и запишем его, согласно теореме 3.2.10, в виде многочлена $P(\omega_{4k})$ от ω_{4k} с коэффициентами из $\mathbb{Z}/2$. (Чтобы не усложнять обозначения, здесь и далее в размерности 4 подразумевается ω_2^2 вместо несуществующего ω_4.) Выберем поднятия $w_{4k} \in \varOmega^{SU}_{8k} = \operatorname{Ker}\partial_* \subset \varOmega^W_{4k}$ классов ω_{4k}; тогда $a = P(w_{4k})$ отображается в α. Другими словами, $\alpha = P(w_{4k}) \cdot \theta$, где теперь P понимается как многочлен с коэффициентами 0 и 1. Если $\alpha = Q(w_{4k}) \cdot \theta$ для другого такого многочлена Q, то $P(\omega_{4k}) = Q(\omega_{4k})$, откуда следует, что $P = Q$, так как ω_{4k} алгебраически независимы над $\mathbb{Z}/2$ и оба многочлена P и Q имеют коэффициенты 0 и 1. В итоге, каждый элемент $\varOmega^{SU}_{8k+1}$ единственным образом представляется в виде $P\cdot\theta$, что и утверждалось. Для элементов из $\operatorname{Tors}\varOmega^{SU}_{8k+2}$ осталось вспомнить, что $\varOmega^{SU}_{8k+1} \xrightarrow{\cdot\theta} \operatorname{Tors}\varOmega^{SU}_{8k+2}$ — изоморфизм. Это завершает доказательство теоремы. $\square$

Глава 4

Теория c_1-сферических бордизмов

4.1 Кольцо Ω_*^W

В главе 3 мы видели, как аддитивная структура Ω_*^{SU} связана с подгруппами $\Omega_*^W = \ker \varDelta_* \in \Omega_*^U$. В частности, теорема 3.2.11 б) связывает группу $\Omega_*^{SU} / \operatorname{Tors}$ с подгруппой $\operatorname{Ker}(\partial_* \colon \Omega_*^W \to \Omega_*^W) = (\operatorname{Ker} \partial_*) \cap (\operatorname{Ker} \varDelta_*)$ в Ω_*^U. В этом разделе мы более подробно опишем подгруппу Ω_*^W, введём на ней структуру кольца и опишем с его помощью структуру кольца Ω_*^{SU}.

4.1.1 Описание подгруппы Ω_*^W через характеристические числа Чженя

Лемма 4.1.1. *Для целых $k_, k_2 \geqslant 0$ обозначим $k = k_1 + k_2$. Пусть $[M] \in \Omega^U$ — класс бордизмов, у которого равны нулю все числа Чженя, содержащие множитель c_1^k. Тогда $(\varDelta_{(k_1,k_2)})_*[M] = 0$. Кроме того, если $k_1 - k_2 \neq 1$, то верно и обратное.*

Доказательство. Напомним (см. конструкцию 2.2.1), что $(\varDelta_{(k_1,k_2)})_*[M] = [P]$, где $j \colon P \hookrightarrow M$ — такое подмногообразие, что

$$\mathcal{T}P \oplus j^*(\det \mathcal{T}M)^{\oplus k_1} \oplus j^*(\overline{\det \mathcal{T}M})^{\oplus k_2} = j^*(\mathcal{T}M).$$

Предположим, что $c_1^k c_\omega[M] = 0$ для всех ω. Мы должны показать, что $c_\omega[P] = 0$. Вычисляя полный класс Чженя расслоения выше, мы получаем

$$c(P)(1 + j^*c_1(M))^{k_1}(1 - j^*c_1(M))^{k_2} = j^*c(M). \tag{4.1.1}$$

или

$$c(P) = j^*\left(\frac{c(M)}{(1 + c_1(M))^{k_1}(1 - c_1(M))^{k_2}}\right) = j^*\,\widetilde{c}(M),$$

где $\widetilde{c}(M)$ — некоторый многочлен от классов Чженя многообразия M. Тогда для любого $\omega = (i_1, \ldots, i_p)$ мы имеем

$$\bigl\langle c_\omega(P), [P]_{\mathbb{Z}}\bigr\rangle = \bigl\langle j^*\,\widetilde{c}_\omega(M), [P]_{\mathbb{Z}}\bigr\rangle = \bigl\langle \widetilde{c}_\omega(M), c_1^{k_1}(M)(-c_1(M)^{k_2}) \cap [M]_{\mathbb{Z}}\bigr\rangle = \bigl\langle (-1)^{k_2} c_1^k\,\widetilde{c}_\omega(M), [M]_{\mathbb{Z}}\bigr\rangle = 0.$$

С другой стороны, из формулы (4.1.1) мы получаем, что $c_1(P) + (k_1 - k_2)j^*c_1(M) = j^*c_1(M)$, то есть, $c_1(P) = (1 - (k_1 - k_2))j^*c_1(M)$. Умножая теперь формулу (4.1.1) на $(1 - (k_1 - k_2))^k$, получаем:

$$c(P)((1 - (k_1 - k_2)) + c_1(P))^k = (1 - (k_1 - k_2))^k j^*c(M),$$

то есть, $(1 - (k_1 - k_2))^k j^*c_i(M) = \widetilde{c}_i(P)$ для некоторых многочленов $\widetilde{c}_i$ от классов Чженя.

Отсюда уже получаем

$$\bigl\langle \widetilde{c}_\omega(P), [P]_{\mathbb{Z}}\bigr\rangle = (1 - (k_1 - k_2))^k \bigl\langle j^*c_\omega(M), [P]_{\mathbb{Z}}\bigr\rangle = (1 - (k_1 - k_2))^k \bigl\langle (-1)^{k_2} c_1^k c_\omega(M), [M]_{\mathbb{Z}}\bigr\rangle$$

Следовательно, если $(\Delta_{(k_1,k_2)})_*[M] = [P] = 0$, то все числа Чженя многообразия M, содержащие c_1^k, равны нулю после умножения на $(1-(k_1-k_2))^k$. То есть, и сами эти числа равны нулю при $(k_1-k_2)\neq 1$.

□

Замечание 15. Заметим, что, например, для операции $\partial = \partial_1$ обратное утверждение леммы 4.1.1 не имеет места. Например, каждый элемент из Ω_4^U лежит в $\operatorname{Ker}\partial$, но $c_1^2[\mathbb{C}P^2] = 9 \neq 0$.

Следствие 4.1.2 ([32, Теорема 6.4]). *Группа Ω_*^W совпадает с подгруппой в Ω_*^U, для которой равны нулю все числа Чженя, содержащие c_1^2.*

Следствие 4.1.3. *Операции ∂_k обращаются в ноль на Ω_*^W при $k \geqslant 2$.*

Доказательство. Согласно лемме 4.1.1 при $k\geqslant 2$ операция ∂_k обращается в ноль на классах бордизмов многообразий, для которых числа Чженя, содержащие c_1^k равны нулю. С другой стороны, по той же лемме 4.1.1 для классов бордизмов из $\Omega_*^W = \ker\Delta_*$ равны нулю все числа Чженя, содержащие c_1^2. □

Несмотря на то что $\Omega_*^W = \operatorname{Ker}\Delta_*$ *не является* подкольцом в Ω_*^U, на Ω_*^W можно определить умножение, относительно которого включение $\Omega_*^{SU}/\operatorname{Tors}\subset\Omega_*^W$ является кольцевым гомоморфизмом. Это приводит к описанию кольцевой структуры в $\Omega_*^{SU}/\operatorname{Tors}$. Мы рассмотрим здесь этот подход, следуя [32], [51] и [21].

Нам потребуются следующие мультипликативные свойства операций ∂ и Δ на Ω_*^W.

Лемма 4.1.4. *Для любых элементов $a, b\in\Omega_*^W$ выполнено*

$$\partial(ab) = a\,\partial b + b\,\partial a - [\mathbb{C}P^1]\,\partial a\,\partial b,$$
$$\Delta(ab) = -2\,\partial a\,\partial b,$$

где умножение понимается в Ω_*^U.

Доказательство. Утверждение леммы является следствием формулы (2.3.1) из теоремы 2.3.6, формулы (2.3.2) из замечания 10 и следствия 4.1.3. □

4.1.2 Проекторы Коннера–Флойда и Стонга

Прямая сумма $\Omega_*^W = \bigoplus_{i\geqslant 0}\Omega_{2i}^W$ не является подкольцом в Ω_*^U: мы имеем $[\mathbb{C}P^1]\in\Omega_2^W$, но $c_1^2[\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}P^1] = 8\neq 0$, и значит, $[\mathbb{C}P^1]\times[\mathbb{C}P^1]\notin\Omega_4^W$. Однако можно определить кольцевую структуру в Ω_*^W, используя проекторы $\Omega_*^U\to\Omega_*^U$ с образом Ω_*^W.

Начнём с проектора, который определяется алгебраически и восходит к Коннеру и Флойду [32]. Напомним, что в конструкции 2.2.2 была определена SU-линейная операция $\Psi\colon MU\to\Sigma^{-4}MU$, являющаяся правой обратной к Δ.

Предложение 4.1.5. *Операция $\pi_{CF} = \mathrm{id}-\Psi\Delta\colon MU\to MU$ является SU-линейным идемпотентом, для которого $\partial(\pi_{CF}) = (\pi_{CF})\partial = \partial$. Причём для действия на гомотопических группах выполнено $\operatorname{Im}(\pi_{CF})_* = \Omega_*^W$, $\operatorname{Ker}(\pi_{CF})_* = \Psi_*(\Omega_*^U)$.*

Доказательство. Соотношение $\Delta\Psi = \mathrm{id}$ из леммы 2.2.5 влечёт, что $(\mathrm{id}-\Psi\Delta)^2 = \mathrm{id}-\Psi\Delta$, то есть, π_{CF} — SU-линейный идемпотент. Из этого же соотношения вытекает, что $\Delta(\pi_{CF}) = 0$, то есть, $\operatorname{Im}(\pi_{CF})_*\subset\operatorname{Ker}\Delta_* = \Omega_*^W$. Включение же $\operatorname{Im}(\pi_{CF})_*\supset\operatorname{Ker}\Delta_*$ вытекает из того, что $(\pi_{CF})_*|_{\Omega_*^W} = \mathrm{id}|_{\Omega_*^W}$. Равенство $\operatorname{Ker}(\pi_{CF})_* = \operatorname{Im}\Psi_*$ также следует из соотношения $\Delta_*\Psi_* = \mathrm{id}$. Наконец, мы имеем $\partial(\mathrm{id}-\Psi\Delta) = \partial-\partial\Psi\Delta = \partial$ и $(\mathrm{id}-\Psi\Delta)\partial = \partial-\Psi\Delta\partial = \partial$, так как $\partial\Psi = 0$ и $\Delta\partial = 0$, согласно лемме 2.2.5. □

Следствие 4.1.6. $\operatorname{rank}\Omega_{2n}^W = \operatorname{rank}\Omega_{2n}^U - \operatorname{rank}\Omega_{2n-4}^U$.

Доказательство. Из предыдущего предложения следует, что $\Omega_*^U = \operatorname{Ker}(\pi_{CF})_*\oplus\operatorname{Im}(\pi_{CF})_*$. Мы имеем $(\operatorname{Im}(\pi_{CF})_*)_{2n} = \Omega_{2n}^W$ и $(\operatorname{Ker}(\pi_{CF})_*)_{2n} = \Psi_*(\Omega_{2n-4}^U)\cong\Omega_{2n-4}^U$, поскольку Ψ_* инъективно (оно имеет левое обратное Δ). □

Из следствия 4.1.6 мы получаем, что ранги свободных абелевых групп $\varOmega^W_*$ такие же, как и градуированных компонент кольца $\mathbb{Z}[x_1, x_i,\ i \geqslant 3]$, $\deg x_i = 2i$.

Мы будем называть идемпотент π_{CF} *проектором Коннера–Флойда.*

Используя проектор $\pi_{CF} = \mathrm{id} - \varPsi\varDelta$, определим *скрученное произведение* элементов $a, b \in \varOmega^W_*$ как

$$a * b = \pi_{CF}(a \cdot b),$$

где $\cdot$ обозначает умножение в $\varOmega^U_*$. Геометрическое описание этого умножения даётся следующим предложением.

Предложение 4.1.7. *Мы имеем*

$$a * b = a \cdot b + 2[V^4] \cdot \partial a \cdot \partial b, \tag{4.1.2}$$

где V^4 — многообразие $\mathbb{C}P^2$ со стабильно комплексной структурой $\mathcal{T}\mathbb{C}P^2 \oplus \mathbb{R}^2 \cong \bar\eta \oplus \bar\eta \oplus \eta$.

Доказательство. Мы должны проверить, что $\varPsi\varDelta(a \cdot b) = -2[V^4] \cdot \partial a \cdot \partial b$. По лемме 4.1.4, $\varDelta(a \cdot b) = -2\partial a \cdot \partial b$. Тогда из SU-линейности $\varPsi$ получаем, что $\varPsi\varDelta(a \cdot b) = -2\varPsi(1) \cdot \partial a \cdot \partial b$. Осталось заметить, что согласно определению $\varPsi$ (см. конструкцию 2.2.2) $\varPsi_*(1) = [V^4]$. □

Замечание 16. Вычисляя числа Чженя, несложно проверить, что $[V^4] = [\mathbb{C}P^1]^2 - [\mathbb{C}P^2]$ в $\varOmega^U_2$. Действительно, мы имеем $c_1^2([\mathbb{C}P^1]^2) = 8$, $c_1^2(\mathbb{C}P^2) = 9$, $c_2([\mathbb{C}P^1]^2) = 4$ и $c_2([\mathbb{C}P^2]) = 3$. То есть, $c_1^2([\mathbb{C}P^1]^2 - [\mathbb{C}P^2]) = -1$ и $c_2([\mathbb{C}P^1]^2 - [\mathbb{C}P^2]) = 1$. С другой стороны, обозначив через u первый класс Чженя расслоения $\bar\eta$ над $\mathbb{C}P^2$, мы получаем для полного класса Чженя V^4: $c(V^4) = (1+u)^2(1-u) = 1 + u - u^2$. При этом стабильно комплексная структура $\mathcal{T}\mathbb{C}P^2 \oplus \mathbb{R}^2 \cong \bar\eta \oplus \bar\eta \oplus \eta$ определяет ориентацию, при которой $\langle u^2, [V^4]_{\mathbb{Z}}\rangle = -1$. Следовательно, $c_1^2([V^4]) = -1$, $c_2([V^4]) = 1$.

Теорема 4.1.8. *Прямая сумма $\varOmega^W = \bigoplus_{i \geqslant 0} \varOmega^W_{2i}$ является ассоциативным коммутивным кольцом с единицей относительно умножения $*$.*

Доказательство. Мы должны только проверить, что умножение $*$ ассоциативно. Это прямое вычисление с использованием формулы из предложения 4.1.7 (см. доказательство теоремы 4.5.8). □

Определим теперь другой проектор π_{St}, восходящий к Стонгу и определяемый геометрически следующим образом.

Конструкция 4.1.9 ([21, Глава VIII])**.** Для стабильно комплексного многообразия M определим $(\pi_{St})_*[M]$ как класс бордизмов подмногообразия $N \subset \mathbb{C}P^1 \times M$, двойственный к $\bar\eta \otimes \det(\mathcal{T}M)$. То есть, $(\pi_{St})_*[M] = \varepsilon D_U(c_1^U(\bar\eta \otimes \det(\mathcal{T}M)))$. При этом $\det\mathcal{T}N$ классифицируется композицией $N \subset \mathbb{C}P^1 \times M \to \mathbb{C}P^1$. Следовательно, $\det\mathcal{T}N \oplus \overline{\det\mathcal{T}N}$ тривиально, и следовательно, $\varDelta_*[N] = 0$, то есть, $(\pi_{St})_*$ принимает значения в $\operatorname{Ker}\varDelta_* = \varOmega^W_*$.

Предложение 4.1.10. *Для любого $a \in \varOmega^U_*$ имеет место формула*

$$(\pi_{St})_*(a) = a + \sum_{k \geqslant 2} \alpha_{1k}(\partial_k)_* a, \tag{4.1.3}$$

где α_{1k} — коэффициенты формальной группы F_U в комплексных кобордизмах. Более того,

$$\partial_*(\pi_{St})_* = (\pi_{St})_*\partial_* = \partial_*. \tag{4.1.4}$$

Замечание 17. Согласно лемме 2.1.4, формула (4.1.3) единственным образом продолжает $(\pi_{St})_*$ до SU-линейной когомологической операции $\pi_{St} \in [MU, MU]$.

Доказательство предложения 4.1.10. Пусть $a = [M]$. Из определения $(\pi_{St})_*$ следует, что

$$(\pi_{St})_*(a) = \varepsilon D_U(c_1^U(\bar\eta \otimes \det\mathcal{T}M)),$$

где $D_U\colon MU^2(\mathbb{C}P^1 \times M^n) \xrightarrow{\cong} MU_n(\mathbb{C}P^1 \times M^n)$ — изоморфизм двойственности Пуанкаре–Атья и $\varepsilon\colon MU_*(X) \to MU_*(pt)$ — аугментация.

Обозначим $u = c_1^U(\bar\eta)$, $v = c_1^U(\det \mathcal{T}M) \in MU^2(\mathbb{C}P^1 \times M)$. Тогда

$$\varepsilon D_U(c_1^U(\bar\eta \otimes \det \mathcal{T}M)) = \varepsilon D_U(F(u,v)) = \varepsilon D_U(u) + \varepsilon D_U(v) + \sum_{i,j\geqslant 1} \alpha_{ij} \varepsilon D_U(u^i v^j) = \\ = [M] + [\mathbb{C}P^1]\partial[M] + \sum_{j\geqslant 1} \alpha_{1j}\partial_j[M],$$

где мы использовали равенства $u^2 = 0$, $\varepsilon D_U(uv^j) = (\partial_j)_*[M]$ и $\varepsilon D_U(v) = [\mathbb{C}P^1](\partial)_*[M]$. Для доказательства формулы (4.1.3) теперь осталось заметить, что $\alpha_{11} = -[\mathbb{C}P^1]$.

Равенство $(\pi_{St})_*\partial_* = \partial_*$ получается применением формулы (4.1.3) к $\partial_* a$ в силу тождеств $\partial_k \partial = 0$.

Осталось доказать, что $\partial_*(\pi_{St})_* = \partial_*$. Пусть $(\pi_{St})_*[M] = [N]$. Нам нужно проверить, что $\partial_*[N] = \partial_*[M]$. Мы имеем $\det \mathcal{T}N = i^*\bar\eta$, где $i\colon N \hookrightarrow \mathbb{C}P^1 \times M$, и

$$i_*[N] = D_U(c_1^U(\bar\eta \otimes \det(\mathcal{T}M))) = D_U(F_U(u,v)) = F_U(u,v) \cap [M \times \mathbb{C}P^1].$$

Тогда следующая выкладка доказывает требуемое равенство:

$$\partial_*[N] = \varepsilon D_U(c_1^U(\det \mathcal{T}N)) = \varepsilon D_U(i^*u) = \langle i^*u, [N]\rangle = \langle u, i_*[N]\rangle = \\ = \langle u, F_U(u,v) \cap [M \times \mathbb{C}P^1]\rangle = \langle uF_U(u,v), [M \times \mathbb{C}P^1]\rangle = \langle uv, [M \times \mathbb{C}P^1]\rangle = \partial_*[M]. \quad \square$$

Предложение 4.1.11. *Гомоморфизм $(\pi_{St})_*$ является проектором на Ω_*^W.*

Доказательство. Мы имеем $\operatorname{Im}(\pi_{St})_* \subset \Omega_*^W$. Но для $a \in \Omega_*^W$, согласно следствию 4.1.3, $(\partial_{k\geqslant 2})_* a = 0$ и поэтому по предыдущему предложению $(\pi_{St})_* a = a$. То есть, $(\pi_{St})_*$ — проектор с образом Ω_*^W. $\square$

Замечание 18. Аналогично случаю проектора Коннера–Флойда операция π_{St} сама также является идемпотентной и удовлетворяет равенствам $\partial\pi_{St} = \pi_{St}\partial = \partial$. Мы будем называть эту операцию *проектором Стонга.*

С помощью проектора Стонга π_{St} также можно определить умножение на Ω_*^W. Однако, оказывается, имеет место следующее

Предложение 4.1.12. *Проекторы π_{CF} и π_{St} совпадают на элементах вида $a \cdot b$, $a, b \in \Omega_*^W$. Следовательно, они определяют одинаковые умножения в Ω_*^W. Однако эти проекторы, вообще говоря, различны.*

Доказательство. Из теоремы 2.3.6 и леммы 4.1.3 следует, что $\partial_2(ab) = 2\partial a \partial b$ и $\partial_{i\geqslant 3}(ab) = 0$ при $a, b \in \Omega_*^W$. Тогда получаем: $\pi_{St}(ab) = ab + 2\alpha_{12}\partial a\,\partial b$. Осталось заметить, что $\alpha_{12} = [\mathbb{C}P^1]^2 - [\mathbb{C}P^2] = [V^4]$ и воспользоваться предложением 4.1.7.

Однако эти проекторы различны. Например, у них разные ядра. Действительно, согласно предложению 4.1.5 $[M^6] = \Psi_*[\mathbb{C}P^1]$ лежит в ядре $(\pi_{CF})_*$. Вычислим характеристические числа Чженя многообразия M^6. Согласно определению Ψ (см. конструкцию 2.2.2) многообразие M^6 представляет собой $\mathbb{C}P(\overline{\det \mathcal{T}\mathbb{C}P^1} \oplus \mathbb{C}^2)$ со стабильно комплексной структурой $\mathcal{T}M^6 \oplus \mathbb{R}^2 = p^*(\mathcal{T}\mathbb{C}P^1) \oplus p^*(\overline{\det \mathcal{T}\mathbb{C}P^1}) \otimes \bar\eta \oplus \bar\eta \oplus \eta$, где η — тавтологическое расслоение на $\mathbb{C}P(\overline{\det \mathcal{T}\mathbb{C}P^1} \oplus \mathbb{C}^2)$, а $p\colon \mathbb{C}P(\overline{\det \mathcal{T}\mathbb{C}P^1} \oplus \mathbb{C}^2) \to \mathbb{C}P^1$ — проекция.

Для произвольного комплексного векторного расслоения на ξ над многообразием X имеет место равенство $\mathcal{T}\mathbb{C}P(\xi) \oplus \mathbb{C} = p^*(\mathcal{T}X) \oplus \bar\eta \otimes p^*(\xi)$, где η — тавтологическое расслоение над проективизацией $\mathbb{C}P(\xi)$. Следовательно, полный класс Чженя расслоения $\bar\eta \otimes p^*(\xi)$ равен полному классу Чженя касательного расслоения вдоль слоёв $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}\mathbb{C}P(\xi)$. Но если $n = \dim_{\mathbb{C}} \xi$, то $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{T}_{\mathcal{F}}\mathbb{C}P(\xi) = n-1$ и, значит, $0 = c_n(\mathcal{T}_{\mathcal{F}}\mathbb{C}P(\xi)) = c_n(\bar\eta \otimes p^*(\xi)) = v^n + p^*(c_1(\xi))v^{n-1} + \ldots + p^*(c_n(\xi))$, где $v = c_1(\bar\eta)$. Однако из теоремы Лере–Хирша следует, что элементы $1, v, \ldots, v^{n-1}$ порождают $H^*(\mathbb{C}P(\xi), \mathbb{Z})$ как $H^*(X, \mathbb{Z})$-модуль. Следовательно, мы получаем изоморфизм колец $H^*(\mathbb{C}P(\xi), \mathbb{Z}) \cong H^*(X, \mathbb{Z})[u]/(v^n + c_1(\xi)v^{n-1} + \ldots + c_n(\xi) = 0)$.

В нашем случае, если мы обозначим через γ тавтологическое расслоение над $\mathbb{C}P^1$, то $\overline{\det \mathcal{T}\mathbb{C}P^1} \cong \gamma^{\otimes 2}$. Если обозначить $u = c_1(\bar\gamma)$ и $v = c_1(\bar\eta)$, то мы имеем $H(M^6, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[u, v]/(u^2 = 0, v^3 - 2uv^2 = 0)$. Причём для ориентации, соответствующей стабильно комплексной структуре $\mathcal{T}M^6 \oplus \mathbb{R}^2 = p^*(\mathcal{T}\mathbb{C}P^1) \oplus p^*(\overline{\det \mathcal{T}\mathbb{C}P^1}) \otimes \bar\eta \oplus \bar\eta \oplus \eta$, имеем $\langle [M^6]_{\mathbb{Z}}, uv^2\rangle = -1$.

Осталось вычислить числа Чженя. Для полного класса Чженя мы имеем $c(M^6) = c(\mathcal{T}\mathbb{C}P^1) \oplus (\overline{\det \mathcal{T}\mathbb{C}P^1}) \otimes \bar\eta \oplus \bar\eta \oplus \eta) = (1+2u)(1-2u+v)(1-v)(1+v) = 1+v+2uv-v^2-2uv^2$. Следовательно, $c_1^3([M^6]) = -2$, $c_1c_2([M^6]) = 0$, $c_3([M^6]) = 2$.

Теперь вычислим характеристические числа Чженя многообразия $[N^6] = (\pi_{St})_*([M^6])$. По определению (см. конструкцию 4.1.9) мы имеем, что N^6 двойственно к $\det \mathcal{T}M \otimes \bar\eta$ в $M \times \mathbb{C}P^1$. Следовательно, мы имеем $\mathcal{T}N \oplus \det \mathcal{T}M \otimes \bar\eta|_N = \mathcal{T}(M \times \mathbb{C}P^1)|_N$. Тогда $c(N) = \frac{c(M\times\mathbb{C}P^1)}{c(\det\mathcal{T}M\otimes\bar\eta)}|_N$. Если обозначить $u = c_1(\bar\eta)$, то получаем

$$\frac{c(M\times\mathbb{C}P^1)}{c(\det\mathcal{T}M\otimes\bar\eta)}|_N = \frac{c(M)c(\mathbb{C}P^1)}{1+c_1(M)+u}|_N = (1+c_1(M)+c_2(M)+c_3(M))(1+2u)(1-(c_1(M)+u)+$$

$$+(c_1^2(M)+2uc_1(M))-(c_1^3(M)+3uc_1^2(M)))|_N = (1+(c_1(M)+2u)+(c_2(M)+2uc_1(M))+(c_3(M)+$$

$$+2uc_2(M)))(1-(c_1(M)+u)+(c_1^2(M)+2uc_1(M))-(c_1^3(M)+3uc_1^2(M)))|_N = (1+u+c_2(M)+$$

$$+uc_1(M)+c_3(M)-c_1(M)c_2(M)+uc_2(M)-uc_1^2(M))|_N.$$

То есть, мы имеем $c_1(N) = u|_N$, $c_2(N) = (c_2(M)+uc_1(M))|_N$, $c_3(N) = (c_3(M) - c_1(M)c_2(M)+uc_2(M)-uc_1^2(M))|_N$.

Тогда числа Чженя равны

$$c_3([N]) = \langle c_3(N), [N]_\mathbb{Z}\rangle = \langle (c_3(M)-c_1(M)c_2(M)+uc_2(M)-uc_1^2(M))|_N, [N]_\mathbb{Z}\rangle =$$

$$= \langle (c_3(M)-c_1(M)c_2(M)+uc_2(M)-uc_1^2(M)), (c_1(M)+u)\cap[M\times\mathbb{C}P^1]_\mathbb{Z}\rangle =$$

$$= \langle (c_3(M)-c_1(M)c_2(M)+uc_2(M)-uc_1^2(M))(c_1(M)+u), [M\times\mathbb{C}P^1]_\mathbb{Z}\rangle =$$

$$= \langle uc_3(M)-uc_1^3(M), [M\times\mathbb{C}P^1]\rangle = c_3([M]) - c_1^3([M]) = 4.$$

$c_1^3([N]) = 0$ (что неудивительно, так как $[N] = (\pi_{St})_*([M]) \in \Omega_*^W$). Наконец,

$$c_1c_2([N]) = \langle c_1(N)c_2(N), [N]_\mathbb{Z}\rangle = \langle uc_2(M)c_1(M), [M\times\mathbb{C}P^1]_\mathbb{Z}\rangle = c_1c_2([M]) = 0.$$

Так как $c_3([N]) = 4 \neq 0$, мы получаем, что $(\pi_{St})_*[M^6] \neq 0$.

Кроме того, например, мы имеем $c_3((\pi_{CF})_*[\mathbb{C}P^3]) = 68$, а $c_3((\pi_{St})_*[\mathbb{C}P^3]) = -60$. Действительно, для многообразия $L^1 = \Delta_*[\mathbb{C}P^3]$ мы имеем $\mathcal{T}L \oplus (\det\mathcal{T}\mathbb{C}P^3 \oplus \overline{\det\mathcal{T}\mathbb{C}P^3})|_L = \mathcal{T}\mathbb{C}P^3|_L$ и следовательно, $c_1(L) = c_1(\mathbb{C}P^3)|_L$. Значит, $c_1([L]) = \langle c_1(\mathbb{C}P^3)|_L, [L]_\mathbb{Z}\rangle = \langle c_1(\mathbb{C}P^3), -c_1^2(\mathbb{C}P^3)\cap [\mathbb{C}P^3]_\mathbb{Z}\rangle = -c_1^3([\mathbb{C}P^3]) = -64$. То есть, $\Delta_*[\mathbb{C}P^3] = -32[\mathbb{C}P^1]$. Следовательно, $(\pi_{CF})_*([\mathbb{C}P^3]) = [\mathbb{C}P^3] + 32\Psi_*[\mathbb{C}P^1]$ и значит, $c_3((\pi_{CF})_*([\mathbb{C}P^3])) = c_3([\mathbb{C}P^3]) + 32c_3(M^6) = 4+64 = 68$. С другой стороны, мы выше вычислили, что для произвольного 6-мерного многообразия $c_3((\pi_{St})_*[M^6]) = c_3([M]) - c_1^3([M])$. В частности, $c_3((\pi_{St})_*[\mathbb{C}P^3]) = c_3([\mathbb{C}P^3]) - c_1^3([\mathbb{C}P^3]) = 4 - 64 = -60$. □

4.1.3 Мультипликативная структура на Ω_*^W

Теперь мы готовы описать кольцевую структуру $(\Omega_*^W, *)$, следуя [21]. Из формулы (4.1.2) следует, что для $a, b \in \Omega_*^W$ выполнено $a * b = ab$, если $\partial(b) = 0$. В частности, это верно для $b \in \operatorname{Im}\partial_*$. Поэтому в дальнейшем умножение на такие элементы мы не будем обозначать «звёздочкой». В частности, мы имеем, что для любого SU-многообразия M и элемента $a \in \Omega_*^W$ произведение $[M]a = [M] * a$ лежит в Ω_*^W, то есть, мы имеем естественную структуру Ω_*^{SU}-модуля на Ω_*^W (см. также разделы 4.4 и 4.5).

Напомним, что по теореме 1.2.6 класс бордизмов $[M^{2i}] \in \Omega_{2i}^U$ можно взять в качестве полиномиальной образующей кольца Ω^U, только если $s_i[M^{2i}] = \pm m_i$, где числа m_i определены в (1.2.6). Аналогичное описание для кольца Ω^W даётся в следующей теореме.

Теорема 4.1.13 ([21, Глава X]). *Относительно умножения, определяемого проекторами Коннера–Флойда и Стонга, Ω_*^W является полиномиальным кольцом с образующими в каждой положительной чётной размерности за исключением 4:*

$$\Omega_*^W \cong \mathbb{Z}[x_1, x_i\colon i \geqslant 3], \quad \deg x_i = 2i.$$

Полиномиальные образующие x_i выделяются условием $s_i(x_i) = \pm m_i m_{i-1}$ и их можно выбрать так, что будут выполнены равенства

$$\partial(a * b) = a\partial b + \partial a b - x_1 \partial a \partial b, \tag{4.1.5}$$

$$\partial x_1 = 2, \quad \partial x_{2i} = x_{2i-1}.$$

Доказательство. Мы начнём с проверки равенства (4.1.5):

$$\partial(a * b) = \partial\pi_{CF}(ab) = \partial(ab) = a\partial b + b\partial a - [\mathbb{C}P^1]\partial a \partial b.$$

Здесь второе равенство содержится в предложении 4.1.5, а третье — в лемме 4.1.4.

Теперь перейдём к доказательству основного утверждения. Мы начнём с определения классов бордизмов $b_i \in \Omega^W_{2i}$ для всех $i \geqslant 1$, кроме $i = 2$. Положим

$$b_i = \begin{cases} [\mathbb{C}P^1], & \text{если } i = 1, \\ \pi_{St}[\mathbb{C}P^{2^p} \times \mathbb{C}P^{2^{p+1}q}], & \text{если } i = 2^p(2q+1),\ p \geqslant 1,\ q \geqslant 1, \\ \pi_{St}[\mathbb{C}P^{2^p} \times \mathbb{C}P^{2^p}], & \text{если } i = 2^{p+1},\ p \geqslant 1, \\ \partial\, b_{i+1}, & \text{если } i \text{ нечётно и } i \geqslant 3. \end{cases}$$

Прямой проверкой можно убедиться, что

$$\begin{aligned} &s_i(b_i) = 1 \mod 2, \quad \text{если } i \neq 2^k - 1,\ i \neq 2^k, \\ &s_i(b_i) = 2 \mod 4, \quad \text{если } i = 2^k - 1, \\ &s_i(b_i) = 2 \mod 4, \quad \text{если } i = 2^{p+1}, \\ &s_{(2^p,2^p)}(b_{2^{p+1}}) = 1 \mod 2. \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Рассмотрим включение $\iota\colon \Omega^W_* \otimes \mathbb{Z}/2 \to \Omega^U_* \otimes \mathbb{Z}/2$. Из формулы (4.1.2) следует, что ι является кольцевым гомоморфизмом. Из соотношений (4.1.6) вытекает, что существуют такие полиномиальные образующие a_i кольца $\Omega^U_* \otimes \mathbb{Z}/2 \cong \mathbb{Z}/2[a_i\colon i \geqslant 1]$, что $\iota(b_i) = a_i$ для $i \neq 2^{p+1}$ и $\iota(b_{2^{p+1}}) = (a_{2^p})^2 + \cdots$, где $\cdots$ обозначает разложимые элементы, соответствующие разбиениям строго меньшим $(2^p, 2^p)$ в лексикографическом порядке. Отсюда следует, что элементы $\iota(b_i)$ алгебраически независимы в полиномиальном кольце $\Omega^U_* \otimes \mathbb{Z}/2 \cong \mathbb{Z}/2[a_i\colon i \geqslant 1]$. Следовательно, $\Omega^W_* \otimes \mathbb{Z}/2$ содержит полиномиальное подкольцо $\mathbb{Z}/2[b_1, b_i\colon i \geqslant 3]$. Из сравнения рангов с использованием следствия 4.1.6 мы заключаем, что

$$\Omega^W_* \otimes \mathbb{Z}/2 \cong \mathbb{Z}/2[b_1, b_i\colon i \geqslant 3].$$

Теперь заметим, что $s_i(b_i)$ является нечётнократным числу $m_i m_{i-1}$ для $i \geqslant 3$, то есть,

$$s_i(b_i) = (2q_i + 1)m_i m_{i-1}, \quad i \geqslant 3. \tag{4.1.7}$$

Это простая непосредственная проверка. Для чётных i это следует из (4.1.6) и того факта, что $s_i(b_i)$ делится на m_i, см. теорему 1.2.6 б). Для нечётных i мы имеем $b_i = \partial_* b_{i+1}$, так что b_i представляется SU-многообразием, и (4.1.7) следует из (4.1.6) и предложения 1.3.2.

По теореме 1.3.1, существуют элементы $y_i \in \Omega^{SU}_{2i}$, $i \geqslant 2$, такие, что

$$s_i(y_i) = 2^{k_i} m_i m_{i-1}, \quad k_i \geqslant 0. \tag{4.1.8}$$

Найдём теперь для целых чисел q_i из (4.1.7) и k_i из (4.1.8) такие целые β_i и γ_i, что

$$\beta_i 2^{k_i+1} + \gamma_i(2q_i + 1) = 1.$$

В этом случае γ_i обязательно нечётно, то есть $\gamma_i = 2\alpha_i + 1$ для некоторого целого α_i. Положим $x_1 = [\mathbb{C}P^1]$ и

$$x'_i = (2\alpha_i + 1)b_i + 2\beta_i y_i, \quad i \geqslant 3.$$

Тогда из вышесказанного вытекает, что $s_i(x'_i) = m_i m_{i-1}$. Искомые элементы x_i получаются из x'_i следующей модификацией:

$$x_{2i-1} = x'_{2i-1}, \quad x_{2i} = x'_{2i} - x_1\big((\alpha_{2i} - \alpha_{2i-1})b_{2i-1} - \beta_{2i-1}y_{2i-1}\big).$$

Тогда мы по-прежнему имеем
$$s_i(x_i) = m_i m_{i-1}$$
так как элементы $x_i - x'_i$ разложимы.

Новые элементы x_{2i} всё ещё лежат в Ω^W_*, так как $x_1 \in \Omega^W_2$, а $b_{2i-1} = \partial b_{2i}$ и y_{2i-1} представляются SU-многообразиями.

Также мы имеем требуемое равенство $\partial x_{2i} = x_{2i-1}$:

$$\begin{aligned}\partial x_{2i} = \partial x'_{2i} - \partial x_1 \cdot \big((\alpha_{2i} - \alpha_{2i-1})b_{2i-1} - \beta_{2i-1}y_{2i-1}\big) = (2\alpha_{2i}+1)\partial b_{2i} - \\ - 2\big((\alpha_{2i} - \alpha_{2i-1})b_{2i-1} - \beta_{2i-1}y_{2i-1}\big) = (2\alpha_{2i-1}+1)b_{2i-1} + 2\beta_{2i-1}y_{2i-1} = x_{2i-1}.\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим гомоморфизм
$$\varphi\colon \mathcal{R} = \mathbb{Z}[x_1, x_i \colon i \geqslant 3] \to \Omega^W_*,$$
отправляющий полиномиальную образующую x_i в соответствующий элемент из Ω^W_*, определённый выше. Заметим, что $\varphi \otimes \mathbb{Z}/2$ отправляет x_i в b_i по модулю разложимых элементов. Как мы видели, $\Omega^W_* \otimes \mathbb{Z}/2 \cong \mathbb{Z}/2[b_1, b_i \colon i \geqslant 3]$, откуда следует, что $\varphi \otimes \mathbb{Z}/2$ — изоморфизм. Так как $\mathcal{R}$ и Ω^W_* состоят из свободных групп конечного ранга в каждой размерности, φ — инъективен, и $\varphi(\mathcal{R}_n) \subset \Omega^W_n$ является подгруппой конечного нечётного индекса в каждой размерности.

Теперь мы покажем, что $\varphi\colon \mathcal{R} \to \Omega^W_*$ становится сюръективным после тензорного умножения на $\mathbb{Z}[\frac12]$. Отсюда будет следовать, что φ — изоморфизм.

Заметим, что для любого $\alpha \in \Omega^W_*$ мы имеем
$$\partial(x_1 * \alpha) = \partial x_1 \cdot \alpha + x_1 \cdot \partial\alpha - x_1 \cdot \partial x_1 \cdot \partial\alpha = 2\alpha - x_1\partial\alpha.$$
Значит, $\alpha = \frac12\partial(x_1 * \alpha) + \frac12 x_1 \partial\alpha$ в $\Omega^W_* \otimes \mathbb{Z}[\frac12]$. Следовательно, $\Omega^W_* \otimes \mathbb{Z}[\frac12]$ порождён 1 и x_1 как модуль над $\Omega^{SU}_* \otimes \mathbb{Z}[\frac12] \subset \Omega^W_* \otimes \mathbb{Z}[\frac12]$ (заметим, что $\Omega^{SU}_* \otimes \mathbb{Z}[\frac12]$ — подкольцо в $\Omega^W_* \otimes \mathbb{Z}[\frac12]$, согласно формуле из предложения 4.1.7). Более того, этот модуль свободен, так как из $0 = a + x_1 b$, $a, b \in \Omega^{SU}_* \otimes \mathbb{Z}[\frac12]$ следует, что $0 = \partial(a + x_1 b) = \partial x_1 \cdot b = 2b$, и следовательно, $b = 0$ и $a = 0$. То есть,
$$\Omega^W_* \otimes \mathbb{Z}[\tfrac12] = \Omega^{SU}_* \otimes \mathbb{Z}[\tfrac12]\langle 1, x_1\rangle.$$
Рассмотрим теперь следующие элементы из $\varphi(\mathcal{R}) \subset \Omega^W_*$:
$$\begin{aligned} &y_2 = 2x_1 * x_1 = \partial(x_1 * x_1 * x_1), \\ &y_{2i} = \partial(x_1 * x_{2i}) = 2x_{2i} - x_1 x_{2i-1}, \qquad i \geqslant 2, \\ &y_{2i-1} = x_{2i-1} = \partial(x_{2i}), \qquad i \geqslant 2. \end{aligned} \tag{4.1.9}$$
На самом деле эти элементы содержатся в Ω^{SU}_*, так как лежат в $\operatorname{Im}\partial_*$. Кроме того,
$$\begin{aligned} &s_2(y_2) = 2s_2(x_1 \cdot x_1 + 8[V^4]) = -16 s_2(\mathbb{C}P^2) = -48 = -8m_2m_1, \\ &s_{2i}(y_{2i}) = 2s_{2i}(x_{2i}) = 2m_{2i}m_{2i-1}, \qquad i \geqslant 2, \\ &s_{2i-1}(y_{2i-1}) = s_{2i-1}(x_{2i-1}) = m_{2i-1}m_{2i-2}, \qquad i \geqslant 2, \end{aligned} \tag{4.1.10}$$
и следовательно, y_i являются полиномиальными образующими кольца $\Omega^{SU}_* \otimes \mathbb{Z}[\frac12]$ по теореме 1.3.1. Отсюда получаем, что $\Omega^W_* \otimes \mathbb{Z}[\frac12] = \Omega^{SU}_* \otimes \mathbb{Z}[\frac12]\langle 1, x_1\rangle \subset \varphi\big(\mathcal{R} \otimes \mathbb{Z}[\frac12]\big)$. То есть, $\varphi \otimes \mathbb{Z}[\frac12]$ является эпиморфизмом, что завершает доказательство.

Осталось заметить, что из формулы для умножения $*$ из предложения 4.1.7 следует, что разложимость элементов относительно умножения $*$ и умножения $\cdot$ равносильна в размерностях $\geqslant 6$. И значит, полиномиальные образующие кольца Ω^W_* также детектируются своими s-числами.

$\square$

4.1.4 Вычисление кольца гомологий $H(\varOmega_*^W, \partial_*)$

Здесь мы докажем сформулированную выше теорему 3.2.10. Доказательство использует полученные в разделе 6 факты о $\varOmega_*^W$, но, конечно, не зависит от результатов раздела 5, доказанных с помощью теоремы 3.2.10. Впервые эта теорема была доказана Коннером и Флойдом [32].

Теорема 4.1.14 ([32, Теорема 11.8]). *$H(\varOmega_*^W, \partial_*)$ есть полиномиальная алгебра над $\mathbb{Z}/2$ следующего вида:*

$$H(\varOmega_*^W, \partial_*) \cong \mathbb{Z}/2[\omega_2, \omega_{4k} \colon k \geqslant 2], \quad \deg \omega_2 = 4, \ \deg \omega_{4k} = 8k.$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что одно и то же умножение в гомологиях индуцируется и обычным умножением $\cdot$ в $\varOmega_*^U$, и умножением $*$ в $\varOmega_*^W$.

Во-вторых, из формулы $\partial([\mathbb{C}P^1]x) = 2x$ при $\partial x = 0$ следует, что группы гомологий $H_*(\varOmega_*^W, \partial_*)$ состоят из 2-кручения.

Посчитаем сначала кольцо гомологий $H(\varOmega_*^W \otimes \mathbb{Z}/2)$. Теперь мы знаем, что $\varOmega_*^W \otimes \mathbb{Z}/2 = \mathbb{Z}/2[b_i, \, i \neq 2]$, $\partial b_{2i} = b_{2i-1}$, $\partial b_1 = 0$ (по модулю 2), $\partial(xy) = x\partial y + y\partial x + b_1 \partial x \partial y$.

Так как $\partial(b_1) = 0$, то $\partial(b_1 x) = b_1 \partial x$, а значит, идеал I, натянутый на b_1 в $\varOmega_*^W \otimes \mathbb{Z}/2$ замкнут относительно действия ∂. Обозначим через F факторкольцо $\varOmega_*^W \otimes \mathbb{Z}/2/I = \mathbb{Z}/2[b_i, \, i \geqslant 3]$. Из короткой точной последовательности

$$0 \to I \to \varOmega_*^W \otimes \mathbb{Z}/2 \to F \to 0$$

получаем длинную точную последовательность в кольцах гомологий

$$\ldots \longrightarrow H_{2i}(I) \longrightarrow H_{2i}(\varOmega_*^W \otimes \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H_{2i}(F) \longrightarrow H_{2i-2}(\mathcal{I}) \longrightarrow \ldots$$

Так как $F = \mathbb{Z}/2[b_i, \, i \geqslant 3]$ есть тензорное произведение дифференциальных $\mathbb{Z}/2$-алгебр $F_i = \mathbb{Z}/2[b_{2i}, b_{2i-1}]$, $\partial b_{2i} = b_{2i-1}$, $i \geqslant 2$ и $H_*(F_i) = \mathbb{Z}/2[b_{2i}^2]$, мы получаем, что $H_*(F) = \mathbb{Z}/2[b_{2i}^2, \, i \geqslant 2]$.

Так как $\partial_*(b_{2i}^2 + b_1 b_{2i-1} b_{2i}) = 0$, то мы имеем циклы $h_{4i} = b_{2i}^2 + b_1 b_{2i-1} b_{2i}$ из $\varOmega_*^W \otimes \mathbb{Z}/2$, переходящие в b_{2i}^2 при проекции на F. Значит, отображение в гомологиях $H_*(\varOmega_*^W \otimes \mathbb{Z}/2) \to H_*(F)$ отображает подкольцо $\mathbb{Z}/2[h_{4i}, \, i > 1]$ изоморфно на $H_*(F)$, и следовательно, длинная точная последовательность в гомологиях расщепляется на короткие точные последовательности (которые расщепляются, так как состоят из векторных пространств над $\mathbb{Z}/2$)

$$0 \to H_{2i}(I) \longrightarrow H_{2i}(\varOmega_*^W \otimes \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H_{2i}(F) \to 0$$

Более того, из $b_1 \partial x = \partial b_1 x$ следует, что $H_*(I)$ вкладывается в $H_*(\varOmega_*^W \otimes \mathbb{Z}/2)$ в качестве $b_1 H_*(\varOmega_*^W \otimes \mathbb{Z}/2)$. Отсюда уже и из короткой точной последовательности выше мы получаем, что $H_*(\varOmega_*^W \otimes \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2[b_1, h_{4i}, \, i \geqslant 2]$.

Рассмотрим теперь короткую точную последовательность

$$0 \to \varOmega_*^W \xrightarrow{\cdot 2} \varOmega_*^W \longrightarrow \varOmega_*^W \otimes \mathbb{Z}/2 \to 0$$

Она даёт длинную точную последовательность в гомологиях

$$\ldots \longrightarrow H_{2i}(\varOmega_*^W) \xrightarrow{\cdot 2} H_{2i}(\varOmega_*^W) \longrightarrow H_{2i}(\varOmega_*^W \otimes \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H_{2i-2}(\varOmega_*^W) \longrightarrow \ldots$$

Так как $H_*(\varOmega_*^W)$ состоит из 2-кручения, то умножение на 2 в длинной точной последовательности есть нулевое отображение, и мы получаем короткие точные последовательности:

$$0 \to H_{2i}(\varOmega_*^W) \longrightarrow H_{2i}(\varOmega_*^W \otimes \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H_{2i-2}(\varOmega_*^W) \to 0$$

Вспомним теперь, что b_i на самом деле представляются элементами $\varOmega_*^W$. Более того, мы имеем циклы b_1^2 и $b_{2i}^2 - b_1 b_{2i-1} b_{2i}$ в $\varOmega_*^W$. Обозначим их классы гомологий через ω_2, ω_{4i}. Тогда они переходят в алгебраически независимые элементы b_1^2 и h_{4i} в $H_*(\varOmega_*^W \otimes \mathbb{Z}/2)$. Значит, $H(\varOmega_*^W)$ содержит полиномиальное подкольцо $\mathbb{Z}/2[\omega_2, \omega_{4i}, \, i \geqslant 2]$.

Наконец из сравнения размерностей в короткой точной последовательности выше мы получаем, что $H(\varOmega_*^W)$ на самом деле совпадает с $\mathbb{Z}/2[\omega_2, \omega_{4i}, \, i \geqslant 2]$.

□

4.2 Кольцевая структура Ω_*^{SU}

Из формулы (4.1.2) следует, что забывающий гомоморфизм $\alpha\colon \Omega_*^{SU} \to \Omega_*^W$ является гомоморфизмом колец. Следовательно, кольцо $\Omega_*^{SU}/\mathrm{Tors}$ отождествляется с некоторым подкольцом в Ω_*^W (описанным как подгруппа в теореме 3.2.11).

Заметим, что из теоремы 4.1.13 следует, что

$$\Omega_*^W \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] \cong \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}][x_1, x_{2k-1}, 2x_{2k} - x_1x_{2k-1}\colon k \geqslant 2], \tag{4.2.1}$$

где $x_1 * x_1$, x_{2k-1} и $2x_{2k} - x_1x_{2k-1}$ для $k \geqslant 2$ являются ∂_*-циклами.

Для каждого целого числа $n \geqslant 3$ обозначим

$$g(n) = \begin{cases} 2m_nm_{n-1}, & \text{если } n > 2 \text{ чётно;} \\ m_nm_{n-1}, & \text{если } n > 2 \text{ нечётно;} \\ -48, & \text{если } n = 2. \end{cases} \tag{4.2.2}$$

Эти числа присутствуют в формулах (4.1.10). Например, $g(3) = 6$, $g(4) = 20$. Для $n > 2$ число $g(n)$ может принимать следующие значения: 1, 2, 4, p, $2p$, $4p$, где p — нечётное простое число.

Теорема 4.2.1. *Существуют неразложимые элементы $y_i \in \Omega_{2i}^{SU}$, $i \geqslant 2$, с минимальными s-числами $s_i(y_i) = g(i)$. Гомоморфизм забывания $\alpha\colon \Omega_*^{SU} \to \Omega_*^W$ отображает эти элементы следующим образом:*

$$y_2 \mapsto 2x_1 * x_1, \quad y_{2k-1} \mapsto x_{2k-1}, \quad y_{2k} \mapsto 2x_{2k} - x_1x_{2k-1}, \quad k \geqslant 2,$$

где x_i — полиномиальные образующие кольца Ω_*^W. В частности, кольцо $\Omega_*^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{2}][y_i\colon i \geqslant 2]$ вкладывается в (4.2.1) в качестве полиномиального подкольца, порождённого элементами $x_1 * x_1$, x_{2k-1} и $2x_{2k} - x_1x_{2k-1}$.

Доказательство. Элементы $y_i \in \Omega_{2i}^{SU}$ уже были определены в (4.1.9), и их s-числа даются формулами (4.1.10). Мы должны только проверить, что s-число элемента y_i является минимально возможным среди всех элементов из Ω_{2i}^{SU}.

Для y_{2k-1} число $m_{2k-1}m_{2k-2}$ является минимальным возможным среди всех элементов из Ω_{4k-2}^W по теореме 4.1.13, и следовательно, оно также минимально и для элементов из $\Omega_{4k-2}^{SU} \subset \Omega_{4k-2}^W$. (Как мы уже замечали, разложимость в Ω_*^W относительно умножения $*$ равносильна разложимости в Ω_*^U в размерностях > 4; это следует из предложения 4.1.7.)

Для $y_2 = 2x_1 * x_1$ мы имеем $\Omega_4^{SU} = \operatorname{Im}\partial_* = \mathbb{Z}\langle y_2\rangle$, где $y_2 = 2K$ в обозначениях примера 3.2.7.

Рассмотрим теперь y_{2k} для $k \geqslant 2$. Мы имеем $s_{2k}(y_{2k}) = 2m_{2k}m_{2k-1}$. Возьмём любой элемент $a \in \Omega_{4k}^{SU} \subset (\operatorname{Ker}\partial_*)_{4k}$. Из (4.2.1) следует, что $\operatorname{Ker}(\partial_*\colon \Omega_*^W \to \Omega_*^W)$ состоит из таких $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$-многочленов от $x_1 * x_1$, x_{2i-1}, $2x_{2i} - x_1x_{2i-1}$, которые имеют целые коэффициенты как многочлены от переменных x_i. Запишем

$$a = \lambda(2x_{2k} - x_1x_{2k-1}) + b,$$

где $\lambda \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ и b — разложимый элемент из $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}][x_1 * x_1, x_{2i-1}, 2x_{2i} - x_1x_{2i-1}]$. Тогда b не содержит слагаемого x_1x_{2k-1}, и следовательно, $\lambda \in \mathbb{Z}$. Значит, $s_{2k}(a) = 2\lambda s_{2k}(x_{2k}) = \lambda \cdot 2m_{2k}m_{2k-1}$, и $2m_{2k}m_{2k-1}$ является минимальным возможным s-числом в Ω_{4k}^{SU}. □

Напомним, что согласно теореме 3.2.8 а) образ забывающего гомоморфизма $\alpha\colon \Omega_*^{SU} \to \Omega_*^W$ изоморфен $\Omega_*^{SU}/\operatorname{Tors}$. По теореме 3.2.11 б), $\Omega_{2i}^{SU}/\operatorname{Tors}$ изоморфно $\operatorname{Ker}(\partial_*\colon \Omega_*^W \to \Omega_*^W)$ для $2i \not\equiv 4 \mod 8$ и изоморфно $\operatorname{Im}(\partial_*\colon \Omega_*^W \to \Omega_*^W)$ для $2i \equiv 4 \mod 8$. Комбинируя это с теоремой 4.2.1, мы получаем описание $\Omega_*^{SU}/\operatorname{Tors}$ как подкольца в Ω_*^W. Наконец, мультипликативная структура в кручении описывается теоремой 3.2.11 в). Собирая всю эту информацию вместе, мы, в принципе, получаем полное описание кольца Ω_*^{SU}. Однако, как замечено у Стонга в конце главы X в [21], внутреннее строение этого кольца чрезвычайно сложно. Например, в размерностях $\leqslant 10$ мы имеем следующие нетривиальные градуированные компоненты кольца

Ω^{SU}_*, описанные в терминах элементов x_i и y_i из теоремы 4.2.1:

$$\Omega^{SU}_0 = \mathbb{Z}, \quad \Omega^{SU}_1 = \mathbb{Z}/2\langle\theta\rangle, \quad \Omega^{SU}_2 = \mathbb{Z}/2\langle\theta^2\rangle,$$

$$\Omega^{SU}_4 = \mathbb{Z}\langle y_2\rangle,\ y_2 = 2x_1 * x_1, \quad \Omega^{SU}_6 = \mathbb{Z}\langle y_3\rangle,\ y_3 = x_3, \quad \Omega^{SU}_8 = \mathbb{Z}\langle \tfrac14 y_2^2, y_4\rangle,\ y_4 = 2x_4 - x_1x_3,$$

$$\Omega^{SU}_9 = \mathbb{Z}/2\langle\theta x_1^{*4}\rangle, \quad \Omega^{SU}_{10} = \mathbb{Z}\langle \tfrac12 y_2y_3, y_5\rangle \oplus \mathbb{Z}/2\langle\theta^2 x_1^{*4}\rangle,\ y_5 = x_5.$$

Мы имеем

$$y_2 = 2x_1 * x_1 = 2\bigl(9[\mathbb{C}P^1]\times[\mathbb{C}P^1] - 8[\mathbb{C}P^2]\bigr)$$

как классы U-бордизмов. В размерности 8 мы имеем

$$\tfrac14 y_2^2 = x_1^{*4} = \bigl(9[\mathbb{C}P^1]\times[\mathbb{C}P^1] - 8[\mathbb{C}P^2]\bigr)\times\bigl(9[\mathbb{C}P^1]\times[\mathbb{C}P^1] - 8[\mathbb{C}P^2]\bigr)$$

как классы U-бордизмов, так как $x_1^{*2} = 9[\mathbb{C}P^1]\times[\mathbb{C}P^1] - 8[\mathbb{C}P^2]$ является ∂_*-циклом. Кроме того, элемент $\frac14 y_2^2 = x_1^{*4}$ может быть также выбран в качестве w_4 в теореме 3.2.11 в). Мы видим, что 8 является первой размерностью, в которой $\Omega^{SU}_*/\mathrm{Tors}$ отличается от кольца полиномов, так как квадрат 4-мерной образующей y_2 делится на 4. Кроме того, произведение 4- и 6- мерных образующих делится на 2.

4.3 Геометрические представители

Возникает вопрос о нахождении у классов бордизмов в Ω^{SU}_{2i} с минимальными s-числами $g(i)$ (которые можно взять в качестве y_i) хороших геометрических представителей.

В данном направлении получены следующие результаты.

4.3.1 Общие результаты

Теорема 4.3.1 (Лю, Панов [37])**.** *Существуют квазиторические SU-многообразия M^{2i}, $i \geqslant 5$, с $s_i(M^{2i}) = g(i)$. Эти квазиторические SU-многообразия имеют минимально возможные характеристические числа s_i и представляют полиномиальные образующие в кольце $\Omega^{SU}_*\otimes\mathbb{Z}[\frac12]$.*

Определение и свойства квазиторических многообразий см. в [30].

Замечание 19. Заметим, что в (вещественных) размерностях < 10 любое квазиторическое SU-многообразие представляет ноль в Ω^U_*, так как на всех квазиторических многообразиях обращается в ноль род Кричевера, который является изоморфизмом в размерностях < 10 (см. [30, Theorem 9.7.11]).

Теорема 4.3.2 (Лимонченко, Лю, Панов [11])**.** *Классы SU-бордизмов с минимальными s-числами могут быть получены как линейные (целочисленные комбинации) гиперповерхностей Калаби–Яу в торических многообразиях $\mathbb{C}P^{i_1}\times\ldots\times\mathbb{C}P^{i_k}$ (гиперповерхности двойственны к первому классу Чженя).*

Эти результаты порождают в свою очередь вопросы:

Вопрос 4.3.3. *Какие классы бордизмов из Ω^{SU}_* в размерностях $i \geqslant 5$ могут быть представлены квазиторическими многообразиями?*

Вопрос 4.3.4. *Какие классы бордизмов из Ω^{SU}_* могут быть представлены многообразиями Калаби–Яу?*

4.3.2 Маломерные представители

Здесь мы опишем геометрические представители для образующих y_i кольца SU-бордизмов в комплексных размерностях $i \leqslant 4$.

Напомним из раздела 4.2, что имеют место равенства

$$\Omega^{SU}_4 = \mathbb{Z}\langle y_2\rangle, \quad \Omega^{SU}_6 = \mathbb{Z}\langle y_3\rangle, \quad \Omega^{SU}_8 = \mathbb{Z}\langle \tfrac14 y_2^2, y_4\rangle,$$

где значения s-чисел образующих задаются формулами

$$s_2(y_2) = -48, \quad s_3(y_3) = m_3m_2 = 6, \quad s_4(y_4) = 2m_4m_3 = 20.$$

Пример 4.3.5. Образующая y_2 с s-числом -48 даётся (как легко проверить) гиперповерхностью, двойственной к c_1, в $\mathbb{C}P^3$ или $(\mathbb{C}P^1)^3$. Это многообразия Калаби–Яу. В первом случае это стандартная $K3$-поверхность, заданная уравнением $z_0^4+z_1^4+z_2^4+z_3^4=0$.

С другой стороны, аддитивная образующая $-y_2 \in \Omega_4^{SU}$ с s-числом 48 не может быть представлена компактной комплексной поверхностью. Этот результат был получен в [41, Теорема 3.2.5] с использованием классификации комплексных поверхностей.

Пример 4.3.6. Элемент y_3 с s-числом 6 представляется сферой S^6 с (любой) почти комплексной структурой, так как в этом случае $s_3[S^6]=3c_3[S^6]=6$. (Заметим, что это автоматически SU-многообразие, так как $H^2(S^6,\mathbb{Z})=0$).

Почти комплексная структуру на S^6 можно получить, если представить $S^6=G_2/SU(3)$. Заметим, что эта почти комплексная структура инвариантна относительно действия общего максимального тора T^2 групп $SU(3)\subset G_2$.

Пример 4.3.7. Здесь мы покажем, что образующая $-y_4\in\Omega_8^{SU}$ с s-числом -20 представляется грассманианом $Gr_2(\mathbb{C}^4)$ двумерных плоскостей $\mathbb{C}^4$ с подправленной стабильно комплексной структурой.

Пусть γ — тавтологическое двумерное расслоение над $Gr_2(\mathbb{C}^4)$, и пусть $\gamma^\perp$ — расслоение ортогональных двумерных плоскостей. Тогда мы имеем $\mathcal{T}Gr_2(\mathbb{C}^4)\cong\mathrm{Hom}(\gamma,\gamma^\perp)$ и

$$\mathcal{T}Gr_2(\mathbb{C}^4)\oplus\mathrm{Hom}(\gamma,\gamma)\cong\mathrm{Hom}(\gamma,\gamma^\perp\oplus\gamma)\cong\mathrm{Hom}(\gamma,\underline{\mathbb{C}}^4)\cong\overline{\gamma}\oplus\overline{\gamma}\oplus\overline{\gamma}\oplus\overline{\gamma}.$$

Таким образом, стандартная комплексная структура на $Gr_2(\mathbb{C}^4)$ задаётся изоморфизмом стабильных расслоений

$$\mathcal{T}Gr_2(\mathbb{C}^4)\cong 4\overline{\gamma}-\overline{\gamma}\gamma,$$

где мы обозначили $4\overline{\gamma}=\overline{\gamma}\oplus\overline{\gamma}\oplus\overline{\gamma}\oplus\overline{\gamma}$ и $\overline{\gamma}\gamma=\overline{\gamma}\otimes\gamma=\mathrm{Hom}(\gamma,\gamma)$. Мы изменим стабильно комплексную структуру на следующую:

$$\mathcal{T}Gr_2(\mathbb{C}^4)\cong 2\overline{\gamma}+2\gamma-\overline{\gamma}\gamma$$

и обозначим полученное стабильно комплексное многообразие через $\widetilde{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$. Заметим, что $c_1(\widetilde{Gr}_2(\mathbb{C}^4))=0$ (так как для двух k-мерных расслоений $c_1(\eta\otimes\xi)=k(c_1(\eta)+c_1(\xi))$, и следовательно, $c_1(\xi\otimes\overline{\xi})=0$), так что $\widetilde{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$ является SU-многообразием. Оно имеет то же кольцо когомологий, что и грассманиан,

$$H^*(Gr_2(\mathbb{C}^4))\cong\mathbb{Z}[c_1,c_2]/(c_1^3=2c_1c_2,\ c_2^2=c_1^2c_2),$$

где $c_i=c_i(\gamma)$. Старшая группа когомологий $H^8(Gr_2(\mathbb{C}^4))\cong\mathbb{Z}$ порождена классом $c_1^2c_2$.

Теперь вычислим класс $s_4(\widetilde{Gr}_2(\mathbb{C}^4))=2s_4(\overline{\gamma})+2s_4(\gamma)-s_4(\overline{\gamma}\gamma)$. Мы имеем

$$s_4=c_1^4-4c_1^2c_2+4c_1c_3+2c_2^2-4c_4,$$

откуда

$$s_4(\overline{\gamma})=s_4(\gamma)=c_1^4-4c_1^2c_2+2c_2^2=2c_1^2c_2-4c_1^2c_2+2c_1^2c_2=0.$$

Остаётся вычислить $s_4(\overline{\gamma}\gamma)$. Используя принцип расщепления, запишем $\gamma=\eta_1+\eta_2$ для некоторых линейных расслоений η_1,η_2 и вычислим

$$\begin{aligned}c(\overline{\gamma}\gamma)&=c((\overline{\eta}_1+\overline{\eta}_2)(\eta_1+\eta_2))=c(\overline{\eta}_1\eta_2+\overline{\eta}_2\eta_1)=c(\overline{\eta}_1\eta_2)c(\overline{\eta_2}\eta_1)\\&=(1-c_1(\eta_1)+c_1(\eta_2))(1-c_1(\eta_2)+c_1(\eta_1))=1-c_1(\eta_1)^2-c_1(\eta_2)^2+2c_1(\eta_1)c_1(\eta_2)\\&=1-(c_1(\eta_1)+c_1(\eta_2))^2+4c_1(\eta_1)c_1(\eta_2)=1-c_1(\gamma)^2+4c_2(\gamma).\end{aligned}$$

Следовательно, $c_1(\overline{\gamma}\gamma)=c_3(\overline{\gamma}\gamma)=c_4(\overline{\gamma}\gamma)=0$ и

$$s_4(\overline{\gamma}\gamma)=2c_2(\overline{\gamma}\gamma)^2=2(4c_2-c_1^2)^2=2(16c_2^2-8c_1^2c_2+c_1^4)=20c_1^2c_2.$$

Отсюда получаем $s_4[\widetilde{Gr}_2(\mathbb{C}^4)]=-20$ и $[\widetilde{Gr}_2(\mathbb{C}^4)]=-y_4\in\Omega_8^{SU}$.

Заметим, что $Gr_2(\mathbb{C}^4)$ является комплексной квадратичной гиперповерхностью в $\mathbb{C}P^5$, на которой эффективно действует тор T^3.

Наконец, в заключение, сформулируем теорему, показывающую, что в размерностях $i = 3$ и 4, в отличие от размерности 2, оба элемента $\pm y_i$ могут быть представлены многообразиями Калаби–Яу.

Теорема 4.3.8 ([52, теорема 13.5])**.**

а) *В комплексной размерности 3, оба класса SU-бордизмов y_3 и $-y_3$ могут быть представлены трёхмерными многообразиями Калаби–Яу. Эти многообразия M можно получить, используя конструкцию Батырева (см. [28]), из торических многообразий Фано над 4-мерными рефлексивными многогранниками. Такое M представляет класс $y_3 \in \Omega_6^{SU}$, если $\chi(M) = 2$ или, эквивалентно,*

$$h^{1,1}(M) - h^{2,1}(M) = 1.$$

Аналогично, M представляет класс $-y_3 \in \Omega_6^{SU}$, если $\chi(M) = -2$ или, эквивалентно,

$$h^{1,1}(M) - h^{2,1}(M) = -1.$$

б) *В комплексной размерности 4, оба класса SU-бордизмов y_4 и $-y_4$ могут быть представлены четырёхмерными многообразиями Калаби–Яу. Эти многообразия M можно получить, используя конструкцию Батырева, из торических многообразий Фано над 5-мерными рефлексивными многогранниками. Такое M представляет класс $y_4 \in \Omega_8^{SU}$, если $\chi(M) = 282$ или, эквивалентно,*

$$h^{1,1}(M) - h^{2,1}(M) + h^{3,1}(M) = 39.$$

Аналогично, M представляет класс $-y_4 \in \Omega_8^{SU}$, если $\chi(M) = 294$ или, эквивалентно,

$$h^{1,1}(M) - h^{2,1}(M) + h^{3,1}(M) = 41.$$

4.4 Спектр W

В разделе 4.1 мы видели, что на группах Ω_*^W можно ввести мультипликативную структуру, полезную для описания кольца Ω_*^{SU}. Эта структура вводится с помощью естественных SU-линейных идемпотентов π_{CF} или π_{St}, являющихся на коэффициентах Ω_*^U (различными) проекторами на Ω_*^W. Оказывается, существует соответствующая теория бордизмов с группами коэффициентов Ω_*^W. Её описанию и изучению и посвящены следующие разделы.

4.4.1 Определение и MSU-модульная структура

Геометрически, теория c_1-сферических бордизмов W_* определяется следующим образом [21, Глава VIII]. Рассматриваются замкнутые многообразия M с *c_1-сферической структурой*, состоящей из

– стабильно комплексной структуры на касательном расслоении $\mathcal{T}M$;

– *$\mathbb{C}P^1$-редукции* детерминантного расслоения, то есть, отображения $f\colon M \to \mathbb{C}P^1$ и эквивалентности $f^*(\eta) \cong \det \mathcal{T}M$, где η — тавтологическое расслоение над $\mathbb{C}P^1$.

Это естественное обобщение SU-структуры, которая задаётся «$\mathbb{C}P^0$-редукцией», т. е. тривиализацией детерминантного расслоения. Соответствующая теория бордизмов называется *c_1-сферическими бордизмами* и обозначается W_*.

Как и в случае стабильно комплексной структуры, задание c_1-сферической комплексной структуры на стабильном касательном расслоении эквивалентно её заданию на стабильном нормальном расслоении. Существуют естественные забывающие преобразования $MSU_* \to W_* \to MU_*$.

Гомотопически, c_1-сферическая структура на стабильно комплексном расслоении $\xi\colon M\to BU$ задаётся поднятием до отображения $M\to X$, где X замыкает (гомотопический) декартов квадрат:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C}P^1 \arrow[d, "i"] \\ M \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "\xi"] & BU \arrow[r, "\det"] & \mathbb{C}P^\infty \end{tikzcd}$$

Так как $\mathbb{C}P^\infty$ является топологической абелевой группой, декартов квадрат в этой диаграмме можно заменить на следующий:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\ M \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "\xi"] & BU\times\mathbb{C}P^1 \arrow[r, "\det - i"] & \mathbb{C}P^\infty \end{tikzcd}$$

Спектр Тома, соответствующий отображению $X\to BU$, определяет теорию бордизмов многообразий с $\mathbb{C}P^1$-редукцией в стабильном нормальном расслоении, т. е. теорию W_*. Мы будем обозначать этот спектр через W.

Замечание 20. Чтобы получить $\mathbb{C}P^1$-редукцию в стабильном касательном расслоении, необходимо заменить в декартовом квадрате выше вложение $i\colon\mathbb{C}P^1\hookrightarrow\mathbb{C}P^\infty$ на $-i$. Заменяя при этом включение отмеченной точки $*\to\mathbb{C}P^\infty$ на расслоение $S^\infty\to\mathbb{C}P^\infty$, мы получаем определение, данное в [21, Глава 8]:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] & S^\infty \arrow[d] \\ BU\times\mathbb{C}P^1 \arrow[r, "\det + i"] & \mathbb{C}P^\infty \end{tikzcd}$$

Следующее описание спектра W и вытекающая из него корасслоенная последовательность неявно содержатся в работах Коннера и Флойда [32] и Стонга [21] и восходит к работе Атья [23] (ср. с предложением 2.3.1).

Предложение 4.4.1. *Имеет место эквивалентность спектров*

$$W\simeq MSU\wedge\Sigma^{-2}\mathbb{C}P^2.$$

При этом забывающие отображения $MSU\to W\to MU$ отождествляются с отображениями

$$MSU=MSU\wedge\Sigma^{-2}\mathbb{C}P^1\to MSU\wedge\Sigma^{-2}\mathbb{C}P^2\to MSU\wedge\Sigma^{-2}\mathbb{C}P^\infty.$$

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} BSU \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C}P^1 \arrow[d, "i"] \\ BSU \arrow[r] & BU \arrow[r, "\det"] & \mathbb{C}P^\infty \end{tikzcd}$$

где строки являются расслоениями, а правый квадрат декартов. Нижнее расслоение расщепляется (см. предложение 2.3.1). Следовательно, верхнее расслоение также расщепляется и мы получаем гомотопическую эквивалентность $X\simeq BSU\times\mathbb{C}P^1$. Отображение $X\to BU$ при этом отождествляется с $\mathrm{id}\times i\colon BSU\times\mathbb{C}P^1\to BSU\times\mathbb{C}P^\infty$. Оно индуцирует эквивалентность соответствующих спектров Тома $W\simeq MSU\wedge\Sigma^{-2}\mathbb{C}P^2$, где $\mathbb{C}P^2$ отождествляется с пространством Тома тавтологического расслоения над $\mathbb{C}P^1$. □

Предложение 4.4.2. *Спектр W эквивалентен кослою умножения $\Sigma MSU\xrightarrow{\cdot\theta}MSU$ на нетривиальный элемент $\theta\in\Omega_1^{SU}\cong\mathbb{Z}/2$. Правое отображение в соответствующей последовательности корасслоения*

$$\Sigma MSU\xrightarrow{\cdot\theta}MSU\to W$$

совпадает с забывающим отображением.

Доказательство. Доказательство следует из предложения 2.1.9. Элемент θ задаётся отображением Хопфа $S^3 \xrightarrow{\eta} S^2 = MSU(1)$ с кослоем $\mathbb{C}P^2$, и следовательно, соответствует стабильному элементу $\eta\colon S^1 \to S$ с кослоем $\Sigma^{-2}\mathbb{C}P^2$. Следовательно, по лемме 2.1.9 кослоем отображения выше является $MSU \wedge \Sigma^{-2}\mathbb{C}P^2$, что совпадает со спектром W в силу предложения 4.4.1. $\square$

Из предложений 2.1.8, 4.4.1 и 4.4.2 следует, что на спектре W существует естественная структура свободного MSU-модуля, причём забывающие отображения $MSU \to W \to MU$ являются MSU-линейными. На гомотопических группах эта структура соответствует декартову произведению SU-многообразия на c_1-сферическое многообразие (легко видеть, что такое произведение всегда будет c_1-сферическим).

Предложение 4.4.3. *Спектры W и MSU эквивалентны по Боусфилду, т. е. условие $MSU_*(X) = 0$ равносильно $W_*(X) = 0$, и отображение $X \to Y$ индуцирует изоморфизм $MSU_*(X) \xrightarrow{\cong} MSU_*(Y)$ тогда и только тогда, когда оно индуцирует изоморфизм $W_*(X) \xrightarrow{\cong} W_*(Y)$.*

Доказательство. Это хорошо известное свойство кослоя нильпотентного отображения (см., например, аналогичное рассуждение в [44, Theorem 8.14] для случая K-теории). Из корасслоения предложения 4.4.2 мы получаем следующую длинную точную последовательность:

$$\cdots \to MSU_{*-1}(X) \xrightarrow{\cdot\theta} MSU_*(X) \to W_*(X) \to MSU_{*-2}(X) \xrightarrow{\cdot\theta} MSU_{*-1}(X) \to \cdots$$

Ясно, что из $MSU_*(X) = 0$ вытекает, что $W_*(X) = 0$. Обратно, если $W_*(X) = 0$, то $MSU_{*-1}(X) \xrightarrow{\cdot\theta} MSU_*(X)$ — изоморфизм. Так как $\theta^3 \in \varOmega_3^{SU} = 0$ (см. пример 3.2.7), мы получаем, что $MSU_*(X) = 0$.

Второе утверждение (об изоморфизмах в гомологиях) следует из первого с помощью рассмотрения гомологической длинной точной последовательности отображения $X \to Y$. $\square$

Предложение 4.4.4. *Целочисленные гомологии $H_*(W)$ сконцентрированы в чётных размерностях, и имеются короткие точные последовательности*

$$0 \to H_{2k}(MSU) \to H_{2k}(W) \to H_{2k-2}(MSU) \to 0$$

В частности, гомологии $H_*(W)$ не имеют кручения.

Доказательство. Рассмотрим длинную точную последовательность в целочисленных гомологиях корасслоения из предложения 4.4.2:

$$\ldots \to H_{2k-1}(MSU) \to H_{2k}(MSU) \to H_{2k}(W) \to H_{2k-2}(MSU) \to H_{2k-1}(MSU) \to \ldots$$

Так как гомологии $H_*(MSU)$ сконцентрированы в чётных размерностях и не имеют кручения, то же верно и для W, а длинная точная последовательность распадается на указанные короткие. $\square$

Напомним, что в разделе 2 мы рассмотрели операцию $\partial\colon MU \to \Sigma^2 MU$, сопоставляющую классу бордизмов $[M] \in MU_*$ класс подмногообразия, двойственного к $c_1(M)$.

Предложение 4.4.5. *Композиция*

$$W \xrightarrow{\partial'} \Sigma^2 MSU \to \Sigma^2 MU$$

связывающего отображения последовательности корасслоения из предложения 4.4.2 с забывающим отображением совпадает с $\bar\partial = -\partial\colon W \to \Sigma^2 MU$.

Доказательство. Согласно лемме 2.1.4, достаточно проверить требуемое равенство на гомотопических группах спектров, то есть, доказать, что $W_{2n}(pt) \xrightarrow{\partial'} \varOmega^{SU}_{2n-2} \to \varOmega^{U}_{2n-2}$ совпадает с $-\partial$. Это доказано в [32, (17.3)] (Коннер и Флойд рассматривают не $W_*(pt)$, а $\ker \varDelta_*$, см. по этому поводу теорему 4.4.6 ниже). $\square$

Объединяя предложение 4.4.2 и предложение 4.4.5, мы получаем точную последовательность
$$\cdots \to \Sigma MSU \xrightarrow{\cdot\theta} MSU \to W \xrightarrow{\partial'} \Sigma^2 MSU \xrightarrow{\cdot\theta} \Sigma MSU \to \cdots$$
Коннера и Флойда [32]. На гомотопических группах мы получаем 5-членную точную последовательность [32, (18.1)]
$$0 \longrightarrow \Omega^{SU}_{2n-1} \xrightarrow{\cdot\theta} \Omega^{SU}_{2n} \longrightarrow W_{2n}(pt) \xrightarrow{\partial'} \Omega^{SU}_{2n-2} \xrightarrow{\cdot\theta} \Omega^{SU}_{2n-1} \longrightarrow 0. \qquad (4.4.1)$$

4.4.2 Связь с операцией Δ

SU-линейное отображение $i\colon W = MSU \wedge \Sigma^{-2}\mathbb{C}P^2 \to MSU \wedge \Sigma^{-2}\mathbb{C}P^\infty$ индуцирует естественное забывающее отображение $W_* \to MU_*$ на теориях бордизмов (забывание $\mathbb{C}P^1$-редукции стабильно комплексной структуры соответствующего сингулярного многообразия) и индуцирует отображение на группах коэффициентов $i_*\colon W_*(pt) \to \Omega^U_*$. Имеет место следующая важная

Теорема 4.4.6. *Отображение i_* является изоморфизмом $W_*(pt)$ на $\Omega^W_* = \operatorname{Ker} \Delta_*$.*

Лемма 4.4.7. *Образ $i_*(W_*(pt))$ совпадает с Ω^W_*.*

Доказательство. Для элемента $[M]$ из $i_*(W_*(pt))$ имеет место равенство $\det TM \oplus \overline{\det TM} = \mathbb{C}^2$, так как это верно для одномерных расслоений на $\mathbb{C}P^1$. Следовательно, $\Delta_* i_* = 0$ и $i_*(W_*(pt)) \subset \Omega^W_*$.

С другой стороны, согласно предложению 4.1.11 $(\pi_{St})_*$ проектирует Ω^U_* на Ω^W_*. Но по определению 4.1.9 образ $(\pi_{St})_*$ лежит в $i_*(W_*(pt))$ (так как $\pi_{St}[M] = [N]$, $N \subset M \times \mathbb{C}P^1$ — двойственное к $\det \mathcal{T}M \otimes \bar\eta$, и следовательно, $\det \mathcal{T}N$ индуцируется отображением $N \hookrightarrow M \times \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$), то есть, $\Omega^W_* \subset i_*(W_*(pt))$. $\square$

Следовательно, для доказательства теоремы 4.4.6 осталось доказать, что отображение забывания i_* инъективно.

Доказательство теоремы 4.4.6. Для доказательства инъективности i_* достаточно построить какое-либо левое обратное отображение к нему, то есть, «проектор» $p_*\colon \Omega^U_* \to W_*(pt)$ такой, что $p_* i_* = 1$.

Но несложно построить даже морфизм $p\colon MU \to W$ левый обратный к $i\colon W \to MU$. Если такое отображение искать среди SU-линейных, то в силу того, что $MU = MSU \wedge \Sigma^{-2}\mathbb{C}P^\infty$, оно задаётся морфизмом $w\colon \Sigma^{-2}\mathbb{C}P^\infty \to W$, то есть, элементом $w \in \widetilde{W}^2(\mathbb{C}P^\infty)$, таким, что $w|_{\mathbb{C}P^2} = w_0\colon \Sigma^{-2}\mathbb{C}P^2 \to W$ — стандартное отображение.

Существование такого продолжения следует из того, что препятствия к его построению лежат в $\pi_{2k+1}(W) = 0$. Действительно, продолжение отображения $\Sigma^{-2}\Sigma^\infty\mathbb{C}P^2 \to W$ до $\Sigma^{-2}\Sigma^\infty\mathbb{C}P^\infty \to W$ равносильно продолжению отображения $\Sigma^\infty\mathbb{C}P^2 \to \Sigma^2 W$ до $\Sigma^\infty\mathbb{C}P^\infty \to \Sigma^2 W$, что в свою очередь равносильно продолжению отображения $\mathbb{C}P^2 \to \Omega^\infty\Sigma^2 W$ до $\mathbb{C}P^\infty \to \Omega^\infty\Sigma^2 W$. Тогда, согласно классической теории препятствий, препятствие к продолжению отображения $\mathbb{C}P^k \to \Omega^\infty\Sigma^2 W$ до $\mathbb{C}P^{k+1} \to \Omega^\infty\Sigma^2 W$ лежит в $\pi_{2k+1}(\Omega^\infty\Sigma^2 W) = \pi_{2k-1}(W)$. То есть, осталось доказать, что гомотопические группы W сосредоточены в чётных размерностях.

Это, в свою очередь, следует из точной последовательности предложения 4.4.2 и теоремы 3.2.8. Действительно, из корасслоенной последовательности 4.4.2 мы имеем точные последовательности
$$\cdots \to \Omega^{SU}_{8k+i-1} \xrightarrow{\cdot\theta} \Omega^{SU}_{8k+i} \to \pi_{8k+i}(W) \to \Omega^{SU}_{8k+i-2} \xrightarrow{\cdot\theta} \Omega^{SU}_{8k+i-1} \to \cdots,$$
для $i = 1, 3, 5, 7$.

При $i = 5$ или $i = 7$ согласно теореме 3.2.11 мы имеем $\Omega^{SU}_{8k+i} = 0$ и $\Omega^{SU}_{8k+i-2} = 0$, и следовательно, из точности $\Omega^{SU}_{8k+i} \to \pi_{8k+i}(W) \to \Omega^{SU}_{8k+i-2}$ следует $\pi_{8k+i}(W) = 0$.

При $i = 3$ согласно теореме 3.2.11 мы имеем $\Omega^{SU}_{8k+i} = 0$, а гомоморфизм $\Omega^{SU}_{8k+1} \xrightarrow{\cdot\theta} \Omega^{SU}_{8k+2}$ является инъективным (на кручение $\operatorname{Tors}\Omega^{SU}_{8k+2}$). Следовательно, из точности $0 \to \pi_{8k+3}(W) \to \Omega^{SU}_{8k+1} \xrightarrow{\cdot\theta} \Omega^{SU}_{8k+2}$ следует $\pi_{8k+3}(W) = 0$.

Наконец при $i = 1$ из теорем 3.2.11 и 3.2.8 следует, что $\Omega^{SU}_{8k+i-2} = 0$ и отображение $\Omega^{SU}_{8k+i-1} \xrightarrow{\cdot\theta} \Omega^{SU}_{8k+i}$ сюръективно. Следовательно, из точности $\Omega^{SU}_{8k} \xrightarrow{\cdot\theta} \Omega^{SU}_{8k+1} \to \pi_{8k+1}(W) \to 0$ следует $\pi_{8k+1}(W) = 0$. $\square$

Замечание 21. Заметим, что согласно конструкции 4.1.9 проектор Стонга $(\pi_{St})_*$, в действительности, корректно поднимается до гомоморфизма $(\tilde{\pi}_{St})_* \colon \Omega^U_* \to W_*(pt)$ такого, что $i_*(\tilde{\pi}_{St})_* = (\pi_{St})_*$. В [21, Глава VIII] Стонг геометрически доказал, что композиция $W_*(pt) \xrightarrow{i_*} \Omega^U_* \xrightarrow{(\tilde{\pi}_{St})_*} W_*(pt)$ является тождественным отображением. В частности, это даёт другое доказательство инъективности отображения i_*.

Следствие 4.4.8. *Группы $\pi_*(W)$ сосредоточены в чётных размерностях и не имеют кручения.*

Замечание 22. Группа коэффициентов $\pi_*(W)$ была впервые рассмотрена Коннером и Флойдом [32] именно как $\Omega^W_* = \ker \Delta_*$.

Замечание 23. Из следствия 4.4.8, корасслоенной последовательности 4.4.2 и предложения 4.4.5 мы получаем 5-членную точную последовательность Коннера–Флойда:

$$0 \to \Omega^{SU}_{2n-1} \xrightarrow{\cdot\theta} \Omega^{SU}_{2n} \to \Omega^W_{2n} \xrightarrow{\partial} \Omega^{SU}_{2n-2} \xrightarrow{\cdot\theta} \Omega^{SU}_{2n-1} \to 0 \tag{4.4.2}$$

Её производной точной последовательностью является последовательность из леммы 3.2.9.

Далее мы будем отождествлять группы $W_*(pt)$, $i_*(W_*(pt))$ и Ω^W_*. У этих групп имеются следующие эквивалентные описания.

Теорема 4.4.9. *Следующие подгруппы в Ω^U_* совпадают*

1) *$i_*(W_*(pt))$ — подгруппа классов комплексных бордизмов, содержащих представителя с c_1-сферической стабильно комплексной структурой;*

2) *$\Omega^W_* = \ker \Delta_*$;*

3) *подгруппа классов комплексных бордизмов, для которых равны нулю все числа Чженя, содержащие c_1^2;*

4) *подгруппа классов комплексных бордизмов, содержащих представителя M с $c_1^2(M) = 0$;*

5) *подгруппа классов комплексных бордизмов, содержащих представителя M, для которого расслоение $\det \mathcal{T}M \oplus \overline{\det \mathcal{T}M}$ тривиально.*

Доказательство. Равенство подгрупп 1) и 2) утверждается в теореме 4.4.6.

Равенство подгрупп 2) и 3) утверждается в следствии 4.1.2.

Ясно, что подгруппа 5) лежит в подгруппе 4), которая в свою очередь лежит в подгруппе 3). То есть, нам надо доказать, что подгруппа 3) лежит в подгруппе 5).

Но подгруппа 3) равна подгруппе 1). А подгруппа 1) в свою очередь лежит в подгруппе 5) так как, для c_1-сферического многообразия M расслоение $\det \mathcal{T}M$ индуцируется из канонического расслоения η над $\mathbb{C}P^1$. Так как $\eta \oplus \bar{\eta}$ тривиально над $\mathbb{C}P^1$, мы получаем, что $\det \mathcal{T}M \oplus \overline{\det \mathcal{T}M}$ тривиально. $\square$

Замечание 24. Несложно проверить, что условие тривиальности $\det \mathcal{T}M \oplus \overline{\det \mathcal{T}M}$ равносильно c_1-сферичности стабильно комплексной структуры, так как линейное расслоение ξ над многообразием индуцируется отображением в $\mathbb{C}P^n$ тогда и только тогда, когда оно вкладывается в $(n+1)$-мерное тривиальное расслоение. Кроме того, несложно проверить, что линейное расслоение ξ индуцируется отображением в $\mathbb{C}P^n$ тогда и только тогда, когда модуль глобальных сечений $\Gamma(\xi)$ порождается $n+1$ сечениями $s_1, \ldots, s_{n+1}$.

Имеется следующее гомотопическое описание спектра W.

Предложение 4.4.10. *Спектр W совпадает со слоем отображения $MU \xrightarrow{\Delta} \Sigma^4 MU$.*

Доказательство. Обозначим рассматриваемый слой через F. Мы имеем длинную точную последовательность гомотопических групп

$$\dots \to \pi_{*-3}(MU) \to \pi_*(F) \to \pi_*(MU) \xrightarrow{\Delta} \pi_{*-4}(MU) \to \pi_{*-1}(F) \to \cdots$$

Операция Δ имеет правую обратную Ψ, и следовательно, она сюръективна. Тогда длинная точная последовательность выше расщепляется:

$$0 \to \pi_*(F) \to \pi_*(MU) \xrightarrow{\Delta} \pi_{*-4}(MU) \to 0$$

Из теоремы 4.4.6 следует, что аналогичные короткие точные последовательности есть и для W_*:

$$0 \to \pi_*(W) \to \pi_*(MU) \xrightarrow{\Delta} \pi_{*-4}(MU) \to 0$$

Из этой короткой точной последовательности, того факта, что $H_*(W)$ не имеют кручения, и предложения 2.1.4 следует, что композиция $W \to MU \xrightarrow{\Delta} \Sigma^4 MU$ гомотопна нулю. Следовательно, существует морфизм $W \to F$, делающий следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi_*(W) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_*(MU) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal] & \pi_{*-4}(MU) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \pi_*(F) \arrow[r] & \pi_*(MU) \arrow[r, "\Delta"] & \pi_{*-4}(MU) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Отсюда следует, что отображение $W \to F$ индуцирует изоморфизм гомотопических групп, и следовательно, является эквивалентностью спектров. □

Предложение 4.4.11. *Для произвольного пространства (или спектра) X забывающее отображение $W_*(X) \to MU_*(X)$ инъективно и его образ совпадает с $\ker \Delta$. Аналогичное утверждение верно и для $W^*(X)$.*

Доказательство. Из предложения 4.4.10 мы получаем длинную точную последовательность

$$\dots \to W_*(X) \to MU_*(X) \xrightarrow{\Delta} MU_{*-4}(X) \to \cdots$$

Так как операция Δ имеет правую обратную, эта длинная точная последовательность расщепляется на короткие

$$0 \to W_*(X) \to MU_*(X) \xrightarrow{\Delta} MU_{*-4}(X) \to 0. \qquad \square$$

Аналогично для $W^*(X)$.

Следствие 4.4.12. *Морфизм $f\colon E \to MU$ поднимается до морфизма $\tilde{f}\colon E \to W$ тогда и только тогда, когда $\Delta f = 0$. Такое поднятие единственно, и если E был MSU-модулем, а морфизм f был SU-линейным, то $\tilde{f}$ также SU-линейно.*

Доказательство. Первое утверждение следствия это переформулировка предложения 4.4.11 о том, что $W^*(E) \to MU^*(E)$ инъективно с образом $\ker \Delta$.

SU-линейность поднятия следует из того, что согласно доказательству теоремы у $i\colon W \to MU$ существуют SU-линейные левые обратные.

□

В частности, мы видим, что проекторы Стонга и Коннера–Флойда допускают единственное и SU-линейное поднятие до морфизмов из $[MU, W]$. Далее мы не будем различать на письме поднятие $E \to W$ и его композицию $E \to MU$ с вложением $W \to MU$. Точный смысл должен быть ясен из контекста. В частности, мы будем также обозначать через π_{CF} и π_{St} проекторы Коннера–Флойда и Стонга, рассматриваемые как операции $MU \to W$.

4.5 SU-линейные проекторы и SU-линейные умножения на W

Здесь мы опишем SU-билинейные умножения на спектре c_1-сферических бордизмов W и SU-линейные проекторы $MU \to W$.

Будем называть морфизм $\pi\colon MU \to W$ *проектором на* W, если он тождествен на W, где W рассматривается как подмодуль в MU посредством забывающего морфизма $W \to MU$, то есть, если $\pi \circ i = \mathrm{id}|_W$, где $i\colon W \to MU$. Рассматривая композицию $MU \xrightarrow{\pi} W \xrightarrow{i} MU$, мы можем считать такие проекторы идемпотентными морфизмами $MU \to MU$ «с образом W» (согласно следствию 4.4.12 морфизмы $MU \to W$ однозначно восстанавливаются по своему «забыванию» $MU \to MU$, причём с сохранением SU-линейности). Примерами таких проекторов служат проекторы Коннера–Флойда π_{CF} и Стонга π_{St}.

Каждый такой проектор выделяет в $MU_*(X)$ прямое слагаемое $W_*(X) = \ker \varDelta$, и аналогично для $W^*(X)$. Более того, из предложения 4.4.10 следует, что каждый такой проектор задаёт расщепление спектра комплексных кобордизмов $MU \simeq W \vee \Sigma^4 MU$, и точная последовательность расслоения из предложения 4.4.10 также расщепляется.

Можно показать (см. предложение 5.3.2), что ни для какого SU-билинейного умножении на W не существует мультипликативного проектора $MU \to W$. Однако любой такой проектор, будучи мультипликативным и тождественным на W, и следовательно, на MSU, был бы SU-линейным. SU-линейные проекторы, в свою очередь, действительно, существуют. Таковыми, например, являются проекторы Стонга и Коннера–Флойда. Как любая SU-линейная операция, такие проекторы представляются в виде ряда от ∂_k. Например, коэффициенты такого ряда для проектора Стонга даются формулой (4.1.10). В общем случае мы имеем

Предложение 4.5.1. *Любой SU-линейный проектор $MU \to W$ имеет вид $\pi = 1 + \sum_{i \geqslant 2} \lambda_i \partial_i$ с $\lambda_i \in MU^{-2i}$.*

Доказательство. По теореме 2.3.4 мы можем записать $\pi = \sum_{i \geqslant 0} \lambda_i \partial_i$. Тогда $\pi(1) = 1$ и $\pi([\mathbb{C}P^1]) = [\mathbb{C}P^1]$, так как $[\mathbb{C}P^1] \in W_2$. Так как $\partial[\mathbb{C}P^1] = 2$ и $\partial_i[\mathbb{C}P^1] = 0$ при $i \geqslant 2$, получаем $\lambda_0 = 1$ и $\lambda_1 = 0$, что и требовалось. □

Мы уточним этот результат в предложении 5.1.4.

Теорема 4.5.2. *Пусть $\pi_0\colon MU \to W$ — некоторый фиксированный проектор на W. Тогда любой другой проектор $\pi\colon MU \to W$ имеет вид $\pi_0(1 + f\varDelta)$ для некоторой операции $f \in [MU, \Sigma^{-4} MU]$. Более того, если π_0 является SU-линейным, то любой другой SU-линейный проектор имеет вид $\pi_0(1 + f\varDelta)$ для SU-линейной f.*

Доказательство. Расщепляющаяся корасслоенная последовательность из предложения 4.4.10 даёт короткую точную последовательность

$$0 \leftarrow [W, W] \leftarrow [MU, W] \leftarrow [\Sigma^4 MU, W] \leftarrow 0$$

Проекторами $MU \to W$ являются те элементы из $[MU, W]$, которые отображаются в $\mathrm{id} \in [W, W]$. Такие проекторы заведомо существуют и любые два проектора $MU \to W$ отличаются на образ элемента из $[\Sigma^4 MU, W]$. Следовательно, любой проектор имеет вид $\pi + g\varDelta$, где $g \in [\Sigma^4 MU, W]$. Осталось заметить, что любая операция $g \in [\Sigma^4 MU, W]$ может быть записана в виде $\pi_0 f$ для $f \in [\Sigma^4 MU, MU]$. Этим завершается доказательство первого утверждения.

Предположим теперь, что π_0 — SU-линейный проектор. Тогда SU-линейные операции f дают SU-линейные проекторы $\pi_0(1 + f\varDelta)$. Обратно, если проектор $\pi_0(1 + f\varDelta)$ SU-линеен, то операция $\pi_0 f \varDelta$ также SU-линейна. Обозначив через $f' \in [\Sigma^4 MU, MU]$ композицию $\pi_0 f \in [\Sigma^4 MU, W]$ и забывающего гомоморфизма $W \to MU$, получаем SU-линейную операцию $f'\varDelta$. Так как операция $\varDelta$ имеют правую обратную, отсюда следует, что сама операция f' также SU-линейна. Но теперь $\pi_0 f' \varDelta = \pi f \varDelta$, так что мы можем заменить в выражении $\pi_0(1 + f\varDelta)$ операцию f на SU-линейную операцию f'. □

Лемма 4.5.3. *Следующие три множества SU-линейных операций совпадают*

1) SU-линейные операции, обращающиеся в нуль на W;

2) операции, имеющие вид $g\Delta$ для SU-линейных g;

3) операции вида $\sum_{i\geqslant 2}\lambda_i\partial_i$, $\lambda_i\in MU_*$.

Доказательство. Операции вида $g\Delta$ обращаются в нуль на W по предложению 4.4.10. С другой стороны, $\sum_{i\geqslant 2}\lambda_i\partial_i$ обращаются в нуль на W, согласно следствию 4.1.3 и лемме 2.1.4.

Обратно, если операция обращается в нуль на W, то, согласно тому же предложению 4.4.10, она имеет вид $g\Delta$. Если операция $g\Delta$ является SU-линейной, то g также SU-линейна, так как операция Δ имеет правую обратную.

Наконец, по теореме 2.3.4 любая SU-линейная операция имеет вид $\sum_{i\geqslant 0}\lambda_i\partial_i$. Если она обращается в нуль на W, то вычисляя её на $1\in\pi_0(W)$ и $[\mathbb{C}P^1]\in\pi_2(W)$, получаем $\lambda_0=\lambda_1=0$. □

Теорема 4.5.4. *Любой проектор $MU\to W$ имеет вид $1-f\Delta$, где f — произвольная операция, удовлетворяющая $\Delta f=1$. Более того, различным проекторам соответствуют различные операции f, и SU-линейным проекторам соответствуют в точности SU-линейные f.*

Доказательство. Из расщепляющейся точной последовательности расслоения из предложения 4.4.10 получаем короткую точную последовательность

$$0\leftarrow[W,MU]\leftarrow[MU,MU]\leftarrow[\Sigma^4MU,MU]\leftarrow 0.$$

Пусть $p\in[MU,MU]$ — проектор на W. Так как он тождествен на W, он отображается в забывающий морфизм $W\to MU$. Тождественное отображение $1\in[MU,MU]$ также отображается в забывающий морфизм, откуда получаем $1-p=f\Delta$ для некоторой $f\in[\Sigma^4MU,MU]$, и различным f соответствуют различные p. Следовательно, $p=1-f\Delta$. Эта операция является проектором на W тогда и только тогда, когда $\Delta(1-f\Delta)=0$. Так как операция Δ имеет правую обратную, получаем $1-\Delta f=0$. Обратно, из последнего условия следует $\Delta(1-f\Delta)=0$. Из существования правой обратной для операции Δ также вытекает, что проектор p является SU-линейным тогда и только тогда, когда f является SU-линейной. □

Замечание 25. Из доказательства теоремы 4.5.4 мы видим, что $MU^*(W)=A^U/A^U\Delta$. Следовательно, проективная резольвента (3.2.2) A^U-модуля $MU^*(MSU)$ получается применением MU^* к резольвенте на уровне спектров $MSU\to W\xrightarrow{\partial}\Sigma^2W\xrightarrow{\partial}\ldots$.

Любой SU-линейный проектор $\pi\colon MU\to W$ определяет SU-билинейное умножение на W по формуле

$$W\wedge W\to MU\wedge MU\xrightarrow{m_{MU}}MU\xrightarrow{\pi}W. \tag{4.5.1}$$

Так как π — проектор, это умножение имеет единицу, получающуюся из единицы MSU посредством забывающего морфизма (мы будем называть её в дальнейшем *стандартной единицей*).

Предложение 4.5.5. *Умножение* (4.5.1)*, соответствующее SU-линейному проектору $\pi=1+\sum_{i\geqslant 2}\lambda_i\partial_i$, (после забывания в MU) имеет вид*

$$a*_\pi b=ab+2\lambda_2\partial a\partial b,$$

Эту формулу можно понимать как тождество на операциях из $[W\wedge W,W]_*$, или как тождество для произвольных когомологических классов $a,b\in[E,W]_*$ для произвольного спектра E.

В частности, умножение, определяемое проектором Стонга $\pi_{St}=1+\sum_{k\geqslant 2}\alpha_{1k}\partial_k$ (а также проектором Коннера–Флойда π_{CF}), имеет уже знакомый вид

$$a*b=ab+2[V]\partial a\partial b.$$

где $[V]=\alpha_{12}\in MU_4$ — класс кобордизмов $[\mathbb{C}P^1]^2-[\mathbb{C}P^2]$.

Доказательство. Достаточно доказать требуемое равенство на элементах из $\Omega_*^W = \pi_*(W)$. Для этого воспользуемся формулой из предложения 2.3.6 и тем фактом, что операции ∂_i обращаются в нуль на Ω_*^W при $i \geqslant 2$ согласно следствию 4.1.3:

$$a *_\pi b = \pi(ab) = ab + \lambda_2\partial_2(ab) + \sum_{i\geqslant 3}\lambda_i\partial_i(ab) = ab + \lambda_2\alpha_{11}^{(2)}\partial a\partial b = ab + 2\lambda_2\partial a\partial b. \qquad \square$$

Пример 4.5.6. Проектор Коннера–Флойда $\pi_{CF} = 1 - \Psi\Delta$ имеет вид, описанный в теореме 4.5.4. Согласно предложению 4.1.12 этот проектор не совпадает с проектором Стонга π_{St}, хотя эти два проектора и определяют одно и то же умножение на W. Это означает лишь то, что проекторы Стога и Коннера–Флойда имеют один и тот же коэффициент при ∂_2 в их разложениях $1 + \sum_{i\geqslant 2}\lambda_i\partial_i$ (а именно, он равен $\alpha_{12} = [V] = [\mathbb{C}P^1]^2 - [\mathbb{C}P^2] = \Psi(1)$).

Имеется альтернативный способ описания умножений на W, задаваемых SU-линейными проекторами.

Предложение 4.5.7. *Умножение* (4.5.1), *соответствующее SU-линейному проектору π, задаётся формулой*

$$a *_\pi b = ab + 2([V] - \omega)\partial a\partial b,$$

где $[V] = \alpha_{12} = [\mathbb{C}P^1]^2 - [\mathbb{C}P^2]$ и $\omega = \pi[V] \in \Omega_4^W$. Более того, любой элемент из Ω_4^W может быть получен в качестве ω для некоторого π.

Доказательство. По теореме 4.5.2 имеем $\pi = \pi_{St} + \pi_{St}f\Delta$ для некоторой SU-линейной операции $f \in [MU, \Sigma^{-4}MU]$. Тогда, используя формулы из предложения 4.5.5 и леммы 4.1.4, получаем

$$a *_\pi b = \pi_{St}(ab) + \pi_{St}f\Delta(ab) = ab + 2[V]\partial a\partial b - 2\pi_{St}f(1)\partial a\partial b.$$

В последнем равенстве мы воспользовались SU-линейностью операции $\pi_{St}f$. Ясно, что любой $\omega \in \Omega_4^W$ может быть получен как $\pi_{St}f(1)$, что доказывает требуемое равенство. Теперь имеем

$$a *_\pi b = \pi(a * b) = \pi(ab) + 2\pi([V] - \omega)\partial a\partial b = a * b + 2\pi([V] - \omega)\partial a\partial b.$$

Следовательно, $\pi([V] - \omega) = 0$ и $\pi[V] = \pi(\omega) = \omega$. $\square$

Теорема 4.5.8. *Любое SU-билинейное умножение на W со стандартной единицей (т. е. получающейся с помощью забывания из единицы MSU) имеет вид*

$$a \tilde{*} b = ab + (2[V] + \omega)\partial a\partial b \tag{4.5.2}$$

для $\omega \in \Omega_4^W$. Все такие умножения ассоциативны и коммутативны. Более того, из SU-линейных проекторов получаются в точности те умножения, для которых $\omega = 2\widetilde{\omega}$, $\widetilde{\omega} \in W_4$.

Доказательство. Пусть $m(x, y)$ — произвольная SU-билинейная операция на W. Продолжив её с помощью произвольного SU-линейного проектора $\pi\colon MU \to W$ до SU-билинейной операции $m(\pi(x), \pi(y))$ на MU, а затем взяв композицию с гомоморфизмом забывания $W \to MU$, получим SU-билинейную операцию в комплексных кобордизмах. Согласно теореме 2.3.5 все такие операции представляются в виде ряда от произведений ∂_i. В силу того, что ∂_i обращается в нуль на W при $i \geqslant 2$, ограничиваясь обратно на W, мы получаем

$$m(a, b) = \alpha\, ab + \beta\,\partial a\, b + \gamma\, a\,\partial b + \delta\,\partial a\,\partial b.$$

Из условия $m(a, 1) = a$ получаем $\alpha a + \beta\partial a = a$. Подставляя $a = 1$ и $a = [\mathbb{C}P^1]$, получаем, что $\alpha = 1, \beta = 0$. Аналогично, $\gamma = 0$.

Наконец, необходимым и достаточным условием того, чтобы умножение принимало значения в W, является

$$0 = \Delta m(a, b) = \Delta(ab + \delta\,\partial a\,\partial b) = -2\partial a\,\partial b + \Delta\delta\,\partial a\,\partial b.$$

Отсюда $\Delta\delta = 2$. Так как $\Delta[V] = 1$, это равносильно $\delta = 2[V] + \omega$, $\omega \in \Omega_4^W$.

Коммутативность умножения $a \tilde{*} b$ очевидна.

Докажем ассоциативность. Имеем

$$(a\tilde{*}b)\tilde{*}c = (ab + \delta\,\partial a\,\partial b)\tilde{*}c = (ab + \delta\,\partial a\,\partial b)c + \delta\,\partial(ab + \delta\,\partial a\,\partial b)\,\partial c.$$

Из SU-линейности ∂ и того, что эта операция тождественно равна нулю на Ω^U_4, следует, что $\partial(\delta\,\partial a\,\partial b) = \partial\delta\,\partial a\,\partial b = 0$. Мы также имеем $\partial(ab) = a\,\partial b + b\,\partial a - [\mathbb{C}P^1]\partial a\,\partial b$ по лемме 4.1.4. В итоге мы получаем равенство

$$(a\tilde{*}b)\tilde{*}c = abc + \delta\,\partial a\,\partial b\,c + \delta\,a\,\partial b\,\partial c + \delta\,b\,\partial a\,\partial c - \delta[\mathbb{C}P^1]\partial a\,\partial b\,\partial c = a\tilde{*}(b\tilde{*}c).$$

Наконец, из предложения 4.5.7 следует, что у умножений, получающихся из проекторов, коэффициент ω должен делиться на 2. ☐

Замечание 26. Для всех таких умножений имеет место равенство $\partial(a\tilde{*}b) = a\partial b + b\partial a - [\mathbb{C}P^1]\partial a\partial b$.

Согласно теореме 4.1.13 мы имеем $\Omega^W_4 = \mathbb{Z}\langle x_1 * x_1\rangle$, $x_1 = [\mathbb{C}P^1]$, где $*$ — умножение определяемое проектором Стонга и $x_1 * x_1 = 9[\mathbb{C}P^1]^2 - 8[\mathbb{C}P^2]$. То есть, в формуле (4.5.2) элемент ω имеет вид $qx_1 * x_1$, $q \in \mathbb{Z}$. Тогда любое SU-билинейное умножение имеет вид

$$a *_q b = ab + (2\alpha_{12} + qx_1 * x_1)\partial a\partial b = a * b + qx_1 * x_1\partial a\partial b. \tag{4.5.3}$$

Умножение, соответствующее проекторам Коннера–Флойда и Стонга, в таких обозначениях есть $a *_0 b$.

Теорема 4.5.9. *Относительно умножения $*_q$ кольцо Ω^W_* имеет вид*

$$(\Omega_W^*, *_q) = \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, \ldots]/(x_1 *_q x_1 = (4q+1)x_2). \tag{4.5.4}$$

Образующие x_i при $i \neq 2$ выделяются условием $s_i(x_i) = \pm m_i m_{i-1}$, а x_2 определяется из условия $x_1 *_q x_1 = (4q+1)x_2$, и образующие можно выбрать так, что будут выполнены равенства

$$\partial(a *_q b) = a\partial b + \partial a b - x_1\partial a\partial b,$$

$$\partial x_1 = 2, \quad \partial x_{2i} = x_{2i-1}.$$

В частности, ни для какого SU-билинейного умножения $a *_q b$, кроме $a * b = a *_0 b = ab + 2\alpha_{12}\partial a\partial b$, задаваемого проектором Стонга π_{St}, кольцо Ω_W^* не является полиномиальным.

Доказательство. Рассмотрим элементы $x_i \in \Omega_W^*$, $i \neq 2$, из теоремы 4.1.13 с $x_1 = [\mathbb{C}P^1]$ и положим $x_2 = x_1 * x_1$. Тогда согласно формуле (4.5.3) $x_1 *_q x_1 = x_1 * x_1 + 4qx_1 * x_1 = (4q+1)x_2$, так как $\partial x_1 = 2$. Следовательно, мы имеем кольцевой гомоморфизм

$$\varphi\colon \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, \ldots]/(x_1 *_q x_1 = (4q+1)x_2) \to (\Omega_W^*, *_q). \tag{4.5.5}$$

Мы хотим доказать, что этот гомоморфизм является изоморфизмом.

Заметим, что имеет место изоморфизм абелевых групп

$$\mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, \ldots]/(x_1 *_q x_1 = (4q+1)x_2) = \mathbb{Z}[x_2, x_3, \ldots] \oplus x_1\mathbb{Z}[x_2, x_3, \ldots]$$

Так как кольца в (4.5.5) градуированы, и каждая компонента является свободной абелевой группой конечного ранга, достаточно доказать, что $\varphi \otimes \mathbb{Z}/2$ и $\varphi \otimes \mathbb{Z}[1/2]$ являются изоморфизмами.

1) $\varphi \otimes \mathbb{Z}/2$ — изоморфизм.

По модулю 2 мы имеем

$$\mathbb{Z}/2[x_1, x_2, x_3, \ldots]/(x_1 *_q x_1 = (4q+1)x_2) = \mathbb{Z}/2[x_1, x_3, x_4 \ldots].$$

Рассмотрим фильтрации

$$\mathbb{Z}/2[x_1, x_3, x_4 \ldots] \supset (x_1) \supset (x_1^2) \supset \ldots$$

и

$$(\Omega_W^*/2, *_q) \supset x_1 *_q \Omega_W^*/2 \supset x_1 *_q x_1 *_q \Omega_W^*/2 \supset \dots$$

Гомоморфизм φ сохраняет эти фильтрации, и следовательно, достаточно доказать, что он индуцирует изоморфизм на присоединённых факторпространствах.

Элементы из $(x_1^n)/(x_1^{n+1})$ однозначно представляются в виде $x_1^n P(x_3, x_4, \dots)$, иными словами, базис в этом факторпространстве составляют мономы $x_1^n x_3^{i_3} x_4^{i_4} \dots$

Так как $\partial(x_1) = 2$, из формулы (4.5.3) следует, что $x_1 *_q a = x_1 * a$ в кольце $(\Omega_W^*/2, *_q)$. Следовательно идеалы $x_1^{*_q n} *_q \Omega_W^*$ совпадают с идеалами для стандартного умножения $x_1^{*n} * \Omega_W^*$. Тогда, согласно теореме 4.1.13, базисом в факторпространстве $x_1^{*_q(n+1)} *_q \Omega_W^*/x_1^{*_q n} *_q \Omega_W^* = x_1^{*(n+1)} * \Omega_W^*/x_1^{*n} * \Omega_W^*$ являются мономы $x_1^{*n} * x_3^{*i_3} * x_4^{*i_4} \dots$ Но из формулы (4.5.3) также следует, что в факторпространстве $x_1^{*_q n} *_q x_3^{*_q i_3} *_q x_4^{*_q i_4} \dots = x_1^{*n} * x_3^{*i_3} * x_4^{*i_4} \dots$ Следовательно, так как гомоморфизм φ переводит мономы $x_1^n x_3^{i_3} x_4^{i_4} \dots$ в $x_1^{*_q n} *_q x_3^{*_q i_3} *_q x_4^{*_q i_4} \dots$, он является изоморфизмом на присоединённых факторпространствах фильтраций.

2) $\varphi \otimes \mathbb{Z}[1/2]$ — изоморфизм.

Из доказательства теоремы 4.1.13 мы имеем $\Omega_W^*[1/2] = \Omega_*^{SU}[1/2] \oplus x_1 \Omega_W^*[1/2]$, где $x_1 = [\mathbb{C}P^1]$. Тогда по теореме 1.3.1 мы имеем, что $\Omega_*^{SU}[1/2] = \mathbb{Z}[1/2][y_2, y_3, \dots]$, и следовательно,

$$\Omega_W^*[1/2] = \mathbb{Z}[1/2][y_2, y_3, \dots] \oplus x_1 \mathbb{Z}[1/2][y_2, y_3, \dots].$$

Причём в качестве образующих y_i можно взять $y_2 = x_1 * x_1$, $y_{2i-1} = x_{2i-1}$ и $y_{2i} = x_{2i} - \frac{1}{2} x_1 y_{2i-1}$ при $i > 1$, где x_i — образующие Ω_*^W из теоремы 4.1.13. Тогда, так как ∂ равняется нулю на $\Omega_{SU}^*[1/2]$, умножение $*_q$ действует по формуле

$$(a_1 + x_1 b_1) *_q (a_2 + x_1 b_2) = a_1 a_2 + x_1(a_1 b_2 + b_1 a_2) + (4q+1) y_2 b_1 b_2$$

для $a_i, b_i \in \mathbb{Z}[1/2][y_2, y_3, \dots]$. То есть, имеет место равенство

$$(\Omega_W^*[1/2], *_q) = \mathbb{Z}[1/2][x_1, y_2, y_3, \dots]/(x_1 *_q x_1 = (4q+1) y_2).$$

Следовательно, гомоморфизм $\varphi \otimes \mathbb{Z}[1/2]$ принимает вид

$$\mathbb{Z}[1/2][x_1, x_2, \dots]/(x_1 *_q x_1 = (4q+1) x_2) \to \mathbb{Z}[1/2][x_1, y_2, \dots]/(x_1 *_q x_1 = (4q+1) y_2),$$

где $x_1 \mapsto x_1$, $x_2 \mapsto y_2$, $x_{2i-1} \mapsto y_{2i-1}$ и $x_{2i} \mapsto y_{2i} + \frac{1}{2} x_1 y_{2i-1}$ при $i > 1$. Отсюда следует, что $\varphi \otimes \mathbb{Z}[1/2]$ является изоморфизмом.

Образующие x_i, $i \neq 2$ определяются своими s-числами, так как в соответствующих размерностях из разложимости в $(\Omega_*^W, *_q)$ следует разложимость в Ω_*^U.

Наконец, мы имеем $\partial(a *_q b) = \partial(a * b + q x_1 * x_1 \partial a \partial b) = \partial(a * b) + \partial(q x_1 * x_1) \partial a \partial b) = \partial(a * b) = a \partial b + b \partial a - [\mathbb{C}P^1] \partial a \partial b$. □

В частности, аналогично теореме 4.2.1 мы получаем, что забывающее отображение $\Omega_*^{SU} \to \Omega_*^W$ переводит y_2 в $2x_2$, y_{2k-1} в x_{2k-1} и y_{2k} в $2x_{2k} - x_1 x_{2k-1}$ при $k > 1$.

Предложение 4.4.1 аналогично теореме Вуда для K-теорий: $KU \simeq KO \wedge \Sigma^{-2} \mathbb{C}P^2$. Для K-теорий также выполняется равенство $KU^{hC_2} \simeq KO$, восходящее к Атья [24], где C_2 — группа из двух элементов, действующая на комплексной K-теории комплексным сопряжением (см. [46, Proposition 5.3.1]). Тогда спектральная последовательность неподвижных точек имеет вид $H^{-s}(C_2, \pi_t(KU)) \Rightarrow \pi_{t+s}(KO)$.

Можно попытаться найти аналогичную инволюцию для спектров W и MSU.

Рассмотрим SU-линейную операцию $\tau_{-1}\colon MU \to MU$, соответствующая ряду $\tau(u) = \overline{u}$. Согласно предложению 2.3.7, это инволюция: $\tau_{-1}\tau_{-1} = \tau_1 = 1$. Рассмотрим инволюцию $\tau = -\tau_{-1}$.

Предложение 4.5.10. *На c_1-сферических бордизмах W инволюция τ равняется $t = 1 - [\mathbb{C}P^1]\partial$ и является мультипликативной. Множество всех SU-линейных инволюций $W \to W$ равняется $\{1, -1, t, -t\}$. Из них мультипликативными являются $\{1, t\}$.*

Доказательство. Мы имеем $-\overline{u} = u + [\mathbb{C}P^1]u^2 + \ldots$. То есть, $\tau = 1 + [\mathbb{C}P^1]\overline{\partial} + g\Delta$ (согласно лемме 4.5.3). Следовательно, $\tau|_W = t = 1 - [\mathbb{C}P^1]\partial$ (так как $\overline{\partial}|_W = -\partial|_W$).

Согласно предложению 2.3.4 и лемме 4.5.3, любая SU-линейная операция $W \to W$ имеет вид $f = k + m[\mathbb{C}P^1]\partial$ для $k,\, m \in \mathbb{Z}$. Тогда, так как $\partial[\mathbb{C}P^1]\partial = 2\partial$, мы получаем $f^2 = (k + m[\mathbb{C}P^1]\partial)(k + m[\mathbb{C}P^1]\partial) = k^2 + 2km[\mathbb{C}P^1]\partial + 2m^2\partial$. Следовательно, если $f^2 = 1$, то $1 = k^2 + 2m(k+m)\partial$, то есть, $k^2 = 1$ и $m(k+m) = 0$. Отсюда получаем 4 SU-линейные инволюции: ± 1, $1 - [\mathbb{C}P^1]\partial$ и $-1 + [\mathbb{C}P^1]\partial$.

Мультипликативное преобразование должно переводить 1 в 1. Следовательно, у нас всего 2 кандидата: 1 и $t = 1 - [\mathbb{C}P^1]\partial$. Осталось проверить мультипликативность последнего: $t(a * b) = a * b - [\mathbb{C}P^1]\partial(a * b) = a * b - [\mathbb{C}P^1](a * \partial b + b * \partial a - [\mathbb{C}P^1]\partial a \partial b) = (a - [\mathbb{C}P^1]\partial a) * (b - [\mathbb{C}P^1]\partial b) = t(a) * t(b)$. □

Замечание 27. Легко видеть, что операция $t = 1 - [\mathbb{C}P^1]\partial$, в действительности, является инволюцией на MU. Но на MU она не совпадает с τ, и они обе не являются мультипликативными.

Замечание 28. Также SU-линейной инволюцией является преобразование, сопоставляющее стабильно комплексному многообразию M то же многообразие $\widetilde{M}$ со стабильно комплексной структурой $\mathcal{T}M - \det \mathcal{T}M + \overline{\det \mathcal{T}M}$. На W она также совпадает с $1 - [\mathbb{C}P^1]\partial$, так как переводит 1 в 1 и $[\mathbb{C}P^1]$ в $-[\mathbb{C}P^1]$.

На коэффициентах $\Omega^W_* = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots]/(x_1 * x_1 = (4q+1)x_2)$ инволюция t действует следующим образом:

$$t(x_1) = -x_1$$

$$t(x_2) = x_2$$

$$t(x_{2i+1}) = 0$$

$$t(x_{2i}) = x_{2i} - x_1 x_{2i-1}$$

Таким образом, мы получаем C_2-модуль Ω^W_*.

Предложение 4.5.11. $H^i(C_2; \Omega^W_*) = \begin{cases} \operatorname{Ker}\partial \subset \Omega^W_*, & i = 0 \\ \frac{x_1 \operatorname{Ker}\partial}{x_1 \operatorname{Im}\partial} \cong H_*(\Omega^W_*, \partial), & i > 0,\ i \equiv 1 \pmod 2 \\ \frac{\operatorname{Ker}\partial}{\operatorname{Im}(\partial x_1)}, & i > 0,\ i \equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$

где $x_1 = [\mathbb{C}P^1]$.

Доказательство. Когомологии $H^i(C_2; \Omega^W_*)$ вычисляет коцепной комплекс

$$0 \to \Omega^W_* \xrightarrow{1-t} \Omega^W_* \xrightarrow{1+t} \Omega^W_* \xrightarrow{1-t} \cdots \to \Omega^W_* \to \cdots$$

При этом $1 - t = x_1\partial$ и $1 + t = 2 - x_1\partial = \partial x_1$.

Предложение тогда вытекает из следующих равенств.

1) $\operatorname{Ker}(1-t) = \operatorname{Ker} x_1\partial = \operatorname{Ker}\partial$, так как умножение на x_1 инъективно.

2) $\operatorname{Ker}(1+t) = \operatorname{Ker}(2 - x_1\partial)$. Мы утверждаем, что $\operatorname{Ker}(2 - x_1\partial) = x_1 \operatorname{Ker}\partial$. Действительно, ясно, что если $a = x_1 b$, $\partial b = 0$, то $2a - x_1\partial a = 2x_1 b - x_1\partial(x_1 b) = 2x_1 b - 2x_1 b = 0$. Обратно, пусть $2a = x_1\partial a$. Отсюда следует, что ∂a делится на 2, то есть, $\partial a = 2b$. Тогда $\partial b = 0$ и $2a = 2x_1 b$, то есть, $a = x_1 b$.

3)$\operatorname{Im}(1-t) = \operatorname{Im}(x_1\partial) = x_1 \operatorname{Im}\partial$.

4) $\operatorname{Im}(1+t) = \operatorname{Im}(\partial x_1)$. □

Глава 5

Комплексные ориентации на W и формальные группы

В этих последних разделах мы развиваем результыты работы [6] В. М. Бухштабера. Мы начинаем с наблюдения, что теория c_1-сферических бордизмов W комплексно ориентируема для любого умножения (4.5.1). Более того, любая комплексная ориентация на W получается из некоторой комплексной ориентации на MU с помощью произвольного SU-линейного проектора π. Комплексная ориентация w на W определяет формальную группу $F_{W,w}(u, v)$ в теории W. В отличие от случая комплексных кобордизмов, ни для какого выбора w коэффициенты формальной группы $F_{W,w}$ *не порождают* всего кольца коэффициентов $\varOmega_*^W$ теории W. Это утверждение вместе с кратким наброском доказательства сформулировано в [6] (где также рассматривается только умножение на W, заданное проектором Стонга). В разделе 5.3 мы приводим полное доказательство аналогичного результата для произвольного SU-билинейного умножения на W, использующее технику, разработанную в предыдущих разделах. Также на основании проведённых в разделе 5.2 вычислений коэффициентов формальной группы F_W в разделе 5.4 мы докажем точность по Ландвеберу теории W^*.

5.1 Комплексные ориентации на W

Для начала мы докажем некоторые общие факты, касающиеся комплексных ориентаций теории W^*.

По теореме 4.5.8 произвольное SU-билинейное умножение на W задаётся формулой

$$a *_q b = ab + \delta_q \partial a \partial b, \tag{5.1.1}$$

где $\delta_q = 2[V] + qx_1 * x_1 = \alpha_{12} + qx_1 * x_1$ и мы также имеем

$$\partial(a *_q b) = \partial(ab) = a\,\partial b + b\,\partial a - [\mathbb{C}P^1]\partial a\,\partial b. \tag{5.1.2}$$

Фиксируем некоторое SU-билинейное умножение $*_q$ на W.

Предложение 5.1.1. *Теория W комплексно ориентируема. Для любых проектора $\pi\colon MU \to W$ и комплексной ориентации $\widetilde{u} \in \widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ элемент $\pi(\widetilde{u}) \in \widetilde{W}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ является комплексной ориентацией для W. Более того, для любых комплексной ориентации w на W и проектора $\pi\colon MU \to W$ существует такая комплексная ориентация $\widetilde{u} \in \widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$, что $w = \pi(\widetilde{u})$.*

Доказательство. Так как комплексная ориентация спектра определяется лишь через единицу теории, то любой морфизм кольцевых спектров (не обязательно мультипликативный), переводящий единицу в единицу, переводит комплексные ориентации в комплексные ориентации.

В нашем случае любой проектор $\pi\colon MU \to W$ переводит единицу в единицу, и следовательно, любую комплексную ориентацию $\widetilde{u}$ в комплексную ориентацию $\pi(\widetilde{u})$ спектра W.

Обратно, для произвольной ориентации $w \in \widetilde{W}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ её образ при забывающем гомоморфизме $\widetilde{W}^2(\mathbb{C}P^\infty) \to \widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ является комплексной ориентацией $\widetilde{u}$ для MU (так как забывающий морфизм также переводит единицу в единицу). Следовательно, $w = \pi(\widetilde{u})$ для любого проектора $\pi\colon MU \to W$. □

Комплексная ориентация $w \in \widetilde{W}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ определяет формальную группу $F_{W,w}(u,v)$ над кольцом Ω^*_W (она зависит также от мультипликативной структуры на W, но мы не отмечаем это в обозначении). Кроме того, комплексная ориентация определяет мультипликативное преобразование $\psi_w\colon MU \to W$, отправляющее u в w и классифицирующее формальную группу $F_{W,w}(u,v)$. Заметим, что даже в случае $w = \pi(u)$, где $u \in \widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ — каноническая ориентация, а π — какой-либо SU-линейный проектор на W (например, проектор Стонга), преобразование ψ_w не совпадает с проектором π, так как согласно предложению 5.3.2 последний никогда *не является* мультипликативным.

Предложение 5.1.2. *Любой (не обязательно мультипликативный) морфизм из MSU в кольцевой спектр E, сохраняющий единицу, пропускается через забывающий морфизм $MSU \to W$ тогда и только тогда, когда спектр E комплексно-ориентируем. Два таких «продолжения» $W \to E$ отличаются на морфизм вида $W \xrightarrow{\partial'} \Sigma^2 MSU \to E$.*

Доказательство. Рассмотрим морфизм $\varphi\colon MSU \to E$. Комплексная ориентируемость спектра E равносильна тому, что морфизм единицы $S = \Sigma^{-2}\mathbb{C}P^1 \to E$ продолжается до морфизма $u\colon \Sigma^{-2}\mathbb{C}P^\infty \to E$. Тогда в качестве продолжения φ на W можно взять композицию $W \simeq MSU \wedge \Sigma^{-2}\mathbb{C}P^2 \xrightarrow{\varphi \wedge u|_{\mathbb{C}P^2}} E \wedge E \to E$. Обратно, если мы имеем морфизм $\tilde{\varphi}\colon W \to E$, сохраняющий единицу, то он индуцирует комплексную ориентацию на E, так как W комплексно ориентируем.

Последнее утверждение следует из корасслоенной последовательности предложения 4.4.2. □

Замечание 29. Если морфизм φ мультипликативен, то из корасслоенной последовательности 4.4.2 следует, что он пропускается через забывающий морфизм $MSU \to W$ тогда и только тогда, когда $\varphi(\theta) = 0$. То есть, элемент θ «является единственным препятствием к комплексной ориентируемости спектра MSU». Развитие этих идей и нахождение аналогичных препятствий для спектра симплектических бордизмов MSp можно найти в [9].

Замечание 30. Даже если морфизм φ был мультипликативным, не обязательно существует мультипликативное продолжение на W. Например, рассмотрим морфизм $\iota\colon MSU \to \frac{1}{2}MSU$. Гомотопические группы спектра $\frac{1}{2}MSU$ сконцентрированы в чётных размерностях, следовательно, он комплексно-ориентируем. Если $\iota\colon MSU \to \frac{1}{2}MSU$ продолжается до мультипликативного морфизма $\iota_1\colon W \to \frac{1}{2}MSU$, то продолжение в свою очередь пропускается через $\iota_2\colon \frac{1}{2}W \to \frac{1}{2}MSU$. Но на уровне гомотопических групп мы имеем $\frac{1}{2}\Omega^W_* = \frac{1}{2}\Omega^{SU}_* \oplus [\mathbb{C}P^1]\frac{1}{2}\Omega^{SU}_*$. При этом $[\mathbb{C}P^1] * [\mathbb{C}P^1] = a \in \frac{1}{2}\Omega^{SU}_*$. Следовательно, $(\iota_2([\mathbb{C}P^1]))^2 = \iota_2(a) = a$. Однако в $\frac{1}{2}\Omega^{SU}_*$ не существует элемента b такого, что $b^2 = a$. Противоречие.

Замечание 31. Существует такая комплексная ориентация w спектра W, что если всё-таки морфизм φ продолжается до мультипликативного морфизма $\tilde{\varphi}\colon W \to E$, а спектр E является связным, имеет конечный тип и не имеет кручения в гомотопических группах $\pi_*(E)$, то продолжение $\tilde{\varphi}$ однозначно определяется значением $\tilde{\varphi}(w)$. Действительно, согласно следствию 5.3.6 существует такая комплексная ориентация w спектра W, что соответствующий мультипликативный морфизм $\psi_w\colon MU \to W$ индуцирует сюръективный гомоморфизм $(\psi_w)_* \otimes \mathbb{Z}[1/2]\colon \Omega^U_* \otimes \mathbb{Z}[1/2] \to \Omega^W_* \otimes \mathbb{Z}[1/2]$. Пусть мы имеем два таких мультипликативных продолжения $\tilde{\varphi}_1$ и $\tilde{\varphi}_2$, что $\tilde{\varphi}_1(w) = \tilde{\varphi}_2(w)$. Так как $w = \psi_w(u)$, мы имеем $\tilde{\varphi}_1 \circ \psi_w(u) = \tilde{\varphi}_2 \circ \psi_w(u)$. Поскольку мультипликативные морфизмы из MU однозначно определяются значениями на ориентации, мы получаем $\tilde{\varphi}_1 \circ \psi_w = \tilde{\varphi}_2 \circ \psi_w$ и следовательно, $(\tilde{\varphi}_1 \circ \psi_w)_* \otimes \mathbb{Z}[1/2] = (\tilde{\varphi}_2 \circ \psi_w)_* \otimes \mathbb{Z}[1/2]$. Так как $(\psi_w)_* \otimes \mathbb{Z}[1/2]$ сюръективен, мы имеем, $(\tilde{\varphi}_1)_* \otimes \mathbb{Z}[1/2] = (\tilde{\varphi}_2)_* \otimes \mathbb{Z}[1/2]$. Теперь, так как в группах $\pi_*(W)$ и $\pi_*(E)$ нет 2-кручения, мы имеем $(\tilde{\varphi}_1)_* = (\tilde{\varphi}_2)_*$. Наконец из леммы 2.1.4 теперь следует, что $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_2$.

Из предложения 2.3.3 мы теперь получаем следующее

Предложение 5.1.3. *Для любого набора SU-линейных проекторов $\pi_k\colon MU \to W$ следующие операции являются топологическими базисами SU-линейных операций $[MU, W]^{MSU}_*$:*

1) $\pi_k\partial_k$, $k \geqslant 0$;

2) $\pi_k\Delta^k$, $\pi_k\partial\Delta^k = \partial\Delta^k$, $k \geqslant 0$.

Проекторам $MU \to W$ *соответствуют разложения с коэффициентом* 1 *при* π_0 *и нулевым коэффициентом при* ∂.

Доказательство. Это прямое следствие предложения 2.3.3, так как если зафиксировать некоторую ориентацию w, мы имеем $\pi_k\partial_k(u) = (-1)^k w^k + \ldots$, что образует топологический базис в $\widetilde{W}^*(\mathbb{C}P^\infty)$.

Аналогично $\pi_k\Delta^k(u) = (-1)^k w^{2k+1} + \ldots$ и $\partial\Delta^k(u) = (-1)^{k+1} w^{2k+2} + \ldots$, что также образует требуемый топологический базис. □

Теперь мы можем уточнить предложение 4.5.1.

Предложение 5.1.4. *Если мы фиксируем некоторый* SU*-линейный проектор* π_0 *(например, проектор Стонга), то любой* SU*-линейный проектор* $\pi\colon MU \to W$ *имеет вид* $\pi = 1 + \sum \lambda_i\bar{\partial}_i$, *где коэффициенты* λ_i *удовлетворяют равенствам*

$$u + \sum \lambda_i u^{i+1} = \pi_0(u) + u\bar{u}(\sum_{i\geqslant 0} w_i * \pi_0(u)^{*(i+1)})$$

и

$$u + \sum \lambda_i u^{i+1} = \pi_0(u) + \sum_{i\geqslant 1}(w_i' * \pi_0(u) + w_i''(u\bar{u}))(u\bar{u})^i$$

для некоторых элементов w_i, w_i' *и* w_i'' *из* Ω_W^*. *Причём для любых* w_i *существует соответствующий проектор. Аналогично, для любых* w_i', w_i'' *существует соответствующий проектор. В частности, выполнены равенства* $\lambda_i = \alpha_{1i} + w_i$ *по модулю разложимых элементов в* Ω_U^*.

Доказательство. Из предложения 4.5.2 следует, что мы имеем $\pi = \pi_0 + \pi_0 f\Delta$. Тогда $\pi(u) = \pi_0(u) + \pi_0 f\Delta(u) = \pi_0(u) + \pi_0 f(uu\bar{u}) = \pi_0(u) + u\bar{u}\pi_0 f(u)$, где последнее равенство следует из SU-линейности f и равенства $u\bar{u} = \partial(u)$. Осталось заметить, что $\pi_0 f(u)$ — произвольный элемент из $\widetilde{W}^2(\mathbb{C}P^\infty)$, то есть, имеет вид $\sum w_i * \pi_0(u)^{*(i+1)}$, так как $\pi_0(u)$ является комплексной ориентацией W.

Для второй формулы достаточно согласно предложению 5.1.3 разложить $\pi = \pi_0 + \sum\limits_{i\geqslant 1}(w_i' * \pi_0 + w_i''\partial)\Delta^i$. Тогда $\pi(u) = \pi_0(u) + \sum(w_i' * \pi_0 + w_i''\partial)\Delta^i(u) = \pi_0(u) + \sum(w_i' * \pi_0 + w_i''\partial)(u(u\bar{u})^i) = \pi_0(u) + \sum(w_i' * \pi_0(u) + w_i''\partial(u))(u\bar{u})^i$. □

Замечание 32. Через коэффициенты разложений $\pi = 1 + \sum \lambda\bar{\partial}_i$ выражаются аналогичные коэффициенты для SU-линейных правых обратных к Δ. Действительно, из равенства $\pi = 1 - f\Delta$ мы получаем $u + \sum \lambda_i u^{i+1} = u - f\Delta(u) = u - u\bar{u}f(u)$, откуда получаем $f(u) = -\frac{1}{u\bar{u}}\sum \lambda_i u^{i+1}$.

Теорема 5.1.5. *Для любого набора* SU*-линейных проекторов* $\pi_k\colon MU \to W$, *удовлетворяющих равенству* $\partial\pi_k = \partial$ *(таких как, например, проекторы Стонга или Коннера–Флойда) любой* SU*-линейный морфизм* $f\colon MU \to W$, *удовлетворяющий равенству* $\partial f = 0$ *единственным образом представляется в виде* $f = \sum\limits_{k\geqslant 0}(\partial_* w_k \cdot \pi_k - w_k\partial)\Delta^k$, *где* $w_k \in \Omega_*^W$.

В частности, проектор $\pi\colon MU \to W$, *удовлетворяющий* $\partial\pi = \partial$ *имеет вид* $\pi = \pi_0 + \sum\limits_{k\geqslant 1}(\partial_* w_k \cdot \pi_k - w_k\partial)\Delta^k$ *(и для любого набора* w_k *это будут такие проекторы).* SU*-билинейное умножение на* W *задаётся* SU*-линейным проектором* π, *таким что* $\partial\pi = \partial$, *тогда и только тогда, когда оно имеет вид* $a\tilde{*}b = ab + 2([V] + 2w)\partial a\partial b$.

Доказательство. Раскладывая операцию f по второму базису из предложения 5.1.3, мы получаем $f = \sum(w_k * \pi_k + \widetilde{w}_k\partial)\Delta^k$. Тогда мы имеем $0 = \partial f = \sum \partial(w_k * \pi_k + \widetilde{w}_k\partial)\Delta^k = \sum(\partial_* w_k \cdot \pi_k + (w_k + \partial_*\widetilde{w}_k - [\mathbb{C}P^1]\partial_* w_k)\partial)\Delta^k$. Теперь из единственности такого разложения мы получаем $\partial_* w_k = 0$ и $w_k + \partial_*\widetilde{w}_k = 0$ и мы приходим к требуемому разложению. Его единственность следует из предложения 5.1.3.

Пусть теперь π — проектор $MU \to W$ такой, что $\partial\pi = \partial$. Тогда $\pi = \pi_0 + f\Delta$, где $f\colon MU \to W$ и $\partial f = 0$. Отсюда получаем разложение $\pi_0 + \sum\limits_{k\geqslant 1}(\partial_* w_k \cdot \pi_k - w_k\partial)\Delta^k$.

Если умножение $*$ задаётся проектором π, таким что $\partial\pi = \partial$, то представляя его в виде $\pi = \pi_{St} + \sum\limits_{k\geqslant 1}(\partial_* w_k \cdot \pi_k - w_k\partial)\Delta^k$ мы получаем, что $a * b = \pi(ab) = ab + 2[V]\partial a\partial b - 2\partial_* w_1\partial a\partial b$, $w_1 \in \Omega_6^W$. Так как согласно теореме 4.1.13 $\Omega_6^W = \langle[\mathbb{C}P^1]^{*3}, x_3\rangle$, $\Omega_4^W = \langle[\mathbb{C}P^1]^{*2}\rangle$ и $\partial_*(x_3) = 0$, $\partial_*([\mathbb{C}P^1]^{*3}) = 2[\mathbb{C}P^1]^{*2}$, мы получаем, что элементы вида $\partial_* b$ есть в точности элементы вида $2w'$ в Ω_4^W. $\square$

Замечание 33. Для SU-линейных проекторов мы имеем $\pi\partial = \partial$, и следовательно, условие $\partial\pi = \partial$ равносильно тому, что проектор π коммутирует с операцией ∂.

Замечание 34. Из теоремы 5.1.5 следует, что если π_0 — какой-то SU-линейный проектор, удовлетворяющий $\partial\pi_0 = \partial$, то все остальные такие проекторы имеют вид $\pi = \pi_0 + \sum\limits_{k\geqslant 1}(\partial_* w_k \cdot \pi_0 - w_k\partial)\Delta^k$.

Замечание 35. Из разложения $MU = \Sigma^4 MU \vee W$ следует, что если фиксировать некоторую SU-линейную правую обратную Φ к Δ, удовлетворяющую $\partial\Phi = 0$ (например, Ψ или операцию, соответствующая проектору Стонга), то произвольный SU-линейный морфизм $f\colon MU \to MU$, удовлетворяющий равенству $\partial f = 0$, единственным образом представляется в виде $f = f_1 + \Phi g$, где g — произвольная SU-линейная операция и $f_1\colon MU \to W$ — SU-линейная операция, удовлетворяющая $\partial f_1 = 0$.

Мы отсылаем читателя к [5] для описания общего алгебраического подхода к умножениям в комплексных кобордизмах, получаемых из проекторов. Там, в частности, доказано следующее предложение.

Предложение 5.1.6 ([5, Теорема 3]). *Для проектора $\pi\colon MU \to W$, удовлетворяющего $\partial\pi = \partial$, определяемое им умножение на W продолжается до коммутативного и ассоциативного (но без единицы) умножения $\pi(\pi(a)\pi(b))$ на MU.*

5.2 Вычисление формальной группы F_W

Чтобы изучить формальную группу $F_{W,w}$ и соответствующий род ψ_w мы отображаем W дальше в однопараметрическое расширение MU-теории, как описано ниже.

Конструкция 5.2.1. Следуя [6], рассмотрим мультипликативную теорию когомологий Γ, определяемую формулой

$$\Gamma^*(X) = MU^*(X)[t]/(t^2 = -[\mathbb{C}P^1]t + \delta_q).$$

Аддитивно, $\Gamma^*(X)$ представляет из себя свободный $MU^*(X)$-модуль с базисом $\{1, t\}$, умножение в котором $MU^*(X)$-билинейно и определяется соотношением $t^2 = -[\mathbb{C}P^1]t + \delta_q$.

Рассмотрим естественное преобразование $\varphi\colon W \to \Gamma$, заданное формулой $\varphi(x) = x + t\partial x$.

Предложение 5.2.2 ([6, Лемма 2]). *Преобразование $\varphi\colon W \to \Gamma$ мультипликативно.*

Доказательство. Для $a, b \in W_*$, используя (5.1.1) и (5.1.2), мы получаем

$$\begin{aligned}(a + t\partial a)(b + t\partial b) &= ab + t(a\partial b + b\partial a) + t^2\partial a\partial b = \\ &= a *_q b + t\partial(a *_q b) + (t^2 + t[\mathbb{C}P^1] - \delta_q)\partial a\partial b = a *_q b + t\partial(a *_q b).\end{aligned}$$ $\square$

В теории Γ существует каноническая ориентация — образ канонической ориентации $u \in \widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ при естественном включении $MU \hookrightarrow \Gamma$. Мы также будем обозначать эту ориентацию теории Γ через u.

При отображении φ ориентация w переходит в ориентацию $\varphi(w)$ теории Γ. Следовательно, $\varphi(w)$ выражается в виде степенного ряда $\gamma(u)$ от u с коэффициентами из $\Gamma^* = \Gamma^*(pt)$.

Предложение 5.2.3 ([6, Лемма 3])**.** *Имеет место равенство*

$$\varphi_* F_{W,w}(u,v) = \gamma F_U(\gamma^{-1}(u), \gamma^{-1}(v)),$$

где $F_U(u,v)$ — формальная группа в комплексных кобордизмах, рассматриваемая как формальная группа над Γ^* посредством естественного включения $MU \hookrightarrow \Gamma$.

Доказательство. Так как φ мультипликативно, формальная группа, соответствующая ориентации $\varphi(w)$, равняется $\varphi_* F_{W,w}$. Аналогично, так как включение $MU \hookrightarrow \Gamma$ также мультипликативно, формальная группа, соответствующая ориентации u совпадает с F_U, рассматриваемой как формальная группа над Γ^*. Теперь требуемое тождество вытекает из представления $\varphi(w) = \gamma(u)$. □

Конструкция 5.2.4. Обозначим через $J = \Omega_U^{<0} \subset \Omega_U^*$ идеал элементов ненулевой степени. Тогда J^2 — идеал разложимых элементов в Ω_U^*. Легко проверить, что $J^2 + tJ$ является идеалом в Γ^*.

Рассмотрим факторкольцо $R_\Gamma^* = \Gamma^*/(J^2 + tJ)$. Как градуированная абелева группа, $R_\Gamma^* = (\Omega_U^*/J^2) \oplus \mathbb{Z}\langle t\rangle$, $\deg t = -2$. Умножение на R_Γ^* задаётся условиями $ab = 0$, $at = 0$ для $a, b \in J/J^2$ и $t^2 = \delta_q$. В частности, $t^3 = 0$, и вообще $R_\Gamma^{\leqslant -2} \cdot R_\Gamma^{<0} = 0$.

Запишем

$$F_{W,w}(u,v) = u + v + \sum_{i\geqslant 1,\, j\geqslant 1} \omega_{ij} u^i v^j.$$

Для того, чтобы сравнить кольцо, порождённое коэффициентами ω_{ij}, со всем кольцом W^*, мы вычислим характеристические s_k-числа элементов ω_{ij}. (Напомним, что s_k — характеристические числа Чженя, соответствующие симметрическим многочленам $t_1^k + \cdots + t_n^k$ от корней Чженя; они обращаются в ноль на разложимых элементах из $J^2 \subset MU^*$.)

Мы вычислим формальную группу $\varphi_* F_{W,w}(u,v) = u + v + \sum(\omega_{ij} + t\partial\omega_{ij}) u^i v^j$ над кольцом R_Γ^* (то есть, приведя коэффициенты по модулю $J^2 + tJ$), используя формулу из предложения 5.2.3. Так как s_k-числа равняются нулю на J^2, таким образом мы получим информацию об s_k-числах коэффициентов формальной группы $F_{W,w}$.

Лемма 5.2.5. *В кольце Γ^* выполнено следующее равенство:*

$$\gamma(u) = u - (\lambda + (2\ell+1)t)u^2 + \sum_{i\geqslant 2} \gamma_{i+1} u^{i+1} \mod J^2 + tJ,$$

где $\lambda \in \Omega_U^{-2} = \Omega_W^{-2}$, $2\ell = \partial\lambda$, $\ell \in \mathbb{Z}$ и $\gamma_{i+1} = (-1)^i \alpha_{1i} + \omega_i$, $\omega_i \in \Omega_W^{-2i}$. Более того, любые λ и ω_i получаются из некоторой ориентации $w \in \widetilde{W}^2(\mathbb{C}P^\infty)$.

Доказательство. По предложению 5.1.1 каждая комплексная ориентация w имеет вид $\pi_{St}(\widetilde{u})$ для некоторой ориентации $\widetilde{u}$ на MU. Записав $\widetilde{u} \in \widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ в виде значения $f(u)$ некоторой SU-линейной операции f на стандартной ориентации u и разложив $f = 1 + \lambda\partial + g\Delta$, получаем $\widetilde{u} = (1 + \lambda\partial + g\Delta)(u)$, где для некоторой ориентации $\widetilde{u}$ в качестве λ может быть произвольный элемент из Ω_U^{-2}, а в качестве g — произвольная SU-линейная операция.

В итоге мы получаем

$$\begin{aligned}\gamma(u) = \varphi(w) = w + t\partial w = \pi_{St}(\widetilde{u}) + t\partial\pi_{St}(\widetilde{u}) = \pi_{St} f(u) + t\partial f(u) =\\ = (\pi_{St} + t\partial)(1 + \lambda\partial + g\Delta)(u) = \pi_{St}(u) + \lambda\partial u + \pi_{St} g\Delta u + (2\ell+1)t\partial u + t\partial g\Delta u =\\ = \pi_{St}(u) + (\lambda + (2\ell+1)t)\partial u + \pi_{St} g\Delta u + t\partial g\Delta u,\end{aligned} \quad (5.2.1)$$

где мы использовали тождество $\partial\pi_{St} = \partial$ из предложения 4.1.10 и равенства $\pi_{St}(\lambda\partial) = \pi_{St}(\lambda)\partial = \lambda\partial$, $t\partial(\lambda\partial) = t\partial(\lambda)\partial = 2\ell t\partial$, вытекающие из следствия 2.2.3.

Рассмотрим каждое из четырёх слагаемых в правой части (5.2.1) по отдельности.

Заметим, что $\partial_i u = u\overline{u}^i = (-1)^i u^{i+1} \mod J$. Тогда, используя формулу из предложения 4.1.10, получаем

$$\pi_{St}(u) = u + \sum_{i\geqslant 2} \alpha_{1i}\partial_i u = u + \sum_{i\geqslant 2} (-1)^i \alpha_{1i} u^{i+1} \mod J^2. \quad (5.2.2)$$

Аналогично,

$$(\lambda + (2\ell+1)t)\partial u = -(\lambda + (2\ell+1)t)u^2 \mod J^2 + tJ. \tag{5.2.3}$$

Согласно лемме 4.5.3, мы имеем $g\Delta(u) = \sum_{i\geqslant 2}\mu_i u^{i+1}$. Иными словами, элемент $g\Delta(u)$ из $\widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ удовлетворяет $g\Delta(u)|_{\mathbb{C}P^2} = 0$. Более того, по лемме 4.5.3 любой элемент $v \in \widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$, такой, что $v|_{\mathbb{C}P^2} = 0$, имеет вид $g\Delta(u)$ для некоторой SU-линейной операции g. Применяя проектор π_{St}, мы также получаем элемент $\pi_{St}g\Delta(u) \in \widetilde{W}^2(\mathbb{C}P^\infty)$, равный нулю на $\mathbb{C}P^2$, и любой такой элемент получается проекцией из элемента $v \in \widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$, обращающегося в нуль на $\mathbb{C}P^2$. Следовательно, $\pi_{St}g\Delta(u)$ выражается в виде степенного ряда от w без квадратичной части по отношению к умножению $*$:

$$\pi_{St}g\Delta(u) = \sum_{i\geqslant 2}\omega_i * w^{*(i+1)},$$

где $\omega_i \in \Omega_W^{-2i}$ могут быть произвольными. Из (5.1.1) получаем $\omega_i * w = \omega_i w + \delta_q\partial\omega_i\partial w = \omega_i w \mod J^2$, где последнее равенство выполнено, так как δ_q и $\partial\omega_i$ лежат в J для $i \geqslant 2$. Более того,

$$w = \pi_{St}(\widetilde{u}) = \pi_{St}(u) + \lambda\partial(u) + \pi_{St}g\Delta(u) = u \mod J.$$

Отсюда следует, что

$$\pi_{St}g\Delta(u) = \sum_{i\geqslant 2}\omega_i u^{i+1} \mod J^2. \tag{5.2.4}$$

Наконец, по лемме 4.5.3 $\partial g\Delta = \sum\limits_{i\geqslant 2}\lambda_i\partial_i$, где $\lambda_i \in \Omega_U^{2-2i} \subset J$. Следовательно, $\partial g\Delta(u) = 0 \mod J$ и $t\partial g\Delta(u) = 0 \mod tJ$. Подставляя теперь полученные выражения (5.2.2), (5.2.3), (5.2.4) в (5.2.1), мы получаем требуемое равенство по модулю $J^2 + tJ$. $\square$

Вернёмся теперь к формальной группе $\varphi_* F_{W,w}(u,v) = u + v + \sum(\omega_{ij} + t\partial\omega_{ij})u^i v^j$ над кольцом Γ^*.

Лемма 5.2.6. *В обозначениях леммы 5.2.5,*

$$\begin{aligned}\varphi_* F_{W,w}(u,v) = u + v - 2\bigl(\lambda + (2\ell+1)t\bigr)uv - 2\delta_q(2\ell+1)^2(uv^2 + vu^2) + \\ + \sum_{i,\,j\geqslant 1}\alpha_{ij}u^i v^j + \sum_{i\geqslant 3}\gamma_i\bigl((u+v)^i - u^i - v^i\bigr) \mod J^2 + tJ.\end{aligned}$$

Доказательство. Мы имеем $\varphi_* F_{W,w}(u,v) = \gamma F_U(\gamma^{-1}(u), \gamma^{-1}(v))$ по предложению 5.2.3. Более того, $\gamma(u) = u - (\lambda + (2\ell+1)t)u^2 + \sum_{i\geqslant 3}\gamma_i u^i \mod J^2 + tJ$ по лемме 5.2.5. Из равенства $(F_U(x,y))^i = (x+y)^i \mod J$ получаем, что

$$\gamma(F_U(x,y)) = F_U(x,y) - \bigl(\lambda + (2\ell+1)t\bigr)(x+y)^2 + \sum_{i\geqslant 3}\gamma_i(x+y)^i \mod J^2 + tJ. \tag{5.2.5}$$

Теперь нам нужно вычислить $x = \gamma^{-1}(u)$. Обозначим

$$\gamma^{-1}(u) = u + \sum_{j\geqslant 2}\varepsilon_j u^j, \quad \gamma(u) = u + \sum_{i\geqslant 2}\gamma_i u^i, \text{ где } \gamma_2 = -\lambda - (2\ell+1)t.$$

Все нижеследующие выкладки будут проводиться над кольцом $R_\Gamma^* = \Gamma^*/(J^2 + tJ)$, то есть, по модулю $J^2 + tJ$, см. конструкцию 5.2.1. Мы имеем $\varepsilon_j \in R_\Gamma^{2-2j}$ и $R_\Gamma^{<0} \cdot R_\Gamma^{<-2} = 0$, откуда следует, что $\varepsilon_2(u + \sum_{i\geqslant 2}\gamma_i u^i)^2 = \varepsilon_2(u - (2\ell+1)tu^2)^2 = \varepsilon_2(u^2 - 2(2\ell+1)tu^3)$ и $\varepsilon_j(u + \sum_{i\geqslant 2}\gamma_i u^i)^j = \varepsilon_j u^j$ при $j \geqslant 3$. Следовательно,

$$\begin{aligned}u = \gamma^{-1}(\gamma(u)) = u + \sum_{i\geqslant 2}\gamma_i u^i + \sum_{j\geqslant 2}\varepsilon_j(u + \sum_{i\geqslant 2}\gamma_i u^i)^j = \\ = u + \sum_{i\geqslant 2}\gamma_i u^i + \varepsilon_2(u^2 - 2(2\ell+1)tu^3) + \sum_{j\geqslant 3}\varepsilon_j u^j.\end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при u^j, получаем

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_2 = -\gamma_2 = \lambda + (2\ell+1)t, \\
&\varepsilon_3 = 2\varepsilon_2(2\ell+1)t - \gamma_3 = 2(\lambda + (2\ell+1)t)(2\ell+1)t - \gamma_3 = 2(2\ell+1)^2\delta_q - \gamma_3, \\
&\varepsilon_j = -\gamma_j \quad \text{при } j \geqslant 4.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\gamma^{-1}(u) = u + \big(\lambda + (2\ell+1)t\big)u^2 + \big(2(2\ell+1)^2\delta_q - \gamma_3\big)u^3 - \sum_{j\geqslant 4}\gamma_j u^j.$$

Осталось подставить $x = \gamma^{-1}(u)$ и $y = \gamma^{-1}(v)$ в (5.2.5). Мы имеем $F_U(x,y) = x + y + \sum \alpha_{ij}x^iy^j = x + y + \sum \alpha_{ij}u^iv^j$ над R^*_Γ, и аналогично $\sum_{i\geqslant 3}\gamma_i(x+y)^i = \sum_{i\geqslant 3}\gamma_i(u+v)^i$. Для оставшегося слагаемого из (5.2.5), мы получаем

$$\begin{aligned}
\big(\lambda + (2\ell+1)t\big)(x+y)^2 = \big(\lambda + (2\ell+1)t\big)\big(u + v + (\lambda + (2\ell+1)t)(u^2+v^2)\big)^2 = \\
= \big(\lambda + (2\ell+1)t\big)\big((u+v)^2 + 2(\lambda + (2\ell+1)t)(u+v)(u^2+v^2)\big) = \\
= (\lambda + (2\ell+1)t)(u+v)^2 + 2(2\ell+1)^2\delta_q(u+v)(u^2+v^2).
\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в (5.2.5), мы в итоге получаем

$$\begin{aligned}
\gamma(F_U(\gamma^{-1}(u), \gamma^{-1}(v))) = \gamma^{-1}(u) + \gamma^{-1}(v) + \sum\alpha_{ij}u^iv^j + \sum_{i\geqslant 3}\gamma_i(u+v)^i - \\
- (\lambda + (2\ell+1)t)(u+v)^2 - 2(2\ell+1)^2\delta_q(u+v)(u^2+v^2) = u + (\lambda + (2\ell+1)t)u^2 + \\
+ (2(2\ell+1)^2\delta_q - \gamma_3)u^3 - \sum_{i\geqslant 4}\gamma_iu^i + v + (\lambda + (2\ell+1)t)v^2 + (2(2\ell+1)^2\delta_q - \gamma_3)v^3 - \\
- \sum_{i\geqslant 4}\gamma_iv^i + \sum\alpha_{ij}u^iv^j + \sum_{i\geqslant 3}\gamma_i(u+v)^i - (\lambda + (2\ell+1)t)(u+v)^2 - \\
- 2(2\ell+1)^2\delta_q(u^3 + uv^2 + vu^2 + v^3) = \\
= u + v - 2(\lambda + (2\ell+1)t)uv - 2\delta_q(2\ell+1)^2(uv^2 + vu^2) + \sum\alpha_{ij}u^iv^j + \sum_{i\geqslant 3}\gamma_i((u+v)^i - u^i - v^i),
\end{aligned}$$

что и требовалось. □

Следствие 5.2.7. *Имеет место равенство*

$$\begin{aligned}
F_{W,w}(u,v) = u + v + \sum\omega_{ij}u^iv^j = u + v + (\alpha_{11} - 2\lambda)uv + (\alpha_{12} + 3\gamma_3 - 2(2\ell+1)^2\delta_q)(uv^2 + vu^2) + \\
+ \sum_{i+j\geqslant 4}\alpha_{ij}u^iv^j + \sum_{k\geqslant 3}\gamma_{k+1}\big((u+v)^{k+1} - u^{k+1} - v^{k+1}\big) \mod J^2 \qquad (5.2.6)
\end{aligned}$$

Доказательство. Мы имеем $t\partial\omega_{ij} = 0 \mod tJ$ для $i + j > 2$, откуда вытекает, что $\varphi_*F_{W,w}(u,v) = u + v + (\omega_{11} + t\partial\omega_{11})uv + \sum_{i+j>2}\omega_{ij}u^iv^j \mod J^2 + tJ$. Теперь требуемые равенства следуют из равенства леммы 5.2.6. □

Напомним, что для $k \geqslant 1$

$$m_k = \text{н.о.д.}\left\{\binom{k+1}{i}, 1 \leqslant i \leqslant k\right\} = \begin{cases} 1 & \text{при } k+1 \neq p^\ell \text{ ни для какого простого } p, \\ p & \text{при } k+1 = p^\ell \text{ для простого } p \text{ и целого } \ell > 0. \end{cases}$$

Можно показать, что любая (градуированная) формальная группа F_Λ над градуированным кольцом $\Lambda^* = \bigoplus_{i\leqslant 0}\Lambda^i$ с нулевым умножением имеет вид $F_\Lambda(u,v) = u + v + \sum_{i\geqslant 1}\lambda_i\frac{(u+v)^{i+1} - u^{i+1} - v^{i+1}}{m_i}$ для некоторых элементов $\lambda_i \in \Lambda^{-2i}$. В частности, для любого неположительно градуированного кольца (связного) R^* это верно над факторкольцом

$R^*/(R^{<0}\cdot R^{<0})$. Легко видеть, что, так как кольцо Лазара $L^*=\mathbb{Z}[a_1,a_2,\dots]$ порождается коэффициентами универсальной формальной группы F_L, редукция F_L над факторкольцом $L^*/(L^{<0}\cdot L^{<0})=\mathbb{Z}\oplus\bigoplus\mathbb{Z}\langle[a_i]\rangle$ имеет вид $u+v+\sum\limits_{i\geqslant 1}\alpha_i\frac{(u+v)^{i+1}-u^{i+1}-v^{i+1}}{m_i}$, где $\alpha_i=\pm[a_i]$. В частности, это верно для формальной группы комплексных кобордизмов. Можно проверить, что для стандартной комплексной ориентации и соответствующей формальной группы F_U коэффициенты редукции равны полиномиальным образующим a_i с $s_i(a_i)=-m_i$ (см., например, [3] или [21, добавление В. М. Бухштабера]). Иными словами, для формальной группы комплексных кобордизмов $F_U(u,v)=u+v+\sum\alpha_{ij}u^iv^j$ имеет место равенство

$$F_U(u,v)=u+v+\sum_{k\geqslant 1}a_k\frac{(u+v)^{k+1}-u^{k+1}-v^{k+1}}{m_k}\mod J^2,$$

где $\Omega_U^*=\mathbb{Z}[a_1,a_2,\ldots]$ и $s_i(a_i)=-m_i$. То есть, $\alpha_{ij}=\frac{\binom{i+j}{i}}{m_{i+j-1}}a_{i+j-1}\mod J^2$ и, в частности, $\alpha_{1j}=\frac{j+1}{m_j}a_j\mod J^2$. Отсюда следует, что $\gamma_{k+1}=(-1)^k\alpha_{1k}+\omega_k=(-1)^k\frac{k+1}{m_k}a_k+\omega_k\mod J^2$.

Сравнивая с формулой (5.2.6), мы получаем следующее

Предложение 5.2.8. *Имеет место равенство*

$$F_{W,w}(u,v)=u+v+\sum\omega_{ij}u^iv^j=u+v+(\alpha_{11}-2\lambda)uv+(4\alpha_{12}+3\omega_2-2(2\ell+1)^2\delta_q)(uv^2+vu^2)+$$
$$+\sum_{k\geqslant 3}\Big(a_k\big(1+(-1)^k(k+1)\big)+m_k\omega_k\Big)\frac{(u+v)^{k+1}-u^{k+1}-v^{k+1}}{m_k}\mod J^2,\quad(5.2.7)$$

где $s_i(a_i)=-m_i$.

Заметим, что так как $\Omega_2^U=\langle[\mathbb{C}P^1]\rangle$, $J^2\cap\Omega_2^U=0$. Следовательно, $\omega_{11}=\alpha_{11}-2\lambda$.

С другой стороны, из равенства

$$\omega_{12}=4\alpha_{12}+3\omega_2-2(2\ell+1)^2\delta_q\mod J^2$$

следует, что

$$\omega_{12}=4\alpha_{12}+3\omega_2-2(2\ell+1)^2\delta_q+k[\mathbb{C}P^1]^2.$$

Заметим, что $\delta_q=2\alpha_{12}+\omega$, $\omega\in\Omega_4^W$ и $\Delta(\alpha_{12})=1$. Следовательно, мы имеем

$$0=\Delta(\omega_{12})=\Delta(4\alpha_{12}+3\omega_2-2(2\ell+1)^2\delta_q+k[\mathbb{C}P^1]^2)=4-4(2\ell+1)^2-8k,$$

то есть, $k=-2\ell(\ell+1)$. В итоге мы получаем

$$\omega_{12}=4\alpha_{12}+3\omega_2-2(2\ell+1)^2\delta_q-2\ell(\ell+1)[\mathbb{C}P^1]^2=4\alpha_{12}+3w_2-2(4\ell(\ell+1)+1)(2\alpha_{12}+qx_2)-$$
$$-2\ell(\ell+1)[\mathbb{C}P^1]^2=3w_2-2qx_2-2\ell(\ell+1)(8\alpha_{12}+[\mathbb{C}P^1]^2+4qx_2)=3w_2-2qx_2-2\ell(\ell+1)x_1*_qx_1,$$

и следовательно, мы имеем точные равенства

$$\omega_{11}=\alpha_{11}-2\lambda,\quad\omega_{12}=3w_2-2qx_2-2\ell(\ell+1)x_1*_qx_1.\qquad(5.2.8)$$

Следствие 5.2.9 ([6])**.** *Для коэффициентов формальной группы $F_{W,w}(u,v)$ выполнено равенство*

$$\text{н.о.д.}\ \big\{s_k(\omega_{ij})\colon i+j=k+1\big\}=m_k\big(1+(-1)^k(k+1)+c_km_km_{k-1}\big)$$

при $k\geqslant 3$, где c_k могут быть произвольными целыми числами в зависимости от ориентации w.

Доказательство. Согласно предложению 5.2.8 мы имеем $\omega_{ij}=\Big(a_k\big(1+(-1)^k(k+1)\big)+m_k\omega_k\Big)\frac{\binom{i+j}{i}}{m_{i+j-1}}\mod J^2$. Следовательно,

$$\text{н.о.д.}\ \big\{s_k(\omega_{ij})\colon i+j=k+1\big\}=$$
$$=s_k\big(a_k+(-1)^k(k+1)a_k+m_k\omega_k\big)=m_k\big(1+(-1)^k(k+1)+s_k(\omega_k)\big).$$

Из формулы (5.1.1) следует, что если элемент $x\in\Omega_{2i}^W$, $i\geqslant 3$, разложим в Ω_*^W, то его образ при забывающем гомоморфизме в Ω_*^U также разложим. Следовательно, в терминах теоремы 4.1.13 $\omega_k=c_kx_k\mod J^2$ для некоторых целых c_k. А значит, $s_k(\omega_k)=c_km_km_{k-1}$, откуда получаем требуемое. ☐

5.3 Порождаемость кольца Ω_*^W коэффициентами формальной группы

Теперь мы можем доказать утверждение, сформулированное в [6] для умножения на W, задаваемого проектором Стонга.

Теорема 5.3.1 ([6]). *Ни для какой комплексной ориентации w и ни для какого SU-билинейного умножения $*_q$ на W коэффициенты соответствующей формальной группы $F_{W,w}$ не порождают всего кольца $(\Omega_*^W, *_q)$.*

Доказательство. Рассмотрим полиномиальную образующую x_k при $k \geqslant 3$ из теоремы 4.1.13. Предположим, что x_k лежит в кольце, порождённом коэффициентами формальной группы $F_{W,w}$. Так как в размерностях $\geqslant 6$ разложимые в $(\Omega_*^W, *_q)$ элементы разложимы и в Ω_*^U, мы получаем, что $s_k(x_k)$ должен делиться на

$$\text{н.о.д.}\ \bigl\{s_k(\omega_{ij})\colon i+j=k+1\bigr\} = m_k(1+(-1)^k(k+1)+c_k m_k m_{k-1}).$$

С другой стороны, по теореме 4.1.13 $s_k(x_k) = \pm m_k m_{k-1}$ и это s-число минимально на Ω_{2k}^W в смысле делимости. Следовательно, мы имеем $m_k m_{k-1} = \pm m_k(1+(-1)^k(k+1)+c_k m_k m_{k-1})$ или $m_{k-1} = \pm(1+(-1)^k(k+1)+c_k m_k m_{k-1})$. Покажем, что в некоторых размерностях $k \geqslant 3$ это невозможно.

Действительно, напомним, что $m_k = p$, если $k+1 = p^s$ для некоторого простого p, и $m_k = 1$ иначе. Следовательно, если $k = 2^\ell$ и, вдобавок, $k+1 = p^s$ для нечётного простого p, то $2 = m_{k-1} = \pm(1+(k+1)+2pc_k) = \pm 2(1+2^{\ell-1}+c_k p)$ т. е. $1+2^{\ell-1}+c_k p = \pm 1$. Так как p нечётно, $2^{\ell-1}+c_k p \neq 0$ ни для какого c_k. Поэтому $1+2^{\ell-1}+c_k p \neq 1$. Но если $1+2^{\ell-1}+c_k p = -1$, то $-2c_k p = 4+2^\ell = 3+p^s$. Это невозможно при $p>3$. В любом случае приходим к противоречию в размерностях вида $k = 2^\ell = p^s-1$ для $p>3$. □

Следствие 5.3.2. *Не существует мультипликативных преобразований $MU \to W$ сюръективных на коэффициентах. В частности, не существует мультипликативных проекторов $MU \to W$.*

Доказательство. Любое мультипликативное преобразование $f\colon MU \to W$ задаёт комплексную ориентацию $w = f(u)$ на W, причём действие f_* на коэффициентах есть соответствующий род ψ_w, классифицирующий формальную группу $F_{W,w}$. Следовательно, $f_*(\alpha_{ij}) = \psi_w(\alpha_{ij}) = \omega_{ij}$. Так как коэффициенты α_{ij} порождают всё кольцо Ω_*^U, то $\operatorname{Im} f_*$ совпадает с подкольцом в Ω_*^W, порождённом ω_{ij}, которое согласно теореме 5.3.1 не совпадает со всем кольцом Ω_*^W. □

Мы также можем доказать следующий результат, также сформулированный в [6] для умножения, задаваемого проектором Стонга.

Теорема 5.3.3 ([6]). *Пусть A — подкольцо в Ω_*^W, порождённое коэффициентами формальной группы $F_{W,w}$. Тогда существует ориентация на W, такая, что $A[\frac12] = \Omega_*^W[\frac12]$.*

Доказательство будет опираться на две теоретико-числовые леммы. Из доказательства теоремы 5.3.1 мы видим, что н.о.д. $\bigl\{s_k(\omega_{ij})\colon i+j=k+1\bigr\} \neq \pm m_k m_{k-1}$ при $k = 2^\ell = p^s-1$ при простом $p>3$. Первая лемма конкретизирует эти «плохие» размерности:

Лемма 5.3.4. *Если $p^s = 2^\ell+1$ для нечётного простого p и целых положительных ℓ, s, то либо $s=1$ и $\ell = 2^n$ (то есть, p — простое число Ферма), либо $p=3$, $s=2$ и $\ell=3$.*

Доказательство. Случай 1: $p=3$.

Существуют очевидные решения $s=1, \ell=1$ и $s=2, \ell=3$.

Предположим теперь, что $s>2$, т. е. $\ell>3$. Тогда $3^s = 2^\ell+1 \equiv 0 \pmod 9$. Легко проверить, что $2^\ell \equiv -1 \pmod 9$ тогда и только тогда, когда $\ell = 6m+3$. Тогда $3^s = 2^\ell+1 = (2^{2m+1})^3+1 = (2^{2m+1}+1)(2^{4m+2}-2^{2m+1}+1)$. Следовательно, $2^{4m+2}-2^{2m+1}+1 = 3^{s'}$ и $2^{2m+1}+1 = 3^{s''}$. Из $\ell>3$ следует, что $m>0$, и значит, $s'>1$. Следовательно, $2^{4m+2}-2^{2m+1}+1 \equiv 0 \pmod 9$. Аналогично, $s''>1$ и $2^{2m+1}+1 = 3^{s''} \equiv 0 \pmod 9$. Но из последнего следует, что $2^{4m+2}-2^{2m+1}+1 \equiv 1+1+1 = 3 \not\equiv 0 \pmod 9$. Противоречие.

Случай 2: $p>3$.

Приводя равенство $p^s = 2^\ell + 1$ по модулю 3, мы получаем $(\pm 1)^s \equiv (-1)^\ell + 1 \pmod 3$. Отсюда следует, что s нечётно, а ℓ чётно.

Если запишем $p - 1 = a2^q$ для нечётного a, то получаем $2^\ell + 1 = (a2^q + 1)^s = a^s 2^{qs} + \cdots + sa2^q + 1$. Предположим, что $s > 1$. Тогда $\ell > q$ и $as + 2^q(a^s 2^{q(s-2)} + \cdots) = 2^{\ell - q}$ чётно. Это противоречит тому, что as нечётно. Следовательно, $s = 1$ и $p = 2^\ell + 1$.

Если записать $\ell = r2^n$ для нечётного r, то получим $p = 2^\ell + 1 = (2^{2^n} + 1)(2^{(r-1)2^n} - \cdots + 1)$. Так как p простое, получаем, что $p = 2^{2^n} + 1$ и $\ell = 2^n$. □

Вторая лемма говорит, что размерности, рассмотренные в доказательстве теоремы 5.3.1, являются единственными, в которых н.о.д. s-чисел коэффициентов формальной группы $F_{W,w}$ не совпадает с $m_k m_{k-1}$:

Лемма 5.3.5. *Во всех размерностях $k \geqslant 3$, кроме имеющих вид $k = 2^\ell = p^s - 1$ для некоторого простого $p > 3$, выполнено* н.о.д. $\bigl\{s_{i+j-1}(\omega_{ij})\colon i + j = k + 1\bigr\} = m_k m_{k-1}$ *для некоторой комплексной ориентации W.*

Доказательство. Согласно следствию 5.2.9, нам нужно найти c_k, для которых выполнено $1 + (-1)^k(k+1) + c_k m_k m_{k-1} = \pm m_{k-1}$. Иными словами, хотя бы одно из двух чисел $c_k = \frac{\pm m_{k-1} - 1 - (-1)^k(k+1)}{m_k m_{k-1}}$ должно быть целым.

Если $k = 2^\ell = 3^s - 1$, то согласно лемме 5.3.4 мы имеем $k = 8$. Тогда $m_k = 3$, $m_{k-1} = 2$ и число $c_k = \frac{-m_{k-1} - 1 - (-1)^k(k+1)}{m_k m_{k-1}} = \frac{-2-1-9}{6} = -2$ целое.

Если же k не имеет вид $2^\ell = p^s - 1$ для нечётного p, то всегда целым будет число $c_k = \frac{m_{k-1} - 1 - (-1)^k(k+1)}{m_k m_{k-1}}$.

Если $m_{k-1} = 1$, то $c_k = (-1)^{k+1}\frac{k+1}{m_k}$, что является целым числом, так как m_k всегда делит $k + 1$.

Если $m_{k-1} = 2$, то $k = 2^\ell$. Так как $k \neq p^s - 1$, получаем $m_k = 1$, и тогда $c_k = \frac{2-1-(k+1)}{2} = -\frac{k}{2} = -2^{\ell-1}$.

Если $m_{k-1} = p$ — нечётное простое, то $k = p^s$. Следовательно, $m_k = 1$ или 2, и $c_k = \frac{p-1+(k+1)}{m_k p} = \frac{k+p}{m_k p} = \frac{p^{s-1}+1}{m_k}$. Это целое число, так как $p^{s-1} + 1$ чётно. □

Доказательство теоремы 5.3.3. Согласно теореме 4.5.9, если умножение в кольце $\varOmega^W_*$ имеет вид $a *_q b = ab + \delta_q \partial a \partial b$, то имеет место равенство $(\varOmega^W_*, *_q) = \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, \ldots]/(x_1 *_q x_1 = (4q+1)x_2)$, где $x_1 = [\mathbb{C}P^1]$, $\delta_q = 2\alpha_{12} + qx_2$ и $s_i(x_i) = m_i m_{i-1}$. Следовательно, нам достаточно показать, что для некоторой ориентации в кольце A лежат x_1, x_2 и такие элементы $z_k \in A_{2k}$, $k \geqslant 3$, что $s_k(z_k) = m_k m_{k-1}$ с точностью до степеней 2.

По формуле (5.2.8) мы имеем $\omega_{11} = \alpha_{11} - 2\lambda = -[\mathbb{C}P^1] - 2\lambda$. Выбирая ориентацию на W, такую, что $\lambda = 0$, получаем $[\mathbb{C}P^1] = x_1 \in A$.

Согласно той же формуле (5.2.8) в случае $\lambda = 0$, мы имеем $\ell = 0$ и следовательно,

$$\omega_{12} = 4\alpha_{12} + 3\omega_2 - 2\delta_q = 3\omega_2 - 2qx_2.$$

Выбирая ориентацию так, чтобы $\omega_2 = 0$, получаем $\omega_{12} = -2qx_2$. Тогда $\omega_{11} *_q \omega_{11} + 2\omega_{12} = (4q+1)x_2 - 4qx_2 = x_2 \in A$.

Осталось найти z_k для $k \geqslant 3$. Согласно лемме 5.3.5, существует целочисленная линейная комбинация z_k коэффициентов ω_{ij} с $i + j = k + 1$, такая, что $s_k(z_k) = m_k m_{k-1}$, за исключением случая $k + 1 = p^s = 2^\ell + 1$, $p > 3$.

В оставшемся случае, согласно лемме 5.3.4, мы имеем $k = 2^{2^n} = p - 1$. Тогда полагая мы имеем н.о.д. $\bigl\{s_k(\omega_{ij})\colon i + j = k + 1\bigr\} = p(1 + p + 2pc_k)$. Если мы хотим н.о.д. $\bigl\{s_k(\omega_{ij})\colon i + j = k + 1\bigr\} = 2^{N-1} m_k m_{k-1} = 2^N p$, то мы получаем $2^N = 1 + p + 2pc_k$. То есть, целым должно быть число $c_k = \frac{2^N - p - 1}{2p}$. Это так при $2^N = (p-1)^2 = 2^{2^{n+1}}$, так как в этом случае $c_k = \frac{(p-1)^2 - p - 1}{2p} = \frac{p^2 - 3p}{2p} = \frac{p-3}{2} = \frac{2^{2^n} - 2}{2} = 2^{2^n - 1} - 1$. □

Следствие 5.3.6. *Существует такая комплексная ориентация w спектра W, что сюръективно отображение $\psi_w \otimes \mathbb{Z}[1/2]\colon \varOmega^U_* \otimes [1/2] \to \varOmega^W_* \otimes \mathbb{Z}[1/2]$, где ψ_w — мультипликативный род, соответствующий ориентации w.*

Рассмотрим множество $\mathcal{P}$ простых чисел вида $p = 2^k + 1$ (простых чисел Ферма), строго больших 3. Рассмотрим теорию $W^*[\mathcal{P}^{-1}]$, получаемую из теории W^* обращением всех $p \in \mathcal{P}$ (тензорным умножением на кольцо $\mathbb{Z}[\mathcal{P}^{-1}] = \mathbb{Z}[1/p, p \in \mathcal{P}]$).

Теорема 5.3.7 ([6]). *Для теории $W^*[\mathcal{P}^{-1}]$ существует такая комплексная ориентация, что коэффициенты соответствующей формальной группы порождают всё кольцо $\Omega_W^*[\mathcal{P}^{-1}]$.*

Теорема 5.3.7 сформулирована в [6] для стандартного умножения, задаваемого проектором Стонга. Ниже мы приводим её доказательство.

Доказательство. Мы имеем $\Omega_W^*[\mathcal{P}^{-1}] = \mathbb{Z}[\mathcal{P}^{-1}][x_1, x_2, \dots]/(x_1 *_q x_1 = (4q+1)x_2)$ и нам нужно породить коэффициентами элементы x_k.

Для формальных групп, соответствующих комплексным ориентациям теории $W^*[\mathcal{P}^{-1}]$ верны те же предложение 5.2.7, формулы (5.2.8) и следствие 5.2.9 с той лишь разницей, что $\lambda, \omega_i \in \Omega_*^W[\mathcal{P}^{-1}]$ и $c_k \in \mathbb{Z}[\mathcal{P}^{-1}]$, как видно из доказательств.

Следовательно, аналогично доказательству теоремы 5.3.3 мы для $\lambda = 0$ и целых c_k можем добиться того, что x_k порождаются коэффициентами формальной группы, за исключением размерностей вида $k + 1 = p \in \mathcal{P}$. В этом случае мы имеем $c_k = \frac{1-p}{2p} = \frac{1}{p}\frac{1-p}{2} \in \mathbb{Z}[\mathcal{P}^{-1}]$. $\square$

Следствие 5.3.8. *Существует комплексная ориентация w теории $W^*[\mathcal{P}^{-1}]$ такая, что соответствующий мультипликативный род $\psi_w \colon \Omega_*^U \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{P}^{-1}] \to \Omega_W^*[\mathcal{P}^{-1}]$ сюръективен.*

Замечание 36. Согласно теореме 5.3.3 кольцо $\Omega_W^*[1/2]$ порождается коэффициентами формальной группы $F_{W,w}$ для некоторой ориентации теории W^*. В теореме 5.3.7 же речь принципиально идёт об ориентации уже локализованной теории, что соответствует нецелым значениям c_k. Ответ на вопрос, можно ли породить локализованное кольцо $\Omega_W^*[\mathcal{P}^{-1}]$ коэффициентами формальной группы, соответствующей «целочисленной» ориентации теории W^*, то есть, существуют ли такие целые c_k, что для всех $k + 1 \in \mathcal{P}$ имеют место равенства $1 + (-1)^k(k+1) + c_k m_k m_{k-1} = \varepsilon_k m_{k-1}$ для обратимых элементов $\varepsilon_k \in \mathbb{Z}[\mathcal{P}^{-1}]$, автору неизвестен.

5.4 Точность по Ландведеру теории W

Напомним, что согласно обсуждению перед предложением 5.2.8 для любой (градуированной) формальной группы F_R над любым (связным) градуированным кольцом $R^* = \bigoplus_{i \leqslant 0} R^i$ имеет место равенство

$$F_R(u, v) = u + v + \sum_{k \geqslant 1} r_k \frac{(u+v)^{k+1} - u^{k+1} - v^{k+1}}{m_k} \mod J_R^2$$

для некоторых $r_k \in R^*$, где $J_R = \bigoplus_{i<0} R^i$ и J_R^2 — идеал разложимых элементов.

Тогда, как легко видеть, для n-ого степенного ряда верна следующая формула

$$[n]_{F_R}(u) = nu + \sum_{k \geqslant 1} r_k \frac{(nu)^{k+1} - nu^{k+1}}{m_k} \mod J_R^2$$

В частности, обозначая через J_W идеал элементов ненулевой степени в $(\Omega_W^*, *_q)$, а через J_W^{*2} — разложимых элементов, мы получаем $F_{W,w}(u, v) = u + v + \sum\limits_{k \geqslant 1} w_k \frac{(u+v)^{k+1} - u^{k+1} - v^{k+1}}{m_k} \mod J_W^{*2}$ и $[n]_{W,w}(u) = nu + \sum\limits_{k \geqslant 1} w_k \frac{(nu)^{k+1} - nu^{k+1}}{m_k} \mod J_W^{*2}$.

В качестве w_1 и w_2 можно взять настоящие коэффициенты ω_{11} и ω_{12} соответственно, которые мы знаем из формул (5.2.8). Для $k \geqslant 3$ мы имеем $w_k = A_k x_k \mod J_W^{*2}$. Чтобы узнать, чему равно A_k, достаточно посчитать s-числа: $A_k m_k m_{k-1} = s_k(A_k x_k) = s_k(w_k)$. Но из формулы (5.2.7) следует, что $s_k(w_k) = s_k\big(a_k\big(1 + (-1)^k(k+1)\big) + m_k\omega_k\big) = m_k(1 + (-1)^k(k + 1) + c_k m_{k-1} m_k)$. То есть, $A_k = \frac{1+(-1)^k(k+1)}{m_{k-1}} + c_k m_k$ (легко видеть, что $\frac{1+(-1)^k(k+1)}{m_{k-1}}$ всегда является целым числом). В итоге мы получаем следующие формулы

$$F_{W,w}(u,v) = u + v + \sum_{k\geqslant 1} w_k \frac{(u+v)^{k+1} - u^{k+1} - v^{k+1}}{m_k} \mod J_W^{*2}, \tag{5.4.1}$$

где

$$\begin{gathered} w_1 = \omega_{11} = \alpha_{11} - 2\lambda, \\ w_2 = \omega_{12} = 4\alpha_{12} + 3\omega_2 - 2(2\ell+1)^2\delta_q - 2\ell(\ell+1)[\mathbb{C}P^1]^2 \end{gathered} \tag{5.4.2}$$

$$w_k = (\frac{1+(-1)^k(k+1)}{m_{k-1}} + c_k m_k) x_k \mod J_W^{*2} \quad \text{при } k \geqslant 3.$$

и следовательно,

$$[n]_{W,w}(u) = nu + \sum_{k\geqslant 1} w_k \frac{(nu)^{k+1} - nu^{k+1}}{m_k} \mod J_W^{*2}. \tag{5.4.3}$$

Напомним, что для заданной (градуированной) формальной группы F_R над градуированным кольцом R_* и фиксированного простого числа p через v_n традиционно обозначается коэффициент при u^{p^n} в степенном ряду $[p]_{F_R}(u)$ (по традиции же в обозначении элементов v_n не указывается рассматриваемое простое число p). Тогда имеет место следующая

Теорема 5.4.1 (теорема Ландвебера о точности, [35]). *Если для любого простого числа p последовательность $(p, v_1, v_2, \dots)$ регулярна в кольце R_*, то есть, для любого n умножение на элемент v_n инъективно в факторкольце $R_*/(p, v_1, \dots, v_{n-1})$ (включая умножение на число p в R_*), то функтор $MU_*(-) \otimes_{\Omega_*^U} R_*$ является точным, то есть, задаёт теорию гомологий. Здесь структура Ω_*^U-модуля на R_* задаётся посредством кольцевого гомоморфизма $\Omega_*^U \to R_*$, классифицирующего данную формальную группу F_R. В таком случае формальную группу F_R называют точной по Ландвеберу. Аналогично формула $MU^*(-) \otimes_{\Omega_U^*} R^*$ определяет кольцевую теорию когомологий на конечных клеточных комплексах.*

Следствие 5.4.2. *Если формальная группа, соответствующая комплексно ориентированной теории h^*, точна по Ландвеберу, то имеет место естественный изоморфизм кольцевых теорий когомологий $h^*(-) \simeq MU^*(-) \otimes_{\Omega_U^*} h^*(pt)$ на конечных клеточных комплексах, и соответствующий изоморфизм теорий гомологий на произвольных комплексах.*

Хорошо известен следующий факт.

Предложение 5.4.3. *Пусть над кольцом R заданы две формальные группы F_1 и F_2 и изоморфизм $g\colon F_1 \to F_2$, то есть, $g(u) = \lambda u + \ldots \in R[[u]]$, где $\lambda \in R^\times$, $F_2(u,v) = g(F_1(g^{-1}(u), g^{-1}(v)))$ и $[p]_2(u) = g([p]_1(g^{-1}(u)))$. Обозначим через v_n и v'_n коэффициенты при u^{p^n} в рядах $[p]_1(u)$ и $[p]_2(u)$ соответственно.*

Тогда $v'_n = sv_n \mod (p, v_1 \dots, v_{n-1})$, $s \in R^\times$. В частности, идеалы $(p, v_1, \dots, v_n)$ зависят лишь от класса изоморфизма формальной группы.

Доказательство. Доказательство проходит индукцией по n. При $n = 0$ речь идёт об идеале (p) и утверждение тривиально верно. Докажем, что из равенства $(p, v_1, \dots, v_{n-1}) = (p, v'_1, \dots, v'_{n-1})$ следует, что $v'_n = sv_n \mod (p, v_1, \dots, v_{n-1})$, $s \in R^\times$.

Известно, что для формальной группы F_R над кольцом R, в котором $0 = p = v_1 = \ldots = v_{n-1}$, существует формальный ряд $\varphi(u) = v_n u + \ldots$ такой, что имеет место равенство $[p]_R(u) = \varphi(u^{p^n})$ (см., например, [44, Lemma A2.2.7]).

Следовательно, редуцируя формальные группы по модулю $(p, v_1, \dots, v_{n-1})$ мы получаем, что $[p]_1(u) = v_n u^{p^n} + \ldots$ и $[p]_2(u) = v'_n u^{p^n} + \ldots$. С другой стороны, $[p]_2(u) = g([p]_1(g^{-1}(u))) = \lambda\lambda^{-p^n} v_n u^{p^n} + \ldots$. Таким образом, $v'_n = \lambda^{1-p^n} v_n \mod (p, v_1, \dots, v_{n-1})$. □

Следствие 5.4.4. *Точность по Ландвеберу формальной группы, соответствующей комплексно-ориентированной теории, не зависит от комплексной ориентации.*

Теорема 5.4.5. *Формальная группа $F_{W,w}(u,v)$ над кольцом $(\Omega_W^*, *_q)$ точна по Ландвеберу (для любого умножения $*_q$).*

Следствие 5.4.6. *Для любого SU-билинейного умножения $*_q$ на теории W^* имеют место естественные изоморфизм $W_*(-) = MU_*(-) \otimes_{\Omega_*^U} (\Omega_*^W, *_q)$ на любых клеточных комплексах и кольцевой изоморфизм $W^*(-) = MU^*(-) \otimes_{\Omega_U^*} (\Omega_W^*, *_q)$ для конечных комплексов.*

Доказательство теоремы 5.4.5. Согласно теореме 4.5.9 мы имеем

$$(\Omega_W^*, *_q) = \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, \ldots]/(x_1 *_q x_1 = (4q+1)x_2).$$

Так как, согласно следствию 5.4.4 точность по Ландвеберу не зависит от выбора ориентации теории, мы можем для простоты выбрать комплексную ориентацию вида $w = \pi_{St}(u)$. Тогда в формулах (5.4.1), (5.4) и (5.4.3) мы имеем $\lambda = \omega_2 = 0$, $\ell = c_k = 0$.

То есть, имеют место равенства

$$[n]_{W,w}(u) = nu + \sum_{k \geqslant 1} w_k \frac{(nu)^{k+1} - nu^{k+1}}{m_k} \mod J_W^{*2},$$

$$w_1 = x_1$$

$$w_2 = -2qx_2$$

$$w_k = \frac{1 + (-1)^k (k+1)}{m_{k-1}} x_k \mod J_W^{*2} \quad \text{при } k \geqslant 3.$$

Эта формула, однако, ничего нам не говорит о коэффициенте при u^3 в ряду $[n]_{W,w}(u)$, так как $\Omega_W^{-4} \subset J_W^{*2}$. Но легко видеть, что для произвольной формальной группы $F(u,v) = u + v + \sum a_{ij} u^i v^j$ имеет место равенство

$$[n]_F(u) = nu + \frac{n(n-1)}{2} a_{11} u^2 + \big(\frac{n(n-1)(n+1)}{3} a_{12} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} a_{11}^2\big) u^3 + \ldots$$

В нашем случае $\omega_{11} = x_1$ и $\omega_{12} = -2qx_2$, и следовательно,

$$\begin{aligned}[n]_W(u) &= nu + \frac{n(n-1)}{2} x_1 u^2 + \big(-2q\frac{n(n-1)(n+1)}{3} x_2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} x_1 * x_1\big) u^3 + \ldots = \\ &= nu + \frac{n(n-1)}{2} x_1 u^2 + \Big((4q+1)\frac{n(n-1)(n-2)}{6} - 2q\frac{n(n-1)(n+1)}{3}\Big) x_2 u^3 + \ldots\end{aligned}$$

Таким образом, в итоге мы получаем, что коэффициент при u^{k+1} в ряду $[n]_W(u)$ равен

$$\begin{cases} n & \text{при } k = 0 \\ \frac{n(n-1)}{2} x_1 & \text{при } k = 1 \\ \big((4q+1)\frac{n(n-1)(n-2)}{6} - 2q\frac{n(n-1)(n+1)}{3}\big) x_2 & \text{при } k = 2 \\ \frac{(n^{k+1}-n)}{m_k} \frac{(1+(-1)^k(k+1))}{m_{k-1}} x_k \mod J_W^{*2} & \text{при } k > 2 \end{cases} \tag{5.4.4}$$

Заметим, что в формуле (5.2.9) выражения для $k = 1$ и $k > 2$ согласованы с точностью до знака. Так как при выборе образующих кольца Ω_W^* знак можно заменить на противоположный, мы будем для краткости считать, что формула для $k > 2$ верна и для $k = 1$.

Теперь мы можем проверить регулярность последовательностей $(p, v_1, \ldots)$ из формулировки теоремы точности Ландвебера 5.4.1.

Фиксируем простое p. Тогда для элементов v_n, за исключением случая v_1 для $p = 3$, из формул (5.2.9) мы получаем, что $v_n = \frac{(p^{p^n}-p)}{p} \frac{(1 \pm p^n)}{m_{p^n-2}} x_{p^n-1} \mod J_W^{*2} = \varepsilon_n x_{p^n-1} \mod J_W^{*2}$, где $\varepsilon_n \not\equiv 0 \mod p$.

Отсюда следует регулярность последовательностей $(p, v_1, \ldots)$ для $p \neq 3$.

Для случая $p = 3$ осталось заметить, что v_1 есть коэффициент при u^3 в $[3]_W(u)$, то есть, $(4q + 1 - 16q)x_2 = (1 - 12q)x_2 \equiv x_2 \mod 3$.

Таким образом, последовательность $(3, v_1, \ldots)$ также регулярна. □

Заключение

1. В главе 2 описаны топологические базисы SU-линейных операций в комплексных кобордизмах в терминах введённых С. П. Новиковым операций $\Delta_{(k_1,k_2)}$.

2. В главе 3 приведены подробные вычисления структуры A^U-модуля $MU^*(MSU)$ и групп Ω_*^{SU} с помощью спектральной последовательности Адамса–Новикова, следуя подходу С. П. Новикова.

3. В разделах 4.5 и 5.1 описаны SU-билинейные умножения в теории c_1-сферических бордизмов W^*, описаны SU-линейные проекторы $MU \to W$, выделены проекторы, коммутирующие с операцией $\partial = \Delta_{(1,0)}$, выделены SU-билинейные умножения, задающиеся произвольными проекторами и проекторами, коммутирующими с ∂.

4. В теореме 4.5.9 для произвольного SU-билинейного умножения на W описано кольцо коэффициентов.

5. В разделах 5.2 и 5.3, следуя подходу В. М. Бухштабера, для произвольного SU-билинейного умножения и произвольной комплексной ориентации на W вычислены соответствующие формальные группы по модулю разложимых элементов. Отсюда доказано обобщение результатов В. М. Бухштабера о том, что для произвольного умножения и произвольной ориентации коэффициенты формальной группы не порождают всё кольцо $W^*(pt)$, но при обращении двойки или простых чисел Ферма больших 3, для любого умножения существует такая ориентация, что коэффициенты формальной группы порождают кольцо $W^*(pt)$.

6. Доказана теорема 5.4.5 о точности по Ландвеберу теории W^* для произвольного SU-билинейного умножения.

Результаты диссертации могут быть интересны специалистам, работающим в области алгебраической топологии и комплексных кобордизмов.

Литература

[1] Абрамян С. А. *Гомологии спектра MSU*, Торическая топология, действия групп, геометрия и комбинаторика. Часть 2, Сборник статей, Труды МИАН, 318, МИАН, М., 2022, 5–16. 28

[2] Авербух Б. Г. *Алгебраическое строение групп внутренних гомологии.* ДАН СССР, 125 (1959), 11–14. 3

[3] Адамс Дж. Ф. *Стабильные гомотопии и обобщённые гомологии.* Издательство МЦНМО. Москва, 2014. 14, 83

[4] Ботвинник Б. И. *Структура кольца MSU_*.* Матем. сб., 181:4 (1990), 540–555. 50

[5] Ботвинник Б. И., Бухштабер В. М., Новиков С. П., Юзвинский С. А. *Алгебраические аспекты теории умножений в комплексных кобордизмах.* УМН, 2000, том 55, выпуск 4 (334), 5–24. 5, 12, 79

[6] Бухштабер В. М. *Проекторы в унитарных кобордизмах, связанные с SU-теорией.* УМН, 1972, том 27, выпуск 6 (168), 231–232. 2, 5, 12, 76, 79, 80, 83, 84, 86

[7] Бухштабер В. М. *Топологические приложения теории двузначных формальных групп.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 1978, том 42, выпуск 1, 130–184.

[8] Бухштабер В. М. *Комплексные кобордизмы и формальные группы.* УМН, 2021, том 67, выпуск 5 (407), 111–174. 19, 27

[9] Вершинин В. В., Горбунов В. Г. *Элементы Н. Рея как препятствия к ориентируемости симплектических кобордизмов.* Доклады АН СССР (1985), том 258, №6. 77

[10] Кричевер И. М. *Обобщенные эллиптические роды и функции Бейкера–Ахиезера.* Матем. заметки, 47:2 (1990), 34–45.

[11] Лимонченко И. Ю., Лю Ж., Панов Т. Е. *Гиперповерхности Калаби–Яу и SU-бордизмы.* Тр. МИАН, 302 (2018), 287–295. 62

[12] Миронов О. К. *Существование мультипликативных структур в теориях кобордизмов с особенностями.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 39:5 (1975), 1065–1092. 4

[13] Мищенко А. С. *Спектральные последовательности типа Адамса.* Матем. заметки, 1:3 (1967), 339–346. 31

[14] Новиков С. П. *О некоторых задачах топологии многообразий, связанных с теорией пространств Тома.* ДАН СССР, 132:5 (1960), 1031–1034. 3, 25

[15] Новиков С. П. *Гомотопические свойства комплексов Тома.* Матем. сб., 57(99):4 (1962), 407–442. 3, 25, 28

[16] Новиков С. П. *Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 31:4 (1967), 855–951. 2, 3, 4, 5, 10, 27, 29, 30, 31, 36, 38, 43, 47, 48, 49, 50

[17] Понтрягин Л. С. *Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий.* Тр. МИАН СССР, 45 (1955), 3–139. 3

[18] Рохлин В. А. *Новые результаты теории четырехмерных многообразий.* ДАН СССР, 84 (1952), 221–224. 48

[19] Рохлин В. А. *Теория внутренних гомологий.* УМН, 14:4(88) (1959), 3–20. 3

[20] Свитцер Р. М. *Алгебраическая топология – гомотопии и гомологии.* «Наука», Москва, 1985. 14, 16, 19, 20

[21] Стонг Р. *Заметки по теории кобордизмов.* С добавлением В. М. Бухштабера. «Мир», Москва, 1973. 3, 4, 10, 19, 20, 25, 28, 54, 55, 57, 61, 64, 65, 68, 83

[22] Anderson, D. W.; Brown, E. H., Jr.; Peterson, F. P. *SU-cobordism, KO-characteristic numbers, and the Kervaire invariant.* Ann. of Math. (2) 83 (1966), 54–67. 29

[23] Atiyah M. F. *Bordism and cobordism.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 57 (1961), 200–208. 24, 39, 65

[24] Atiyah M. F. *K-theory and reality.* Q. J. Math., Oxf. II. Ser. 17 (1966), 367-386. 74

[25] Baas, Nils A. *On the convergence of the Adams spectral sequences.* Math. Scand. 27 (1970), 145–150. 31

[26] Bakuradze M. *Polynomial generators of $MSU^*[1/2]$ related to classifying maps of certain formal group laws.* Preprint (2021); arXiv:2107.01395.

[27] Barnes D.; Roitzheim C. *Foundations of stable homotopy theory.* Cambridge studies in advanced mathematics, 185. Cambridge University Press, 2020. 14

[28] Batyrev, Victor V. *Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi–Yau hypersurfaces in toric varieties.* J. Algebraic Geom. 3 (1994), no. 3, 493–535. 64

[29] Botvinnik, Boris I. *Manifolds with singularities and the Adams–Novikov spectral sequence.* London Mathematical Society Lecture Note Series, 170. Cambridge University Press, Cambridge, 1992. 4, 31

[30] Buchstaber, Victor; Panov, Taras. *Toric topology.* Math. Surv. and Monogr., 204. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015. 19, 20, 23, 24, 27, 37, 62

[31] Conner, Pierre E.; Floyd, Edwin E. *Differentiable Periodic Maps.* Academic Press Inc., New York, 1964. [Русский перевод: Коннер П., Флойд Э., *Гладкие периодические отображения,* «Мир», Москва, 1969.] 22

[32] Conner P. E., Floyd E. E. *Torsion in SU-bordism.* Mem. Amer. Math. Soc. 60 (1966). 3, 4, 5, 10, 19, 20, 22, 38, 39, 47, 50, 54, 60, 65, 66, 67, 68

[33] Hirsch M. *Immersions of manifolds.* Trans. Amer. Math. Soc., 93 (1959), 242-276. 20

[34] Landweber P. S. *Cobordism operations and Hopf algebras.* Trans. Amer. Math. Soc. 129 (1967), 94–110. 4, 29, 30

[35] Landweber P. S. *Homological properties of comodules over $MU_*(MU)$ and $BP_*(BP)$.* American Journal of Mathematics. 98 (3) (1976), 591–610. 87

[36] Lazard M. *Sur les groupes de Lie formels à un paramètre*, Bull. Soc. Math. France 83 (1955), 251–274. 18

[37] Lü, Zhi; Panov, Taras. *On toric generators in the unitary and special unitary bordism rings.* Algebr. Geom. Topol. 16 (2016), no. 5, 2865–2893. 62

[38] Margolis H. R. *Spectra and the Steenrod Algebra. Modules over the Steenrod algebra and the stable homotopy category.* North-Holland Mathematical Library, 29. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1983. 14

[39] Maunder C. R. F. *The spectral sequence of an extraordinary cohomology theory.* Proc. Camb. Phil. Soc. (1963), 59, 567. 17

[40] Milnor, John. *On the cobordism ring Ω^* and a complex analogue. I.* Amer. J. Math. 82 (1960), 505–521. 3, 25

[41] Mosley, John. E. *In search of a class of representatives for SU-bordism using the Witten genus.* Thesis (Ph.D.)–University of Kentucky, 2016. 63

[42] Quillen D. G. *On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory.* Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), no. 6, 1293-1298. 26

[43] Quillen D. *Elementary Proofs of Some Results of Cobordism Theory Using Steenrod Operations*, Advances in Mathematics 7 (1971), 29–56 23

[44] Ravenel D. C. *Localization with respect to certain periodic homology theories.* Amer. J. Math. 106 (1984), no. 2, 351–414. 66, 87

[45] Ravenel, Douglas C. *Complex Cobordism and Stable Homotopy Groups of Spheres.* Pure and Applied Mathematics, 121. Academic Press Inc., Orlando, FL, 1986. 3, 4

[46] Rognes J. *Galois Extensions os Structured Ring Spectra / Stably Dualizable Groups.* Mem. of the Amer. Math. Soc., vol. 198, N. 898, 2008. 74

[47] Rudyak Yu. B. *On Thom spectra, orientability, and cobordism.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998. 14, 17, 34

[48] Thom, René. *Quelques propriétés globales des variétés différentiables.* Comment. Math. Helv. 28 (1954), 17–86. [Русский перевод: сб. «Расслоенные пространства и их приложения», ИЛ, Москва, 1958, стр. 293–351.] 3, 22

[49] Vershinin, Vladimir V. *Cobordisms and spectral sequences.* Translations of Mathematical Monographs, 130. American Mathematical Society, Providence, RI, 1993. 4

[50] Wall, C. T. C. *Determination of the cobordism ring.* Ann. of Math. (2) **72** (1960), 292–311. 3

[51] Wall, C. T. C. *Addendum to a paper of Conner and Floyd.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 62 (1966), 171–175. 3, 54

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

[52] Лимонченко И. Ю., Панов Т. Е., Черных Г. С., *SU-бордизмы: структурные результаты и геометрические представители.* УМН, 74:3(447) (2019), 95–166. 8, 10, 64

I. Yu. Limonchenko, T. E. Panov, G. Chernykh, *SU-bordism: structure results and geometric representative*", Russian Math. Surveys, 74:3 (2019), 461–524.

DOI: 10.4213/rm9883

Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, RSCI WoS.

IF WoS = 0,900; SJR = 0,450 (2022), двухлетний импакт-фактор РИНЦ = 1,242 (2021).

Автору принадлежат все основные результаты глав 3–7, а также содержание примера 13.3.

[53] Панов Т. Е., Черных Г. С., *SU-линейные операции в комплексных кобордизмах и теория c_1-сферических бордизмов.* Изв. РАН. Сер. матем., 87:4 (2023), 133-165. 8, 10, 12, 13

DOI: 10.4213/im9334

Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, RSCI WoS.

IF WoS =0,800; SJR = 0,449 (2022), двухлетний импакт-фактор РИНЦ = 0,859 (2021).

Автором получены все основные результаты. Научным руководителем, профессором Т. Е. Пановым поставлены задачи и намечены направления их решения.

[54] Черных Г. С., *Точность по Ландвеберу формальной группы c_1-сферических бордизмов*, Матем. заметки, 113:6 (2023), 918-928. 8, 13

DOI: 10.4213/mzm13845

G. Chernykh, *Landweber Exactness of the Formal Group Law in c_1-Spherical Bordism*, Math. Notes, 113:6 (2023), 850–858.

DOI: 10.1134/S0001434623050267

Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, RSCI WoS.

IF WoS = 0,600; SJR = 0,493 (2022), двухлетний импакт-фактор РИНЦ = 0,475 (2021).