МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Кирова Валерия Орлановна

ВОПРОСЫ КОМБИНАТОРНОЙ ГЕОМЕТРИИ И КОМБИНАТОРИКИ СЛОВ

1.1.5 – математическая логика, алгебра, теория чисел и
дискретная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2024

Диссертация подготовлена на кафедре математической логики и теории алгоритмов механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: **Белов Алексей Яковлевич**
доктор физико-математических наук, профессор
профессор кафедры дискретной математики МФТИ
Райгородский Андрей Михайлович
доктор физико-математических наук, профессор
профессор кафедры дискретной математики МФТИ

Официальные оппоненты: **Добровольский Николай Михайлович**
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии, Физико-математический факультет, Тульский государственный педагогический университет имени Л.Н.Толстого
Малышев Дмитрий Сергеевич
доктор физико-математических наук, профессор,
кафедра прикладной математики и информатики Нижегородский филиал ФГАОУ ВО Высшая школа экономики, профессор
Михалев Александр Александрович
доктор физико-математических наук, профессор
кафедра высшей алгебры, Механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, профессор

Защита диссертации состоится 1 марта 2024 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.
E-mail: vladimir.manuilov@gmail.com
С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале:
https://dissovet.msu.ru/dissertation/011.4/2865.
Автореферат разослан 1 февраля 2024 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук В. М. Мануйлов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена комбинаторике — одному из важных разделов дискретной математики, методы которого широко используются для решения практических и теоретических задач. Эта область имеет тесную связь со многими разделами математики и компьютерными науками.

Наше внимание уделено вопросам, лежащим на стыке комбинаторной геометрии и теории графов, а также комбинаторной геометрии и комбинаторики слов. Результаты работы разбиваются на три части: задача Нельсона о хроматическом числе нормированного пространства; графы, представимые словами; и комбинаторные сложностные характеристики бесконечных слов. Начнем с обзора результатов предыдущих исследований.

20-й век ознаменовался значительными достижениями в комбинаторике, что было связано с быстрым развитием дискретной математики и информатики. Многие математики внесли свой вклад в эту область. Один из них – венгерский математик Пауль Эрдеш (1913—1996), который ввел в комбинаторику вероятностный анализ и является создателем венгерской школы комбинаторного анализа. Эрдеш внес значительный вклад в теорию графов, комбинаторную теорию чисел, экстремальную комбинаторику и развитие комбинаторной геометрии. Хотя сам Эрдеш не был израильтянином, он активно сотрудничал с израильскими математиками и внес значительный вклад в комбинаторику. Он оказал сильное влияние на развитие комбинаторной математики в Израиле, в частности на основоположников израильской комбинаторной школы - Нога Алона и Рона Аарони. В России комбинаторная школа была создана относительно недавно, Райгородским А.М.

Внимание к комбинаторике (и конечной математике вообще) значительно повысилось во второй половине 20-го века с наступлением компьютерной эры. Интенсивный рост развития и эволюции компьютерных наук непосредственно имеет тесную связь с комбинаторикой. Комбинаторика предоставляет основополагающие концепции и методы, которые имеют решающее значение при решении сложных вычислительных задач, разработке эффективных алгоритмов, проектировании и анализе различных структур данных и систем. Например, алгоритмы поиска кратчайшего пути на графе и задачи составления расписания в значительной степени основаны на комбинаторных методах.

В теории сложности вычислений комбинаторика является фундаментальной составляющей при анализе алгоритмической сложности и классификации задач на основе их вычислительной сложности. Задачи комбинаторной оптимизации, такие как задача коммивояжера и задача о рюкзаке, формируют основу для понимания сложности различных вычислительных задач.

Важную роль комбинаторика играет в теории кодирования и криптографии. Методы комбинаторного проектирования, такие как коды обнаружения и исправления ошибок (коды Хэмминга и коды Рида-Соломона) широко используются в современных системах связи. Комбинаторные концепции, включая группы перестановок, используются при разработке и анализе криптографических протоколов.

Действительно, такие науки, как информатика и компьютерные науки, в значительной степени опираются на комбинаторные концепции. Это незаменимая область математики, лежащая в основе многих аспектов информатики и компьютерных наук.

В процессе развития информатики и компьютерных наук естественным образом возник ряд вопросов, связанных с такими областями комбинаторики, как теория графов, комбинаторная геометрия и комбинаторики слов.

Комбинаторная теория графов является центральной областью исследований в области информатики. Графы используются для представления и решения широкого спектра задач. Многие алгоритмы и структуры данных в значительной степени основаны на концепциях и методах теории графов.

Современная комбинаторная геометрия берет свое начало в конце 19 века, активное развитие получила в начале 20 века. Ранними изучаемыми темами были: плотность упаковки окружностей, проективные конфигурации Рейе и Стейница, геометрия чисел Минковского и раскраски карт Тейта, Хивуда и Хадвигера. Активное развитие эта область получила в начале 20 века: были доказаны теоремы Радона, Хелли, Юнга, Бляшке, а также строго доказана изопериметрическая теорема. На стыке топологии, анализа и комбинаторики были доказаны теоремы Борсука — Улама и Люстерника — Шнирельмана. Во второй четверти 20 века были поставлены проблема Борсука и проблема Нелсона — Эрдёша — Хадвигера. В 1940-х годах оформилась теория Рамсея. А.М. Райгородским получены многочисленные результаты относительно проблем Борсука, Нелсона - Эрдеша - Хадвигера и Грюнбаума. Эта область быстро прогрессирует и по сей день.

Комбинаторная геометрия имеет важное значение в алгебре, в частности в теории групп. Самым ярким примером служит комбинаторная теория групп, создателем научной школы которой является С.И. Адян. Геометрически наглядная интерпретация вывода следствий из определяющих соотношений групп можно увидеть в работе А.Ю.Ольшанского [1].

Одним из разделов комбинаторики является комбинаторика на словах. Возникновение этого раздела берет свое начало в 1906 году с работ норвежского математика Акселя Туэ [2] [3] , и продолжено Морсом и Хедлундом [4] в 1940 году. Объектом исследования в комбинаторике на словах являются слова - символьные последовательности над конечным алфавитом. В своей работе Туэ [5] поставил вопрос о существовании

[1]Ольшанский А.Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах // М.: Наука.

[2]Thue A. Uber die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen // Norske Vid. Skrifter I Mat.-Nat. Kl., Christiania, 1912.

[3]Thue A. Uber unendliche Zeichenreihen // Norske Vid. Skrifter I Mat. Nat. Kl., Christiania 1906. V. 7 P. 1 22. V. 10. P. 1-67.

[4]Hedlund G.A. , Morse M. Symbolic dynamics // Amer. J. Math, 1938, 815-866.

[5]Thue A. Uber die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen // Norske Vid. Skrifter I Mat.-Nat. Kl.,

бесконечного слова над конечным алфавитом, в котором нет слов, состоящих из двух последовательных вхождений одинаковых подслов. В дальнейшем, комбинаторика слов получила развитие во Франции, а именно в комбинаторной школе Марселя-Пауля Шутценбергера, который является одним из основоположников данной области.

Комбинаторика слов имеет большое значение в алгебре (при изучении базисов и нормальных форм, много примеров в работах П.С. Новикова и С.И. Адяна [6] [7] [8] [9], а также в работах Р. Линдона и П. Шуппа [10]), в задачах, связанных с мономиальными алгебрами (А. Я. Белов, В. В. Борисенко, В. Н. Латышев [11] [12] , В. А. Уфнаровский [13] , В. Дренский [14] , и монографии М.В. Сапира [15]), а также в задачах комбинаторной теории групп, теории колец, в теории алгебр Ли и проблемах бернсайдовского типа. Многие теоремы комбинаторики слов активно используются алгебраистами.

Комбинаторика слов является быстроразвивающимся направлением. Тесную связь комбинаторика слов имеет с символической динамикой. А. Мучник, Ю. Л. Притыкин, А. Л. Семенов [16] дали полный обзор понятий и результатов, связанных с обобщениями понятия периодической последовательности. Большой вклад в развитие символической динамики и комбинаторных методов внес А. Вершик [17]. Алгоритмические проблемы, связанные с морфическими последовательностями были изучены И. Митрофановым [18].

Подробное описание равномерно рекуррентных слов, порождаемых перекладыванием отрезков, сделали А. Чернятьев и А. Канель-Белов. Асимптотические свойства динамических систем прекрасно изучены А. Рыжиковым. Ряд глубоких результатов

Christiania, 1912.

[6] Новиков П. С. , Адян С. И. О бесконечных периодических группах. I // Изв. АН СССР. Сер. матем., 32:1 (1968), 212–244.

[7] Новиков П. С. , Адян С. И. О бесконечных периодических группах. II // Изв. АН СССР. Сер. матем., 32:2 (1968), 251–524.

[8] П. С. Новиков, С. И. Адян О бесконечных периодических группах. III // Изв. АН СССР. Сер. матем., 32:3 (1968), 709–731.

[9] П. С. Новиков, С. И. Адян Определяющие соотношения и проблема тождества для свободных периодических групп нечетного порядка // Изв. АН СССР. Сер. матем., 32:4 (1968), 971–979.

[10] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп // М., Мир, 1980.

[11] Kanel-Belov A., Karasik Y., Louis Halle Rowen Computational Aspects of Polynomial Identities: Volume l, Kemer's Theorems, 2nd Edition // Monographs and Research Notes in Mathematics., Boca Raton, FL: CRC Press, 2015, ISBN: 978-1-4987-2008-3 , 418.

[12] Белов А. Я., Борисенко В. В., Латышев В. Н. Мономиальные алгебры // Алгебра – 4, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **26**, ВИНИТИ, М., 2002, 35–214.

[13] Уфнаровский В. А. Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре // Итоги науки и техн., Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 1990, №57, С. 5–177.

[14] Drensky, V. Free Algebras and PI-algebras: Graduate Course in Algebra // Springer-Verlag, Singapore, 2000.

[15] Sapir M. V. Combinatorial algebra: syntax and semantics // Springer, 2014.

[16] Мучник А. А. , Притыкин Ю. Л. , Семенов А. Л. Последовательности, близкие к периодическим // УМН, 2009, 64, 5(389), 21–96.

[17] Вершик А. М. , Лифшиц М. А. , О $\{mm\}$-энтропии банахова пространства с гауссовской мерой // Теория вероятн. и ее примен., **68**:3 (2023), 532–543.

[18] Митрофанов И.В. Алгоритмические проблемы, связанные с морфическими последовательностями // Диссертация кандидата Физико-математических наук.

по комбинаторике слов был получен представителями школы С.В. Агустиновича.

Помимо перечисленного, комбинаторика слов имеет большое значение в такой области компьютерных наук, как биоинформатика. Она играет решающую роль в понимании и анализе биологических последовательностей, которые можно рассматривать как слова, состоящие из конечного алфавита. Одна из самых актуальных задач биоинформатики, которую решает комбинаторика слов, это генерация всех возможных последовательностей заданной длины и алфавита. Это особо необходимо при создании синтетических последовательностей для экспериментального проектирования. При сборке генома комбинаторика слов используется для реконструкции полных геномов путем сборки перекрывающихся фрагментов ДНК. Для решения головоломки из перекрывающихся фрагментов и определения правильного порядка и ориентации последовательностей используются различные комбинаторные алгоритмы. Определенно, комбинаторика слов предоставляет необходимые инструменты и методы для анализа, манипулирования и понимания огромного объема данных о биологических последовательностях в области биоинформатики. Применение теории графов и комбинаторики слов для описания и реконструкции хромосомных структур активно развивается В.А. Любецким [19].

Задача Нельсона

Задачи комбинаторной геометрии, рассматриваемые в настоящей работе, берут свое начало в 1950 году, когда Э.Нельсон задался вопросом о нахождении *хроматического числа* плоскости $\chi\left(\mathbb{R}^2\right)$- минимального числа цветов, в которые можно раскрасить евклидову плоскость так, чтобы любые две точки на единичном расстоянии имели разные цвета. В русскоязычной литературе устоялось название проблема Нельсона-Хадвигера. Задача была популяризована М. Гарднером, П. Эрдешом, Г. Хадвигером, А. Сойфером и получила дальнейшее развитие. Казалось бы, что найти точное значение $\chi\left(\mathbb{R}^2\right)$ нетрудно. Однако, хроматическое число плоскости не только не найдено, но даже имеет зазор между имеющимися оценками: $5 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$. Верхняя оценка была установлена Хадвигером [20] в 1961 году и является классической. Нижняя граница является недавним открытием в работе Обри Ди Грея [21], которая довольно быстро была подтверждена в работах Эксоо и Исмаилеску [22]. Более 65 лет не появлялось никаких аргументов, позволяющих улучшить нижнюю оценку. Попытки решить эту проблему породили большое число интересных задач и содержательных результатов. Ввиду невозможности решить исходную задачу появились различные ослабления и обобщения. Прежде всего, задача была перенесена на n-

[19] Горбунов К.Ю., Любецкий В.А. Алгоритм преобразования одного графа в другой с минимальной ценой // Информатика и ее применения, издательство ИПИ РАН (М.), том 11, № 1, с. 79-89 2017.

[20] Hadwiger H. Uberdeckung des Euklidischen Raumes durch kongruente Mengen // Portugaliae Math. 4, German, 1945, 238-–242.

[21] A.D.N.J. de Grey The chromatic number of the plane is at least 5 // Geombinatorics, 28 (2018), 18–31.

[22] Exoo G., Ismailescu D. The chromatic number of the plane is at least 5: A new proof // Disc. Comput. Geom., 64 (2020), N1, 216–226.

мерные евклидовы пространства.

Эта тема была наиболее подробно изучена для n-мерных ℓ_p-пространств $\mathbb{R}^n_p$, и особенно для Евклидовых пространств $\mathbb{R}^n_2$. Так же в работе А. Сойфер [23] подробно описана история развития этой задачи. Очевидно, что имеет место точное равенство при $n = 1$: $\chi(\mathbb{R}^1_2) = 2$ [24]. Однако зазор между наилучшей известной нижней и верхней оценками очень быстро возрастает с ростом n. Ничуштен [25] и Кулсон [26] показали, что это можно увидеть уже для случая $n = 3 : 6 \leq \chi(\mathbb{R}^3_2) \leq 15$. Что касается случая растущей размерности, то в настоящее время лучшие асимптотические нижние и верхние границы при $n \to \infty$ принадлежат А.М. Райгородскому [27] и Ларману и Роджерсу [28] [29] соответственно: $(1.239 + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{R}^n_2) \leq (3 + o(1))^n$. Для не Евклидовых ℓ_p-пространств значение $\chi(\mathbb{R}^n_p)$ экспоненциально растет с ростом n (см. статью А.М.Райгородского [30] и два обзора [31] [32]). Случай Чебышевских пространств $\mathbb{R}^n_\infty$ выделяется фольклорным равенством $\chi(\mathbb{R}^n_\infty) = 2^n$, верного при всех $n \in \mathbb{N}$.

А. Купавским [33] установлена верхняя граница при $n \to \infty$, зависящая исключительно от размерности пространства: $\chi(\mathbb{R}^n_N) \leq (4 + o(1))^n$. Для обоснования верхних оценок обычно приводят явную раскраску пространства $\mathbb{R}^n$ в требуемое число цветов. Для обоснования нижних оценок используются дистанционные графы. Хроматическим числом $\chi(G)$ дистанционного графа G называется наименьшее число цветов, в которые можно раскрасить вершины графа так, чтобы никакие две смежные вершины не оказались бы покрашены в один и тот же цвет. Нетрудно видеть, что для любого дистанционного графа G, вложенного в пространство R^n, верно неравенство $\chi(\mathbb{R}^n) \geq \chi(G)$. Отметим, что по теореме Эрдеша-де Брейна [34] существует конечный дистанционный граф G, для которого неравенство обращается в равенство. М. Бенда и М. Перлес [35] рассмотрели эту задачу на $\mathbb{Q}^4$ - графе, полученном из рациональных точек 4-пространства путем соединения двух точек, если их евклидово расстояние равно единице. Они установили, что $\chi(\mathrm{Q}^4)$=4.

---

[23] Soifer A. The mathematical coloring book // Springer-Verlag New York, 2009.

[24] Сойфер А. , Хроматическое число плоскости: его прошлое, настоящее и будущее // Матем. просвещение, 2004, N8, 186 - 221.

[25] Nechushtan O. On the space chromatic number // Discrete Math., 256, N1–2 (2002), 499 - 507.

[26] Coulson D. A 15-colouring of 3-space omitting distance one // Discrete Mathematics 256, No. 1 (2002), 83–90.

[27] Raigorodskii A.M. On the Chromatic Number of a Space // Russian Math. Surveys, 55 (2000), 351–352.

[28] Larman D.G. , Rogers C.A. The realization of distances within sets in Euclidean space // Mathematika, 19 (1972), 1–24.

[29] Prosanov R. A new proof of the Larman–Rogers upper bound for the chromatic number of the Euclidean space // Discrete Appl. Math., 276 (2020), 115–120.

[30] Raigorodskii A.M. On the Chromatic Number of a Space with the Metric ℓ_p // Russian Math. Surveys, 59 (2004), 973–975.

[31] Raigorodskii A.M. *The Borsuk problem and the chromatic numbers of some metric spaces*, Russian Math. Surveys, 56 (2001), 103–139.

[32] Raigorodskii A.M. Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters // Thirty Essays on Geometric Graph Theory, New York, Springer, 2013, 429–460.

[33] Kupavskiy A. On the chromatic number of R^n with an arbitrary norm // Discrete Math., 311 (2011), N6, 437–440.

[34] N. G. de Bruijn, Paul Erdős A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations // Indigationes Mathematicae, 13:371–373, 1951.

[35] Benda M., Perles M. Colorings of metric spaces // Geombinatorics, 9(3):113–126, 2000.

Соответствующая тематика активно развивается, получено много интересных результатов и оценок в различных ситуациях (например, в работе А. Сойфера [36]). Хроматические числа пространств активно исследовались, например, в школе А. М. Райгородского. Более подробные сведения о проблеме Нельсона-Хадвигера и смежных задачах можно почерпнуть из следующих обзоров: П. К. Агарвал и Я. Пах [37], П. Брасс, В. Мозер, Я. Пах [38], К. Б. Чилакамарри [39], В. Кли и С. Вэгон [40], А. М. Райгородский [41] , А. Сойфер [42] [43] ,Л. А. Секеи [44], и многие другие выдающиеся математики.

Начнем с ослаблений. Если каждое одноцветное множество разбивается на связные области, ограниченные жордановыми кривыми, то необходимо не менее 6 цветов, что было доказано Д. Р. Вудаллом еще в 1973-ем году [45]. К. Дж. Фалконер в 1981-ом году показал, что если потребовать, чтобы множества точек, раскрашенных в один и тот же цвет, были измеримы по Лебегу, тогда для правильной раскраски плоскости требуется хотя бы 5 цветов [46]. Разумеется, раскраска плоскости в 7 цветов обеспечивает оценку сверху и для ослабленных формулировок.

Одна из главных трудностей заключается в том, что ответ может зависеть от теоретико-множественной аксиоматики, как показали в 2003-ем году С. Шелах и А. Сойфер [47]. Если мы предполагаем аксиому выбора, то по теореме Эрдеша-де Брейна [48] хроматическое число бесконечного графа реализуется на конечном подграфе. Однако компьютерный перебор не находит подграфов с хроматическим числом хотя бы 5 , что позволяет предположить, что хроматическое число в стандартной аксиоматике равняется четырем. Если же отказаться от аксиомы выбора, но дополнить стандартную аксиоматику Цермело-Френкеля аксиомой зависимого выбора и дополнительно потребовать измеримость всех подмножеств по Лебегу, то примени-

[36]Soifer A. The mathematical coloring book // Springer-Verlag New York, 2009.

[37]Pach J., Pankaj K. Agarwal. Combinatorial geometry // John Wiley and Sons, 37, 2011.

[38]Brass, Peter, Moser, William O.J., Pach, J´anos. *Research problems in discrete geometry.* Springer, Science and Business Media, 2006.

[39]Chilakamarri Kiran B. The unit-distance graph problem: a brief survey and some new results // Bull. Inst. Combin. Appl, 8(39):C60, 1993.

[40]Klee V., Wagon S. Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory // Dolciani Mathematical Expositions No. 11. Mathematical Association of America, 1991.

[41]Raigorodskii A.M. On the Chromatic Number of a Space // Russian Math. Surveys, 55 (2000), 351–352.

[42]Soifer A. The mathematical coloring book // Springer-Verlag New York, 2009.

[43]Сойфер А. , Хроматическое число плоскости: его прошлое, настоящее и будущее // Матем. просвещение, 2004, N8, 186 - 221.

[44]Szekely Laszlo A. Erdős on unit distances and the Szemer´edi–Trotter theorems. // In Paul Erdős and his mathematics II. Citeseer, 2002.

[45]Woodall D. Distances realized by sets covering the plane // Journal of Combinatorial Theory, Series A, 14(2):187–200, 1973.

[46]Falconer K.J. The realization of distances in measurable subsets covering // Rn. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 31(2):184–189, 1981.

[47]Shelah S., Soifer A. Axiom of choice and chromatic number of the plane // Journal of Combinatorial Theory, Series A, 103(2):387–391, 2003.

[48]N. G. de Bruijn, Paul Erdős A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations // Indigationes Mathematicae, 13:371–373, 1951.

мо доказательство Фалконера, и хроматическое число лежит между пятью и семью. Также можно рассматривать случай ограниченного подмножества плоскости, что было сделано, например, в работе А. Купавского и А. Райгородского [49] .

Чтобы обобщить эти проблемы, можно запретить более сложным конфигурациям быть одноцветными. Для нормированного пространства $\mathbb{R}^n_N$ и подмножества $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$, *хроматическим числом* $\chi(\mathbb{R}^n_N, \mathcal{M})$ называется наименьшее r, при котором существует раскраска пространства $\mathbb{R}^n$ в r цветов, в которой нет одноцветных N-*изометрических копий* множества $\mathcal{M}$. В этих терминах, $\chi(\mathbb{R}^n_N) = \chi(\mathbb{R}^n_N, I)$, где I – двухточечное множество.

Систематическое изучение этого понятия началось с трех классических работ Пауля Эрдеша, Рональда Грэма , Питера Монтгомери, Брюса Ротшильда , Джоэла Спенсера, и Эрнста Штрауса [50] [51] [52], а теперь выросло в отдельную ветвь комбинаторики, что можно увидеть в обзоре Грэма [53]. В случае Евклидова пространства, наиболее подробно изученным вопросом является следующий. Является ли множество $\mathcal{M}$ *Рамсеевским*, т.е., стремится ли $\chi(\mathbb{R}^n_2, \mathcal{M})$ к бесконечности с ростом n? Известно, что множества вершин симплексов [54] и правильных маногогранников [55] [56] являются Рамсеевскими. Однако задача определения всех множеств Рамсея остается широко открытой, и даже предположения об ответе на нее вызывают споры [57].

А. Канель-Белов, В. Воронов и Д. Черкашин [58] развили эту тематику, предложив рассматривать хроматические числа пространств вида $\mathbb{R}^n \times [0, e]^h$, где $n, h \geq 1$ для $e > 0$, с запрещенным евклидовым расстоянием 1. Такие метрические пространства именуются *слойками*, а число n называется размерностью слойки. Очевидно, что для любого положительного e выполнены неравенства

$$\chi(\mathbb{R}^n) \leq \chi(\mathbb{R}^n \times [0, e]^h) \leq \chi(\mathbb{R}^{n+h}).$$

Изучение раскрасок слоек началось для одномерных и двумерных слоек с запре-

[49] Kupavskii A., Raigorodskii A. On the chromatic numbers of small-dimensional Euclidean spaces // Electronic Notes in Discrete Mathematics, 34:435–439, 2009.

[50] Erdős P., Graham R.L. , Montgomery P. , Rothschild B.L. , Spencer J. , Straus E.G. , Euclidean Ramsey theorems I // J. Combin. Theory Ser. A, 14 (1973), N3, 341–363.

[51] Erdős P., Graham R.L. , Montgomery P., Rothschild B.L. , Spencer J., Straus E.G., Euclidean Ramsey theorems II // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, 10 (1973), Infinite and Finite Sets, Keszthely, Hungary and North-Holland, Amsterdam, 520–557.

[52] Erdős P., Graham R.L. , Montgomery P., Rothschild B.L. , Spencer J., Straus E.G., Euclidean Ramsey theorems III // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, 10 (1973), Infinite and Finite Sets, Keszthely, Hungary and North-Holland, Amsterdam, 559–583.

[53] Graham R.L. Euclidean Ramsey theory // Handbook of Discrete and Computational Geometry, Chapman and Hall/CRC, 2017, 281–297.

[54] Frankl P. , V. Rödl A partition property of simplices in Euclidean space // J. Amer. Math. Soc., 3 (1990), N1, 1–7.

[55] Kříž I. Permutation groups in euclidean Ramsey theory // Proc. Amer. Math. Soc., 112 (1991), N3, 899–907.

[56] Cantwell K. All regular polytopes are Ramsey // J. Combin. Theory Ser. A, 114 (2007), 555–562.

[57] Leader I., Russell P.A., Walters M. Transitive sets in Euclidean Ramsey theory // J. Combin. Theory Ser. A, 119 (2012), 382–396.

[58] Kanel-Belov A., Voronov V., Cherkashin D. On the chromatic number of an infinitesimal plane layer // St. Petersburg Mathematical Journal, 29(5):761–775, 2018.

щенным евклидовым расстоянием 1. В работе [59] уже были рассмотрены трехмерные вещественные и двумерные рациональные слойки. Были исследованы слойки при $n = 1, 2, 3$ и разных значениях e, h, для которых получен ряд оценок.

Графы представимые словами

С развитием компьютерной эры представление графов словами стало иметь решающее значение для из хранения в памяти компьютера. Слова также использовались для выявления и описания различных полезных свойств графов, таких как классы, в которых алгоритмические задачи любой сложности становятся простыми, или классы, которые хорошо квазиупорядочены с помощью введенного отношения подграфов. С другой стороны, графы часто использовались для изучения различных свойств слов и связанных с ними комбинаторных структур, таких как перестановки.

Самым ярким примером, показывающим важность слов для нумерации графов, являются слова Прюфера для деревьев [60], когда в 1918 г. немецкий математик Хайнц Прюфер обнаружил интересную взаимосвязь между мечеными деревьями с n вершинами и последовательностями длины $n - 2$, составленными из элементов множества $1, 2, ..., n$. Это отношение является биекцией между деревьями и последовательностями, что позволило Прюферу доказать формулу Кэли о количестве n-вершинных помеченных деревьев.

В дальнейшем, взаимосвязи между словами и графами неоднократно исследовались. Аналогичные взаимосвязи известны для пороговых графов [61], графов букв [62], графов перестановок [63], графов пересечений вписанных многоугольников [64], почти периодических слов (с переходом к числу Белла для свойств наследственных графов[65]) и ряда других графов [66] [67]. Один из самых последних открытием в этой области является понятие графов, представимых в виде слов.

Впервые понятие графов, представимых словами, было введено С. Китаевым[68]

[59]Voronov V. , A. Kanel-Belov, G.Strukov, D. Cherkashin On the chromatic numbers of 3-dimensional slices // Journal of Mathematical Sciences, 518 (2022), 94–113.

[60]Prufer H. Neuer Beweis eines Satzes ¨uber Permutationen // Arch. Math. Phys. 1918. Vol. 27. P. 742–744.

[61]Chvátal V., Hammer P. Aggregation of inequalities in integer programming // Studies in integer programming. Amsterdam: North-Holland, 1977. P. 145–162. (Ann. Discrete Math.; Vol. 1).

[62]

Petkovsek M. Letter graphs and well-quasi-order by induced subgraphs // Discrete Math. 2002. Vol. 244. P. 375–388.

[63]Korpelainen N., Lozin V. Two forbidden induced subgraphs and well quasi-ordering // Discrete Math. 2011. Vol. 311, No. 16. P. 1813–1822.

[64]Koebe M. On a new class of intersection* graphs // Ann. Discrete Math. 1992. Vol. 51. P. 141–143.

[65]Balogh J., Bollobás B., Weinreich D. A jump to the Bell number for hereditary graph properties // J. Comb. Theory, Ser. B, 95, 29–48, 2005.

[66]Bell E. J. L. , Rayson P. ,Berridge D. The strong-connectivity of word-representable digraphs // 2011 (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive, arXiv:1102.0980).

[67]Fernandes C. G. , Green E. L. , Mandel A. From monomials to words to graphs // J. Comb. Theory, Ser. A, 105, No. 2, 185–206, 2004.

[68]Kitaev S., Seif S. Word problem of the Perkins semigroup via directed acyclic graphs // Order. 2008. Vol. 25, No. 3. P. 177–194.

и систематически развивается по сей день [69][70]. Мотивом послужили полугруппы Перкинса [71], играющие центральную роль в теории полугрупп с 1960 г., и использующиеся для построения примеров и контрпримеров.

Графы, представимые словами, имеют применение в алгебре, информатике и компьютерных науках, комбинаторике слов и теории расписаний [72], и конечно в математической биологии и биоинформатике. Помимо всего, такие графы обобщают несколько фундаментальных классов графов, таких как графы пересечения хорд[73], 3-раскрашиваемые графы [74] и графы сравнимости [75].

Вопросы комбинаторики слов

Объектом исследования комбинаторики слов являются символьные последовательности над конечным алфавитом (или слова). Изучение комбинаторики слов начинается в 1906 году с работ норвежского математика Акселя Туэ [76][77] о бесповторных словах, и продолжено М. Морсом и Г. Хедлундом. В своей работе Туэ поставил вопрос о существовании бесконечного слова над конечным алфавитом, в котором нет слов, состоящих из двух последовательных вхождений одинаковых подслов. Такие слова называются *квадратами*. Например, таким будет слово $ababab$, в котором есть три подряд идущих вхождения подслова ab. Очевидно, если алфавит бинарный, то бесконечных слов без квадратов нет. Однако Туэ построил пример такого слова над трехбуквенным алфавитом. Полученные результаты стали основой нового направления исследований - теории избегаемости. Систематическое исследование ряда задач комбинаторики слов возникло в ответ на фундаментальные запросы компьютерных наук, в особенности биоинформатики.

В 1940 году в работе [78] М. Морс и Г. Хедлунд ставят вопрос о множестве подслов заданной длины бесконечного слова и вводят следующее определение. *Комбинаторной сложностью* слова w называется количество подслов длины n и обозначается $p_w(n)$. Это понятие широко используется при комбинаторном исследовании бесконечных последовательностей. Например, он используется при определении топологической энтропии символьной динамической системы. Очевидно, что $p_w(n)$ - неубывающая функция, значения которой находятся между единицей и множеством

[69] Kitaev S., Pyatkin A. On representable graphs // J. Autom. Lang. Comb. 2008. Vol. 13, No. 1. P. 45–54.

[70] Kitaev S., Lozin V. Words and graphs // Cham: Springer, 2015. (Monogr. Theor. Comp. Sci., EATCS Ser.).

[71] Perkins P. Bases for equational theories of semigroups // J. Algebra. 1969. Vol. 11, No. 2. P. 298–314.

[72] Graham R., Zang N. Enumerating split-pair arrangements // J. Comb. Theory, Ser. A. 2008. Vol. 115, No. 2. P. 293–303.

[73] Cerny J. Coloring circle graphs // Electron. Notes Discrete Math. 2007. Vol. 29. P. 457–461.

[74] Beigel R., Eppstein D. 3-Coloring in time $O(1.3289^n)$ // J. Algorithms. 2005. Vol. 54, No. 2. P. 168–204.

[75] Lovasz L. Perfect graphs // Selected topics graph theory. V. 2. London: Acad. Press, 1983. P. 55–87.

[76] Thue A. Uber die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen // Norske Vid. Skrifter I Mat.-Nat. Kl., Christiania, 1912.

[77] Thue A. Uber unendliche Zeichenreihen // Norske Vid. Skrifter I Mat. Nat. Kl., Christiania 1906. V. 7 P. 1 22. V. 10. P. 1-67.

[78] Hedlund G.A. , Morse M. Symbolic dynamics // Amer. J. Math, 1938, 815-866.

всех слов длины n: $1 \leq p_w(n) \leq q^n$. Фундаментальный результат Морса и Хедлунда состоит в том, что любое апериодическое правостороннее бесконечное слово имеет факторную сложность не менее $n+1$. для каждого n. Слова с комбинаторной сложностью $n+1$ называются *словами Штурма* и относятся к классу наиболее изученных бесконечных слов. Так же авторы доказали, что комбинаторная сложность бесконечного слова ограничена тогда и только тогда, когда слово периодично.

В 2000 году Тоерема Ван дер Вардена об одноцветных арифметических прогрессиях положила начало изучению функции арифметический сложности бесконечных слов[79], являющейся в некотором смысле модификацией функции комбинаторной сложности.

Помимо комбинаторной и арифметической сложности существует еще множество различных функций сложности: сложность Ли [80], Абелева сложность[81], k-абелева сложность [82], максимальная шаблонная сложность [83], сложность цикла[84], биномиальная сложность [85], оконная сложность [86], периодическая сложность [87] и т.д. Мы будем рассматривать лишь некоторые из них.

Таким образом, тематика диссертации весьма актуальна

Цели и задачи работы

Целью настоящей работы является изучение задач, стоящих на стыке комбинаторной геометрии и теории теории графов,а также комбинаторной геометрии и комбинаторики слов:

- Рассмотреть задачу Нельсона и её обобщения. Опираясь на Теорему Ван дер Вардена об одноцветных арифметических прогрессиях, рассмотреть противоположную постановку задачи — о хроматическом числе нормированного пространства $\mathbb{R}^n_N$ с запрещенными одноцветными арифметическими прогрессиями.

- Изучить хроматические числа пространств вида $\mathbb{R}^n_N \times [0, e]^h$, где $e > 0, h \in \mathbb{N}$.

[79]Avgustinovich S., Fon-Der-Flaass D., Frid A. Arithmetical complexity of infnite words // Proc. Words, Languages and Combinatorics III, 2000. Singapore: World Scientifc, 2003. P. 51-62.

[80]Bell E. J. L. , Rayson P. ,Berridge D. The strong-connectivity of word-representable digraphs // 2011 (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive, arXiv:1102.0980).

[81]Cassaigne J., Richomme G., Saari K., Zamboni L. Avoiding Abelian powers in binary words with bounded Abelian complexity // Internat J. Found. Comput. Sci. 22, 4 (2011), 905–920.

[82]Karhumaki, J., Saarela, A., and Zamboni, L. Q. On a generalization of abelian equivalence and complexity of infinite words // J. Combin. Theory, Ser. A 120, 8 (2013), 2189–2206

[83]Kamae, T., and Zamboni, L. Sequence entropy and the maximal pattern complexity of infinite words // Ergodic Theory and Dynamical Systems 22, 4 (2002), 1191–1199.

[84]Cassaigne J., Fici G., Sciortino M., Zamboni L. Cyclic complexity of words // J. Combin. Theory Ser. A 145 (2017), 36–56.

[85]Rigo M., and Salimov, P. Another generalization of abelian equivalence: Binomial complexity of infinite words // Theoret. Comput. Sci. 601 (2015), 47–57.

[86]Cassaigne J., Kabor´e, I., Tapsoba, T. On a new notion of complexity on infinite words // Acta Univ. Sapientiae Math. 2, 2 (2010), 127–136.

[87]Mignosi F. On the number of factors of Sturmian words // Theoret. Comput. Sci. 1991, 71-84.

Рассмотреть хроматические числа таких пространств с запрещенными одноцветными арифметическими прогрессиями.

- Изучить графы представимые в виде слов, их свойства и связь с хроматическим числом.

- Изучить связь Теоремы Ван дер Вардена с комбинаторными сложностными характеристиками бесконечных слов. Изучить комбинаторную сложность и ее модификации, представить обзор имеющихся результатов для класса слов с наименьшей комбинаторной сложностью - слов Штурма. Рассмотреть полиномиальную Теорему Ван дер Вардена для введения новой, более обобщенной модификации функции комбинаторной сложности - полиномиальной сложности бесконечных слов. Установить оценку полиномиальной сложности для слов Штурма.

- Представить приложения комбинаторной геометрии в задачах Маркшейдерского дела. Разработать эргодический подход к задаче разбиения трещинами массивов горных пород на блоки и определения их геометрических свойств.

Все эти задачи успешно решены автором.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Научная новизна диссертационной работы характеризуется следующими результатами.

- Опираясь на Теорему Ван дер Вардена об одноцветных арифметических прогрессиях, рассмотрена противоположная постановка задачи — о хроматическом числе нормированных пространств $\mathbb{R}^n_N$ и пространств вида $\mathbb{R}^n_N \times [0, e]^h$, где $e > 0, h \in \mathbb{N}$, с запрещенными одноцветными арифметическими прогрессиями.

- Доказано, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует раскраска $\mathbb{R}^n_\infty$ в 2 цвета, т.ч. все достаточно длинные единичные арифметические прогрессии $\mathcal{B}_k$ содержат точки разных цветов, т.е. имеем $\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{B}_k) = 2$.

- Доказано, что для каждого $1 \leq p \leq \infty$ и каждого натурального n любое нормированное пространство $\mathbb{R}^n_p$ с нормой ℓ_p может быть покрашено в 2 цвета так, что все достаточно длинные единичные арифметические прогрессии $\mathcal{B}_k$ содержат точки разных цветов.

- Доказано, что для любых натуральных $h, n \geq 1$ и вещественного $e > 0$, существует такое $k = k(n, h, e)$, что $\chi(\mathbb{R}^n \times [0, e]^h, \mathcal{B}_k) = 2$.

- Опираясь на полиномиальную Теорему Ван дер Вардена, введена обобщенная модификация функции комбинаторной сложности - полиномиальная сложность бесконечных слов. Установлена верхняя оценка полиномиальной сложности слова Штурма $O(n^{d+2})$ для любого полинома степени $d \in \mathbb{N}$.

- Разработан эргодический подход для разбиения пространства n системами равностоящих плоскостей и других аналогичных задач.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит преимущественно теоретический характер. Полученные результаты могут использоваться в таких областях как теория Рамсея, теория кодирования и криптография, теория оптимизации, теория сложности вычислений, биоинформатика и вычислительная биология, а также в задачах Маркшейдерского дела.

Основные методы исследования

В работе применяются как классические комбинаторные методы, в частности, методы комбинаторной геометрии и комбинаторики слов, геометрические методы, так и методы, заимствованные из алгебры, дискретной математики и теории графов.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие результаты, полученные в диссертации:

- Для любого $n \in \mathbb{N}$, существует раскраска в 2 цвета пространства $\mathbb{R}^n$ без одноцветных ℓ_∞-изометрических копий всех батонов $\mathcal{B}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ такая что все достаточно длинные единичные арифметические прогрессии $\mathcal{B}_k$ содержат точки разных цветов, т.е. имеем $\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{B}_k) = 2$.

- Для каждого $1 \leq p \leq \infty$ и каждого натурального n любое нормированное пространство $\mathbb{R}^n_p$ с нормой ℓ_p может быть покрашено в 2 цвета так, что все достаточно длинные единичные арифметические прогрессии $\mathcal{B}_k$ содержат точки разных цветов.

- Для любых натуральных $h, n \geq 1$ и вещественного $e > 0$, существует такое $k = k(n, h, e)$, что $\chi(\mathbb{R}^n \times [0, e]^h, \mathcal{B}_k) = 2$.

- Опираясь на полиномиальную Теорему Ван дер Вардена, введена обобщенная модификация функции комбинаторной сложности - полиномиальная сложность бесконечных слов. Установлена верхняя оценка полиномиальной сложности слова Штурма $O(n^{d+2})$ для любого полинома степени $d \in \mathbb{N}$.

- Разработан эргодический подход для разбиения пространства n системами равностоящих плоскостей и других аналогичных задач.

Степень достоверности

Все результаты диссертации обоснованы с помощью строгих математических доказательств и опубликованы в открытой печати. Результаты главы 1 опубликованы в работах [1, 2]. Результаты глав 2 , 4 и 5 опубликованы в [3, 4, 5].

Апробация результатов

Результаты и положения диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

1. Летняя научная школа Российской Ассоциации Искусственного Интеллекта (секция "Логика искусственного интеллекта "), г. Сочи, Россия, 5-18 июля 2021
2. Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов 2022» (секция “Математика и механика”, подсекция “Математическая логика, алгебра и теория чисел”), г. Москва, Россия, 11 - 22 Апреля 2022 г.
3. Летняя школа AIRI (Artificial Intelligence Research Institute) по искусственному интеллекту, г. Сочи, Россия, 4-17 июля 2022 г.
4. Зимняя студенческая научная школа по математике и теоретической информатике НИУ ВШЭ, СПбГУ и Лаборатории кластерной геометрии, г.Москва, Россия, 27 января - 1 февраля 2023 г.
5. Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов 2023» (секция “Математика и механика”, подсекция “Математическая логика, алгебра и теория чисел”), г. Москва, Россия, 10 - 21 Апреля 2023 г.
6. Международная научная конференция “Numeration 2023”, University of Liège , г.Льеж, Бельгия, 22-26 мая 2023 г.
7. Международная научная конференция "32nd Cumberland Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing Теннесси, США, 13-14 мая 2023.
8. XXVI Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «МАТЕМАТИКИ – АЛТАЙСКОМУ КРАЮ (МАК-2023)» (секция "математика подсекция "алгебра, математическая логика, дискретная математика и теория чисел"), г. Барнаул, Россия, 7 июня 2023 г.
9. Научная школа "Обратные некорректные задачи и машинное обучение г. Сочи, Россия, 4-8 сентября 2023 г.

10. Международная научная конференция "Graph Drawing and Combinatorial Geometry Workshop Erdős Center, г. Будапешт, Венгрия, 13-17 ноября 2023 г.

Публикации

Результаты диссертации обоснованы в виде строгих математических доказательств и опубликованы пяти статьях [1, 2, 3, 4, 5], из которых пять опубликованы в рецензируемых научных журналах, удовлетворяющих положению о присуждении ученых степеней в МГУ.

Работа [1] опубликована в журнале, входящем в реферативные базы данных Scopus и Web of Science; работы [2, 3, 4, 5] опубликованы в журналах, входящих в реферативные базы данных Scopus и RSCI.

Работы [1, 2] написаны в соавторстве с Сагдеевым А., работа [4] написана в соавторстве с Годуновым И., работа [3] написана автором самостоятельно. Работа [5] написана в соавторстве с А. Беловым и В. Павловой.

Все вышеперечисленные работы соответствуют теме научно-квалификационной работы и отражают ее содержание. Работа подготовлена по специальности 1.1.5 «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика».

Структура и объём диссертационной работы

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка использованной литературы. Полный объём диссертации — 96 страниц. Список литературы содержит 157 наименования.

Содержание работы

Во введении даётся общая характеристика работы, постановки задач, цели работы и обосновывается её актуальность. Кроме того, приводится обзор результатов, полученных ранее другими авторами по теме диссертации и смежным направлениям исследований, а также кратко излагается содержание её глав.

Глава 1 посвящена задаче Нельсона и ее обобщениям, а именно хроматическом числе n-мерного нормированного пространства с запрещенными одноцветными конфигурациями, и содержит ряд основных результатов диссертации.

Параграф 1.1 посвящен множествам, имеющим центральное место в данной главе. Следуя статье А. Купавского и А. Сагдеева [88], для последовательности положительных вещественных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, множество $\{0, \lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \dots, \sum_{t=1}^{k} \lambda_t\} \subset \mathbb{R}$ назовем *батоном* и обозначим $\mathcal{B}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. В случае $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 1$ множество

[88] Kupavskii A., Sagdeev A. All finite sets are Ramsey in the maximum norm // Forum Math. Sigma, 9 (2021), e55, 12 pp.

является просто единичной арифметической прогрессией, мы будем обозначать его через $\mathcal{B}_k$.

В параграфе 1.2 формулируется основная задача и содержатся основные результатов данной главы - теорему о существовании 2-цветной раскраски $\mathbb{R}^n$ с запрещенными одноцветными множествами $\mathcal{B}_k$, и следствия, которые решают основную задачу.

Проблема 1.1 *Верно ли, что для любого нормированного пространства $\mathbb{R}^n_N$, найдется $k = k(\mathbb{R}^n_N)$ при котором $\chi(\mathbb{R}^n_N, \mathcal{B}_k) = 2$?*

Следующая теорема, которая является одним из основных результатов главы, показывает, что существует двухцветная раскраска $\mathbb{R}^n$, которая не содержит одноцветную ℓ_∞-изометрическую копию $\mathcal{B}_k$ когда k достаточно велико относительно n.

Теорема 1.4 *Для любого $n \in \mathbb{N}$, существует раскраска в 2 цвета пространства $\mathbb{R}^n$ без одноцветных ℓ_∞-изометрических копий всех батонов $\mathcal{B}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ такая что $\max_t \lambda_t \leq 1$ и $\sum_{t=1}^{k} \lambda_t \geq 5^n$. В частности, для всех $n \in \mathbb{N}$ и $k \geq 5^n$, имеем $\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{B}_k) = 2$.*

Доказательство этой теоремы является конструктивным. В данной работе нет попыток оптимизировать константу 5^n в утверждении, пытаясь сохранить ясность доказательства. Теорема 1.4 применяется для решения задачи 1.1 для многих нормированных пространств $\mathbb{R}^n_N$, отличных от $\mathbb{R}^n_\infty$. Так как произвольная N-изометрическая копия батона $\mathcal{B}$ в $\mathbb{R}^n$ не обязательно является ℓ_∞-изометрической копией какого-то другого батона, то мы рассматриваем только *коллинеарные* N-изометрические копии $\mathcal{B}$.

Следующие следствия решают задачу 1.1 для всех ℓ_p-пространств.

Следствие 1.2 *Для любого нормированного пространства $\mathbb{R}^n_N$ существует вещественная дельта $\delta = \delta(\mathbb{R}^n_N)$ такая, что имеет место следующее. Существует двухцветная раскраска $\mathbb{R}^n$ без одноцветных коллинеарных N-изометрических копий всех батонов $\mathcal{B}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ такая, что $\max_t \lambda_t \leq 1$ и $\sum_{t=1}^{k} \lambda_t \geq \delta$. В частности, все достаточно длинные единичные арифметические прогрессии в $\mathbb{R}^n_N$ содержат точки обоих цветов при такой раскраске.*

Следствие 1.3 *Пусть $\mathbb{R}^n_N$ - нормированное пространство, единичный шар которого является центрально-симметричным выпуклым многоугольником в $\mathbb{R}^n$ с $2f$ гранями. Тогда существует двуцветная раскраска $\mathbb{R}^n$ без одноцветных N-изометрических копий всех батонов $\mathcal{B}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ таких, что $\max_t \lambda_t \leq 1$ и $\sum_{t=1}^{k} \lambda_t \geq 5^f$. В частности, для всех $k \geq 5^f$, имеем $\chi(\mathbb{R}^n_N, \mathcal{B}_k) = 2$.*

Параграф 1.3 содержит некоторые предварительные технические утверждения. Определена классификация всех ℓ_∞-изометрических копий батонов в $\mathbb{R}^n$, вводится конструкция, играющая центральную роль в доказательстве Теоремы 1.4. Доказательства основных свойств конструкции представлены в виде отдельных лемм.

Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ - стандартные базисные векторы для $\mathbb{R}^n$, а $\mathbf{1}_n \in \mathbb{R}^n$ - их сумма, т.е. вектор, у которого все n координат являются единицами. Для всех $m < n$, мы идентифицируем $\mathbb{R}^m$ с m-мерным подпространством $\mathbb{R}^n$, которое охватывается первыми m базисными векторами $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$. Для двух подмножеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ обозначим их *сумму Минковского* $\{\mathbf{a} + \mathbf{b} : \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\} \subset \mathbb{R}^n$ на $A + B$ как обычно. Для подмножества $A \subset \mathbb{R}^n$ и для множества вещественных чисел $I \subset \mathbb{R}$ обозначим множество попарных произведений $\{i \cdot \mathbf{a} : i \in I, \mathbf{a} \in A\} \subset \mathbb{R}^n$ через $I \cdot A$.

Для заданного $n \in \mathbb{N}$, определим n-мерную кусочно-линейную гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$, зависящую от $2n$ положительных вещественных параметров, дадим ей название *змейка* и обозначим $\boldsymbol{\mathfrak{S}}^n(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$. В дальнейшем мы будем опускать параметры и обозначать через $\boldsymbol{\mathfrak{S}}^n$ для краткости. Определение гиперповерхности дается индукцией по n. Пусть $\boldsymbol{\mathfrak{S}}^0(\varnothing) \coloneqq \{0\}$ есть просто начало линии. Для $n > 0$, мы определяем конструкцию по следующему правилу:

$$\boldsymbol{\mathfrak{S}}^n(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) = \boldsymbol{\mathfrak{S}}^{n-1}(a_1, b_1, \ldots, a_{n-1}, b_{n-1}) \\ + \mathbb{Z} \cdot \{a_n \cdot \mathbf{e}_{n+1} - b_n \cdot \mathbf{1}_n\} + [0, a_n) \cdot \mathbf{e}_{n+1} \cup (0, b_n] \cdot \mathbf{1}_n. \tag{1}$$

Мы иллюстрируем это определение для случаев $n = 1, 2$ на рис. 1.

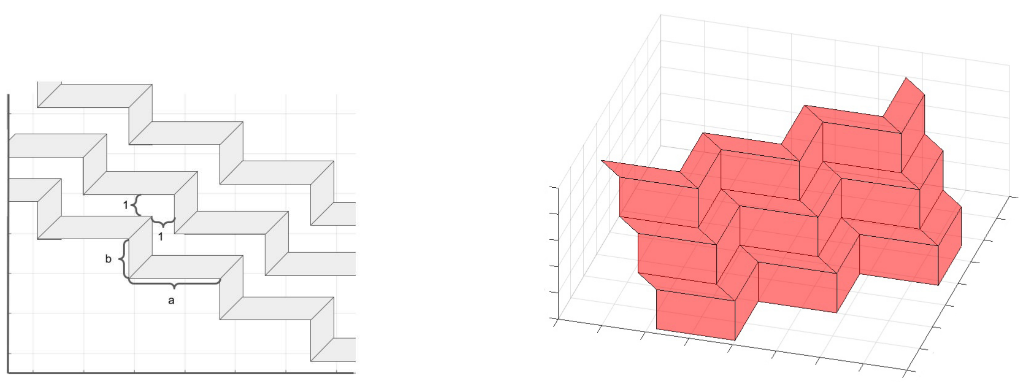

Рис. 1: Конструкция "змейка"для плоскости и пространства

В параграфе 1.4 автор доказывает Теорему 2.1, построив явную раскраску $\mathbb{R}^{n+1}_\infty$ в 2 цвета на основе введенных гиперповерхностей $\boldsymbol{\mathfrak{S}}^n$.

Мы доказываем, что $\mathbb{R}^{n+1}$ представимо в виде дизъюнктивного объединения $\mathbb{R}^{n+1} = \mathfrak{R} \sqcup \mathfrak{B}$, где

$$\mathfrak{R} \coloneqq \widehat{\boldsymbol{\mathfrak{S}}}^n + \{2z : z \in \mathbb{Z}\} \cdot \mathbf{1}_{n+1}, \quad \mathfrak{B} \coloneqq \widehat{\boldsymbol{\mathfrak{S}}}^n + \{2z + 1 : z \in \mathbb{Z}\} \cdot \mathbf{1}_{n+1},$$

и точки множеств $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{B}$ раскрашены в красный и синий цвета, соответственно.

Для начала покажем, что не существует одноцветных ℓ_∞-изометрических копий всех батонов $\mathcal{B}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ таких, что $\max_t \lambda_t \le 1$ и $\sum_{t=1}^{k} \lambda_t \ge 5^{n+1}$. Ввиду симметрии между $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{B}$, достаточно доказать отсутствие копий только одного цвета.

В параграфе 1.5 мы имеем дело с нормированными пространствами, отличными от $\mathbb{R}^n_\infty$, и доказываем формулы следствий 1.2 и 1.3.

В параграфе 1.6 мы обобщаем полученные результаты на ℓ_p-пространства при $p \neq 2$. Из Теоремы 1.4 и следствий 1.2 и 1.3 вытекает очевидность следующей Теоремы, которая является одним из основных результатов главы.

Теорема 1.5 *Для любого $1 \le p \le \infty$ и любого натурального n, существует такое достаточно большое $k = k(p, n)$ такое, что $\chi\left(\mathbb{R}^n_p, \mathcal{B}_k\right) = 2$.*

В параграфе 1.7 мы делаем некоторые дальнейшие замечания и излагаем больше открытых проблем.

Вторая глава посвящена естественному обобщению задачи о хроматическом числе плоскости. В работе [89] А. Канель-Белов, В. Воронов и Д. Черкашин предложили рассматривать хроматические числа пространств вида $\mathbb{K}^n \times [0, e]^h$, где $\mathbb{K} = \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, для натуральных $n, h \ge 1$ и вещественного $e > 0$, с запрещенным единичным евклидовым расстоянием. Такие метрические пространства будем называть *слойками*, величину n - размерностью слойки. Очевидно, что для любого положительного e выполнены неравенства $\chi(\mathbb{R}^n) \le \chi(\mathbb{R}^n \times [0, e]^h) \le \chi(\mathbb{R}^{n+h})$.

Параграф 2.1 посвящен вещественным слойкам. Представлен обзор имеющихся точных оценок для одномерных двумерных и трехмерных вещественных слоек с запрещенным единичным евклидовым расстоянием. Для одномерных слоек известны следующие нижние и верхние оценки.

Утверждение 2.1 *В случае $0 < e \le \sqrt{\frac{3}{4h}}$ верно $\chi(\mathbb{R} \times [0, e]^h) = 3$.*

Если $\sqrt{\frac{3}{4h}} < e < \sqrt{\frac{8}{9h}}$, то $\chi(\mathbb{R} \times [0, e]^h) = 4$.

При "раздутии"плоскости в пространстве большей размерности верхняя оценка остается прежней в силу того, что раскраска плоскости в 7 цветов не содержит расстояний, принадлежащих некоторому интервалу.

Теорема 2.1 *Пусть $h \in \mathbb{Z}$ и $0 < e < e_o(h)$. Тогда $\chi(\mathbb{R}^2 \times [0, e]^h) \le 7$.*

Нижнюю оценку можно улучшить при высоте $h = 2$: $6 \le \chi\left(\mathbb{R}^2 \times [0, e]^2\right)$. Для слойки высоты меньшей $\sqrt{3/7}$ верно: $5 \le \chi(\mathbb{R}^2 \times [0, e]) \le 7$. Для трехмерных слоек зазор между оценками остается большим: $10 \le \chi(\mathbb{R}^3 \times [0, e]^6) \le 15$.

Параграф 2.2 посвящен обзору результатов для рациональных слоек. Для нача-

[89] Kanel-Belov A., Voronov V., Cherkashin D. On the chromatic number of an infinitesimal plane layer // St. Petersburg Mathematical Journal, 29(5):761–775, 2018.

ла представлены текущие результаты, касающихся хроматических чисел рациональных пространств: для плоскости и пространства по прежнему допускается правильная раскраска в два цвета: $\chi\left(\mathbb{Q}^2\right) = \chi\left(\mathbb{Q}^3\right) = 2$. Бенда и Перлес [90] показали, что $\chi\left(\mathbb{Q}^4\right) = 4$. Так как $\chi\left(\mathbb{Q}^4\right) = 4$, то хроматическое число пространства $\mathbb{Q}^2 \times [0,\varepsilon]^2_{\mathbb{Q}}$ никак не может быть больше 4 . В работе [91] были рассмотрены одномерные рациональные слойки и доказана следующая Теорема.

Теорема 2.7 *Для достаточно малого* $e > 0$ *выполняется* $\chi\left(\mathbb{Q} \times [0,e]^3_{\mathbb{Q}}\right) = 3$.

Параграф 2.3 содержит основной результат главы. Рассмотрим хроматические числа пространств $\mathbb{R}^n \times [0,e]^h$ с запрещенными одноцветными конфигурациями, введенными в главе 1. Применив результаты первой главы, в частности, используя введенные гиперповерхности 'змейки', мы докажем, что любая слойка может быть 2-раскрашиваема.

Теорема 2.8 *Для любых натуральных* $h, n \geq 1$ *и вещественного* $e > 0$*, существует такое* $k = k(n,h,e)$*, что* $\chi(\mathbb{R}^n \times [0,e]^h, \mathcal{B}_k) = 2$.

Третья глава посвящена графам, представимых в виде слов. Глава является обзорной. В главе представлен обзор графов, представимых словами, а именно: какие известные классы графов представимы словами, а какие нет; какие операции сохраняют представимость слов (или непредставимость) и какие свойства сохраняются для этого графа. В частности, нас интересует связь графов, представимых словами, с хроматическим числом графа.

Параграф 3.1 содержит все основные определения и свойства графов, представимых словами, а также ряд примеров.

Рассматриваются графы без петель петель и/или параллельных рёбер. Будем говорить, что граф $G = (V,E)$ *представим в виде слова*, если существует такое слово w, содержащее каждую букву из алфавита V , что буквы x и y, $x \neq y$, чередуются в w тогда и только тогда, когда $\{x,y\} \in E$.

Параграф 3.2 посвящен k-представимости, числу представимости графа и вопросам вычислительной сложности. Приведен обзор графов, которые не являются представимыми в виде слова.

Слово w называется *k-униформным*, если каждая буква встречается в w ровно k раз. Граф G называется *k-представимым в виде слова* (далее будем для краткости писать k-представимым), если существует k-униформное слово w, представляющее его. В таком случае будем говорить, что слово w k-представляет G.

В следующем разделе изучено число представимости графа и вопросы вычис-

[90] Benda M., Perles M. Colorings of metric spaces // Geombinatorics, 9(3):113–126, 2000.

[91] Kanel-Belov A., Voronov V., Cherkashin D. On the chromatic number of an infinitesimal plane layer // St. Petersburg Mathematical Journal, 29(5):761–775, 2018.

лительной сложности. Любой полный граф может быть представлен одним словом. Следующая теорема дает верхнюю границу числа представлений для всех других графов, представимых словом.

Теорема 3.4 *Каждый неполный граф G, представимый словом, равен $2(n - (G))$ -представимый словом, где (G) - размер максимальной клики в G.*

Прямым следствием этой Теоремы является то, что задача распознавания графов, представимых в виде слов является NP-полной.

Нечётные колёса W_{2n+1} непредставимы при $n \geqslant 2$, а W_5 - минимальный по числу вершин непредставимый граф. Учитывая наследственность класса представимых графов, получаем, что весь класс графов, содержащих какое-либо колесо $W_{2n+1}(n \geqslant 2)$ в качестве индуцированного подграфа, непредставим.

Параграф 3.3 содержит обзор перестановочно представимых графов, и дает представление о структуре графов, представимых словами.

Граф $G = (V, E)$ *перестановочно представим*, если он может быть представлен словом вида $p_1 p_2 \ldots p_k$, где каждая p_i является перестановкой над V для $1 \leq i \leq k$. Если в таком слове использовано k перестановок, то будем говорить, что G является *перестановочно k-представимым.*

Следующие Теоремы дают представление о структуре графов, представимых словами, и устанавливают связь между представимостью в виде слова и перестановочной представимостью.

Теорема 3.5 *Граф перестановочно представим тогда и только тогда, когда он является графом сравнимости.*

Теорема 3.6 *Граф G, полученный из графа H добавлением смежной вершины, представим в виде слова тогда и только тогда, когда H перестановочно представим.*

В параграфе 3.4 рассматривается техника полутранзитивных ориентаций, которая играет ключевую роль при изучении графов, представимых словами и их связи с хроматическим числом. В частности, в доказательстве того, что 1,2,3-раскрашиваемые графы представимы словами. Параграф освящает вопрос, какие операции над графами сохраняют представимость.

Параграф 3.5 посвящен связи графов, представимых словами, с хроматическим числом. Мы представляем имеющийся обзор представимости слов k-раскрашиваемых графов.

Теорема 3.10 *Любой 1-раскрашиваемый граф G является 2-представимым.*

Теорема 3.12 *Любой 3-раскрашиваемый граф представим в виде слова.*

Следующая теорема предоставляет альтернативное (самодостаточное) доказательство того факта, что любой 3-цветной граф можно представить словами.

Теорема 3.13 *3-цветные графы являются* $2\lfloor 2n/3 \rfloor$*-представимыми словами.*

При $\chi(G) \geq 4$ граф может быть как представим в виде слова, так и нет. Пусть M – 4-раскрашиваемый граф с охватом не меньше 10 (такие графы существуют по теореме Эрдёша). Для каждого пути длины 3 в M добавим к M ребро, соединяющее его концы. Тогда полученный граф без треугольников будет непредставимым.

Четвертая глава посвящена вопросам комбинаторики слов. Глава содержит один из основных результатов диссертации — введенное понятие полиномиальной сложности бесконечных и верхняя оценка для сложности слов Штурма. В этой главе рассматриваются комбинаторные сложностные характеристики бесконечных слов, в частности слов Штурма.

В параграфе 4.1 вводятся все основные определения комбинаторики слов.

Комбинаторной (или *факторной*) сложностью $p_w(n)$ слова w называется количество всех подслов (или факторов) длины n в слове w.

Параграф 4.2 посвящен словам Штурма - классу слов с наименьшей комбинаторной сложностью $n+1$. Существует несколько эквивалентных определений слов Штурма. Прежде всего, это *уравновешенные* слова: пусть u и v – два подслова слова w одинаковой длины. Пусть $|u|_1$ и $|v|_1$ – количество единиц в подсловах u и v соответственно. Тогда верно: $||u|_1 - |v|_1| \leq 1$.

Слова Штурма - это *механические* слова с *иррационалным наклоном* $\alpha \in (0,1)$, т.е. бесконечное вправо или в обе стороны слово, каждый символ которого задан одним из двух равенств: $w_i = \lfloor \alpha(i+1)+\beta \rfloor - \lfloor \alpha i + \beta \rfloor$, или $w_i = \lceil \alpha(i+1)+\beta \rceil - \lceil \alpha i + \beta \rceil$ где $0 \leq \beta < 1$.

Мигноси [92] основываясь на предположении о неоднозначности языка [93], доказал в 1989 году следующую важную теорему.

Теорема 4.2 *Количество подслов длины n в слове Штурма определяется суммой*

$$1 + \sum_{1}^{n} (n-i+1)\phi(i)$$

где $\phi(i)$– функция Эйлера.

Берстель и Поккиола [94] представили доказательство этой формулы с помощью

[92]Mignosi F. On the number of factors of Sturmian words // Theoret. Comput. Sci. 1991, 71-84.

[93]Dulucq S., D. Gouyou-Beauchamp Sur les facteurs des suites de Sturm // Rapport No. I-8735, Comput. Sci., 1987.

[94]Berstel J., Pocchiola M. A geometric proof of the enumeration formula for Sturmian words // Int. J. Algebra and Comput., 1993, V. 3, 349 -355.

геометрического двойственного метода. Метод основан на том, что каждому заданному двумя параметрами слову можно поставить в соответствие точку на плоскости, координаты которой равны параметрам слова. При определенном выборе параметров точки из одной связной области будут соответствовать одному и тому же слову. В данном случае области оказываются гранями плоского графа, а значит их количество можно посчитать по формуле Эйлера. Таким образом, количество всех подслов длины n слова Штурма может быть получено как количество всех связных областей плоскости.

Параграф 4.3 посвящен понятию арифметической сложности бесконечных слов, начало изучению которой положили Теорема Ван дер Вардена об одноцветных арифметических подпоследовательностях и Теорема Семереди. В данном разделе представлены все имеющиеся результаты, касающиеся арифметической сложности слов Штурма.

Для всякого бесконечного вправо слова w через w_d^k обозначим бесконечное слово $w_d^k = w_k w_{k+d} \cdots w_{k+nd} \cdots$ – *арифметическую подпоследовательность* слова w с разностью d и начальной позицией k. *Арифметическим замыканием* бесконечного слова w называется множество $A_w = \{w_k \cdots w_{k+(n-1)d} | k \geq 0, d > 0\}$. *Арифметическая сложность* $a_w(n)$ слова w определяется как как совокупное число всех подслов арифметических подпоследовательностей данного слова $a_w(n) = \# \left(A_w \cap \Sigma_q^n\right)$.

Теоремы Ван дер Вадрена и Семереди в данных терминах могут быть сформулированы следующим образом.

Теорема 4.5 (Ван дер Варден) *Во всяком слове w существует символ a, такой что $a^n \in A_w$ для всякого $n > 0$.*

Теорема 4.6 (Семерди) *Если в слове w для некоторого символа a верхний предел отношения количества вхождений символа a в префикс слова w к длине этого префикса положителен,*

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{|w[1..n]|}{n} > 0$$

то $a \in A_w$ для всех $n > 0$.

Эти теоремы дают ответ на вопрос о том, какие слова обязательно входят в арифметическое замыкание.

В работе [95] Кассень и А.Фрид, используя геометрический двойственный метод, установили, что слова Штурма с любым наклоном имеют кубический порядок роста.

Параграф 4.4 содержит основной результат главы. Основываясь на полиномиальную Теорему Ван дер Вардена, введенную А. Либманом и В. Бергельсоном [96] ,

[95] Cassaigne J., Frid A. On the arithmetical complexity of Sturmian words // Theoretical Computer Science, 2007, V. 380, P.304-316.

[96] Leibman A., Bergelson V. Polynomial extensions of van der Waerden's and Szemeredi's theorems // Journal of the American Math Society, Vol. 9, 1996, 725-753.

мы вводим более обобщенную модификацию функции комбинаторной сложности - полиномиальную сложность бесконечных слов, и все вспомогательные определения.

Рассмотрим полином $Q_d(k) = a_d k^d + \cdots + a_1 k + a_0$, где $a_i, d \in \mathbb{N}$, и $i \in \{0, \ \ldots, \ d\}$. Для заданного $Q_d(k)$ определим *полиномиальную подпоследовательность* длины n бесконечного вправо слова w как конечную последовательность вида

$$w_{Q_d(k)} w_{Q_d(k+1)} \cdots w_{Q_d(k+n-1)}$$

где $k-$ начальная позиция.

Аналогично арифметическому замыканию, введем полиномиальное. *Полиномиальным замыканием* бесконечного вправо слова w для полинома степени d называется следующее множество: $P_w^d = \{w_{Q_d(k)} w_{Q_d(k+1)} \cdots w_{Q_d(k+n-1)} | n, d > 0, k \geq 0\}$.

Для данного бесконечного вправо слова $w = w_1 w_2 \cdots$ и полинома $Q_d(k)$ степени d мы определяем *полиномиальную сложность* как функцию $\mathcal{P}_w^d(n)$, равную количеству всех различных полиномиальных подпоследовательностей длины n, встречающихся в слове w:

$$\mathcal{P}_w^d(n) = \# \left(P_w^d \cap \Sigma_q^n \right).$$

Арифметическое замыкание A_w включено в P_w^d, и для $d = 1$ истинно $A_w = P_w^1$. Действительно, если $Q_1(k) = ak + b$, то $w_{ak+b} w_{a(k+1)+b} \cdots w_{a(k+n)+b}$, т.е. полиномиальное слово является арифметической подпоследовательностью w_a^{ax+b} слова w с разностью a и начальной позицией $ak + b$. Таким образом, для любых $d, n > 0$ верны следующие неравенства :

$$1 \leq p_w(n) \leq a_w(n) \leq \mathcal{P}_w^d(n) \leq q^n.$$

Очевидно предположить, что функция полиномиальной сложности в первую очередь ограничена степенью полинома d.

Рассмотрим введенное понятие на словах Штурма и установим верхнюю оценку.

Теорема 4.12 *Пусть $w-$ слово Штурма. Для любого $d \in \mathbb{N}$ верно:*

$$\mathcal{P}_w^d(n) \leq O(n^{d+2}).$$

Для доказательства оценки будем использовать геометрический двойственный метод — технику, введенную в работе [97], адаптировав для поставленной задачи.

Параграф 4.5 содержит заключительные замечания, вопросы и перспективы.

Пятая глава посвящена приложениям комбинаторной геометрии в задачах Маркшейдерского дела и содержит один из основных результатов диссертации.

В параграфе 5.1 рассматривается разбиение трещинами массивов горных пород

[97] Berstel J., Pocchiola M. A geometric proof of the enumeration formula for Sturmian words // Int. J. Algebra and Comput., 1993, V. 3, 349 -355.

на блоки. Взяв за основу модель, в которой трещины представляют собой системы неограниченных эквидистантных (то есть параллельных и равноотстоящих) систем плоскостей, в главе изучено распределение блоков по объемам и формам и представлен эргодический подход, который позволяет находить распределение блоков не только по объемам, как все разработанные ранее методы, но и по другим геометрическим параметрам.

Заключение

Основные результаты диссертации заключаются в следующем:

- Доказано, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует раскраска $\mathbb{R}^n_\infty$ в 2 цвета, т.ч. все достаточно длинные единичные арифметические прогрессии $\mathcal{B}_k$ содержат точки разных цветов, т.е. имеем $\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{B}_k) = 2$.
- Доказано, что для каждого $1 \leq p \leq \infty$ и каждого натурального n любое нормированное пространство $\mathbb{R}^n_p$ с нормой ℓ_p может быть покрашено в 2 цвета так, что все достаточно длинные единичные арифметические прогрессии $\mathcal{B}_k$ содержат точки разных цветов.
- Доказано, что для любых натуральных $h, n \geq 1$ и вещественного $e > 0$, существует такое $k = k(n, h, e)$, что $\chi(\mathbb{R}^n \times [0, e]^h, \mathcal{B}_k) = 2$.
- Опираясь на полиномиальную Теорему Ван дер Вардена, введена обобщенная модификация функции комбинаторной сложности - полиномиальная сложность бесконечных слов. Установлена верхняя оценка полиномиальной сложности слов Штурма $O(n^{d+2})$ для любого полинома степени $d \in \mathbb{N}$.
- Разработан эргодический подход для разбиения пространства n системами равноотстоящих плоскостей и других аналогичных задач.

Результаты диссертации прежде всего могут быть интересны специалистам в комбинаторной геометрии, комбинаторики слов и теории кодирования, а также специалистам в области Маркшейдерского дела.

Благодарности

Автор выражает глубокие искренние благодарности своим научным руководителям, доктору физико-математических наук, профессору Канелю-Белову Алексею Яковлевичу, и доктору физико-математических наук, профессору Райгородскому Андрею Михайловичу. Автор выражает отдельную искреннюю, глубокую благодарность кандидату физико-математических наук Арсению Сагдееву, за постановку задач и плодотворные обсуждения в процессе совместной работы.

Автор выражает большую благодарность заведующему кафедрой математической логики и теории алгоритмов Семенову Алексею Львовичу, Пентусу Мати Рейновичу и всем сотрудникам кафедры за неоценимую поддержку в научной работе. Также автор выражает благодарность за поддержку в научной работе доктору физико-математических наук, профессору Алескерову Фуаду Тагиевичу и кандидату технических наук Алексею Логунову.

Диссертация была выполнена при поддержке гранта РНФ 22-11-00177.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ

1. *Kirova V., Sagdeev A.* Two-colorings of normed spaces without long monochromatic unit arithmetic progressions, SIAM Journal on Discrete Mathematics, 2023, Vol. 37, No. 2, pp. 718–732. — (Web of Science, Scopus. Impact Factor 2022: WoS 0.736, SJR 0.901, Scopus 0.967)

   Соавтору принадлежит постановка задачи и проверка результатов. Основные результаты статьи получены автором самостоятельно

2. *Кирова В.О., Сагдеев А.А.* Двухцветные раскраски нормированных пространств без длинных одноцветных арифметических прогрессий // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, 2022, том 506, страницы 54–56.

   Kirova V.O., Sagdeev A.A. Two-colorings of normed spaces with no long monochromatic unit arithmetic progressions // DOKLADY MATHEMATICS no. 2 (2022): 348-350. — (Scopus, RSCI. Impact Factor 2022: SJR 0.444).

   Соавтору принадлежит постановка задачи и проверка результатов. Основные результаты статьи получены автором самостоятельно.

3. *В.О. Кирова* О хроматическом числе слоек без одноцветных арифметических прогрессий // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 78-84.

   V.O. Kirova On the chromatic number of slices without monochromatic unit arithmetic progressions // Chebyshevskii sbornik, 2023, vol. 24, no. 4, pp. 78-84. — (Scopus, RSCI. Impact Factor 2022: SJR 0.305).

4. *В.О. Кирова, И.В. Годунов.* Комбинаторные сложностные характеристики слов Штурма // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 63-77.

   V.O.Kirova, I.V. Godunov On the complexity functions of Sturmian words // Chebyshevskii sbornik, 2023, vol. 24, no. 4, pp. 63-44. — (Scopus, RSCI. Impact Factor 2022: SJR 0.305).

Соавтору принадлежит выполнении рутинной работы по систематизации материала. Основные результаты статьи получены автором самостоятельно.

5. *А.Я. Канель-Белов, В.В. Павлова, В.О. Кирова* Геометрические свойства сред, разбитых трещинами на блоки // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 208-216.

   A.Ya. Kanel-Belov, V.V.Pavlova, V.O. Kirova Geometric properties of rocks, broken into blocks by cracks // Chebyshevskii sbornik, 2023, vol. 24, no. 5, pp. 208-216. — (Scopus, RSCI. Impact Factor 2022: SJR 0.305).

   Вклад всех авторов равноценен и неразделим.

Другие публикации

6. Кирова В.О. Полиномальная сложность слов Штурма // СБОРНИК ТРУДОВ ВСЕРОССИЙСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ С МЕЖДУНАРОДНЫМ УЧАСТИЕМ «МАТЕМАТИКИ – АЛТАЙСКОМУ КРАЮ (МАК-2023)» — Барнаул, 7 июня 2023 г.

7. Кирова В.О. The chromatic number of space with Chebyshev metric without long monochromatic unit arithmetic progressions [Электронный ресурс] // Материалы Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов 2022". Москва, 11 - 22 Апреля 2022 г.

   http://logic.math.msu.ru/wp-content/uploads/the_chromatic_number_1.pdf

   Дата обращения - 12.12.2023

8. Кирова В.О. On the chromatic number of slices without monochromatic unit arithmetic progression [Электронный ресурс] // Материалы Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов 2023". Москва, 10 - 21 Апреля 2023 г.

   http://logic.math.msu.ru/wp-content/uploads/nis/kirova_lomonosov_2023.pdf

   Дата обращения - 12.12.2023