

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

*На правах рукописи*

Селюцкий Юрий Дмитриевич

**Некоторые особенности динамики тела,  
взаимодействующего с потоком сопротивляющейся  
среды**

1.1.7 — Теоретическая механика, динамика машин

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Москва — 2024

Диссертация подготовлена в лаборатории общей механики  
НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова.

**Научный  
консультант:**

**Самсонов Виталий Александрович**, доктор  
*физико-математических наук, профессор*

**Официальные  
оппоненты:**

**Маркеев Анатолий Павлович**, доктор фи-  
зико-математических наук, профессор, Феде-  
ральное государственное бюджетное учрежде-  
ние науки *Институт проблем механики им.  
А.Ю. Ишлинского Российской академии наук,*  
*лаборатория механики систем, главный науч-  
ный сотрудник*

**Степанов Сергей Яковлевич**, доктор фи-  
зико-математических наук, доцент, Феде-  
ральное государственное учреждение «Федераль-  
ный исследовательский центр «Информатика  
и управление» Российской академии наук», от-  
дел механики, старший научный сотрудник

**Тихонов Алексей Александрович**, доктор  
физико-математических наук, профессор, Фе-  
деральное государственное бюджетное обра-  
зовательное учреждение высшего образования  
«Санкт-Петербургский государственный уни-  
верситет», кафедра теоретической и приклад-  
ной механики математико-механического фа-  
культета, профессор

Защита диссертации состоится 17 июня 2024 г. в 16 часов 00 ми-  
нут на заседании диссертационного совета МГУ.011.7 Московского госу-  
дарственного университета имени М.В. Ломоносова, расположенном по  
адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, Главное здание МГУ, ме-  
ханико-математический факультет, аудитория 16-10.

E-mail: [dissovet.msu.011.7@math.msu.ru](mailto:dissovet.msu.011.7@math.msu.ru)

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной  
библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27)  
и на портале: <https://dissovet.msu.ru/dissertation/2925>.

Автореферат разослан 10 апреля 2024 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
кандидат физико-математических наук

М.А. Муницына

## Общая характеристика работы

**Цель и задачи работы.** Цель работы заключается в исследовании динамики механических и электромеханических систем, в состав которых входит тело, взаимодействующее с потоком сопротивляющейся среды, и выявлении особенностей их поведения, обусловленных совместным действием сил различной природы (аэродинамических, электромагнитных, упругих и т.д.). Для достижения этой цели решаются следующие задачи: анализируются различные подходы к описанию нестационарного воздействия потока среды на твердое тело и области их применимости, а также связи между этими подходами; исследуется влияние изменения потенциальных сил на устойчивость положения равновесия в присутствии диссипативных сил с неполной диссипацией и/или позиционных неконсервативных сил; строятся замкнутые математические модели малых ветроэнергетических установок различных типов и проводится параметрический анализ, направленный на изучение особенностей динамики соответствующих систем.

**Актуальность.** Необходимость исследования динамики механических и электромеханических систем, содержащих тело, взаимодействующее с потоком сопротивляющейся среды, возникает в самых разных областях науки и техники. Одним из важных направлений, связанных с подобными задачами, является создание малых ветроэнергетических установок. Такие устройства предназначены для автономной работы и питания небольшого количества потребителей. Для выявления особенностей их поведения, проведения параметрического анализа и выбора оптимальных вариантов конструкции и управления важно исследовать замкнутые системы, включающие как механические, так и электрические компоненты системы. При этом целесообразно, по крайней мере, на начальных этапах использовать модели феноменологического типа, в рамках которых позволяющие составлять уравнения движения в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений и эффективно

использовать методы качественного анализа. Это значительно уменьшает объем вычислений и ресурсоемких расчетов, связанных с детальным моделированием течения жидкости вокруг движущегося в ней тела и решением соответствующей сопряженной задачи.

**Научная новизна.** Изложенные в диссертации результаты являются новыми. В работах соискателя с соавторами проведен ряд исследований особенностей динамики твердых тел, взаимодействующих с потоком сопротивляющейся среды. Установлена взаимосвязь между описанием нестационарного аэродинамического воздействия на крыло, получаемым с помощью модели присоединенного осциллятора, и описанием, в котором для учета предыстории используется интеграл Дюамеля с экспоненциальным ядром. В задаче о торможении крыла, поступательно движущегося поперек потока, исследовано поведение нормальной к хорде составляющей аэродинамической силы на этапе торможения и после остановки.

Впервые исследовано влияние изменения диагонального элемента матрицы потенциальных сил на характер устойчивости тривиального равновесия линейной механической системы и показано, что характер устойчивости при этом может изменяться не более  $2s - 1$  раз, где  $s$  — число степеней свободы системы. Построен пример системы с произвольным числом степеней свободы, в которой число изменений характера устойчивости равно этому максимальному значению. Для систем с двумя степенями свободы получены условия, при которых характер устойчивости изменяется два или три раза при увеличении коэффициента жесткости по одной из обобщенных координат. Эффект потери устойчивости при увеличении коэффициента жесткости по одной из обобщенных координат экспериментально подтвержден для двухзвенного аэродинамического маятника.

Исследована динамика малых автономных ветроэнергетических установок с горизонтальной осью вращения. Построена замкнутая математическая модель соответствующей электро-

механической системы. Показано, что в случае, когда электромеханическое взаимодействие является линейным, возникает гистерезис выходной мощности (и угловой скорости ветротурбины) при изменении внешней нагрузки в электрической цепи или скорости ветра. Если же электромеханическое взаимодействие является нелинейным, то семейство неподвижных точек претерпевает перестройку при увеличении скорости ветра. Если скорость ветра меньше некоторого критического значения, зависящего от коэффициента, характеризующего нелинейность электромеханического взаимодействия, то угловая скорость ветротурбины на стационарном режиме монотонно убывает при увеличении внешней нагрузки в цепи генератора от нуля до бесконечности; если же скорость больше этого критического значения, то угловая скорость ветротурбины на стационарном режиме изменяется немонотонно при увеличении нагрузки в указанном диапазоне.

Рассмотрена ветроэнергетическая установка колебательного типа с двумя подвижными телами, использующая эффект галопирования. Одно тело представляет собой прямоугольную призму, а второе тело — материальную точку, которая не взаимодействует с потоком и упруго прикреплена к неподвижному основанию и к призме. Показано, что при такой конфигурации колебания начинаются при меньшей скорости потока, а выходная мощность увеличивается по сравнению с установкой, содержащей одну массу.

Рассмотрена динамика ветроэнергетической установки, рабочий элемент которой представляет собой однозвенный аэродинамический маятник с упруго закрепленной точкой подвеса. Исследованы периодические режимы и даны оценки выходной мощности. Предложено управление моментом инерции маятника, обеспечивающее гашение колебаний в случае, когда скорость потока превышает предельно допустимое значение.

**Теоретическая и практическая значимость.** Проведенные исследования расширяют представления о поведении механических и электромеханических систем, в состав кото-

рых входит твердое тело, взаимодействующее с потоком сопротивляющейся среды, и о возможности использования установившихся движений, возникающих в результате такого взаимодействия, для преобразования энергии потока в полезные формы.

Полученные результаты могут быть полезны при проектировании и сравнительном анализе ветроэнергетических установок различных типов.

**Методология и методы исследования.** Результаты, полученные в диссертации, основаны на использовании методов теоретической механики, теории устойчивости, качественных методов анализа динамических систем, а также асимптотических методов. При моделировании динамики систем используются методы численного интегрирования задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Кроме того, часть результатов получена в ходе экспериментов, проведенных в дозвуковой аэродинамической трубе А6 НИИ механики МГУ.

#### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Уравнения движения тела в потоке, полученные с помощью модели присоединенного осциллятора, приводятся к интегро-дифференциальной форме, аналогичной уравнениям, получаемым в рамках известного подхода к описанию нестационарного аэродинамического воздействия, использующего интеграл Дюамеля с экспоненциальным ядром.
2. Пусть тело типа тонкого крыла совершает медленное поступательное движения поперек потока среды, так что мгновенный угол атаки мал. Тогда при достаточно большой величине производной коэффициента нормальной силы по углу атаки коэффициент при ускорении тела, обусловленный наличием нестационарного аэродинамического воздействия, оказывается отрицательным, что дает основание говорить не о «присоединенной», а об «отсоеди-

ненной» массе.

3. При изменении диагонального элемента матрицы потенциальных сил характер устойчивости положения равновесия голономной системы с  $s$  степенями свободы может изменяться не более  $2s - 1$  раз. Для любого конечного значения  $s$  существует система, в которой число изменений характера устойчивости равно максимально возможному.
4. Для линейной голономной системы с 2 степенями свободы существуют достаточные условия того, что при увеличении жесткости по одной из обобщенных координат от некоторого фиксированного значения (возможно, отрицательного) до бесконечности характер устойчивости равновесия изменится 3 раза (неустойчивость — асимптотическая устойчивость — неустойчивость — асимптотическая устойчивость).
5. Для линейной голономной системы с 2 степенями свободы существуют достаточные условия того, что при увеличении жесткости по одной из обобщенных координат от некоторого фиксированного значения (возможно, отрицательного) до бесконечности характер устойчивости равновесия изменится 2 раза. Этот эффект возможен, в частности, в случае полной диссипации, если в системе присутствуют циркуляционные силы.
6. При равномерном торможении тонкого крыла, поступательно движущегося поперек потока среды, нормальная сила, действующая на крыло, не меняет направление, если ускорение крыла меньше определенного критического значения, и меняет направление два раза (один на фазе торможения, второй — на фазе последействия), если ускорение превышает это критическое значение. При этом на некотором интервале времени в ходе фазы торможения указанная сила препятствует торможению.

7. Для однозвенного аэродинамического маятника существует диапазон значений длины державки, в котором положение равновесия «по потоку» является асимптотически устойчивым, если момент инерции маятника относительно точки подвеса меньше определенного критического значения, и неустойчивым, если момент инерции больше этого значения.
8. Для малых автономных ветроэнергетических установок с горизонтальной осью вращения в случае, когда электро-механическое взаимодействие является линейным, существует диапазон значений внешней нагрузки (сопротивления), в котором у системы имеется два притягивающих стационарных режима (один — «высокоскоростной», второй — «низкоскоростной»). При изменении внешней нагрузки возникает гистерезис выходной мощности (и угловой скорости ветротурбины).
9. Для малых автономных ветроэнергетических установок с горизонтальной осью вращения в случае, когда электро-механическое взаимодействие является нелинейным, семейство стационарных режимов претерпевает перестройку, когда величина скорости потока проходит через некоторое критическое значение. Если скорость меньше этого критического значения, то существует диапазон значений нагрузочного сопротивления, в котором стационарный «высокоскоростной» режим отсутствует; если же скорость больше этого критического значения, то стационарный «высокоскоростной» режим существует при всех значениях сопротивления.
10. Если в ветроэнергетическую установку, рабочий элемент которой представляет собой плохообтекаемое тело, совершающее галопирование в потоке среды, добавить еще одно тело (материальную точку), пружинно соединенное с первым телом и с неподвижным основанием, то при над-



лежащем выборе параметров критическая скорость потока, при которой возникает галопирование, уменьшится, а средняя мощность, производимая при установившихся колебаниях системы, возрастет.

11. В ветроэнергетической установке, рабочим элементом которой является упруго закрепленный аэродинамический маятник, точка подвеса которого может двигаться вдоль неподвижной прямой, максимум безразмерного коэффициента выходной мощности (по нагрузке) немонотонно зависит от расстояния от точки подвеса до центра масс: при смещении центра масс в сторону крыла этот максимум вначале возрастает, а затем начинает уменьшаться. Увеличение момента инерции маятника приводит к дестабилизации тривиального равновесия, а его уменьшение — к стабилизации этого равновесия и исчезновению предельных циклов в достаточно широком диапазоне значений скорости потока.

**Достоверность и обоснованность.** Все положения, выносимые на защиту, получены с использованием строгих математических методов. Ряд результатов подтвержден экспериментами (натурными либо вычислительными).

**Апробация работы.** Основные результаты работы прошли апробацию на ряде международных и всероссийских конференций, в том числе:

1. Международная научная конференция по механике «Третьи Поляховские чтения», 2003.
2. IX Международная Четаевская конференция «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением», 2007.
3. X Международный семинар им. Е.С. Пятницкого «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления», 2008.

4. Международная научная конференция по механике «Шестые Поляховские чтения», 2012.
5. 9th International Conference on mathematical problems in engineering, aerospace and sciences (ICNPAA 2012), 2012.
6. Вторая международная научная конференция «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений». КРСУ. Бишкек. 2013.
7. XVIII Всероссийская конференция «Современные проблемы аэрогидродинамики», 2016.
8. XI Международная Четаевская конференция «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением», 2017.
9. Международная конференция «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация», 2018.
10. Международная научная конференция по механике «Восьмые Поляховские чтения», 2018.
11. International Conference on Nonlinear Solid Mechanics, 2019.
12. 11th, 14th, 15th, 16th International conference «Dynamical Systems: Theory and Applications» (2011, 2017, 2019, 2021, Lodz, Poland).
13. Международная научная конференция «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация», 2021.
14. XI, XII, XIII Всероссийские съезды по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, Уфа, Санкт-Петербург, 2015, 2019, 2023).
15. 9th International Congress of the Serbian Society of Mechanics, 2023.

Кроме того, результаты были представлены на следующих научных семинарах:

1. Семинар по аналитической механике и теории устойчивости под руководством проф. А.А. Зобовой и проф. Е.И. Кугушева (механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова)
2. Семинар имени А.Ю. Ишлинского по прикладной механике и управлению под руководством профессора В.В. Александрова (механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова)
3. Семинар отдела механики под руководством академика В.В. Козлова, академика Д.В. Трещева и чл.-корр. С.В. Болотина (Математический институт имени В.А. Стеклова РАН)
4. Семинар по механике систем им. академика А.Ю. Ишлинского при Научном совете РАН по механике систем под руководством академика В.Ф. Журавлева и академика Д.М. Климова (Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН)

Исследования были проведены, в том числе, в рамках поддержанных грантами проектов, в которых соискатель выступал в качестве руководителя (РФФИ 14-08-01130, 17-08-01366, РФФИ 22-29-00472) или основного исполнителя (РФФИ 03-01-00190, 08-08-00390, 11-08-00444, 12-01-00364, 15-01-06970 и др.).

**Публикации.** Основные результаты диссертации изложены в 32 работах, 26 из которых опубликованы в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах WoS, Scopus и RSCI и 1 — в журнале из списка ВАК.

**Личный вклад автора.** Диссертация подготовлена на основе работ, опубликованных соискателем лично или в соавторстве. Научный консультант, проф. В.А. Самсонов, участвовал в постановке ряда задач о динамике поступательного дви-

жения крыла в потоке и обсуждении результатов. П.Р. Андронову принадлежат результаты гидродинамического моделирования динамики однозвенного аэродинамического маятника с помощью модифицированного метода дискретных вихрей. Кобрину А.И. принадлежит математическая модель электрической части этой установки в случае линейного электромеханического взаимодействия. Другие соавторы принимали участие в подготовке и проведении экспериментов, в обработке экспериментальных данных, а также в проведении расчетов на базе математических моделей, разработанных соискателем.

Вклад соискателя в работы, опубликованные в соавторстве (согласно списку «Публикаций автора по теме диссертации в журналах, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus или RSCI»), характеризуется следующим образом. В статьях [1, 2, 4] вклад соискателя составляет 90%; он состоит в постановке задачи (совместно с В.А. Самсоновым) и проведении всех аналитических и численных исследований. В работах [3, 5, 6] вклад соискателя составляет 70% и заключается в постановке задачи, планировании экспериментов, проведении аналитического и численного исследования динамики рассматриваемых систем. В статье [7] вклад соискателя составляет 35% и заключается в исследовании динамики горизонтально-осевой ветроэнергетической установки. В работе [8] вклад автора составляет 60% и состоит в постановке задачи, проведении аналитических исследований и численного моделирования, а также планировании вычислительного эксперимента. В статье [9] вклад соискателя составляет 90% и заключается в постановке задачи, разработке модели электромеханического взаимодействия, проведении аналитических исследований и численного моделирования. В работах [10, 11, 13, 16] вклад соискателя составляет 30% и заключается в постановке задачи, выборе метода исследования, планировании экспериментов и обсуждении результатов. Эти статьи подготовлены в соавторстве с Голубом А.П. по результатам его диссертационной работы (соискатель являлся одним из его научных руководителей). В ста-

тье [14] вклад соискателя составляет 90%; соискателю принадлежит идея исследования, а также все аналитические и численные результаты. В работе [17] вклад соискателя составляет 40%; ему принадлежит постановка задачи, а также аналитическое и численное исследование стационарных режимов системы в случае нелинейного электромеханического взаимодействия. В статьях [19, 24] вклад соискателя составляет 50% и заключается в постановке задачи и проведении аналитических исследований.

Соискатель провел значительную работу над текстом всех статей и осуществлял переписку с редакторами и рецензентами.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации — 263 страницы, в том числе 74 рисунка. Список литературы содержит 202 наименования.

## Содержание работы

Во **введении** дана общая характеристика диссертационной работы и сформулирована ее цель, обоснована актуальность исследований и их научная новизна. Приведены сведения об апробации результатов и их публикации. Проведен детальный обзор литературы, посвященной различным аспектам моделирования взаимодействия твердого тела с потоком среды, а также по вопросам описания динамики ветроэнергетических установок различных типов. Кроме того, в этом разделе содержится обзор исследований, направленных на изучение влияния различных типов сил на характер устойчивости равновесия.

В **первой главе** обсуждаются различные подходы к описанию аэродинамических сил и моментов, действующих на тело со стороны потока сопротивляющейся среды. Отмечена целесообразность использования при моделировании динамики

систем, содержащих тело, движущееся в потоке среды, упрощенных феноменологических подходов, которые позволяют записать уравнения движения в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Это дает возможность использовать различные инструменты качественного анализа, эффективно проводить параметрический анализ и т.д. Достаточно подробно описываются два таких подхода. Первый — известный из литературы квазистатический подход. Второй — модель присоединенного осциллятора, предложенная соискателем в его кандидатской диссертации. Эта модель позволяет уточнить квазистатический подход в случае движения крыла с симметричным профилем в потоке среды при малых углах атаки. В рамках этого подхода к крылу присоединяется (в центре давления) осциллятор, который может колебаться в направлении, перпендикулярном хорде крыла. Предполагается, что аэродинамическое воздействие сводится к нормальной силе (силе, перпендикулярной хорде крыла), причем эта сила приложена к осциллятору, и угол атаки рассчитывается с учетом движения осциллятора. Эта модель позволяет учесть нестационарные эффекты, обусловленные инерционными свойствами среды.

Для случая, когда крыло совершает поступательное движение поперек потока, на основе модели присоединенного осциллятора уравнение движения крыла представлено в интегро-дифференциальной форме. Отмечена аналогия между этим уравнением и уравнением движения, полученным в работах школы С.М. Белоцерковского, в которых предыстория воздействия потока на тело описывается с помощью интеграла Дюамеля с экспоненциальным ядром.

Рассмотрен также случай «медленного» поступательного движения крыла поперек потока и показано, что в этом случае в правой части уравнения динамики крыла можно выделить член, пропорциональный ускорению крыла. При этом коэффициент пропорциональности для типичных тонких крыловых профилей оказывается положительным, что означает, что

в этой ситуации можно говорить не о «присоединении», а об «отсоединении» массы.

Во **второй** главе рассматривается линейная голономная система и анализируется влияние изменения диагонального элемента матрицы потенциальных сил на устойчивость положения равновесия. Интерес к этой задаче связан с тем, что для многих технических объектов можно сравнительно легко изменить жесткость по одной из обобщенных координат. Поэтому проведение соответствующего параметрического анализа представляется целесообразным. В то же время, аэродинамические силы вносят вклад во все виды сил (потенциальные, позиционные неконсервативные, диссипативные, гироскопические), причем соответствующие диссипативные силы зачастую имеют неполную диссипацию.

Установлено, что для голономной системы с  $s$  степенями свободы при изменении диагонального элемента матрицы потенциальных сил от  $-\infty$  до  $+\infty$  характер устойчивости равновесия может измениться не более чем  $2s - 1$  раза. Кроме того, для любого конечного  $s$  построена такая система с  $s$  степенями свободы (т.е. выбраны коэффициенты в матрицах сил), что при указанном изменении матрицы потенциальных сил характер устойчивости изменяется ровно  $2s - 1$  раза.

Более подробно рассмотрен случай системы с двумя степенями свободы. В этом случае уравнения, линеаризованные в окрестности равновесия, могут быть представлены в следующем виде:

$$\ddot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{pmatrix} \mathbf{q} + \nu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{q} + \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{q} = 0 \quad (1)$$

Получен набор условий на коэффициенты матриц сил, при выполнении которых характер устойчивости равновесия меняется три раза (т.е. максимально возможное число раз), когда величина  $\kappa$  пробегает все значения от 0 до  $+\infty$ . При

этом последовательность изменений такова: неустойчивость  $\rightarrow$  асимптотическая устойчивость  $\rightarrow$  неустойчивость  $\rightarrow$  асимптотическая устойчивость.

Кроме того, получены три набора условий на коэффициенты матриц сил, при выполнении любого из которых характер устойчивости равновесия меняется дважды, когда  $\kappa$  пробегает все значения от 0 до  $+\infty$ .

Показано, что эффект «чередования» характера устойчивости может возникать в случае, когда в системе имеется неполная диссипация (в том числе, в отсутствие циркуляционных и гироскопических сил). Кроме того, этот эффект может возникать в случае, когда в системе имеется полная диссипация, но присутствуют позиционные неконсервативные силы.

Кроме того, отмечено, что увеличение величины  $\kappa$  (т.е. жесткости по одной из обобщенных координат) при определенных условиях может привести к дестабилизации равновесия, что представляется несколько неожиданным.

В качестве примера механической системы, иллюстрирующий эффект «чередования» характера устойчивости, рассмотрен двухзвенный аэродинамический маятник (рис. 1). Звенья этого маятника представляют собой твердые стержни, которые могут двигаться в горизонтальной плоскости. На втором звене закреплено крыло с симметричным профилем, причем хорда профиля лежит на этом звене. В точке подвеса первого звена находится спиральная пружина. Маятник помещен в стационарный горизонтальный поток среды. Предполагается, что пружина недеформирована, когда первое звено вытянуто вдоль потока. Из соображений симметрии очевидно, что положение, при котором оба звена ориентированы вдоль потока, является положением равновесия.

Для описания аэродинамического воздействия на крыло используется квазистатический подход. При этом предполагается, что это воздействие сводится к силе лобового сопротивления и подъемной силе, приложенным в середине  $C$  хорды профиля, и аэродинамическому моменту относительно этой точки.



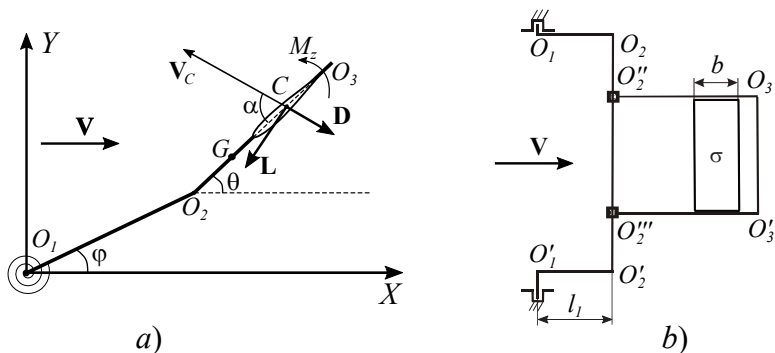


Рис. 1. Схема двухзвенного аэродинамического маятника с пружиной на первом звене: а) вид сверху; б) вид сбоку.

Пусть момент инерции первого звена достаточно велик и, кроме того, расстояние  $r$  от шарнира между звеньями до точки  $C$  удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\frac{bC_m^\alpha}{C_l^\alpha + C_{d0}} < r < l_2 + \frac{J_2}{ml_2}, \quad (2)$$

где  $m$  — масса второго звена,  $J_2$  — центральный момент второго звена,  $l_2$  — расстояние от межзвенного шарнира до центра масс второго звена,  $b$  — длина хорды профиля,  $C_{d0}$ ,  $C_l^\alpha$ ,  $C_m^\alpha$  — значение коэффициента подъемной силы, производных коэффициентов подъемной силы и аэродинамического момента по углу атаки  $\alpha$  при  $\alpha = 0$ , соответственно.

Тогда существуют два значения  $k_{1,2}$  коэффициента жесткости пружины крепления, такие, что при  $0 < k < k_1$  и  $k > k_2$  имеет место асимптотическая устойчивость, а при  $k_1 < k < k_2$  — неустойчивость. Таким образом, при изменении  $k$  от 0 до  $+\infty$  характер устойчивости равновесия «по потоку» меняется дважды.

Для проверки существования эффекта потери устойчивости равновесия при увеличении коэффициента жесткости пружины в НИИ механики МГУ было проведено экспериментальное исследование. В его рамках был изготовлен двухзвенный

маятник, который был затем помещен в дозвуковую аэродинамическую трубу А6 (рис. 2). При этом была предусмотрена возможность установки в первом шарнире маятника пружин с различной жесткостью. Была проведена серия экспериментов, в которых изменялась жесткость пружины и скорость набегающего потока. Положение звеньев маятника регистрировалось с помощью высокоскоростной видеокамеры.



Рис. 2. Двухзвенный маятник, установленный в аэродинамической трубе.

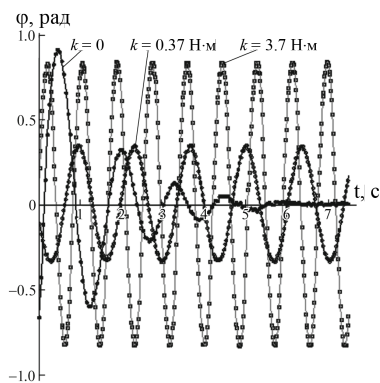


Рис. 3. Зависимость угла поворота первого звена от времени при разных значениях коэффициента жесткости пружины.

На рис. 3 приведены экспериментальные зависимости от времени угла  $\varphi$  (угла отклонения первого звена от направления потока) при разных значениях коэффициента  $k$  жесткости пружины крепления. Видно, что при  $k = 0$  (пружина отсутствует) положение «по потоку» асимптотически устойчиво. Однако при увеличении  $k$  устойчивость теряется и возникает колебательный режим.

Таким образом, имеет место потеря устойчивости при увеличении жесткости по одной из обобщенных координат.

В **третьей** главе обсуждаются некоторые эффекты, возникающие при движении тела (тонкого крыла) в потоке среды в случае, когда тело имеет одну степень свободы. При этом предполагается, что движение является достаточно медленным,

а угол между хордой крыла и скоростью набегающего потока (т.е. угол атаки) мал. При этом безразмерный коэффициент  $C_n$  нормальной аэродинамической силы линейно зависит от мгновенного угла атаки:  $C_n(\alpha) = C_n^\alpha \alpha$ . Это дает возможность использовать модель присоединенного осциллятора, которая более точно описывает взаимодействие потока с крылом, чем квазистатический подход. Отметим, что задачи рассматриваются в линейной постановке.

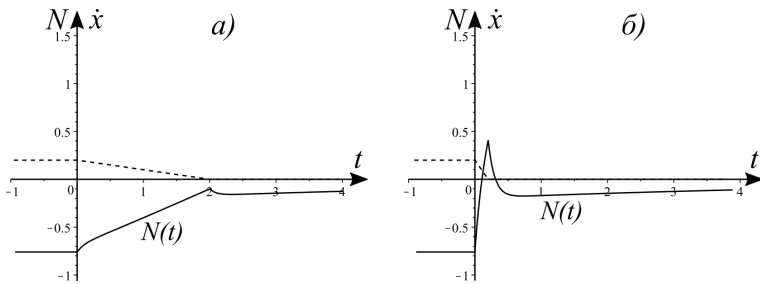


Рис. 4. Зависимость нормальной силы  $N$  от времени при равномерном торможении крыла: а) ускорение меньше  $a_*$ ; б) ускорение больше  $a_*$ .

В первом разделе этой главы рассматривается поступательное движение крыла в направлении поперек потока. Проанализирован случай равномерного поступательного торможения крыла от некоторой начальной скорости вплоть до остановки. Показано, что если коэффициент демпфирования  $h$  присоединенного осциллятора больше  $C_n^\alpha$ , то существует единственное критическое значение  $a_*$  ускорения крыла, при котором аэродинамическая сила, действующая на крыло, в процессе торможения обращается в нуль один раз. При меньших значениях ускорения направление этой силы остается неизменным во время торможения и последующего релаксационного процесса. При больших значениях ускорения эта сила меняет направление, причем дважды: один раз на этапе торможения, второй раз — на этапе последействия (когда крыло уже остановилось). Это проиллюстрировано на рис. 4, где пунктиром изображена зависимость скорости от времени, а сплошной ли-

нией — зависимость нормальной силы от времени (все величины безразмерные). Интересно, что при этом на этапе торможения имеется интервал времени, когда аэродинамическая сила стремится не остановить крыло, а, наоборот, разогнать его.

Рассмотрен также случай, когда крыло, движущееся поступательно поперек потока, тормозится только аэродинамической силой. Показано, что если масса крыла превосходит некоторое критическое значение  $M_*$ , то в конце процесса торможения крыло сместится относительно своего положения на момент начала торможения в ту сторону, в которую направлена начальная скорость. Если же масса крыла меньше  $M_*$ , то крыло в итоге сместится в противоположную сторону. В частности, отсюда следует, что «легкое» крыло в процессе торможения меняет направление движения.

Наконец, рассмотрена задача о поступательных колебаниях упруго закрепленного крыла. Проведено сопоставление колебаний крыла, полученных с помощью модели присоединенного осциллятора, с результатами расчетов в рамках квазистатического подхода и результатов гидродинамического моделирования<sup>1</sup>. Показано, что расчеты по модели присоединенного осциллятора достаточно хорошо согласуются с расчетами из указанной работы. Даны оценки области применимости квазистатического подхода.

Во втором разделе третьей главы рассматривается задача о движении однозвенного аэродинамического маятника (рис. 5). Этот маятник представляет собой шарнирно закрепленный твердый стержень-державку, на котором закреплено крыло с симметричным профилем, причем хорда его лежит на стержне. Ось вращения маятника вертикальна, так что его колебания определяются только аэродинамическим воздействием (сводящимся к нормальной аэродинамической силе, приложенной в центре давления).

---

<sup>1</sup> Белоцерковский С.М. и др. Линейные и квазилинейные задачи динамики жесткого аппарата с отклоняющимися рулями // Труды ВВИА им. Жуковского. — 1971. — № 1302. — С. 110–146.

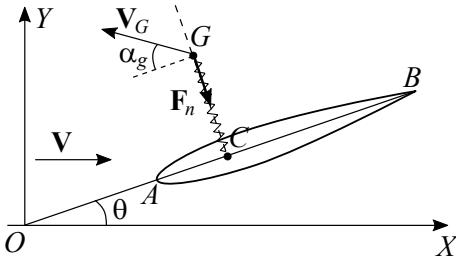


Рис. 5. Однозвенный аэродинамический маятник с присоединенным осциллятором.

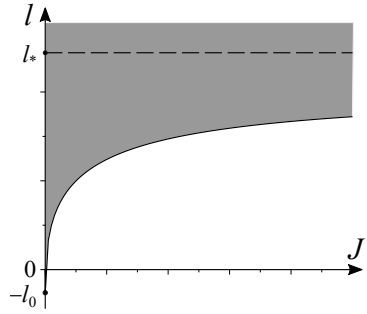


Рис. 6. Область асимптотической устойчивости (выделена серым)

Из соображений симметрии ясно, что положение «вдоль потока» является положением равновесия. Получены достаточные условия асимптотической устойчивости этого равновесия в рамках модели «присоединенного осциллятора». Обозначим через  $l$  расстояние от точки подвеса  $O$  до носика  $A$  крыла, через  $l_0$  — расстояние от носика до центра давления  $C$ , в котором прикреплен присоединенный осциллятор. Тогда если  $l + l_0 < 0$ , т.е. центр давления расположен выше по потоку, чем точка подвеса, то имеет место неустойчивость (как и в квазистатической модели). Если  $l + l_0 > l_* = \rho S V^2 C_n^\alpha / 2k$  (где  $\rho$  — плотность среды,  $S$  — площадь крыла,  $V$  — скорость потока,  $C_n^\alpha$  — производная коэффициента нормальной силы по углу атаки  $\alpha$  при  $\alpha = 0$ , а  $k$  — коэффициент жесткости пружины осциллятора), то имеет место асимптотическая устойчивость. Если же  $0 < l + l_0 < l_*$ , то характер устойчивости зависит от момента инерции  $J$  маятника: при  $J$ , меньших некоторого критического значения  $J_*$ , равновесие асимптотически устойчиво, а при  $J > J_*$  оно неустойчиво. Этот эффект не описывается квазистатической моделью, в которой достаточным условием асимптотической устойчивости является неравенство  $l + l_0 > 0$ .

Результаты расчетов на базе модели присоединенного осциллятора были сопоставлены с результатами гидродинамического моделирования, проведенного сотрудниками лаборатор-

рии аэромеханики и волновой динамики НИИ механики МГУ с применением модифицированного метода дискретных вихрей. Моделирование проводилось для разных симметричных профилей, разных длин державки и разных значений плотности материала крыла. При этом для сокращения времени расчетов предполагалось, что при  $t < 0$  маятник был ориентирован «по потоку», а при  $t \geq 0$  к середине хорды прикладывалась постоянная по модулю сила, нормальная к хорде. Наличие постоянной силы, в силу линейности системы уравнений движения, очевидно, приводит лишь к смещению положения равновесия, но не влияет на характер устойчивости.

На рис. 7 и 8 представлены результаты гидродинамического моделирования (кривые с индексом 1), расчетов по модели присоединенного осциллятора (кривые с индексом 2) и расчетов по квазистатической модели (кривые с индексом 3) для крыла со стандартным симметричным профилем NACA0012. Длина державки лежит в промежутке  $(0, C_n^\alpha/k)$ .

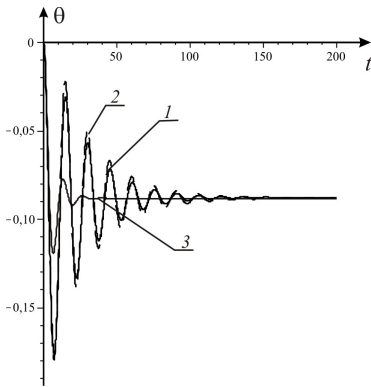


Рис. 7. Случай  $J < J_*$  — асимптотическая устойчивость.

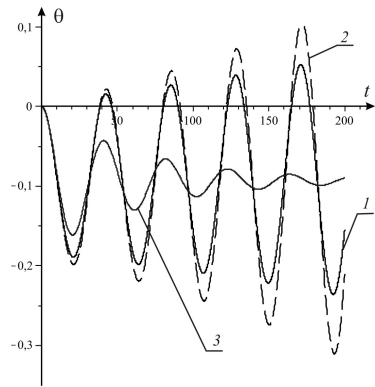


Рис. 8. Случай  $J > J_*$  — неустойчивость.

Видно, что результаты, полученные с помощью модели присоединенного осциллятора, достаточно хорошо согласуются с данными гидродинамического моделирования. В то же время, точность квазистатической модели в этой ситуации ока-

зывается не очень высокой.

**Четвертая** глава посвящена обсуждению динамики нескольких электромеханических систем, моделирующих малые ветроэнергетические установки различных типов. Поскольку при движении в потоке тел, представляющих собой рабочие элементы этих установок, мгновенные углы атаки изменяются в достаточно широком диапазоне, для моделирования аэродинамического воздействия используется квазистатический подход. Особенностью таких установок является то, что они не подключены к стандартной электрической сети и предназначены для питания ограниченного количества потребителей, включенных в автономную электрическую сеть. При этом необходимо учитывать влияние этих потребителей на динамику установки.

В первом разделе этой главы изучается динамика малой ветроэнергетической установки с горизонтальной осью вращения (рис. 9). Ветроустановка, являющаяся рабочим элементом этого устройства, приводит во вращение вал электрогенератора. В цепь ротора генератора включена полезная нагрузка, моделируемая активным сопротивлением.

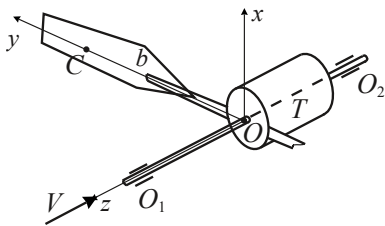


Рис. 9. Ветроустановка с горизонтальной осью вращения.

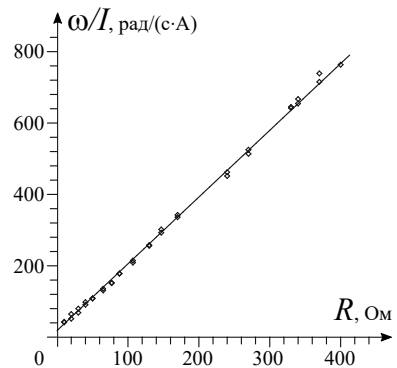


Рис. 10. Характеристика линейного генератора: точки — эксперимент, линия — расчет в рамках линейной модели электромеханического взаимодействия.

Для описания аэродинамического момента, действующего

на лопасти турбины, используется квазистатический подход. В его рамках предполагается, что безразмерный коэффициент  $C_m$  аэродинамического момента зависит только от быстроходности  $\Omega = b\omega/V$  (здесь  $\omega$  — угловая скорость турбины,  $b$  — радиус лопасти,  $V$  — скорость потока).

Пусть генератор работает на постоянных магнитах и выдает постоянный ток. Для ряда генераторов электромеханическое взаимодействие можно считать линейным, так что ЭДС  $\mathcal{E}$ , создаваемая генератором, и момент  $M_{el}$  электромагнитных сил, действующих со стороны генератора на вал турбины, определяются следующими формулами:

$$\mathcal{E} = \kappa\omega, \quad M_{el} = -\kappa I \quad (3)$$

Здесь  $\kappa$  — некоторый постоянный коэффициент.

На рис. 10 точками изображена зависимость отношения  $\omega/I$  от  $R$ , полученная в результате экспериментов с генератором, изготовленным в Национальном университете Cheng Kung (Тайвань). В этих экспериментах вал генератора приводился во вращение с помощью двигателя, и при различных значениях нагрузочного сопротивления измерялся ток в цепи. Линией показаны результаты расчетов, проведенных в рамках линейной модели электромеханического взаимодействия. Видно, что имеет место достаточно хорошее совпадение.

Установлено, что при больших и малых значениях  $R$  у системы имеется одно стационарное решение. При больших величинах сопротивления быстроходность  $\Omega$  на стационарном решении велика (высокоскоростной рабочий режим). При малых  $R$  быстроходность на стационарном решении мала (низкоскоростной режим). Однако в некотором интервале значений сопротивления (обозначим его  $(R_l; R_u)$ ) одновременно существует три стационарных режима: высокоскоростной, низкоскоростной и «промежуточный». Следует отметить, что в этом интервале сопротивлений, как правило, достигается максимум выходной мощности. Получены условия на параметры системы, при которых высокоскоростной и низкоскоростной режи-



мы являются асимптотически устойчивыми. Промежуточный режим при этом является неустойчивым.

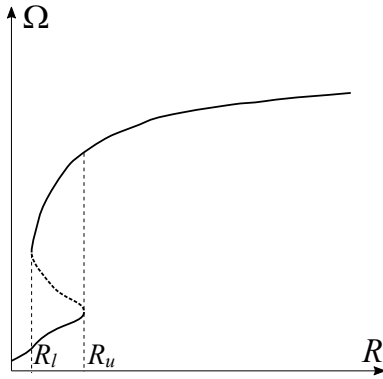


Рис. 11. Быстроходность на стационарном режиме в зависимости от  $R$ .

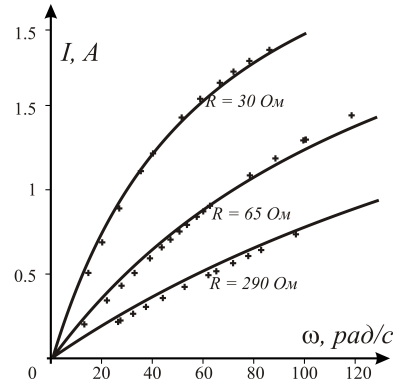


Рис. 12. Характеристика нелинейного генератора: точки — эксперимент, линия — расчет в рамках модели (4).

Зависимость быстроходности на стационарном решении от  $R$  качественно изображена на рис. 11. Таким образом, что в системе имеет место гистерезис угловой скорости на стационарном режиме (и, следовательно, выходной мощности) при изменении нагрузочного сопротивления. Данный эффект подтверждается экспериментами, проведенными в аэродинамических трубах НИИ механики МГУ и университета Чин Юнь (Тайвань).

Рассмотрена также динамика системы в ситуации, когда характеристики электрического генератора таковы, что электромеханическое взаимодействие не является линейным. Для описания ЭДС и электромагнитного момента в этом случае предложена следующая модель:

$$\mathcal{E} = \kappa\omega - \chi\omega I, \quad M_{el} = -\kappa I + \chi I^2 \quad (4)$$

Здесь  $\chi$  — некоторый постоянный коэффициент, характеризующий нелинейность электромеханического взаимодействия.

На рис. 12 точками показаны экспериментальные зависимости тока от угловой скорости вала для другого генератора (входящего в состав ветроэнергетической установки производства тайваньской компании Superb Electric Co) при разных значениях нагрузочного сопротивления (в этих экспериментах вал генератора также приводился во вращение с помощью двигателя), а линиями — результаты расчетов на основе модели (4). Видно, что имеет место достаточно хорошее согласие расчета с экспериментом.

Для стационарных режимов, реализующихся в такой системе, построены бифуркационные диаграммы, в которых в качестве параметра выступает внешнее сопротивление (рис. 13). В результате проведенного анализа показано, что эта качественная структура этих диаграмм определяется соотношением между величинами  $\kappa^2/(4\chi)$  и  $M_a^{max}$  (здесь  $M_a^{max}$  — максимальное значение аэродинамического момента как функции угловой скорости турбины).

Пусть  $M_a^{max} < \kappa^2/(4\chi)$ . Тогда устойчивый высокоскоростной стационарный режим существует в некотором интервале  $R \in (R_1, \infty)$ , а устойчивый низкоскоростной режим — в интервале  $R \in (0, R_2)$  (причем  $R_1 < R_2$ ). В интервале  $R \in (R_1, R_2)$  существует также неустойчивый режим. Если при этом внутреннее сопротивление генератора достаточно мало, то существует интервал  $(0, R_3)$  (причем  $R_3 < R_1$ ), в котором имеется еще одна пара режимов — один устойчивый высокоскоростной режим и один неустойчивый режим. В этой ситуации можно за счет управления нагрузочным сопротивлением переводить систему с высокоскоростного режима на низкоскоростной и наоборот.

Пусть теперь  $M_a^{max} > \kappa^2/(4\chi)$  (отметим, что, поскольку момент пропорционален квадрату скорости, это неравенство не выполняется при малых значениях  $V$  и выполняется при достаточно больших значениях  $V$ ). Тогда устойчивый высокоскоростной режим существует при всех  $R > 0$ . Кроме того, в интервале  $R \in (0, R_4)$  существует еще одна пара режимов:

устойчивый низкоскоростной и неустойчивый. В этом случае перейти с высокоскоростного режима на низкоскоростной за счет управления сопротивлением невозможно.

Здесь  $\chi$  — некоторый постоянный коэффициент, характеризующий нелинейность электромеханического взаимодействия. Для проверки этого эффекта были проведены эксперименты в

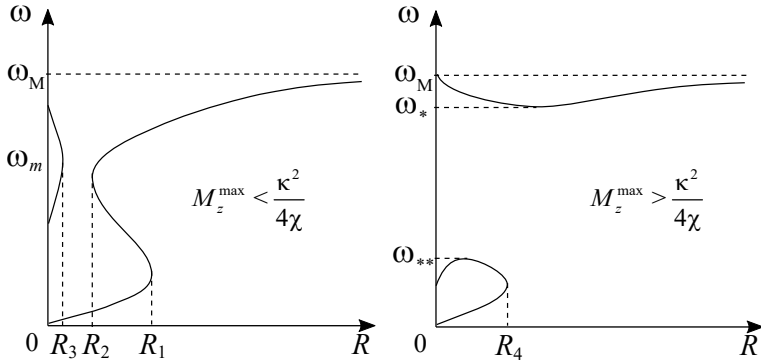


Рис. 13. Стационарные режимы ветроэнергетической установки с горизонтальной осью вращения в случае нелинейного электромеханического взаимодействия.

дозвуковой аэродинамической трубе А6 НИИ механики МГУ. В ходе этих экспериментов испытывалась ветротурбина пропеллерного типа, соединенная с генератором П (на постоянных магнитах). В цепь генератора было подключено в качестве нагрузки активное сопротивление. В результате экспериментов была получена зависимость угловой скорости и вырабатываемого тока от нагрузочного сопротивления при разных скоростях потока. Экспериментальные значения угловой скорости представлены на точках рис. 14. Сплошными линиями на этом рисунке изображены результаты расчетов по предложенной модели (необходимые параметры и зависимости были идентифицированы в ходе специальных дополнительных экспериментов).

Таким образом, предложенная замкнутая модель малой ветроэнергетической установки дает достаточно точное описа-

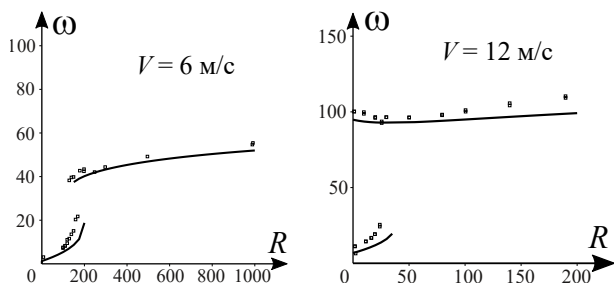


Рис. 14. Угловая скорость на стационарных режимах в зависимости от  $R$  при разных скоростях потока.

ние особенностей динамики этой системы, наблюдающихся в экспериментах.

Во втором разделе четвертой главы рассматриваются ветроэнергетические установки другого типа — установки, в которых рабочий элемент под воздействием потока совершает колебательные, а не ротационные движения.

Первый пункт этого раздела посвящен ветроэнергетической установке колебательного типа, в которой колебания вызываются эффектом галопирования. Рассматривается аэроупругая система, состоящая из квадратного параллелепипеда  $M_2$  и материальной точки  $M_1$ , которые могут двигаться поступательно вдоль горизонтальной оси  $OY$  (см. рис. 15). Параллелепипед и точка соединены пружиной. Кроме того,  $M_1$  прикреплена пружиной к неподвижной точке  $O$ . К параллелепипеду жестко прикреплен магнит  $M_3$ , который может двигаться внутри катушки индуктивности. Катушка включена в электрическую цепь, которая также содержит нагрузочное сопротивление  $R_l$ . При движении призмы магнит движется внутри катушки, и в цепи индуцируется электрический ток (эта схема представляет собой простейший линейный электрогенератор). Тело  $M_2$  находится в горизонтальном стационарном потоке воздуха. Скорость потока равна  $V$  и перпендикулярна оси  $OY$ . Такая конфигурация системы отличается от рассмотренных в литературе наличием электрического контура и тем, что аэро-

динамическое воздействие приложено к первому телу (которое непосредственно связано с неподвижным основанием).

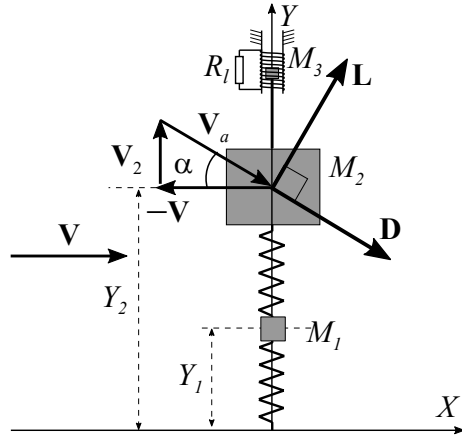


Рис. 15. Ветроэнергетическая установка, использующая эффект галопирования.

Проводится сравнение поведения этой системы с поведением системы, в которой содержится только одно подвижное тело (параллелепипед) с такой же общей массой.

Вводятся следующие упрощающие предположения: масса тел  $M_1$  и  $M_2$  значительно больше, чем масса среды в объеме параллелепипеда (это представляется естественным в случае, если тела движутся в воздухе), коэффициенты демпфирования пружин малы, коэффициент индуктивности и безразмерный коэффициент электромеханического взаимодействия также малы (эти предположения основаны на данных, приведенных в литературе<sup>2</sup>).

Проведено аналитическое исследование устойчивости тривиального равновесия системы (другие равновесия отсутствуют). Показано, что это положение неустойчиво, если величина скорости потока превышает некоторое критическое значение

<sup>2</sup> Dai H., Yue X., Xie D., Atluri S.N. Chaos and chaotic transients in an aeroelastic system // Journal of Sound and Vibration. — 2014. — Vol. 333, No. 26. — P. 7267–7285.

(разумеется, зависящее от других параметров). Показано также, что если удовлетворяется определенное неравенство, связывающее демпфирование в пружинах, то имеется такое значение отношения коэффициентов жесткости пружин крепления, при котором эта критическая скорость минимальна, и это минимальное значение меньше, чем для системы с одной подвижной массой. Если же это неравенство не удовлетворяется, то критическая скорость для системы с двумя массами меньше, чем для системы с одной массой, при любых значениях коэффициентов жесткости пружин. Таким образом, диапазон скоростей потока, в которых рабочий элемент установки будет колебаться (и, следовательно, энергия потока будет преобразовываться в электричество), расширяется.

Если скорость потока и коэффициенты демпфирования удовлетворяют определенным условиям, то в системе наблюдается эффект чередования характера устойчивости равновесия, описанный в главе 2. При увеличении коэффициента жесткости любой из пружин крепления от нуля до бесконечности характер устойчивости меняется следующим образом: асимптотическая устойчивость — неустойчивость — асимптотическая устойчивость. Это проиллюстрировано на рис. 16, где  $k_{1,2}$  — безразмерные коэффициенты жесткости пружин, а область неустойчивости показана серым цветом. Интересно, что возможна ситуация, при которой увеличение жесткости обеих пружин приводит к дестабилизации равновесия (переход из точки  $A$  в точку  $B$  на рисунке).

С учетом сделанных предположений о малости параметров методом гармонического баланса получены аппроксимационные формулы для амплитуд и частоты колебаний тел в системе. Показано, что в системе может существовать до двух циклов, отвечающих гармоническим колебаниям тел в системе. Дана оценка средней мощности за период. Показано, что при выполнении определенных условий на параметры в системе существует цикл, на котором вырабатываемая мощность больше, чем в системе с одной подвижной массой. Проведено числен-

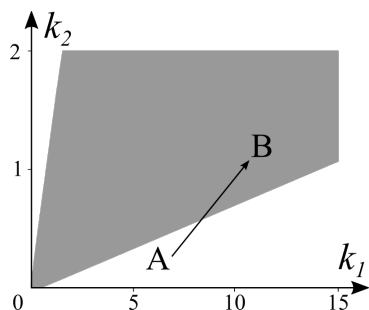


Рис. 16. Область неустойчивости в зависимости от параметров системы.

ное моделирование динамики системы и исследованы характеристики установившихся колебательных режимов при разных значениях параметров. Некоторые результаты представлены на рис. 17, где изображены зависимости безразмерной амплитуды  $A_{y2}$  колебаний параллелепипеда и безразмерной средней мощности  $P$  на периоде от логарифма величины  $k = k_2/k_1$  (отношения коэффициентов жесткости пружин) при разных значениях скорости потока. Точками изображены результаты чис-

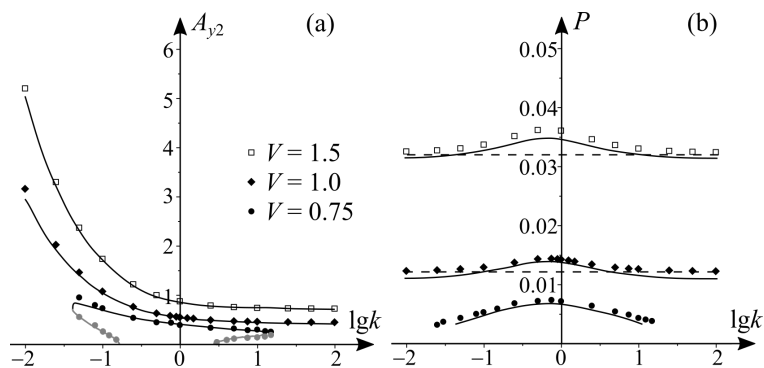


Рис. 17. Характеристики предельных циклов в зависимости от параметров  $k$  и  $V$ : а) амплитуда колебаний параллелепипеда; б) средняя мощность на периоде.

ленного интегрирования, сплошными линиями — расчет на основе полученных аппроксимационных формул, пунктир — величина мощности, вырабатываемой в системе с одной подвиж-

ной массой. Серым цветом изображены неустойчивые циклы, черным — устойчивые. Расчет мощности проводился только для устойчивых циклов.

Видно, что аппроксимационные формулы достаточно хорошо описывают зависимость амплитуды от параметра  $k$ .

Таким образом, надлежащий выбор значения  $k$  позволяет как расширить диапазон рабочих скоростей установки, так и заметно увеличить вырабатываемую мощность по сравнению с системой, содержащей одну подвижную массу.

В последнем пункте четвертой главы рассматривается ветроэнергетическая установка колебательного типа, рабочим элементом которой является однозвенный аэродинамический маятник, точка подвеса которого упруго закреплена и может перемещаться вдоль горизонтальной прямой (рис. 18). На державке маятника установлено крыло с симметричным профилем. Движение маятника осуществляется в горизонтальной плоскости. Вся конструкция помещена в стационарный поток среды. В точке подвеса находится спиральная пружина, ненапряженное состояние которой соответствует такому положению державки, когда она вытянута вдоль потока. К точке подвеса прикреплен постоянный магнит, который находится внутри катушки индуктивности. В цепь катушки включено в качестве полезной нагрузки активное сопротивление.

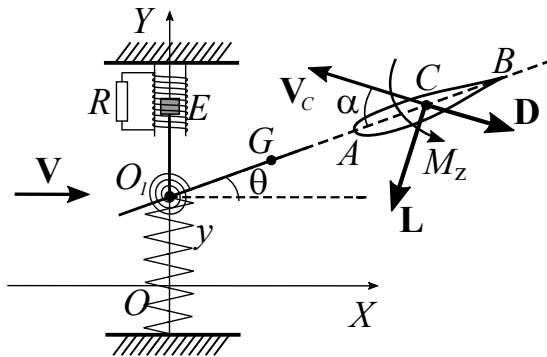


Рис. 18. Аэродинамический маятник с упруго закрепленной точкой подвеса.



В этой системе механизмом, вызывающим колебания, является флаттер.

Количество положений равновесия в этой системе зависит (при фиксированной скорости потока) от положения крыла на державке и от величины коэффициента жесткости спиральной пружины. В системе всегда существует равновесие «по потоку». Но если длина державки (понимаемая как расстояние от точки подвеса до середины хорды крыла) не слишком велика, а коэффициент жесткости достаточно мал, то положение равновесия «по потоку» является седлом и кроме него имеются «косые» положения равновесия.

Получены условия, при которых характер устойчивости равновесия («косого» или «по потоку») меняется 2 раза при изменении коэффициента жесткости пружины, соединяющей точку подвеса с неподвижным основанием (цилиндрическая пружина), от нуля до бесконечности. Таким образом, в этой задаче также возникает эффект чередования характера устойчивости при изменении жесткости по одной из обобщенных координат, описанный в главе 2.

Пусть спиральная пружина отсутствует, а цилиндрическая пружина имеет нелинейную характеристику, так что ее коэффициент жесткости  $K_y$  зависит от смещения  $y$  точки подвеса следующим образом:  $K_y(y) = k + k_3 y^2$ . В предположении, что величина  $k_3$  велика, с помощью метода гармонического баланса построены аппроксимационные формулы для частот и амплитуд предельных циклов, возникающих в системе. Показано, в частности, что при малых значениях параметра  $\chi$ , характеризующего внешнюю нагрузку, и при условии, что скорость потока не слишком велика, в системе имеется только один цикл, которому отвечают гармонические колебания маятника.

Проведено численное моделирование динамики рассматриваемой электромеханической системы при разных значениях параметра  $\chi$ , скорости  $V$  потока и расстояния  $\xi$  от точки подвеса до центра масс. Исследовано влияние этих парамет-

ров на мощность, вырабатываемую за период колебаний. Показано, что безразмерный коэффициент мощности  $C_p$  зависит от  $\chi$  немонотонно (см. рис. 19), так что при фиксированных значениях прочих параметров существует оптимальное значение нагрузки, при котором коэффициент мощности принимает максимальное значение  $C_p^{max}$ . Установлено, что величина  $C_p^{max}$

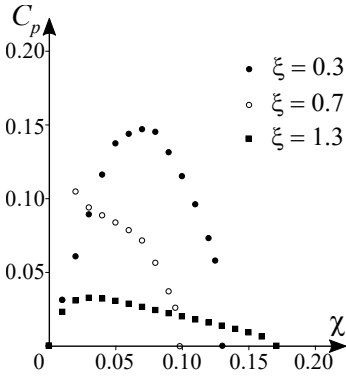


Рис. 19. Зависимость коэффициента мощности от  $\chi$  при разных значениях  $\xi$ .

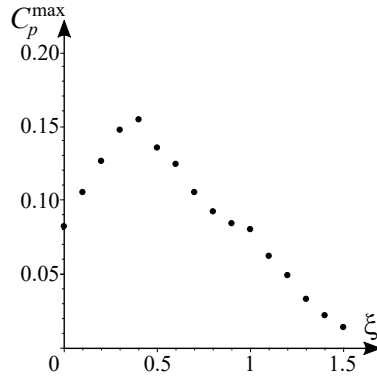


Рис. 20. Зависимость максимума коэффициента мощности от  $\xi$ .

немонотонно зависит от параметра  $\xi$ : по мере смещения центра масс от точки подвеса в сторону крыла коэффициент  $C_p$  вначале увеличивается, а затем начинает убывать (см. рис. 20).

Исследована также возможность управления колебаниями системы с помощью регулирования радиуса инерции  $r_0$  маятника. Показано, что увеличение  $r_0$  приводит к потере устойчивости равновесия «по потоку» и формированию предельного цикла, а уменьшение — к стабилизации равновесия и исчезновению циклов. Это свойство может быть полезным с технической точки зрения: его можно использовать при построении системы управления, предназначенной для защиты установки от поломки в ситуации, когда скорость ветра становится слишком большой.

В **заключении** сформулированы основные результаты и выводы, полученные в работе, а также коротко изложены воз-

возможные направления дальнейших исследований.

## Список публикаций

По результатам выполненных исследований опубликованы в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах **WebOfScience**, **Scopus** или **RSCI** следующие статьи:

1. *Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д.* О колебаниях пластины в потоке сопротивляющейся среды // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2004. — № 4. — С. 24-31. = *Samsonov V.A., Selyutskii Yu. D.* Vibration of a plate in the flow of a resisting medium // Mechanics of Solids. — 2004. — V. 39, № 4. — P. 19-25. (0,51 п.л. / авторский вклад определен; SJR 0.266)
2. *Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д.* Феноменологическая модель взаимодействия пластины с потоком среды // Фундаментальная и прикладная математика. — 2005. — Т. 11, № 7. — С. 43-62. = *Samsonov V.A., Seliutski Y.D.* Phenomenological model of interaction of a plate with a flow // Journal of Mathematical Sciences. — 2007. — Vol. 146, № 3. — P. 5826-5839. <http://doi.org/10.1007/s10958-007-0399-4>. (0,98 п.л. / авторский вклад определен; SJR 0.314)
3. *Досаев М.З., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д.* О динамике малой ветроэлектростанции // Доклады Академии наук. — 2007. — Т. 416, № 1. — С. 50-53. = *Dosaev M. Z., Samsonov V.A., Seliutski Yu.D.* On the dynamics of a small-scale wind power generator // Doklady Physics. — 2007. — V. 52, № 9. — P. 493-495. <https://doi.org/10.1134/S1028335807090091>. (0,24 п.л. / авторский вклад определен; SJR 0.283)
4. *Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д.* Сопоставление различных форм записи уравнений движения тела в потоке среды

- // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2008. — № 1. — С. 171–178. = *Samsonov V.A., Selyutskii Y.D.* Comparison of different notation for equations of motion of a body in a medium flow // Mechanics of Solids. — 2008. — V. 43, № 1. — P. 146–152. <https://doi.org/10.3103/S0025654408010159>. (0,49 п.л. / авторский вклад определен; SJR 0.266)
5. *Досаев М.З., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д., Лю В.-Л., Линь Ч.-Х.* Бифуркации режимов функционирования малых ветроэлектростанций и оптимизация их характеристик // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2009. — № 2. — С. 59–66. = *Dosaev M.Z., Samsonov V.A., Selyutskii Y.D., Lu W.-L., Lin C.-H.* Bifurcation of operation modes of small wind power stations and optimization of their characteristics // Mechanics of Solids. — 2009. — V. 44, № 2. — P. 214–221. <https://doi.org/10.3103/S002565440902006X>. (0,42 п.л. / авторский вклад определен; SJR 0.266)
6. *Досаев М.З., Линь Ч.-Х., Лю В.-Л., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д.* Качественный анализ стационарных режимов малых ветровых электростанций // Прикладная математика и механика. — 2009. — Т. 73, № 3. — С. 368–374. = *Dosaev M.Z., Lin C.-H., Lu W.-L., Samsonov V.A., Selyutskii Y.D.* A qualitative analysis of the steady modes of operation of small wind power generators // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 2009. — V. 73. — P. 259–263. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2009.07.015>. (0,31 п.л. / авторский вклад определен; SJR 0.189)
7. *Samsonov V.A., Dosaev M.Z., Selyutskiy Y.D.* Methods of qualitative analysis in the problem of rigid body motion in medium // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. — 2011. — Vol. 21, № 10. — P. 2955–2961. <https://doi.org/10.1142/S021812741103026X>. (0,54 п.л. / авторский вклад определен; SJR 0.601)

8. *Selyutskiy Y.D., Samsonov V.A., Andronov P.R.* Oscillations of aerodynamic pendulum // International Journal of Structural Stability and Dynamics. — 2013. — Vol. 13, № 7. — P. 1–7. <https://doi.org/10.1142/S0219455413400105>. (0,33 / авторский вклад определен; SJR 0.742)
9. *Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д.* Математическая модель поведения малых ветровых электростанций // Математическое моделирование. — 2015. — Т. 27, № 2. — С. 85–95. (0,56 п.л. / авторский вклад определен; ИФ РИНЦ 0.508)
10. *Голуб А.П., Селюцкий Ю.Д.* О влиянии упругого крепления на колебания двухзвенного аэродинамического маятника // Труды Московского физико-технического института. — 2017. — Т. 9, № 3. — С. 8–13. (0,37 п.л. / авторский вклад определен; ИФ РИНЦ 0.231)
11. *Голуб А.П., Селюцкий Ю.Д.* О влиянии жёсткости крепления на динамику двухзвенного аэродинамического маятника // Доклады Академии наук. — 2018. — Т. 481, № 3. — С. 254–257. = *Selyutskiy Y.D., Golub A.P.* On the influence of mounting stiffness on the dynamics of the a double-link aerodynamic pendulum // Doklady Physics. — 2018. — V. 481, № 3. — P. 276–278. <https://doi.org/10.1134/S1028335818070121>. (0,26 п.л. / авторский вклад определен; SJR 0.283)
12. *Селюцкий Ю.Д.* О динамике малых ветроэнергетических установок // Математическое моделирование. — 2018. — Т. 30, № 1. — С. 31–39. = *Selyutskiy Y.D.* On the dynamics of small wind power generators // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2018. — V. 10, № 4. — P. 494–500. <https://doi.org/10.1134/S2070048218040129>. (0,55 п.л.; SJR 0.365)
13. *Голуб А.П., Селюцкий Ю.Д.* Двухзвенный маятник в упругом подвесе // Мехатроника, автоматизация, управление. — 2018. — Т. 19, № 6. — С. 380–386. <https://doi.org/10.17587/mau>.

19.380-386. (0,76 п.л./авторский вклад определен; ИФ РИНЦ 0,662)

14. *Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д.* О влиянии жесткости на устойчивость положения равновесия механической системы при отсутствии полной диссипации // Прикладная математика и механика. — 2019. — Т. 83, № 4. — С. 597–607. = *Samsonov V.A., Selyutskiy Y.D.* On the influence of stiffness on the stability of equilibrium of a mechanical system without complete dissipation // Mechanics of Solids. — 2020. — V. 55, № 7. — P. 1021–1029. <https://doi.org/10.3103/S0025654420070183>. (0,67 п.л. / авторский вклад определен; SJR 0.266)
15. *Selyutskiy Y.D.* On dynamics of an aeroelastic system with two degrees of freedom // Applied Mathematical Modelling. — 2019. — Vol. 67. — P. 449–455. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.11.010>. (0,69 п.л.; SJR 1.080)
16. *Selyutskiy Y.D., Holub A.P., Dosaev M.Z.* Elastically Mounted Double Aerodynamic Pendulum // International Journal of Structural Stability and Dynamics. — 2019. — Vol. 19, № 5. — P. 1–13. <https://doi.org/10.1142/S0219455419410074>. (0,81 п.л. / авторский вклад определен; SJR 0.742)
17. *Selyutskiy Y.D., Klimina L.A., Masterova A.A., Hwang S.S., Lin C.H.* Savonius rotor as a part of complex systems // Journal of Sound & Vibration. — 2019. — Vol. 442. — P. 1–10. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.10.020>. (0,87 п.л. / авторский вклад определен; SJR 1.376)
18. *Селюцкий Ю.Д.* О смене характера устойчивости положения равновесия при изменении жесткости по одной из обобщенных координат // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. — 2020. — Т. 491. — С. 58–61. = *Selyutskiy Y.D.* Change in the character of stability of equilibrium in the case of a change in the rigidity of a generalize coordinate // Doklady Physics. — 2020. — Vol. 65, № 3. —

- P. 109–111. <https://doi.org/10.1134/S1028335820030131>. (0,29 п.л. / авторский вклад определен; SJR 0.283)
19. **Selyutskiy Y.D.**, *Holub A.P.*, *Lin C.H.* Piezoaeroelastic system on the basis of a double aerodynamic pendulum // ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. — 2021. — Vol. 101. — P. 1–12. <https://doi.org/10.1002/zamm.202000092>. (1,04 п.л. / авторский вклад определен; SJR 0.410)
  20. **Selyutskiy Y.D.** Potential Forces and Alternation of Stability Character in Non-Conservative Systems // Applied Mathematical Modelling. — 2021. — Vol. 90. — P. 191–199. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.08.070>. (0,83 п.л.; SJR 1.080)
  21. **Селюцкий Ю.Д.** Динамика аэродинамического маятника с упруго закрепленной точкой подвеса // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2022. — № 4. — С. 130–143. = **Selyutskiy Y.D.** Dynamics of aerodynamic pendulum with elastically fixed suspension point // Mechanics of Solids. — 2022. — Vol. 57, № 4. — P. 792–803. <https://doi.org/10.3103/S0025654422040173>. (0,84 п.л.; SJR 0.266)
  22. **Селюцкий Ю.Д.** Об управлении движением аэродинамического маятника с упруго закрепленной точкой подвеса // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2022. — № 3. — С. 31–40. = **Selyutskiy Y.D.** Controlling the motion of an aerodynamic pendulum with an elastically fixed suspension point // Journal of Computer and Systems Sciences International. — 2022. — Vol. 61, № 3. — P. 322–331. <https://doi.org/10.1134/s1064230722030121>. (0,76 п.л.; SJR 0.325)
  23. **Селюцкий Ю.Д.** Предельные циклы в динамике упруго закрепленного аэродинамического маятника // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2022. — № 1. — С. 133–144. = **Selyutskiy Y.D.** Limit cycles in the dynamics of an elastically mounted aerodynamic pendulum //

Mechanics of Solids. — 2022. — Vol. 57, № 1. — P. 111–120. <https://doi.org/10.3103/s0025654422010137>. (0,75 п.л.; SJR 0.266)

24. *Selyutskiy Y., Dosaev M., Holub A., Ceccarelli M.* Wind power harvester based on an aerodynamic double pendulum // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. — 2022. — Vol. 236, № 18. — P. 10025–10032. <https://doi.org/10.1177/09544062221085483>. (0,69 п.л. / авторский вклад определен; SJR 0.422)
25. *Селюцкий Ю.Д.* О регулировании колебаний ветроэнергетической системы, использующей эффект галопирования // Мехатроника, автоматизация, управление. — 2023. — Т. 24, № 1. — С. 46–56. <https://doi.org/10.17587/mau.24.46-56>. (0,96 п.л.; ИФ РИНЦ 0,662)
26. *Селюцкий Ю.Д.* Динамика ветроэнергетической установки с двумя подвижными массами, использующей эффект галопирования // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2023. — № 2. — С. 55-69. = *Selyutsky Y.D.* Dynamics of a wind turbine with two moving masses using the galloping effect // Mechanics of Solids. — 2023. — Vol. 58, № 2. — P. 426–438. <https://doi.org/10.3103/S0025654422600507>. (0,89 п.л.; SJR 0.266)

Статьи, опубликованные в сборниках трудов международных научных конференций, индексируемых в международных базах **WebOfScience** или **Scopus**:

27. *Selyutskiy Y.D.* Limit cycle oscillations of an aerodynamic pendulum // Applied Non-Linear Dynamical Systems. — Vol. 93 of Proceedings in Mathematics & Statistics. — Springer Switzerland: 2014. — P. 415–427. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-08266-03\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-08266-03_1).
28. *Selyutskiy Y.D.* On motion control of an aerodynamic pendulum // International Conference on Mechanics — 7<sup>th</sup> Polyakhov's



Reading, St. Petersburg, Russia, 2015. — P. 1–3. <https://doi.org/10.1109/POLYAKHOV.2015.7106772>.

29. **Selyutskiy Y.** On oscillations of an elastically mounted plate in flow // AIP Conference Proceedings (The Eighth Polyakhov's Reading: Proceedings of the International Scientific Conference on Mechanics). — Vol. 1959. — 2018. — P. 1–5. <https://doi.org/10.1063/1.5034600>.
30. **Holub A., Selyutskiy Y., Hwang S.-S.** Self-sustained oscillations of a double aerodynamic pendulum // 15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), Moscow, Russia, 2020. — P. 1–3. <https://doi.org/10.1109/STAB49150.2020.9140608>.

Статьи, опубликованные в рецензируемых журналах из списка ВАК:

31. **Досаев М.З., Кобрин А.И., Лю В.-Л., Линь Ч.-Х., Селюцкий Ю.Д.** Об особенности функционирования миниветроэлектростанций // Вестник Московского энергетического института. — 2007. — № 1. — С. 71–76.

По части результатов исследований была также опубликована книга:

32. **Досаев М.З., Кобрин А.И., Ложкин Б.Я., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д.** Конструктивная теория МВЭУ. Учебное пособие. Ч. 1, 2. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2007. — 164 с.