

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи



ЦУПАК

Алексей Александрович

Интегральные уравнения и численный метод  
решения задач дифракции на системе тел и экранов

Специальность 1.1.6 — Вычислительная математика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Научный консультант:

д.ф.-м.н., профессор

Ю.Г. Смирнов

ПЕНЗА – 2024

# Содержание

|   |    |
|---|----|
| <b>ВВЕДЕНИЕ</b> . . . . .   | 5  |
| <b>Актуальность и общая характеристика работы</b> . . . . .   | 5  |
| <b>Обзор литературы по теме диссертации</b> . . . . .   | 8  |
| <b>Научная новизна</b> . . . . .  | 19 |
| <b>Теоретическая и практическая ценность</b> . . . . .  | 20 |
| <b>Цель и основное содержание работы</b> . . . . .  | 22 |
| <b>Положения, выносимые на защиту</b> . . . . .   | 29 |
| <b>Публикации и апробация</b> . . . . .   | 32 |
| <b>ГЛАВА 1. Скалярная задача дифракции на системе непесекающихся тонких экранов и объемных неоднородных тел</b> . . . . .   | 38 |
| 1.1 Постановка краевой задачи дифракции для уравнения Гельмгольца и единственность ее квазиклассического решения . . . . .  | 38 |
| 1.2 Система интегро-дифференциальных уравнений . . . . .  | 51 |
| 1.3 Эллиптичность матричного интегро-дифференциального оператора в пространствах Соболева . . . . .   | 58 |
| 1.4 Эквивалентность краевой задачи и системы интегро-дифференциальных уравнений. Непрерывная обратимость матричного интегро-дифференциального оператора . . . . . | 63 |
| 1.5 Формулировка метода Галеркина для системы интегро-дифференциальных уравнений в скалярной задаче дифракции на системе непесекающихся тел и экранов . . . . .   | 72 |
| 1.6 Выбор базисных функций на двух- и трехмерных рассеивателях. Свойство аппроксимации . . . . .  | 77 |
| 1.7 Базисные функции на неплоских гладких экранах: определение, свойство аппроксимации, примеры . . . . .   | 82 |
| 1.8 Сходимость метода Галеркина в скалярной задаче дифракции на системе непесекающихся тел и экранов . . . . .  | 89 |
| <b>ГЛАВА 2. Скалярная задача дифракции на объемных неоднородных телах, частично экранированных системой экранов</b> . . . . .                                     | 92 |

|  |   |            |
|--|---|------------|
| 2.1  | Постановка краевой задачи дифракции для уравнения Гельмгольца. Единственность квазиклассического решения . . . . .  | 92         |
| 2.2  | Представление решения задачи дифракции с помощью потенциалов. Система интегро-дифференциальных уравнений . . . . .  | 99         |
| 2.3  | Эллиптичность матричного интегро-дифференциального оператора в пространствах Соболева . . . . .   | 101        |
| 2.4  | Эквивалентность краевой задачи и системы интегро-дифференциальных уравнений. Непрерывная обратимость матричного интегро-дифференциального оператора . . . . . | 105        |
| 2.5  | Формулировка метода Галеркина для системы интегро-дифференциальных уравнений в скалярной задаче дифракции на частично экранированном теле . . . . .           | 113        |
| 2.6  | Сходимость метода Галеркина в скалярной задаче дифракции на частично экранированном теле . . . . .  | 115        |
| 2.7  | Выбор базисных функций и проблема согласованности сеток на двух- и трехмерных рассеивателях . . . . .   | 116        |
| <b>ГЛАВА 3. Векторная задача дифракции электромагнитной волны на системе непересекающихся тонких идеально проводящих экранов и объемных неоднородных диэлектрических тел . . . . .</b> |   | <b>122</b> |
| 3.1  | Квазиклассическая постановка краевой задачи дифракции для системы уравнений Максвелла. Единственность квазиклассического решения краевой задачи . . . . .     | 122        |
| 3.2  | Система интегро-дифференциальных уравнений . . . . .  | 135        |
| 3.3  | Фредгольмовость и эллиптичность матричного интегро-дифференциального оператора задачи дифракции . . . . .   | 144        |
| 3.4  | Формулировка метода Галеркина для системы интегро-дифференциальных уравнений в векторной задаче дифракции на системе непересекающихся тел и экранов . . . . . | 164        |
| 3.5  | Выбор базисных функций на двух- и трехмерных рассеивателях. Свойство аппроксимации . . . . .  | 167        |
| 3.6  | Базисные вектор-функции на неплоских гладких экранах: определение, свойство аппроксимации, примеры . . . . .  | 175        |

|  |   |            |
|--|---|------------|
| 3.7  | Замечание о вектор-функциях типа roof-top на неплоских гладких экранах . . . . .  | 181        |
| 3.8  | Аппроксимация вектор-функций на неплоских экранах. . . .  | 182        |
| 3.9  | Сходимость метода Галеркина в векторной задаче дифракции на системе непересекающихся тел и экранов . . . . .  | 185        |
| <b>ГЛАВА 4. Векторная задача дифракции электромагнитной волны на объемных неоднородных диэлектрических телах, частично экранированных системой идеально проводящих экранов . . . . .</b> |   | <b>187</b> |
| 4.1  | Постановка краевой задачи дифракции для системы уравнений Максвелла. Единственность квазиклассического решения краевой задачи . . . . .             | 187        |
| 4.2  | Система интегро-дифференциальных уравнений. Коэрцитивность квадратичной формы оператора задачи дифракции. Его непрерывная обратимость . . . . .     | 195        |
| 4.3  | Формулировка метода Галеркина для системы интегро-дифференциальных уравнений в векторной задаче дифракции на частично экранированном теле . . . . . | 213        |
| 4.4  | Сходимость метода Галеркина в векторной задаче дифракции на частично экранированном теле . . . . .  | 214        |
| 4.5  | Выбор базисных функций и проблема согласованности сеток на двух- и трехмерных рассеивателях . . . . .   | 215        |
| <b>ГЛАВА 5. О программной реализации метода Галеркина в задачах дифракции . . . . .</b>  |   | <b>221</b> |
| 5.1  | Скалярная задача дифракции на акустически жесткой единичной сфере . . . . .   | 221        |
| 5.2  | Векторная задача дифракции на системе тел и экранов . . .   | 223        |
| 5.3  | О параллельном алгоритме решения задач дифракции . . .  | 226        |
| 5.4  | Теплицевы матрицы и тензоры в задачах дифракции . . . .   | 229        |
| <b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .</b>  |   | <b>236</b> |
| <b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ . . . . .</b>   |   | <b>238</b> |

## ВВЕДЕНИЕ

### Актуальность и общая характеристика работы

Задачи рассеяния электромагнитных волн на идеально проводящих тонких экранах и объемных рассеивателях с конечной проводимостью находят применение во многих областях науки и техники: радиолокации, моделировании и разработке СВЧ-техники, микроволновой томографии и др. Задачи дифракции на системах неоднородных тел произвольной формы тесно связаны с вопросами о воздействии электромагнитного излучения на биологические объекты. Исследование задач дифракции на объемных анизотропных телах может быть использовано при изучении плазменных образований.

Не менее актуальными являются задачи дифракции монохроматических электромагнитных волн на рассеивателях существенно более сложного типа – системах объемных неоднородных тел и идеально проводящих тонких экранов. Такие задачи возникают при разработке антенн, а также при исследовании широчайшего класса рассеивателей сложной конструкции.

Наиболее естественным (с математической точки зрения) способом описания таких задач является формулировка краевых задач для системы уравнений Максвелла или уравнения Гельмгольца, учитывающих особенности поведения поля вблизи экранов, на границе объемного тела и на бесконечном удалении от рассматриваемого рассеивателя. Однако полное теоретическое исследование таких задач, включающее доказательство существования и единственности решения, весьма затруднительно. При решении реальных задач дифракции на системах тел и экранов приходится сталки-

ваться с невозможностью построения аналитических решений – это удается сделать лишь для рассеивателей, имеющих простейшую форму (например, для тел вращения), описываемых при этом параметрами простейшего типа (постоянными диэлектрической и магнитной проницаемостями).

В связи с этим актуальным становится применение численных методов. Для решения прямых задач рассеяния в дифференциальной формулировке (краевых задач для уравнений Максвелла или Гельмгольца) общепринятыми методами являются метод конечных элементов и метод разностных схем. Применение этих методов к решению задач дифракции на системе тел и экранов встречает ряд затруднений:

1. необходимо ограничивать область решения задачи без ущерба для точности при том, что исходная постановка формулируется в неограниченном пространстве  $\mathbb{R}^3$ ;
2. при решении задачи в случае системы рассеивателей, состоящей из конечного числа неоднородных тел, область решения задачи может многократно превосходить размеры рассеивателей; это может вызвать затруднения при построении сеток внутри и вне неоднородных рассеивателей, при задании граничных условий на экранах;
3. при решении задач дифракции на частично экранированных телах возникает еще и проблема согласованности сеток на объемных препятствиях и поверхностях (экранах), так как последние в силу постановки задачи являются частью границы объемных тел.

Обоснование численных методов решения таких задач, доказательство их сходимости также непросто в силу того, что получающиеся системы уравнений не являются эллиптическими и применение известных результатов о сходимости численных методов невозможно.

Важно отметить, что численные методы решения прямых задач дифракции находят широкое применение и при решении обратных задач. Так, ре-

шение краевых задач для уравнения Гельмгольца (или системы уравнений Максвелла) с достаточно большим числом правых частей применяются [98, 107] в методах обработки сейсмических данных, микроволновой томографии и т.п. При этом используется расчет волновых полей для набора граничных условий и/или набора моделей среды, а процедуры восстановления параметров исследуемого в обратной задаче объекта применяются в частотной области. Прямая задача состоит в решении системы уравнений Максвелла (или уравнения Гельмгольца) с большим количеством правых частей (положений источников) и/или для некоторого набора частот. Такой методикой можно пользоваться и для выбора начальных приближений в итерационных методах решения обратных задач, основанных на минимизации специальных функционалов ошибки. Наличие сходящегося устойчивого численного метода решения прямых задач дифракции – необходимое условие эффективного решения обратных задач.

В данной работе для исследования задач дифракции на системах тел и экранов применяются методы интегральных (интегро-дифференциальных) уравнений и псевдодифференциальных операторов в пространствах Соболева на многообразиях с краем. Основная идея метода состоит в использовании векторных (скалярных) потенциалов и функции Грина для представления решений краевых задач для систем уравнений Максвелла (уравнения Гельмгольца).

Применяемый в настоящей работе подход предполагает использование фундаментального решения уравнения Гельмгольца *свободного пространства* и представление полного поля в виде суммы нескольких слагаемых: падающего поля и полей, рассеянных экранами и телами. Такой подход позволяет свести исходную краевую задачу для системы уравнений Максвелла (или уравнения Гельмгольца) к системе интегро-дифференциальных уравнений, одно из которых есть уравнение по объему областей неоднородности,

а остальные – по поверхности экранов.

Для численного решения таких систем (в работе исследуется применимость метода Галеркина) требуется введение расчетных сеток и определение базисных функций на многообразиях с краем *различной* размерности. Построение таких сеток и функций может оказаться непростой задачей в силу затруднений, перечисленных на странице 6.

Обойти указанные трудности можно, доказав эллиптичность матричного оператора системы интегро-дифференциальных уравнений в подходящих пространствах. Это позволяет применить известные результаты о сходимости метода Галеркина при минимальных ограничениях на базисные функции: надо лишь потребовать, чтобы они удовлетворяли условию аппроксимации в выбранных пространствах. Одна из трудностей в исследовании эллиптичности матричного оператора задачи вызвана наличием операторов, действующих в пространствах вектор-функций (или сечений векторных расслоений), определенных на многообразиях различной размерности. Исследование свойств этих операторов в случае задач дифракции на частично экранированных телах представляет непростую задачу.

Следует отметить, что одна лишь эллиптичность матричного интегро-дифференциального (ИД) оператора задачи не является достаточным признаком сходимости метода Галеркина. Помимо этого свойства оператора системы ИД уравнений нужно установить и его непрерывную обратимость, доказать единственность решения системы. Для этого достаточно (в силу фредгольмовости) показать, что оператор инъективен. Это в свою очередь требует исследования исходной краевой задачи, доказательства единственности ее решения, эквивалентности ее системе ИД уравнений, или проведения прямого доказательства инъективности ИД оператора.

Таким образом, обоснование численного метода решения задач дифракции приводит к необходимости ее детального теоретического исследования, которое и проведено в данной работе.



## Обзор литературы по теме диссертации

Задачи дифракции на ограниченных двумерных или трехмерных препятствиях представляют собой широкий круг классических проблем электродинамики, которые изучаются на протяжении многих десятилетий. В силу достаточной сложности теоретического исследования таких задач и невозможности (за исключением некоторых частных случаев) <sup>1</sup> получения их аналитических решений, особую важность приобретает использование приближенных методов.

В [111] построено аналитическое решение задачи рассеяния плоской электромагнитной волны диэлектрическим шаром, частично экранированным сферическим сегментом. Численному исследованию задачи дифракции на частично экранированной сфере посвящена работа [110]. Однако здесь применяются не проекционные методы, а разложение неизвестных вектор-функций (это потенциалы Дебая) в ряды по функциям Бесселя и Ханкеля. Несмотря на достаточную эффективность этого метода, область его применения очень ограничена. Разложение в ряды искомого решения применено [83] в более трудной задаче рассеяния на конечном массиве частично экранированных цилиндров. Изучение сумматорных уравнений приводит здесь к некорректно поставленной задаче, требующей специальной регуляризации.

Следует сразу заметить, что львиная доля работ по теории дифракции и применению численных методов посвящена проблемам рассеяния на препятствиях *только одного из типов* – неоднородных (или однородных) ограниченных объемных телах или бесконечно тонких экранах, расположенных в однородном двух- или трехмерном пространстве. Круг численных методов для решения задач дифракции чрезвычайно широк – это асимптоти-

---

<sup>1</sup>Точное решение задачи дифракции плоской  $H$ -поляризованной электромагнитной волны на решетке, состоящей из частично экранированных диэлектрических стержней круглого сечения, получено в [109]

ческие методы, методы физической (или геометрической оптики), конечно-разностные методы, метод конечных элементов, метод моментов, методы Галеркина и коллокаций, гибридные методы.

Многие из перечисленных выше методов применяются и для численного решения задач дифракции на *системах тел и экранов*.

Метод потенциалов и теорема Грина используются в [96] для вывода систем гиперсингулярных интегральных уравнений в двумерной задаче дифракции  $H$ –поляризованных электромагнитных волн на диэлектрическом цилиндре произвольного поперечного сечения с продольным щелевым металлическим покрытием. В статье описаны результаты расчетов, основанные на применении механических квадратур и специальных интерполяционных формул.

В [84] исследуется задача дифракции сторонней плоской электромагнитной волны на однородных телах вращения, частично экранированных системой тонких проводящих экранов. Задача сводится к исследованию уравнения по поверхности рассеивателя, а для ее численного решения – метод моментов. В [84] численно решен ряд задач на телах вращения простой формы, однако автором не проведено теоретическое обоснование численного метода и не предложено его обобщение на случай тел более сложной формы.

В [113] исследована двухмерная задача электромагнитного рассеяния на диэлектрическом цилиндре, частично покрытом идеальными проводниками нулевой толщины. Задача сформулирована в терминах систем граничных интегральных уравнений и решается в токах. Для численного решения этих интегральных уравнений применяется метод моментов.

Одним из методов, наиболее часто применяемых для решения задач дифракции, является метод Галеркина.

Дискретизация систем интегро-дифференциальных уравнений с ядрами, зависящими от разности и/или суммы аргументов, с помощью метода

коллокаций или метода Галеркина естественным образом приводит к системам линейных алгебраических уравнений с многоуровневыми матрицами. Такие задачи исследовались в работах Е.Е. Тыртышникова и его учеников [7, 37, 38]

Так, в статье [38] метод Галеркина используется для дискретизации интегро-дифференциального уравнения задачи дифракции на неоднородном теле, рассеянном идеально проводящей плоскостью. Использование функции Грина полупространства и финитных кусочно-линейных базисных функций в методе Галеркина дает возможность исследовать структуру основной матрицы системы линейных алгебраических уравнений (в [38] это матрицы с трехуровневой блочной структурой) и разработать эффективный параллельный алгоритм решения задачи. Проблема доказательства сходимости численного метода в работе не рассматривалась.

Эффективная реализация метода Галеркина в векторной задаче дифракции на частично экранированных *однородных* телах представлена в [71]. Краевая задача для системы уравнений Максвелла, включающая условия сопряжения на неэкранированной части границы и тела и условие Дирихле на экранах, сведена к векторному уравнению по границе объемного рассеивателя. Для дискретизации последнего и применен метод Галеркина. Теоретическое обоснование численного метода авторами не проведено.

Более сложная задача рассматривается в [81]: неоднородный объект расположен над идеально проводящей шероховатой поверхностью. Для изучения взаимодействий между телом и поверхностью используется итерационный метод, сочетающий в себе приближение Кирхгофа с гибридным методом конечных элементов и граничных уравнений. Численные результаты, приведенные для оценки точности мультигибридной техники, сравниваются с результатами вычислений методом моментов. Для анализа сходимости авторами проводится серия расчетов при разном числе итераций.

Задачи дифракции на системах неоднородных тел и идеально проводя-

щих экранах рассматривались в публикациях и диссертации М.А. Москалевой [32, 50]. Эти работы посвящены описанию численного метода (метода Галеркина) для численного решения задачи дифракции в случае, когда экран представляет собой *плоскую* (или кусочно-плоскую) поверхность. Результат о сходимости метода Галеркина в этом случае вытекает из известных свойств интегро-дифференциального оператора задачи на плоском экране [17], а также результатов о разрешимости задачи дифракции на системе тел и экранов, полученных автором данной диссертации (это отражено в списках использованных Москалевой источников). Случай, когда экраны являются криволинейными или лежат границе раздела сред, Москалевой не рассматривался.

Реализации проекционных методов для решения задач на сложных поверхностях посвящено достаточно большое число работ. Следует, однако, отметить, что в подавляющем числе случаев авторы не рассматривают вопросы проведения расчетов и, в частности, определения сеток и базисных функций на непосредственно криволинейных экранах (за исключением случаев, когда экраны являются поверхностями вращения). Наиболее распространенным и в научных публикациях, и в коммерческих продуктах является подход, основанный на замене криволинейного экрана кусочно плоским и использовании на этих новых экранах функций типа RWG (см., например, работы [102, 72]). Этот подход несомненно эффективен с точки зрения расчетов, но его обоснование весьма затруднительно так как одна поверхность (гладкая в общем случае) заменяется негладкой поверхностью. В данной диссертации для скалярных и векторных задач дифракции определены базисные функции именно на неплоских (параметрически заданных) экранах, доказано свойство аппроксимации для этих базисных функций и обоснован метод Галеркина.

Таким образом, в области задач дифракции электромагнитных волн на

системах двух- и трехмерных рассеивателей (неплоских экранов и тел) сложилась ситуация, когда для приближенного решения таких задач используются различные численные методы (проекционные, конечно-разностные и т.д.), при этом не построено общей теории разрешимости задач и не проведено строгое обоснование численных методов.

В то же время теория дифракции на препятствиях одного типа является к настоящему моменту хорошо развитой. Библиография по данной теме столь обширна, что дать сколь-нибудь содержательное описание ее не представляется возможным. В связи с этим в данном обзоре будут прежде всего перечислены фундаментальные работы по дифракции на телах или экранах. Некоторые идеи, изложенные в этих работах, оказали влияние и на исследования автора диссертации.

Задачи дифракции на бесконечно тонких экранах являются классическими в электродинамике и акустике, история их исследования насчитывает более 100 лет. В конце 19 века Зоммерфельдом [104] найдено первое аналитическое решение задачи дифракции на идеально проводящей полуплоскости, а завершенная теория разрешимости задач на экранах была построена в работах А.С. Ильинского и Ю.Г. Смирнова.

Наиболее полное исследование векторных задач дифракции изложено в монографии [17], там же имеется и достаточно обширная библиография. В основе предложенного метода в [17] лежит использование интегродифференциального уравнения по поверхности экрана, впервые полученное А. Мауэ [93]. Это уравнение сводится к псевдодифференциальному уравнению, а оператор задачи исследуется как псевдодифференциальный оператор, действующий в пространствах Соболева сечений векторных расслоений на поверхности экрана. Поверхность экрана определяется как подмногообразие с краем некоторого двумерного замкнутого гладкого многообразия с римановой метрикой. Введение пространств сечений векторных расслоений обусловлено тем, что решение уравнения на экране – поле векторов,

касательных к поверхности экрана в каждой его точке. В результате исследования псевдодифференциального оператора задачи с использованием исчисления символов ПДО позволило получить фундаментальные результаты о фредгольмовости оператора на экранах, а при некоторых ограничениях и его эллиптичности.

Отметим также работу [60], в которой исследовано интегро-дифференциальное уравнение электрического поля на липшицевых экранах.

Исследованию скалярных и векторных задач рассеяния посвящено значительное число научных работ зарубежных авторов, таких, как D. Colton, M. Costabel, J.-C. Nédélec, E. Stephan, W.L. Wendland. и др. Наиболее важные результаты можно найти в работах [68, 69, 70, 75, 78, 79, 80, 91, 97].

Случай скалярных задач дифракции подробно исследован в работах Э. Стефана (E. Stephan). Так, в [105] рассмотрены краевые задачи дифракции для уравнения Гельмгольца, описывающие рассеяние монохроматических волн на «мягких» или «жестких» незамкнутых экранах. Здесь также применяется метод интегральных уравнений – исходные краевые задачи сводятся к интегральному (в случае «мягкого» экрана) или интегро-дифференциальному уравнению (в случае «жесткого» экрана). Операторы этих уравнений исследуются как ПДО в пространствах Соболева на многообразиях с краем. Исследование символов этих ПДО приводит к заключению об эллиптичности операторов.

Одной из классических работ по математической теории дифракции является монография Д. Колтона (D. Colton) и Р. Кресса (R. Kress) [19], в которой исследованы скалярные и векторные задачи дифракции на однородных телах, характеризующихся постоянными значениями проницаемостей (или постоянным волновым числом). Для исследования задач применен метод граничных интегральных уравнений и классическая теория потенциала простого или двойного слоя, получены результаты о фредгольмовости операторов задач, описаны достаточные условия единственности их решений.

Кроме того, в монографии исследованы некоторые обратные задачи теории дифракции, например, задача определения формы идеально проводящего тела.

Идеи, изложенные в [19], получили серьезное развитие в монографиях [63] и [64]. В этих работах, в отличие от [19], исследуются и задачи дифракции на неоднородных телах, характеризующихся переменным в области рассеивателя коэффициентом преломления. В [63] этот коэффициент представляет собой функцию, непрерывную во всем пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Это позволяет, применяя принцип единственного продолжения гладких решений эллиптических уравнений, доказать единственность решения задач дифракции. В [64] рассмотрен более сложный случай скалярной задачи дифракции для уравнения Гельмгольца, когда коэффициент преломления области неоднородности меняется скачкообразно при переходе через границу области. Рассматривается обобщенная постановка краевой задачи для поля из пространства Соболева  $H^2$ . Важно отметить, что в работах [63] и [64] не исследованы векторные задачи дифракции электромагнитных волн в случае неоднородных сред со скачком функции диэлектрической проницаемости на границе раздела сред.

Одним из методов исследования операторов является изучение соответствующих им квадратичных форм [18]. Так, в [66] доказана эллиптичность квадратичной формы, отвечающей дифференциальному оператору второго порядка в задаче дифракции на объемном теле. В работах [4, 134] исследован псевдодифференциальный оператор, отвечающий уравнению электрического поля, получены достаточные условия эллиптичности оператора задачи (в данной работе полученные в [4, 134] условия распространены на более широкий класс объемных рассеивателей и предложен более простой способ определения символа ПДО). Отметим, что некоторые из достаточных условий эллиптичности для интегро-дифференциального оператора (в задаче дифракции на теле) были получены А.Б. Самохиным [39].

Исследование квадратичных форм операторов, отвечающих уравнениям задач дифракции, в подходящих пространствах сопряжено с необходимостью корректного определения следа функции (или распределения) на границе ее области задания. Известно, например, что для квадратично суммируемых функций в общем случае следа не существует. Однако, вводя пространства таких функций с дополнительными ограничениями, можно обосновать вычисление следа. В частности, в математической теории электромагнитной дифракции таким дополнительным требованием является существование квадратично суммируемого ротора вектор-функции [61].

Исследование коэрцитивности квадратичной формы оператора является одним из подходов к теоретическому обоснованию применимости проекционных методов для решения задач дифракции. Отметим работу [86], в которой рассматриваются задачи дифракции акустических и электромагнитных волн на объемных неоднородных телах. Здесь исходные краевые задачи сведены к интегральным (интегро-дифференциальным) уравнениям. Результат о коэрцитивности операторов рассматриваемых задач позволяет авторам не только установить разрешимость интегральных уравнений, но и доказать сходимость метод Галеркина. Кроме того, удается получить и оценку скорости сходимости метода (для скалярной задачи дифракции) в случае, когда в качестве базисных функций выбраны кусочно-линейные финитные функции.

Немаловажным в исследовании сходимости метода Галеркина является вопрос о существовании и единственности решения задач дифракции. Так, в классических теоремах о сходимости приближенных решений к точному решению уравнений с фредгольмовым оператором [87] одним из условий является единственность этого точного решения. Перечислим наиболее распространенные и хорошо изученные в физико-математической литературе случаи:



- параметры среды кусочно-постоянны: диэлектрическая и магнитная проницаемости постоянны и внутри ограниченных трехмерных рассеивателей  $Q$ , и в свободном от рассеивателей пространстве  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}$  (см. [16, 97]). Доказательство единственности решения задачи сводится в этом случае к исследованию переопределенной краевой задачи для уравнения Гельмгольца с постоянным волновым числом  $k$ ;
- среда является неоднородной, но непрерывной: компоненты тензоров  $\hat{\varepsilon}$  и  $\hat{\mu}$  – достаточно гладкие функции во всем пространстве; в частности,  $\hat{\varepsilon}, \hat{\mu} \in C(\mathbb{R}^3)$ . Доказательство единственности задач дифракции для такого случая можно найти в [63, 39];
- область объемного рассеивателя является поглощающей:  $\text{Im } \hat{\varepsilon} > 0$  (см. [39], с. 85).

Задачи дифракции электромагнитных волн для случая непоглощающего препятствия в непоглощающем пространстве с разрывом диэлектрической проницаемости на границе области неоднородности не исследованы. Так, в [85] исследуется задача дифракции в обобщенной постановке для случая разрывной проницаемости с неотрицательной мнимой частью, однако и в этой работе для обеспечения единственности решения требуется выполнение условия  $\text{Im } \hat{\varepsilon} > 0$ .

В работах А.Б. Самохина (см., например, статьи [40, 41] и монографию [39]) исследование векторных задач дифракции на неоднородных анизотропных магнитодиэлектриках сводится к изучению символа векторного сингулярного интегрального уравнения, к которому приводит интегро-дифференциальное уравнение электромагнитного поля. В работах выведены достаточные условия фредгольмовости сингулярного интегрального оператора, а также доказана единственность решения задачи дифракции для случаев тел с поглощением или непрерывными во всем пространстве проницаемостями. В работе [43] описан оригинальный подход к реализа-

ции метода ИУ, предполагающий построение функций Грина, учитывающих краевые условия на поверхности экранов. Такой подход, являющийся фактически развитием метода ИУ в задачах дифракции на телах, расположенных в полупространстве, слое, волноводе или резонаторе, приводит к векторному сингулярному интегро-дифференциальному уравнению (ИДУ) по объемной области неоднородности. Теоретическое исследование такого уравнения не вызывает больших затруднений, так как ядро функции Грина имеет известную особенность. Однако применение метода в реальных расчетах практически невозможно (за исключением, быть может, простейших случаев), так как построение функций Грина, учитывающих условие на экранах произвольной формы, представляет собой чрезвычайно трудную задачу.

Одной из первых (и немногочисленных) теоретических работ по дифракции на частично экранированных препятствиях стала статья [89], в которой авторы исследуют, в частности, вопросы о разрешимости *смешанных* (внутренней и внешней) краевых задач для уравнения Гельмгольца в двумерном пространстве. В этих задачах рассеиватель представляет собой ограниченную двумерную область, на одной части границы которой ставятся краевые условия первого рода, а на другой – третьего рода (условия импедансного типа). Доказывается единственность решения краевых задач. Для доказательства существования обобщенных решений авторы используют представление решений с помощью интегралов типа потенциала, сводя задачу к исследованию фредгольмовости матричного оператора, действующего в специально выбранных пространствах Соболева. Отметим, что в [89] обе задачи исследованы в простейшем случае, когда двумерная среда однородна и характеризуется постоянным волновым числом  $k$ .

Метод интегральных уравнений для решения задач дифракции электромагнитных волн широко представлен в работах отечественных исследователей. В целом построена теория разрешимости сингулярных объемных ин-

тегральных уравнений (см. монографии [30] С.Г. Михлина и [39] А.Б. Самохина). Уравнения, возникающие в задачах дифракции на неоднородных анизотропных магнитодиэлектрических телах, задачи в слоистых неоднородных средах подробно исследованы в работах В.И. Дмитриева, Ю.А. Еремина, Е.В. Захарова (см. монографии [10, 12, 13]).

Наконец, отметим еще один немаловажный аспект в области применения численных методов для решения задач дифракции. Нередки случаи, когда при разработке и реализации исследователями делается упор на создание сложных сеток и введение новых базисных функций, при этом совсем немного внимания уделяется свойствам решаемого уравнения. В работе [112] на криволинейных экранах построены базисные функции, представляющие собой аналог вектор-функций RWG. В многочисленных статьях (см., например, [88, 90, 100]), последовавших после публикации [112], описано применение нового типа базисных функций для численного решения задач электромагнитного рассеяния, однако никакого теоретического обоснования применяемых методик не предложено.

Такой подход может привести к ошибочным результатам, так как не для всякого обратимого оператора метод Галеркина сходится при произвольно заданном (даже ортонормальном) базисе (см. [8], с. 97–101). Именно на исследовании свойств операторов задач дифракции базируется обоснование метода Галеркина, проведенное в данной диссертации.

## **Научная новизна**

В диссертации впервые проведено обоснование метода Галеркина для решения скалярных и векторных задачи дифракции монохроматических волн на частично экранированных телах и системах рассеивателей, состоящих из ограниченных объемных неоднородных тел и бесконечно тонких гладких ограниченных экранов. Скалярные задачи дифракции рассмотре-

ны для конкретного случая условий сопряжения на границе области неоднородности: предполагается, что неизвестная функция и ее нормальная производная непрерывны при переходе через границу. Дана строгая математическая постановка новых краевых задач дифракции для системы уравнений Максвелла и уравнения Гельмгольца. Получены новые результаты о единственности решений этих задач в случае объемных рассеивателей с разрывным коэффициентом преломления. Краевые задачи сведены к системам сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, которые исследованы в пространствах Соболева на двух- и трехмерных многообразиях с краем. Для матричных операторов систем интегро-дифференциальных уравнений получены результаты о фредгольмовости с нулевым индексом, эллиптичности (в векторных задачах – для случая внешней среды с поглощением, то есть, при  $\text{Im}(\varepsilon_e) > 0$ )<sup>2</sup> и непрерывной обратимости в выбранных пространствах. Для задач дифракции на системах тел и экранов впервые проведено теоретическое обоснование метода Галеркина: предложены расчетные сетки и построены базисные функции на трехмерных и неплоских гладких двумерных рассеивателях; доказано свойство аппроксимации в пространствах Соболева; установлена возможность использования несогласованных сеток на рассеивателях различной размерности в задачах дифракции на частично экранированных телах; доказаны теоремы о сходимости метода Галеркина (в векторных задачах – для случая внешней среды с поглощением).

### **Теоретическая и практическая ценность**

Теоретическая значимость работы заключается в полном теоретическом обосновании численного метода (метода Галеркина) для решения нового класса скалярных и векторных задач дифракции на системах тел и экранов: это задачи, в которых на одной части границы области неоднородности

---

<sup>2</sup>Здесь и всюду ниже  $\varepsilon_e$  – диэлектрическая проницаемость внешней среды, возможно, не являющейся вакуумом.

ставятся условия сопряжения, а на другой – граничные условия (в скалярных задачах дифракции рассмотрены конкретные условия сопряжения на неэкранированной части границы). Применение теории эллиптических краевых задач позволяет доказать единственность решений задач дифракции. Для доказательства существования решений задач дифракции применяется метод интегральных уравнений: исходные краевые задачи сводятся к системам интегро-дифференциальных уравнений. Исследование операторов этих систем осуществляется с применением теории псевдодифференциальных операторов, действующих в подходящих пространствах Соболева. Исследование матричных интегро-дифференциальных операторов позволяет полностью обосновать применимость метода Галеркина, доказать его сходимость в достаточно широких пространствах решений. В векторных задачах дифракции сходимость метода Галеркина вытекает, в том числе, из эллиптичности интегро-дифференциального матричного оператора, которая имеет место лишь в случае поглощающей внешней среды.

Практическая значимость результатов, полученных в диссертации, заключается в разработанных новых аналитических и численных методах исследования задач дифракции на частично экранированных телах, а также системах тел и экранов, возможности их использования при создании эффективных вычислительных алгоритмов и программных комплексов для решения подобных задач. Сведение исходных задач в неограниченном пространстве к уравнениям по ограниченным рассеивателям позволяет существенно упростить построение расчетных сеток, не требующих согласования на телах и экранах; при этом дискретизация интегральных уравнений приводит к системам линейных алгебраических уравнений относительно невысокого порядка с матрицами имеющими блочную структуру. В работе предложены скалярные и векторные базисные функции на неплоских гладких двумерных рассеивателях, доказано свойство аппроксимации в пространствах Соболева – это позволяет существенно расширить класс задач элек-

тромагнитного рассеяния, для которых проекционный метод решения является полностью обоснованным. Вычислительный алгоритм решения интегральных уравнений методом Галеркина является легко параллелизуемым и может быть реализован на высокопроизводительных многопроцессорных вычислительных системах. Предложенные методы были реализованы и для решения некоторых практически значимых обратных задач дифракции, возникающих, например, в микроволновой томографии при диагностике онкозаболеваний.

### **Цель и основное содержание работы**

Цель диссертации – теоретическое обоснование метода Галеркина для решения систем векторных и скалярных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений на многообразиях с краем размерности 2 и 3.

Рассматриваемые в работе интегро-дифференциальные уравнения возникают при исследовании векторных и скалярных задач дифракции сторонних монохроматических волн на рассеивателях сложной формы, состоящих из объемных ограниченных неоднородных тел (ограниченных областей с гладкой или кусочно-гладкой границей) и бесконечно тонких экранов (гладких незамкнутых параметризуемых поверхностей), а также на частично экранированных телах. В задачах последнего типа экраны лежат на гладкой части поверхности объемных тел.

Для исследования вышеназванных задач дифракции предлагается единый подход, заключающийся в следующем:

1. Исходная математическая постановка задач дифракции состоит в формулировке краевой задачи для системы уравнений Максвелла (или уравнения Гельмгольца), включающей условия сопряжения на границе раздела сред с различными значениями проницаемостей, краевые

условия на бесконечно тонких экранах, условие ограниченности энергии в любом конечном объеме пространства и условия излучения (постановки краевых задач для уравнения Гельмгольца включают условия непрерывности искомого решения и его нормальной производной на неэкранированной части границы раздела сред).

2. Доказывается единственность решения краевой задачи дифракции.
3. Краевая задача сводится методами теории потенциала к системе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений по области неоднородных тел и поверхности бесконечно тонких экранов. Вводится матричный оператор системы уравнений и задаются пространства, определяющие области определения и прибытия оператора.
4. Доказывается эллиптичность (коэрцитивность с точностью до компактного слагаемого) матричного оператора, делается вывод о его фредгольмовости (с нулевым индексом).
5. Устанавливается эквивалентность дифференциальной и интегральной постановок задач дифракции.
6. Доказывается, что оператор системы интегро-дифференциальных уравнений инъективен и, следовательно, непрерывно обратим.
7. На рассеивателях различной размерности (2 и 3) вводятся конечные элементы и определяются базисные функции, используемые в формулировке метода Галеркина. Доказывается свойство аппроксимации для выбранных базисных функций.
8. Доказывается сходимость метода Галеркина для матричного интегро-дифференциального оператора в выбранных пространствах при сделанных предположениях относительно свойств среды и рассеивателей.

Таким образом, для широкого класса новых задач дифракции удается не только обосновать эффективный численный метод, но и получить фундаментальные результаты о существовании и единственности решений этих задач.

Метод исследования задач дифракции и результаты диссертационной работы описаны в пяти главах.

В **первой и второй главах** рассматриваются скалярные задачи дифракции монохроматических волн на системе рассеивателей, состоящих из объемных неоднородных тел и бесконечно тонких экранов. На экранах задаются краевые условия двух типов: первого и второго рода. В первой главе рассматривается случай непересекающихся тел и экранов, а во второй – случай частично экранированных тел. Дается точная математическая постановка задач: формулируются краевые задачи для уравнения Гельмгольца; на неэкранированной части границы неоднородных объемных тел ставятся специальные условия сопряжения – это условия непрерывности неизвестного решения и его нормальной производной. Вводятся понятия квазиклассических решений (они имеют смысл полного скалярного поля и обозначаются символом  $u$ ) и доказываются теоремы о единственности таких решений поставленных краевых задач. Далее осуществляется вывод систем интегродифференциальных уравнений (ИДУ), определяются решения этих систем в терминах плотностей  $u$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  объемных и поверхностных потенциалов. Вводятся пространства решений системы ИДУ – это пространства Соболева на многообразиях размерности 2 и 3 с краем. Определяются матричные операторы системы ИДУ и задаются их области определения и прибытия. Доказываются теоремы об эллиптичности операторов систем ИДУ. Устанавливается, что полное поле  $u$  тогда и только тогда является решением краевой задачи, когда плотности  $u$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  удовлетворяют системе ИДУ. Из теоремы об эквивалентности дифференциальной и интегральной форму-



лировок следует, что матричный ИД оператор инъективен. Таким образом, устанавливается, что этот оператор является эллиптическим и непрерывно обратимым в выбранных пространствах.

Далее формулируется метод Галеркина для матричного оператора, рассматриваемого как отображение гильбертова пространства в антидвойственное, записывается представление приближенных решений и элементов матрицы системы линейных алгебраических уравнений согласно методу Галеркина. Приводятся примеры расчетных сеток и базисных функций на ограниченных объемных рассеивателях и тонких экранах обоих типов (с условиями для полного поля первого и второго рода). Доказывается, что введенные базисные функции (определенные, в том числе, на неплоских гладких параметризуемых экранах) удовлетворяют свойству аппроксимации в пространствах Соболева; приводятся примеры, иллюстрирующие аппроксимацию функций на неплоских экранах предложенными базисными функциями. Далее доказывается основной результат – теорема о сходимости метода Галеркина для матричного ИД оператора в выбранных пространствах в предположении, что базисные функции удовлетворяют условию аппроксимации. Из полученных ранее результатов о свойствах оператора задачи вытекает не только сходимость проекционного метода, но и возможность использования в методе Галеркина максимально широкого класса расчетных сеток, в том числе не требующих согласованности на границе объемных рассеивателей в задаче на частично экранированных телах.

Основные результаты первой главы опубликованы в следующих работах: [114], [115] (Теоремы 1.1, 1.3, 1.4, 1.5, 1.8; Леммы 1.1, 1.2), [116], [117] (Теоремы 1.3, 1.4, 1.5, 1.8; Леммы 1.1, 1.2, 1.3), [121] (Теорема 1.1), [123] (Теоремы 1.1,1.6), [136] (Теоремы 1.1, 1.3, 1.4, 1.5).

Основные результаты второй главы опубликованы в работах [117] (Теоремы 2.6, 2.7), [118] (Теоремы 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6), [124] (Теоремы 2.1,2.2,

2.4, 2.5), [125] (Теоремы 2.1, 2.5), [136] (Теоремы 2.1, 2.3, 2.4, 2.5), [145] (Теорема 2.1), [148] (Теоремы 2.1,2.2).

**Третья глава** посвящена векторной задаче дифракции электромагнитных волн на системе попарно непересекающихся неоднородных диэлектрических тел и бесконечно тонких идеально проводящих экранов. Методика исследования задачи и обоснования численного метода ее решения такая же, как и в первых двух главах: вводится понятие квазиклассического решения краевой задачи для системы уравнений Максвелла; доказываемость единственности квазиклассического решения; краевая задача для полного поля  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  сводится к системе сингулярных ИД уравнений по области неоднородности и поверхности экранов; определяются векторные пространства решений  $(\mathbf{E}, \mathbf{u})$  и матричный  $(2 \times 2)$  оператор системы ИД уравнений; проводится доказательство фредгольмовости (а в случае поглощающей внешней среды – эллиптичности) диагональных компонент и компактности внедиагональных компонент оператора; устанавливается эквивалентность исходной краевой задачи и системы ИД уравнений; доказываемость теорема о непрерывной обратимости матричного оператора задачи. Основные результаты третьей главы опубликованы в работах [119] (Теорема 3.1), [126], [127] (Теоремы 3.6, 3.8; Леммы 3.3, 3.5), [129], [130], [131] (Теорема 3.1, 3.4, 3.5, 3.6; Лемма 3.1), [132] (Теоремы 3.1, 3.3; Лемма 3.1), [134] (Теорема 3.2; Лемма 3.2), [135] (Теоремы 3.7, 3.8; Лемма 3.5), [136] (Теоремы 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6; Леммы 3.1, 3.2).

Как и в главах 1,2, метод Галеркина формулируется в терминах полоторалинейных форм, определяющих соотношение антидвойственности выбранных векторных пространств. Осуществляется выбор базисных функций в методе Галеркина на объемном неоднородном теле произвольной формы и неплоском идеально проводящем экране, представляющем собой гладкую параметризуемую поверхность.

Показано, что базисные функции принадлежат пространству решений задачи и обладают в нем свойство полноты (т.о., доказывається свойство аппроксимации); приводятся примеры, иллюстрирующие аппроксимацию гладких сечений на гладких параметризованных поверхностях предложенными базисными вектор-функциями. Доказывается теорема о сходимости метода Галеркина для матричного ИД оператора для случая внешней среды с поглощением.

В **четвертой главе** исследуется векторная задача дифракции электромагнитных волн на неоднородных диэлектрических телах, частично экранированных системой бесконечно тонких идеально проводящих экранов. Доказывается единственность квазиклассического решения краевой задачи для системы уравнений Максвелла; краевая задача сводится к системе сингулярных ИД уравнений, аналогичной системе Главы 3. В качестве пространств решений системы ИДУ выбираются те же векторные пространства решений  $(\mathbf{E}, \mathbf{u})$ , что и в Главе 3. Проводится исследование матричного оператора системы ИД уравнений. Доказательство эллиптичности оператора отличается от предложенного в предыдущей главе, так как внедиагональные компоненты оператора уже не являются компактными отображениями выбранных пространств, — в работе осуществляется непосредственная проверка коэрцитивности квадратичной формы полного матричного оператора, исправленного на некоторый компактный оператор. Как и в третьей главе, эллиптичность оператора можно доказать только в случае поглощающей внешней среды, то есть при условии  $\text{Im } \varepsilon_e > 0$ . Непосредственной проверкой показывается, что оператор системы ИДУ является инъективным и, следовательно, непрерывно обратимым.

Формулировка метода Галеркина для задачи дифракции на частично экранированных телах аналогична формулировке в предыдущей Главе. Из эллиптичности и обратимости оператора системы ИДУ при  $\text{Im } \varepsilon_e > 0$  сле-

дует главный результат главы – теорема о сходимости метода Галеркина. Как и в скалярных задачах дифракции, на векторные базисные функции необходимо наложить минимальные ограничения – конечномерные подпространства базисных функций должны удовлетворять условию предельной плотности в пространствах решений задачи. В частности, не требуется согласованности сеток на рассеивателях различной размерности. Основные результаты четвертой главы опубликованы в работах [120] (Теоремы 4.2, 4.3), [122] (Теоремы 4.2, 4.3), [133] (Теоремы 4.1, 4.4, 4.5, 4.6; Лемма 4.1), [136] (Теоремы 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5; Лемма 4.1), [139] (Теорема 4.6), [144].

В **пятой главе** приводятся результаты нескольких вычислительных экспериментов. Рассмотрена скалярная задача дифракция на единичной сфере с условием Неймана на ее поверхности. Проведено сравнение приближенных решений с известным аналитическим; показана сходимость метода Галеркина. Рассмотрена векторная задача дифракции на системе, состоящей из неоднородного куба и части идеально проводящей сферической поверхности. Показана внутренняя сходимость проекционного метода. В третьем параграфе главы обсуждаются возможности по распараллеливанию численного метода. приводятся результаты экспериментов, проведенных на кластере "Ломоносов-2" НИВЦ МГУ. В последнем пункте главы 5 обсуждается возможность решения задач дифракции методом Галеркина с учетом структуры матрицы СЛАУ. В частности, показано, что наиболее трудоемкая часть вычислений может быть оптимизирована по времени за счет блочно-теплицевой структуры матриц, а расчеты на достаточно плотных матрицах могут быть проведены за приемлемое время. Содержимое пятой главы основано на материалах, изложенных в работах [126, 130, 149, 150].

## Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие основные результаты диссертации:

1. Проведено теоретическое обоснование метода Галеркина для решения систем интегро-дифференциальных уравнений на ограниченных многообразиях с краем размерности 2 и 3, возникающих в задачах дифракции на частично экранированных телах и системах тел и экранов. Для обоснования метода Галеркина проведено аналитическое исследование задач дифракции и получены следующие результаты:

- выполнена строгая математическая постановка векторных краевых задач для системы уравнений Максвелла и скалярных краевых задач дифракции для уравнения Гельмгольца (скалярные задачи рассмотрены для конкретного случая условий сопряжения на границе области неоднородности: неизвестная функция и ее нормальная производная непрерывны при переходе через границу);
- доказана единственность решения краевых задач для системы уравнений Максвелла и уравнения Гельмгольца в случае, когда диэлектрическая проницаемость или коэффициент преломления имеет разрыв на границе области неоднородности;
- краевые задачи дифракции сведены к системам интегро-дифференциальных уравнений по ограниченному многообразию с краем размерности 2 и 3, причем двумерное многообразие может принадлежать краю трехмерного многообразия или не пересекаться с ним;
- доказаны теоремы о гладкости решений интегро-дифференциальных уравнений при условии гладкости их правых частей;
- доказаны теоремы об эквивалентности исходных краевых задач и систем интегро-дифференциальных уравнений;

- при некоторых ограничениях на диэлектрические свойства рассеивателей и среды доказаны теоремы о непрерывной обратимости и эллиптичности матричных операторов систем интегро-дифференциальных уравнений в выбранных пространствах Соболева на многообразиях с краем размерности 2 и 3 (в векторной задаче эллиптичность оператора имеет место только при  $\text{Im } \varepsilon_e > 0$ );
- на многообразиях с краем размерности 2 и 3 введены скалярные и векторные базисные функции;
- доказано, что введенные базисные функции удовлетворяют условию аппроксимации в пространствах Соболева (сечений векторных расслоений на многообразиях с краем), необходимому для сходимости метода Галеркина;
- доказаны теоремы о сходимости метода Галеркина для систем интегро-дифференциальных уравнений в пространствах Соболева (в векторных задачах – для случая внешней среды с поглощением).

2. Предложен алгоритм реализации метода Галеркина для систем интегро-дифференциальных уравнений в скалярной и векторной задачах дифракции на системе тел и экранов:

- описан алгоритм построения расчетных сеток и определения базисных функций для широкого класса тел и (в общем случае, неплоских) экранов, удовлетворяющих условию аппроксимации;
- представлены формулы для определения матричных элементов в системах линейных алгебраических уравнений, возникающих при решении задач дифракции методом Галеркина;
- установлено, что в задачах дифракции на частично экранированном теле не требуется согласованности расчетных сеток на многообразиях различной размерности.

3. Выполнена программная реализация метода Галеркина для решения систем ИДУ в скалярной и векторной задачах дифракции на системе тел и экранов:

- показано, что выбранные на криволинейных экранах базисные функции действительно удовлетворяют условию аппроксимации; описан алгоритм построения расчетных сеток и определения базисных функций;
- показано, что метод Галеркина является сходящимся и допускает эффективную параллельную реализацию на многопроцессорных вычислительных системах;
- предложен и программно реализован эффективный параллельный алгоритм заполнения матрицы СЛАУ в методе Галеркина, учитывающий характерные особенности системы ИДУ.

## Публикации и апробация

### Апробация результатов диссертации

С 2007 по 2020 годы автор выступал с докладами на международных научных конференциях. Результаты диссертации представлены на международных конференциях:

- Progress In Electromagnetics Research Symposium, PIERS2007 in Prague, Czech Republic, 27-30 August, 2007;
- Progress In Electromagnetics Research Symposium, PIERS2009 in Moscow, Russia, August 18–21, 2009;
- 2015 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications, 7th–11th September, 2015, Turin, Italy;
- 4th International Conference on Matrix Methods in Mathematics and Applications (ММА-2015), 2015, August 24-28, Skolkovo, Russia;
- Days on Diffraction (DD 2015), May 25–29, St.Petersburg, Russia, 2015;
- 2016 URSI Asia-Pacific Radio Science Conference, Seoul, Korea, 21-25 Aug. 2016;
- International Symposium on Electromagnetic Theory (EMTS 2016), Espoo, Finland, 14–18 August 2016;
- Progress In Electromagnetics Research Symposium, PIERS 2017 in Singapore, Singapore, 19-22 November;
- Международная конференция, посвященная 90-летию Владимира Александровича Ильина, Москва, 2–6 мая 2018;
- Пятая Международная конференция, посвященная 95-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева, Москва, 26–29 ноября 2018;
- Международная научная конференция «Современные проблемы математики и механики», посвященная 80-летию академика В. А. Садовниченко, Москва, 13–15 мая 2019;



- Международная конференция «Математическое моделирование в электродинамике: теория, методы и приложения», Пенза, 23 – 27 сентября 2019;
- XX Международная конференция и молодежная школа к Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии – Нижний Новгород, 23 – 27 ноября 2020.

Работа была частично поддержана грантами, где автор диссертации являлся исполнителем: РФФИ (проекты № 18-01-00219 А, № 21-57-53001 ГФЕН\_а), РНФ (№14-11-00344, 2014-2016), ФЦП (проект №2.1.1/10252 аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)»), проект №2.1.1/1647 аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)», гранты Министерства науки и высшего образования РФ (проект №1.2.10, 2011-2013; соглашение №1.894.2017/4.6, 2017-2019).

### **Публикации.**

Основные результаты диссертации опубликованы в 37 работах: в 22 публикациях в изданиях, рекомендованных ВАК РФ [114] – [135] (все индексируются в базах данных WoS и/или Scopus и/или RSCI), 1 монографии [136] (два издания), и 14 прочих публикациях.

### **Личный вклад автора**

Все основные результаты диссертации получены автором лично.

Вклад соискателя в получении научных результатов (в постановке исследуемых задач, методов и результатов их исследования, обсуждении, интерпретации и приложениях полученных теоретических результатов) и опубликованные работы, вошедшие в диссертацию, является решающим.

Личный вклад соискателя и вклад соавторов в работах с несколькими авторами состоит в следующем:

Публикация [114]. Е. Д. Деревянчук, Е. Ю. Смолькин участвовали в про-

граммной реализации метода Галеркина, получении некоторых численных результатов (см. с. 61-64). Все остальные результаты, включая реализацию метода Галеркина и получение численных результатов на неплоских экранах (см. на с. 65-66), принадлежат автору.

Публикация [115]. М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак: обсуждение исходной постановки задачи, введение (с. 1319-1320). М. Ю. Медведик: программная реализация численного метода и результаты вычислений (с. 1330-1331). Все остальные результаты принадлежат автору.

Публикация [116]. Ю. Г. Смирнов, М. Ю. Медведик, А. А. Цупак, М. А. Москалева: обсуждение исходной постановки задачи (с.109-110 ). Ю. Г. Смирнов, М. Ю. Медведик, М. А. Москалева: моделирование одномерного рассеивателя, реализация численного метода (с. 112-117). А.А. Цупак: постановка задачи, вывод системы интегро-дифференциальных уравнений (с.110-112).

Публикация [117]. Ю.Г. Смирнов: обсуждение исходной постановки задачи (с.1165-1166). Все остальные результаты принадлежат автору.

Публикация [118]. Ю. Г. Смирнов: обсуждение исходной постановки задачи (с.1225-1226). Все остальные результаты принадлежат автору.

Публикация [119]. Ю. Г. Смирнов: доказательство эллиптичности оператора задачи дифракции на (отдельно) объемном диэлектрике (с. 708). Все остальные результаты принадлежат автору.

Публикация [120]. 7. Ю. Г. Смирнов: обсуждение исходной постановки задачи, определение пространств  $W$  на экране, (с.1244, 1247), результат о коэрцитивности оператора на экране (с. 1248). Все остальные результаты принадлежат лично соискателю.

Публикация [128]. Н. В. Романовой выполнена (совместно с А.А. Цупаком) программная реализация метода Галеркина. Все остальные результаты принадлежат автору.

Публикация [129]. Д. В. Валовик, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, Цу-

пак А.А.: обсуждение исходной постановки задачи (с. 3-4). М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, Цупак А.А.: вывод системы уравнений (с.1088-1089). Ю. Г. Смирнов, М. Ю. Медведик: моделирование одномерного рассеивателя, реализация численного алгоритма и субиерархического метода (с. 1090-1098). А.А. Цупак: формулировка численного метода, блочное представление матрицы СЛАУ в методе Галеркина (с.1092-1094).

Публикация [130]. О. С. Скворцов: программная реализация метода Галеркина и параллельного алгоритма, проведение вычислительных экспериментов (с. 190-198). Все остальные результаты, включая разработанный численный метод, принадлежат автору.

Публикация [131]. Ю. Г. Смирнов: определение пространств  $W$  на экране, (с. 1332-1333), результат о коэрцитивности оператора на экране (с. 1335). Все остальные результаты принадлежат автору.

Публикация [132]. Ю. Г. Смирнов: обсуждение исходной постановки задачи (с.2), определение пространств  $W$  на экране, (с.5), результат об фредгольмовости оператора на экране (с. 6). Все остальные результаты принадлежат автору.

Публикация [133]. Ю. Г. Смирнов: обсуждение постановки задачи (с. 1883-1883), определение пространств  $W$  на экране и результаты исследования оператора на экране (с. 1889). Все остальные результаты принадлежат автору.

Публикация [134]. Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов, А.А. Цупак: постановка задачи (с. 174-176), сведение краевой задачи к интегро-дифференциальному уравнению (с. 176-177), теорема эквивалентности (с. 177-1786). Цупак А.А.: теорема о единственности решения краевой задачи дифракции (с. 175). Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов: результат об эллиптичности и обратимости оператора  $A$  в задачи дифракции на (отдельно) объемном диэлектрике (с. 177-187).

Публикация [136]. Ю. Г. Смирнов: все результаты, относящиеся к иссле-

дованию задачи дифракции на (отдельно) идеально проводящих экранах (Часть II, Глава 1). Все остальные результаты исследования задач дифракции на системах экранов и тел принадлежат автору.

Публикация [137]. Ю. Г. Смирнов: постановка и исследование обратной задачи дифракции. Все результаты, относящиеся к прямой задаче дифракции; доказательства (частично) теорем 2 и 3, принадлежат автору.

Публикация [140]. Ю.Г. Смирнов: постановка обратной задачи дифракции (с. 1478-1480), доказательство теорем (с. 1485-1490, совместно с А.А. Цупаком). М.Ю. Медведик: программная реализация численного метода решения обратной задачи дифракции (с. 1482-1485). Результаты исследования прямой задачи дифракции (с. 1376-1378) принадлежат автору.

Публикация [141]. Ю.Г. Смирнов: постановка обратной задачи дифракции, теорема 4 (с. 89-91). М.Ю. Медведик: программная реализация численного метода решения обратной задачи дифракции (с. 91-92). Результаты исследования прямой задачи дифракции (с. 84-89) принадлежат автору.

Публикация [142]. Ю.Г. Смирнов: постановка обратной задачи дифракции (с. 438-440), доказательство теорем (с. 440-442, совместно с А.А. Цупаком). М.Ю. Медведик: программная реализация численного метода решения обратной задачи дифракции (с. 442-445). Результаты исследования прямой задачи дифракции (с. 432-438) принадлежат автору.

Публикация [143]. Ю. Г. Смирнов, М. Ю. Медведик, А. А. Цупак: обсуждение исходной постановки задачи (с. 1568-1569). М.Ю. Медведик: реализация численного метода и субиерархического метода (1569-1571). Е.Ю. Смолькин: выступление с докладом на конференции. Автором выполнены постановка задачи дифракции, вывод системы интегро-дифференциальных уравнений, формулировка численного метода (с.1568-1571).

Публикация [144]. М. А. Москалева, Ю. Г. Смирнов, Цупак А.А.: обсуждение исходной постановки задачи (с. 913-914). Ю. Г. Смирнов, Цупак А.А.: вывод системы уравнений (с.914) Ю. Г. Смирнов, М. А. Москалева: моде-

лирование одномерного рассеивателя, реализация численного алгоритма и субиерархического метода (с. 917-919). Автором выполнены формулировка численного метода, блочное представление матрицы СЛАУ в методе Галеркина (с.915-917).

Публикация [145]. Е.Ю. Смолькин: реализация численного метода (362-363). Все остальные результаты принадлежат лично соискателю.

Публикация [146]. Ю. Г. Смирнов, А.А. Цупак: постановка задачи (с. 313-314). Е.Ю. Смолькин: представление доклада на конференции. Все остальные результаты принадлежат автору.

Публикация [147]. Постановка краевой задачи и исследование ее и интегрального уравнения осуществлены Цупаком А.А. совместно с Ю. Г. Смирновым. Все остальные результаты принадлежат автору.

Публикация [148]. Постановка краевой задачи и исследование ее и интегрального уравнения осуществлены Цупаком А.А. совместно с Ю. Г. Смирновым. Все остальные результаты принадлежат автору.

### **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 251 страницу, включая 22 рисунка и 11 таблиц, 14 страниц цитируемой и авторской литературы. Список литературы содержит 150 наименований.

# ГЛАВА 1. Скалярная задача дифракции на системе непересекающихся тонких экранов и объемных неоднородных тел

Основные результаты главы опубликованы в работах [114, 115, 116, 117, 121, 123, 136].

## 1.1 Постановка краевой задачи дифракции для уравнения Гельмгольца и единственность ее квазиклассического решения

Рассмотрим скалярную задачу дифракции монохроматической волны системой рассеивателей, расположенных в изотропной однородной среде в  $\mathbb{R}^3$ , характеризующейся известной скоростью распространения волны  $c$ , заданным коэффициентом поглощения  $\gamma$  и плотностью  $\rho$ .

Определим двух- и трехмерные рассеиватели падающей волны.

Будем рассматривать две системы попарно непересекающихся гладких экранов с определенным на них полем нормалей  $\mathbf{n}$ :

$$\Omega_{1,k}, k = 1, \dots, k_1, \Omega_{2,l}, l = 1, \dots, l_1 : \bar{\Omega}_{m,k} \cap \bar{\Omega}_{n,l} = \emptyset \text{ при } (m, k) \neq (n, l).$$

Каждый экран представляет собой ориентируемую незамкнутую двумерную параметризуемую поверхность класса  $C^\infty$ . Пусть край  $\partial\Omega_{n,j} = \bar{\Omega}_{n,j} \setminus \Omega_{n,j}$  каждого экрана представляет собой гладкую кривую класса  $C^\infty$  без точек самопересечения.

Определим экран  $\Omega_1 = \cup_k \Omega_{1,k}$  первого типа и экран  $\Omega_2 = \cup_l \Omega_{2,l}$  второго типа, а также их границы и  $\partial\Omega_n = \cup \partial\Omega_{n,j}$ .

Введем также трубчатые окрестности края  $n$ -го экрана:

$$\partial\Omega_{n,\delta} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \text{dist}(x, \partial\Omega_n) < \delta\}.$$

В качестве трехмерного рассеивателя рассмотрим конечную систему попарно непересекающихся ограниченных областей

$$Q_j \subset \mathbb{R}^3 : \bar{Q}_{j_1} \cap \bar{Q}_{j_2} = \emptyset, \quad j_1 \neq j_2.$$

Границы

$$\partial Q_j = \bar{Q}_j \setminus Q_j = \bigcup_i \partial q_{i,j}$$

этих областей – кусочно-гладкие замкнутые ориентируемые (с заданным полем единичных внешних нормалей  $\mathbf{n}$ ) поверхности, состоящие из конечного числа поверхностей  $\partial q_{i,j}$  класса  $C^\infty$ . Через  $E$  обозначим объединение всех ребер тел  $Q_j : E = \bigcup_{i,j} \partial q_{i,j}$ . Введем также обозначения  $\partial Q'_j = \partial Q_j \setminus E$ ,  $Q = \cup_j Q_j$ ,  $\partial Q' = \partial Q \setminus E$ . Предполагается также, что области  $Q_j$  являются липшицевыми [67] и удовлетворяют условию конуса [58].

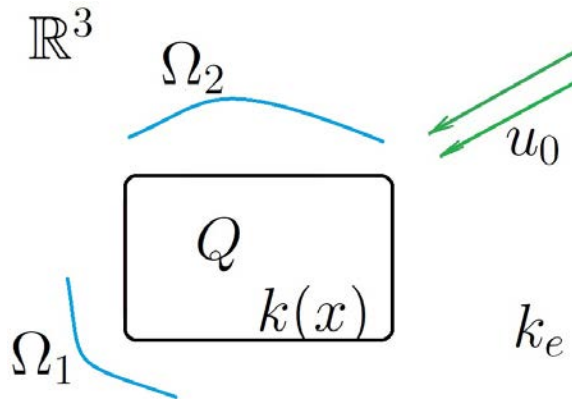


Рис. 1: Скалярная задача дифракции на системе непересекающихся тел и экранов.

В скалярной задаче дифракции рассматривается система *неоднородных* тел, характеризующихся системой гладких функций

$$k_j(x) \in C^\infty(\bar{Q}_j), \tag{1.1}$$

имеющих ограниченные в  $\overline{Q}_j$  производные произвольного порядка. Иначе, неоднородность среды описывается кусочно-гладкой функцией  $k(x)$  :

$$k(x) = \begin{cases} k_j(x), & x \in \overline{Q}_j, \\ k_e, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}. \end{cases}$$

При этом предполагается, что при переходе через границу (многосвязной) области  $Q$  функция  $k(x)$  изменяется скачкообразно, т.е.

$$k(x) \neq k_e \text{ на } \partial Q. \quad (1.2)$$

Предполагаем, что всюду в трехмерном пространстве выполняются условия

$$\operatorname{Re} k(x) > 0, \operatorname{Im} k(x) \geq 0. \quad (1.3)$$

Известно (см. [19],[63] и др.), что для определения поля скоростей  $\mathbf{v}$  в скалярной задаче о рассеянии монохроматической волны неоднородным телом можно определить потенциал скоростей  $U = U(x, t)$ ,

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} U$$

из линейного уравнения второго порядка

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial U}{\partial t} - c^2 \Delta U = 0,$$

которое в случае монохроматической волны, зависящей от времени гармонически в виде  $U(x, t) = u(x)e^{-i\omega t}$ , приводится к уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + k^2(x)u = 0,$$

где  $k^2(x) = k_e^2 n(x)$ ,  $k_e = (\omega^2 + i\omega\gamma)/c^2$ ,  $n(x)$  – коэффициент преломления.

Ниже дается математическая формулировка задачи дифракции в предположении, что тела и экраны не имеют общих точек:  $\overline{Q} \cap \overline{\Omega} = \emptyset$ .



Здесь и всюду ниже мы рассматриваем монохроматические волны, гармонически зависящие от времени. Полное, падающее и рассеянное поле определяются, таким образом, соотношениями:

$$U(x, t) = u(x)e^{-i\omega t}, \quad U_0(x, t) = u_0(x)e^{-i\omega t}, \quad U_s(x, t) = u_s(x)e^{-i\omega t}. \quad (1.4)$$

Искомое решение задачи дифракции есть комплексная амплитуда  $u = u(x)$ . Падающее поле определяется заданной гладкой в  $\mathbb{R}^3$  функцией:

$$u_0 = u_0(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3); \quad (1.5)$$

тогда *рассеянное поле* определяется функцией  $u_s = u - u_0$ .

**Постановка задачи дифракции.** Требуется определить комплекснозначную функцию  $u = u(x)$  ( $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$ ), удовлетворяющую в классическом смысле вне экранов и границы тела однородному уравнению Гельмгольца,

$$\Delta u(x) + k^2(x)u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus (\partial Q \cup \bar{\Omega}), \quad (1.6)$$

условиям сопряжения на границе  $\partial Q$  области неоднородности,

$$[u]|_{\partial Q} = 0, \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right] \Big|_{\partial Q'} = 0, \quad (1.7)$$

условиям Дирихле и Неймана во внутренних точках экранов  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  соответственно,

$$u|_{\Omega_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Omega_2} = 0, \quad (1.8)$$

условию конечности энергии в произвольной ограниченной области трехмерного пространства,

$$u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3) \quad (1.9)$$

и условиям излучения Зоммерфельда на бесконечности,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_s}{\partial r} &= ik_e u_s + o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при } \text{Im } k_e = 0, \\ u_s(r) &= O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad \text{при } \text{Im } k_e > 0, \quad r := |x| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Потребуем, чтобы искомая функция  $u(x)$  удовлетворяла следующим условиям гладкости:

$$u \in C^2(Q) \cap C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus (\bar{Q} \cup \bar{\Omega})) \bigcap_{\delta > 0} C(\mathbb{R}^3 \setminus (\partial\Omega_{1,\delta})) \bigcap_{\delta > 0} C(\bar{M}_+ \setminus \partial\Omega_{2,\delta}) \bigcap_{\delta > 0} C(\bar{M}_- \setminus \partial\Omega_{2,\delta}), \quad (1.11)$$

где  $M$  – произвольная гладкая замкнутая ориентируемая поверхность, содержащая экран  $\Omega_2$ , а  $M_-$ ,  $M_+$  – внешняя и внутренняя области по отношению к  $M$ .

*Замечание 1.1.* Условия (1.11) означают следующее: полное поле дважды непрерывно дифференцируемо в области неоднородности, бесконечно дифференцируемо в свободном от рассеивателей пространстве; оно непрерывно всюду вне сколь угодно малой окрестности края экранов первого типа и всюду вне экранов второго типа. В каждой внутренней точке любого экрана  $\Omega_2$  должен существовать конечный предел  $u(x)$  с каждой стороны экрана (пределы с разных сторон, вообще говоря, различные).

**Определение 1.1.** Решение  $u(x)$  задачи (1.6)–(1.10), удовлетворяющее условиям (1.11), называется **квазиклассическим**.

**Единственность квазиклассического решения краевой задачи дифракции**

**Теорема 1.1.** [115, 121, 123, 136] Пусть объемный рассеиватель  $Q$  характеризуется гладким показателем преломления,  $k(x) \in C^\infty(\bar{Q})$ , а всюду в  $\mathbb{R}^3$  выполнены условия  $\operatorname{Re} k(x) > 0$ ,  $\operatorname{Im} k(x) \geq 0$ . Пусть  $u(x)$  – квазиклассическое решение задачи дифракции (1.6)–(1.10). Тогда это решение единственно.

*Доказательство.* В силу линейности рассматриваемой задачи достаточно показать, что краевая задача для рассеянного поля  $u_s$  с условиями на экра-

нах

$$u_s|_{\Omega_1} = 0, \quad \partial u_s / \partial \mathbf{n}|_{\Omega_2} = 0$$

имеет только тривиальное решение  $u_s \equiv 0$ .

1. Выберем такие односвязные ограниченные области  $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^3$ , чтобы были выполнены условия:

- границы областей  $V_i$  – гладкие ориентируемые поверхности класса  $C^\infty$ , причем  $\partial V_i \supset \bar{\Omega}_i$ , ( $i = 1, 2$ ) (векторы единичных внешних нормалей на всех поверхностях будем обозначать единым символом  $\mathbf{n}$ );

- $\bar{Q} \cap \bar{V}_1 = \bar{Q} \cap \bar{V}_2 = \bar{V}_1 \cap \bar{V}_2 = \emptyset$  (такие области можно задать в силу условия пустого пересечения рассеивателей различного типа).

Обозначим область  $Q$  через  $V_3$  и рассмотрим шар  $B = B_R(0)$  достаточно большого радиуса  $R$  и такой, что  $\bar{Q}, \bar{V}_i \subset B$ . Наконец, определим ограниченную область

$$V_4 = B \setminus (\bar{V}_1 \cup \bar{V}_2 \cup \bar{V}_3)$$

с границей

$$\partial V_4 = \partial B \cup \partial V_1 \cup \partial V_2 \cup \partial V_3$$

и неограниченную область  $V_5 = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}$ .

Обозначим сужения рассеянного поля  $u_s(x)$  на замкнутые области  $\bar{V}_i$  через  $v_i(x)$  и рассмотрим задачу сопряжения в областях  $V_i$ , эквивалентную исходной краевой задаче для  $u_s$ .

Из исходной постановки задачи дифракции вытекает, что функции  $v_i$  будут удовлетворять уравнениям Гельмгольца в соответствующих областях определения,

$$\begin{aligned} (\Delta + k_e^2)v_i(x) &= 0, \quad x \in V_i \quad (i = 1, 2, 4, 5), \\ (\Delta + k^2(x))v_3(x) &= 0, \quad x \in V_3, \end{aligned} \tag{1.12}$$

условиям сопряжения на границах смежных областей,

$$\begin{aligned} v_1(x) &= v_4(x), \quad x \in \partial V_1, \quad v_1(x) = v_4(x) = 0, \quad x \in \Omega_1, \\ v_3(x) &= v_4(x), \quad x \in \partial V_3, \quad v_4(x) = v_5(x), \quad x \in \partial B, \\ v_2(x) &= v_4(x), \quad x \in \partial V_2 \setminus \bar{\Omega}_2, \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{n}}(x) &= \frac{\partial v_4}{\partial \mathbf{n}}(x), \quad x \in \partial V_1 \setminus \bar{\Omega}_1, \\ -\frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{n}}(x) &= \frac{\partial v_4}{\partial \mathbf{n}}(x), \quad x \in \partial V_2, \\ -\frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{n}}(x) &= \frac{\partial v_4}{\partial \mathbf{n}}(x) = 0, \quad x \in \Omega_2, \\ -\frac{\partial v_3}{\partial \mathbf{n}}(x) &= \frac{\partial v_4}{\partial \mathbf{n}}(x), \quad x \in \partial V'_3 = \partial V_3 \setminus E, \\ -\frac{\partial v_4}{\partial \mathbf{n}}(x) &= \frac{\partial v_5}{\partial \mathbf{n}}(x), \quad x \in \partial B \end{aligned} \quad (1.14)$$

и условиям на бесконечности для функции  $v_5$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_5}{\partial r} &= ik_e v_5 + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad \text{при } \text{Im } k_e = 0, \\ v_5(r) &= O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \text{при } \text{Im } k_e > 0, \quad r := |x| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.15)$$

В соотношениях  $\frac{\partial v_i}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial v_j}{\partial \mathbf{n}}$ , описывающих равенство нормальных производных на границах смежных областей, одним и тем же символом  $\mathbf{n}$  обозначены векторы внешней нормали, имеющие *противоположное направление* для областей  $V_i$  и  $V_j$ .

2. В ограниченных областях  $V_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) применим первую формулу Грина

$$\int_V (u \Delta v + \text{grad } u \cdot \text{grad } v) dx = \int_V u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} dx, \quad (1.16)$$

полагая  $u = \bar{v}_i$ ,  $v = v_i$ , и учтем уравнение Гельмгольца:

$$\begin{aligned} \int_{V_i} (\bar{v}_i \Delta v_i + |\nabla v_i|^2) dx &= -k_e^2 \int_{V_i} |v_i|^2 dx + \int_{V_i} |\nabla v_i|^2 dx = \\ &= \int_{\partial V_i} \bar{v}_i \frac{\partial v_i}{\partial \mathbf{n}} ds, \quad i = 1, 2, 4. \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned}
 \int_{V_3} (\bar{v}_3 \Delta v_3 + |\nabla v_3|^2) dx &= - \int_{V_3} k^2(x) |v_3|^2 dx + \int_{V_3} |\nabla v_3|^2 dx = \\
 &= \int_{\partial V_3'} \bar{v}_3 \frac{\partial v_3}{\partial \mathbf{n}} ds.
 \end{aligned}
 \tag{1.18}$$

*Замечание 1.2.* Так как границы областей  $V_1$ ,  $V_2$  и  $V_4$  содержат экраны  $\Omega_i$ , а подынтегральные функции в соответствующих поверхностных интегралах могут быть неограниченными вблизи краев экранов, то применимость формулы Грина в этих областях требует дополнительного пояснения.

Определим дифференциальные операторы Гельмгольца в областях  $Q$  и  $\mathbb{R}^3 \setminus (\bar{Q} \cup \bar{\Omega})$  :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}u(x) &= (-\Delta - k^2(x))u(x), \quad x \in Q, \\
 \mathcal{P}_e u(x) &= (-\Delta - k_e^2)u(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus (\bar{Q} \cup \bar{\Omega}).
 \end{aligned}
 \tag{1.19}$$

Пусть  $V$  – произвольная ограниченная область, не пересекающаяся с  $\partial Q \cup \Omega$ . Введем пространство  $H_{\mathcal{P}}^1(V)$  – это множество функций из пространства Соболева  $u \in H^1(V) \subset H_{loc}^1(\mathbb{R}^3)$  таких, что  $\mathcal{P}u \in L_2(V)$  (оператор  $\mathcal{P}$  определяется по области  $V$  согласно (1.19)). Норма в этом пространстве задается следующим образом:

$$\|u\|_{H_{\mathcal{P}}^1(V)}^2 = \|u\|_{H^1(V)}^2 + \|\mathcal{P}u\|_{L_2(V)}^2.
 \tag{1.20}$$

Важное значение в последующих рассуждениях будет играть следующее утверждение (см. [67], стр.614) о следах (определение следа см., например, в [1]): *если  $V \subset \mathbb{R}^3$  – ограниченная область с кусочно-гладкой (или даже липшицевой) границей, то оператор следа*

$$\gamma_0 : u \mapsto \gamma_0 u = u|_{\partial V}
 \tag{1.21}$$

*непрерывен, как отображение из  $H_{loc}^s(\mathbb{R}^3)$  в  $H^{s-1/2}(\partial V)$  и при всех  $s \in (1/2, 1]$  имеет непрерывный правый обратный оператор  $\gamma_0^- : H^{s-1/2}(\partial V) \rightarrow H_{loc}^s(\mathbb{R}^3)$ .*

Следовательно, для функций  $u \in H_{\mathcal{P}}^1$  имеем  $\gamma_0 u \in H^{1/2}(\partial V)$  для любой области  $V$  рассматриваемого класса, не пересекающейся с  $\partial Q \cup \Omega$ .

Для функций  $u \in H^2(V)$  в ограниченных областях  $V$  определена нормальная производная на границе  $\partial V$  :

$$\gamma_1 u = u_{\mathbf{n}}|_{\partial V}. \quad (1.22)$$

Запишем формулу Грина в виде

$$\langle \gamma_1 v, u \rangle = \int_{\partial V} uv_{\mathbf{n}} ds = \int_V (u\Delta v + \nabla u \nabla v) dx. \quad (1.23)$$

Этим равенством по гладкой функции  $v$  определяется непрерывный функционал  $\gamma_1 v$  в классах достаточно гладких на  $\partial V$  функций.

Непрерывность  $\gamma_1 v$  сохраняется и в соболевских пространствах. Точнее, верно утверждение (см. [67], стр. 617): *если  $v \in H_{\mathcal{P}}^1(V)$ , то отображение*

$$\varphi \mapsto \langle \gamma_1 v, \varphi \rangle = \int_V (\gamma_0^- \varphi \cdot \Delta v + \nabla \gamma_0^- \varphi \cdot \nabla v) dx \quad (1.24)$$

*представляет собой непрерывный линейный функционал  $\gamma_1 v$  на  $H^{1/2}(\partial V)$ , совпадающий при  $v \in H^2(V)$  с обобщенной функцией  $v_{\mathbf{n}}|_{\partial V} \in L_2(\partial V) \subset H^{-1/2}(\partial V)$ . Кроме того*

$$\gamma_1 : H_{\mathcal{P}}^1(V) \rightarrow H^{-1/2}(\partial V)$$

*есть непрерывное отображение.*

Так как пространство  $C^\infty(\bar{V})$  плотно в  $H_{\mathcal{P}}^1(V)$ , то первая формула Грина может быть распространена по непрерывности. Следовательно, для всех  $v \in H_{\mathcal{P}}^1(V)$ ,  $u \in H^1(V)$  верно равенство

$$\int_V (u\Delta v + \nabla u \nabla v) dx = \langle \gamma_1 v, \gamma_0 u \rangle. \quad (1.25)$$

Вернемся к доказательству теоремы. Используя граничные условия

(1.13),(1.14), преобразуем правые части равенств (1.17),(1.18):

$$\begin{aligned}
\int_{\partial V_1} \bar{v}_1 \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{n}} ds &= \int_{\partial V_1 \setminus \bar{\Omega}_1} \bar{v}_1 \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{n}} ds, & \int_{\partial V_2} \bar{v}_2 \frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{n}} ds &= \int_{\partial V_2 \setminus \bar{\Omega}_2} \bar{v}_2 \frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{n}} ds, \\
\int_{\partial V_4'} \bar{v}_4 \frac{\partial v_4}{\partial \mathbf{n}} ds &= - \int_{\partial V_1 \setminus \bar{\Omega}_1} \bar{v}_1 \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{n}} ds - \\
&\quad - \int_{\partial V_2} \bar{v}_2 \frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{n}} ds - \int_{\partial V_3'} \bar{v}_3 \frac{\partial v_3}{\partial \mathbf{n}} ds + \int_{\partial B} \bar{v}_4 \frac{\partial v_4}{\partial \mathbf{n}} ds.
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Из равенств (1.17),(1.18) и (1.26), а также условий сопряжения выводим

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B} \bar{v}_4 \frac{\partial v_4}{\partial \mathbf{n}} ds &= -k_e^2 \int_{V_1} |v_1|^2 dx - \int_{V_2} k^2(x) |v_2|^2 dx - \\
&\quad - k_e^2 \int_{V_4} |v_4|^2 dx - \int_{V_3} k^2(x) |v_3|^2 dx + \\
&\quad + \sum_{i=1}^4 \int_{V_i} |\nabla v_i|^2 dx = - \int_{\partial B} \bar{v}_5 \frac{\partial v_5}{\partial \mathbf{n}} ds.
\end{aligned} \tag{1.27}$$

3. Далее доказательство тривиальности решения проводится для нескольких случаев, когда однородная среда и/или рассеиватель являются (не являются) поглощающими.

3.1. Пусть функция  $\text{Im } k(x) \equiv 0$  в  $\bar{Q}$  и  $\text{Im } k_e$  в  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}$ . Используя условия излучения на бесконечности, получим для мнимой части выражений в (1.27):

$$\begin{aligned}
\text{Im} \left( \int_{\partial B} \bar{v}_5 \frac{\partial v_5}{\partial \mathbf{n}} ds \right) &= \text{Im} \left( \int_{\partial B} \bar{v}_5 (ik_e v_5 + o(R^{-1})) ds \right) = \\
&= k_e \int_{\partial B} |v_5|^2 ds + \int_{\partial B} o(R^{-2}) ds = \\
&= k_e \int_{\partial B} |v_5|^2 ds + o(1) = 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Равенство нулю следует из того, что все слагаемые в средней части (1.27) являются чисто вещественными.

Из леммы Реллиха (см.[19], стр.88) следует, что  $v_5 \equiv 0$  в  $V_5$  и  $v_4 \equiv 0$  в  $V_4$ , то есть решение однородной краевой задачи тривиально *вне* области неоднородности.

Покажем, что  $v_3 \equiv 0$  в  $\bar{Q}$ . Используя условия сопряжения и гладкость полного поля, сформулируем для функции  $v_3 \in C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q})$  следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} (\Delta + k^2(x))u_3(x) = 0, & x \in V_3, \\ u_3|_{\partial Q} = \frac{\partial u_3}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial Q} = 0. \end{cases} \quad (1.28)$$

причем функция  $k(x) \in C^\infty(\bar{Q}) \subset C^\alpha(\bar{Q})$  при любом  $\alpha > 0$ . Покажем, что  $v_3 \equiv 0$  в  $\bar{Q}$ .

Применяя вторую формулу Грина к паре функций  $v_3(x), G(x, y)$ , получим, учитывая однородные условия для  $v_3(x)$  на  $\partial Q$  :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial Q'} \left( v_3(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial v_3(y)}{\partial \mathbf{n}} G(x, y) \right) ds_y = \\ &= \int_Q (v_3(y) \Delta G(x, y) - G(x, y) \Delta v_3(y)) dy = \\ &= \int_Q u(y) (-k_e^2 G(x, y) - \delta(x - y)) dy + \int_Q G(x, y) k^2(y) v_3(y) dy = \\ &= -v_3(x) + \int_Q G(x, y) (k^2(y) - k_e^2) v_3(y) dy, \quad x \in Q. \end{aligned}$$

Следовательно, каждое решение краевой задачи (1.28) удовлетворяет однородному интегральному уравнению Фредгольма второго порядка в ограниченной области  $Q$  :

$$v_3(x) = \int_Q G(x, y) (k^2(y) - k_e^2) v_3(y) dy, \quad x \in Q. \quad (1.29)$$

Введем в  $\bar{Q}$  функцию  $\varphi(x) = (k^2(x) - k_e^2) v_3(x)$ . Продолжим  $v_3(x)$  нулем в  $\mathbb{R}^3 \setminus Q$ ; продолжим и  $\varphi$  вне  $\bar{Q}$  нулем.



Определим функцию

$$w(x) = \int_{\mathbb{R}^3} G(x, y) \varphi(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

В области  $Q$  имеет место тождество  $v_3 \equiv w$  в силу интегрального уравнения (1.28). Покажем, что  $v_3 \equiv w$  всюду в  $\mathbb{R}^3$ .

Из гладкости функций  $v_3(x)$ ,  $k(x)$  следует включение  $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^3)$ . Так как  $w(x)$  представляет собой объемный потенциал с финитной непрерывной плотностью, то ([63], стр.207)  $w \in C^1(\mathbb{R}^3)$ . Так как  $v_3 \equiv w$  в  $Q$ , то из граничных условий для  $v_3$  на  $\partial Q$  выводим, что

$$w|_{\partial Q} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial Q} = 0.$$

В силу гладкости ядра объемного потенциала в  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}$  получим, что функция  $w(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q})$  удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца вне области неоднородности

$$(\Delta + k_e^2)w(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}$$

и условию Зоммерфельда на бесконечности. Следовательно ([19], стр. 81),

$$\int_{\partial Q} \left( w(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial w(y)}{\partial \mathbf{n}} G(x, y) \right) ds_y = \begin{cases} 0, & x \in Q, \\ w(x), & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}, \end{cases}$$

откуда и из однородных граничных условий для  $w(x)$  вытекает равенство  $w \equiv 0$  в  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}$ .

Итак,

$$v_3(x) = w(x), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Так как  $(k^2(x) - k_e^2) \in C^\alpha(\overline{Q})$  и  $v_3(x) \in C^\alpha(\overline{Q})$ , то  $\varphi \in C^\alpha(\overline{Q})$ . Далее, функция  $\varphi$  финитна в  $\mathbb{R}^3$ , то есть  $\varphi \in C_0^\alpha(\mathbb{R}^3)$ . Следовательно,  $w$  есть объемный потенциал с финитной плотностью из класса Гельдера, такой потенциал является гладким в  $\mathbb{R}^3$ . Точнее, (см. [63], стр.207)

$$w \in C_0^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3),$$

откуда в частности следует, что  $w$  удовлетворяет в  $\mathbb{R}^3$  уравнению Гельмгольца. Согласно принципу единственного продолжения ([63], стр.212) из равенства  $w \equiv 0$  в  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}$  следует, что  $v_3 = w \equiv 0$  всюду в  $\mathbb{R}^3$ .

Теперь остается показать, что  $v_1$  и  $v_2$  тривиальны. Пусть, например,  $x_0 \notin \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$  – произвольная точка. Области  $V_1$  и  $V_2$  можно построить так, чтобы  $x_0$  лежала вне  $(\bar{V}_1 \cup \bar{V}_2)$ . Таким образом, рассеянное поле  $u_s$  тривиально всюду вне экранов. Окончательно, из условий на  $\Omega_1, \Omega_2$  заключаем, что  $u_s \equiv 0$  в  $\mathbb{R}^3$ .

3.2. Пусть  $\text{Im } k(x) > 0$  всюду в  $\mathbb{R}^3$ . Из второго условия в (1.10) получим, что  $u(x) = O(R^{-2})$  на сфере  $\partial B$  сколь угодно большого радиуса  $R$  и левая часть в (1.27) стремится к нулю при  $R \rightarrow +\infty$ . Тогда

$$\begin{aligned} & - \int_{V_3} k^2(x) |v_3|^2 dx - k_e^2 \sum_{i=1,2,4} \int_{V_i} |v_i|^2 dx + \\ & + \sum_{i=1}^4 \int_{V_i} |\nabla v_i|^2 dx \rightarrow 0, \quad R \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Для мнимой части (1.30) получим

$$\begin{aligned} & - \text{Re } k_e \cdot \text{Im } k_e \left( \int_{V_1} |v_1|^2 dx + \int_{V_2} |v_2|^2 dx + \int_{V_4} |v_4|^2 dx \right) - \\ & - \int_{V_3} \text{Re } k \cdot \text{Im } k(x) |v_3|^2 dx \rightarrow 0, \quad R \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Оба слагаемых в последнем соотношении имеют один и тот же знак в силу ограничений на параметры среды. Таким образом,  $v_i(x) \equiv 0$  для всех  $i = 1, 2, 3, 4$ .

3.3. Рассмотрим случай, когда тело без поглощения ( $\text{Re } k_j(x) > 0$ ,  $\text{Im } k_j(x) = 0$ ) расположено в поглощающем свободном пространстве ( $\text{Im } k_e > 0$ ). Беря мнимую часть равенства (1.30), получим

$$- \text{Re } k_e \cdot \text{Im } k_e \left( \int_{V_1} |v_1|^2 dx + \int_{V_2} |v_2|^2 dx + \int_{V_4} |v_4|^2 dx \right) \rightarrow 0, \quad R \rightarrow +\infty,$$

откуда следует  $v_1 = 0$ ,  $v_2 = 0$  и  $v_4 = 0$ , то есть  $u_s \equiv 0$  вне  $\overline{Q}$ .

Повторяя рассуждения пункта 3.1. доказательства, рассмотрим переопределенную краевую задачу (1.28) для уравнения Гельмгольца и покажем, как и выше, что  $u_s \equiv 0$  в  $Q$ . Теорема доказана.  $\square$

## 1.2 Система интегро-дифференциальных уравнений

В этом параграфе краевая задача для уравнения Гельмгольца, сформулированная в неограниченном трехмерном пространстве, сводится к системе интегро-дифференциальных уравнений по ограниченным рассеивателям различной размерности.

Полное поле  $u(x)$  будем искать в виде

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3. \quad (1.31)$$

Здесь  $u_0$  – падающее поле, через  $u_1, u_2$  обозначены поля, рассеянные экранами  $\Omega_1, \Omega_2$  в свободном пространстве, а  $u_3$  – поле, рассеянное объемным препятствием.

Сначала выразим  $u_1$  и  $u_2$  через интегралы типа потенциала простого и двойного слоя соответственно.

Пусть  $u = u_0 + u_1$  – решение краевой задачи

$$\begin{cases} (\Delta + k_e^2)u(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}_1, \\ u|_{\Omega_1} = 0 \end{cases} \quad (1.32)$$

с условием Зоммерфельда излучения на бесконечности для  $u_1$ .

Так как рассеянное поле  $u_1(x)$  есть решение однородного уравнения Гельмгольца в  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}_1$ , то в произвольной области  $V$  (в частности, такой,

что  $\Omega_1 \subset \partial V$ ) имеет место [19] равенство

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \left( u_1(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} - \frac{\partial u_1(y)}{\partial \mathbf{n}_y} G(x, y) \right) ds = \\ = \begin{cases} -u_1(x), & x \in V, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{V}. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.33)$$

В области  $U = B \setminus \bar{V}$  (здесь  $B$  – некоторый шар, содержащий  $V$ ) с границей  $\partial U = \partial V + \partial B$  верно:

$$\begin{aligned} \int_{\partial U} \left( u_1(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} - \frac{\partial u_1(y)}{\partial \mathbf{n}_y} G(x, y) \right) ds = \\ = \begin{cases} -u_1(x), & x \in U, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{U}. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.34)$$

Покажем, что

$$\int_{\partial B} \left( u_1(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} - \frac{\partial u_1(y)}{\partial \mathbf{n}_y} G(x, y) \right) ds \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (1.35)$$

В силу условий излучения для  $u_1$  и определения функции Грина подынтегральное выражение в (1.35) может быть преобразовано:

$$\begin{aligned} u_1 \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_y} - \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}_y} G &= u_1 (ik_e G + O(r^{-2})) - (ik_e u_1 + o(r^{-1})) G = \\ &= u_1 O(r^{-2}) - o(r^{-1}) G = o(r^{-2}), \quad r \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

откуда, переходя к сферическим координатам в поверхностном интеграле, получим требуемое предельное соотношение.

Сложим первое равенство в (1.33) со вторым из (1.34), выбирая в этих соотношениях общую точку  $x \in V \subset \mathbb{R}^3 \setminus (\bar{U})$  и устремляя ее к  $\Omega_1$ . Учтем при этом, что в интегралах по  $\partial V$  из (1.33) и (1.34) векторы нормали имеют взаимно противоположное направление. Для границы  $\partial U$  примем разложение на два подмножества  $\partial B$  и  $\partial U \setminus \partial B$ . Конечно, последнее множество есть  $\partial V$ , но мы будем использовать принятое обозначение, чтобы различать

направление векторов внешних нормалей на одной поверхности двух смежных областей  $V$  и  $U$ . Вместо аргумента  $x$  будем писать  $x_+$ , указывая на предельный характер соотношений. Имеем:

$$\begin{aligned}
 -u_1(x_+) &= \int_{\partial V} u_1(y) \frac{\partial G(x_+, y)}{\partial \mathbf{n}_y} ds + \int_{\partial U \setminus \partial B} u_1(y) \frac{\partial G(x_+, y)}{\partial \mathbf{n}_y} ds - \\
 &\quad - \int_{\partial V} \frac{\partial u_1(y)}{\partial \mathbf{n}_y} G(x_+, y) ds - \int_{\partial U \setminus \partial B} \frac{\partial u_1(y)}{\partial \mathbf{n}_y} G(x_+, y) ds - \\
 &\quad - \int_{\partial B} \left( u_1(y) \frac{\partial G(x_+, y)}{\partial \mathbf{n}_y} - \frac{\partial u_1(y)}{\partial \mathbf{n}_y} G(x_+, y) \right) ds = \\
 &= \int_{\partial V} u_1(y) \frac{\partial G(x_+, y)}{\partial \mathbf{n}_y} ds - \int_{\partial V} u_1(y) \frac{\partial G(x_+, y)}{\partial \mathbf{n}_y} ds - \\
 &\quad - \int_{\partial V} \left[ \frac{\partial u_1(y)}{\partial \mathbf{n}_y} \right] G(x_+, y) ds = \\
 &= - \int_{\partial V} \varphi_1(y) G(x_+, y) ds = - \int_{\Omega_1} \varphi_1(y) G(x_+, y) ds.
 \end{aligned}$$

Здесь использована непрерывность потенциала двойного слоя в  $\bar{V}$  (см. [6], с. 408) и гладкость поля вне  $\bar{\Omega}_1$  (последнее, в частности, влечет  $\left[ \frac{\partial u_1(y)}{\partial \mathbf{n}_y} \right] \Big|_{\partial V \setminus \bar{\Omega}_1} = 0$ ).

Так как полное поле  $u = u_0 + u_1$  удовлетворяет условию  $u|_{\Omega_1} = 0$ , а оба слагаемых  $u_0$ ,  $u_1$  и потенциал простого слоя непрерывны в подходящей окрестности произвольной внутренней точки экрана  $\Omega_1$ , то верно равенство

$$- \int_{\Omega_1} G(x, y) \varphi_1(y) ds_y = u_0(x), \quad x \in \Omega_1.$$

Пусть  $u = u_0 + u_2$  – решение краевой задачи задачи

$$\begin{cases} (\Delta + k_e^2)u(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_2, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Omega_2} = 0. \end{cases} \quad (1.36)$$

Запишем снова (1.33) и (1.34). Применим к этим равенствам операцию дифференцирования по соответствующей нормали  $\mathbf{n}$ , сложим новые урав-

нения, устремляя общую точку наблюдения  $x \in V$  к  $\Omega_2$  :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u_2(x_+)}{\partial \mathbf{n}} &= \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \int_{\partial V} u_2(y) \frac{\partial G(x_+, y)}{\partial \mathbf{n}_y} ds + \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \int_{\partial U \setminus \partial B} u_2(y) \frac{\partial G(x_+, y)}{\partial \mathbf{n}_y} ds \right) - \\ &- \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \int_{\partial V} \frac{\partial u_2(y)}{\partial \mathbf{n}_y} G(x_+, y) ds + \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \int_{\partial U \setminus \partial B} \frac{\partial u_2(y)}{\partial \mathbf{n}_y} G(x_+, y) ds \right) * = \end{aligned}$$

Слагаемые во второй скобке последнего равенства сократятся, так как в окрестности внутренних точек экрана  $\Omega_2$  нормальная производная поля  $\frac{\partial u_2(y)}{\partial \mathbf{n}_y}$  непрерывна. При переходе через  $\Omega_2$  само поле  $u_s$  претерпевает разрыв. Поэтому сумма слагаемых в первой скобке приводит к интегралу с плотностью  $[u_2]$  (важно отметить, что в первой паре интегралов одно и то же обозначение  $u_2(y)$  используется для предельных значений поля на границе смежных областей  $U$  и  $V$  с *различных* сторон). Таким образом, получим

$$* = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \int_{\partial V} [u_2(y)] \frac{\partial G(x_+, y)}{\partial \mathbf{n}_y} ds = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \int_{\Omega_2} \varphi_2(y) \frac{\partial G(x_+, y)}{\partial \mathbf{n}_y} ds. \quad (1.37)$$

Непрерывность нормальной производной потенциала двойного слоя во внутренних точках экрана  $\Omega_2$  и граничное условие  $\left. \frac{\partial(u_2+u_0)}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Omega_2} = 0$  приводят к окончательному виду уравнения:

$$\int_{\Omega_2} \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y} (x, y) \varphi_2(y) ds = \frac{\partial u_0(x)}{\partial \mathbf{n}_x}, \quad x \in \Omega_2.$$

*Замечание 1.3.* Для получения интегральных представлений полей, рассеянных экранами, были использованы свойства непрерывности потенциалов простого и двойного слоя. Заметим, что потенциалы определяются как интегралы по *замкнутым* поверхностям. В рассматриваемой же задаче дифракции экраны не являются замкнутыми. Тем не менее, нужные свойства потенциала переносятся без труда и на этот случай.

Не ограничивая общности, можно считать, что функции  $\varphi_i$  непрерывны во внутренних точках экранов  $\Omega_i$ . Действительно, так как [105]  $\varphi_1 =$

$[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}]_{\Omega_1}$ ,  $\varphi_2 = [u]_{\Omega_2}$ , а поле  $u$  является по предположению гладким вне экранов, то поверхностные плотности  $\varphi_i$  непрерывны на  $\Omega_i$  (всюду вне краев экранов).

Покажем, например, что для интеграла  $p(x) = \int_{\partial V} \varphi_2(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}_y} ds$  по *незамкнутой* поверхности производная по нормали непрерывна во *внутренних* точках экрана  $\Omega_2$ . Пусть  $\Omega_0$  – произвольная гладкая замкнутая поверхность, содержащая  $\Omega_2$ , а  $\varphi_0$  – продолжение  $\varphi$  нулем на  $\Omega_0$ . Тогда

$$p(x) = \int_{\Omega_0} \varphi_0(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}_y} ds$$

есть потенциал двойного слоя с *разрывной* плотностью.

Пусть  $x_0 \in \Omega_2$  – произвольная внутренняя точка экрана,  $B_r(x_0)$  – шар радиуса  $r < \text{dist}(x_0, \partial\Omega_2)$ ,  $\omega = \Omega_2 \cap B_r(x_0)$  и  $\omega' = \Omega_2 \setminus \omega$ . Рассмотрим произвольную гладкую функцию  $c(x)$ , равную единице на  $\omega$  и нулю на  $\Omega_0 \setminus \omega$ . Тогда

$$\begin{aligned} p(x) &= \int_{\Omega_0} c(y) \varphi_0(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}_y} ds + \int_{\omega'} (1 - c(y)) \varphi_0(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}_y} ds = \\ &= p_1(x) + p_2(x). \end{aligned}$$

Здесь  $p_1(x)$  – потенциал двойного слоя с *непрерывной* плотностью, нормальная производная которого непрерывна в  $x_0$ . Функция  $p_2(x)$  – бесконечно дифференцируема в окрестности этой точки, так как ядро интегрального оператора не имеет особенности.

Аналогичные рассуждения проводятся и для интеграла по незамкнутой поверхности типа потенциала простого слоя.

Таким образом, поля  $u_1, u_2$  в разложении (1.31) представимы в виде

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \int_{\Omega_1} G(x,y) \varphi_1(y) ds_y, \\ u_2(x) &= - \int_{\Omega_2} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}_y} \varphi_2(y) ds_y, \end{aligned} \tag{1.38}$$

где  $G(x, y) = \frac{e^{ik_e|x-y|}}{4\pi|x-y|}$ , а  $\varphi_1, \varphi_2$  – неизвестные функции.

Получим интегральное представление компоненты  $u_3$ . Так как  $u = u_0 + (u_1 + u_2 + u_3) = u_0 + u_s$ , поле  $u_s$  удовлетворяет условиям излучения, а  $u_1$  и  $u_2$  удовлетворяют им по построению (в силу свойств фундаментального решения  $G(x, y)$ ), то и  $u_3$  удовлетворяет условию Зоммерфельда на бесконечности.

Введем функции

$$\tilde{k}(x) = (k^2(x) - k_e^2), \quad F(x) := -\tilde{k}(x)u(x)$$

и перепишем уравнение (1.6) в виде

$$(\Delta + k_e^2)u(x) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus (\partial Q \cup \bar{\Omega}). \quad (1.39)$$

Поле  $u_0 + u_1 + u_2$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца вне экранов в силу определения  $u_l$  ( $l = 0, 1, 2$ ):

$$(\Delta + k_e^2)(u_0 + u_1 + u_2)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}. \quad (1.40)$$

Вычитая (1.40) из уравнения (1.39), получим:

$$(\Delta + k_e^2)u_3(x) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus (\partial Q \cup \bar{\Omega}). \quad (1.41)$$

Решение уравнения (1.41), удовлетворяющее условию излучения на бесконечности, представляется (см. [6], с. 395) объемным потенциалом

$$u_3(x) = \int_Q \tilde{k}(y)G(x, y)u(y)dy, \quad (1.42)$$

так как плотность этого потенциала непрерывна,

$$\rho(x, y) = \tilde{k}(y)e^{ik_e|x-y|}u(y) \in C(\bar{Q}) \times C(\bar{Q}),$$

в силу условий гладкости для  $u(y)$  и  $k(y)$ .



Итак, из (1.31), (1.38) и (1.42) выводим представление полного поля вне рассеивателей

$$u(x) = u_0(x) + \int_Q \tilde{k}(y)G(x, y)u(y)dy + \int_{\Omega_1} G(x, y)\varphi_1(y)ds_y - \int_{\Omega_2} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \varphi_2(y)ds_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus (\bar{Q} \cup \bar{\Omega}). \quad (1.43)$$

и первое интегральное уравнение системы по области неоднородности

$$u(x) - \int_Q \tilde{k}(y)G(x, y)u(y)dy - \int_{\Omega_1} G(x, y)\varphi_1(y)ds_y + \int_{\Omega_2} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \varphi_2(y)ds_y = u_0(x), \quad x \in \bar{Q}. \quad (1.44)$$

Получим уравнение на экране  $\Omega_1$ . Так как рассеиватели не пересекаются, то поля  $u_2$  и  $u_3$  бесконечно дифференцируемы в окрестности экрана  $\Omega_1$ ; кроме того, потенциал простого слоя с непрерывной на  $\Omega_1$  плотностью непрерывен в подходящей окрестности  $U(x)$  произвольной внутренней точки  $x$  этого экрана. Переходя в (1.43) к пределу при стремлении точки  $x$  к произвольной *внутренней* точке экрана  $\Omega_1$  и используя условие Дирихле (1.8), получим интегральное уравнение на  $\Omega_1$  :

$$- \int_Q \tilde{k}(y)G(x, y)u(y)dy - \int_{\Omega_1} G(x, y)\varphi_1(y)ds_y + \int_{\Omega_2} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \varphi_2(y)ds_y = u_0(x), \quad x \in \Omega_1. \quad (1.45)$$

Получим уравнение на экране  $\Omega_2$ . Так как рассеиватели не имеют общих точек, то поля  $u_1$  и  $u_3$  бесконечно дифференцируемы в окрестности экрана  $\Omega_2$ . Потенциал двойного слоя с непрерывной на  $\Omega_2$  плотностью имеет непрерывную нормальную производную в произвольной внутренней точке этого экрана. Дифференцируя (1.43) по нормали, переходя к пределу при стремлении точки  $x$  к произвольной *внутренней* точке экрана  $\Omega_2$  и ис-

пользуя условие Неймана (1.8), получим интегро-дифференциальное уравнение на  $\Omega_2$  :

$$\begin{aligned} - \int_Q \tilde{k}(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_x} u(y) dy - \int_{\Omega_1} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_x} \varphi_1(y) ds_y + \\ + \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \left( \int_{\Omega_2} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \varphi_2(y) ds_y \right) = \frac{\partial u_0(x)}{\partial \mathbf{n}_x}, \quad x \in \Omega_2. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Итак, краевая задача дифракции (1.6)–(1.11) сведена [115, 117, 136] к системе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (1.43)–(1.46). Ниже проводится исследование этой системы.

### 1.3 Эллиптичность матричного интегро-дифференциального оператора в пространствах Соболева

Перепишем систему интегро-дифференциальных уравнений (1.43)–(1.46) по ограниченным многообразиям в операторном виде:

$$\begin{cases} (\mathcal{I} - \mathcal{A})u - \mathcal{K}_{12}\varphi_1 + \mathcal{K}_{13}\varphi_2 = u_0|_Q, \\ -\mathcal{K}_{21}u - \mathcal{S}_1\varphi_1 + \mathcal{K}_{23}\varphi_2 = u_0|_{\Omega_1}, \\ -\mathcal{K}_{31}u - \mathcal{K}_{32}\varphi_1 - \mathcal{S}_2\varphi_2 = u_{0, \mathbf{n}_x}|_{\Omega_2}. \end{cases} \quad (1.47)$$

Операторы в (1.47) определим согласно выведенным уравнениям,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u &= \int_Q \tilde{k}(y) G(x, y) u(y) dy, \quad x \in Q, \\ \mathcal{K}_{12}\varphi_1 &= \int_{\Omega_1} G(x, y) \varphi_1(y) ds_y, \quad x \in Q, \\ \mathcal{K}_{13}\varphi_2 &= \int_{\Omega_2} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \varphi_2(y) ds_y, \quad x \in Q, \\ \mathcal{K}_{21}u &= \int_Q \tilde{k}(y) G(x, y) u(y) dy, \quad x \in \Omega_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_1\varphi_1 &= \int_{\Omega_1} G(x, y)\varphi_1(y)ds_y, \quad x \in \Omega_1, \\
\mathcal{K}_{23}\varphi_2 &= \int_{\Omega_2} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \varphi_2(y)ds_y, \quad x \in \Omega_1, \\
\mathcal{K}_{31}u &= \int_Q \tilde{k}(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_x} u(y)dy, \quad x \in \Omega_2, \\
\mathcal{K}_{32}\varphi_1 &= \int_{\Omega_1} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_x} \varphi_1(y)ds_y, \quad x \in \Omega_2, \\
\mathcal{S}_2\varphi_2 &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \left( \int_{\Omega_2} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \varphi_2(y)ds_y \right), \quad x \in \Omega_2,
\end{aligned}$$

$\mathcal{I}$  – тождественный оператор.

Определим пространства решений системы уравнений (1.44)–(1.46).

Полное поле  $u(x)$  в области  $Q$  будем искать в пространстве  $L_2(Q)$  квадратично суммируемых функций; это пространство наиболее удобно с точки зрения исследования интегрального оператора. Заметим, что  $u$  должно удовлетворять условию конечности энергии; в частности, должно выполняться  $u \in H^1(Q)$ . Выбирая более широкое пространство для решения  $u(x)$ , мы покажем позже, что оно удовлетворяет условию конечности энергии.

Функции  $\varphi_k$  будем искать в пространствах Соболева. Рассмотрим произвольные гладкие замкнутые поверхности  $M_1$  и  $M_2$ , содержащие экраны  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  соответственно, и пространства Соболева  $H^s(M_k)$  на гладких замкнутых многообразиях без края (определения см. в [1, 36, 105]).

Будем рассматривать введенные операторы как отображения в следующих пространствах:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}, \mathcal{A} &: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q), \\
\mathcal{K}_{12} &: \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}_1) \rightarrow L_2(Q), \quad \mathcal{K}_{13} : \tilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega}_2) \rightarrow L_2(Q), \\
\mathcal{S}_1 &: \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}_1) \rightarrow H^{1/2}(\Omega_1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{21} : L_2(Q) &\rightarrow H^{1/2}(\Omega_1), & \mathcal{K}_{23} : \tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega}_2) &\rightarrow H^{1/2}(\Omega_1) \\
\mathcal{K}_{31} : L_2(Q) &\rightarrow H^{-1/2}(\Omega_2), & \mathcal{K}_{32} : \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}_1) &\rightarrow H^{-1/2}(\Omega_2), \\
\mathcal{S}_2 : \tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega}_2) &\rightarrow H^{-1/2}(\Omega_2),
\end{aligned}$$

где

$$H^{\pm 1/2}(\Omega_k) = \{\varphi|_{\Omega_k} : \varphi \in H^{\pm 1/2}(M_k)\} \quad (1.48)$$

пространства сужений функций из  $H^{\pm 1/2}(M_k)$  на незамкнутый экран  $\Omega_k$  [53], а

$$\tilde{H}^{\pm 1/2}(\bar{\Omega}_k) = \{\varphi \in H^{\pm 1/2}(M_k) : \text{supp } \varphi \in \bar{\Omega}_k\} \quad (1.49)$$

– пространства функций из  $H^{\pm 1/2}(M_k)$ , компактные носители которых лежат в  $\bar{\Omega}_k$  [53].

Определим операторы  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{S}_i$  и  $\mathcal{K}_{ij}$  как композиции операторов продолжения, операторов типа потенциала, операторов следа и операторов сужения на ограниченные незамкнутые многообразия. Такие определения удобны для исследования гладкости решений системы интегро-дифференциальных уравнений.

Для интегральных операторов типа потенциала введем следующие обозначения :

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_0 u(x) &= \int_Q \tilde{k}(y) G(x, y) u(y) ds_y, \quad x \in \mathbb{R}^3, \\
\mathcal{K}_1 \varphi_1(x) &= \int_{\Omega_1} G(x, y) \varphi_1(y) ds_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_1, \\
\mathcal{K}_2 \varphi_2(x) &= \int_{\Omega_2} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \varphi_2(y) ds_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_2.
\end{aligned} \quad (1.50)$$

Так как области определения и множества прибытия рассматриваемых операторов суть пространства Соболева обобщенных функций, то необходимо дать корректное определение действия операторов следа  $\bullet|_{\Omega_1}$  и  $\frac{\partial \bullet}{\partial \mathbf{n}}|_{\Omega_2}$  в выбранных функциональных пространствах.

Для этого сначала введем оператор продолжения нулем плотностей  $\varphi_k$  на произвольные гладкие замкнутые поверхности  $M_k$ , содержащие экраны  $\Omega_k$ . Такие операторы ограничены по определению пространств для  $\varphi_k$ . Операторы продолжения плотностей  $\varphi_1, \varphi_2$  нулем на замкнутые поверхности  $M_k$  обозначим через  $\mathcal{E}_k$ .

Теперь определим действие операторов типа потенциала:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1 \mathcal{E}_1 \varphi_1(x) &= \int_{\Omega_1} G(x, y) \mathcal{E}_1 \varphi_1(y) ds_y : \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}_1) \rightarrow H_{loc}^1(\mathbb{R}^3), \\ \mathcal{K}_2 \mathcal{E}_k \varphi_2(x) &= \int_{\Omega_2} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \mathcal{E}_2 \varphi_2(y) ds_y : \tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega}_2) \rightarrow H_{loc}^1(\mathbb{R}^3). \end{aligned} \quad (1.51)$$

Далее, используем определения операторов  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  [67] в смысле следов распределений:

$$\begin{aligned} \gamma_0 : u &\mapsto \gamma_0 u = u|_{\Gamma} : H_{loc}^s(\mathbb{R}^3) \rightarrow H^{s-1/2}(\Gamma_1), \\ \gamma_1 : u &\mapsto \gamma_1 u = \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} : H_{loc}^s(\mathbb{R}^3) \rightarrow H^{s-3/2}(\Gamma_2), \end{aligned} \quad (1.52)$$

где  $\Gamma$  – произвольная замкнутая гладкая поверхность класса  $C^\infty$ , содержащая  $\Omega_1$  (или  $\Omega_2$ ).

Введем операторы сужения  $\sigma_k$  функций, заданных на замкнутой поверхности  $\Gamma$ , на незамкнутый экран  $\Omega_k$ .

$$\sigma_k : H^s(\Gamma) \rightarrow H^s(\Omega_k), \quad (1.53)$$

Эти операторы также являются ограниченными отображениями в силу определения пространств Соболева (см. равенства (1.49), (1.48)). Рассмотрим также оператор сужения на  $Q$ ,

$$\sigma_0 : H_{loc}^s(\mathbb{R}^3) \rightarrow H^s(Q), \quad (1.54)$$

являющийся ограниченным.

Таким образом, введенные операторы можно определить согласно равен-

ствам:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}u &= \sigma_0 \mathcal{K}_0 u, & \mathcal{K}_{12} \varphi_1 &= \sigma_0 \mathcal{K}_1 \mathcal{E}_0 \varphi_1, \\
\mathcal{K}_{13} \varphi_2 &= \sigma_0 \mathcal{K}_2 \mathcal{E}_0 \varphi_2, & \mathcal{K}_{21} u &= \sigma_1 \gamma_0 \mathcal{K}_0 u, \\
\mathcal{S}_1 \varphi_1 &= \sigma_1 \gamma_0 \mathcal{K}_1 \mathcal{E}_0 \varphi_1, & \mathcal{K}_{23} \varphi_2 &= \sigma_1 \gamma_0 \mathcal{K}_2 \mathcal{E}_0 \varphi_2, \\
\mathcal{K}_{31} u &= \sigma_2 \gamma_1 \mathcal{K}_0 u, & \mathcal{K}_{32} \varphi_1 &= \sigma_2 \gamma_1 \mathcal{K}_1 \mathcal{E}_0 \varphi_1, \\
\mathcal{S}_2 \varphi_2 &= -\sigma_2 \gamma_1 \mathcal{K}_2 \mathcal{E}_0 \varphi_2.
\end{aligned} \tag{1.55}$$

Введем матричный оператор  $\widehat{\mathcal{L}}$  системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (1.47):

$$\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\mathcal{L}}_1 - \widehat{\mathcal{L}}_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{I} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathcal{S}_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathcal{S}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{K}_{12} & -\mathcal{K}_{13} \\ \mathcal{K}_{21} & 0 & -\mathcal{K}_{23} \\ \mathcal{K}_{31} & \mathcal{K}_{32} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.56}$$

Система (1.47) может быть переписана в виде

$$\widehat{\mathcal{L}} \mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \tag{1.57}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= (u, \varphi_1, \varphi_2)^T \in L_2(Q) \times \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}_1) \times \tilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega}_2), \\
\mathbf{u}_0 &= (u_0|_Q, u_0|_{\Omega_1}, u_{0,\mathbf{n}}|_{\Omega_2})^T \in L_2(Q) \times H^{1/2}(\Omega_1) \times H^{-1/2}(\Omega_2).
\end{aligned}$$

Введем обозначения для области определения и области прибытия матричного оператора  $\widehat{\mathcal{L}}$ :

$$\begin{aligned}
L_2(Q) \times \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}_1) \times \tilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega}_2) &=: \mathbf{X}, \\
L_2(Q) \times H^{1/2}(\Omega_1) \times H^{-1/2}(\Omega_2) &=: \mathbf{X}'.
\end{aligned}$$

Тройка  $(u, \varphi_1, \varphi_2) \in \mathbf{X}$ , удовлетворяющая (1.57), – **решение** системы интегро-дифференциальных уравнений.

**Теорема 1.2.** [136] Пусть объемный рассеиватель  $Q$  характеризуется гладким показателем преломления:  $k(x) \in C^\infty(\overline{Q})$ , а всюду в  $\mathbb{R}^3$  выполнены условия  $\operatorname{Re} k(x) > 0$ ,  $\operatorname{Im} k(x) \geq 0$ . Тогда матричный оператор  $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$  является эллиптическим.

*Доказательство.* Так как  $K_0$  отображает непрерывно  $L_2(Q)$  в  $H_{loc}^2$ ,  $\sigma_0 : H_{loc}^2 \rightarrow H^2(Q)$  ограничен, то слабосингулярный интегральный оператор  $\mathcal{A}$  действует непрерывно из  $L_2(Q)$  в  $H^2(Q)$ . Так как вложение  $H^2(Q) \hookrightarrow L_2(Q)$  компактно, то оператор  $\mathcal{A} : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$  компактен. Следовательно, оператор  $\mathcal{I} - \mathcal{A} : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$  эллиптичен.

Слабосингулярный оператор  $\mathcal{S}_1 : \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}_1) \rightarrow H^{1/2}(\Omega_1)$  и гиперсингулярный оператор  $\mathcal{S}_2 : \tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega}_2) \rightarrow H^{-1/2}(\Omega_2)$  являются эллиптическими, так как для них выполнено неравенство Гординга [67]. Точнее, найдутся положительные константы  $c_1, c_2$  и компактные операторы  $\mathcal{C}_1 : \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}_1) \rightarrow H^{1/2}(\Omega_1)$  и  $\mathcal{C}_2 : \tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega}_2) \rightarrow H^{-1/2}(\Omega_2)$ , такие, что для всех  $\varphi \in \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}_1)$  и всех  $\psi \in \tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega}_2)$  выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \left( (\mathcal{S}_1 + \mathcal{C}_1)\varphi, \varphi \right)_{L_2(\Omega_1)} &\geq c_1 \|\varphi\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}_1)}, \\ \left( (\mathcal{S}_2 + \mathcal{C}_2)\psi, \psi \right)_{L_2(\Omega_2)} &\geq c_2 \|\psi\|_{\tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega}_2)}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Следовательно, матричный оператор  $\hat{\mathcal{L}}_1 : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$  эллиптичен.

Оператор  $\hat{\mathcal{L}}_2$  компактен в силу бесконечной гладкости ядер всех операторов  $\mathcal{K}_{ij}$  (это следует из предположения, что рассеиватели не пересекаются). Таким образом,  $\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}_1 - \hat{\mathcal{L}}_2 : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$  – эллиптический оператор.  $\square$

**Следствие 1.1.** [115, 117, 136] *Оператор  $\hat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$  является фредгольмовым оператором (с нулевым индексом).*

#### 1.4 Эквивалентность краевой задачи и системы интегро-дифференциальных уравнений. Непрерывная обратимость матричного интегро-дифференциального оператора

В этом параграфе будет показано, что краевая задача дифракции в квазиклассической постановке эквивалентна системе интегро-дифференциальных уравнений. Система (1.57) рассматривается в более широких классах функций, чем исходная краевая задача. Прежде всего будет

показано, что всякое решение системы (1.57) удовлетворяет условиям гладкости (1.11), если правая часть системы является гладкой.

**Теорема 1.3.** [115, 117, 136] Пусть падающее поле задается функцией  $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ , а система (1.47) (или (1.57)) имеет решение

$$(u, \varphi_1, \varphi_2) \in L_2(Q) \times \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}_1) \times \tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega}_2).$$

Тогда для поверхностных плотностей  $\varphi_1, \varphi_2$  верно включение  $\varphi_i \in C^\infty(\Omega_i)$ , а полное поле  $u(x)$ , продолженное по формуле (1.43), удовлетворяет условиям гладкости (1.11).

*Доказательство.* 1. Из представления

$$u(x) = u_0(x) + \int_Q \tilde{k}(y)G(x, y)u(y)dy + \int_{\Omega_1} G(x, y)\varphi_1(y)ds_y - \int_{\Omega_2} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \varphi_2(y)ds_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus (\bar{Q} \cup \bar{\Omega}).$$

полного поля и бесконечной дифференцируемости ядер всех интегральных операторов следует

$$u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus (\bar{Q} \cup \bar{\Omega}_i)).$$

2. Рассмотрим первое уравнение

$$u(x) - \int_Q \tilde{k}(y)G(x, y)u(y)dy - \int_{\Omega_1} G(x, y)\varphi_1(y)ds_y + \int_{\Omega_2} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \varphi_2(y)ds_y = u_0(x), \quad x \in \bar{Q},$$

исследуемой системы. Имеем по предположению:  $u_0 \in C^\infty(Q)$ . Слагаемые  $u_1, u_2$  принадлежат  $C^\infty(Q)$ , т.к. экраны и тела не пересекаются. Далее,  $u_3 \in C(Q)$ , так как интегральный оператор (1.42) является слабосингулярным и действует из  $L_2(Q)$  в  $H^2(Q) \hookrightarrow C(\bar{Q})$ .

Следовательно,  $u \in C(Q)$ . Значит,  $u_3$  выражается через Ньютонов потенциал с непрерывной в  $\bar{Q}$  плотностью, откуда следует [6] включение



$u_3 \in C^\infty(Q) \cap C^1(\mathbb{R}^3)$ . Таким образом,

$$u \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus (\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2)) \cap C^2(Q).$$

3. Рассмотрим второе уравнение системы (1.57):

$$\begin{aligned} - \int_Q \tilde{k}(y) G(x, y) u(y) dy - \int_{\Omega_1} G(x, y) \varphi_1(y) ds_y + \\ + \int_{\Omega_2} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \varphi_2(y) ds_y = u_0(x), \quad x \in \Omega_1. \end{aligned}$$

По предположению  $u_0 \in C^\infty(\Omega_1)$ . Так как рассеиватели не пересекаются, то  $K_{21}u, K_{23}\varphi_2 \in C^\infty(\Omega_1)$ . Запишем уравнение в виде

$$\mathcal{S}_1 \varphi_1(x) = \int_{\Omega_1} G(x, y) \varphi_1(y) ds_y = v_0(x).$$

Так как оператор  $\mathcal{S}_1$  является эллиптическим оператором из  $\tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}_1)$  в  $H^{1/2}(\Omega_1)$ , а по доказанному правая часть  $v_0 \in C^\infty(\Omega_1)$ , то [1] плотность  $\varphi_1$  является гладкой функцией в каждой внутренней точке экрана  $\Omega_1$ :

$$\varphi_1 \in C^\infty(\Omega_1).$$

Отметим, что  $\varphi_1(x)$  имеет особенность [105] порядка  $d^{-1/2}$  вблизи края экрана, где  $d = \text{dist}(x, \partial\Omega_1) > 0$ ,  $x \in \Omega_1$ .

4. Рассмотрим третье уравнение системы (1.57):

$$\begin{aligned} - \int_Q \tilde{k}(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_x} u(y) dy - \int_{\Omega_1} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_x} \varphi_1(y) ds_y + \\ + \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \left( \int_{\Omega_2} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \varphi_2(y) ds_y \right) = \frac{\partial u_0(x)}{\partial \mathbf{n}_x}, \quad x \in \Omega_2. \end{aligned}$$

Повторяя рассуждения предыдущего пункта, получим:  $\partial u_0 / \partial \mathbf{n}_x, \mathcal{K}_{31}u, \mathcal{K}_{32}\varphi_1 \in C^\infty(\Omega_2)$ . Записывая уравнение в виде

$$\mathcal{S}_2 \varphi_2(x) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \left( \int_{\Omega_2} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \varphi_2(y) ds_y \right) = v_0(x),$$

выводим с учетом эллиптичности оператора  $\mathcal{S}_2 : \tilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega}_2) \rightarrow H^{-1/2}(\Omega_2)$ , что

$$\varphi_2 \in C^\infty(\Omega_2).$$

5. Докажем непрерывность функции  $u_1$  во внутренних точках экрана  $\Omega_1$ . Фиксируем произвольную внутреннюю точку  $x_0 \in \Omega_1$ , определим параметры  $d = \text{dist}(x_0, \partial\Omega_1) > 0$  и  $\varepsilon = d/4$ . Определим функцию-срезку  $c(y)$  такую, что

$$c(y) \in C(\overline{\Omega}_1), \quad c(y) = \begin{cases} 1, & |y - x| < \varepsilon, \\ 0, & |y - x| > 2\varepsilon. \end{cases}$$

Представим  $u_1$  в виде

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \int_{\Omega_1} G(x, y)c(y)\varphi_1(y)ds_y + \\ &+ \int_{\Omega'_\varepsilon(x_0)} G(x, y)(1 - c(y))\varphi_1(y)ds_y = I_1(x) + I_2(x), \end{aligned}$$

где

$$\Omega_\varepsilon(x_0) = \Omega_1 \cap B_\varepsilon(x_0) \text{ и } \Omega'_\varepsilon(x_0) = \Omega_1 \setminus \Omega_\varepsilon(x_0).$$

В окрестности  $B_\varepsilon(x_0)$  оба слагаемых  $I_k(x)$  непрерывны. Действительно, интеграл  $I_1$  типа потенциала простого слоя имеет непрерывную (вплоть до края экрана) плотность (см. [6], стр. 399), а интеграл  $I_2(x)$  имеет бесконечно дифференцируемое ядро при  $x \in B_\varepsilon(x_0)$ . Итак,

$$u_1 \in \bigcap_{\delta > 0} C(\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega_{1,\delta}).$$

Докажем непрерывность функции  $u_2$  во внутренних точках экрана  $\Omega_2$  с каждой стороны гладкой замкнутой поверхности  $M_2 \supset \Omega_2$ . Фиксируем внутреннюю точку  $x_0 \in \Omega_2$ , положим  $d = \text{dist}(x_0, \partial\Omega_2) > 0$  и  $\varepsilon = d/4$ . Определим как и выше функцию-срезку  $c(y) \in C(M_2)$  и представим  $u_2$  в

виде

$$u_2(x) = - \int_M \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_x} c(y) \varphi_2(y) ds_y - \\ - \int_{M'_\varepsilon(x_0)} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_x} (1 - c(y)) \varphi_2(y) ds_y = I_1 + I_2$$

где  $M_\varepsilon(x_0) = M \cap B_\varepsilon(x_0)$  и  $M'_\varepsilon(x_0) = M \setminus M_\varepsilon(x_0)$ . Оба слагаемых  $I_k$  являются непрерывными в окрестности точки  $x_0$  с каждой стороны экрана  $\Omega_2$ . Действительно,  $I_1(x)$  – интеграл типа потенциала двойного слоя с непрерывной на  $M_2$  плотностью и имеет (см. [6], стр. 408) конечные пределы при  $x \rightarrow x_0 \in \Omega_2$  с каждой стороны экрана. Интеграл  $I_2$  имеет бесконечно дифференцируемое ядро, поэтому  $I_2(x) \in C^\infty(B_\varepsilon(x_0))$ . Следовательно,

$$u_2 \in \bigcap_{\delta > 0} C(\overline{M}_+ \setminus \partial\Omega_{2,\delta}) \bigcap_{\delta > 0} C(\overline{M}_- \setminus \partial\Omega_{2,\delta}).$$

Таким образом,

$$u \in \bigcap_{\delta > 0} C(\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega_{1,\delta}) \bigcap_{\delta > 0} C(\overline{M}_+ \setminus \partial\Omega_{2,\delta}) \bigcap_{\delta > 0} C(\overline{M}_- \setminus \partial\Omega_{2,\delta}).$$

6. Проверим условие конечности энергии.

Для плотностей  $\varphi_1 \in \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}_1)$ ,  $\varphi_2 \in \tilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega}_2)$ , построим их продолжения нулем  $\mathcal{E}_0\varphi_1$  и  $\mathcal{E}_0\varphi_2$  на замкнутые поверхности  $M_1 \supset \Omega_1$  и  $M_2 \supset \Omega_2$  соответственно. Имеем:  $\mathcal{E}_0\varphi_1 \in H^{-1/2}(M_1)$  и  $\mathcal{E}_0\varphi_2 \in H^{1/2}(M_2)$ .

Тогда для операторов типа потенциала в равенстве (1.43) верно представление

$$\mathcal{S}'_1\varphi_1(x) = \int_{M_1} G(x, y) \mathcal{E}_0\varphi_1(y) ds_y, \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ \mathcal{S}'_2\varphi_2(x) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \left( \int_{M_2} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \mathcal{E}_0\varphi_2(y) ds_y \right), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}_2.$$

Тогда (см. [67] на стр. 615)

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'_1 : H^{-1/2}(M_1) &\rightarrow H^1_{loc}(\mathbb{R}^3), \\ \mathcal{S}'_2 : H^{1/2}(M_2) &\rightarrow H^1(M_{2,-}). \end{aligned} \tag{1.59}$$

причем отображения непрерывны. Здесь  $M_{2-}$  – произвольная ограниченная область, внешняя по отношению к замкнутой поверхности  $M_2$ .

Получим из (1.59), что  $u_1 \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$  и  $u_2 \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$  (поверхность  $M_2$  можно выбрать так, чтобы область  $M_{2-}$  содержала любую наперед заданную точку  $x \notin \bar{\Omega}_2$ ). По предположению имеем  $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ , а в силу доказанного ранее –  $u_3 \in C^1(\mathbb{R}^3)$ . Окончательно заключаем:

$$u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3).$$

Теорема доказана. □

Из Теоремы 1.3 следует эквивалентность дифференциальной и интегральной формулировок задачи дифракции.

**Теорема 1.4.** [115, 117, 136] Пусть параметры среды и неоднородного рассеивателя удовлетворяют условиям:  $k(x) \in C^\infty(\bar{Q})$ ,  $\text{Re } k(x) > 0$ ,  $\text{Im } k(x) \geq 0$  в  $\mathbb{R}^3$ , а падающее поле является всюду гладким:  $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ . Тогда задача дифракции в дифференциальной формулировке  $(\mathcal{P}_1)$  эквивалентна системе интегро-дифференциальных уравнений  $(\mathcal{P}_2)$ . Подробнее, если  $u(x)$  является квазиклассическим решением задачи  $(\mathcal{P}_1)$ , то  $(u, \varphi_1, \varphi_2)$  удовлетворяет системе (1.57) и верно интегральное представление (1.43). Обратно, если тройка  $(u, \varphi_1, \varphi_2) \in L_2(Q) \times \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}_1) \times \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}_2)$  есть решение системы (1.57) при  $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ , то функция  $u(x)$ , продолженная в  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{(Q \cup \Omega)}$  по формуле (1.43), является квазиклассическим решением задачи дифракции.

*Доказательство.* Необходимая часть теоремы фактически установлена в ходе вывода интегро-дифференциальных уравнений. Докажем ее достаточную часть.

Пусть  $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  и  $(u, \varphi_1, \varphi_2)$  – решение системы (1.47).

Из определения  $u_3$  через объемный потенциал с ядром  $G(x, y)$  и бесконечной дифференцируемости  $u_0, u_1, u_2$  в области  $Q$  вытекает, что  $u$  есть

решение уравнения Гельмгольца. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} (\Delta + k_e^2)u(x) &= (\Delta + k_e^2)(u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + u_3(x)) = \\ &= 0 + 0 + 0 - (k^2(x) - k_e^2)u(x), \quad x \in Q. \end{aligned}$$

Аналогично, учитывая гладкость ядер всех интегральных операторов вне рассеивателей, выводим

$$(\Delta + k_e^2)u(x) = 0, \quad x \in (\mathbb{R}^3 \setminus \overline{(Q \cup \Omega)}).$$

Условия сопряжения (1.7) выполняются в силу гладкости  $u$ , установленной в Теореме 1.3.

Покажем, что во внутренних точках экрана  $\Omega_1$  выполняется условие Дирихле. Рассмотрим представление  $u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3$  полного поля вне рассеивателей. Так как  $u_0$ ,  $u_2$  и  $u_3$  бесконечно дифференцируемы вблизи экрана  $\Omega_1$ , а интеграл  $u_1$  непрерывен во внутренних точках экрана, то и при  $x \in \Omega_1$  имеем  $u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + u_3(x)$ . Окончательно, из уравнения (1.45) следует, что  $u|_{\Omega_1} = 0$ .

Покажем, что во внутренних точках экрана  $\Omega_2$  выполняется условие Неймана. Снова используем представление  $u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3$  полного поля вне рассеивателей. Так как  $u_0$ ,  $u_1$  и  $u_3$  бесконечно дифференцируемы вблизи экрана  $\Omega_2$ , а интеграл  $u_2$  имеет непрерывную нормальную производную во внутренних точках  $\Omega_2$ , то, опуская  $x$  на  $\Omega_2$ , выводим

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u(x) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u_0(x) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u_1(x) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u_2(x) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u_3(x), \quad x \in \Omega_2.$$

Из уравнения (1.46) следует, что  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u \Big|_{\Omega_2} = 0$ .

Условия излучения (1.9) вытекают из гладкости всех слагаемых в представлении (1.43) вне шара достаточно большого радиуса и определения фундаментального решения уравнения Гельмгольца. Подробную проверку условия проведем для поля  $u_1$ .

Итак, имеем  $u_1(x) = \int_{\Omega_1} \frac{e^{ik_e|x-y|}}{4\pi|x-y|} \varphi_1(y) ds_y$ . Это представление будем рассматривать для произвольной точки  $x$ , лежащей вне шара  $B = B_R(0)$  до-

статочного большого радиуса  $R > 0$ , такого, что  $\bar{\Omega}_2 \subset B$ . Тогда  $r = |x| > R$  и  $|y| < R$ . Так как

$$|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x| \cdot |y| \cos \alpha,$$

то

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial |x|} = \frac{\partial}{\partial |x - y|} \cdot \frac{\partial |x - y|}{\partial |x|} = \frac{\partial}{\partial |x - y|} \cdot \frac{|y| - |x| \cos \alpha}{|x - y|}.$$

Так как  $\frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ik_e r}}{4\pi r} = \frac{e^{ik_e r}}{4\pi r^2} (ik_e r - 1)$ , то

$$\frac{\partial}{\partial |x|} \frac{e^{ik_e |x-y|}}{4\pi |x - y|} = \frac{e^{ik_e |x-y|}}{4\pi |x - y|^3} (ik_e |x - y| - 1) (|y| - |x| \cos \alpha).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial |x|} - ik_e \right) u_1 &= \int_{\Omega_1} \varphi_1(y) \left( \frac{\partial}{\partial |x|} - ik_e \right) \frac{e^{ik_e |x-y|}}{4\pi |x - y|} ds_y = \\ &= \int_{\Omega_1} \varphi_1(y) \frac{e^{ik_e |x-y|}}{4\pi |x - y|^2} \left( ik_e (|y| - |x| \cos \alpha - |x - y|) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{|y| - |x| \cos \alpha}{|x - y|} \right) ds_y. \end{aligned}$$

Далее, с учетом неравенств  $|x| - |y| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$ , выводим для  $|y| > R$

$$\begin{aligned} \left| \left( \frac{\partial}{\partial |x|} - ik_e \right) u_1 \right| &= \\ &= \int_{\Omega_1} \frac{|\varphi_1(y)|}{4\pi |x - y|^2} \left( |k_e| |y| + |k_2| \cdot \left| |x| - |x - y| \right| + \frac{|y| + |x|}{|x - y|} \right) ds_y \leq \\ &\leq \int_{\Omega_1} \frac{|\varphi_1(y)|}{4\pi (|x| - R)^2} \left( |k_e| 2|y| + \frac{R + |x|}{|x| - R} \right) ds_y \leq \\ &\leq c \frac{1}{4\pi (|x| - R)^2} \left( |k_e| 2R + \frac{R + |x|}{|x| - R} \right) = o(|x|^{-1}), \quad |x| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Проводя аналогичные рассуждения, проверим условия излучения для

$$u_3(x) = \int_Q G(x, y) \tilde{k}(y) u(y) dy.$$

Рассмотрим  $u_2$ . Имеем

$$\begin{aligned} u_2(x) &= \int_{\Omega_2} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \varphi_2(y) ds_y = \int_{\Omega_2} \text{grad}_y G(x, y) \cdot \mathbf{n}_y \varphi_2(y) ds_y = \\ &= \int_{\Omega_2} \frac{dG(x, y)}{d|x - y|} \text{grad}_y |x - y| \cdot \mathbf{n}_y \varphi_2(y) ds_y = \\ &= \int_{\Omega_2} G(x, y) \left( ik_e - \frac{1}{|x - y|} \right) \psi(y) ds_y = v(x) - w(x). \end{aligned}$$

Для  $v(x)$  (это интеграл типа потенциала простого слоя) условие излучения уж проверено. Интеграл  $w(x)$  имеет ядро с особенностью  $|x - y|^{-2}$  и выполнение условия излучения очевидно.  $\square$

Докажем теперь утверждение об обратимости матричного оператора системы интегро-дифференциальных уравнений.

**Теорема 1.5.** [115, 117, 136] Пусть параметры среды и неоднородного рассеивателя удовлетворяют условиям:  $k(x) \in C^\infty(\overline{Q})$ ,  $\text{Re } k(x) > 0$ ,  $\text{Im } k(x) \geq 0$  в  $\mathbb{R}^3$ . Тогда оператор  $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$  непрерывно обратим.

*Доказательство.* В Теореме 1.2 установлено, что в выбранных пространствах оператор  $\widehat{\mathcal{L}}$  является фредгольмовым (с нулевым индексом), поэтому достаточно установить его инъективность.

Пусть  $u_0 \equiv 0$ , а  $(u, \varphi_1, \varphi_2)$  – решение системы интегро-дифференциальных уравнений (1.57). Из Теоремы 1.4 следует, что функция  $u(x)$ , продолженная по формуле (1.43), является квазиклассическим решением *однородной краевой задачи* (1.6)–(1.10). В теореме 1.1 показано, что это решение тривиально:  $u \equiv 0$  в  $\mathbb{R}^3$ . Из определения функций  $\varphi_i$  следует, что  $\varphi_i \equiv 0$  на  $\Omega_i$ . Следовательно, уравнение  $\widehat{\mathcal{L}}(u, \varphi_1, \varphi_2) = 0$  имеет лишь тривиальное решение.  $\square$

### 1.5 Формулировка метода Галеркина для системы интегро-дифференциальных уравнений в скалярной задаче дифракции на системе непересекающихся тел и экранов

Рассмотрим сначала формулировку метода Галеркина для операторного уравнения общего вида

$$\widehat{\mathcal{L}}\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad (1.60)$$

в предположении, что  $\widehat{\mathcal{L}}$  – непрерывно обратимый оператор, действующий из сепарабельного гильбертова пространства  $\mathbf{X}$  в антидвойственное пространство  $\mathbf{X}'$ .

Пусть  $\mathbf{X}_m \subset \mathbf{X}$  – конечномерные подпространства, определенные при каждом  $m \in \mathbb{N}$ , удовлетворяющие условию *предельной плотности*:

$$\forall u \in \mathbf{X} \quad \inf_{u_m \in \mathbf{X}_m} \|u - u_m\|_{\mathbf{X}} \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty. \quad (1.61)$$

Через  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначим полуторалинейную форму, определяющую антидвойственное спаривание пространств  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{X}'$ .

Метод Галеркина формулируется следующим образом:

$$\langle \widehat{\mathcal{L}}\mathbf{u}_m, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_m. \quad (1.62)$$

Если пространства  $\mathbf{X}_m$  представляют собой линейные оболочки ЛНЗ функций  $\mathbf{v}_k^{(m)}$ ,  $k = 1, \dots, m$ ,

$$\mathbf{X}_m = \text{span}\{\mathbf{v}_1^{(m)}, \dots, \mathbf{v}_m^{(m)}\}, \quad (1.63)$$

а приближенное решение  $\mathbf{u}_m$  ищется в виде линейной комбинации

$$\mathbf{u}_m = \sum_{k=1}^m c_k^{(m)} \mathbf{v}_k^{(m)} \quad (1.64)$$

функций  $\mathbf{v}_k^{(m)}$  с неизвестными коэффициентами  $c_k^{(m)}$ , то равенства (1.62) приводят к системе линейных алгебраических уравнений для нахождения  $c_k^{(m)}$ :

$$\sum_{k=1}^m c_k^{(m)} \langle \widehat{\mathcal{L}}\mathbf{v}_k^{(m)}, \mathbf{v}_l^{(m)} \rangle = \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_l^{(m)} \rangle \quad \forall l = 1, \dots, m. \quad (1.65)$$



*Замечание 1.4.* Формулировка метода для оператора  $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$  равносильна стандартной формулировке метода Галеркина для оператора  $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$

$$(\widehat{\mathcal{L}}\mathbf{u}_m, \mathbf{w})_{\mathbf{Y}} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{w})_{\mathbf{Y}} \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{Y}_m, \quad (1.66)$$

где  $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{Y}}$  – скалярное произведение в  $\mathbf{Y}$ , а подпространства  $\mathbf{Y}_m$  предельно плотны в  $\mathbf{Y}$ . Действительно, обозначая через  $\widehat{\mathcal{J}}$  оператор, изоморфно отображающий  $\mathbf{X}$  на  $\mathbf{X}'$ , получим что уравнения (1.62) эквивалентны уравнениям (1.66), где

$$\mathbf{w} = \widehat{\mathcal{J}}\mathbf{v}, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{X}' = \widehat{\mathcal{J}}\mathbf{X}, \quad \mathbf{Y}_m = \widehat{\mathcal{J}}\mathbf{X}_m.$$

*Замечание 1.5.* Введение верхнего индекса в обозначении *базисных* функций  $\mathbf{v}_k^{(m)}$  необходимо, так как в общем случае  $\mathbf{v}_k^{(m)} \neq \mathbf{v}_k^{(n)}$ . Кроме того, семейства функций могут быть построены таким образом, что не выполняются включения  $\mathbf{X}_m \subset \mathbf{X}_{m+p}$ , хотя всегда выполнено  $\mathbf{X}_m \subset \mathbf{X}$ . Однако мы будем опускать этот верхний индекс в обозначении базисных функций; такой индекс будет использоваться ниже для определения базисных функций на рассеивателях различных типов.

Запишем теперь формулировку метода Галеркина для матричного оператора  $\widehat{\mathcal{L}}$  скалярной задачи дифракции на системе непересекающихся тел и экранов. Для такого оператора область определения и множество значений суть пространства

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= L_2(Q) \times \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}_1) \times \tilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega}_2), \\ \mathbf{X}' &= L_2(Q) \times H^{1/2}(\Omega_1) \times H^{-1/2}(\Omega_2). \end{aligned} \quad (1.67)$$

Пространство  $H^{1/2}(\Omega_1)$  является антидвойственным к пространству  $\tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}_1)$  относительно полуторалинейной формы [87]

$$\langle \phi_1, \varphi_1 \rangle_1 = \int_{\Omega_1} \phi_1 \overline{\varphi}_1 ds, \quad (1.68)$$

пространство  $H^{-1/2}(\Omega_2)$  антидвойственно к  $\tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega}_2)$  относительно формы

$$\langle \phi_2, \varphi_2 \rangle_2 = \int_{\Omega_2} \phi_2 \bar{\varphi}_2 ds, \quad (1.69)$$

а пространство  $L_2(Q) = H^0(Q)$  антидвойственно самому себе относительно формы

$$\langle w, u \rangle_0 = \int_Q w \bar{u} dv. \quad (1.70)$$

Следовательно, пространство  $\mathbf{X}'$  антидвойственно к  $\mathbf{X}$ ; соотношение антидвойственности обозначим через  $\langle \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle$ . Если  $\mathbf{f} = (u, \varphi_1, \varphi_2) \in \mathbf{X}$  и  $\mathbf{g} = (w, \phi_1, \phi_2) \in \mathbf{X}'$ , то

$$\langle \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle = \langle w, u \rangle_0 + \langle \phi_1, \varphi_1 \rangle_1 + \langle \phi_2, \varphi_2 \rangle_2. \quad (1.71)$$

Через  $v_k^{(1)}(x)$  ( $k = 1, \dots, m_1$ ) будем обозначать базисные функции на экране  $\Omega_1$ , через  $v_k^{(2)}(x)$  ( $k = 1, \dots, m_2$ ) обозначим базисные функции на экране  $\Omega_2$ , а через  $v_k^{(0)}(x)$  ( $k = 1, \dots, m_0$ ) – базисные функции в области неоднородности  $Q$ .

Выбор базисных функций конкретного вида будет осуществлен ниже; пока мы лишь предполагаем, все эти функции удовлетворяют условию аппроксимации (1.61).

Согласно формулировке (1.62) метода Галеркина в гильбертовых пространствах будем искать приближенные решения  $\mathbf{u}_m = (u_{m_0}, \varphi_{1,m_1}, \varphi_{2,m_2})$  уравнения (1.60) в виде

$$\mathbf{u}_m = \sum \mathbf{c}_k \mathbf{v}_k$$

или в развернутой покомпонентной форме записи:

$$\begin{aligned} u_{m_0}(x) &= \sum_{k=1}^{m_0} c_k^{(0)} v_k^{(0)}(x), \quad x \in Q, \\ \varphi_{1,m_1}(x) &= \sum_{k=1}^{m_1} c_k^{(1)} v_k^{(1)}(x), \quad x \in \Omega_1, \\ \varphi_{2,m_2}(x) &= \sum_{k=1}^{m_2} c_k^{(2)} v_k^{(2)}(x), \quad x \in \Omega_2. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Здесь  $c_k^{(i)}$  – неизвестные коэффициенты, которые находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \langle u_{m_0} - Au_{m_0} - K_{12}\varphi_{1,m_1} - K_{13}\varphi_{2,m_2}, v_{i_0}^{(0)} \rangle_0 = \langle u_0|_Q, v_{i_0}^0 \rangle_0, \\ \langle -K_{21}u_{m_0} - S_1\varphi_{1,m_1} - K_{23}\varphi_{2,m_2}, v_{i_1}^{(1)} \rangle_1 = \langle u_0|_{\Omega_1}, v_{i_1}^1 \rangle_1, \\ \langle -K_{31}u_{m_0} - K_{32}\varphi_{1,m_1} - S_2\varphi_{2,m_2}, v_{i_2}^{(2)} \rangle_2 = \left\langle \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Omega_2}, v_{i_2}^{(2)} \right\rangle_2, \end{cases} \quad (1.73)$$

где  $i_l = 1, \dots, m_l$ .

Систему (1.73) можно переписать в матричной форме [114, 116, 117]

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b}, \quad (1.74)$$

где  $\mathbf{c}$  – набор неизвестных коэффициентов,  $\mathbf{A}$  – основная матрица,  $\mathbf{b}$  – столбец правой части системы.

Матрицу  $\mathbf{A}$  и столбец  $\mathbf{b}$  запишем в блочном виде с учетом системы (1.73):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A^{00} & A^{01} & A^{02} \\ A^{10} & A^{11} & A^{12} \\ A^{20} & A^{21} & A^{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b^0 \\ b^1 \\ b^2 \end{bmatrix}. \quad (1.75)$$

Выпишем вид матричных элементов  $A_{ij}^{kl}$ , учитывая определение всех операторов и соотношение антидвойственности в выбранных пространствах:

$$\begin{aligned} A_{ij}^{00} &= \int_Q v_j^{(0)}(x)v_i^{(0)}(x)dx - \\ &\quad - \int_Q \int_Q G(x,y)(k^2(y) - k_e^2)v_j^0(y)v_i^{(0)}(x) dydx, \\ A_{ij}^{01} &= \int_Q \int_{\Omega_1} G(x,y)v_j^{(1)}(y)v_i^{(0)}(x) ds_y dx, \\ A_{ij}^{02} &= \int_Q \int_{\Omega_2} \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial \mathbf{n}_y \partial \mathbf{n}_x} v_j^{(2)}(y)v_i^{(0)}(x) ds_y dx; \end{aligned} \quad (1.76)$$

$$A_{ij}^{10} = - \int_{\Omega_1} \int_Q G(x, y) (k^2(y) - k_e^2) v_j^{(0)}(y) v_i^{(1)}(x) dy ds_x,$$

$$A_{ij}^{11} = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_1} G(x, y) v_j^{(1)}(y) v_i^{(1)}(x) ds_y ds_x, \quad (1.77)$$

$$A_{ij}^{12} = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y \partial \mathbf{n}_x} v_j^{(2)}(y) v_i^{(1)}(x) ds_y ds_x;$$

$$A_{ij}^{20} = \int_{\Omega_2} \int_Q G(x, y) (k^2(y) - k_e^2) v_j^{(0)}(y) v_i^{(2)}(x) dy ds_x,$$

$$A_{ij}^{21} = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} G(x, y) v_j^{(1)}(y) v_i^{(2)}(x) ds_y ds_x, \quad (1.78)$$

$$A_{ij}^{22} = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_2} \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y \partial \mathbf{n}_x} v_j^{(2)}(y) v_i^{(2)}(x) ds_y ds_x.$$

Выпишем также формулы для элементов столбца  $\mathbf{b}$  :

$$b_i^0 = \int_Q u_0(x) v_i^{(0)}(x) dx, \quad b_i^1 = \int_{\Omega_1} u_0(x) v_i^{(1)}(x) ds_x,$$

$$b_i^2 = \int_{\Omega_2} \frac{\partial u_0(x)}{\partial \mathbf{n}} v_i^{(2)}(x) ds_x. \quad (1.79)$$

Для уточнения формул, определяющих элементы  $A_{ij}^{kl}$  и  $b_i^k$  в случае, когда экраны  $\Omega_1$   $\Omega_2$  заданы параметрически с помощью гладких функций

$$x^{(i)}(t_1, t_2) = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)})(t_1, t_2) : D_i \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad i = 1, 2, \quad (1.80)$$

выразим поверхностные интегралы по поверхности экранов  $\Omega_i$  через двойные интегралы по соответствующим областям параметров  $D_i$ . Для интеграла по экрану  $\Omega_1$  имеем выражение,

$$\int_{\Omega_1} f(x) ds_x = \int_{\Omega_1} f(x^{(i)}(t_1, t_2)) \sqrt{g^{(1)}(t)} dt_1 dt_2. \quad (1.81)$$

Интеграл по жесткому экрану представляется аналогично,

$$\int_{\Omega_2} f(x) ds_x = \int_{\Omega_2} f(x^{(i)}(t_1, t_2)) \sqrt{g^{(2)}(t)} dt_1 dt_2. \quad (1.82)$$

Здесь и выше

$$g^{(k)} = g_{11}^{(k)} g_{22}^{(k)} - g_{12}^{(k)} g_{21}^{(k)}, \quad g_{ij}^{(k)}(t) = \frac{\partial x^{(k)}(t)}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial x^{(k)}(t)}{\partial t_j}. \quad (1.83)$$

Единичный вектор нормали  $\mathbf{n}$  к параметризованной поверхности  $\Omega_2$  вычисляется стандартным образом,

$$\mathbf{n}(t) = \frac{\partial x^{(2)}/\partial t_1 \times \partial x^{(2)}/\partial t_2}{|\partial x^{(2)}/\partial t_1 \times \partial x^{(2)}/\partial t_2|}. \quad (1.84)$$

## 1.6 Выбор базисных функций на двух- и трехмерных рассеивателях. Свойство аппроксимации

Ниже будут определены конкретные базисные функции для рассеивателей разных типов, удовлетворяющие условию аппроксимации в выбранных пространствах.

Определим базисные функции  $v_i^{(0)}$  на неоднородном объемном теле, предположив сначала, что  $Q =: Q'$  – параллелепипед

$$Q' = \{x \in \mathbb{R}^3 : a_1 < x_1 < a_2, b_1 < x_2 < b_2, c_1 < x_3 < c_2\}.$$

Введем в  $Q'$  равномерную сетку

$$x_{1,i_1} = a_1 + h_1 i_1, \quad x_{2,i_2} = b_1 + h_2 i_2, \quad x_{3,i_3} = c_1 + h_3 i_3, \quad i_k = 0, \dots, n_k, \quad (1.85)$$

где  $h_1 = \frac{a_2 - a_1}{n_1}$ ,  $h_2 = \frac{b_2 - b_1}{n_2}$ ,  $h_3 = \frac{c_2 - c_1}{n_3}$  и  $n_k \in \mathbb{N}$ . Введем в  $Q'$  конечные элементы

$$Q'_{i_1 i_2 i_3} = \{x : x_{k,i_k-1} < x_k < x_{k,i_k}, k = 1, 2, 3, i_k = 1, \dots, n_k - 1\}.$$

Рассмотрим финитные кусочно-постоянные функции на  $Q'$ :

$$v_i'^{(0)}(x) = v_{i_1 i_2 i_3}'^{(0)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q'_{i_1 i_2 i_3}, \\ 0, & x \notin Q'_{i_1 i_2 i_3}. \end{cases} \quad (1.86)$$

Определение базисных функций  $v_i'^{(0)}(x)$  на гранях  $\partial Q'_{i_1 i_2 i_3}$  является необязательным, так как свойство аппроксимации будет установлено в пространстве  $L_2(Q)$ .

Пусть теперь  $Q$  – область сложной формы с кусочно-гладкой границей, удовлетворяющая условию конуса. Введем параллелепипед  $Q'$ , содержащий область  $Q$ , и конечные элементы

$$Q_{i_1 i_2 i_3} = Q \cap Q'_{i_1 i_2 i_3}.$$

Тогда базисные функции  $v_i^{(0)}$  можно определить как сужения на  $Q$  функций  $v'_i$  при условии, что носители новых функций имеют положительный объем:

$$v_i^{(0)}(x) = v_{i_1 i_2 i_3}^{(0)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q_{i_1 i_2 i_3}, \\ 0, & x \notin Q_{i_1 i_2 i_3}. \end{cases} \quad (1.87)$$

Подпространства кусочно-постоянных функций, отвечающие введенным разбиениям, обозначим через  $X_{m_0}^0$ .

**Лемма 1.1.** [115, 117] *Финитные кусочно-постоянные функции  $v_i^{(0)}$  (1.87) удовлетворяют условию аппроксимации в пространстве  $L_2(Q)$ .*

*Замечание 1.6.* Сначала уточним определение базы  $m \rightarrow \infty$  в условии аппроксимации применительно к функциям в  $Q$ . Потребуем, чтобы значения параметров  $n_1, n_2, n_3$  возрастали одновременно (последовательности  $\{n_k\}$  не должны быть предельно постоянными) – это требование необходимо и достаточно для выполнения условия аппроксимации для кусочно-постоянных функций в  $L_2$  (можно привести пример непрерывной функции  $v(x)$  и семейств базисных функций  $v_i^{(0)}$  со стремящимися к нулю объемами носителей ( $\text{vol}(\text{supp } v_i^{(0)}) \rightarrow 0$ ), для которых  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|v - \sum c_i v_i^{(0)}\| > \alpha > 0$  для любых коэффициентов  $c_i$ ).

Следовательно, более точная формулировка условия предельной плотности подпространств  $X_{m_0}^0$  в  $\mathbf{X} = L_2(Q)$  запишется так: для всякой функции  $f \in L_2(Q)$  при любом  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $n_0 \in \mathbb{N}$ , что для всех  $n_1, n_2, n_3 : m_0 > n_0$  верно  $\inf_{\phi \in X_{m_0}^0} \|f - \phi\|_{L_2(Q)} < \varepsilon$ .

*Доказательство.* Пусть  $Q$  – произвольная ограниченная область, удовлетворяющая описанным выше требованиям, а  $Q'$  – содержащий ее паралле-

лепипед;  $f \in L_2(Q)$  – произвольная функция. Ее продолжение нулем  $\mathcal{E}_0 f$  принадлежит  $L_2(Q')$ . Так как тригонометрическая система полна в  $L_2(Q')$ , то найдется тригонометрический полином  $T(x)$ , такой что  $\|\mathcal{E}_0 f - T\|_{L_2(Q')} < \varepsilon/2$ . Так как всякий многочлен  $T$  является равномерно непрерывной функцией на компакте  $\overline{Q'}$ , то существует  $N \in \mathbb{N}$  и такая кусочно-постоянная функция  $F_N$ , что  $\|T - F_N\|_{L_2(Q')} < \varepsilon/2$ , откуда  $\|\mathcal{E}_0 f - F_N\|_{L_2(Q')} < \varepsilon$ . Переходя к сужениям кусочно-постоянных функций на  $Q$ , получим, что также  $\|f - f_N\|_{L_2(Q)} < \varepsilon$ . Отсюда и из определения функций  $v_i^{(0)}$  вытекает требуемое утверждение.  $\square$

2. Приведем пример базисных функций на экране  $\Omega_1$ .

Рассмотрим сначала случай, когда экран является плоским. Погрузим экран в прямоугольник

$$D = \{t \in \mathbb{R}^2 : a_1 < t_1 < a_2, b_1 < t_2 < b_2\} \supset \Omega_1.$$

Разобьем  $D$  на прямоугольные конечные элементы

$$\begin{aligned} D_j = D_{j_1 j_2} &= \{t : t_{1,j_1} < t_1 < t_{1,j_1+1}, t_{2,j_2} < t_2 < t_{2,j_2+1}\} \\ t_{1,j_1} &= a_1 + h_1 j_1, \quad t_{2,j_2} = b_1 + h_2 j_2, \end{aligned}$$

где  $j_k = 0, \dots, n_k - 1$ ,  $h_1 = \frac{a_2 - a_1}{n_1}$ ,  $h_2 = \frac{b_2 - b_1}{n_2}$ ,  $m_1 = n_1 n_2$ . Определим финитные кусочно-постоянные функции

$$\psi_j = \psi_{j_1, j_2} = \begin{cases} 1, & x \in \overline{D}_{j_1, j_2}, \\ 0, & x \notin \overline{D}_{j_1, j_2}, \end{cases} \quad (1.88)$$

( $j_k = 0, \dots, n_k - 1$ ).

Определение базисных функций на неплоском экране  $\Omega_1$  в общем случае можно осуществить следующим образом. Введем конечные элементы  $\omega_{1,j}$  ( $j = 1, \dots, m_1$ ), пересекающиеся по кусочно-гладким кривым, и такие, что  $\overline{\Omega}_1 = \bigcup_i \overline{\omega}_{1,j}$ . Потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{m_1 \rightarrow \infty} \max_j \text{diam}(\omega_{1,j}) = 0, \quad (1.89)$$

где  $\text{diam}M = \sup_{x_1, x_2 \in M} \|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^3}$ .

Практически значимым и удобным для программной реализации является случай параметризуемой поверхности  $\Omega_1$  :

$$\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_i = x_i(t_1, t_2), i = 1, 2, 3\}, (t_1, t_2) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad (1.90)$$

здесь  $D$  – ограниченная двумерная область, а функции  $x_i \in C^\infty(\bar{D})$ . Разобьем как и ранее  $D$  на конечные элементы  $D_i$  такие что

$$\lim_{m_1 \rightarrow \infty} \max_i \text{diam}(D_i) = 0.$$

Финитные базисные функции определим так:

$$v_j^{(1)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \bar{\omega}_{1,j}, \\ 0, & x \notin \bar{\omega}_{1,j}. \end{cases} \quad (1.91)$$

Здесь  $\omega_{1,j}$  – образы прямоугольников  $D_j \subset D$  при параметризации (1.90). Так как функции  $x_i(t_1, t_2)$  являются гладкими, то условие (1.89) будет удовлетворено.

Подпространства кусочно-постоянных функций, отвечающие введенным разбиениям на  $\Omega_1$ , обозначим через  $X_{m_1}^1$ .

**Лемма 1.2.** [115, 117] *Кусочно-постоянные финитные базисные функции  $v_j^{(1)}$  (1.91) на экране удовлетворяют условию аппроксимации в  $\tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}_1)$ .*

*Доказательство.* Для доказательства воспользуемся непрерывностью вложения пространства  $L_2(\Omega_1) = H^0(\Omega_1)$  в  $\tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega})$ . Для любой функции  $u \in L_2(\Omega_1)$  имеем [1]

$$\|u\|_{-1/2} \leq \|u\|_0. \quad (1.92)$$

Кроме того, вложение указанных пространств является плотным.

Теперь достаточно показать, что всякая функция из  $L_2(\Omega_1)$  может быть приближена (в метрике  $L_2(\Omega_1)$ ) кусочно постоянными функциями.

В случае плоского экрана рассуждения проводятся аналогично Лемме 1.1. Пусть функция  $u \in L_2(\Omega_1)$ , а экран  $\Omega_1$  – поверхность, заданная



параметрически с помощью функции  $x : D \rightarrow \Omega_1$ . Рассмотрим функцию  $\varphi_D = \varphi(x(t_1, t_2))$ , заданную на прямоугольнике  $D$ , и аппроксимируем ее финитными функциями с прямоугольными носителями с произвольной точностью. Учитывая гладкость отображения  $x : D \rightarrow \Omega_1$  и определение базисных функций на  $\Omega_1$ , получим условие предельной плотности пространств  $X_{m_1}^1$  в  $L_2(\Omega_1)$ . Оценка (1.92) приводит к окончательному результату.  $\square$

3. Рассмотрим базисные функции на плоском экране  $\Omega_2$  (случай неплоского экрана будет подробно рассмотрен в следующем параграфе). Введем прямоугольник  $D := \{x : x_1 \in (a_1, b_1), x_2 \in (a_2, b_2), x_3 = 0\}$ , содержащий  $\Omega_2$ , разобьем его на равные прямоугольные конечные элементы  $D_i$ , каждый из которых в свою очередь разделим пополам диагоналями одинакового направления. Носитель базисной функции определяется как объединение шести треугольников с общей точкой  $(x_{1,k_1}, x_{2,k_2})$ ; сама же функция является финитной кусочно-линейной [26]:

$$v_{k_1, k_2}^{(2)}(x_1, x_2) = \zeta((x_1 - a_1)/h_1 - k_1, (x_2 - a_2)/h_2 - k_2), \quad (1.93)$$

где

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1 - x, & x \in [0, 1], & y \in [0, x], \\ 1 - y, & x \in [0, 1], & y \in [x, 1], \\ 1 + x - y, & x \in [-1, 0], & y \in [0, x + 1], \\ 1 + x, & x \in [-1, 0], & y \in [x, 0], \\ 1 + y, & x \in [-1, 0], & y \in [-1, x], \\ 1 - x + y, & x \in [0, 1], & y \in [x - 1, 0]. \end{cases} \quad (1.94)$$

Подпространства функций, отвечающих введенным разбиениям на  $\Omega_2$ , обозначим через  $X_{m_2}^2$ .

**Лемма 1.3.** [117] *Кусочно-линейные базисные функции  $v_i^{(2)}$  на экране  $\Omega_2$  (1.93)-(1.94) удовлетворяют условию аппроксимации в  $\tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega}_2)$ .*

*Доказательство.* Пусть  $\varphi_2 \in \tilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega}_2)$  – произвольная функция, компактный носитель которой лежит в  $\Omega_2$ . Погружая экран  $\Omega_2$  в прямоугольник в  $D$ , построим продолжение  $\mathcal{E}_0\varphi_2 \in \tilde{H}^{1/2}(D)$ .

Так как пространство Соболева  $\tilde{H}^2(D)$  непрерывно и плотно вложено в  $\tilde{H}^{1/2}(D)$ , то для всякого  $\varepsilon > 0$  найдется такой элемент  $u \in \tilde{H}^2(D)$ , что  $\|\mathcal{E}_0\varphi_2 - u\|_{1/2} < \varepsilon/2$ .

Далее, для произвольной функции  $u \in \tilde{H}^2(\Omega_2)$  и всякого  $\varepsilon > 0$  можно (см., например, [26], стр.112) определить коэффициенты в линейной комбинации  $u_{m_2}^2 = \sum_{i=1}^{m_2} a_i v_i^{(2)}$  так, чтобы

$$\|u - u_h\|_{\tilde{H}^1(D)} \leq ch\|u\|_{\tilde{H}^2(D)} < \varepsilon/2.$$

Так как пространство  $H^1(D)$  непрерывно и плотно вложено в  $\tilde{H}^{1/2}(D)$ , то  $\|u - u_h\|_{\tilde{H}^{1/2}(D)} \leq \|u - u_h\|_{\tilde{H}^2(D)} < \varepsilon/2$ .

Учитывая выведенное и переходя к сужениям рассмотренных функций на  $\Omega_2$ , заключаем, что условие аппроксимации выполнено в  $\tilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega}_2)$ .  $\square$

Определим конечномерные подпространства  $\mathbf{X}_m$  гильбертова пространства  $\mathbf{X}$  скалярной задачи дифракции:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_m &= X_{m_0}^0 \times X_{m_1}^1 \times X_{m_2}^2 = \\ &= \text{span}\{v_1^{(0)}, \dots, v_{m_0}^{(0)}\} \times \text{span}\{v_1^{(1)}, \dots, v_{m_1}^{(1)}\} \times \text{span}\{v_1^{(2)}, \dots, v_{m_2}^{(2)}\}. \end{aligned} \quad (1.95)$$

## 1.7 Базисные функции на неплоских гладких экранах: определение, свойство аппроксимации, примеры

В постановке задачи дифракции предполагалось, что  $\Omega_2$  – гладкая (класса  $C^\infty$ ) двумерная ориентируемая поверхность с краем. Можно также сказать, что  $\Omega_2$  гладкое компактное ориентируемое двумерное многообразие с гладким краем  $\partial\Omega_2$ . Это означает, что  $\Omega_2$  покрывается конечным числом окрестностей  $\{U_\alpha\}$ , которые отображаются гладкими диффеоморфизмами  $\kappa_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$  в  $\mathbb{R}^2$ , причем образы  $V_\alpha$  окрестностей внутренних точек  $x$

экрана  $\Omega_2$  диффеоморфны открытым множествам в  $\mathbb{R}^2$  (например, кругам с центром в точках  $t = \kappa_\alpha(x)$ ), а образы окрестностей точек границы – открытым множествам в  $\mathbb{R}_+^2$  (например, полукругам). Предполагается также, что для всякого покрытия  $U$  координатными окрестностями задано также подчиненное  $U$  разбиение единицы  $\{\varphi_\alpha\}$ .

Норма в пространстве Соболева  $H^s(M)$  на замкнутом многообразии  $M$  определяется следующим образом [1]:

$$\|u\|_{H^s(M)} = \sum_{\alpha} \|u(\kappa_\alpha^{-1}(t))\varphi_\alpha(\kappa_\alpha^{-1}(t))\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}. \quad (1.96)$$

Опишем класс неплоских экранов  $\Omega_2$ , на которых будут построены базисные функции. Будем предполагать, что поверхность  $\Omega_2$  задается параметрически следующим образом:

$$\Omega_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_i = x_i(t_1, t_2), i = 1, 2, 3\}, (t_1, t_2) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad (1.97)$$

здесь  $D$  – прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям  $0t_1, 0t_2$ , например,  $D = \{(t_1, t_2) : t_i \in (0; a_i)\}$ . При этом предполагается, что отображение  $x(t) : D \rightarrow \Omega_2$  есть диффеоморфизм класса  $C^\infty$ :  $x \in C^\infty(\bar{D})$ ,  $x^{-1} = \kappa \in C^\infty(\bar{\Omega}_2)$ . Заметим, что так как параметризация поверхности описывается отображением из  $\mathbb{R}^2$  в  $\mathbb{R}^3$ , то диффеоморфность отображения  $x : D \rightarrow \Omega_2$  подразумевает в том числе, что в каждой точке  $(t_1, t_2) \in D$  матрица Якоби  $x'_t = \frac{\partial x}{\partial t}$  имеет ранг 2.

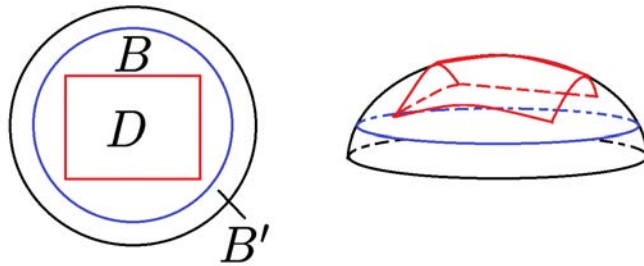


Рис. 2: Слева изображены область параметров  $D$  и содержащие ее круги  $B, B'$ ; справа – образы плоских областей при заданном диффеоморфизме.

Пусть  $B$  – открытый круг радиуса  $r$ , содержащий  $\bar{D}$ , причем  $dist(\partial D, \partial B) > 0$ . Пусть также  $B'$  – круг радиуса  $r + \delta$  с тем же центром, что и  $B$ . Рассмотрим еще образы кругов  $B$  и  $B'$  при введенном отображении  $x(t)$ . Эти образы суть поверхности  $\Omega_{B'} \supset \Omega_B \supset \Omega_2$ , причем  $dist(\partial \Omega_{B'}, \partial \Omega_B) = d' > 0$  и  $dist(\partial \Omega_B, \partial \Omega_2) = d > 0$ . Пример поверхности  $\Omega_2$  и области параметров  $D$  схематически изображен на Рисунке 2.

На прямоугольнике  $D$  введем кусочно-линейные функции  $v_i^{(2)}(t_1, t_2)$ , введенные выше (см. формулы (1.93), (1.94)), которые теперь будем обозначать символом  $v_i^{(2,0)}(t_1, t_2)$ . В качестве базисных функций  $v_i^{(2)}(x)$  на гладком параметризуемом экране рассмотрим функции

$$v_i^{(2)}(x) = v_i^{(2,0)}(\kappa(x)), \quad x \in \Omega_2. \quad (1.98)$$

Докажем теорему о полноте системы функций  $v_i^{(2)}(x)$  в  $\tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega}_2)$ .

**Теорема 1.6.** [123] *Функции  $v_i^{(2)}(x)$  на гладком (класса  $C^\infty$ ) ориентированном параметрически заданном экране  $\Omega_2$  удовлетворяют условию аппроксимации в  $\tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega}_2)$ .*

*Доказательство.* 1. Так как  $v_i^{(2,0)}(t) \in \tilde{H}^{1/2}(\bar{D})$  и экран параметризуется с помощью гладкой функции  $x(t) : D \rightarrow \Omega_2$ , то [1] имеют место включения  $v_i^{(2)}(x) \in \tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega}_2)$ .

2. Теперь надо показать, что для всякого элемента  $u(x) \in \tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega}_2)$  при любом  $\varepsilon > 0$  найдутся коэффициенты  $c_i$  ( $i = 1, \dots, m_2$ ) такие, что

$$\|u - u_{m_2}\|_{\tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega}_2)} = \|u - \sum_i c_i v_i^{(2)}\|_{\tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega}_2)} < \varepsilon.$$

В плоскости параметров  $t_1, t_2$  введем финитную гладкую функцию  $\varphi_D(t_1, t_2)$  так, чтобы выполнялись условия

$$\varphi_D \in C^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \varphi_D(t) = \begin{cases} 1, & t \in \bar{D}, \\ 0, & t \notin B. \end{cases} \quad (1.99)$$

Тогда получим для  $\varphi(x) = \varphi_D(\kappa(x))$ :

$$\varphi \in C^\infty(\Omega_{B'}), \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \bar{\Omega}_2, \\ 0, & x \in \Omega'_{B'} \setminus \Omega_B. \end{cases} \quad (1.100)$$

Введем еще замкнутую гладкую ориентируемую поверхность  $\tilde{\Omega}_2$  класса  $C^\infty$ , содержащую  $\Omega_{B'}$ . На  $\tilde{\Omega}_2$  введем такой атлас  $\{(U_\alpha, \kappa_\alpha)\}$  и подчиненное покрытие  $U$  разбиение единицы  $\varphi_\alpha$ , чтобы при некотором  $\alpha_0$  (не ограничивая общности, можно считать, что  $\alpha_0 = 0$ ) выполнялись соотношения

$$U_{\alpha_0} = U_0 = \Omega_{B'}, \quad \kappa_0(x) = \kappa(x).$$

Пусть  $u \in \tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega}_2)$  – произвольная функция. Тогда в силу определения рассматриваемого пространства Соболева имеем  $\mathcal{E}_0 u \in H^{1/2}(\tilde{\Omega}_2)$ . Здесь  $\mathcal{E}_0$  – оператор продолжения на  $\tilde{\Omega}_2$  нулем функций, заданных на  $\Omega_2$ . Аналогично получим, что  $\mathcal{E}_0 v_i^{(2)}(x) \in H^{1/2}(\tilde{\Omega}_2)$ . Выполняя замену переменных, запишем

$$\begin{aligned} u(x(t_1, t_2)) &= u(\kappa^{-1}(t)) = u_D(t_1, t_2) \in \tilde{H}^{1/2}(D), \\ v_i^{(2)}(x(t_1, t_2)) &= v_i^{(2)}(\kappa^{-1}(t)) = v_i^{(2,0)}(t_1, t_2), \quad t \in D; \end{aligned} \quad (1.101)$$

последнее равенство эквивалентно соотношению (1.98).

Так как функции  $v_i^{(2,0)}$  удовлетворяют условию аппроксимации в пространстве  $\tilde{H}^{1/2}(\bar{D})$  (см. Лемму 1.3), то для  $u_D$  при произвольном  $\varepsilon > 0$  можно так определить коэффициенты в линейной комбинации  $u_{D,m_2}(t_1, t_2) = \sum_i c_i v_i^{(2,0)}(t_1, t_2)$  ( $n = m_2$ ), что

$$\|u_D - u_{D,m_2}\|_{\tilde{H}^{1/2}(D)} = \|\mathcal{E}_0 u_D - \mathcal{E}_0 u_{D,m_2}\|_{\tilde{H}^{1/2}(B')} = \|\mathcal{E}_0 u_D - \mathcal{E}_0 u_{D,m_2}\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^2)} < \varepsilon.$$

Теперь получим требуемую оценку

$$\begin{aligned} \|u - u_{m_2}\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Omega_2)} &= \|\mathcal{E}_0 u - \mathcal{E}_0 u_{m_2}\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Omega_{B'})} = \|\mathcal{E}_0 u - \mathcal{E}_0 u_{m_2}\|_{H^{1/2}(\Omega_2)} = \\ &= \sum_\alpha \|\mathcal{E}_0 u(\kappa_\alpha^{-1}(t))\varphi_\alpha(\kappa_\alpha^{-1}(t)) - \mathcal{E}_0 u_{m_2}(\kappa_\alpha^{-1}(t))\varphi_\alpha(\kappa_\alpha^{-1}(t))\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^2)} = \\ &= \|\mathcal{E}_0 u(\kappa^{-1}(t))\varphi(\kappa^{-1}(t)) - \mathcal{E}_0 u_{m_2}(\kappa^{-1}(t))\varphi(\kappa^{-1}(t))\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^2)} = \\ &= \|\mathcal{E}_0 u_D - \mathcal{E}_0 u_{D,m_2}\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^2)} < \varepsilon. \end{aligned} \quad (1.102)$$

В последней последовательности преобразований мы воспользовались возможностью определения экрана  $\Omega_2$  (а также вспомогательных поверхностей  $\Omega_B$  и  $\Omega_{B'}$ ) с помощью единственной карты, определением сглаживающей функции на неплоском экране и соотношениями между координатами точек на поверхностях и в области параметров.  $\square$

### Примеры базисных функций и аппроксимация на неплоских экранах.

Приведем примеры построения базисных функций на неплоских параметрически заданных экранах  $\Omega_2$ . На Рисунках 3 (а) и (б) изображена функция  $v_i^{(2,0)}(t_1, t_2)$  в прямоугольной области  $D$  параметров  $t_1, t_2$ ; значение мультииндекса  $i$  равно  $(1, 1)$ .

Рассмотрены два примера неплоских экранов. Первый экран – цилиндрическая поверхность

$$\begin{aligned} \Omega_{2,C} = \{x : x_1 = 2 \cos(t_1), x_2 = 2 \sin(t_1), x_3 = t_2, \\ t_1 \in [-\pi/2, \pi/2], t_2 \in [0, 2]\}, \end{aligned} \quad (1.103)$$

второй – часть сферы, заданной явным образом,

$$\Omega_{2,S} = \{x : x_1 = t_1, x_2 = t_2, x_3 = \sqrt{2.0 - t_1^2 - t_2^2}, t_k \in [-1, 1]\}. \quad (1.104)$$

На Рисунках 3 (в) и (г) изображены функции  $v_{(1,1)}^{(2)}(x)$  на цилиндрическом и сферическом экранах. Значения функции отмечены цветом (ср. с Рисунками 3 (а) и (б)).

### Пример аппроксимации на цилиндрической поверхности.

Рассмотрим на цилиндрической поверхности  $\Omega_2$  функцию

$$u(x) = \sin(3x_1) + \sin(3x_2) + \sin(2x_3),$$

график которой представлен на Рисунке 4 (а). Множество значений функции  $u$  на экране – сегмент  $[-2.538\dots, 2.506\dots]$ .

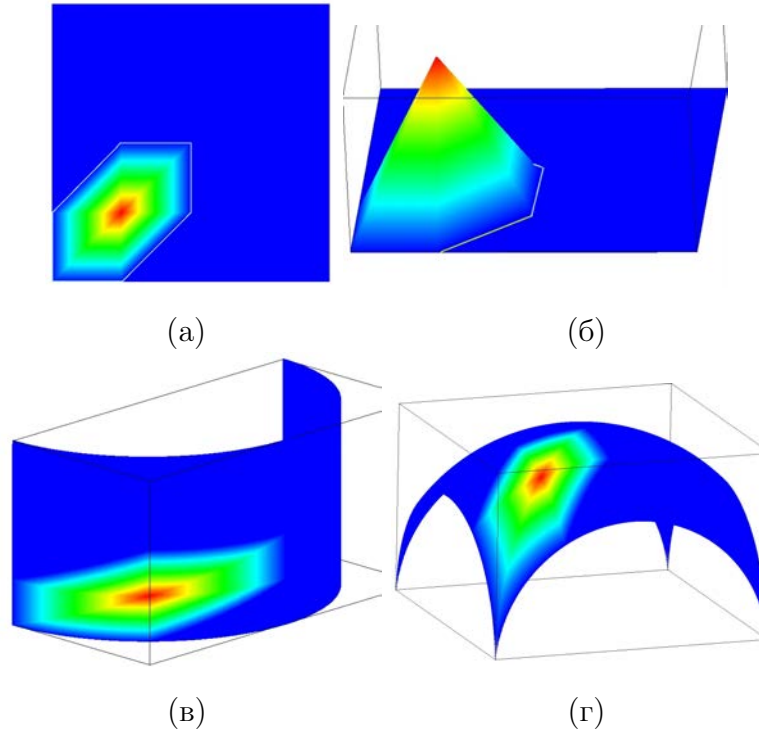


Рис. 3: Базисные кусочно-линейные функции на плоском ((а) и (б)), цилиндрическом (в) и сферическом (г) экранах.

Таблица 1: Отклонение  $\|u - u_{m_2}\|_\infty$  на цилиндрическом экране  $\Omega_{2,C}$  в зависимости от значения параметра разбиения  $n$  ( $m_2 = (n - 1)^2$ ) множества  $D$ .

| $n$                      | 4   | 8    | 16   | 32   | 64   |
|--------------------------|-----|------|------|------|------|
| $\ u - u_{m_2}\ _\infty$ | 1.5 | .324 | .185 | .098 | .057 |

На Рисунках 4 (б)–(е) изображены приближения  $u_{m_2}$  функции  $u$ , отвечающие равномерным сеткам в области параметров  $D$  с параметром разбиения  $n \in \{4, 8, 16, 32, 64\}$  (по каждой из координатных осей  $0t_1$  и  $0t_2$ ), а в Таблице 1 – значения отклонений  $\|u - u_{m_2}\|_\infty = \max_{x \in \Omega_{2,C}} |u(x) - u_{m_2}(x)|$ .

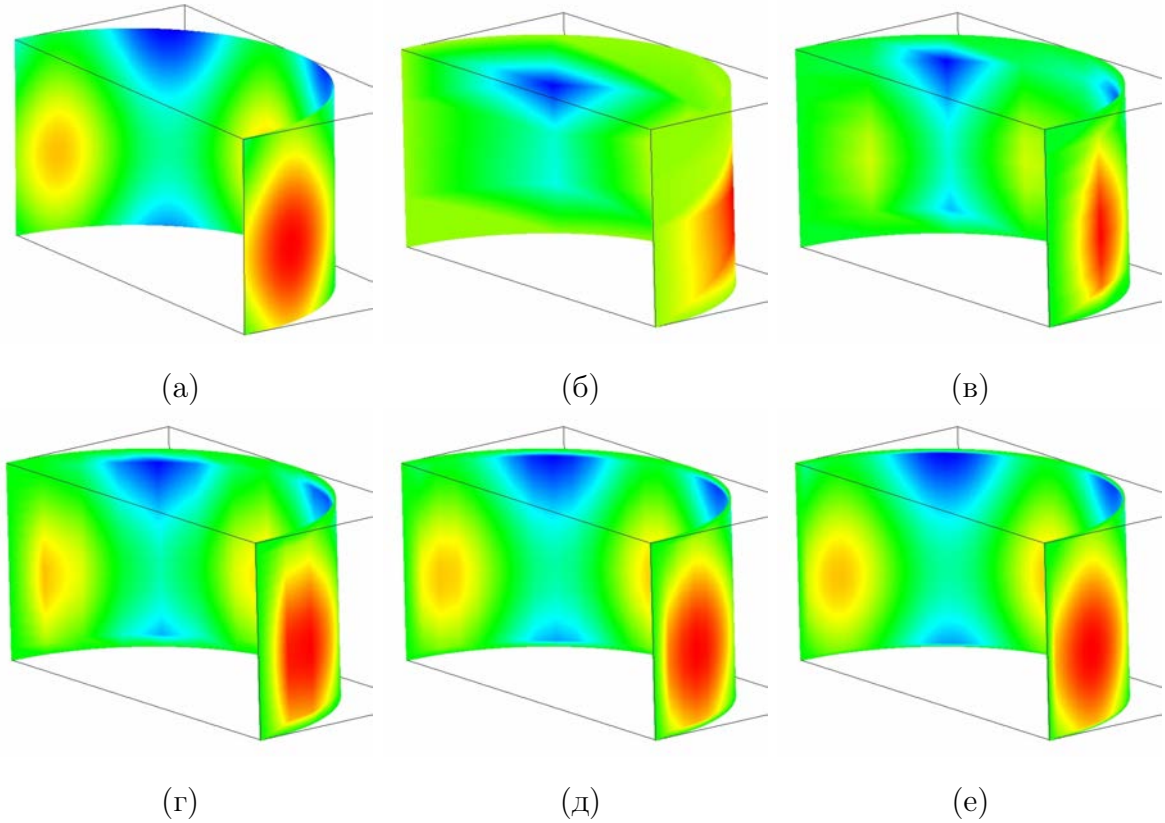


Рис. 4: (а): график функции  $u(x) = \sin(3x_1) + \sin(3x_2) + \sin(2x_3)$ ; (б)–(е): графики функций  $u_{m_2}(x)$ .

#### Пример аппроксимации на сферической поверхности.

Рассмотрим на сферической поверхности  $\Omega_{2,S}$  функцию

$$u(x) = |x_1 - x_2| + e^{x_3 - x_1 x_2},$$

график которой представлен на Рисунке 5 (а). Множество значений функции  $u$  на экране – сегмент  $[0.404\dots, 6.043\dots]$ .

На Рисунках 5 (б)–(е) изображены приближения  $u_{m_2}$  функции  $u$ , отвечающие равномерным сеткам в области параметров  $D$  с параметром разбиения  $n \in \{4, 8, 16, 32, 64\}$  (по каждой из координатных осей  $0t_1$  и  $0t_2$ ), а в Таблице 2 – значения отклонений  $\|u - u_{m_2}\|_\infty = \max_{x \in \Omega_{2,S}} |u(x) - u_{m_2}(x)|$ .

Из Лемм 1.1–1.3, Теоремы 1.6 и определения пространства  $\mathbf{X}$  вытекает условие предельной плотности подпространств  $\mathbf{X}_m$  в  $\mathbf{X}$  :



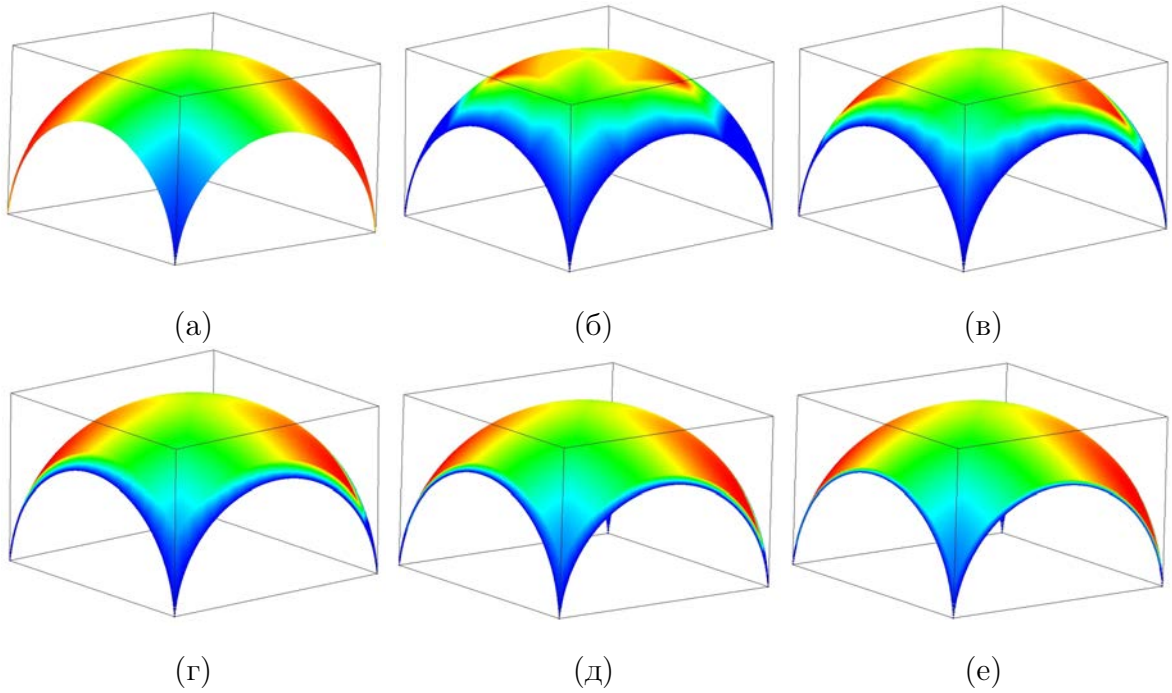


Рис. 5: (а): график функции  $u(x) = |x_1 - x_2| + e^{x_3 - x_1 x_2}$ ; (б)-(е): графики функций  $u_{m_2}(x)$ .

Таблица 2: Отклонение  $\|u - u_{m_2}\|_\infty$  на сферическом экране  $\Omega_{2,S}$  в зависимости от значения параметра разбиения  $n$  множества  $D$ .

| $n$                      | 4    | 8    | 16   | 32   | 64   |
|--------------------------|------|------|------|------|------|
| $\ u - u_{m_2}\ _\infty$ | .613 | .071 | .041 | .019 | .012 |

**Теорема 1.7.** Векторные базисные функции  $(v_{i_1}^{(0)}, v_{i_2}^{(1)}, v_{i_3}^{(2)})$  удовлетворяют условию аппроксимации в пространстве  $\mathbf{X}$ .

## 1.8 Сходимость метода Галеркина в скалярной задаче дифракции на системе непересекающихся тел и экранов

Ниже будет сформулирована и доказана теорема о сходимости метода Галеркина для оператора  $\hat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$ .

**Определение 1.2.** Метод Галеркина (1.62) называется сходящимся, если при всех  $m \in \mathbb{N}$ , больших некоторого  $N_0 \in \mathbb{N}$ , система (1.65) однозначно

разрешима, и приближенные решения  $\mathbf{u}_m$  сходятся при  $m \rightarrow \infty$  к единственному решению  $\mathbf{u}$  уравнения (1.60) по норме пространства  $\mathbf{X}$ .

Из доказанного свойства аппроксимации и ранее установленных свойств матричного интегрального оператора следует теорема о сходимости численного метода.

**Теорема 1.8.** [115, 117] Пусть  $Q$  – область с кусочно-гладкой границей, параметры среды и неоднородного рассеивателя удовлетворяют условиям:  $k(x) \in C^\infty(\overline{Q})$ ,  $\operatorname{Re} k(x) > 0$ ,  $\operatorname{Im} k(x) \geq 0$  в  $\mathbb{R}^3$ , а  $\Omega_1, \Omega_2$  – ориентируемые гладкие (класса  $C^\infty$ ) незамкнутые параметрически заданные поверхности. Пусть базисные функции  $(v_{i_0}^{(0)}, v_{i_1}^{(1)}, v_{i_2}^{(2)})$  удовлетворяют условию аппроксимации (1.61).

Тогда метод Галеркина (1.62) является сходящимся для оператора  $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$ : приближенные решения  $\mathbf{u}_m$  сходятся к единственному решению  $\mathbf{u} \in \mathbf{X}$  уравнения (1.57) и имеет место квазиоптимальная оценка скорости сходимости

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_m\|_{\mathbf{X}} \leq C \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{X}_m} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}. \quad (1.105)$$

*Доказательство.* Представим оператор  $\widehat{\mathcal{L}}$  в виде

$$\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\mathcal{L}}_1 - \widehat{\mathcal{L}}_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{I} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathcal{S}_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathcal{S}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{K}_{12} & -\mathcal{K}_{13} \\ \mathcal{K}_{21} & 0 & -\mathcal{K}_{23} \\ \mathcal{K}_{31} & \mathcal{K}_{32} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.106)$$

и установим сначала сходимость метода для оператора  $\widehat{\mathcal{L}}_1$ . Она имеет место тогда и только тогда, когда метод Галеркина сходится для операторов  $\mathcal{I} : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ ,  $\mathcal{S}_1 : \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}_1) \rightarrow H^{1/2}(\Omega_1)$  и  $\mathcal{S}_2 : \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}_2) \rightarrow H^{-1/2}(\Omega_1)$ .

Первое из этих свойств – прямое следствие выполнения условия аппроксимации для функций  $v_{i_0}^{(0)}$  в  $L_2(Q)$ .

Операторы  $\mathcal{S}_j$  являются непрерывно обратимыми эллиптическими в вы-

бренных пространствах [105] и могут быть представлены в виде

$$\mathcal{S}_j = \mathcal{S}_j^0 + \mathcal{S}_j^c, \quad (1.107)$$

где  $\mathcal{S}_j^0$  – коэрцитивные операторы, а  $\mathcal{S}_j^c$  компактны. Коэрцитивность операторов – достаточный признак сходимости метода Галеркина [87]. Из разложения (1.107) и свойств операторов следует [87], что проекционный метод сходится и для  $\mathcal{S}_j$ .

*Замечание 1.7.* [87]. Метод Галеркина сходится для  $A + B$ , если он сходится для непрерывно обратимого оператора  $A$ , оператор  $B$  компактен, а  $A + B$  инъективен.

Рассмотрим представление (1.106) для матричного оператора  $\widehat{\mathcal{L}}$ . Компактность  $\widehat{\mathcal{L}}_2$  и непрерывная обратимость  $\widehat{\mathcal{L}}$  доказаны в теоремах 1.2 и 1.5. С учетом Замечания 1.7 заключаем, что метод Галеркина сходится для оператора  $\widehat{\mathcal{L}}$  и имеет место квазиоптимальная оценка (1.105) скорости сходимости.  $\square$

## ГЛАВА 2. Скалярная задача дифракции на объемных неоднородных телах, частично экранированных системой экранов

Основные результаты главы опубликованы в работах [117, 118, 124, 125, 136, 138, 145, 148].

### 2.1 Постановка краевой задачи дифракции для уравнения Гельмгольца. Единственность квазиклассического решения

Рассмотрим систему неоднородных тел  $Q_j$  (требования к  $Q_j$  изложены в параграфе 1.1 на с. 39), расположенных в трехмерном однородном пространстве, которые характеризуются гладкими функциями

$$k_j(x) \in C^\infty(\overline{Q_j}), \quad (2.1)$$

имеющими ограниченные в  $\overline{Q_j}$  производные произвольного порядка. Неоднородность среды описывается кусочно-гладкой функцией  $k(x)$  :

$$k(x) = \begin{cases} k_j(x), & x \in \overline{Q_j}, \\ k_e, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}. \end{cases}$$

При этом предполагается, что при переходе через границу (многосвязной) области  $Q = \cup_j Q_j$  функция  $k(x)$  *изменяется скачкообразно*, т.е.

$$k(x) \neq k_e, \text{ на } \partial Q. \quad (2.2)$$

Как и в предыдущей главе мы предполагаем, что всюду в трехмерном пространстве выполняются условия

$$\operatorname{Re} k(x) > 0, \operatorname{Im} k(x) \geq 0. \quad (2.3)$$

Рассмотрим (в общем случае многосвязные, см. Гл. 1) незамкнутые ориентируемые параметризуемые и непересекающиеся ограниченные поверхности  $\Omega_1, \Omega_2$  класса  $C^\infty$  :

$$\bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2 = \emptyset.$$

Предполагаем, что края поверхностей  $\partial\Omega_i = \bar{\Omega}_i \setminus \Omega_i$  суть кривые класса  $C^\infty$  без точек самопересечения. Введем поверхность  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  с границей  $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$  и трубчатые окрестности  $\partial\Omega_{i,\delta}$  края  $i$ -го экрана:

$$\partial\Omega_{i,\delta} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \text{dist}(x, \partial\Omega_i) < \delta\}.$$

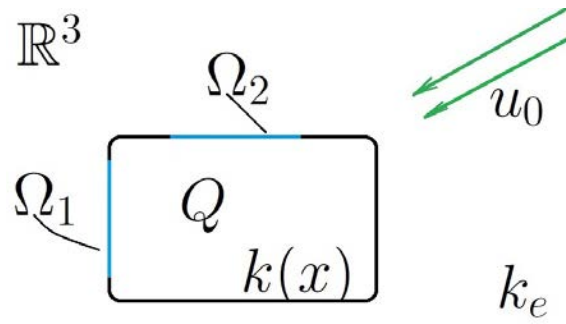


Рис. 6: Скалярная задача дифракции на частично экранированном теле.

В данной главе исследуется задача дифракции на *частично экранированном теле*. Предполагается, что экраны лежат на гладкой части границы области неоднородности:

$$\Omega_1, \Omega_2 \subset \partial Q, \quad \text{mes}(\partial Q \setminus (\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2)) > 0 \quad (2.4)$$

причем  $\partial Q \setminus (\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2)$  – открытое множество на поверхности  $\partial Q$ .

Ниже дается математическая формулировка задачи дифракции плоской волны  $u_0(x) = e^{ik_e(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3)}$  ( $x \in \mathbb{R}^3$ ) на частично экранированном теле  $Q$ . Искомое решение  $u = u(x)$  задачи дифракции — *полное поле*; *рассеянное поле* определяется как разность  $u_s = u - u_0$ .

### Постановка задачи дифракции.

Требуется определить комплекснозначную функцию  $u = u(x)$  ( $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$ ), удовлетворяющую в классическом смысле вне границы тела однородному уравнению Гельмгольца,

$$\Delta u(x) + k^2(x)u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial Q, \quad (2.5)$$

условиям сопряжения на «неэкранированной» части границы области неоднородности,

$$[u]|_{\partial Q \setminus \bar{\Omega}} = 0, \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right] \Big|_{\partial Q \setminus \bar{\Omega}} = 0, \quad (2.6)$$

краевым условиям Дирихле на экране  $\Omega_1$  и условиям Неймана на экране  $\Omega_2$  (за исключением точек краев всех экранов),

$$u|_{\Omega_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Omega_2} = 0, \quad (2.7)$$

условиям ограниченности энергии в любом конечном объеме пространства,

$$u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3) \quad (2.8)$$

и условиям излучения на бесконечности для рассеянного поля  $u_s$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_s}{\partial r} &= ik_e u_s + o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при } \text{Im } k_e = 0, \\ u_s(r) &= O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad \text{при } \text{Im } k_e > 0, \quad r := |x| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Потребуем, чтобы искомая функция  $u(x)$  удовлетворяла следующим условиям гладкости:

$$\begin{aligned} u \in C^2(Q) \cap C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \partial Q) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}) \cap \bigcap_{\delta > 0} C(\mathbb{R}^3 \setminus (\bar{\Omega}_2 \cup \Omega_{1,\delta})) \\ \cap \bigcap_{\delta > 0} C^1((\bar{M}_+ \setminus (\bar{\Omega}_1 \cup \partial\Omega_{2,\delta})) \cup (\bar{M}_- \setminus (\bar{\Omega}_1 \cup \partial\Omega_{2,\delta}))), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где  $M$  – произвольная гладкая замкнутая ориентируемая поверхность, содержащая экран  $\Omega$ , а  $M_-$ ,  $M_+$  – внешняя и внутренняя области по отношению к  $M$ .

*Замечание 2.1.* Условия (2.10) означают, что полное поле должно быть дважды непрерывно дифференцируемым в  $Q$ , бесконечно дифференцируемым в свободном от рассеивателей пространстве, непрерывно дифференцируемым вне экранов, непрерывным всюду за исключением точек экрана  $\Omega_2$  и края экрана  $\Omega_1$ ; кроме того, должно выполняться условие непрерывной дифференцируемости с каждой стороны произвольной замкнутой гладкой поверхности, содержащей экраны, за исключением точек экрана первого типа (включая границу) и края экрана второго типа.

**Определение 2.1.** *Решение  $u(x)$  задачи (2.5)–(2.9), удовлетворяющее условиям (2.10), называется квазиклассическим.*

Ниже будет доказано, что поставленная краевая задача для уравнения Гельмгольца имеет не более одного квазиклассического решения.

### Единственность квазиклассического решения краевой задачи дифракции

**Теорема 2.1.** [118, 124, 125, 136, 145, 148] Пусть объемный рассеиватель  $Q$  характеризуется гладким показателем преломления,  $k(x) \in C^\infty(\overline{Q}_j)$ , а всюду в  $\mathbb{R}^3$  выполнены условия  $\operatorname{Re} k(x) > 0$ ,  $\operatorname{Im} k(x) \geq 0$ . Пусть  $u(x)$  – квазиклассическое решение задачи дифракции (2.5)–(2.9). Тогда это решение единственно.

*Доказательство.* В силу линейности рассматриваемой задачи достаточно показать, что краевая задача для рассеянного поля  $u_s$  с условиями на экранах

$$u_s|_{\Omega_1} = 0, \quad \partial u_s / \partial \mathbf{n}|_{\Omega_2} = 0$$

имеет только тривиальное решение  $u_s \equiv 0$ .

1. Введем шар  $B = B_R(0)$  достаточно большого радиуса  $R$  такой, что  $\overline{Q} \subset B$ . Обозначим область неоднородности  $Q$  через  $V_1$  и определим область

$V_2 = B \setminus (\overline{V}_1)$  с границей  $\partial V_2 = \partial B \cup \partial V_1$  и  $V_3 = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}$  с границей  $\partial V_3 = \partial B$ .

Обозначим сужения рассеянного поля  $u_s(x)$  на замкнутые области  $\overline{V}_i$  через  $v_i(x)$  и рассмотрим задачу сопряжения в областях  $V_i$ , эквивалентную исходной краевой задаче для  $u_s$ .

Из исходной постановки задачи дифракции вытекает, что функции  $v_i$  удовлетворяют уравнениям Гельмгольца в соответствующих областях определения,

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2(x))v_1(x) &= 0, & x \in V_1, \\ (\Delta + k_e^2)v_2(x) &= 0, & x \in V_2, \\ (\Delta + k_e^2)v_3(x) &= 0, & x \in V_3, \end{aligned} \quad (2.11)$$

условиям сопряжения на границах смежных областей,

$$\begin{aligned} v_1(x) &= v_2(x), & x \in \partial V_1 \setminus \overline{\Omega}, \\ v_1(x) &= v_2(x) = 0, & x \in \Omega_1, \\ v_2(x) &= v_3(x), & x \in \partial B, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{n}} &= -\frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{n}}, & x \in \partial V_1 \setminus \overline{\Omega}, \\ \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{n}} &= -\frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{n}} = 0, & x \in \Omega_2, \\ \frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{n}} &= -\frac{\partial v_3}{\partial \mathbf{n}}, & x \in \partial B, \end{aligned} \quad (2.13)$$

и условиям на бесконечности для функции  $v_3$ ,

$$\frac{\partial v_3}{\partial r} = ik_e v_3 + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (2.14)$$

В соотношениях  $\frac{\partial v_i}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial v_j}{\partial \mathbf{n}}$ , описывающих равенство нормальных производных на границах смежных областей, одним и тем же символом  $\mathbf{n}$  обозначены векторы внешней нормали, имеющие *противоположное направление* для областей  $V_i$  и  $V_j$ .

2. В ограниченных областях  $V_i$  ( $i = 1, 2$ ) применим формулу Грина (1.16) к парам функций  $\overline{v}_i, v_i$  (о применимости формулы Грина см. Замечание 1.2



предыдущей главы) и учтем уравнение Гельмгольца:

$$\begin{aligned}
 \int_{V_1} (\bar{v}_1 \Delta v_1 + |\nabla v_1|^2) dx &= - \int_{V_1} k^2(x) |v_1|^2 dx + \int_{V_1} |\nabla v_1|^2 dx = \\
 &= \int_{\partial V_1'} \bar{v}_1 \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{n}} ds, \\
 \int_{V_2} (\bar{v}_2 \Delta v_2 + |\nabla v_2|^2) dx &= -k_e^2 \int_{V_2} |v_2|^2 dx + \int_{V_2} |\nabla v_2|^2 dx = \\
 &= \int_{\partial V_2} \bar{v}_2 \frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{n}} ds.
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Используя граничные условия (2.12), преобразуем правые части (2.15):

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial V_1} \bar{v}_1 \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{n}} ds &= \int_{\partial V_1 \setminus \bar{\Omega}} \bar{v}_1 \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{n}} ds, \\
 \int_{\partial V_2} \bar{v}_2 \frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{n}} ds &= - \int_{\partial V_1 \setminus \bar{\Omega}} \bar{v}_1 \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{n}} ds - \int_{\partial B} \bar{v}_3 \frac{\partial v_3}{\partial \mathbf{n}} ds.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Суммируя равенства (2.15) и учитывая (2.16), получим:

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial B} \bar{v}_3 \frac{\partial v_3}{\partial \mathbf{n}} ds &= k_e^2 \int_{V_2} |v_2|^2 dx + \int_{V_1} k^2(x) |v_1|^2 dx - \\
 &- \int_{V_1} |\nabla v_1|^2 dx - \int_{V_2} |\nabla v_2|^2 dx.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

3. Далее доказательство тривиальности решения проводится для нескольких случаев, когда однородная среда и/или рассеиватель являются (не являются) поглощающими.

3.1. Пусть всюду  $\text{Im } k(x) > 0$ . Из условия излучения (2.9) следует  $u(x) = O(R^{-2})$  на сфере  $\partial B$  и левая часть равенства (2.17) стремится к нулю при  $R \rightarrow +\infty$ . Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \int_{V_1} k^2(x) |v_1|^2 dx + k_e^2 \int_{V_2} |v_2|^2 dx - \\
 - \sum_{i=1,2} \int_{V_i} |\nabla v_i|^2 dx \rightarrow 0, \quad R \rightarrow +\infty.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Беря мнимую часть в соотношении (2.18), получим:

$$\int_{V_1} \operatorname{Re} k(x) \cdot \operatorname{Im} k(x) |v_1|^2 dx + \operatorname{Re} k_e \cdot \operatorname{Im} k_e \int_{V_2} |v_2|^2 dx \rightarrow 0, \quad R \rightarrow +\infty,$$

причем оба слагаемых имеют один и тот же знак в силу ограничений на параметры среды. Следовательно,  $v_i(x) \equiv 0$ ,  $x \in V_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

3.2. Пусть  $\operatorname{Im} k(x) \equiv 0$  всюду в  $\mathbb{R}^3$ . Используя условия излучения на бесконечности, получим для мнимой части выражений в (2.17)

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left( \int_{\partial B} \bar{v}_3 \frac{\partial v_3}{\partial \mathbf{n}} ds \right) &= \operatorname{Im} \left( \int_{\partial B} (ik_e v_3 + o(R^{-1})) \bar{v}_3 ds \right) = \\ &= k_e \int_{\partial B} |v_3|^2 ds + \int_{\partial B} o(R^{-2}) ds = \\ &= k_e \int_{\partial B} |v_3|^2 ds + o(1) = 0. \end{aligned}$$

Из леммы Реллиха (см. [19], стр.88) следует, что  $v_3 \equiv 0$  в  $V_3$ , то есть решение однородной краевой задачи тривиально *вне* области неоднородности.

Покажем теперь, что  $u_s = u \equiv 0$  в  $Q$  (доказательство отличается от изложенного в Гл.1, так как в случае частично экранированного тела не удастся сформулировать переопределенную краевую задачу с однородными граничными условиями *на всей* поверхности  $\partial Q$ ).

Через  $\Omega_\delta$  обозначим  $\delta$ -окрестность всего экрана  $\Omega$  :

$$\Omega_\delta = \{x \in \mathbb{R}^3 : \operatorname{dist}(x, \Omega) < \delta\}.$$

Рассмотрим области  $V_1 = Q \setminus \bar{\Omega}_\delta$  и  $V_2 = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_\delta$ .

Перепишем уравнение Гельмгольца в виде

$$(\Delta - 1)u(x) = (-k^2(x) - 1)u(x) = f(x), \quad x \in V_1 \setminus \partial Q. \quad (2.19)$$

Для функций  $u, f$  по крайней мере верно включение  $u, f \in L_2(Q)$ . Тогда из сильной эллиптичности оператора  $(\Delta - 1)$  следует, что  $u \in H^2(V_1)$ .

В силу доказанного выше ( $u \equiv 0$  вне  $\bar{Q}$ ) и условий сопряжения следует, что  $u \in H_{\text{loc}}^2(V_2)$  и, следовательно,  $u, f \in C_0^\alpha(V_2)$ .

Так как  $f \in C_0^\alpha(\bar{V}_1)$ , уравнение (2.19) удовлетворено почти всюду в  $V_1$  и  $u \in H^2(V_1)$ , то (см. [23], с.234–236)  $u \in C^{2,\alpha}(\bar{V}_1)$ . Отсюда следует, что  $u$  дважды непрерывно дифференцируема и финитна в неограниченной области  $V_2$ :  $u \in C_0^{2,\alpha}(\bar{V}_2)$ . В силу принципа единственного продолжения ([63], с.212) заключаем из  $u \equiv 0$  в  $V_2 \setminus V_1$ , что  $u \equiv 0$  в  $V_2$ .

Наконец, учитывая, что параметр  $\delta$  в определении окрестности  $\Omega_\delta$  экрана  $\Omega$  может быть выбран сколь угодно малым, выводим, что  $u \equiv 0$  во всей открытой области  $Q$ .  $\square$

## 2.2 Представление решения задачи дифракции с помощью потенциалов. Система интегро-дифференциальных уравнений

Решение задачи дифракции (2.5)-(2.9) будем искать в виде

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3, \quad (2.20)$$

где  $u_0$  – падающее поле;  $u_1, u_2$  – поля, рассеянные экранами  $\Omega_1, \Omega_2$ , которые ищутся в виде поверхностных интегралов типа потенциала простого и двойного слоя соответственно (см. предыдущую главу):

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \int_{\Omega_1} G(x, y) \varphi_1(y) ds_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_1, \\ u_2(x) &= - \int_{\Omega_2} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \varphi_2(y) ds_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_2. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Здесь  $\varphi_i$  – неизвестные поверхностные плотности.

Поле  $u_0 + u_1 + u_2$  удовлетворяет вне экранов однородному уравнению Гельмгольца:

$$(\Delta + k_e^2)(u_0 + u_1 + u_2)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}. \quad (2.22)$$

Введем функции  $\tilde{k}(x) = (k^2(x) - k_e^2)$ ,  $F(x) = -\tilde{k}(x)u(x)$  и перепишем уравнение (2.5) в виде:

$$(\Delta + k_e^2)u(x) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial Q. \quad (2.23)$$

Из (2.20), (2.22) вытекает уравнение для  $u_3$ :

$$(\Delta + k_e^2)u_3(x) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial Q. \quad (2.24)$$

Решение уравнения (2.24) представимо [6] в виде

$$u_3(x) = \int_Q \tilde{k}(y)G(x, y)u(y)dy. \quad (2.25)$$

Из уравнений (2.20), (2.21), (2.25) в области  $Q$  и краевых условий (2.7) на экранах  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  следует система интегро-дифференциальных уравнений [118, 125, 136]:

$$\begin{aligned} u(x) - \int_Q \tilde{k}(y)G(x, y)u(y)dy - \int_{\Omega_1} G(x, y)\varphi_1(y)ds_y + \\ + \int_{\Omega_2} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \varphi_2(y)ds_y = u_0(x), \quad x \in Q, \\ - \int_Q \tilde{k}(y)G(x, y)u(y)dy - \int_{\Omega_1} G(x, y)\varphi_1(y)ds_y + \\ + \int_{\Omega_2} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \varphi_2(y)ds_y = u_0(x), \quad x \in \Omega_1, \\ - \int_Q \tilde{k}(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_x} u(y)dy - \int_{\Omega_1} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_x} \varphi_1(y)ds_y + \\ + \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \left( \int_{\Omega_2} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \varphi_2(y)ds_y \right) = \frac{\partial u_0(x)}{\partial \mathbf{n}_x}, \quad x \in \Omega_2. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Эта система уравнений аналогична системе, полученной в Гл.1 для случая непересекающихся экранов и тел.

Запишем также представление полного поля вне рассеивателя:

$$u(x) = u_0(x) + \int_Q \tilde{k}(y)G(x, y)u(y)dy + \int_{\Omega_1} G(x, y)\varphi_1(y)ds_y - \int_{\Omega_2} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \varphi_2(y)ds_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}. \quad (2.27)$$

### 2.3 Эллиптичность матричного интегро-дифференциального оператора в пространствах Соболева

Перепишем систему уравнений (2.26) в операторной форме:

$$\widehat{\mathcal{L}}((u, \varphi_1, \varphi_2)^T) = (u_0|_Q, u_0|_{\Omega_1}, \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Omega_2})^T. \quad (2.28)$$

Матричный оператор  $\widehat{\mathcal{L}}$  системы имеет вид:

$$\widehat{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \mathcal{I} - \mathcal{A} & -\mathcal{K}_{12} & \mathcal{K}_{13} \\ -\mathcal{K}_{21} & -\mathcal{S}_1 & \mathcal{K}_{23} \\ -\mathcal{K}_{31} & -\mathcal{K}_{32} & -\mathcal{S}_2 \end{pmatrix}; \quad (2.29)$$

операторы  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{S}_i$  и  $\mathcal{K}_{ij}$  определяются аналогично случаю непересекающихся тел и экранов в Гл. 1:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u &= \int_Q \tilde{k}(y)G(x, y)u(y)dy, \quad x \in Q, \\ \mathcal{K}_{12}\varphi_1 &= \int_{\Omega_1} G(x, y)\varphi_1(y)ds_y, \quad x \in Q, \\ \mathcal{K}_{13}\varphi_2 &= \int_{\Omega_2} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \varphi_2(y)ds_y, \quad x \in Q, \\ \mathcal{K}_{21}u &= \int_Q \tilde{k}(y)G(x, y)u(y)dy, \quad x \in \Omega_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_1\varphi_1 &= \int_{\Omega_1} G(x, y)\varphi_1(y)ds_y, \quad x \in \Omega_1, \\
\mathcal{K}_{23}\varphi_2 &= \int_{\Omega_2} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \varphi_2(y)ds_y, \quad x \in \Omega_1, \\
\mathcal{K}_{31}u &= \int_Q \tilde{k}(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_x} u(y)dy, \quad x \in \Omega_2, \\
\mathcal{K}_{32}\varphi_1 &= \int_{\Omega_1} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_x} \varphi_1(y)ds_y, \quad x \in \Omega_2, \\
\mathcal{S}_2\varphi_2 &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \left( \int_{\Omega_2} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \varphi_2(y)ds_y \right), \quad x \in \Omega_2,
\end{aligned}$$

$\mathcal{I}$  – тождественный оператор.

Матричный оператор  $\widehat{\mathcal{L}}$  рассматривается как отображение в пространствах Соболева на многообразиях с краем, введенных в предыдущей главе:

$$\widehat{\mathcal{L}} = \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}',$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} &= L_2(Q) \times \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}_1) \times \tilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega}_2), \\
\mathbf{X}' &= L_2(Q) \times H^{1/2}(\Omega_1) \times H^{-1/2}(\Omega_2).
\end{aligned} \tag{2.30}$$

**Определение 2.2.** *Решением системы уравнений (2.28) называется тройка  $(u, \varphi_1, \varphi_2) \in \mathbf{X}$ , удовлетворяющая уравнению (2.28).*

**Теорема 2.2.** [118, 124, 148] *Пусть рассеиватель  $Q$  характеризуется показателем преломления  $k(x) \in C^\infty(\overline{Q}_j)$  и всюду в  $\mathbb{R}^3$  выполнены условия  $\operatorname{Re} k(x) > 0$ ,  $\operatorname{Im} k(x) \geq 0$ . Тогда оператор  $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$  является эллиптическим.*

*Доказательство.* Представим  $\widehat{\mathcal{L}}$  в виде суммы трех операторов,

$$\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\mathcal{L}}_1 + \widehat{\mathcal{L}}_2 + \widehat{\mathcal{L}}_3, \tag{2.31}$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}}_1 &= \begin{pmatrix} \mathcal{I} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathcal{S}_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathcal{S}_2 \end{pmatrix}, & \widehat{\mathcal{L}}_2 &= \begin{pmatrix} -\mathcal{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{K}_{23} \\ 0 & -\mathcal{K}_{32} & 0 \end{pmatrix}, \\ \widehat{\mathcal{L}}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{K}_{12} & \mathcal{K}_{13} \\ -\mathcal{K}_{21} & 0 & 0 \\ -\mathcal{K}_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Эллиптичность оператора  $\widehat{\mathcal{L}}_1$  доказана в предыдущей главе (см. Теорему 1.2).

Докажем компактность оператора  $\widehat{\mathcal{L}}_2$ . Так как оператор  $A$  действует из пространства  $L_2(Q)$  в  $H_{loc}^2(\mathbb{R}^3)$ , то  $A : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$  компактен. Интегральные операторы  $\mathcal{K}_{23}$  и  $\mathcal{K}_{32}$  имеют бесконечно гладкие ядра, так как в рассматриваемой задаче  $\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = \emptyset$  по предположению; следовательно,  $\mathcal{K}_{23}$  и  $\mathcal{K}_{32}$  компактны.

Остается показать, что компоненты  $\mathcal{K}_{ij}$  матричного оператора  $\widehat{\mathcal{L}}_3$  компактны в выбранных пространствах.

Рассмотрим оператор  $\mathcal{K}_{12}$ . По предположению  $\varphi_1 \in \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}_1)$ . Продолжим плотность  $\varphi_1$  нулем на произвольную гладкую замкнутую поверхность  $M \supset \Omega_1$ ; получим (см. [105], с. 239), что продолжение  $\varphi'_1$  принадлежит пространству  $H^{-1/2}(M)$ . Следовательно (см. [67], с. 615),

$$\mathcal{K}_1 \varphi'_1 \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^3), \quad \sigma_0 \mathcal{K}_1 \varphi'_1 \in H^1(Q).$$

Так как пространство  $H^1(Q)$  компактно вложено в  $H^0(Q) = L_2(Q)$  (см. [1], с. 74), то отображение  $\mathcal{K}_{12} : \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}_1) \rightarrow L_2(Q)$  компактно.

Рассмотрим теперь плотность  $\varphi_2 \in \tilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega}_2)$ , построим ее продолжение нулем  $\varphi'_2 \in H^{1/2}(M)$ , выбирая гладкую замкнутую поверхность  $M \supset \Omega_1$  так, чтобы  $Q \subset M_-$ . Получим последовательно:

$$\mathcal{K}_2 \varphi'_2 \in H^1(M_-) \cap H_{loc}^1(M_+), \quad \sigma_0 \mathcal{K}_2 \varphi'_2 \in H^1(Q).$$

Так как пространство  $H^1(Q)$  компактно вкладывается в  $H^0(Q) = L_2(Q)$ , то отображение  $\mathcal{K}_{13} : \tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega}_1) \rightarrow L_2(Q)$  компактно.

Докажем компактность оператора  $\mathcal{K}_{21}$ , представляющего собой композицию слабосингулярного интегрального оператора  $\mathcal{K}_0$ , оператора следа  $\gamma_0$  и оператора  $\sigma_1$  сужения на экран  $\Omega_1$ .

Оператор  $\mathcal{K}_0$  непрерывно отображает пространство  $L_2(Q)$  в  $H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$ . Пусть  $V$  – произвольная ограниченная область с гладкой границей  $\partial V \supset \Omega_1$ . Тогда оператор взятия следа  $\gamma_0$  действует непрерывно из пространства  $H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$  в  $H^{3/2}(\partial V)$ . Сужение элемента  $\gamma_0 \mathcal{K}_0 u \in H^{3/2}(\partial V)$  на незамкнутый экран  $\Omega_1$  есть (по определению) элемент пространства  $H^{3/2}(\Omega_1)$  (в силу определения последнего). Так как пространство  $H^{3/2}(\Omega_1)$  вкладывается компактно ([1], с. 41,79) в  $H^{1/2}(\Omega_1)$ , то оператор  $\mathcal{K}_{21} : L_2(Q) \rightarrow H^{1/2}(\Omega_1)$  компактен.

Докажем компактность оператора  $\mathcal{K}_{31}$ , представляющего собой композицию слабосингулярного интегрального оператора  $\mathcal{K}_0$ , оператора следа  $\gamma_1$  и оператора  $\sigma_2$  сужения на экран  $\Omega_2$ .

Оператор  $\mathcal{K}_0$  непрерывен из  $L_2(Q)$  в  $H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$ . Пусть  $V$  – произвольная ограниченная область с гладкой границей  $\partial V \supset \Omega_2$ . Тогда оператор взятия следа  $\gamma_1$  действует непрерывно из пространства  $H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$  в  $H^{1/2}(\partial V)$ . Сужение элемента  $\gamma_0 \mathcal{K}_0 u \in H^{1/2}(\partial V)$  на незамкнутый экран  $\Omega_2$  есть (по определению) элемент пространства  $H^{1/2}(\Omega_2)$ . Так как пространство  $H^{1/2}(\Omega_2)$  вкладывается компактно ([1], с. 41,79) в  $H^{-1/2}(\Omega_2)$ , то  $\mathcal{K}_{31} : L_2(Q) \rightarrow H^{-1/2}(\Omega_2)$  – компактный оператор.

Итак,  $\widehat{\mathcal{L}}_3$  компактен, а  $\widehat{\mathcal{L}}$  – эллиптический оператор в указанных пространствах. □

**Следствие 2.1.** *Оператор  $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$  является фредгольмовым оператором (с нулевым индексом).*



## 2.4 Эквивалентность краевой задачи и системы интегро-дифференциальных уравнений. Непрерывная обратимость матричного интегро-дифференциального оператора

В этом параграфе будет показано, что краевая задача дифракции в квазиклассической постановке эквивалентна системе интегро-дифференциальных уравнений. Система (2.28) рассматривается в более широких классах функций, чем исходная краевая задача. Прежде всего будет показано, что всякое решение системы (2.28) удовлетворяет условиям гладкости (2.10) при условии бесконечной дифференцируемости правой части системы.

**Теорема 2.3.** [118, 136] Пусть падающее поле задается функцией  $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ , а система уравнений (2.28) имеет решение

$$(u, \varphi_1, \varphi_2) \in \mathbf{X}.$$

Тогда для поверхностных плотностей  $\varphi_1, \varphi_2$  верно включение  $\varphi_i \in C^\infty(\Omega_i)$ , а полное поле  $u(x)$ , продолженное вне  $Q$  согласно (2.27), удовлетворяет условиям гладкости (2.10) и (2.8).

*Доказательство.* 1. Пусть  $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ . Из представления

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + u_3(x)$$

полного поля вне рассеивателя и бесконечной дифференцируемости ядер всех интегро-дифференциальных операторов при  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}$  следует, что  $u_i \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q})$ .

Введем произвольную открытую подобласть  $Q'$  области  $Q$ , такую, что  $\text{dist}(\partial Q, \partial Q') > 0$ . Так как ядра операторов  $\mathcal{K}_{12}, \mathcal{K}_{13}$  бесконечно гладкие и допустимо дифференцирование под знаком интеграла, то из первого уравнения системы (2.26) получим

$$\Delta u(x) - 1 = -(k^2(x) - 1)u(x), \quad (k^2(x) - 1)u(x) \in L_2(Q).$$

Так как оператор  $(\Delta - 1)$  является эллиптическим, то (см. [52], с.73)  $u \in H^2(Q')$ . Далее получим  $u \in H^4(Q'), \dots$  и, следовательно,  $u \in C^\infty(Q')$ . Так как расстояние  $dist(\partial Q, \partial Q')$  может быть сколь угодно малым, то  $u \in C^\infty(Q)$  первое включение в (2.10) проверено.

2. С учетом предыдущих рассуждений для доказательства включения  $u \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$  достаточно установить гладкость решения в достаточно малой окрестности  $(B_\varepsilon(x_0))$  произвольной точки  $x_0 \in \partial Q \setminus \bar{\Omega}$ .

Пусть  $x_0 \in \partial Q$  лежит вне экрана  $\bar{\Omega}$ ; тогда  $d = dist(x_0, \Omega) > 0$ . Пусть

$$c(y) \in C^\infty(\mathbb{R}^3), \quad c(y) = \begin{cases} 1, & |y - x_0| < \varepsilon = d/4, \\ 0, & |y - x_0| > 2\varepsilon \end{cases}$$

— произвольная гладкая функция-срезка. Носитель такой финитной функции не имеет общих точек с экраном:  $\text{supp } c \cap \bar{\Omega} = \emptyset$ . Рассмотрим в шаре  $B_d(x_0)$  представление

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_1 + u_2 + K_0 u = \\ &= u_0 + u_1 + u_2 + K_0 u_0 + K_0 u_1 + K_0 u_2 + K_0 u_3 \end{aligned} \tag{2.33}$$

и исследуем гладкость всех слагаемых в последней сумме.

Из условий теоремы и определения окрестности  $B_d(x_0)$  следует

$$u_0, u_1, u_2 \in C^\infty(B_d(x_0)).$$

Так как плотность  $\tilde{k}(y)u_0(y)$  объемного потенциала  $K_0 u_0$  является гладкой в  $\bar{Q}$ , то (см. [6], с. 396)

$$K_0 u_0 \in C^1(\mathbb{R}^3).$$

Для слагаемых  $K_0 u_i$  ( $i \neq 0$ ) рассмотрим разложения

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0 u_i(x) &= \int_Q G(x, y) \tilde{k}(y) u_i(y) dy = \\ &= \int_{Q \cap B_{2\varepsilon}(x_0)} G(x, y) \tilde{k}(y) u_i(y) c(y) dy + \\ &+ \int_{Q \setminus B_\varepsilon(x_0)} G(x, y) \tilde{k}(y) u_i(y) (1 - c(y)) dy = I_{i,1}(x) + I_{i,2}(x). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Из гладкости ядер интегралов  $I_{i,2}$  в шаре  $x \in B_{\varepsilon/2}[x_0]$  следует

$$I_{i,2}(x) \in C^\infty(B_{\varepsilon/2}[x_0]).$$

Так как  $(Q \cap B_{2\varepsilon}[x_0]) \cap \bar{\Omega}_i = \emptyset$ , то  $u_1, u_2 \in C^\infty(\bar{Q} \cap B_{2\varepsilon}[x_0])$  и в силу свойств объемного потенциала

$$I_{i,1} \in C^1(\mathbb{R}^3) \text{ при } i = 1, 2.$$

По условию теоремы  $u \in L_2(Q)$ . Следовательно, (см. [1], с.76)

$$\mathcal{E}_0 u \in L_2(\mathbb{R}^3), \quad u_3 \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3).$$

В силу теоремы о вложении пространств Соболева (см. [53], с.409)

$$u_3 \in H^2(Q \cap B_{2\varepsilon}[x_0]) \subset C^{0,\alpha}(\bar{Q} \cap B_{2\varepsilon}[x_0])$$

для любых  $\alpha \in (0, 1/2)$ . Следовательно, объемный потенциал  $I_{3,2}$  имеет непрерывную плотность, откуда  $I_{3,2} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ .

Окончательно,  $u \in C^1(B_{\varepsilon/2}[x_0])$ .

3. Проверим условие конечности энергии. Запишем представление  $u(x)$  вне экранов в виде

$$u(x) = u_0(x) + \mathcal{K}_0 u(x) + \mathcal{K}_1 \varphi_1(x) - \mathcal{K}_2 \varphi_2(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}.$$

По условию теоремы  $\varphi_1 \in \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}_1)$ . Рассмотрим гладкую замкнутую поверхность  $M_1$ , содержащую экран  $\Omega_1$ . Продолжение  $\varphi_1$  нулем на  $M_1$  принадлежит пространству  $H^{-1/2}(M_1)$ , а оператор  $\mathcal{K}_1 \varphi_1(x)$  можно рассматривать как потенциал простого слоя на замкнутой поверхности. Тогда (см. [67], стр.615)  $\mathcal{K}_1 \varphi_1 \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$ .

Аналогично, из условия  $\varphi_2 \in \tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega}_2)$  следует, что продолжение  $\varphi_2$  на гладкую замкнутую поверхности  $M_2 \supset \Omega_2$  принадлежит пространству и  $H^{1/2}(M_2)$ . Оператор  $\mathcal{K}_2\varphi_2(x)$  можно рассматривать как потенциал двойного слоя на замкнутой поверхности. Тогда [67]  $\mathcal{K}_2\varphi_2 \in H^1(M_{2,-}) \cap H_{\text{loc}}^1(M_{2,+})$ , где  $M_{2,-}$  и  $M_{2,+}$  – внутренняя (ограниченная) и внешняя (неограниченная) области в  $\mathbb{R}^3$  относительно замкнутой поверхности  $M_2$ .

В силу произвольности выбора  $M_i$  имеем

$$\mathcal{K}_i\varphi_i \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3).$$

Так как  $u \in L_2(Q)$ , то  $\mathcal{K}_0u \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$ ; кроме того,  $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ . Окончательно заключаем, что  $u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$ .

4. Покажем, что поле непрерывно вне края экранов.

Проверим сначала, что плотность  $\varphi_1$  непрерывна во внутренних точках поверхности  $\Omega_1$ .

Если  $x_0 \in \Omega_1 \setminus \partial\Omega_1$ , то  $d = \text{dist}(x_0, \partial\Omega_1) > 0$ . Определим параметр  $\varepsilon = d/4$ , экран  $\omega_1 = \Omega_1 \cap B_{\varepsilon/2}(x_0)$  и область  $V = Q \cap B_{2\varepsilon}(x_0)$ . Перепишем второе уравнение системы (2.26) в виде

$$\mathcal{S}_1\varphi_1 = -u_{0,\Omega_1} + \mathcal{K}_{23}\varphi_2 - K_{21}u.$$

Из условий теоремы следует, что  $u_{0,\Omega_1}, \mathcal{K}_{23}\varphi_2 \in C^\infty(\bar{\omega}_1)$ .

Исследуем гладкость  $\mathcal{K}_{21}u$  на  $\omega_1$ . Как показано выше,  $u \in H^1(Q)$ . Из представления полного поля и уравнения на экране  $\Omega_1$  следует, что для  $u$  выполнено (в смысле следов из  $H^{1/2}$ ) условие Дирихле  $u|_{\Omega_1} = 0$ . Пусть  $c(y)$  – такая же функция-срезка, как в п.2 доказательства. Рассмотрим разложение

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0u(x) &= \int_{Q \cap B_{2\varepsilon}(x_0)} G(x, y)\tilde{k}(y)u(y)c(y)dy + \\ &+ \int_{Q \setminus B_\varepsilon(x_0)} G(x, y)\tilde{k}(y)u(y)(1 - c(y))dy = \\ &= I_1(x) + I_2(x). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Имеем  $I_2 \in C^\infty(B_{\varepsilon/2}[x_0])$ .

Так как  $u \in H^1(Q)$ , то

$$\tilde{k}(y)u(y)c(y) \in H^1(Q \cap B_{2\varepsilon}(x_0))$$

и имеет нулевые данные Коши на  $\partial V$ . Тогда [1] ее продолжение нулем  $\mathcal{E}_0 \tilde{k}uc$  принадлежит  $H_{\text{comp}}^1(\mathbb{R}^3)$ . В силу свойств объемного потенциала [59] получим, что  $I_1 \in H_{\text{loc}}^3(\mathbb{R}^3)$ . Тогда  $\mathcal{K}_0 u \in H_{\text{loc}}^3(\mathbb{R}^3)$ ,  $\mathcal{K}_{21} u \in H^{5/2}(\omega_1)$ . Рассматривая оператор  $\mathcal{S}_1$  как эллиптический ПДО [105] порядка  $-1$  на  $\omega_1$ , получим (см. [52], с. 72), что  $\varphi_1 \in H_{\text{loc}}^{3/2}(\omega_1)$ . В силу теорем вложения пространств Соболева  $\varphi_1 \in C^{0,\alpha}(\omega_1)$  при всех  $\alpha \in (0, 1/2)$ .

Покажем теперь, что плотность  $\varphi_2$  непрерывна во внутренних точках поверхности  $\Omega_2$ .

Если  $x_0 \in \Omega_2 \setminus \partial\Omega_2$ , то  $d = \text{dist}(x_0, \partial\Omega_2) > 0$ . Введем параметр  $\varepsilon = d/4$ , экран  $\omega_2 = \Omega_2 \cap B_{\varepsilon/2}(x_0)$  и область  $V = Q \cap B_{2\varepsilon}(x_0)$ . Перепишем третье уравнение из (2.26) в виде

$$-\mathcal{S}_2 \varphi_2 = u_{0,\mathbf{n}}|_{\Omega_2} + \mathcal{K}_{32} \varphi_1 + \mathcal{K}_{31} u.$$

Из условий теоремы следует, что  $u_{0,\mathbf{n}}|_{\Omega_2}, \mathcal{K}_{32} \varphi_1 \in C^\infty(\bar{\omega}_2)$ .

Исследуем гладкость  $\mathcal{K}_{31} u$  на  $\omega_2$ . Так как  $u \in H^1(Q)$ , то  $u \in H^\alpha(Q)$  при любом  $\alpha \in (0, 1/2)$  в силу вложенности пространств Соболева. Тогда для продолжения  $\mathcal{E}_0$  функции  $u$  нулем верно  $\mathcal{E}_0 u \in H^\alpha(\mathbb{R}^3)$ . С учетом свойств ньютонова потенциала и оператора следа последовательно получим

$$\mathcal{K}_0 u \in H_{\text{loc}}^{\alpha+2}(\mathbb{R}^3), \quad \mathcal{K}_{31} u = \gamma_1 \mathcal{K}_0 u \in H^{\alpha+1/2}(\omega_2).$$

Так оператор  $\mathcal{S}_2$  есть эллиптический ПДО порядка 1 [105], то, рассматривая его как оператор на  $\omega_2$ , получим [52]  $\varphi_2 \in H_{\text{loc}}^{\alpha+3/2}(\omega_2)$ , откуда

$$\varphi_2 \in C^{0,\alpha}(\omega_2) \text{ при } \alpha \in (1/2, 1).$$

Докажем непрерывность функции  $u_1$  вне края экрана  $\Omega_1$ . Фиксируем  $x \in \Omega_1$ , введем параметр  $\varepsilon = d/4$  и определим функцию-срезку на экране

$c_1(y) \in C(\overline{\Omega}_1)$  :

$$c(y) = \begin{cases} 1, & |y - x| < \varepsilon, \\ 0, & |y - x| > 2\varepsilon. \end{cases} \quad (2.36)$$

Представим  $u_1$  в виде

$$u_1(x) = \int_{\Omega_1} G(x, y) c_1(y) \varphi_1(y) ds_y + \\ + \int_{\Omega_1 \setminus B_\varepsilon(x)} G(x, y) (1 - c_1(y)) \varphi_1(y) ds_y = I_1(x) + I_2(x).$$

Интеграл  $I_2$  непрерывен в точке  $x$  так как имеет гладкое ядро в  $B_\varepsilon(x)$ . Продолжая  $c_1(y) \varphi_1(y)$  нулем на произвольную гладкую замкнутую поверхность  $M_1 \supset \Omega_1$ , представим  $I_1$  в виде потенциала простого слоя с непрерывной (и финитной) плотностью (см. [6], стр. 399). Тогда

$$u_1 \in \bigcap_{\delta > 0} C(\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega_{1,\delta}).$$

Кроме того, из включения  $\varphi_1 \in C^{0,\alpha}(\omega_1)$  следует ([6], с.412), что  $u_1$  непрерывно дифференцируема с каждой стороны поверхности  $\omega_1$  (отметим, что предельные значения производных с разных сторон экрана различны).

Докажем непрерывность функции  $u_2$  вне края экрана  $\Omega_2$  с каждой стороны замыкающей поверхности  $M_2 \supset \Omega_2$ . Фиксируем точку  $x \in \Omega_2$  и определим функцию-срезку  $c_2(y) \in C(M)$  как в (2.36). Тогда

$$u_2(x) = - \int_M \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} c_2(y) \varphi_2(y) ds_y - \\ - \int_{M \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} (1 - c_2(y)) \varphi_2(y) ds_y = I_1 + I_2.$$

Интеграл  $I_2$  имеет бесконечно дифференцируемое ядро в  $B_\varepsilon(x)$  и удовлетворяет требуемому условию. Продолжая  $c_2(y) \varphi_2(y)$  нулем на  $M_2$ , представим  $I_1$  в виде потенциала двойного слоя с непрерывной (и финитной) плотно-

стью [6]. В силу произвольности выбора внутренней точки  $x \in \Omega_2$  имеем

$$u_2 \in \bigcap_{\delta > 0} C((\overline{M}_+ \setminus \partial\Omega_{2,\delta}) \cup (\overline{M}_- \setminus \partial\Omega_{2,\delta})).$$

Таким образом, полное поле удовлетворяет условию

$$u \in \bigcap_{\delta > 0} C(\mathbb{R}^3 \setminus (\overline{\Omega}_2 \cup \Omega_{1,\delta})).$$

Из условия  $\varphi_2 \in C^{0,\alpha}(\omega_2)$  получим аналогично, что решение  $u$  непрерывно дифференцируемо с каждой стороны поверхности  $\Omega_2$  вплоть до внутренних точек экрана. Таким образом, удовлетворено последнее условие в (2.10).  $\square$

Из Теоремы 2.3 следует эквивалентность дифференциальной и интегральной формулировок задачи дифракции.

**Теорема 2.4.** [118, 124, 136] Пусть параметры среды и неоднородного рассеивателя удовлетворяют условиям  $k(x) \in C^\infty(\overline{Q})$ ,  $\operatorname{Re} k(x) > 0$ ,  $\operatorname{Im} k(x) \geq 0$  в  $\mathbb{R}^3$ , а падающее поле всюду является гладким,  $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ . Тогда задача дифракции в дифференциальной формулировке  $(\mathcal{P}_1)$  эквивалентна системе интегро-дифференциальных уравнений  $(\mathcal{P}_2)$ . Подробнее, если  $u(x)$  является квазиклассическим решением задачи  $(\mathcal{P}_1)$ , то  $(u, \varphi_1, \varphi_2)$  удовлетворяет системе (2.28) и верно интегральное представление (2.27). Обратно, если тройка  $(u, \varphi_1, \varphi_2) \in L_2(Q) \times \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}_1) \times \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}_2)$  есть решение системы (2.28) при  $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ , то функция  $u(x)$ , продолженная в  $\mathbb{R}^3 \setminus (\overline{Q})$  по формуле (2.27), является квазиклассическим решением задачи дифракции.

*Доказательство.* Необходимая часть теоремы фактически установлена в ходе вывода интегро-дифференциальных уравнений. Докажем ее достаточную часть.

Пусть  $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  и  $(u, \varphi_1, \varphi_2)$  – решение системы (2.28).

Из определения  $u_3$  через объемный потенциал с ядром  $G(x, y)$  и бесконечной дифференцируемости  $u_0, u_1, u_2$  в открытой области  $Q$  вытекает, что  $u$  есть решение уравнения Гельмгольца. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} (\Delta + k_e^2)u(x) &= (\Delta + k_e^2)(u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + u_3(x)) = \\ &= 0 + 0 + 0 - (k^2(x) - k_e^2)u(x), \quad x \in Q. \end{aligned}$$

Аналогично, учитывая гладкость ядер всех интегральных операторов вне рассеивателей, выводим

$$(\Delta + k_e^2)u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}.$$

Условия сопряжения (2.6) выполняются в силу гладкости  $u$ , установленной в Теореме 2.3.

Покажем, что во внутренних точках экрана  $\Omega_1$  выполняется условие Дирихле. Рассмотрим представление  $u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3$  полного поля вне рассеивателей. Имеем:  $u_0$  и  $u_2$  бесконечно дифференцируемы вблизи экрана  $\Omega_1$ ,  $u_2 \in C^1(\mathbb{R}^3)$ , а интеграл  $u_1$  непрерывен во внутренних точках экрана. Из непрерывности всех компонент разложения  $u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + u_3(x)$  и из уравнения на  $\Omega_1$  следует, что  $u|_{\Omega_1} = 0$ .

Покажем, что во внутренних точках экрана  $\Omega_2$  выполняется условие Неймана. Снова используем представление  $u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3$  полного поля. Поля  $u_0$  и  $u_1$  бесконечно дифференцируемы вблизи экрана  $\Omega_2$ , объемный потенциал  $u_3 \in C^1(\mathbb{R}^3)$ , а интеграл  $u_2$  имеет непрерывную нормальную производную во внутренних точках  $\Omega_2$ . Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u(x) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u_0(x) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u_1(x) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u_2(x) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u_3(x), \quad x \in \Omega_2,$$

откуда и из уравнения системы (2.26) на экране  $\Omega_2$  следует, что  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u \Big|_{\Omega_2} = 0$ .

Условия излучения (2.7) вытекают из гладкости всех слагаемых в представлении (2.27) вне шара достаточно большого радиуса и определения фундаментального решения уравнения Гельмгольца. Проверка условия проводится так же, как и в предыдущей главе (см. Теорему 1.4).  $\square$



Докажем теперь утверждение об обратимости матричного оператора системы интегро-дифференциальных уравнений.

**Теорема 2.5.** [118, 124, 125, 136] Пусть параметры среды и рассеивателей удовлетворяют условиям:  $k(x) \in C^\infty(\overline{Q})$ ,  $\operatorname{Re} k(x) > 0$ ,  $\operatorname{Im} k(x) \geq 0$  в  $\mathbb{R}^3$ . Тогда оператор  $\widehat{\mathcal{L}}: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$  непрерывно обратим.

*Доказательство.* В Теореме 2.2 установлено, что в выбранных пространствах оператор  $\widehat{\mathcal{L}}$  является фредгольмовым (с нулевым индексом), поэтому достаточно установить его инъективность.

Пусть  $u_0 \equiv 0$ , а  $(u, \varphi_1, \varphi_2)$  – решение системы уравнений (2.26). Из Теорем 2.3 и 2.4 следует, что функция  $u(x)$ , продолженная по формуле (2.27), является квазиклассическим решением *однородной краевой задачи* (2.5)–(2.10). В теореме 2.1 показано, что это решение тривиально:  $u \equiv 0$  в  $\mathbb{R}^3$ . Из определения функций  $\varphi_i$  следует, что  $\varphi_i \equiv 0$  на  $\Omega_i$ . Следовательно, уравнение  $\widehat{\mathcal{L}}(u, \varphi_1, \varphi_2) = 0$  имеет лишь тривиальное решение.  $\square$

## 2.5 Формулировка метода Галеркина для системы интегро-дифференциальных уравнений в скалярной задаче дифракции на частично экранированном теле

Формулировка метода Галеркина для задачи дифракции на частично экранированном теле аналогична формулировке проекционного метода, данной в параграфе 1.5 Главы 1.

Мы рассматриваем уравнение

$$\widehat{\mathcal{L}}\mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \quad (2.37)$$

предполагая, что матричный оператор  $\widehat{\mathcal{L}}$  действует из пространства

$$\mathbf{X} = L_2(Q) \times \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}_1) \times \tilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega}_2)$$

в антидвойственное пространство

$$\mathbf{X}' = L_2(Q) \times H^{1/2}(\Omega_1) \times H^{-1/2}(\Omega_2).$$

Согласно постановке задачи дифракции, данной в параграфе 2.1 данной главы, правая часть уравнения (2.37)  $\mathbf{u}_0 \in C^\infty(Q) \times C^\infty(\bar{\Omega}_1) \times C^\infty(\bar{\Omega}_2)$ . Однако это ограничение несущественно в вопросе о сходимости численного метода и вектор-функция  $\mathbf{u}_0$  может быть выбрана произвольным образом из пространства  $\mathbf{X}'$ .

Введем обозначения для базисных функций на теле и экранах:

- $v_k^{(0)}(x)$  ( $k = 1, \dots, m_0$ ) – базисные функции в области  $Q$ ,
- $v_k^{(1)}(x)$  ( $k = 1, \dots, m_1$ ) – базисные функции на экране  $\Omega_1$ ,
- $v_k^{(2)}(x)$  ( $k = 1, \dots, m_2$ ) – базисные функции на экране  $\Omega_2$ .

Выбор базисных функций конкретного вида будет осуществлен ниже; пока мы лишь предполагаем, все эти функции удовлетворяют условию аппроксимации (1.61).

Будем искать приближенные решения  $\mathbf{u}_m = (u_{m_0}, \varphi_{1,m_1}, \varphi_{2,m_2})$  уравнения (2.37) согласно формулировке (1.62) метода Галеркина в гильбертовых пространствах в виде

$$\mathbf{u}_m = \sum \mathbf{c}_k \mathbf{v}_k$$

или в развернутой покомпонентной форме записи:

$$\begin{aligned} u_{m_0}(x) &= \sum_{k=1}^{m_0} c_k^{(0)} v_k^{(0)}(x), \quad x \in Q, \\ \varphi_{1,m_1}(x) &= \sum_{k=1}^{m_1} c_k^{(1)} v_k^{(1)}(x), \quad x \in \Omega_1, \\ \varphi_{2,m_2}(x) &= \sum_{k=1}^{m_2} c_k^{(2)} v_k^{(2)}(x), \quad x \in \Omega_2. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Здесь  $c_k^{(i)}$  – неизвестные коэффициенты, удовлетворяющие системе линей-

ных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \langle u_{m_0} - Au_{m_0} - K_{12}\varphi_{1,m_1} - K_{13}\varphi_{2,m_2}, v_{i_0}^{(0)} \rangle_0 = \langle u_0|_Q, v_{i_0}^{(0)} \rangle_0, \\ \langle -K_{21}u_{m_0} - S_1\varphi_{1,m_1} - K_{23}\varphi_{2,m_2}, v_{i_1}^{(1)} \rangle_1 = \langle u_0|_{\Omega_1}, v_{i_1}^{(1)} \rangle_1, \\ \langle -K_{31}u_{m_0} - K_{32}\varphi_{1,m_1} - S_2\varphi_{2,m_2}, v_{i_2}^{(2)} \rangle_2 = \left\langle \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Omega_2}, v_{i_2}^{(2)} \right\rangle_2, \end{cases} \quad (2.39)$$

где  $i_l = 1, \dots, m_l$ .

Матричная форма записи системы (2.39) имеет вид

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b}, \quad (2.40)$$

где  $\mathbf{c}$  – набор неизвестных коэффициентов,  $\mathbf{A}$  – основная матрица,  $\mathbf{b}$  – столбец правой части системы.

Матрица  $\mathbf{A}$  и столбец  $\mathbf{b}$  могут быть записаны в блочном виде (1.75), а элементы матричных блоков выражаются с помощью формул (1.76)–(1.79), выписанных в параграфе 1.5 Главы 1.

## 2.6 Сходимость метода Галеркина в скалярной задаче дифракции на частично экранированном теле

**Теорема 2.6.** [117, 118] Пусть область  $Q$  с кусочно-гладкой границей характеризуется заданной комплекснозначной функцией  $k(x)$ , параметры объемного рассеивателя и среды в  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}$  удовлетворяют условиям

$$k(x) \in C^\infty(\bar{Q}), \operatorname{Re} k(x) > 0, \operatorname{Im} k(x) \geq 0; \quad \operatorname{Re} k_e > 0, \operatorname{Im} k_e \geq 0, \quad (2.41)$$

а  $\Omega_1, \Omega_2$  – ориентируемые гладкие (класса  $C^\infty$ ) незамкнутые параметрически заданные поверхности. Пусть для любых  $m_0, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$  в области  $Q$  и на экранах  $\Omega_1, \Omega_2$  определены произвольным образом базисные функции  $v_{i_0}^{(0)}, v_{i_1}^{(1)}$  и  $v_{i_2}^{(2)}$ , удовлетворяющие условию аппроксимации (1.61) в пространствах  $L_2(Q), \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}_1)$  и  $\tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}_2)$  соответственно.

Тогда метод Галеркина (2.37) является сходящимся для оператора  $\hat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$ : приближенные решения  $\mathbf{u}_m$  сходятся к единственному решению  $\mathbf{u} \in \mathbf{X}$  уравнения (2.37) и имеет место квазиоптимальная оценка

скорости сходимости

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_m\|_{\mathbf{X}} \leq C \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{X}_m} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}. \quad (2.42)$$

*Доказательство.* Запишем оператор  $\widehat{\mathcal{L}}$  в следующем виде:

$$\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\mathcal{L}}_1 - \widehat{\mathcal{L}}_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{I} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathcal{S}_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathcal{S}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{K}_{12} & -\mathcal{K}_{13} \\ \mathcal{K}_{21} & 0 & -\mathcal{K}_{23} \\ \mathcal{K}_{31} & \mathcal{K}_{32} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Так как условие аппроксимации выполнено для  $v_{i_0}^{(0)}$  в  $L_2(Q)$ , то проекторы  $P_{i_0}^0$  на подпространства  $X_{m_0}^0 = \text{span}\{v_1^{(0)}, \dots, v_{m_0}^{(0)}\}$  равномерно сходятся к тождественному оператору  $\mathcal{I}$ . Следовательно [87], метод Галеркина сходится для оператора  $\mathcal{I} : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ .

Операторы  $\mathcal{S}_j$  непрерывно обратимы, являются эллиптическими в выбранных пространствах [105] и могут быть представлены в виде

$$\mathcal{S}_j = \mathcal{S}_j^0 + \mathcal{S}_j^c, \quad (2.44)$$

где  $\mathcal{S}_j^0$  – коэрцитивные операторы, а  $\mathcal{S}_j^c$  компактны. Следовательно, метод Галеркина сходится [87] и для  $\mathcal{S}_j$ . Таким образом, установлена сходимость проекционного метода для диагонального оператора  $\widehat{\mathcal{L}}_1$ .

Рассмотрим представление (2.43) для матричного оператора  $\widehat{\mathcal{L}}$ . Компактность  $\widehat{\mathcal{L}}_2$  и непрерывная обратимость  $\widehat{\mathcal{L}}$  доказаны в теоремах 2.2 и 2.5. С учетом Замечания 1.7 заключаем, что метод Галеркина сходится для оператора  $\widehat{\mathcal{L}}$  и имеет место квазиоптимальная оценка (2.42) скорости сходимости.  $\square$

## 2.7 Выбор базисных функций и проблема согласованности сеток на двух- и трехмерных рассеивателях

Во введении упоминалась проблема согласованности расчетных сеток на рассеивателях различной размерности при решении краевых задач дифракции на частично экранированных телах конечно-разностным методом.

Применение этого метода имеет ряд аспектов, затрудняющих его эффективную реализацию. Все они связаны с тем, что дифференциальная краевая задача дифракции формулируется в терминах единственной функции – полного поля  $u(x)$ . Эта неизвестная функция фигурирует в формулировке дифференциального уравнения, условий сопряжения и всех граничных условий на экранах. В связи с этим «правильная» реализация разностного метода подразумевает наличие согласованных («связанных») сеток на теле и экранах. Если тело и экраны имеют кусочно-параллелепипедальный (кусочно-прямоугольный) вид, то никаких трудностей не возникает: сетки на  $\Omega_1, \Omega_2$  суть подмножества сетки на  $\bar{Q}$ .

В случае тел сложной формы ситуация более трудная. На  $Q$  можно по-прежнему использовать простые (и даже равномерные) прямоугольные сетки, но граничные элементы таких сеток могут и не принадлежать экранам. Здесь приходится либо прибегать к аппроксимации граничных условий, внося в разностную схему дополнительную вычислительную погрешность, либо вводить сетки непосредственно на  $\Omega_i$ , согласуя (фактически определяя отношение «соседних узлов») их с сеткой в области  $Q$  и во внешности  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}$ .

От этих недостатков свободен метод Галеркина для решения системы интегро-дифференциальных уравнений на ограниченных многообразиях с краем. Метод интегральных уравнений подразумевает отыскание трех функций,  $u$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  на рассеивателях  $Q$ ,  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  соответственно. Несмотря на то, что плотности поверхностных потенциалов выражаются через полное поле ( $\varphi_1 = [\partial u / \partial \mathbf{n}]_{\Omega_1}$  и  $\varphi_2 = [u]_{\Omega_2}$ ), их значения можно найти «по отдельности» из системы (2.28).

Главный результат текущей главы, Теорема 2.6 о сходимости метода Галеркина, позволяет ввести минимальные ограничения на расчетные сетки, обеспечивающие выполнение условий аппроксимации для базисных функций на этих сетках – это условие (1.89). Важно отметить, в частности, что

при выполнении этого естественного условия никакого согласования сеток на  $Q$  и  $\Omega_i$  уже не требуется. Это позволяет, во-первых, строить расчетные сетки и определять базисные функции только из соображений удобства использования на рассеивателях той или иной формы. Во-вторых, произвольно и независимо друг от друга могут выбираться и количественные параметры сеток (число носителей, размеры носителей вдоль разных измерений и т.д.), что дает вычислителю большую свободу в определении блочной матрицы СЛАУ в методе Галеркина. Так, почти произвольным образом могут быть заданы порядок основной матрицы и размеры блоков (см. блочное представление (1.75),(1.76)), что особенно удобно для параллельной реализации численного метода на многопроцессорных системах.

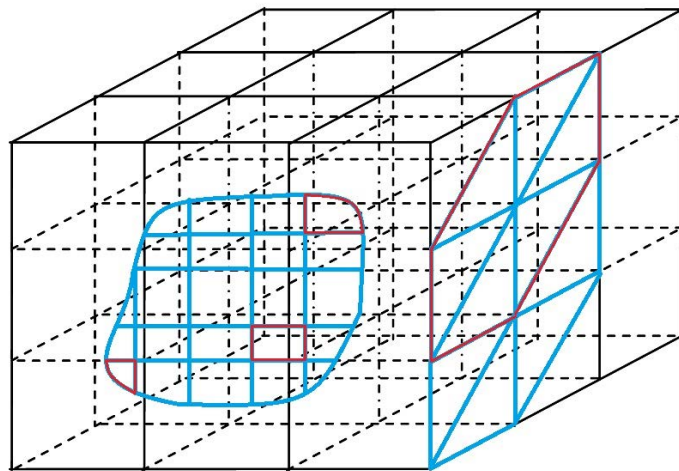


Рис. 7: Пример несогласованных сеток на объемном теле и экране. Красными линиями выделены границы носителей базисных функций на экранах.

В общем случае можно использовать способ определения базисных функций, предложенный в параграфе 1.6 предыдущей главы. Напомним кратко идею построения базисных функций на  $Q$  и  $\Omega_i$ .

На параллелепипеде

$$Q' = \{x \in \mathbb{R}^3 : a_1 < x_1 < a_2, b_1 < x_2 < b_2, c_1 < x_3 < c_2\}$$

вводится равномерная сетка узлов

$$x_{1,i_1} = a_1 + h_1 i_1, \quad x_{2,i_2} = b_1 + h_2 i_2, \quad x_{3,i_3} = c_1 + h_3 i_3, \quad i_k = 0, \dots, n_k - 1, \quad (2.45)$$

где  $h_1 = \frac{a_2 - a_1}{n_1}$ ,  $h_2 = \frac{b_2 - b_1}{n_2}$ ,  $h_3 = \frac{c_2 - c_1}{n_3}$  и  $n_k \in \mathbb{N}$ , и набор конечных элементов

$$Q'_{i_1 i_2 i_3} = \{x : x_{k,i_k} < x < x_{k,i_k+1}, k = 1, 2, 3\}.$$

Для области  $Q \subset \mathbb{R}^3$  произвольной формы определяем параллелепипед  $Q'$ , содержащий  $Q$ , и конечные элементы

$$Q_{i_1 i_2 i_3} = Q \cap Q'_{i_1 i_2 i_3}.$$

Базисные функции  $v_i^{(0)}$  на  $Q$  определяются равенствами

$$v_i^{(0)}(x) = v_{i_1 i_2 i_3}^{(0)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q_{i_1 i_2 i_3}, \\ 0, & x \notin Q_{i_1 i_2 i_3} \end{cases} \quad (2.46)$$

при условии, что носители  $Q_{i_1 i_2 i_3}$  функций имеют положительный объем. Подпространства кусочно-постоянных функций на  $Q$  обозначим через  $X_{m_0}^0$ .

Рассмотрим поверхность  $\Omega_1$ , заданную параметрически,

$$\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_i = x_i(t_1, t_2), i = 1, 2, 3\}, \quad (t_1, t_2) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad (2.47)$$

где  $D$  – ограниченная двумерная область, а функции  $x_i \in C^1(\bar{D})$ . Введем на  $D$  конечные элементы

$$D_j = D_{j_1 j_2} = \{t : t_{1,j_1} < t_1 < t_{1,j_1+1}, t_{2,j_2} < t_2 < t_{2,j_2+1}\} \\ t_{1,j_1} = a_1 + h_1 j_1, \quad t_{2,j_2} = b_1 + h_2 j_2,$$

где  $j_k = 0, \dots, m_k - 1$ ,  $h_1 = \frac{a_2 - a_1}{m_1}$ ,  $h_2 = \frac{b_2 - b_1}{m_2}$ ,  $m = m_1 m_2$ . Финитные базисные функции определим так:

$$v_j^{(1)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \bar{\omega}_{1,j}, \\ 0, & x \notin \bar{\omega}_{1,j}. \end{cases} \quad (2.48)$$

Здесь  $\omega_{1,j}$  – образы прямоугольников  $D_j \subset D$  при параметризации (2.47). Так как функции  $x_i(t_1, t_2)$  являются гладкими, то условие (1.89) на  $\Omega_1$  будет удовлетворено. Подпространства кусочно-постоянных функций, отвечающие введенным разбиениям на  $\Omega_1$ , обозначим через  $X_{m_1}^1$ .

На (в общем случае) неплоском незамкнутом ориентируемом параметрически заданном экране  $\Omega_2$  будем использовать финитные базисные функции, представляющие собой образы кусочно-линейных функций с шестиугольным носителем [26]. Для определения базисных функций на  $\Omega_2$  сначала определим прямоугольную область параметров

$$D = \{(t_1, t_2) : 0 < t_k < a_k\},$$

разобьем ее на равные прямоугольные конечные элементы

$$D_k = D_{k_1 k_2} = \{t : t_{1,k_1} < t_1 < t_{1,k_1+1}, t_{2,k_2} < t_2 < t_{2,k_2+1}\}$$

$$t_{i,k_i} = h_i k_i, h_i = a_i/n_i.$$

Каждый из элементов  $D_k$  разделим пополам диагоналями одинакового направления. Носитель базисной функции  $\zeta_k = \zeta_{k_1, k_2}$  определяется как объединение шести треугольников с общей точкой  $(t_{1,k_1}, t_{2,k_2})$ ; такая функция определяется соотношением

$$v_{k_1, k_2}^{(2,0)}(t_1, t_2) = \zeta(t_1/h_1 - k_1, t_2/h_2 - k_2), \quad (2.49)$$

где

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1 - x, & x \in [0, 1], & y \in [0, x], \\ 1 - y, & x \in [0, 1], & y \in [x, 1], \\ 1 + x - y, & x \in [-1, 0], & y \in [0, x + 1], \\ 1 + x, & x \in [-1, 0], & y \in [x, 0], \\ 1 + y, & x \in [-1, 0], & y \in [-1, x], \\ 1 - x + y, & x \in [0, 1], & y \in [x - 1, 0]. \end{cases} \quad (2.50)$$

Теперь базисные функции  $v_i^{(2)}(x)$  на гладком параметризуемом экране определим по формулам

$$v_i^{(2)}(x) = v_i^{(2,0)}(\kappa(x)), \quad x \in \Omega_2, \quad (2.51)$$

где  $\kappa(x) : \Omega_2 \rightarrow D$  есть отображение, обратное к отображению  $x = x(t) = (x_1(t_1, t_2), x_2(t_1, t_2), x_3(t_1, t_2))$ , задающему параметризацию экрана  $\Omega_2$ .



Подпространства функций, отвечающих введенным разбиениям на  $\Omega_2$ , обозначим через  $X_{m_2}^2$ . Тогда конечномерные подпространства  $\mathbf{X}_m$  гильбертова пространства  $\mathbf{X}$  задачи дифракции имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_m &= X_{m_0}^0 \times X_{m_1}^1 \times X_{m_2}^2 = \\ &= \text{span}\{v_1^{(0)}, \dots, v_{m_0}^{(0)}\} \times \text{span}\{v_1^{(1)}, \dots, v_{m_1}^{(1)}\} \times \text{span}\{v_1^{(2)}, \dots, v_{m_2}^{(2)}\}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

**Теорема 2.7.** [117] *Векторные базисные функции  $(u_{i_1}^{(0)}, u_{i_2}^{(1)}, u_{i_3}^{(2)})$  удовлетворяют условию аппроксимации в пространстве  $\mathbf{X}$ .*

*Доказательство.* Доказательство сводится к проверке условий аппроксимации для функций  $v_i^{(0)}$ ,  $v_j^{(1)}$  и  $v_i^{(2)}$  в пространствах  $L_2(Q)$ ,  $\tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}_1)$ , и  $\tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega})$ . Эти условия проверены в Леммах 1.1, 1.2, 1.3 и Теореме 1.6 параграфа 1.6. □

## ГЛАВА 3. Векторная задача дифракции электромагнитной волны на системе непересекающихся тонких идеально проводящих экранов и объемных неоднородных диэлектрических тел

Основные результаты главы опубликованы в работах [119, 126, 127, 129, 130, 131, 132, 134, 135, 136].

### 3.1 Квазиклассическая постановка краевой задачи дифракции для системы уравнений Максвелла. Единственность квазиклассического решения краевой задачи

Рассмотрим задачу о рассеянии электромагнитной монохроматической волны (с фиксированной круговой частотой  $\omega > 0$ ) системой рассеивателей, расположенных в изотропной однородной среде в  $\mathbb{R}^3$ , характеризующейся заданными значениями диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_e$  и магнитной проницаемости  $\mu_e$ , которые могут быть отличными от значений проницаемостей в вакууме. В общем случае предполагается, что проницаемости свободного от рассеивателей пространства удовлетворяют условиям

$$\operatorname{Re} \varepsilon_e > 0, \operatorname{Im} \varepsilon_e \geq 0, \quad \operatorname{Re} \mu_e > 0, \operatorname{Im} \mu_e = 0. \quad (3.1)$$

Определим волновое число  $k_e = \omega \sqrt{\varepsilon_e \mu_e}$ , предполагая, что ветвь корня всегда выбирается таким образом, чтобы удовлетворялись условия

$$\operatorname{Re} k_e > 0, \operatorname{Im} k_e \geq 0. \quad (3.2)$$

В рассматриваемой задаче дифракции двумерные рассеиватели представляют собой бесконечно тонкие идеально проводящие экраны  $\Omega_i$ , не пе-

ресекающиеся друг с другом:  $\bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j = \emptyset$  при  $i \neq j$  (под экраном понимается связная ориентируемая незамкнутая и ограниченная параметризуемая поверхность класса  $C^\infty$ ).

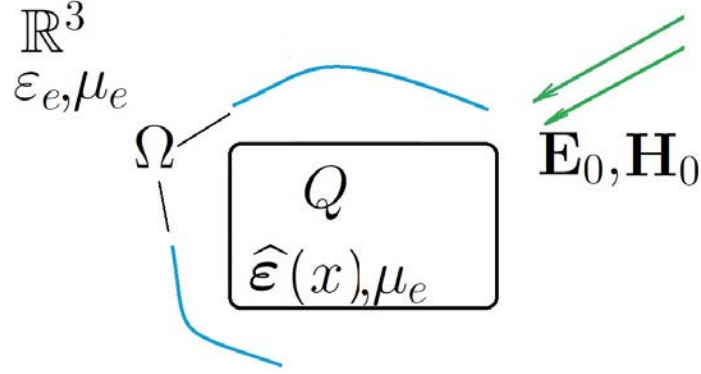


Рис. 8: Векторная задача дифракции на системе непересекающихся тел и экранов

Экран  $\Omega_i$  можно определить также как незамкнутое двумерное многообразие с краем. Рассмотрим сначала некоторое гладкое замкнутое ориентируемое двумерное многообразие без края  $M$  [1, 31] класса  $C^\infty$ . Пусть  $\bar{\Omega}_i$  его  $i$ -е замкнутое связное подмногообразие с краем  $\partial\Omega_i$ . Тогда  $i$ -ый экран определим следующим образом:  $\Omega_i = \bar{\Omega}_i \setminus \partial\Omega_i$ .

В данном определении предполагается, что край  $\partial\Omega_i$  каждого экрана – объединение конечного числа кривых класса  $C^\infty$  без точек самопересечения, сходящихся под углами, отличными от нулевого. Введем обозначения:  $\Omega = \cup \Omega_i$ ,  $\partial\Omega = \cup \partial\Omega_i$ .

Введем трубчатые  $\delta$ -окрестности края  $i$ -го экрана:

$$\partial\Omega_{i,\delta} := \{x \in \mathbb{R}^3 : dist(x, \partial\Omega_i) < \delta\}, \quad \delta > 0. \quad (3.3)$$

В качестве трехмерного рассеивателя в задаче дифракции рассматривается объемное неоднородное анизотропное тело  $Q$ .

Точнее, пусть  $Q$  – ограниченная трехмерная область с гладкой границей  $\partial Q$  класса  $C^\infty$ . Допускается рассмотрение многосвязной области  $Q$ , представимой в виде  $Q = \bigcup_{k=1}^n Q_k$ , причем  $Q_k$  гомеоморфны шару и  $\bar{Q}_k \cap \bar{Q}_{k'} = \emptyset$

при  $k \neq k'$ . Область  $Q$  является диэлектрически неоднородной и анизотропной; она характеризуется постоянной магнитной проницаемостью  $\mu_e$ , совпадающей с магнитной проницаемостью свободного пространства, и тензор-функцией  $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)$  диэлектрической проницаемости с гладкими компонентами:  $\varepsilon_{ij} \in C^\infty(\overline{Q})$ .

Введем тензор относительной диэлектрической проницаемости  $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x) = \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)/\varepsilon_e$ . Будем предполагать, что при каждом  $x \in \overline{Q}$  существует тензор

$$\widehat{\boldsymbol{\xi}}(x) = (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x) - \widehat{\mathbf{I}})^{-1}, \quad (3.4)$$

где  $\widehat{\mathbf{I}}$  – единичный тензор.

Потребуем, чтобы для  $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)$  в области  $\overline{Q}$  было выполнено одно из следующих условий:

$$\operatorname{Re}(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \geq C_1|\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_1 > 1, \quad (3.5)$$

$$\operatorname{Im}(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \geq C_2|\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_2 > 0 \text{ или} \quad (3.6)$$

$$-\operatorname{Im}(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \geq C_3|\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_3 > 0 \quad (3.7)$$

для всех векторов  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ .

В данной главе исследуется случай, когда область неоднородности  $Q$  и система экранов не имеют общих точек:  $\overline{Q} \cap \overline{\Omega} = \emptyset$ .

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу дифракции на системе тел и экранов стороннего электромагнитного поля  $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ , являющегося решением системы уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = -i\omega\varepsilon_e\mathbf{E}_0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = i\omega\mu_e\mathbf{H}_0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Требуется определить всюду в  $\mathbb{R}^3$  за исключением краев экрана  $\partial\Omega$  полное электромагнитное поле  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ , удовлетворяющее следующим условиям гладкости (ниже  $P^+, P^-$  – произвольные области, «внешняя» и «внутрен-

няя» по отношению к  $\Omega$ , и такие, что  $\Omega \subset \partial P^\pm$ ),

$$\begin{aligned} \mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus (\partial Q \cup \bar{\Omega})) \cap C(\bar{Q}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus (Q \cup \bar{\Omega})) \\ \cap_{\delta>0} C(\bar{P}^+ \setminus \partial\Omega_\delta) \cap_{\delta>0} C(\bar{P}^- \setminus \partial\Omega_\delta), \end{aligned} \quad (3.9)$$

удовлетворяющее в классическом смысле системе уравнений Максвелла всюду вне границы  $\partial Q$  области неоднородности и экрана  $\bar{\Omega}$ ,

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega \hat{\epsilon} \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu_e \mathbf{H}, \end{cases} \quad (3.10)$$

условиям непрерывности касательных компонент поля при переходе через границу области неоднородности,

$$[\mathbf{E}_\tau] |_{\partial Q} = [\mathbf{H}_\tau] |_{\partial Q} = 0, \quad (3.11)$$

краевым условиям для касательных компонент электрического поля во внутренних точках *идеально проводящего* экрана  $\Omega$ ,

$$\mathbf{E}_\tau |_\Omega = 0, \quad (3.12)$$

условиям конечности энергии в любой ограниченной области пространства,

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in \mathbf{L}_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3) \quad (3.13)$$

и условиям излучения Сильвера-Мюллера на бесконечности для рассеянного поля:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s &= o(1/r), & \operatorname{Im} k_e &> 0, \\ \mathbf{H}_s \times \mathbf{e}_r - \mathbf{E}_s &= o(1/r), & \mathbf{E}_s \times \mathbf{e}_r - \mathbf{H}_s &= o(1/r), \\ \mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s &= O(1/r), & \operatorname{Im} k_e &= 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

при  $r \rightarrow \infty$ . Здесь  $r = |x|$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ .

**Определение 3.1.** Решение  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  задачи (3.10)–(3.14), удовлетворяющее условиям (3.9), называется *квазиклассическим*.

*Замечание 3.1.* Условие ограниченности энергии в произвольном объеме пространства часто описывается (см., например [11], с.216) равенством

$$\mathcal{E} = \int_V \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dv < \infty, \quad (3.15)$$

Учитывая соотношения  $\mathbf{D} = \widehat{\varepsilon}\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu_e\mathbf{H}$ , а также гладкость и ограниченность проницаемостей, приходим от (3.15) к условию (3.13).

*Замечание 3.2.* Поясним некоторые включения в условиях гладкости (3.9).

1. Для квазиклассической формулировки краевой задачи достаточно непрерывной дифференцируемости поля вне экранов и границы тела. Однако, как будет показано ниже, при сведении задачи к интегродифференциальным уравнениям из условий  $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  и ограничений на параметры среды и рассеивателя следует бесконечная дифференцируемость полного поля. Поэтому и в формулировке краевой задачи предложено включение  $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus (\partial Q \cup \bar{\Omega}))$ .

2. Уточним условия непрерывности в замкнутых областях  $\bar{Q}, \mathbb{R}^3 \setminus (Q \cup \bar{\Omega})$ . Так как диэлектрическая проницаемость разрывна на  $\partial Q$ , то нормальная составляющая электрического поля  $\mathbf{E}$  разрывна при переходе через  $\partial Q$ . Выписанные условия фактически означают, что электрическое поле непрерывно в соответствующих открытых областях и *имеет конечные односторонние пределы* с каждой стороны поверхности  $\partial Q$ . Заметим, что в силу непрерывности магнитной проницаемости во всем пространстве ( $\mu_e = const$ ) полное магнитное поле  $\mathbf{H}$  непрерывно и при переходе через  $\partial Q$ .

### **Единственность квазиклассического решения краевой задачи дифракции**

**Теорема 3.1.** [119, 131, 132, 136]. Пусть свободное от рассеивателей трехмерное пространство характеризуется постоянными значениями проницаемостей  $\varepsilon_e, \mu_e$ , удовлетворяющих условиям (3.1) и (3.2). Диэлектрическая проницаемость в  $\bar{Q}$  удовлетворяет одному из условий:

- если  $\text{Im } \varepsilon_{ij}(x) \neq 0$ , то тензор  $\widehat{\varepsilon}(x)$  удовлетворяет условиям (3.4)–(3.7) и является симметрическим;
- если  $\text{Im } \varepsilon_{ij}(x) \equiv 0$  в  $Q$ , то  $\widehat{\varepsilon}(x) = \varepsilon(x)\widehat{\mathbf{I}}$ .

Тогда если квазиклассическое решение задачи (3.10)–(3.14) существует, то оно единственно.

*Доказательство.* 1. Рассматриваемая задача линейна, поэтому достаточно доказать тривиальность решения соответствующей однородной задачи при  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{E}_0 \equiv 0$  и однородном условии на экране для *рассеянного поля*:

$$(\mathbf{E}_s)_\tau|_\Omega = 0. \quad (3.16)$$

Пусть  $V_1$  – такая ограниченная трехмерная область, что  $\overline{Q} \cap \overline{V}_1 = \emptyset$ , причем ее гладкая граница  $\partial V_1$  содержит экран:  $\Omega \subset \partial V_1$ .

Область неоднородности  $Q$  переобозначим через  $V_2$ .

Будем рассматривать также шар  $B := B_R(0)$  с центром в начале координат достаточно большого радиуса  $R$ , требуя, чтобы выполнялись включения

$$\overline{V}_1, \overline{V}_2 \subset B.$$

Определим ограниченную область  $V_3 := B \setminus (\overline{V}_1 \cup \overline{V}_2)$  с границей  $\partial V_3 = \partial B \cup \partial V_1 \cup \partial V_2$  и неограниченную область  $V_4 := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}$ .

Обозначим сужения рассеянного электромагнитного поля  $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$  на области  $V_l$  через  $\mathbf{E}_l, \mathbf{H}_l$  ( $l = 1, 2, 3, 4$ ) и сформулируем задачу сопряжения в областях  $V_l$ , эквивалентную исходной однородной краевой задаче.

В каждой из введенных областей должны удовлетворяться уравнения Максвелла,

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H}_l = -i\omega\varepsilon_e \mathbf{E}_l, \\ \text{rot } \mathbf{E}_l = i\omega\mu_e \mathbf{H}_l, \end{cases} \quad (l = 1, 3, 4); \quad \begin{cases} \text{rot } \mathbf{H}_2 = -i\omega\widehat{\varepsilon}\mathbf{E}_2, \\ \text{rot } \mathbf{E}_2 = i\omega\mu_e \mathbf{H}_2, \end{cases}$$

на незранированной части границ областей – условия сопряжения

$$\mathbf{E}_{2,\tau}|_{\partial Q} = \mathbf{E}_{3,\tau}|_{\partial Q}, \quad \mathbf{H}_{2,\tau}|_{\partial Q} = \mathbf{H}_{3,\tau}|_{\partial Q},$$

$$\mathbf{E}_{3,\tau}|_{\partial B} = \mathbf{E}_{4,\tau}|_{\partial B}, \quad \mathbf{H}_{3,\tau}|_{\partial B} = \mathbf{H}_{4,\tau}|_{\partial B},$$

$$\mathbf{E}_{1,\tau}|_{\partial V_1 \setminus \bar{\Omega}} = \mathbf{E}_{3,\tau}|_{\partial V_1 \setminus \bar{\Omega}}, \quad \mathbf{H}_{1,\tau}|_{\partial V_1 \setminus \bar{\Omega}} = \mathbf{H}_{3,\tau}|_{\partial V_1 \setminus \bar{\Omega}},$$

а на экране  $\Omega$  – условия исчезновения касательных компонент электрического поля,

$$\mathbf{E}_{1,\tau}|_{\Omega} = \mathbf{E}_{3,\tau}|_{\Omega} = 0.$$

В неограниченной области  $V_4$  для рассеянного поля выполняются условия Сильвера-Мюллера:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_4, \mathbf{H}_4 &= o(1/r), & \text{Im } k_e &> 0, \\ \mathbf{H}_4 \times \mathbf{e}_r - \mathbf{E}_4 &= o(1/r), & \mathbf{E}_4 \times \mathbf{e}_r - \mathbf{H}_4 &= o(1/r), & r \rightarrow \infty. \\ \mathbf{E}_4, \mathbf{H}_4 &= O(1/r), & \text{Im } k_e &= 0, \end{aligned}$$

2. Нам понадобится лемма Лоренца в случае, когда диэлектрическая проницаемость описывается тензор-функцией; ниже приводится вывод леммы в интегральной форме.

Пусть трехмерное пространство характеризуется диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\hat{\varepsilon}$ ,  $\mu_e$ .

Электромагнитные поля  $(\mathbf{E}', \mathbf{H}')$  и  $(\mathbf{E}'', \mathbf{H}'')$ , возбуждаемые сторонними токами  $\mathbf{j}'$  и  $\mathbf{j}''$  соответственно, определяются из систем уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H}' = -i\omega \hat{\varepsilon} \mathbf{E}' + \mathbf{j}'_E, \\ \text{rot } \mathbf{E}' = i\omega \mu_e \mathbf{H}', \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H}'' = -i\omega \hat{\varepsilon} \mathbf{E}'' + \mathbf{j}''_E \\ \text{rot } \mathbf{E}'' = i\omega \mu_e \mathbf{H}''. \end{cases} \quad (3.18)$$

Умножим скалярно первое уравнение в (3.17) справа на комплексно сопряженный вектор  $\bar{\mathbf{E}}''$ , а второе уравнение в (3.18) – на  $\bar{\mathbf{H}}'$  и вычтем один результат из другого:

$$\text{rot } \mathbf{E}'' \cdot \bar{\mathbf{H}}' - \text{rot } \mathbf{H}' \cdot \bar{\mathbf{E}}'' = i\omega \hat{\varepsilon} \mathbf{E}' \cdot \bar{\mathbf{E}}'' + i\omega \mu_e \mathbf{H}'' \cdot \bar{\mathbf{H}}' - \mathbf{j}'_E \cdot \bar{\mathbf{E}}''. \quad (3.19)$$



Умножим скалярно второе уравнение в (3.17) справа на  $\bar{\mathbf{H}}''$ , а первое уравнение в (3.18) – на  $\bar{\mathbf{E}}'$  и вычтем один результат из другого:

$$\text{rot } \mathbf{E}' \cdot \bar{\mathbf{H}}'' - \text{rot } \mathbf{H}'' \cdot \bar{\mathbf{E}}' = i\omega \hat{\epsilon} \mathbf{E}'' \cdot \bar{\mathbf{E}}' + i\omega \mu_e \mathbf{H}' \cdot \bar{\mathbf{H}}'' - \mathbf{j}_E' \cdot \bar{\mathbf{E}}'. \quad (3.20)$$

К левым частям полученных равенств применим следующую формулу:

$$\text{rot } \mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{A}} - \text{rot } \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{B}} = \text{div}(\mathbf{B} \times \mathbf{A})$$

Из условия симметричности комплексного тензора  $\hat{\epsilon}$  вытекает

$$\hat{\epsilon} \mathbf{E}'' \cdot \bar{\mathbf{E}}' = \mathbf{E}'' \cdot (\hat{\epsilon}^* \bar{\mathbf{E}}') = \overline{\hat{\epsilon}^* \bar{\mathbf{E}}' \cdot \mathbf{E}''} = \hat{\epsilon}^T \mathbf{E}' \cdot \bar{\mathbf{E}}'' = \hat{\epsilon} \mathbf{E}' \cdot \bar{\mathbf{E}}''.$$

Вычитая (3.19) из (3.20) и сокращая одинаковые слагаемые, получим

$$\text{div}(\mathbf{E}' \times \mathbf{H}'' - \mathbf{E}'' \times \mathbf{H}') = \mathbf{j}_E' \cdot \bar{\mathbf{E}}'' - \mathbf{j}_E'' \cdot \bar{\mathbf{E}}'. \quad (3.21)$$

Лемма Лоренца в интегральной форме (после применения формулы Остроградского-Гаусса) записывается так:

$$\int_{\partial V} (\mathbf{E}' \times \mathbf{H}'' - \mathbf{E}'' \times \mathbf{H}') \cdot \mathbf{n} ds = \int_V (\mathbf{j}_E' \cdot \bar{\mathbf{E}}'' - \mathbf{j}_E'' \cdot \bar{\mathbf{E}}') dv. \quad (3.22)$$

3. Применим формулу (3.22) в ограниченных областях  $V_1, V_2$  и  $V_3$ . Ниже приведено подробное описание применения формулы в области  $V_2 = Q$ .

Рассмотрим в  $V_2$  систему уравнений Максвелла для рассеянного поля:

$$\text{rot } \mathbf{H}_2 = -i\omega \hat{\epsilon} \mathbf{E}_2, \quad \text{rot } \mathbf{E}_2 = i\omega \mu_e \mathbf{H}_2, \quad (3.23)$$

а также для комплексно-сопряженного поля  $\bar{\mathbf{E}}_2, \bar{\mathbf{H}}_2$ :

$$\text{rot } \bar{\mathbf{H}}_2 = i\omega \hat{\epsilon} \bar{\mathbf{E}}_2, \quad \text{rot } \bar{\mathbf{E}}_2 = -i\omega \mu_e \bar{\mathbf{H}}_2. \quad (3.24)$$

Заменяя  $\bar{\mathbf{E}}_2$  на  $-\tilde{\mathbf{E}}_2$ , придем к соотношению в  $V_2$ :

$$\begin{cases} \text{rot } \bar{\mathbf{H}}_2 = -i\omega \hat{\epsilon} \tilde{\mathbf{E}}_2 = -i\omega \hat{\epsilon} \tilde{\mathbf{E}}_2 + i\omega (\hat{\epsilon} - \bar{\hat{\epsilon}}) \tilde{\mathbf{E}}_2, \\ \text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_2 = i\omega \mu_e \bar{\mathbf{H}}_2. \end{cases} \quad (3.25)$$

Применяя лемму Лоренца к полям  $\mathbf{E}' = \mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{H}' = \mathbf{H}_2$ ,  $\mathbf{E}'' = \tilde{\mathbf{E}}_2$ ,  $\mathbf{H}'' = \bar{\mathbf{H}}_2$  с током  $\mathbf{j}''_E = i\omega(\hat{\varepsilon} - \bar{\varepsilon})\tilde{\mathbf{E}}_2$ , получим следующее равенство:

$$\int_{\partial Q} (\mathbf{E}_2 \times \bar{\mathbf{H}}_2 - \tilde{\mathbf{E}}_2 \times \mathbf{H}_2) \cdot \mathbf{n} ds = - \int_Q i\omega((\hat{\varepsilon} - \bar{\varepsilon})\tilde{\mathbf{E}}_2) \cdot \bar{\mathbf{E}}_2 dv.$$

Заменяя  $\tilde{\mathbf{E}}_2$  на  $-\bar{\mathbf{E}}_2$ , выводим

$$\int_{\partial Q} (\mathbf{E}_2 \times \bar{\mathbf{H}}_2 + \bar{\mathbf{E}}_2 \times \mathbf{H}_2) \cdot \mathbf{n} ds = \int_Q i\omega((\hat{\varepsilon} - \bar{\varepsilon})\bar{\mathbf{E}}_2) \cdot \bar{\mathbf{E}}_2 dv. \quad (3.26)$$

Повторяя проведенные выше рассуждения, получим аналогичные интегральные соотношения в областях  $V_1, V_3$ :

$$\int_{\partial V_1 \setminus \bar{\Omega}} (\mathbf{E}_1 \times \bar{\mathbf{H}}_1 + \bar{\mathbf{E}}_1 \times \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{n} ds = \int_{V_1} i\omega(\varepsilon_e - \bar{\varepsilon}_e)\bar{\mathbf{E}}_1 \cdot \bar{\mathbf{E}}_1 dv, \quad (3.27)$$

$$\int_{\partial Q \cup \partial V_1 \setminus \bar{\Omega} \cup \partial B} (\mathbf{E}_3 \times \bar{\mathbf{H}}_3 + \bar{\mathbf{E}}_3 \times \mathbf{H}_3) \cdot \mathbf{n} ds = \int_{V_3} i\omega(\varepsilon_e - \bar{\varepsilon}_e)\bar{\mathbf{E}}_3 \cdot \bar{\mathbf{E}}_3 dv. \quad (3.28)$$

В левых частях соотношений (3.27), (3.28) учтено равенство нулю касательной составляющей электрического поля на экране  $\Omega$ .

Введем обозначение

$$\aleph := \int_{\partial B} (\mathbf{E}_3 \times \bar{\mathbf{H}}_3 + \bar{\mathbf{E}}_3 \times \mathbf{H}_3) \cdot \mathbf{n} ds. \quad (3.29)$$

Преобразуем  $\aleph$  с учетом условий сопряжения на  $\partial B$  и излучения на бесконечности:

$$\begin{aligned} \aleph &= \int_{\partial B} (\mathbf{E}_4 \times \bar{\mathbf{H}}_4 + \bar{\mathbf{E}}_4 \times \mathbf{H}_4) \cdot \mathbf{n} ds = 2 \operatorname{Re} \int_{\partial B} (\mathbf{E}_4 \times \bar{\mathbf{H}}_4) \cdot \mathbf{n} ds = \\ &= 2 \operatorname{Re} \int_{\partial B} ((\mathbf{H}_4 \times \mathbf{n} + o(1/r)) \times \bar{\mathbf{H}}_4) \cdot \mathbf{n} ds = \\ &= 2 \operatorname{Re} \int_{\partial B} ((\mathbf{H}_4 \times \mathbf{n}) \times \bar{\mathbf{H}}_4) \cdot \mathbf{n} ds + o(1) = \\ &= 2 \operatorname{Re} \int_{\partial B} (\mathbf{H}_4 \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{H}_4 \times \mathbf{n}) ds + o(1) = \\ &= 2 \int_{\partial B} |\mathbf{H}_4 \times \mathbf{n}|^2 ds + o(1) = 2 \int_{\partial B} |\mathbf{H}_{4,\tau}|^2 ds + o(1) \end{aligned}$$

Сложим равенства (3.26), (3.27) и (3.28), сокращая поверхностные интегралы по общим границам смежных областей:

$$\int_{\partial B} |\mathbf{H}_{4,\tau}|^2 ds + \int_Q (\operatorname{Im} \widehat{\varepsilon} \overline{\mathbf{E}}_2) \cdot \overline{\mathbf{E}}_2 dv + \sum_{l=1,3} \int_{V_l} \operatorname{Im} \varepsilon_e \overline{\mathbf{E}}_l \cdot \overline{\mathbf{E}}_l = o(1). \quad (3.30)$$

Рассмотрим несколько случаев.

3.1. Пусть сначала и тело  $Q$ , и свободное от рассеивателей пространство являются поглощающими:  $\operatorname{Im} \widehat{\varepsilon} > 0$  и  $\operatorname{Im} \varepsilon_e > 0$ . В этом случае все слагаемые в (3.30) неотрицательны. Тогда из условий излучения и (3.30) следует равенство  $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s \equiv 0$  во всем пространстве.

3.2. Пусть теперь  $\operatorname{Im} \widehat{\varepsilon}(x) > 0$  в области неоднородности  $Q$ , а вне рассеивателей  $\operatorname{Im} \varepsilon_e = 0$ . Тогда

$$\int_{\partial B} |\mathbf{H}_{4,\tau}|^2 ds + \int_Q (\operatorname{Im} \widehat{\varepsilon} \overline{\mathbf{E}}_2) \cdot \overline{\mathbf{E}}_2 dv = o(1).$$

В силу неотрицательности обоих слагаемых в последнем соотношении выводим

$$\int_{\partial B} |\mathbf{H}_{3,\tau}|^2 ds = o(1), \quad R \rightarrow \infty; \quad \int_Q (\operatorname{Im} \widehat{\varepsilon} \overline{\mathbf{E}}_2) \cdot \overline{\mathbf{E}}_2 dv = 0$$

и по лемме Реллиха заключаем, что  $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s \equiv 0$  вне рассеивателей; второе равенство влечет  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2 \equiv 0$  в  $Q$ .

3.3. Рассмотрим случай изотропного тела без поглощения, расположенного в непоглощающем пространстве:  $\widehat{\varepsilon}(x) = \varepsilon \widehat{\mathbf{I}}$  в  $\overline{Q}$ ,  $\operatorname{Im} \varepsilon = 0$  и  $\operatorname{Re} \varepsilon > 0$ . Как и в предыдущем случае применение леммы Реллиха приводит к тождеству  $\mathbf{E}_s = \mathbf{H}_s \equiv 0$  в неограниченной области  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}$ .

Остается показать, что решение тривиально и в области неоднородности.

Из доказанного, а также из непрерывности касательных компонент электромагнитного поля следует их равенство нулю на границе тела:

$$\mathbf{E}_\tau = \mathbf{H}_\tau = 0 \text{ на } \partial Q. \quad (3.31)$$

Так как в рассматриваемой постановке задачи дифракции магнитная проницаемость всюду постоянна ( $\mu \equiv \mu_e$  в  $\mathbb{R}^3$ ), то из условия (см. [16], с. 41 и [51], с.43)

$$[\mu \mathbf{H}_n] |_{\partial Q} = 0 \quad (3.32)$$

для скачка нормальной составляющей магнитного поля на границе раздела сред следует равенство

$$\mathbf{H}_n = 0 \text{ на } \partial Q. \quad (3.33)$$

Нормальная составляющая электрического поля удовлетворяет на  $\partial Q$  равенству [16, 51]

$$[\varepsilon \mathbf{E}_n] |_{\partial Q} = 0. \quad (3.34)$$

Так как электрическое поле вне  $Q$  тривиально, а диэлектрическая проницаемость является гладкой и удовлетворяет требованиям (3.4)–(3.5), то ( $\varepsilon(x) \neq 0$  при  $x \in \partial Q$  и, следовательно, не обращается в нуль на границе тела) выводим

$$\mathbf{E}_n |_{\partial Q} = 0 \quad (3.35)$$

с каждой стороны поверхности  $\partial Q$ .

Таким образом, электромагнитное поле удовлетворяет в классическом смысле однородным условиям на границе области неоднородности:

$$\mathbf{E} |_{\partial Q} = \mathbf{H} |_{\partial Q} = 0. \quad (3.36)$$

Теперь имеют место следующие включения:

$$\mathbf{E}, \varepsilon \mathbf{E}, \mathbf{H} \in C_0(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\delta). \quad (3.37)$$

Рассмотрим снова систему уравнений Максвелла (3.10). Выражая  $\mathbf{E}$  через  $\mathbf{H}$ , получим

$$\frac{i}{\omega} \operatorname{rot} \left( \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot} \mathbf{H} \right) = i\omega \mu_e \mathbf{H},$$

откуда выводим

$$\begin{aligned}\omega^2 \mu_e \mathbf{H} &= \operatorname{rot} \left( \frac{1}{\varepsilon(x)} \operatorname{rot} \mathbf{H} \right) = \frac{1}{\varepsilon(x)} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} + \operatorname{grad} \frac{1}{\varepsilon(x)} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} = \\ &= \frac{1}{\varepsilon(x)} (\operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta) \mathbf{H} - \frac{1}{\varepsilon^2(x)} \operatorname{grad} \varepsilon(x) \times \operatorname{rot} \mathbf{H}.\end{aligned}$$

Умножая последнее равенство на  $\varepsilon(x) \neq 0$  запишем с учетом равенства  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$  следующее уравнение для  $\mathbf{H}$ :

$$\Delta \mathbf{H} + \frac{1}{\varepsilon(x)} \operatorname{grad} \varepsilon(x) \times \operatorname{rot} \mathbf{H} + k^2(x) \mathbf{H} = 0, \quad x \in Q, \quad (3.38)$$

где  $k^2(x) = \omega^2 \mu_e \varepsilon(x)$ , а уравнение выполнено в классическом смысле. Введем обозначение

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x) &= - \frac{1}{\varepsilon(x)} \operatorname{grad} \varepsilon(x) \times \operatorname{rot} \mathbf{H}(x) - k^2(x) \mathbf{H}(x) - \mathbf{H}(x) = \\ &= i\omega \operatorname{grad} \varepsilon(x) \times \mathbf{E}(x) - k^2(x) \mathbf{H}(x) - \mathbf{H}(x), \quad x \in Q\end{aligned}$$

и перепишем уравнение (3.38) в виде

$$\Delta \mathbf{H}(x) - \mathbf{H}(x) = \mathbf{F}(x), \quad x \in Q. \quad (3.39)$$

Из полученных ранее свойств гладкости решения однородной краевой задачи следует, что

$$\mathbf{F} \in C(\overline{Q}), \quad \mathbf{F}|_{\partial Q} = 0. \quad (3.40)$$

Продолжим функцию  $\mathbf{F}$  нулем вне  $Q$ , обозначив продолжение через  $\tilde{\mathbf{F}}$ . Тогда

$$\tilde{\mathbf{F}} \in C_0(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\delta). \quad (3.41)$$

Граница  $\partial V = \partial Q$  по условию является гладкой, поэтому можно считать,  $S_1 = \partial V$  – поверхность класса  $C^3$  (то есть,  $p = 1$ ), оператор  $L = L' = \Delta - 1$  является самосопряженным сильно эллиптическим оператором порядка 2 ( $m = 1$ ) с постоянными коэффициентами. Функция  $\mathbf{H}$  принадлежит пространству  $\mathbf{L}_2(V) \supset C(\overline{V})$  ( $s = 0$ ). Очевидно, правая часть  $\mathbf{F} \in H_{\text{loc}}^{-2}(V, S_1)$ , так как, по крайней мере,  $\mathbf{F} \in \mathbf{L}_2(V)$ . Однородные условия

$D^0 \mathbf{H}^i = 0$  выполнены на  $S_1$  в силу доказанного ранее. Скалярное уравнение  $Lu = f$  также удовлетворено для всех компонент  $\mathbf{H}^i$ , так как для всех  $v \in H^2(V) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(V)$  верно

$$(L\mathbf{H}^i, v)_0 \equiv ((\Delta - 1)\mathbf{H}^i, v)_0 = (\mathbf{F}^i, v)_0.$$

Таким образом, выполнены все условия следующего утверждения ([2], с.195):

**Утверждение А.** Пусть  $L = \sum a_\beta D^\beta$  – сильно эллиптический дифференциальный оператор порядка  $|\beta| \leq 2m$  ( $m \geq 0$ ) с коэффициентами  $a_\beta \in C^{|\beta|+p}(V \cup S_1)$ . Здесь  $S_1$  гладкая (класса  $C^{2m+p}$ ,  $p \geq 0$ ) часть границы  $\partial V$ . Пусть  $u \in H^s(V)$  – решение уравнения  $Lu = f$  при  $f \in H_{\text{loc}}^{s-2m}(V, S_1)$ , удовлетворяющее условию  $D^\beta u|_{\Omega_0} = 0$  при  $|\beta| \leq m - 1$ . Тогда, если  $f \in H_{\text{loc}}^t(V, S_1)$  с  $t > s - 2m$  и, кроме того,  $p \geq m$ ,  $s \in [-p, p + 2m)$ , то  $u \in H_{\text{loc}}^{\min(t+2m, p+2m)}(V, S_1)$ . Кроме того, если  $\min(t + 2m, p + 2m) > 0$ , то для  $u$  выполняются также условия  $D^\beta|_{S_1} = 0$  при  $\beta \leq \min(t + 2m, m) - 1$ .

**Замечание .** Уравнение  $Lu = f$  означает, что  $(\varphi, L'v)_0 = (f, v)_0$  для всех  $v \in H^{2m+\max(-s, 0)}(V) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(V)$ , обращаящихся в нуль вблизи  $\partial V \setminus S_1$ . Здесь  $L'$  – оператор, транспонированный к  $L$ .

С учетом соотношений между параметрами  $p, s, m$  и фактической принадлежности  $\mathbf{F}$  классу  $\mathbf{L}_2(V) = H^0(V)$  (то есть,  $t = 0$ ) заключаем из Утверждения А, что

$$\mathbf{H}^i \in H_{\text{loc}}^2(V), \quad D^\beta \mathbf{H}^i|_{\Omega_0} = 0, \quad |\beta| \leq 0.$$

Следовательно

$$\mathbf{H} \in C_0^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\delta), \quad \alpha \in (0, 1/2).$$

Рассуждая аналогично, можно показать, что

$$\mathbf{E} \in C_0^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\delta), \quad \alpha \in (0, 1/2).$$

Тогда

$$\tilde{\mathbf{F}} \in C_0^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\delta).$$

Далее нам понадобится следующее утверждение (см. [23], с.234–236):

**Утверждение Б.** Пусть  $u \in H^2(V)$ , причем  $\text{vrai} \max_V u < +\infty$  и почти всюду в  $V$  функция  $u(x)$  удовлетворяет эллиптическому уравнению

$$a_{ij}(x)u_{x_i, x_j} + a_i(x)u_{x_i} + a(x)u(x) = f(x)$$

с коэффициентами и правой частью из  $C^{l-2+\alpha}$  ( $l \geq 2$ ). Тогда  $u \in C^{l+\alpha}(V)$ . Если к тому же граница  $S$  области  $V$  или некоторая ее часть  $S_1$  задается функцией класса  $C^{l+\alpha}$ , то  $u \in C^{l+\alpha}(\bar{V})$  или  $u \in C^{l+\alpha}(V \cup S_1)$ , соответственно.

Применяя Утверждение Б, получим

$$\mathbf{H} \in C_0^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\delta),$$

а из принципа единственного продолжения [63] выведем, что

$$\mathbf{H} \equiv 0 \text{ в } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\delta.$$

Так как для любой точки  $x \in Q \setminus \bar{\Omega}$  можно выбрать параметр  $\delta > 0$  настолько малым, чтобы  $x$  лежала вне  $\bar{\Omega}_\delta$ , то получаем окончательно

$$\mathbf{H} \equiv \mathbf{E} \equiv 0 \text{ в } \mathbb{R}^3.$$

Равенство нулю электрического поля следует из первого уравнения Максвелла. Теорема доказана.  $\square$

### 3.2 Система интегро-дифференциальных уравнений

В данном параграфе задача дифракции на системе тел и экранов, сформулированная в неограниченном трехмерном пространстве, сводится к системе интегро-дифференциальных уравнений по области неоднородных тел и поверхности идеально проводящих экранов.

Полное поле  $\mathbf{E}$  представим в виде суммы падающего поля и полей, рассеянных двух- и трехмерными препятствиями:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2; \quad (3.42)$$

$\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  – поля, рассеянные соответственно экраном  $\Omega$  и телом  $Q$ . Для каждого  $\mathbf{E}_i$  определим соответствующую составляющую магнитного поля:

$$\mathbf{H}_i = \frac{1}{i\omega\mu_e} \operatorname{rot} \mathbf{E}_i.$$

Полное магнитное поле запишется в виде  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$ .

Поле  $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ , удовлетворяющее в  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$  уравнениям Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_1 = -i\omega\varepsilon_e \mathbf{E}_1, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_1 = i\omega\mu_e \mathbf{H}_1, \end{cases} \quad (3.43)$$

условиям излучения и сопряжения на  $\partial Q$ , можно определить [17] в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1(x) &= (\operatorname{grad} \operatorname{div} + k_e^2) \int_{\Omega} G(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y, \\ \mathbf{H}_1 &= \frac{-i}{\omega\mu_e} \operatorname{rot} \mathbf{E}_1, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus (\bar{\Omega}). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Здесь  $G(x, y) = \frac{e^{ik_e|x-y|}}{4\pi|x-y|}$ , а  $\mathbf{u}$  – неизвестная плотность тока на  $\Omega$ , представляющая касательное поле к экрану  $\Omega$ , то есть  $\mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{n}(x) = 0$  в каждой внутренней точке  $x \in \Omega$ .

Условия гладкости (3.9) и ограниченности энергии (3.13) не обеспечивают гладкости поля вплоть до экрана  $\Omega$ . Поэтому необходимо дать определение плотности  $\mathbf{u}$  в пространствах Соболева (см. [17]).

Пусть  $M \supset \bar{\Omega}$  – компактное двумерное многообразие без края класса  $C^\infty$  с касательным расслоением  $TM$  над  $M$  и скалярным произведением в касательной плоскости (слое)  $T_x M$ . Введем конечное покрытие  $U = \{U_\alpha\}$  многообразия  $M$  координатными окрестностями с локальными картами  $\kappa_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^2$  и подчиненное покрытие  $U$  разбиение единицы  $\{\varphi_\alpha\}$ . Для гладких сечений  $\mathbf{u} \in C^\infty(M)$  расслоения  $TM$  и скалярных функций  $g \in C^\infty(M)$  введем, следуя [35],

$$\mathbf{u}_\alpha = \varphi_\alpha \mathbf{u} \in C_0^\infty(V_\alpha), \quad \mathbf{u}_\alpha = (u_\alpha^1, u_\alpha^2), \quad g_\alpha = \varphi_\alpha g.$$

считая, что множество  $U_\alpha$  отождествляется с его образом в  $\mathbb{R}^2$ . Пространство Соболева  $H^s(M)$  для всякого  $s \in \mathbb{R}$  определяется как пополнение



$C^\infty(M)$  по норме  $\|\cdot\|_s$ , где

$$\|\mathbf{u}\|_s^2 = \sum_{\alpha} (\|u_{\alpha}^1\|_s^2 + \|u_{\alpha}^2\|_s^2), \quad \|g\|_s^2 = \sum_{\alpha} \|g_{\alpha}\|_s^2.$$

Скалярное произведение и норма в  $H^s(\mathbb{R}^2)$  вводятся так :

$$(f, g)_s = \int \langle \xi \rangle^{2s} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi,$$

$$\|f\|_s^2 = (f, f)_s, \quad \langle \xi \rangle := (1 + |\xi|^2)^{-1/2},$$

где  $\hat{f}$  – обозначение преобразования Фурье распределения  $f$  (если область интегрирования не указана, то подразумевается интеграл по  $\mathbb{R}^2$ ).

Далее, через  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  будем обозначать векторы  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$ . Включение  $\mathbf{u} \in H^s$  подразумевает, что символ  $H^s$  – декартово произведение двух экземпляров пространства  $H^s$ , где

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_s = (u_1, v_1)_s + (u_2, v_2)_s = \int \langle \xi \rangle^{2s} \hat{\mathbf{u}}(\xi) \cdot \overline{\hat{\mathbf{v}}(\xi)} d\xi,$$

$$\|\mathbf{u}\|_s^2 = \|u_1\|_s^2 + \|u_2\|_s^2 = \int \langle \xi \rangle^{2s} |\hat{\mathbf{u}}(\xi)|^2 d\xi.$$

Положим для любого  $s \in \mathbb{R}$  [36]

$$H^s(\Omega) := \{\mathbf{u}|_{\Omega} : \mathbf{u} \in H^s(M)\},$$

$$\tilde{H}^s(\bar{\Omega}) := \{\mathbf{u} \in H^s(M) : \text{supp } \mathbf{u} \subset \bar{\Omega}\}.$$

Пространство  $\tilde{H}^s(\bar{\Omega})$  может быть определено как замыкание класса  $C_0^\infty(\Omega)$  по норме  $\|\cdot\|_s$ . Пространства сужений  $H^s(\Omega)$  элементов из  $H^s(M)$  на  $\Omega$  могут быть определены тем же способом при  $|s| \leq 1/2$ .

Для корректного определения уравнения на экране  $\Omega$  нужно ввести операции поверхностной дивергенции и градиента. В силу компактности многообразия  $\bar{\Omega}$  можно выбрать покрытие  $\{U_{\alpha}\}$  столь малыми окрестностями, чтобы в каждом элементе  $U_{\alpha}$  покрытия ввести *изотермические* локальные координаты. В окрестности произвольной точки  $x \in \Omega$  в таких координатах первая квадратичная форма поверхности  $U_{\alpha}$  имеет вид (см. [34], с.111)

$$dl^2 = G(x_1, x_2)(dx_1^2 + dx_2^2), \quad G = G_{\alpha}.$$

Положим в каждой  $U = U_\alpha$ :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{u} &= \frac{1}{G} \left( \frac{\partial(u_1\sqrt{G})}{\partial x_1} + \frac{\partial(u_2\sqrt{G})}{\partial x_2} \right), \\ \operatorname{grad} g &= \frac{1}{\sqrt{G}} \left( \frac{\partial g}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 \right), \\ \operatorname{rot}_\nu \mathbf{u} &= \frac{1}{G} \left( \frac{\partial(u_1\sqrt{G})}{\partial x_1} - \frac{\partial(u_2\sqrt{G})}{\partial x_2} \right), \\ \operatorname{grad}' g &= \frac{1}{\sqrt{G}} \left( \frac{\partial g}{\partial x_2} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial g}{\partial x_1} \mathbf{e}_2 \right), \\ \Delta g &= \operatorname{div} \operatorname{grad} g = \frac{1}{G} \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \right).\end{aligned}$$

Рассмотрим гладкие сечения и функции  $\mathbf{u} \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $g \in C_0^\infty(\Omega)$  на экране  $\Omega$ . В общем случае используем разложения

$$\mathbf{u} = \sum_\alpha \mathbf{u}_\alpha, \quad g = \sum_\alpha g_\alpha.$$

где  $\mathbf{u}_\alpha = \varphi_\alpha \mathbf{u}$ ,  $g_\alpha = \varphi_\alpha g$ . Тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{u} &= \sum_\alpha \operatorname{div} \mathbf{u}_\alpha, \quad \operatorname{grad} g = \sum_\alpha \operatorname{grad} g_\alpha, \\ \operatorname{rot}_\nu \mathbf{u} &= \sum_\alpha \operatorname{rot}_\nu \mathbf{u}_\alpha, \quad \operatorname{grad}' g = \sum_\alpha \operatorname{grad}' g_\alpha, \\ \Delta g &= \sum_\alpha \Delta g_\alpha.\end{aligned}$$

Определим, следуя [17], гильбертово пространство  $W = W(\overline{\Omega})$  как пополнение  $C_0^\infty(\Omega)$  по норме  $\|\cdot\|_W$ :

$$\|\mathbf{u}\|_W^2 = \|\mathbf{u}\|_{-1/2}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{-1/2}^2$$

со скалярным произведением

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_W = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{-1/2} + (\operatorname{div} \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{v})_{-1/2}.$$

Имеет место [17] следующее представление пространства  $W$ :

$$W = \left\{ \mathbf{u} \in \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}) : \operatorname{div} \mathbf{u} \in \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}) \right\}. \quad (3.45)$$

Через  $W' = (W(\overline{\Omega}))'$  обозначим антидвойственное к  $W$  пространство (непрерывных антилинейных функционалов над  $W$ ). Верно [17] определение

$$W' = \left\{ \mathbf{f} \Big|_{\Omega} : \mathbf{f} \in H^{-1/2}(\overline{M}), \operatorname{rot}_{\nu} \mathbf{f} \in H^{-1/2}(\overline{M}) \right\}$$

и включение

$$H^{1/2}(\overline{\Omega}) \subset W' \subset H^{-1/2}(\overline{\Omega}).$$

Определим теперь поле, рассеянное телом  $Q$ , и выпишем основное интегро-дифференциальное уравнение.

Поле  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$  удовлетворяет вне  $\partial Q$  системе уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_2 = -i\omega\varepsilon_e \mathbf{E}_2 + \mathbf{j}_{p,E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_2 = i\omega\mu_e \mathbf{H}_2, \end{cases} \quad (3.46)$$

(здесь  $\mathbf{j}_{p,E} = -i\omega(\widehat{\varepsilon}_r - \widehat{\mathbf{I}})\mathbf{E}$  – вектор электрической поляризации), условиям сопряжения на  $\partial Q$  и условиям излучения на бесконечности.

Решение системы (3.46) в  $\mathbb{R}^3$  будем искать в виде

$$\mathbf{E}_2 = i\omega\mu_e \mathbf{A} - \frac{1}{i\omega\varepsilon_e} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A}, \quad \mathbf{H}_2 = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (3.47)$$

где  $\mathbf{A}$  – векторный потенциал [51].

Второе уравнение системы выполняется при произвольном  $\mathbf{A}$ . Действительно,

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_2 = i\omega\mu_e \operatorname{rot} \mathbf{A} - \frac{1}{i\omega\varepsilon_e} \operatorname{rot} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} = i\omega\mu_e \operatorname{rot} \mathbf{A} = i\omega\mu_e \mathbf{H}_2.$$

Из первого уравнения системы (3.46) получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = (\operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta)\mathbf{A} = \omega^2 \mu_e \varepsilon_e \mathbf{A} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{j}_{p,E}.$$

Следовательно, потенциал  $\mathbf{A}$  является решением в  $\mathbb{R}^3$  уравнения

$$\Delta \mathbf{A} + k_e^2 \mathbf{A} = -\mathbf{j}_p. \quad (3.48)$$

Последнее уравнение имеет единственное решение в смысле распределений с учетом представления (3.47) и условия излучения (3.14); это решение имеет вид объемного потенциала [6]:

$$\mathbf{A}(x) = \int_Q G(x, y) \mathbf{j}_p(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (3.49)$$

где  $G(x, y) = \frac{e^{ik_e|x-y|}}{4\pi|x-y|}$ .

В силу свойств объемного потенциала [6, 63] имеем

$$\mathbf{A} \in C^1(\mathbb{R}^3) \cap C^2(Q) \cap C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}) \text{ и } \mathbf{A} \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3).$$

Тогда поле, рассеянное телом  $Q$ , принадлежит следующим классам функций:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2 &\in C(\mathbb{R}^3) \cap C^1(Q) \cap C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}), \\ \mathbf{E}_2 &\in \mathbf{L}_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3) \cap C(Q) \cap C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}). \end{aligned}$$

Подставляя (3.44), (3.47) и (3.49) в (3.42), получаем следующее представление полного электрического поля вне экрана и границы области неоднородности:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) &= (k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) (\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_r(y) - \hat{\mathbf{I}}) \mathbf{E}(y) dy + \\ &+ (k_e^2 + \text{grad div}) \int_\Omega G(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y + \mathbf{E}_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus (\bar{\Omega} \cup \partial Q). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Теперь первое из интегро-дифференциальных уравнений электрического поля  $\mathbf{E}$  следует из представления (3.47) и (3.49). Для точек  $x \in Q$  выводим с учетом включения  $\mathbf{E} \in C(Q)$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) &- (k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) (\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_r(y) - \hat{\mathbf{I}}) \mathbf{E}(y) dy - \\ &- (k_e^2 + \text{grad div}) \int_\Omega G(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y = \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q. \end{aligned} \quad (3.51)$$

*Замечание 3.3.* Из условий гладкости поля следует, что выведенное уравнение выполняется в  $Q$  поточечно (в классическом смысле). Действительно, так как тела и экраны не пересекаются, то в каждой точке области  $Q$  поверхностный интеграл в (3.51) является бесконечно дифференцируемым. Пусть  $x \in Q$  – произвольная внутренняя точка области неоднородности. Тогда можно выбрать подобласть  $Q' \subset Q$  так, чтобы  $Q' \ni x$  и  $\partial Q \cap \partial Q' = \emptyset$ . Введем ток

$$\mathbf{J}(y) = (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(y) - \widehat{\mathbf{I}})\mathbf{E}(y) \quad (3.52)$$

и представим потенциал в равенстве (3.51) в виде

$$\begin{aligned} \int_Q G(x, y)\mathbf{J}(y)dy &= \int_{Q'} G(x, y)\mathbf{J}(y)dy + \int_{Q \setminus Q'} G(x, y)\mathbf{J}(y)dy = \\ &= I_1(x) + I_2(x). \end{aligned}$$

Функция  $I_2(x)$  бесконечно дифференцируема в  $Q'$ , а  $I_1(x)$  по крайней мере принадлежит классу  $C^2(Q')$ , так как плотность объемного потенциала  $\mathbf{J} \in C^1(Q') \cap C(\overline{Q'})$  (см. [6], с. 451). Следовательно, из уравнения (3.51) в  $Q$  теперь следует с учетом (3.9), что

$$\text{grad div} \int_Q G(x, y)\mathbf{J}(y)dy \in C(Q).$$

Второе интегро-дифференциальное уравнение вытекает из условия Дирихле (3.12) на поверхности идеально проводящего экрана:

$$\begin{aligned} &\left( - (k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y)(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(y) - \widehat{\mathbf{I}})\mathbf{E}(y)dy - \right. \\ &\left. - (k_e^2 + \text{grad div}) \int_{\Omega} G(x, y)\mathbf{u}(y)ds_y \right)_{\tau} = \mathbf{E}_{0,\tau}(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Через  $(\bullet)_{\tau}$  обозначена операция вычисления касательной компоненты вектор-функций  $\mathbf{v}$  во внутренних точках экрана  $\Omega$ :

$$(\mathbf{v})_{\tau} = \mathbf{v} - \boldsymbol{\nu}(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu});$$

здесь  $\boldsymbol{\nu}$  – определенное заранее поле единичной нормали на  $\Omega$ .

*Замечание 3.4.* Поясним правомерность вывода уравнения (3.53). Для плотности  $\mathbf{u}$ , удовлетворяющей условию гладкости  $\mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{u} \in C^1(\Omega)$ , (см. [17], с.94) касательные компоненты поля  $\mathbf{E}_1$  непрерывны вплоть до экрана  $\Omega$  в каждой его внутренней точке. Так как  $\mathbf{E}_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  то существует предел  $\mathbf{E}_{0,\tau}(x)$  при  $x \rightarrow x_0 \in \Omega$ ; этот предел определен и для  $\mathbf{E}_{2,\tau}(x)$ , так как вне области  $Q$  поле  $\mathbf{E}_2$  бесконечно дифференцируемо. Если же условие  $\mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{u} \in C^1(\Omega)$  не выполняется, то по крайней мере верно  $\mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{u} \in \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega})$  и поле  $\mathbf{E}_1$  принадлежит пространству  $\mathbf{L}_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ . Кроме того, в силу уравнений Максвелла ротор поля также принадлежит  $\mathbf{L}_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ . Тогда для компонент поля из  $\mathbf{L}_2(Q)$  существует след на  $\Omega$  из пространства  $H^{-1/2}(\Omega)$  (см. [61]), а уравнение (3.53) понимается в смысле следов.

Магнитное поле  $\mathbf{H}$  определим по решению  $\mathbf{E} \in \mathbf{L}_2(Q)$  так:

$$\mathbf{H}(x) = \mathbf{H}_0(x) - i\omega\varepsilon_e \operatorname{rot} \int_Q G(x,y)(\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{\mathbf{I}})\mathbf{E}(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (3.54)$$

где  $\mathbf{H}_0(x) = \frac{1}{i\omega\mu_e} \operatorname{rot} \mathbf{E}_0(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ .

Таким образом, краевая задача сведена [131, 132, 136] к системе уравнений (3.51)–(3.54). В силу явного выражения магнитного поля через электрическое дальнейшему исследованию подлежит фактически система уравнений (3.51),(3.53) электрического поля.

Рассмотрим эквивалентную форму записи этой системы в токах. Из условия (3.4) следует взаимно однозначное соответствие между током поляризации  $\mathbf{J} = (\hat{\varepsilon}_r - \hat{\mathbf{I}})\mathbf{E}$  и напряженностью электрического поля  $\mathbf{E} = \hat{\xi}\mathbf{J}$ . Из предположения  $\varepsilon_{ij} \in C^\infty(\bar{Q})$  следует, что  $\mathbf{J}$  принадлежит тем же классам функций, что и  $\mathbf{E}$ , а система уравнений (3.51),(3.53) может быть записана в виде

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{J}(x) = & (k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y)\mathbf{J}(y)dy + \\
& + (k_e^2 + \text{grad div}) \int_{\Omega} G(x, y)\mathbf{u}(y)ds_y + \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q, \\
& \left( - (k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y)\mathbf{J}(y)dy - \right. \\
& \left. - (k_e^2 + \text{grad div}) \int_{\Omega} G(x, y)\mathbf{u}(y)ds_y \right)_{\tau} = \mathbf{E}_{0,\tau}(x), \quad x \in \Omega.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Введем операторы

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{A}}\mathbf{J} & := \widehat{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{J}(x) - (k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y)\mathbf{J}(y)dy, \quad x \in Q, \\
\widehat{\mathcal{S}}\mathbf{u} & := \left( - (k_e^2 + \text{grad div}) \int_{\Omega} G(x, y)\mathbf{u}(y)ds_y \right)_{\tau}, \quad x \in \Omega, \\
\widehat{\mathcal{K}}_1\mathbf{u} & := - (k_e^2 + \text{grad div}) \int_{\Omega} G(x, y)\mathbf{u}(y)ds_y, \quad x \in Q, \\
\widehat{\mathcal{K}}_2\mathbf{J} & := \left( - (k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y)\mathbf{J}(y)dy \right)_{\tau}, \quad x \in \Omega.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Определим также матричный оператор

$$\widehat{\mathcal{L}} := \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{A}} & \widehat{\mathcal{K}}_1 \\ \widehat{\mathcal{K}}_2 & \widehat{\mathcal{S}} \end{pmatrix} \tag{3.57}$$

с отображениями  $\widehat{\mathcal{A}}$ ,  $\widehat{\mathcal{S}}$  и  $\widehat{\mathcal{K}}_i$ , действующими в следующих пространствах:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{A}}\mathbf{J} & := \mathbf{L}_2(Q) \rightarrow \mathbf{L}_2(Q), \quad \widehat{\mathcal{K}}_1\mathbf{u} := W(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbf{L}_2(Q) \\
\widehat{\mathcal{K}}_2\mathbf{J} & := \mathbf{L}_2(Q) \rightarrow W'(\Omega), \quad \widehat{\mathcal{S}}\mathbf{u} := W(\overline{\Omega}) \rightarrow W'(\Omega).
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Теперь система ИД уравнений может быть записана в краткой операторной форме

$$\widehat{\mathcal{L}}(\mathbf{J}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}. \tag{3.59}$$

Здесь  $\mathbf{J}$  – неизвестный вектор тока поляризации в  $Q$ ,  $\mathbf{u}$  – неизвестная поверхностная плотность на  $\Omega$ . Вектор правой части имеет вид  $\mathbf{f} =$

$(\mathbf{E}_{0,Q}, \mathbf{E}_{0,\tau})^T$ , где  $\mathbf{E}_{0,Q}$  – сужение гладкого падающего поля на  $Q$ , а  $\mathbf{E}_{0,\tau}$  – его касательная составляющая на экране  $\Omega$ .

Через  $\mathbf{X}$  обозначим прямое произведение  $\mathbf{L}_2(Q) \times W(\overline{\Omega})$  определенных ранее пространств. Так как  $(\mathbf{L}_2(Q))' = \mathbf{L}_2(Q)$ , то пространством, антидвойственным к  $\mathbf{X}$  является  $\mathbf{X}' = \mathbf{L}_2(Q) \times W'$ .

**Определение 3.2.** *Решением уравнения (3.59) называется удовлетворяющая системе (3.55) пара векторов  $(\mathbf{J}, \mathbf{u})$  из пространства  $\mathbf{X}$ .*

*Замечание 3.5.* Выбор пространства  $\mathbf{L}_2(Q)$  для решения  $\mathbf{E}$  уравнения (3.51) обоснован, во-первых, условием конечности энергии (3.13). Во-вторых, при условии гладкости падающего поля всякое решение уравнения (3.51) из пространства  $\mathbf{L}_2(Q)$  будет квазиклассическим решением задачи дифракции в дифференциальной формулировке (это будет показано в п. 3.3). Наконец, для численного решения уравнения электрического поля проекционными методами в пространстве  $\mathbf{L}_2(Q)$  можно выбирать финитные кусочно-постоянные или кусочно-линейные базисные функции, что значительно упрощает вычисление кратных интегралов и позволяет теоретически обосновать применимость проекционного метода.

### 3.3 Фредгольмовость и эллиптичность матричного интегродифференциального оператора задачи дифракции

В этом параграфе будет показано, что при сделанных предположениях о свойствах рассеивателей оператор  $\widehat{\mathcal{L}}$  является фредгольмовым оператором с нулевым индексом в выбранных пространствах, а при введении дополнительных ограничений – эллиптическим.

Представим матричный оператор  $\widehat{\mathcal{L}}$  в виде

$$\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\mathcal{L}}_1 + \widehat{\mathcal{L}}_2 := \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{A}}_0 & 0 \\ 0 & \widehat{\mathcal{S}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{A}}_1 & \widehat{\mathcal{K}}_1 \\ \widehat{\mathcal{K}}_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.60)$$



Здесь операторы  $\widehat{\mathcal{S}}$ ,  $\widehat{\mathcal{K}}_1$  и  $\widehat{\mathcal{K}}_2$  определены так же, как и выше. Операторы  $\widehat{\mathcal{A}}_0$ ,  $\widehat{\mathcal{A}}_1$  определяются аналогично интегро-дифференциальному оператору  $\widehat{\mathcal{A}}$ , при этом их ядра  $G_0$  и  $G_1$  имеют вид

$$G_0(x, y) = \frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}, \quad G_1(x, y) = G(x, y) - G_0(x, y). \quad (3.61)$$

**Лемма 3.1.** [131, 132, 136] Оператор  $\widehat{\mathcal{L}}_2 : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$  компактен.

*Доказательство.* Рассмотрим оператор  $\widehat{\mathcal{K}}_1$ . Так как  $\overline{Q} \cap \overline{\Omega} = \emptyset$ , то ядро оператора является бесконечно гладким и допустимо повторное дифференцирование под знаком интеграла. Следовательно, для любого  $\mathbf{u} \in W$  имеем  $\widehat{\mathcal{K}}_1 \mathbf{u} \in C^\infty(\overline{Q})$ , что влечет компактность  $\widehat{\mathcal{K}}_1 : W \rightarrow \mathbf{L}_2(Q)$ . Аналогично получим, что  $\widehat{\mathcal{K}}_2 : \mathbf{L}_2(Q) \rightarrow W'$  – компактный оператор.

Рассмотрим оператор  $\widehat{\mathcal{A}}_1$ . Его ядро  $G_1(r) = \frac{e^{-ike^r} - e^{-r}}{4\pi r}$  имеет устранимую особенность и допустимо дифференцирование под знаком интеграла. Следовательно,  $\widehat{\mathcal{A}}_1 : \mathbf{L}_2(Q) \rightarrow \mathbf{L}_2(Q)$  также компактен.  $\square$

**Представление  $\widehat{\mathcal{A}}_0$  через ПДО. Эллиптичность оператора.**

Вычислим преобразование Фурье функции  $f(x) = \frac{e^{-|x|}}{4\pi|x|}$ . Так как функция  $f$  обладает сферической симметрией (можно записать  $f(x) = f(r)$ ,  $r = |x|$ ), то и преобразование Фурье  $\hat{f}(\xi)$  обладает сферической симметрией, т.е. зависит от модуля аргумента  $|\xi| =: \rho$  (см. [29], с. 149-151). Поэтому (и с учетом суммируемости функции  $f$  в  $\mathbb{R}^3$ ) применима следующая формула

$$\hat{f}(\rho) = \frac{2\pi}{\rho^{(n-2)/2}} \int_0^\infty f(r) r^{n/2} J_{(n-2)/2}(2\pi\rho r) dr, \quad (3.62)$$

где  $J_{(n-2)/2}$  – функция Бесселя.

В [29] преобразование Фурье определяется на с. 51 отличным от принятого в данной работе способом:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx.$$

Следовательно, в нашем случае формула (3.62) будет иметь вид

$$\hat{f}(\rho) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\rho^{(n-2)/2}} \int_0^\infty f(r) r^{n/2} J_{(n-2)/2}(\rho r) dr. \quad (3.63)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \hat{f}(\rho) &= \frac{(2\pi)^{3/2}}{\rho^{1/2}} \int_0^\infty \frac{e^{-r}}{4\pi r} r^{3/2} J_{1/2}(\rho r) dr = \\ &= \frac{(2\pi)^{3/2}}{\rho^{1/2}} \int_0^\infty \frac{e^{-r}}{4\pi r} r^{3/2} \sqrt{\frac{2}{\pi \rho r}} \sin(\rho r) dr = \\ &= \frac{1}{\rho} \int_0^\infty e^{-r} \sin(\rho r) dr = \frac{1}{1 + \rho^2} = a_0(\rho). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Введем обозначения для оператора типа потенциала и матричного дифференциального оператора  $k_e^2 + \text{grad div}$  :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{T}}\mathbf{v} &= \int_Q G(x, y) \mathbf{v}(y) dy, \\ \hat{\mathcal{D}}\mathbf{v} &= (k_e^2 + \text{grad div})\mathbf{v}(y). \end{aligned}$$

Тогда оператор  $\hat{\mathcal{A}}_0$  выражается через оператор умножения на обратимый гладкий тензор  $\hat{\xi}$ , композицию дифференциального оператора  $\hat{\mathcal{D}}$  и интегрального оператора  $\hat{\mathcal{T}}$  :

$$\hat{\mathcal{A}}_0 \mathbf{J} = \hat{\xi} \mathbf{J} - (\hat{\mathcal{D}} \circ \hat{\mathcal{T}}) \mathbf{J}. \quad (3.65)$$

Запишем ряд обозначений (см. [9]).

**Определение 3.3.**  $L^m = L^m(Q)$  – класс ПДО, с символами  $a(x, \xi) \in C^\infty(Q \times \mathbb{R}^n)$  из пространства Шварца  $S^m = S^m(Q \times \mathbb{R}^n)$ ,

**Определение 3.4.**  $H_{\text{comp}}^s(Q)$  – пространство финитных обобщенных функций с носителем в области  $Q$ , а  $H^s(\mathbb{R}^3)$  – пространство Соболева вещественного порядка  $s$ ,

**Определение 3.5.**  $H_{\text{loc}}^s(Q)$  – пространство таких обобщенных функций, что для всякой финитной функции  $\varphi \in C_0^\infty(Q)$  произведение  $\varphi u$  принадлежит классу  $H^s(\mathbb{R}^3)$ .

**Лемма 3.2.** [134, 136] Оператор  $\widehat{\mathcal{A}}_0$  может быть представлен в виде ПДО

$$\widehat{\mathcal{A}}\mathbf{J} = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} \left( \widehat{\boldsymbol{\xi}}(x) - \widehat{\mathbf{td}}(\xi) \right) \mathbf{J}(y) dy d\xi, \quad (3.66)$$

где символ  $\widehat{\mathbf{td}}(\xi)$  определяется равенством

$$\widehat{\mathbf{td}}(\xi) = \frac{-1}{1 + |\xi|^2} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1^2 - k_e^2 & \xi_1\xi_2 & \xi_1\xi_3 \\ \xi_1\xi_2 & \xi_2^2 - k_e^2 & \xi_2\xi_3 \\ \xi_1\xi_3 & \xi_2\xi_3 & \xi_3^2 - k_e^2 \end{pmatrix}. \quad (3.67)$$

*Доказательство.* Рассмотрим оператор  $\widehat{\mathcal{T}}\mathbf{J} = \int_Q G(x, y)\mathbf{J}(y)dy$ . Можно считать, что ток  $\mathbf{J}$  задан всюду в  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbf{J} \equiv 0$  в  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}$ . Тогда можно записать  $\widehat{\mathcal{T}}\mathbf{J} = \int_{\mathbb{R}^3} G(x, y)\mathbf{J}(y)dy$ . Всюду далее, если интегрирование осуществляется по всему пространству  $\mathbb{R}^3$ , область интегрирования указываться не будет.

Вычислим преобразование Фурье образа  $\widehat{\mathcal{T}}\mathbf{J}$ , учитывая правило преобразования Фурье свертки функций:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\widehat{\mathcal{T}}\mathbf{J}(\xi) &= \mathcal{F}\left[\int_{\mathbb{R}^3} G_0(|t-y|)\mathbf{J}(y)dy\right](\xi) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{-it\cdot\xi} \int_{\mathbb{R}^3} (G_0|t-y|)\mathbf{J}(y)dy dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{-it\cdot\xi} G_0(|t|)dt \times \int_{\mathbb{R}^3} e^{-it\cdot\xi} u(t)dt = a_0(\xi)\mathcal{F}\mathbf{J}(\xi). \end{aligned}$$

Следовательно, интегральный оператор  $\widehat{\mathcal{T}}$  можно записать как ПДО с символом  $\widehat{\mathbf{t}} = a_0\widehat{\mathbf{I}}$ :

$$\widehat{\mathcal{T}}\mathbf{J} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i(x-y)\cdot\xi} \widehat{\mathbf{a}}_0 \mathbf{J}(y) dy d\xi. \quad (3.68)$$

Так как  $\frac{\partial}{\partial x_k} u(x) = \mathcal{F}^{-1}(-i\xi_k \mathcal{F}u(\xi))$ , то матричный дифференциальный оператор  $\widehat{\mathcal{D}} = (k_e^2 + \text{grad div})$  есть ПДО с символом  $k_e^2 \widehat{\mathbf{I}} - \widehat{\mathbf{d}}(\xi)$ , где  $\widehat{\mathbf{d}}_{ij} = \xi_i \xi_j$ .

Так как  $\widehat{\mathcal{D}}$  – собственный дифференциальный оператор (см. [57], с. 29), то применима теорема о композиции ПДО [9, 57], из которой следует, что  $\widehat{\mathcal{D}} \circ \widehat{\mathcal{T}}$  – ПДО. Асимптотическое разложение его символа имеет вид

$$\widehat{\mathbf{td}}(\xi) = t(\xi)(k_e^2 \widehat{\mathbf{I}} - \widehat{\mathbf{d}}(\xi)). \quad (3.69)$$

Окончательно, приходим к представлению (3.66) с символом (3.67).  $\square$

Покажем, что при сделанных в постановке задачи дифракции предположениях о диэлектрических свойствах рассеивателя  $Q$  матричный интегродифференциальный оператор  $\widehat{\mathcal{A}}_0$  является эллиптическим ПДО в пространстве  $\mathbf{L}_2(Q)$ . Под эллиптическим оператором понимается оператор, отличающийся от коэрцитивного оператора на компактное слагаемое. Точнее, дадим следующее определение [105].

**Определение 3.6.** Пусть  $H$  – комплексное гильбертово пространство, а  $H'$  – пространство, антидвойственное к  $H$ . Линейный ограниченный оператор  $\mathcal{A} : H \rightarrow H'$  называется **эллиптическим**, если существует компактный оператор  $\mathcal{K} : H \rightarrow H'$  такой, что при некотором  $\gamma > 0$  для всех  $u \in H$  верно неравенство

$$\operatorname{Im}\langle (\mathcal{A} + \mathcal{K})u, u \rangle \geq \gamma \|u\|_H^2. \quad (3.70)$$

*Замечание 3.6.* Неравенство (3.70) называется *неравенством Гординга*; в нем можно заменить операцию  $\operatorname{Im}$  на операцию вычисления вещественной части. Скобки  $\langle, \rangle$  обозначают соотношение антидвойственности (антидвойственное спаривание). Заметим, что если  $\mathcal{K}$  – нулевой оператор, то неравенство (3.70) приводит (см. [87], с. 201) к определению *коэрцитивного* оператора, который будет непрерывно обратимым. Следовательно, всякий эллиптический оператор является Фредгольма оператором с нулевым индексом [18].

**Теорема 3.2.** [134, 136] Пусть в  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}$  выполнены условия

$$\operatorname{Re} \varepsilon_e > 0, \operatorname{Im} \varepsilon_e \geq 0, \quad \operatorname{Re} \mu_e > 0, \operatorname{Im} \mu_e = 0. \quad (3.71)$$

Пусть в  $\overline{Q}$  тензор относительной диэлектрической проницаемости  $\widehat{\varepsilon}_r(x)$  таков, что в  $x \in \overline{Q}$  существует ограниченный тензор

$$\widehat{\xi}(x) = (\widehat{\varepsilon}_r(x) - \widehat{\mathbf{I}})^{-1}, \quad (3.72)$$

где  $\widehat{\mathbf{I}}$  – единичный тензор. Пусть для  $\widehat{\varepsilon}_r(x)$  в  $\overline{Q}$  выполнено хотя бы одно из условий

$$\operatorname{Re}(\widehat{\varepsilon}_r(x) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \geq C_1 |\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_1 > 1, \quad (3.73)$$

$$\operatorname{Im}(\widehat{\varepsilon}_r(x) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \geq C_2 |\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_2 > 0 \text{ или} \quad (3.74)$$

$$-\operatorname{Im}(\widehat{\varepsilon}_r(x) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \geq C_3 |\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_3 > 0 \quad (3.75)$$

для всех векторов  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ .

Тогда оператор  $\widehat{\mathcal{A}}_0 : \mathbf{L}_2(Q) \rightarrow \mathbf{L}_2(Q)$ , определенный по формуле (3.65), является эллиптическим.

*Доказательство.* Представим оператор  $\widehat{\mathcal{A}}_0$  в виде  $\widehat{\mathcal{A}}_0 = \widehat{\mathcal{A}}' + \widehat{\mathcal{A}}''$ .

Оператор  $\widehat{\mathcal{A}}''$  – ПДО с символом  $k_e^2 t(\xi) \widehat{\mathbf{I}}$  порядка  $-2$ . Следовательно,  $\widehat{\mathcal{A}}''$  – непрерывное отображение пространства  $\mathbf{L}_{2,\text{comp}}(\mathbb{R}^3)$  в  $H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$ . Из компактности вложения пространства Соболева  $H^2(Q)$  в  $L_2(Q)$  следует, что отображение  $\widehat{\mathcal{A}}'' : \mathbf{L}_2(Q) \rightarrow \mathbf{L}_2(Q)$  компактно.

Теперь достаточно установить коэрцитивность  $\widehat{\mathcal{A}}'$ . Исследуем квадратичную форму этого оператора.

1. Пусть выполнено условие (3.73). Положим  $\mathbf{u} = \widehat{\xi}^{-1} \mathbf{v} = (\widehat{\varepsilon}_r(x) - \widehat{\mathbf{I}}) \mathbf{v}$ ; тогда с учетом невырожденности матрицы (тензора)  $\widehat{\xi}$  в  $\overline{Q}$  получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\widehat{\xi} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) &= \operatorname{Re}(\mathbf{v} \cdot (\widehat{\varepsilon}_r(x) - \widehat{\mathbf{I}}) \mathbf{v}) = \operatorname{Re}(\overline{\mathbf{v} \cdot (\widehat{\varepsilon}_r(x) - \widehat{\mathbf{I}}) \mathbf{v}}) = \\ &= \operatorname{Re}((\widehat{\varepsilon}_r(x) - \widehat{\mathbf{I}}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \operatorname{Re}(\widehat{\varepsilon}_r(x) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - |\mathbf{v}|^2 \geq \\ &\geq (C_1 - 1) \|\mathbf{v}\|^2 = (C_1 - 1) \|\widehat{\xi} \mathbf{u}\|^2 \geq \gamma_1 \|\mathbf{u}\|^2. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Рассмотрим теперь квадратичную форму оператора  $\widehat{\mathcal{A}}'$ :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\langle \widehat{\mathcal{A}}' \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle &= \operatorname{Re} \int_Q \widehat{\boldsymbol{\xi}}(x) \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{u}(x) dx + \\
&+ \operatorname{Re} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_Q \left( \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i(x-y)\cdot \xi} t(\xi) \widehat{\mathbf{d}}(\xi) \mathbf{u}(y) dy d\xi \right) \cdot \mathbf{u}(x) dx = \\
&= \operatorname{Re} \int_Q \widehat{\boldsymbol{\theta}}(x) \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{u}(x) dx + \\
&+ \operatorname{Re} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_Q t(\xi) \widehat{\mathbf{d}}(\xi) \left( \int_Q e^{-iy\cdot \xi} \mathbf{u}(y) dy \right) \cdot \left( \int_Q e^{-ix\cdot \xi} \mathbf{u}(x) dx \right) d\xi = \\
&= \operatorname{Re} \int_Q \widehat{\boldsymbol{\theta}}(x) \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{u}(x) dx + \frac{1}{(2\pi)^3} \int_Q \left| \frac{\xi}{1 + |\xi|^2} \cdot \mathcal{F} \mathbf{u}(\xi) \right|^2 d\xi \geq \\
&\geq \gamma_1 \int_Q |\mathbf{u}|^2 dx = \gamma_1 \|\mathbf{u}\|^2, \quad \gamma_1 > 0.
\end{aligned} \tag{3.77}$$

В сделанных выше преобразованиях интегралы по  $\mathbb{R}^3$  можно заменить интегралами по  $Q$  (и наоборот) в силу финитности функции  $\mathbf{u}$ . Последняя оценка в (3.77) следует из (3.73) и (3.76).

Окончательно получаем:

$$\operatorname{Re}\langle \widehat{\mathcal{A}}' \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq \gamma_1 \|\mathbf{u}\|^2 \tag{3.78}$$

для всех  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(Q)$ .

2. Пусть теперь выполнено неравенство  $\operatorname{Im}(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \geq C_2 |\mathbf{v}|^2$ . Положим  $\mathbf{u} = \widehat{\boldsymbol{\xi}}^{-1} \mathbf{v} = (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) - \widehat{\mathbf{I}}) \mathbf{v}$ . Тогда

$$\begin{aligned}
-\operatorname{Im}(\widehat{\boldsymbol{\xi}}(x) \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{u}(x)) &= -\operatorname{Im}(\mathbf{v} \cdot (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x) - \widehat{\mathbf{I}}) \mathbf{v}) = \\
&= \operatorname{Im}((\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x) - \widehat{\mathbf{I}}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \operatorname{Im}((\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x) \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}) \geq \\
&\geq C_2 |\mathbf{v}|^2 \geq \gamma_2 |\mathbf{u}|^2, \quad \gamma_2 > 0.
\end{aligned} \tag{3.79}$$

Для квадратичной формы оператора  $\widehat{\mathcal{A}}'$  верно

$$-\operatorname{Im}\langle \widehat{\mathcal{A}}' \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = -\operatorname{Im} \left( \int_Q \widehat{\boldsymbol{\xi}}(x) \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{u}(x) \right) dx \geq \gamma_2 \int_Q |\mathbf{u}|^2 dx = \gamma_2 \|\mathbf{u}\|^2.$$

Часть квадратичной формы, отвечающая интегро-дифференциальному оператору, отсутствует в выражении для формы (3.84), так как эта часть чисто вещественная (см. (3.77)).

Итак, с учетом последних преобразований получаем

$$-\operatorname{Im}\langle \widehat{\mathcal{A}}' \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq \gamma_2 \|\mathbf{u}\|^2 \quad (3.80)$$

для всех  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(Q)$ . То есть, коэрцитивным в данном случае является оператор  $-\widehat{\mathcal{A}}'$ .

3. Пусть выполнено неравенство  $-\operatorname{Im}(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \geq C_3 |\mathbf{v}|^2$ . Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\widehat{\boldsymbol{\xi}}(x) \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{u}(x)) &= \operatorname{Im}(\mathbf{v} \cdot (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x) - \widehat{\mathbf{I}}) \mathbf{v}) = \\ &= -\operatorname{Im}((\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x) - \widehat{\mathbf{I}}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = -\operatorname{Im}((\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x) \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}) \geq \\ &\geq C_3 |\mathbf{v}|^2 \geq \gamma_2 \|\mathbf{u}\|^2, \quad \gamma_2 > 0. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Повторяя рассуждения предыдущего пункта, заключаем, что

$$\operatorname{Im}\langle \widehat{\mathcal{A}}' \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq \gamma_3 \|\mathbf{u}\|^2 \quad (3.82)$$

для всех  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(Q)$ , что означает коэрцитивность оператора  $\widehat{\mathcal{A}}'$ . Теорема доказана.  $\square$

**Теорема 3.3.** [132, 136] Пусть в  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}$  выполнены условия (3.71), а для тензора относительной диэлектрической проницаемости  $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)$  в  $\overline{Q}$  выполнено условие (3.72) и хотя бы одно из условий (3.73)–(3.75). Тогда

1. Матричный оператор  $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$  – оператор Фредгольма с нулевым индексом.
2. Если  $\operatorname{Im} \varepsilon_e > 0$  и в  $Q$  удовлетворено одно из условий (3.73)–(3.75), то  $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$  является эллиптическим оператором.

*Доказательство.* Обратимся к представлению  $\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\mathcal{L}}_1 + \widehat{\mathcal{L}}_2$ . В лемме 3.1 установлена компактность оператора  $\widehat{\mathcal{L}}_2$ , поэтому достаточно доказать

фредгольмовость (эллиптичность) диагонального оператора  $\widehat{\mathcal{L}}_1$ . В [17] показано, что при  $\operatorname{Re} k_e > 0$  оператор  $\widehat{\mathcal{S}} : W(\overline{\Omega}) \rightarrow W'(\Omega)$  фредгольмов, а при  $\operatorname{Im} k_e > 0$  является эллиптическим. Из Теоремы 3.2 вытекает, что  $\widehat{\mathcal{L}}_1$  оператор Фредгольма с нулевым индексом при сделанных предположениях относительно пространства и рассеивателя. Пусть выполнены условия второй части теоремы. Для произвольного  $\mathbf{p} \in \mathbf{X}$  имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\langle \widehat{\mathcal{L}}_1 \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle &= \operatorname{Im}\langle \widehat{\mathcal{A}}_0 \mathbf{J}, \mathbf{J} \rangle + \operatorname{Im}\langle \widehat{\mathcal{S}} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq \\ &\geq \gamma_a \|\mathbf{J}\|^2 + \gamma_s \|\mathbf{u}\|^2 + \operatorname{Im}\langle \widehat{\mathcal{L}}_c \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = \gamma \|\mathbf{p}\|^2 + \operatorname{Im}\langle \widehat{\mathcal{L}}_c \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Здесь  $\gamma, \gamma_a, \gamma_s > 0$  – некоторые константы, а  $\widehat{\mathcal{L}}_c : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$  – компактный оператор. Существование этих констант и оператора следует из эллиптичности операторов  $\widehat{\mathcal{A}}$  и  $\widehat{\mathcal{S}}$ . Теорема доказана.  $\square$

### Гладкость решений системы интегро-дифференциальных уравнений. Существование и единственность решения задачи дифракции

Покажем теперь, что при условии бесконечной дифференцируемости падающего поля решение системы (3.55) удовлетворяет условиям (3.9) (подробное изложение доказательства гладкости решения в задаче дифракции на диэлектрическом теле в свободном пространстве см. в работе [49]).

**Теорема 3.4.** [131, 136] Пусть тензор диэлектрической проницаемости удовлетворяет условиям:  $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) = \varepsilon(x)\widehat{\mathbf{I}}$ , причем  $\varepsilon(x) \in C^\infty(\overline{Q})$  и  $\varepsilon_r(x) > 1$  для всех  $x \in \overline{Q}$ . Пусть  $(\mathbf{E}, \mathbf{u}) \in \mathbf{X}$  – решение системы (3.55), отвечающее падающему полю  $\mathbf{E}_0(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ . Тогда вектор-функции  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ , определенные согласно (3.50), (3.54), удовлетворяют условиям (3.9). Кроме того, имеет место включение

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^{0,\alpha}(\overline{Q}) \cap C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus (Q \cup \Omega_\delta)), \quad (3.84)$$

где  $0 < \alpha < 1/2$ , а  $\Omega_\delta \subset \mathbb{R}^3$  – произвольная открытая область, такая что  $\Omega_\delta \supset \overline{\Omega}$ .



*Доказательство.* 1. Установим гладкость поля  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  в открытой области  $Q$ . Запишем второе уравнение системы (3.55) в виде

$$(k_e^2 + \text{grad div})_\tau \int_{\Omega} G(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y = \mathbf{f}(x), \quad x \in \Omega. \quad (3.85)$$

где

$$\mathbf{f}(x) = ((k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy)_\tau + \mathbf{E}_{0,\tau}(x).$$

Тогда (см. [17], с. 112) всякое решение  $\mathbf{u} \in W$  бесконечно дифференцируемо во внутренних точках экрана  $\Omega$ , если  $\mathbf{f} \in C^\infty(\bar{\Omega})$ . Последнее включение имеет место, так как  $\mathbf{E}_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  по предположению, а

$$\int_Q G(x, y) (\varepsilon_r(y) - 1) \mathbf{E}(y) dy \in C^\infty(\bar{\Omega})$$

в силу условия  $\bar{Q} \cap \bar{\Omega} = \emptyset$  и гладкости ядра интегрального оператора.

Рассмотрим первое уравнение системы (3.55). Имеем:

$$\hat{\xi} \mathbf{J}(x) - (k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy = \mathbf{E}'_0(x), \quad (3.86)$$

где

$$\mathbf{E}'_0(x) = \mathbf{E}_0(x) + (k_e^2 + \text{grad div}) \int_{\Omega} G(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}). \quad (3.87)$$

Так как при сделанных предположениях оператор  $\hat{\mathcal{A}}$  уравнения (3.86) является эллиптическим, а правая часть удовлетворяет (3.87), то [52]  $\mathbf{J} \in C^\infty(Q)$ . Из условия гладкости тензора  $\hat{\varepsilon}$  в  $\bar{Q}$  заключаем  $\mathbf{E} \in C^\infty(Q)$ , а из выражения  $\mathbf{H}$  через  $\mathbf{E}$  выводим  $\mathbf{H} \in C^\infty(Q)$ .

Вне  $\bar{Q} \cup \bar{\Omega}$  имеем  $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^\infty$ , так как при  $y \in \bar{Q} \cup \bar{\Omega}$  и  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}$  имеем  $|x - y| \neq 0$  и ядра операторов в (3.55) бесконечно гладкие; поэтому допустимо дифференцирование любого порядка функций  $\mathbf{E}(x), \mathbf{H}(x)$  под знаком интеграла.

Докажем теперь непрерывность поля в  $\bar{Q}$  и включения (3.84)

2. Введем обозначение для векторного ньютонова потенциала:

$$\mathbf{V}(x) = \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (3.88)$$

Так как  $\mathbf{J} \in \mathbf{L}_2(Q)$ , то  $\mathbf{V} \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$  [30]. Тогда из (3.54) получаем  $\mathbf{H} \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$ . Вычисляя  $\text{rot}$  от обеих частей (3.54), получим

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \text{rot } \mathbf{H}_0(x) - i\omega\varepsilon_e \text{rot rot } \mathbf{V}(x) = \\ &= \text{rot } \mathbf{H}_0(x) - i\omega\varepsilon_e (\text{grad div} - \text{div grad}) \mathbf{V}(x). \end{aligned}$$

Из последнего и (3.51) подстановкой получаем

$$\text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_e \mathbf{E} + i\omega\varepsilon_e (k_e^2 + \Delta) \mathbf{V}.$$

Так как потенциал  $\mathbf{V}$  удовлетворяет [6] уравнению

$$(\Delta + k_e^2) \mathbf{V} = -(\varepsilon_r - 1) \mathbf{E},$$

то

$$\text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_e \mathbf{E} - i\omega\varepsilon_e (\varepsilon_r - 1) \mathbf{E}$$

и, следовательно, удовлетворено первое из уравнений Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon \mathbf{E}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, \quad (3.89)$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon(x), & x \in \bar{Q}, \\ \varepsilon_e, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus (\bar{Q} \cup \bar{\Omega}). \end{cases}$$

Применяя операцию  $\text{rot}$  к равенствам (3.50), (3.51), получаем

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= \text{rot } \mathbf{E}_0 + k_e^2 \text{rot } \mathbf{V} = i\omega\mu_e \mathbf{H}_0 + k_e^2 \frac{1}{i\omega\varepsilon_e} (\mathbf{H}_0 - \mathbf{H}) = \\ &= i\omega\mu_e \mathbf{H}_0 + i\omega\mu_e (\mathbf{H} - \mathbf{H}_0), \end{aligned}$$

откуда выводим второе уравнение Максвелла:

$$\text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu_e \mathbf{H}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}. \quad (3.90)$$

Из (3.89) следует

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, \quad (3.91)$$

а из (3.90) –  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ , при  $x \in \mathbb{R}^3$  (в смысле распределений).

Из формулы (3.91) и тождества

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = \operatorname{grad} \varepsilon \cdot \mathbf{E} + \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{E}$$

вытекает

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad} \varepsilon \cdot \mathbf{E},$$

из чего следует включение  $\operatorname{div} \mathbf{E} \in L_2(Q)$ .

Покажем теперь, что на границе области неоднородности  $\partial Q$  выполнены условия сопряжения. Интегрируя по  $Q$ , получим с учетом (3.91),

$$\begin{aligned} 0 &= \int_Q \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) v dx = \int_Q \operatorname{div}(v \varepsilon \mathbf{E}) dx - \int_Q \varepsilon \mathbf{E} \cdot \operatorname{grad} v dx = \\ &= \int_{\partial Q} v \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} ds - \int_Q \varepsilon \mathbf{E} \cdot \operatorname{grad} v dx \end{aligned}$$

для произвольной финитной функции  $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ . Отсюда заключаем, что

$$\int_Q \varepsilon \mathbf{E} \cdot \operatorname{grad} v dx = \int_{\partial Q} v (\varepsilon \mathbf{E}_n) ds, \quad (3.92)$$

$\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали к  $\partial Q$ , а  $\mathbf{E}_n = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$ . Аналогично, с учетом направления нормали  $\mathbf{n}$  получим

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus Q} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \operatorname{grad} v dx = - \int_{\partial Q} v (\varepsilon \mathbf{E}_n) ds. \quad (3.93)$$

Суммируя (3.92) и (3.93), выводим

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \operatorname{grad} v dx = \int_{\partial Q} v [\varepsilon \mathbf{E}_n] ds.$$

Здесь  $[\cdot]$  – разность следов с разных сторон  $\partial Q$ . Используя (3.89), запишем (см. [3], с. 9)

$$-i\omega \int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \operatorname{grad} v dx = \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \operatorname{grad} v dx = \int_{\mathbb{R}^3} v \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} dx = 0.$$

Из последнего следует, что

$$\int_{\partial Q} v[\varepsilon \mathbf{E}_{\mathbf{n}}] ds = 0$$

для всех  $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ , откуда заключаем, что

$$[\varepsilon \mathbf{E}_{\mathbf{n}}]_{\partial Q} = 0 \quad (3.94)$$

в смысле следов из  $H^{-1/2}(\partial Q)$  [65].

Введем скалярную функцию

$$p := \operatorname{div} \mathbf{V} = \operatorname{div} \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy. \quad (3.95)$$

Так как  $\mathbf{J} \in \mathbf{L}_2(Q)$ , то  $p \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$ .

Вычисляя  $\operatorname{div}$  от (3.50) и (3.51), получим

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \mathbf{E}_0 + k_e^2 \operatorname{div} \mathbf{V} + \Delta \operatorname{div} \mathbf{V} = \operatorname{div} \mathbf{E}_0 + (\Delta + k_e^2)p.$$

Введем функцию  $f(x) = \operatorname{div} \mathbf{E}(x) - \operatorname{div} \mathbf{E}_0(x)$ ,  $f \in L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ . Для  $p$  получим уравнение

$$(\Delta + k_e^2)p(x) = f(x), \quad x \in Q \cup (\mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q})$$

с условием  $[p]_{\partial Q} = 0$  в смысле следов из  $H^{1/2}(\partial Q)$ .

Умножим (3.50) и (3.51) скалярно на  $\mathbf{n}$ :

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n} + k_e^2 \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy \mathbf{n} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \operatorname{div} \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy.$$

С каждой стороны  $\partial Q$  выполняется равенство

$$\varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}|_{\partial Q} = \varepsilon \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n}|_{\partial Q} + k_e^2 \varepsilon \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}|_{\partial Q} + \varepsilon \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial Q}.$$

Из (3.94) выводим

$$0 = [\varepsilon]_{\partial Q} \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_0|_{\partial Q} + k_e^2 [\varepsilon]_{\partial Q} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}|_{\partial Q} + \left[ \varepsilon \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\partial Q}. \quad (3.96)$$

Следовательно,

$$\left[ \varepsilon \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\partial Q} = \varphi|_{\partial Q}, \quad \varphi \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3),$$

где  $\varphi|_{\partial Q} = -[\varepsilon]_{\partial Q} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n}|_{\partial Q} - k_e^2 [\varepsilon]_{\partial Q} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}|_{\partial Q}$ .

Рассмотрим область  $Q_1 = B \setminus \bar{Q}$ , где  $B$  – открытый шар с центром в нуле такой, что  $\bar{Q} \subset B$  и  $\Omega_\delta \subset \mathbb{R}^3 \setminus B$ . Введем обозначения  $p_0 = p|_{\partial B}$  и  $\varphi_0 = \varphi|_{\partial Q}$ . Очевидно,  $p_0 \in C^\infty(\partial B)$ . Таким образом, получим краевую задачу для  $p \in H^1(B)$ :

$$\begin{cases} (\Delta + k_e^2)p = f, & x \in Q \cup Q_1, \\ [p]_{\partial Q} = 0, & \left[ \varepsilon \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\partial Q} = \varphi_0, \quad p|_{\partial B} := p_0. \end{cases} \quad (3.97)$$

Известно ([22], с. 243, 246), что для решения  $p$  такой краевой задачи верно включение  $p \in H^2(Q) \cap H^2(Q_1)$ , откуда получим

$$\mathbf{E}, \mathbf{J} \in H^1(Q) \cap H^1(Q_1),$$

(в общем случае однако  $\mathbf{E} \notin H^1(B)$ ).

Вычислим частные производные потенциала  $\mathbf{V}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy = - \int_Q \left( \frac{\partial}{\partial y_i} G(x, y) \right) \mathbf{J}(y) dy = \\ &= \int_Q G(x, y) \frac{\partial}{\partial y_i} (\mathbf{J}(y)) dy - \int_{\partial Q} G(x, y) \mathbf{J}(y) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_i) ds \end{aligned}$$

с ортами  $\mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Так как  $\frac{\partial}{\partial y_i} (\mathbf{J}(y)) \in \mathbf{L}_2(Q)$ , то

$$\int_Q G(x, y) \frac{\partial}{\partial y_i} (\mathbf{J}(y)) dy \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3).$$

Введем

$$\psi = (\varepsilon_r - 1) \mathbf{E}|_{\partial Q} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_i),$$

здесь  $\mathbf{E}|_{\partial Q}$  – след функции  $\mathbf{E} \in H^1(Q)$ , вычисленный с внутренней стороны поверхности  $\partial Q$ . Тогда  $\psi \in H^{1/2}(\partial Q)$ .

Рассмотрим потенциал простого слоя

$$u(x) := \int_{\partial Q} G(x, y) \psi(y) ds.$$

Введем обозначение

$$\psi_0 := \mathcal{A}\psi = \int_{\partial Q} G(x_0, y) \psi(y) ds, \quad x_0 \in \partial Q.$$

Тогда  $\mathcal{A} : H^{1/2}(\partial Q) \rightarrow H^{3/2}(\partial Q)$  – эллиптический ПДО порядка  $-1$  [17].

Для функции  $u$  сформулируем следующие краевые задачи:

$$\begin{cases} (\Delta + k_e^2)u = 0, & x \in Q, \\ u|_{\partial Q} = \psi_0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} (\Delta + k_e^2)u = 0, & x \in Q_1, \\ u|_{\partial Q} = \psi_0, \quad u|_{\partial V} = p_0, \end{cases}$$

причем  $\psi_0 \in H^{3/2}(\partial Q)$ . В этом случае (см. [24]) верно включение:

$$u \in H^2(Q) \cap H^2(Q_1),$$

откуда следует  $\mathbf{V} \in H^3(Q) \cap H^3(Q_1)$ .

Из выражения магнитного поля (3.54) следует, что  $\mathbf{H} \in H^2(Q) \cap H^2(Q_1)$ , которое и приводит [52] к окончательному результату о гладкости магнитного поля:

$$\mathbf{H} \in C^{0,\alpha}(\bar{Q}) \cap C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus (Q \cup \Omega_\delta)), \quad 0 < \alpha < 1/2.$$

Выполним теперь дополнительное сглаживание вектор-функции  $\mathbf{E}$ .

Рассмотрим снова задачу (3.97), но уже со сглаженными данными  $\varphi \in H_{\text{loc}}^3(\mathbb{R}^3)$  (в силу (3.96)) и  $f \in H^1(Q) \cap H^1(Q_1)$ .

Так как  $Q$  и  $Q_1$  – ограниченные области с гладкой границей, то существуют [21, 29] функции Грина краевых задач

$$\begin{cases} (\Delta - 1)G_1(x - y) = -\delta(x - y), & x, y \in Q, \\ \left. \frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial Q} = 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} (\Delta - 1)G_2(x - y) = -\delta(x - y), & x, y \in Q_1, \\ \left. \frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial Q_1} = 0, \end{cases}$$

причем такие функции Грина имеют особенность вида

$$\frac{1}{4\pi|x - y|} e^{-|x - y|}.$$

Применим вторую формулу Грина в области  $Q$  с функциями  $p \in H^2(Q)$  и  $G_1$ . Учитывая однородное условие для  $G_1$  на  $\partial Q$ , получим

$$\begin{aligned} \int_{\partial Q} G_1(x, y) \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} ds &= \int_Q (G_1(x, y) \Delta p(y) - p(y) \Delta_y G_1(x, y)) dy = \\ &= \int_Q \left( G_1(x, y) (-k_e^2 p(y) + f(y)) - p(y) (G_1(x, y) - \delta(x - y)) \right) dy = \\ &= p(x) + \int_Q G_1(x, y) (f(x) - (1 + k_e^2) p(y)) dy. \end{aligned}$$

Выполняя аналогичные выкладки в области  $Q_2$  с тем же направлением вектора нормали  $\mathbf{n}$  на  $\partial Q_1$  получаем представления

$$p(x) = - \int_Q G_1(x, y) f_0(y) dy + \int_{\partial Q} G_1(x, y) \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} ds, \quad x \in Q, \quad (3.98)$$

и

$$p(x) = - \int_{Q_1} G_2(x, y) f_0(y) dy - \int_{\partial Q_1} G_2(x, y) \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} ds, \quad x \in Q_1, \quad (3.99)$$

где  $f_0(x) = f(x) - (k_e^2 + 1)p(x) \in H^1(Q) \cap H^1(Q_1)$ .

Введем  $\chi(x_0) := \varepsilon(x_0) \left. \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial Q} (x_0)$ ,  $x_0 \in \partial Q$ , где след берется изнутри области  $Q$ . Так как  $\left[ \varepsilon \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\partial Q} = \varphi_0$  (см. (3.97)), то

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial Q} (x_0) = \frac{1}{\varepsilon(x_0)} \chi(x_0),$$

если брать след изнутри  $Q$  и

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial Q} (x_0) = \frac{1}{\varepsilon_e} \chi(x_0) + \frac{1}{\varepsilon_e} \varphi_0(x_0),$$

если брать след извне  $Q$  (из  $Q_1$ ). Используя условие  $[p]_{\partial Q} = 0$ , выводим

$$\mathcal{L}\chi := \int_{\partial Q} \left( \frac{1}{\varepsilon(y)} G_1(x_0, y) + \frac{1}{\varepsilon_e} G_2(x_0, y) \right) \chi(y) ds = \eta(x_0), x_0 \in \partial Q,$$

где  $\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$  и

$$\begin{aligned} \eta_1(x_0) &= \int_Q G_1(x_0, y) f_0(y) dy - \int_{Q_1} G_2(x_0, y) f_0(y) dy, \\ \eta_2(x_0) &= \int_{\partial B} G_2(x_0, y) \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial B} (y) ds, \quad \eta_3(x_0) = \int_{\partial Q} \frac{1}{\varepsilon_e} G_2(x_0, y) \varphi_0(y) ds. \end{aligned}$$

В силу  $f \in H^1(Q)$  имеем

$$\int_Q G_1(x, y) f(y) dy \in H^3(Q).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_Q G_1(x, y) f(y) dy &= \int_Q G_1(x, y) \frac{\partial}{\partial y_i} f(y) dy - \\ &\quad - \int_{\partial Q} G_1(x, y) f(y) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_i) dy = I_1 - I_2. \end{aligned}$$

Так как  $\frac{\partial}{\partial y_i} f(y) \in L_2(Q)$ , то  $I_1 \in H^2(Q)$ . Из свойств оператора типа потенциала простого слоя и того, что  $f|_{\partial Q} \in H^{1/2}(\partial Q)$  получаем также как и выше, что  $I_2 \in H^2(Q)$ .

Аналогично доказывается с учетом  $f \in H^1(Q_1)$ , что

$$\int_{Q_1} G_2(x, y) f(y) dy \in H^3(Q_1).$$

Для следа  $\eta_1$  на  $\partial Q$  верно [53] включение  $\eta_1|_{\partial Q} \in H^{5/2}(\partial Q)$ . Так как  $\partial Q \cap \partial B = \emptyset$ , то  $\eta_2 \in C^\infty(\partial Q)$ . Так как  $\varphi \in H_{\text{loc}}^3(\mathbb{R}^3)$ , то  $\varphi_0 \in H^{5/2}(\partial Q)$  и  $\eta_3 \in H^{7/2}(\partial Q)$ . Следовательно,  $\eta \in H^{5/2}(\partial Q)$ .

Тогда уравнение

$$\mathcal{L}\chi = \eta$$



с эллиптическим ПДО порядка  $-1$  имеет решение  $\chi \in H^{3/2}(\partial Q)$ . Подставляя  $\chi$  в (3.98) и (3.99) находим  $p \in H^3(Q) \cap H^3(Q_1)$ .

Таким образом,  $\mathbf{E} \in H^2(Q) \cap H^2(Q_1)$ , а в силу теорем вложения пространств Соболева и гладкости поля в  $\mathbb{R}^3 \setminus (\bar{Q} \cup \Omega_\delta)$  имеем

$$\mathbf{E} \in C^{0,\alpha}(\bar{Q}) \cap C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus (Q \cup \Omega_\delta)), \quad 0 < \alpha < 1/2.$$

□

Теперь докажем утверждение об эквивалентности краевой задачи и системы интегро-дифференциальных уравнений.

**Теорема 3.5.** [131, 136] *Если задача дифракции (3.10)–(3.14) имеет квазиклассическое решение  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ , то вектор-функции  $\mathbf{E}, \mathbf{u}$  удовлетворяют системе (3.55). Обратно, если пара  $(\mathbf{E}, \mathbf{u}) \in \mathbf{L}_2(Q) \times W(\bar{\Omega})$  является решением системы (3.55) с гладкой правой частью  $\mathbf{E}_0(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ , то поле  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ , определенное согласно (3.50), (3.51) и (3.54), есть квазиклассическое решение исходной задачи (3.10)–(3.14).*

*Доказательство.* 1. Необходимая часть теоремы верна в силу вывода системы интегро-дифференциальных уравнений; докажем ее достаточную часть.

2. Из Теоремы 3.4 следует, что выполнены условия гладкости

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^\infty(Q) \cap C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus (\bar{Q} \cup \bar{\Omega})) \cap C^{0,\alpha}(\bar{Q}) \cap C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus (\bar{Q} \cup \bar{\Omega})).$$

Из гладкости падающего поля и первого слагаемого разложения (3.50) вблизи экрана  $\Omega$  (тело и экран не пересекаются) следует [17] включение

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in \bigcap_{\delta>0} C(\bar{P}^+ \setminus \partial\Omega_\delta) \bigcap_{\delta>0} C(\bar{P}^- \setminus \partial\Omega_\delta).$$

Сравнивая представление (3.50) полного электрического поля и уравнение (3.53) на  $\Omega$ , заключаем теперь, что условие Дирихле выполнено во внутренних точках экрана.

Рассмотрим представления (3.50) и (3.54). Прямой подстановкой полей в систему (3.9) убеждаемся, что уравнения Максвелла удовлетворяются в классическом смысле: дифференцируемость полей обеспечивается результатами теоремы 3.4, эллиптичностью интегро-дифференциального оператора в  $Q$  и гладкостью тензора диэлектрической проницаемости.

Так как поле выражается через объемный и поверхностный потенциалы, а вне рассеивателей ядра соответствующих интегралов бесконечно дифференцируемы, то условия излучения на бесконечности (3.14) также выполнены (подробная проверка проводится так же, как и в скалярной задаче дифракции, см. Теорему 1.4).

Проверим условие конечности энергии. Если  $\mathbf{E} \in \mathbf{L}_2(Q)$ , то объемный потенциал  $\mathbf{V} \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$  и, следовательно,

$$\mathbf{E}_2 = (k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y)(\widehat{\varepsilon}_r(y) - \widehat{\mathbf{I}})\mathbf{E}(y)dy \in \mathbf{L}_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3).$$

Так как  $\mathbf{u} \in W = \{\mathbf{u} \in \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}) : \text{div } \mathbf{u} \in \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega})\}$ , то

$$\mathbf{E}_1 = \text{grad div} \int_{\Omega} G(x, y)\mathbf{u}(y)ds_y = \text{grad} \int_{\Omega} G(x, y) \text{div } \mathbf{u}(y)ds_y \in H_{\text{loc}}^0(\mathbb{R}^3).$$

Наконец,  $\mathbf{E} \in \mathbf{L}_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$  и условие (3.13) выполнено.

Из представления (3.54) следует, что  $\mathbf{V} \in C^1(\mathbb{R}^3)$  [6] и, следовательно, магнитное поле  $\mathbf{H}$  удовлетворяет условию сопряжения на  $\partial Q$ .

Проверим теперь первое условие в (3.11). Так как падающее электрическое поле  $\mathbf{E}_0$  и компонента  $\mathbf{E}_1$  непрерывны при переходе через границу  $\partial Q$  (ведь  $\overline{Q} \cap \overline{\Omega} = \emptyset$ ), то

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}_\tau]_{\partial Q} &= \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \text{div} \int_Q G(x, y)(\varepsilon(x) - 1)\mathbf{E}(x)dx \right]_{\partial Q} = \\ &= \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \text{div } Q \right]_{\partial Q} = \left[ \frac{\partial p}{\partial \tau} \right]_{\partial Q}. \end{aligned}$$

Как показано в Теореме 3.4, имеет место включение

$$p = \text{div} \int_Q G(x, y)(\varepsilon_r(y) - 1)\mathbf{E}(y)dy \in H^3(Q) \cap H^3(Q_1).$$

Тогда  $\frac{\partial p}{\partial \tau} \Big|_{\partial Q} \in H^{3/2}(\partial Q)$ .

Так как вложение  $H^{3/2}(\partial Q) \subset C^{0,1/2}(\partial Q)$  непрерывно [52], то, умножая (3.50) и (3.51) скалярно на вектор  $\tau$  и переходя в преобразованных равенствах к пределу при  $x \rightarrow \partial Q$ , находим, что  $[\mathbf{E}_\tau]_{\partial Q} = 0$ .  $\square$

Из Теорем 3.1 и 3.5 следует

**Теорема 3.6.** [127, 131, 136] Пусть в  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}$  выполнены условия (3.71), а для тензора относительной диэлектрической проницаемости  $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)$  в  $\overline{Q}$  выполнены условия (3.72), (3.73)–(3.75). Пусть, кроме того,  $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) = \varepsilon(x)\widehat{\mathbf{I}}$ , если  $\text{Im } \varepsilon_{ij} = 0$ . Тогда матричный оператор  $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$  является непрерывно обратимым, а задача дифракции имеет единственное решение.

*Доказательство.* В теореме 3.3 установлено, что оператор  $\widehat{\mathcal{L}}$  является фредгольмовым с нулевым индексом. Следовательно, теперь достаточно установить его инъективность.

Рассмотрим уравнение  $\widehat{\mathcal{L}}(\mathbf{E}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$ . В силу Теоремы 3.5 полное электромагнитное поле, отвечающее решению этого однородного уравнения, есть квазиклассическое решение однородной краевой задачи (3.10)–(3.14)  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{H}_0 \equiv 0$  в  $\mathbb{R}^3$ . Как показано в Теореме 3.1, эта задача имеет лишь тривиальное решение  $\mathbf{E} = \mathbf{H} \equiv 0$  в  $\mathbb{R}^3$ , откуда следует, что  $\mathbf{u} \equiv 0$  на  $\Omega$ .  $\square$

### 3.4 Формулировка метода Галеркина для системы интегро-дифференциальных уравнений в векторной задаче дифракции на системе непересекающихся тел и экранов

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение задачи дифракции электромагнитной волны на системе непересекающихся тел и экранов:

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{J}(x) - (k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y)\mathbf{J}(y)dy + \\ - (k_e^2 + \text{grad div}) \int_{\Omega} G(x, y)\mathbf{u}(y)ds_y = \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q, \\ \left( - (k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y)\mathbf{J}(y)dy - \right. \\ \left. - (k_e^2 + \text{grad div}) \int_{\Omega} G(x, y)\mathbf{u}(y)ds_y \right)_{\tau} = \mathbf{E}_{0,\tau}(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Будем использовать и краткую форму записи уравнения (3.100):

$$\widehat{\mathcal{L}}\mathbf{U} = \mathbf{f}. \quad (3.101)$$

Здесь  $\mathbf{U} = (\mathbf{J}, \mathbf{u})^T$  – искомое решение,  $\mathbf{f} = (\mathbf{E}_{0,Q}, \mathbf{E}_{0,\tau})^T$  – заданная правая часть уравнения, а  $\widehat{\mathcal{L}}$  – матричный оператор системы,

$$\widehat{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{A}} & \widehat{\mathcal{K}}_1 \\ \widehat{\mathcal{K}}_2 & \widehat{\mathcal{S}} \end{pmatrix}, \quad (3.102)$$

который рассматривается, как отображение из пространства  $\mathbf{X} = \mathbf{L}_2(Q) \times W(\overline{\Omega})$  в антидвойственное пространство  $\mathbf{X}' = \mathbf{L}_2(Q) \times W'(\Omega)$ .

Приближенное решение уравнения (3.101) будем обозначать символом  $\mathbf{U}_m = (\mathbf{J}_{m_0}, \mathbf{u}_{m_1})^T$ , а его компоненты представим в виде линейных комбинаций

$$\mathbf{J}_{m_0}(x) = \sum_{k=1}^{m_0} c_k^0 \mathbf{v}^{(0)}(x), \quad \mathbf{u}_{m_1}(x) = \sum_{k=1}^{m_1} c_k^1 \mathbf{v}^{(1)}(x) \quad (3.103)$$

базисных функций. Можно также записать

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_m &= \sum_{k=1}^m c_k \mathbf{v}_k(x), \quad c_k = c_k^0, \quad \mathbf{v}_k = (\mathbf{v}_k^{(0)}(x), 0)^T \text{ при } k \leq m_0, \\ c_k &= c_{k-m_0}^1, \quad \mathbf{v}_k = (0, \mathbf{v}_{k-m_0}^{(1)}(x))^T \text{ при } k > m_0. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Неизвестные коэффициенты найдем согласно формулировке (1.62) метода Галеркина из системы линейных алгебраических уравнений

$$\langle \widehat{\mathcal{L}}\mathbf{U}_m, \mathbf{v}_k \rangle = \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_k \rangle \quad \forall \mathbf{v}_k \in \mathbf{X}_m. \quad (3.105)$$

Здесь  $\mathbf{X}_m \subset \mathbf{X}$  – конечномерные подпространства, определяемые следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_m &= \mathbf{X}_{m_0}^0 \times \mathbf{X}_{m_1}^1, \quad \mathbf{X}_{m_0}^0 = \text{span}\{\mathbf{v}_1^{(0)}, \dots, \mathbf{v}_{m_0}^{(0)}\} \subset \mathbf{L}_2(Q), \\ \mathbf{X}_{m_1}^1 &= \text{span}\{\mathbf{v}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{v}_{m_1}^{(1)}\} \subset W(\overline{\Omega}). \end{aligned} \quad (3.106)$$

Через  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  в (3.105) обозначена полуторалинейная форма, определяющая антидвойственное спаривание пространств  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{X}'$ .

Матрицу  $\mathbf{A}$  и столбец  $\mathbf{b}$  системы линейных алгебраических уравнений запишем [129, 130] в блочном виде с учетом вида матричного оператора  $\widehat{\mathcal{L}}$ ,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A^{00} & A^{01} \\ A^{10} & A^{11} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b^0 \\ b^1 \end{bmatrix}. \quad (3.107)$$

Выпишем вид матричных элементов  $A_{ij}^{kl}$ , учитывая определение всех операторов и соотношение антидвойственности в выбранных пространствах:

$$\begin{aligned} A_{ij}^{00} &= \int_Q \left( \widehat{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{v}_j^{(0)}(x) - (k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) \mathbf{v}_j^{(0)}(y) dy \right) \mathbf{v}_i^{(0)} dx, \\ A_{ij}^{01} &= \int_Q \left( -(k_e^2 + \text{grad div}) \int_{\Omega} G(x, y) \mathbf{v}_j^{(1)}(y) ds_y \right) \mathbf{v}_i^{(0)} dx, \\ A_{ij}^{10} &= \int_{\Omega} \left( -(k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) \mathbf{v}_j^{(0)}(y) dy \right) \mathbf{v}_i^{(1)} ds_x, \\ A_{ij}^{11} &= \int_{\Omega} \left( -(k_e^2 + \text{grad div}) \int_{\Omega} G(x, y) \mathbf{v}_j^{(1)}(y) ds_y \right) \mathbf{v}_i^{(1)} ds_x, \end{aligned} \quad (3.108)$$

Выпишем также формулы для элементов столбца  $\mathbf{b}$  :

$$b_i^0 = \int_Q \mathbf{E}_0(x) \mathbf{v}_i^{(0)}(x) dx, \quad b_i^1 = \int_{\Omega_1} \mathbf{E}_{0,\tau}(x) \mathbf{v}_i^{(1)}(x) ds_x, \quad (3.109)$$

Для вычисления интегралов по поверхности экрана необходимо учесть определения поверхностной дивергенции и градиента [112]

$$\operatorname{div}_\tau \mathbf{f} = g^{\mu\nu} (\partial_\mu \mathbf{f}) \cdot (\partial_\nu x), \quad \operatorname{grad}_\tau \varphi = g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu x. \quad (3.110)$$

Здесь  $\mu, \nu \in \{1, 2\}$ ,  $\partial_\mu \mathbf{f} = (\partial_{t_\mu} f_1, \partial_{t_\mu} f_2, \partial_{t_\mu} f_3)^T$ ,  $\partial_\nu x = (\partial_{t_\nu} x_1, \partial_{t_\nu} x_2, \partial_{t_\nu} x_3)^T$ , а  $g^{\mu\nu}$  – тензор, обратный к метрическому тензору

$$g_{\mu\nu} = (\partial_{t_\mu} x \cdot \partial_{t_\nu} x) \equiv (\partial_\mu x \cdot \partial_\nu x). \quad (3.111)$$

Следовательно, элементы столбца  $b^1$  вычисляются по формулам

$$b_i^1 = \int_D \mathbf{E}^0(x(t)) \cdot \mathbf{v}_i^{(0)}(x(t)) \sqrt{g(t)} dt, \quad (3.112)$$

где  $D$  – область параметров  $(t_1, t_2) = t$ . Далее,

$$A_{ij}^{11} = \int_D \left( g^{\mu\nu} \partial_\mu (A g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \mathbf{v}_j^{(1)}(t) \partial_\beta x) \partial_\nu x - k_e^2 A \mathbf{v}_j^{(1)}(t) \right) \cdot \mathbf{v}_i^{(1)}(x(t)) \sqrt{g(t)} dt. \quad (3.113)$$

Здесь  $A \mathbf{v}_j^{(1)}(t) = \int_D G(x(t), x(s)) \mathbf{v}_j^{(1)}(x(s)) \sqrt{g(s)} ds$ .

Применение формулы (3.113) в случае непустого пересечения носителей базисной и тестовой функции не обеспечивает достаточной точности вычисления при небольшом числе узлов квадратурных формул.

Отметим, что помимо внесения операции  $\operatorname{div}$  в (3.113) знак интеграла, можно также перебросить операцию  $\operatorname{grad}$  на тестовую функцию, так как ее нормальная компонента тривиальна на границе носителя. Следователь-

но, (3.113) можно записать в виде [126]

$$\begin{aligned}
A_{ij}^{11} &= -k_e^2 \int_{\Omega} \int_{\Omega} G(x, y) \mathbf{v}_j^{(1)}(y) \mathbf{v}_i^{(1)}(x) ds_y ds_x + \\
&\quad + \int_{\Omega} \int_{\Omega} G(x, y) \operatorname{div} \mathbf{v}_j^{(1)}(y) \operatorname{div} \mathbf{v}_i^{(1)}(x) ds_y ds_x = \\
&= \int_D \int_D G(x(t), y(s)) \sqrt{g(t)} \sqrt{g(s)} \left( -k_0^2 \mathbf{v}_j^{(1)}(y(s)) \cdot \mathbf{v}_i^{(1)}(x(t)) + \right. \\
&\quad \left. + g^{\alpha\beta}(s) \partial_{\alpha} \mathbf{v}_j^{(1)}(y(s)) \partial_{\beta} \mathbf{x}(s) g^{\mu\nu}(t) \partial_{\mu} \mathbf{v}_i^{(1)}(x(t)) \partial_{\nu} \mathbf{x}(t) \right) dt ds.
\end{aligned} \tag{3.114}$$

### 3.5 Выбор базисных функций на двух- и трехмерных рассеивателях. Свойство аппроксимации

1. *Кусочно-постоянные базисные функции на объемном носителе.*

Простейший вариант аппроксимирующих функций представляют кусочно-постоянные функции. Пусть  $Q$  – область произвольной формы в  $\mathbb{R}^3$ . Введем параллелепипед  $Q'$ , содержащий область  $Q$ , и конечные элементы (см. параграф 1.6)

$$Q_{i_1 i_2 i_3} = Q \cap Q'_{i_1 i_2 i_3}, \quad i_k = 1, \dots, l_k.$$

Определим функции  $v_i^0$ :

$$v_i^0(x) = v_{i_1 i_2 i_3}^0(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \cap Q_{i_1 i_2 i_3}, \\ 0, & x \notin Q \cap Q_{i_1 i_2 i_3}, \end{cases} \tag{3.115}$$

предполагая всегда, что носители функций имеют положительный объем.

Тогда приближение к решению  $\mathbf{J}$  (3.100) запишется в виде

$$\mathbf{J}_{m_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^1 \\ \mathbf{J}^2 \\ \mathbf{J}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^l b_i^1 v_i^0(x) \\ \sum_{i'=1}^l b_{i'}^2 v_{i'}^0(x) \\ \sum_{i''=1}^l b_{i''}^3 v_{i''}^0(x) \end{bmatrix}, \tag{3.116}$$

или в краткой форме записи:

$$\mathbf{J}_{m_1} = \sum_{i=1}^{m_0} c_i^1 \mathbf{v}_i^{(0)}(x), \quad (3.117)$$

где  $m_0 = 3l$ , а  $\mathbf{v}_i^{(0)}(x)$  – базисные вектор-функции вида  $(v_i^0(x), 0, 0)^T$ ,  $(0, v_i^0(x), 0)^T$  и  $(0, 0, v_i^0(x))^T$ .

**Лемма 3.3.** [127] *Финитные кусочно-постоянные функции  $\mathbf{v}_i^0$  (3.115) удовлетворяют условию аппроксимации в векторном пространстве  $\mathbf{L}_2(Q)$ .*

*Доказательство.* Утверждение следует из определения пространства  $\mathbf{L}_2(Q) = L_2(Q) \times L_2(Q) \times L_2(Q)$  и условия аппроксимации для скалярных функций  $v_i^1(x)Q$  в  $L_2(Q)$ , установленного в Лемме 1.1 параграфа 1.6.  $\square$

2. *Базисные функции на объемном носителе, кусочно-линейные по одной из координат.*

Второй способ аппроксимации более удобен с точки зрения вычисления матричных элементов СЛАУ в методе Галеркина. Его идея состоит в следующем. Повторяя рассуждения, изложенные на с. 78, будем считать, что  $Q \subset Q'$ , а  $Q'$  – параллелепипед. Разобьем  $Q'$  как в параграфе 1.6 параллелепипедами  $Q'_{i_1 i_2 i_3}$ . Введем обозначения

$$h^1 := |x_{1,i_1} - x_{1,i_1-1}|, \quad h^2 := |x_{2,i_2} - x_{2,i_2-1}|, \quad h^3 := |x_{3,i_3} - x_{3,i_3-1}|, \quad (3.118)$$

и определим три набора функций, кусочно-линейных по одной из декартовых координат, и постоянных по двум другим:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{i_1 i_2 i_3}^1(x) &= \begin{cases} 1 - \frac{1}{h^1} |x_1 - x_{1,i_1}|, & x \in Q \cap \overline{Q'_{i_1, i_2, i_3} \cup Q'_{i_1+1, i_2, i_3}}, \\ 0, & x \notin Q \cap \overline{Q'_{i_1, i_2, i_3} \cup Q'_{i_1+1, i_2, i_3}}, \end{cases} \\ \tilde{v}_{i_1 i_2 i_3}^2(x) &= \begin{cases} 1 - \frac{1}{h^2} |x_2 - x_{2,i_2}|, & x \in Q \cap \overline{Q'_{i_1, i_2, i_3} \cup Q'_{i_1, i_2+1, i_3}}, \\ 0, & x \notin Q \cap \overline{Q'_{i_1, i_2, i_3} \cup Q'_{i_1, i_2+1, i_3}}, \end{cases} \\ \tilde{v}_{i_1 i_2 i_3}^3(x) &= \begin{cases} 1 - \frac{1}{h^3} |x_3 - x_{3,i_3}|, & x \in Q \cap \overline{Q'_{i_1, i_2, i_3} \cup Q'_{i_1, i_2, i_3+1}}, \\ 0, & x \notin Q \cap \overline{Q'_{i_1, i_2, i_3} \cup Q'_{i_1, i_2, i_3+1}}, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.119)$$



Компоненты приближенного решения  $\mathbf{J}_{m_0}$  могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{J}^1(x) &= \sum_{i_1=1}^{n_1-1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{i_3=1}^{n_3} b_{i_1 i_2 i_3}^1 \tilde{v}_{i_1 i_2 i_3}^1(x), \\ \mathbf{J}^2(x) &= \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2-1} \sum_{i_3=1}^{n_3} b_{i_1 i_2 i_3}^2 \tilde{v}_{i_1 i_2 i_3}^2(x), \\ \mathbf{J}^3(x) &= \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{i_3=1}^{n_3-1} b_{i_1 i_2 i_3}^3 \tilde{v}_{i_1 i_2 i_3}^3(x).\end{aligned}\tag{3.120}$$

Для представления векторного приближенного решения  $\mathbf{J}_{m_0}$  будем использовать краткую форму записи

$$\mathbf{J}_{m_0} = \sum_{i=1}^{m_0} c_i^1 \mathbf{v}_i^{(0)}(x),\tag{3.121}$$

где  $m_0 = l_1 + l_2 + l_3$ , а  $\mathbf{v}_i^{(0)}(x)$  – базисные вектор-функции вида  $(\tilde{v}_{i_1, i_2, i_3}^1(x), 0, 0)^T$ ,  $(0, \tilde{v}_{i_1, i_2, i_3}^2(x), 0)^T$  и  $(0, 0, \tilde{v}_{i_1, i_2, i_3}^3(x))^T$ .

В Лемме 1.1 параграфа 1.6 показано, что условию аппроксимации в  $L_2(Q)$  удовлетворяют кусочно-постоянные функции  $v_i^0$ . Эти функции в свою очередь могут быть сколь угодно точно приближены функциями  $\tilde{v}_{i_1, i_2, i_3}^k(x)$ . Действительно, пусть  $v_i^0$  заданы, например, на равномерном разбиении куба  $Q = [0; 1]^3$  элементами  $Q'_i$  с ребром  $h' = n^{-1}$ . Введем на этом же кубе подчиненное равномерное разбиение элементами  $Q''_j$  с ребром  $h'' = n^{-2}$ . Пусть  $\varphi = v_j^0$  – кусочно-постоянная функция с носителем в одном из кубов  $Q'_j$ , а  $\psi = \sum_i \tilde{v}_i^1(x)$  – линейная комбинация кусочно-линейных функций, таких что  $\text{supp}(\tilde{v}_i^1) \subset Q'_j$ . Тогда  $\|\varphi - \psi\|_{L_2(Q)} \leq \sqrt{2}n^{-2}$ .

Таким образом, верна

**Лемма 3.4.** *Введенные финитные функции  $\mathbf{v}_i^{(0)}$  удовлетворяют условию аппроксимации в векторном пространстве  $\mathbf{L}_2(Q)$ .*

### 3. Функции RWG на плоских экранах.

Рассмотрим вопрос об аппроксимации вектор-функций на идеально проводящем плоском экране  $\Omega$  (построение базисных функций на неплоских

экранах подробно описано в следующем параграфе). Для простоты рассуждений будем предполагать, что  $\Omega$  – прямоугольный экран, расположенный в плоскости  $x_1 0 x_2$  :

$$\Omega = \{x' = (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 : a_1 < x_1 < a_2, b_1 < x_2 < b_2\}. \quad (3.122)$$

Разобьем  $\Omega$  на прямоугольные конечные элементы

$$\omega_j = \omega_{j_1 j_2} = \{x' : x_{k, j_k} < x_k < x_{k, j_k + 1}\}, \quad k = 1, 2, \quad j_k = 0, \dots, n_k - 1, \quad (3.123)$$

где

$$x_{k, j_k} = a_k + h_k j_k, \quad h_k = (b_k - a_k)/n_k, \quad k = 1, 2, \quad (3.124)$$

а затем разобьем все  $\omega_j$  диагоналями фиксированного направления на пары треугольников.

Рассмотрим совокупность  $\Gamma = \{\gamma_j\}$  всех ребер, не лежащих на границе  $\partial\Omega$ , и свяжем с каждым таким ребром финитную вектор-функцию  $\mathbf{v}_j^{(1)}(x)$  с носителем на паре смежных треугольников  $\sigma_j^+, \sigma_j^-$ , имеющих общее ребро  $\gamma_j$ . Обозначим длину ребра  $\gamma_j$  и площади треугольников  $\sigma_j^\pm$  через  $l(\gamma_j)$  и  $s(\sigma_j^\pm)$  соответственно. Пусть точки  $(x_{1, j_1}^+, x_{2, j_2}^+, 0) \in \sigma_j^+$  и  $(x_{1, j_1}^-, x_{2, j_2}^-, 0) \in \sigma_j^-$  – вершины соответствующих треугольников, не лежащие на ребре  $\gamma_j$ . Функции RWG определяются следующим образом:

$$\mathbf{v}_j^{(1)}(x') = \begin{cases} (x_1 - x_{1, j_1}^+, x_2 - x_{2, j_2}^+) \frac{l(\gamma_j)}{s(\sigma_j^+)}, & x' \in \sigma_j^+, \\ (x_{1, j_1}^- - x_1, x_{2, j_2}^- - x_2) \frac{l(\gamma_j)}{s(\sigma_j^-)}, & x' \in \sigma_j^-, \\ (0, 0), & x' \notin \sigma_j^+ \cup \sigma_j^-. \end{cases} \quad (3.125)$$

В следующей лемме доказывается свойство предельной плотности подпространств  $\mathbf{X}_{m_1}^1 = \text{span}\{\mathbf{v}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{v}_{m_1}^{(1)}\}$  в пространстве  $W(\bar{\Omega})$ .

**Лемма 3.5.** [127, 135] Функции  $\mathbf{v}_j^{(1)}(x')$  принадлежат пространству  $W(\bar{\Omega})$  и удовлетворяют условию аппроксимации.

*Доказательство.* Доказательство сводится к проверке двух утверждений: о принадлежности функций RWG указанному пространству и о полноте функций RWG в  $W(\bar{\Omega})$ .

Второе утверждение проверено в [47].

Проведем подробное доказательство первого, показав, что финитные вектор-функции RWG (будем обозначать их теперь так:  $\mathbf{v}_j^{(1,0)}(t_1, t_2)$ ) принадлежат пространству  $W = W(\bar{\Omega})$ , то есть

$$\mathbf{v}_j^{(1,0)}, \operatorname{div} \mathbf{v}_j^{(1,0)} \in \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}). \quad (3.126)$$

Поясним сначала, что означает принадлежность функции и ее дивергенции пространству  $\tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega})$ . Из определения функций RWG по формулам (3.125) следует, что обе компоненты функций – кусочно линейные (точнее, кусочно-полиномиальные первого порядка) функции, имеющие на подобластях  $\sigma_j^+, \sigma_j^-$  постоянные производные. Поэтому всюду вне границы  $\partial\sigma_j$  носителя  $\bar{\sigma}_j = \operatorname{supp} \mathbf{v}_j^{(1,0)}$  и ребра  $\gamma_j$  дивергенция  $\operatorname{div} \mathbf{v}_j^{(1,0)}$  понимается как классическая кусочно-постоянная функция.

При переходе через  $\partial\sigma_j$  и на  $\gamma_j$  функции  $\mathbf{v}_j^{(1,0)}$  разрывны, поэтому необходимо определение дивергенции  $\operatorname{div} \mathbf{v}_j^{(1,0)}$  в терминах распределений.

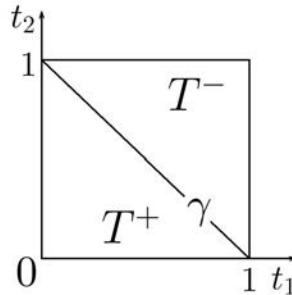


Рис. 9: (а): Область определения функции  $\mathbf{v}(t_1, t_2)$ .

Проведем подробное доказательство включений для функции  $\mathbf{v}_j^{(1,0)}$ , отвечающей наклонному ребру  $\gamma_j$ . Для удобства рассуждений можно рассмот-

реть функцию, заданную на единичном квадрате  $T = [0; 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$  (см. Рисунок 9). Опуская постоянные множители, положим

$$\mathbf{v}(t_1, t_2) = \begin{cases} (t_1, t_2), & t \in T^+, \\ (1 - t_1, 1 - t_2), & t \in T^-, \\ 0, & t \notin \bar{T}. \end{cases} \quad (3.127)$$

Так как функция  $\mathbf{v}$  почти всюду непрерывна и всюду имеет конечные пределы, то она измерима и квадратично суммируема, то есть

$$\mathbf{v} \in L_2(\Omega) = H^0(\bar{\Omega}) \subset \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}). \quad (3.128)$$

Так как  $\operatorname{div}$  есть дифференциальный оператор порядка 1, то [52]

$$\operatorname{div} \mathbf{v} \in \tilde{H}^{-1}(\bar{\Omega}), \quad (3.129)$$

то есть на пространстве Соболева  $H^1(\Omega)$  определяет непрерывный линейный функционал, взаимно однозначно отвечающий [1] непрерывной билинейной форме

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div} \mathbf{v}, w \rangle_{\Omega} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mathcal{S}_0 \operatorname{div} \mathbf{v}, w_k \rangle = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}(\mathcal{S}_0 \operatorname{div} \mathbf{v})(\xi) \mathcal{F}(w_k)(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.130)$$

Равенство (3.130) есть соотношение двойственности между пространствами  $\tilde{H}^{-1}(\bar{\Omega})$  и  $H^1(\Omega)$ . Здесь  $\operatorname{div} \mathbf{v} \in \tilde{H}^{-1}(\bar{\Omega})$ ,  $w \in H^1(\Omega)$ ,  $\mathcal{S}_0$  – оператор продолжения нулем, а  $w_k$  – функции из  $C^\infty(\bar{\Omega})$ , сходящиеся в  $H^1(\Omega)$  к  $w$ ; символом  $\mathcal{F}$  обозначено преобразование Фурье.

Покажем, что верно включение

$$\operatorname{div} \mathbf{v} \in \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}). \quad (3.131)$$

Отметим сначала, что нормальная составляющая функции  $\mathbf{v}$  равна нулю на  $\partial T$ . Например, на нижней части границы  $t_2 = 0$ ,  $\mathbf{n} = (0, -1)^T$ , откуда  $\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{n} = -t_2 \equiv 0$ . Далее, на правой части имеем  $t_1 = 1$ ,  $\mathbf{n} = (1, 0)^T$ , откуда

$\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{n} = (1 - t_1) \equiv 0$ . Проверка на остальной части границы  $\partial T$  проводится аналогично.

Покажем теперь, что  $\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{n}$  не имеет скачка на диагонали  $\gamma$ . Вычисляя предел  $\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{n}$  при  $t \rightarrow \gamma$  в подобласти  $T^+$ , получим  $\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{n} = (t_1, t_2) \cdot (1, 1)^T = t_1 + t_2 \equiv 1$ . Для следа на  $\gamma$  в  $T^-$  получим  $\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{n} = (1 - t_1, 1 - t_2) \cdot (1, 1)^T = 2 - t_1 - t_2 \equiv 1$ , откуда и вытекает требуемое свойство.

Пусть  $w = w(t_1, t_2)$  – достаточно гладкая функция в  $\mathbb{R}^2$ . Тогда

$$\iint_{T^+} w \operatorname{div} \mathbf{v} = 2 \iint_{T^+} w = - \iint_{T^+} \operatorname{grad} w \cdot \mathbf{v} + \iint_{T^+} \operatorname{div}(w\mathbf{v}). \quad (3.132)$$

Применяя теорему Грина, получим

$$\iint_{T^+} w \operatorname{div} \mathbf{v} = - \iint_{T^+} \operatorname{grad} w \cdot \mathbf{v} + \oint_{\partial T^+} w v_1 dt_2 - w v_2 dt_1, \quad (3.133)$$

а из равенства нулю нормальной компоненты  $\mathbf{v}$  на  $\partial T^-$

$$\begin{aligned} \oint_{\partial T^+} w v_1 dt_2 - w v_2 dt_1 &= - \int_{\gamma} w (t_1 dt_2 - t_2 dt_1) = \\ &= \int_0^1 w [t_1 + t_2] dt_1 = \int_0^1 w dt_1. \end{aligned} \quad (3.134)$$

В подобласти  $T^-$  получим

$$\begin{aligned} \iint_{T^-} w \operatorname{div} \mathbf{v} &= - \iint_{T^-} \operatorname{grad} w \cdot \mathbf{v} + \oint_{\partial T^-} w v_1 dt_2 - w v_2 dt_1 = \\ &= - \iint_{T^-} \operatorname{grad} w \cdot \mathbf{v} - \int_{\gamma} w [(1 - t_1) dt_2 - (1 - t_2) dt_1] = \\ &= - \iint_{T^-} \operatorname{grad} w \cdot \mathbf{v} - \int_0^1 w dt_1. \end{aligned} \quad (3.135)$$

Из (3.132)–(3.135) и из интегрируемости  $\mathbf{v}$  следует, что для рассматриваемой разрывной функции  $\mathbf{v}$  имеет место равенство

$$\iint_{T^+} w \operatorname{div} \mathbf{v} + \iint_{T^-} w \operatorname{div} \mathbf{v} = - \iint_T \operatorname{grad} w \cdot \mathbf{v}. \quad (3.136)$$

Заметим, наконец, что для всякой *гладкой* функции  $\mathbf{v}$  с носителем в  $\bar{T}$  и нулевой нормальной составляющей имеет место равенство

$$\iint_T w \operatorname{div} \mathbf{v} = \iint_{T^+} w \operatorname{div} \mathbf{v} + \iint_{T^-} w \operatorname{div} \mathbf{v} = - \iint_T \operatorname{grad} w \cdot \mathbf{v}. \quad (3.137)$$

Последнее равенство и принимается с учетом вышеописанных свойств функции  $\mathbf{v}$  в качестве определения дивергенции (в смысле распределений):

$$\iint_T w \operatorname{div} \mathbf{v} = - \iint_T \operatorname{grad} w \cdot \mathbf{v}. \quad (3.138)$$

Учитывая равенство  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \equiv 0$  на  $\partial T$ , можно определить  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  и как обобщенную функцию в  $\mathbb{R}^2$  с компактным носителем  $\bar{T}$ :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} w \operatorname{div} \mathbf{v} = - \iint_{\mathbb{R}^2} \operatorname{grad} w \cdot \mathbf{v} = - \iint_T \operatorname{grad} w \cdot \mathbf{v}. \quad (3.139)$$

Рассмотрим билинейную форму

$$F(w, \mathbf{v}) = \langle w, \operatorname{div} \mathbf{v} \rangle + \langle \operatorname{grad} w, \mathbf{v} \rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} w \operatorname{div} \mathbf{v} + \iint_{\mathbb{R}^2} \operatorname{grad} w \cdot \mathbf{v}. \quad (3.140)$$

Равенство (3.139) означает, что  $F(w, \mathbf{v}) = 0$  для всех достаточно гладких функций  $w$ . Заметим еще, что оба слагаемых в правой части (3.140) определяют соотношения двойственности пространств Соболева  $H^{1/2}(\mathbb{R}^2)$  и  $H^{-1/2}(\mathbb{R}^2)$ . Отсюда получаем по непрерывности, что  $F(w, \mathbf{v}) = 0$  для всех  $w \in H^{1/2}(\mathbb{R}^2)$  (следовательно,  $\operatorname{grad} w \in H^{-1/2}(\mathbb{R}^2)$ ). Таким образом,  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  как распределение из  $H^{-1/2}(\mathbb{R}^2)$  определено по формуле

$$\iint_{\mathbb{R}^2} w \operatorname{div} \mathbf{v} = - \iint_{\mathbb{R}^2} \operatorname{grad} w \cdot \mathbf{v}, \quad \forall w \in H^{1/2}(\mathbb{R}^2). \quad (3.141)$$

Остается заметить, что так как  $\mathbf{v}$  имеет компактный носитель в  $\bar{\Omega}$ , то  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  есть элемент пространства  $\tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega})$ , что и требовалось показать.  $\square$

### 3.6 Базисные вектор-функции на неплоских гладких экранах: определение, свойство аппроксимации, примеры

Опишем построение и свойства базисных вектор-функций на незамкнутом ориентируемом гладком бесконечно тонком идеально проводящем экране в задаче дифракции электромагнитной волны.

Предполагается, что экран  $\Omega$  – гладкая (класса  $C^\infty$ ) двумерная ориентируемая поверхность с краем. Иначе:  $\Omega$  – гладкое компактное ориентируемое двумерное многообразие с гладким краем  $\partial\Omega$ . Для  $\Omega$  существует покрытие конечным числом окрестностей  $\{U_\alpha\}$ , которые отображаются гладкими диффеоморфизмами  $\kappa_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$  в  $\mathbb{R}^2$ , причем образы  $V_\alpha$  окрестностей внутренних точек экрана  $\Omega$  диффеоморфны открытым множествам в  $\mathbb{R}^2$  (например, кругам с центром в точках  $t = \kappa_\alpha(x)$ ), а образы окрестностей точек границы – открытым множествам в  $\mathbb{R}_+^2$  (например, полукругам). Предполагается также, что для всякого покрытия  $U$  координатными окрестностями задано подчиненное  $U$  разбиение единицы  $\{\varphi_\alpha\}$ .

Отметим также, что если экран  $\Omega$  представляет собой достаточно гладкую параметризуемую поверхность в  $\mathbb{R}^3$ , то в подходящей окрестности любой его внутренней точки возможно введение *изотермических координат* [62]. Следовательно, все свойства пространств и операторов на  $\Omega$ , описанные в параграфах 3.2, 3.3 переносятся и на случай параметризуемых экранов. Кроме того, соболевские нормы на  $\Omega$ , отвечающие различным атласам и разбиениям единицы, эквивалентны [1]. Норма в пространстве Соболева  $H^s(M)$  на замкнутом многообразии  $M$  определяется следующим образом [1] (см. также с. 137 диссертации):

$$\|u\|_{H^s(M)} = \sum_{\alpha} \|u(\kappa_\alpha^{-1}(t))\varphi_\alpha(\kappa_\alpha^{-1}(t))\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}. \quad (3.142)$$

Базисные вектор-функции будут построены на неплоских экранах, пред-

ставляющих собой параметрически заданные поверхности в  $\mathbb{R}^3$ :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_i = x_i(t_1, t_2), i = 1, 2, 3\}, (t_1, t_2) \in D \subset \mathbb{R}^2. \quad (3.143)$$

Здесь  $D$  – прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям  $0t_1, 0t_2$ , например,  $D = \{(t_1, t_2) : t_i \in (0; a_i)\}$ . При этом отображение  $x(t) : D \rightarrow \Omega$  есть диффеоморфизм класса  $C^\infty$ :  $x \in C^\infty(\overline{D})$ ,  $x^{-1} = \kappa \in C^\infty(\overline{\Omega})$ . Заметим, что так как параметризация поверхности описывается отображением из  $\mathbb{R}^2$  в  $\mathbb{R}^3$ , то диффеоморфность отображения  $x : D \rightarrow \Omega$  подразумевает в том числе, что в каждой точке  $(t_1, t_2) \in D$  матрица Якоби  $x'_t$  имеет ранг 2.

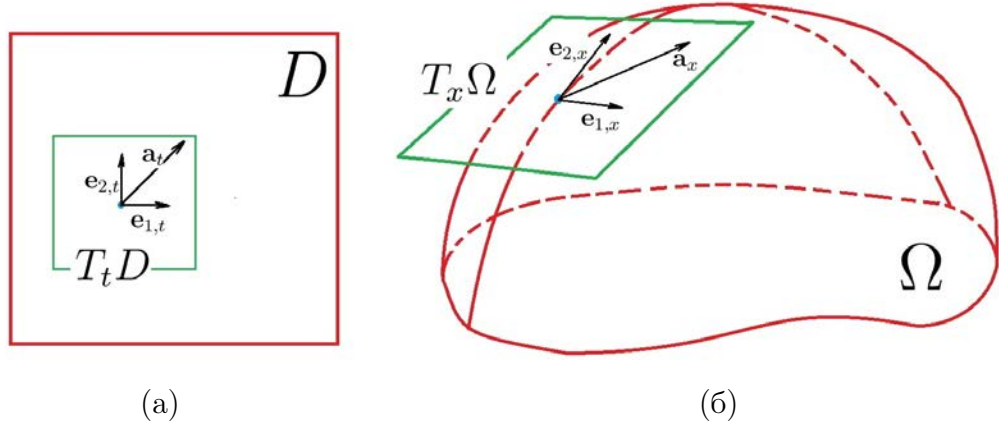


Рис. 10: (а): Область параметров  $D$ , касательное пространство  $T_t D$  с базисом  $e_{1,t}, e_{2,t}$ . (б): Экран  $\Omega$ , касательное пространство  $T_x \Omega$  с базисом  $e_{1,x}, e_{2,x}$ .

Пусть  $B$  – открытый круг радиуса  $r$ , содержащий  $\overline{D}$ , причем  $dist(\partial D, \partial B) > 0$ . Пусть также  $B'$  – круг радиуса  $r + \delta$  с тем же центром, что и  $B$ . Рассмотрим еще образы кругов  $B$  и  $B'$  при введенном отображении  $x(t)$ . Эти образы суть поверхности  $\Omega_{B'} \supset \Omega_B \supset \Omega$ , причем  $dist(\partial \Omega_{B'}, \partial \Omega_B) = d' > 0$  и  $dist(\partial \Omega_B, \partial \Omega) = d > 0$ . Пример поверхности  $\Omega$  и области параметров  $D$  схематически изображен на Рисунке 2 (см. с. 84 диссертации) и Рисунке 10.

Определим базисные вектор-функции  $\mathbf{v}_j^{(1)}(x)$  в пространстве  $W = W(\overline{\Omega})$  сечений векторных расслоений многообразия  $\Omega$ . Точнее, в рассматриваемой



задаче  $W$  – пространство сечений *касательного расслоения* поверхности  $\Omega$ . Так как  $\Omega$  является по предположению гладким экраном, то в каждой (внутренней) точке  $x \in \Omega$  можно определить вектор единичной нормали  $\mathbf{n}_x$ , причем поле нормалей на  $\Omega$  является гладким. Следовательно, в каждой точке  $x$  определена касательная плоскость (точнее, пара "точка, плоскость")  $T_x\Omega$  к поверхности  $\Omega$  (см. Рисунок 10). Объединение  $T_x\Omega$  по всем  $x \in \Omega$  обозначим через  $T\Omega$ .

В рассматриваемой задаче дифракции  $\mathbf{u}$  (см. уравнения (3.55)) представляет собой векторное поле, касательное к  $\Omega$ , то есть является сечением  $\Omega \rightarrow T\Omega$  касательного расслоения  $T\Omega$ . Так как параметрически заданный экран определяется отображением  $x = x(t_1, t_2) : D \rightarrow \Omega$ , то отображение касательных пространств определяется дифференциалом [14] вектор-функции  $x(t_1, t_2)$ ,

$$Dx : TD \rightarrow T\Omega, \quad (3.144)$$

Всякому элементу  $\mathbf{a}_t \in T_tD$  этим отображением ставится в соответствие элемент  $\mathbf{a}_x \in T_x\Omega$  по правилу

$$\mathbf{a}_x = \frac{\partial x}{\partial t} \mathbf{a}_t, \quad (3.145)$$

при этом базис  $\{\mathbf{e}_{1,t}, \mathbf{e}_{2,t}\}$  касательного пространства  $T_tD$  переводится дифференциалом в базис  $\{\mathbf{e}_{1,x}, \mathbf{e}_{2,x}\}$  касательного пространства  $T_x\Omega$  :

$$\mathbf{e}_{i,x} = \frac{\partial x}{\partial t} \mathbf{e}_{i,t}, \quad i = 1, 2. \quad (3.146)$$

Пусть в  $D$  определены функции RWG  $\mathbf{v}_j^{(1)}(x')$  согласно (3.125); будем теперь обозначать эти функции символом  $\mathbf{v}_j^{(1,0)}(t_1, t_2)$ . Базисные функции  $\mathbf{v}_j^{(1)}(x)$  в точках  $x = x(t) = x(t_1, t_2)$  неплоского экрана определим как перенесенные дифференциалом  $Dx$  с  $D$  на  $\Omega$  вектор-функции RWG:

$$\mathbf{v}_j^{(1)}(x(t)) = \frac{\partial x}{\partial t} \mathbf{v}_j^{(1,0)}(t_1, t_2), \quad x(t) \in \Omega. \quad (3.147)$$

Докажем теорему о полноте системы функций  $\mathbf{v}_j^{(1)}(x)$ .

**Теорема 3.7.** [135] Вектор-функции  $\mathbf{v}_j^{(1)}(x)$  на гладком (класса  $C^\infty$ ) незамкнутом ориентируемом параметрически заданном экране  $\Omega$  удовлетворяют условию аппроксимации в пространстве  $W = W(\bar{\Omega})$ .

*Доказательство.* 1. Надо проверить, что вектор-функции  $\mathbf{v}_j^{(1)}(x)$  принадлежат пространству сечений  $W = W(\bar{\Omega})$ . В Лемме 3.5 было доказано, что функции  $\mathbf{v}_j^{(1,0)}$  принадлежат пространству  $W(\bar{\Omega})$  в случае, когда экран  $\Omega$  является плоским. В нашем случае заключаем, что  $\mathbf{v}_j^{(1,0)}(t) \in W(\bar{D})$ . Теперь требуемый результат вытекает [1] из определения норм в пространствах Соболева (см. формулу (3.142)) и гладкости поверхности  $\Omega$ .

2. Надо доказать полноту системы функций  $\mathbf{v}_j^{(1)}$  в  $W(\bar{\Omega})$ , то есть показать, что для всякого элемента  $\mathbf{u}(x) \in W$  при любом  $\varepsilon > 0$  найдутся коэффициенты  $c_i$  ( $i = 1, \dots, m_1(n)$ ) такие, что

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{m_1}\|_W = \left\| \mathbf{u} - \sum_{j=1}^{m_1} c_j \mathbf{v}_j^{(1)} \right\|_W < \varepsilon. \quad (3.148)$$

Соотношение (3.148) достаточно установить для гладких сечений, так как класс  $C_0^\infty(\Omega)$  есть множество, всюду плотное в  $W$  [17].

Функции RWG удовлетворяют условию аппроксимации в пространстве  $W(\bar{D})$ ; более того, коэффициенты  $c_j$  при функциях RWG можно [47] задать так, что

$$\sup_{t \in D} |\mathbf{u}_D(t) - \mathbf{u}_{m_1,D}(t)| \rightarrow 0, \quad \sup_{t \in D} |\operatorname{div} \mathbf{u}_D(t) - \operatorname{div} \mathbf{u}_{m_1,D}(t)| \rightarrow 0, \quad (3.149)$$

при  $n \rightarrow \infty$ , откуда следует [47] оценка

$$\inf_{\mathbf{u}_{m_1,D}} \|\mathbf{u}_D - \mathbf{u}_{m_1,D}\|_{W(\bar{D})} \leq C_0 \|\mathbf{u}_D\|_{C^2(\bar{D})} O(1/n). \quad (3.150)$$

Покажем, что оценки, аналогичные (3.149) имеют место и на гладком неплоском экране  $\Omega$  при заданном определении базисных функций.

Покажем сначала, что  $\|\mathbf{r}(x)\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |\mathbf{u}(x) - \mathbf{u}_{m_1}(x)| \rightarrow 0$  при  $m_1 \rightarrow \infty$ ,

оценивая  $|\mathbf{r}(x)|$  в произвольной точке  $x \in \Omega$ :

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}(x)| &= \left| \mathbf{u}(x) - \sum_j c_j \mathbf{v}_j^{(1)}(x) \right| = \left| \frac{\partial x}{\partial t} \mathbf{u}_D(t) - \sum_j c_j \frac{\partial x}{\partial t} \mathbf{v}_j^{(1,0)}(t) \right| = \\ &= \left| \frac{\partial x}{\partial t} (\mathbf{u}_D(t) - \sum_j c_j \mathbf{v}_j^{(1,0)}(t)) \right| \leq c_1 |\mathbf{u}_D(t) - \mathbf{u}_{D,m_1}(t)|. \end{aligned} \quad (3.151)$$

Здесь сечение  $\mathbf{u}_D(t)$  – прообраз сечения  $\mathbf{u}(x)$ , причем  $\mathbf{u}_D \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  в силу гладкости отображения  $\partial x / \partial t : T_t D \rightarrow T_x \Omega$ .

Проверим теперь, что  $\|\operatorname{div}_\tau \mathbf{r}(x)\|_\infty = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |\operatorname{div}_\tau(\mathbf{u}(x) - \mathbf{u}_{m_1}(x))| \rightarrow 0$  при  $m_1 \rightarrow \infty$ . Известно [112], что поверхностная дивергенция поля  $\mathbf{f}$  на гладкой поверхности вычисляется по формуле

$$\operatorname{div}_\tau \mathbf{f} = g^{\mu\nu} (\partial_\mu \mathbf{f}) \cdot (\partial_\nu x). \quad (3.152)$$

Здесь  $\mu, \nu \in \{1, 2\}$ ,  $\partial_\mu \mathbf{f} = (\partial_{t_\mu} f_1, \partial_{t_\mu} f_2, \partial_{t_\mu} f_3)^T$ ,  $\partial_\nu x = (\partial_{t_\nu} x_1, \partial_{t_\nu} x_2, \partial_{t_\nu} x_3)^T$ , а  $g^{\mu\nu}$  – тензор, обратный к метрическому тензору

$$g_{\mu\nu} = (\partial_{t_\mu} x \cdot \partial_{t_\nu} x) \equiv (\partial_\mu x \cdot \partial_\nu x). \quad (3.153)$$

Вычислим  $\operatorname{div}_\tau \mathbf{r}(x) = \operatorname{div}_\tau(\mathbf{u}(x) - \mathbf{u}_{m_1}(x))$  в произвольной точке  $x = x(t) \in \Omega$ , обозначая прообраз  $\mathbf{r}_D(t)$  сечения  $\mathbf{r}(x)$  при отображении  $Dx$  символом  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p} = (p_1, p_2)^T$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\tau \mathbf{r}(x) &= g^{\mu\nu} (\partial_\mu \mathbf{r}) \cdot (\partial_\nu x) = g^{\mu\nu} (\partial_\mu (\frac{\partial x}{\partial t} \mathbf{p})) \cdot (\partial_\nu x) = \\ &= g^{\mu\nu} (\partial_\mu (\frac{\partial x}{\partial t}) \mathbf{p}) \cdot (\partial_\nu x) + g^{\mu\nu} (\frac{\partial x}{\partial t} \partial_\mu (\mathbf{p})) \cdot (\partial_\nu x). \end{aligned} \quad (3.154)$$

Первое слагаемое в (3.154) стремится к нулю при  $m_1 \rightarrow \infty$  в силу первого соотношения из (3.149) и гладкости  $\partial x / \partial t$  на  $\bar{D}$ . Преобразуем второе слагаемое

$$g^{\mu\nu} (\frac{\partial x}{\partial t} \partial_\mu (\mathbf{p})) \cdot (\partial_\nu x) = g^{\mu\nu} \begin{bmatrix} \partial_1 x_1 & \partial_2 x_1 \\ \partial_1 x_2 & \partial_2 x_2 \\ \partial_1 x_3 & \partial_2 x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_\mu p_1 \\ \partial_\mu p_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial_\nu x_1 \\ \partial_\nu x_2 \\ \partial_\nu x_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= g^{11} [\partial_1 x_1 \partial_1 p_1 \partial_1 x_1 + \partial_2 x_1 \partial_1 p_2 \partial_1 x_1 + \\
&\quad \partial_1 x_2 \partial_1 p_1 \partial_1 x_2 + \partial_2 x_2 \partial_1 p_2 \partial_1 x_2 + \\
&\quad \partial_1 x_3 \partial_1 p_1 \partial_1 x_3 + \partial_2 x_3 \partial_1 p_2 \partial_1 x_3] + \\
&+ g^{12} [\partial_1 x_1 \partial_1 p_1 \partial_2 x_1 + \partial_2 x_1 \partial_1 p_2 \partial_2 x_1 + \\
&\quad \partial_1 x_2 \partial_1 p_1 \partial_2 x_2 + \partial_2 x_2 \partial_1 p_2 \partial_2 x_2 + \\
&\quad \partial_1 x_3 \partial_1 p_1 \partial_2 x_3 + \partial_2 x_3 \partial_1 p_2 \partial_2 x_3] + \\
&+ g^{21} [\partial_1 x_1 \partial_2 p_1 \partial_1 x_1 + \partial_2 x_1 \partial_2 p_2 \partial_1 x_1 + \\
&\quad \partial_1 x_2 \partial_2 p_1 \partial_1 x_2 + \partial_2 x_2 \partial_2 p_2 \partial_1 x_2 + \\
&\quad \partial_1 x_3 \partial_2 p_1 \partial_1 x_3 + \partial_2 x_3 \partial_2 p_2 \partial_1 x_3] + \\
&+ g^{22} [\partial_1 x_1 \partial_2 p_1 \partial_2 x_1 + \partial_2 x_1 \partial_2 p_2 \partial_2 x_1 + \\
&\quad \partial_1 x_2 \partial_2 p_1 \partial_2 x_2 + \partial_2 x_2 \partial_2 p_2 \partial_2 x_2 + \\
&\quad \partial_1 x_3 \partial_2 p_1 \partial_2 x_3 + \partial_2 x_3 \partial_2 p_2 \partial_2 x_3] = \\
&= S_1(\partial_1 p_1, \partial_2 p_2) + S_2(\partial_2 p_1, \partial_1 p_2).
\end{aligned} \tag{3.155}$$

Слагаемое  $S_1$  бесконечно мало при  $m_1 \rightarrow \infty$  в силу второго предельного соотношения в (3.149). Исследуем  $S_2$ , , группируя слагаемые с общими множителями вида  $\partial_i p_j g^{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned}
S_2 &= \partial_1 p_2 [g^{11} (\partial_2 x) \cdot (\partial_1 x) + g^{12} (\partial_2 x) \cdot (\partial_2 x)] + \\
&+ \partial_2 p_1 [g^{21} (\partial_1 x) \cdot (\partial_1 x) + g^{22} (\partial_1 x) \cdot (\partial_2 x)] = \\
&= \partial_1 p_2 [g^{11} g_{21} + g^{12} g_{22}] + \partial_2 p_1 [g^{21} g_{11} + g^{22} g_{12}] = 0.
\end{aligned} \tag{3.156}$$

Равенство нулю следует из симметричности тензоров  $g^{\mu\nu}$  и  $g_{\nu\lambda}$ , являющихся взаимно обратными:

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu. \tag{3.157}$$

Таким образом, коэффициенты  $c_j$  при базисных вектор-функциях  $\mathbf{v}_j^{(1)}$  можно задать так, что

$$\sup_{x \in \Omega} |\mathbf{u}(x) - \mathbf{u}_{m_1}(x)| \rightarrow 0, \quad \sup_{x \in \Omega} |\operatorname{div}_\tau \mathbf{u}(x) - \operatorname{div}_\tau \mathbf{u}_{m_1}(x)| \rightarrow 0, \tag{3.158}$$

при  $n, m_1(n) \rightarrow \infty$ , откуда и из (3.150) следует оценка в пространстве  $W$

$$\inf_{\mathbf{u}_{m_1} \in \mathbf{X}_{m_1}^1} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{m_1}\|_{W(\bar{\Omega})} \leq C_1 \cdot O(1/n). \quad (3.159)$$

Теорема доказана.  $\square$

### 3.7 Замечание о вектор-функциях типа roof-top на неплоских гладких экранах

Для приближения решения на идеально проводящем экране можно использовать и аналоги функций типа roof-top [77]. Введем в области параметров  $D = [0, a_1] \times [0, a_2]$  прямоугольные конечные элементы

$$D_{i_1, i_2} = [t_{i_1}, t_{i_1+1}] \times [t_{i_2}, t_{i_2+1}], \quad (i_1, i_2 = 0, \dots, n-1), \quad (3.160)$$

где  $t_{i_k} = i_k h_k$ ,  $h_k = \frac{a_k}{n}$ ,  $k = 1, 2$ .

Введем сначала финитные скалярные кусочно-линейные (по одному из параметром) функции

$$v_{i_1 i_2}^{(1)}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t_1 - t_{1, i_1+1}|}{h_1}, & t \in D_{i_1, i_2} \cup D_{i_1+1, i_2}, \\ 0, & t \notin D_{i_1, i_2} \cup D_{i_1+1, i_2}, \end{cases} \quad (3.161)$$

$$v_{i_1 i_2}^{(2)}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t_2 - t_{2, i_2+1}|}{h_2}, & t \in D_{i_1, i_2} \cup D_{i_1, i_2+1}, \\ 0, & t \notin D_{i_1, i_2} \cup D_{i_1, i_2+1}, \end{cases} \quad (3.162)$$

и вектор-функции roof-top

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{i_1, i_2}^{(0,1)}(t) &= (\nu_{i_1, i_2}^{(1)}(t), 0), \quad i_1 = 0, \dots, n-2, \quad i_2 = 0, \dots, n-1 \\ \mathbf{v}_{i_1, i_2}^{(0,2)}(t) &= (0, \nu_{i_1, i_2}^{(2)}(t)), \quad i_1 = 0, \dots, n-1, \quad i_2 = 0, \dots, n-2. \end{aligned} \quad (3.163)$$

Базисные вектор-функции  $\mathbf{v}_i^{(k)} = \mathbf{v}_{i_1, i_2}^{(k)}(x)$  в точках неплоского экрана определим по формуле

$$\mathbf{v}_i^{(k)}(x(t)) = \frac{\partial x}{\partial t} \mathbf{v}_i^{(k,0)}(t_1, t_2), \quad x(t) \in \Omega. \quad (3.164)$$

В работе [27] описаны свойства функций roof-top на плоском прямоугольном экране и, в частности, установлены предельные соотношения (3.149).

Доказательство принадлежности вектор-функций пространству  $W(\Omega)$  и вывод оценок (3.158),(3.159) полностью повторяет доказательство Теоремы 3.7. Таким образом, верно

**Утверждение 3.1.** *Вектор-функции  $\mathbf{v}_i^{(k)}(x)$  на гладком (класса  $C^\infty$ ) незамкнутом ориентируемом параметрически заданном экране  $\Omega$  удовлетворяют условию аппроксимации в пространстве  $W = W(\bar{\Omega})$ .*

### 3.8 Аппроксимация вектор-функций на неплоских экранах.

Приведем примеры приближения вектор-функций на неплоских параметрически заданных экранах  $\Omega$  предложенными вектор-функциями.

Значения функций RWG представляют собой векторы, лежащие в плоскости  $t_1Ot_2$ . Значения функций  $\mathbf{v}_j^{(1)}(x)$ ,  $x \in \Omega$  – векторы лежащие в касательной к экрану плоскости  $T_x\Omega$  и имеют в общем случае три отличные от нуля компоненты (номер компоненты вектор-функции будет обозначаться буквой  $k$ ):

$$\mathbf{v}_j^{(1),k}(x) \neq 0, \quad x \in \Omega, \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.165)$$

На Рисунке 11 (а) изображена вторая компонента ( $k = 2$ ) функции RWG  $\mathbf{v}_j^{(1,0)}(x)$ , отвечающей горизонтальному ребру в прямоугольной области  $D$  параметров  $t_1, t_2$ ; значение мультииндекса  $j$  равно  $(0, 0)$ .

Рассмотрим два примера неплоских экранов. Первый экран – часть сферы, заданной явным образом,

$$\Omega_S = \{x : x_1 = t_1, x_2 = t_2, x_3 = \sqrt{2.0 - t_1^2 - t_2^2}, \quad |t_k| \leq \sqrt{2}\}, \quad (3.166)$$

второй – цилиндрическая поверхность

$$\Omega_C = \{x : x_1 = 2 \cos t_1, x_2 = 2 \sin t_1, x_3 = t_2, \quad t_1 \in [0, \frac{\pi}{2}], t_2 \in [0, 1]\}. \quad (3.167)$$

На Рисунках 11 (б) и (в) изображена третья ( $k = 3$ ) компоненты вектор-функции  $\mathbf{v}_j^{(1)}(x)$  ( $j = (0, 0)$ ) на сферическом и цилиндрическом экранах. Значения функции отмечены цветом.

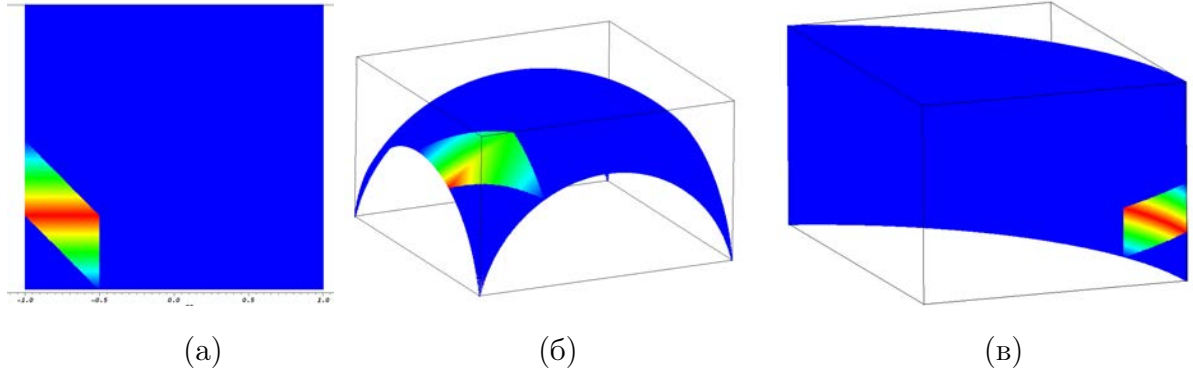


Рис. 11: (а): График функции  $v_{(0,0)}^{(1,0);2}(t), t \in D$ ; (б): График функции  $v_{(0,0)}^{(1,0);3}(x), x \in \Omega_S$ ; (в): График функции  $v_{(0,0)}^{(1,3)}(x), x \in \Omega_C$ .

Пусть  $\mathbf{f}$  – произвольное гладкое векторное поле в  $\mathbb{R}^3$ . Определим гладкое касательное сечение на экране  $\Omega$  формулой

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{f}_\tau(x) = \mathbf{f}(x) - (\mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{n}(x))\mathbf{n}(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.168)$$

где  $\mathbf{n}(x)$  – вектор единичной нормали к  $\Omega$  в точке  $x$ .

**Пример аппроксимации на цилиндрической поверхности.**

Рассмотрим на цилиндрической поверхности  $\Omega$  функцию  $u^2(x)$ , где  $\mathbf{u}(x) = (\sin x_1, \cos x_3, \sin(2x_3))_T^T$ , график которой представлен на Рисунке 12 (а). Множество значений функции  $u^2$  на экране  $\Omega$  – сегмент  $[-0.006\dots, 1.9\dots]$ .

Таблица 3: Отклонение  $\|u^2 - u_{m_1}^2\|_\infty$  на цилиндрическом экране  $\Omega_C$  в зависимости от значения параметра разбиения  $n$  ( $m_1 = 3n^2 - 2n$ ) множества  $D$ .

|                          |      |      |      |      |
|--------------------------|------|------|------|------|
| $n$                      | 8    | 16   | 32   | 64   |
| $\ u - u_{m_1}\ _\infty$ | .533 | .193 | .081 | .047 |

На Рисунках 12 (б)–(д) изображены приближения  $u_{m_1}^2$  функции  $u^2$ , отвечающие равномерным сеткам в области параметров  $D$  с параметром разбиения  $n \in \{8, 16, 32, 64\}$  (по каждой из координатных осей  $0t_1$  и  $0t_2$ ), а в Таблице 3 – значения отклонений  $\|u^2 - u_{m_1}^2\|_\infty = \max_{x \in \Omega_C} |u^2(x) - u_{m_1}^2(x)|$ .

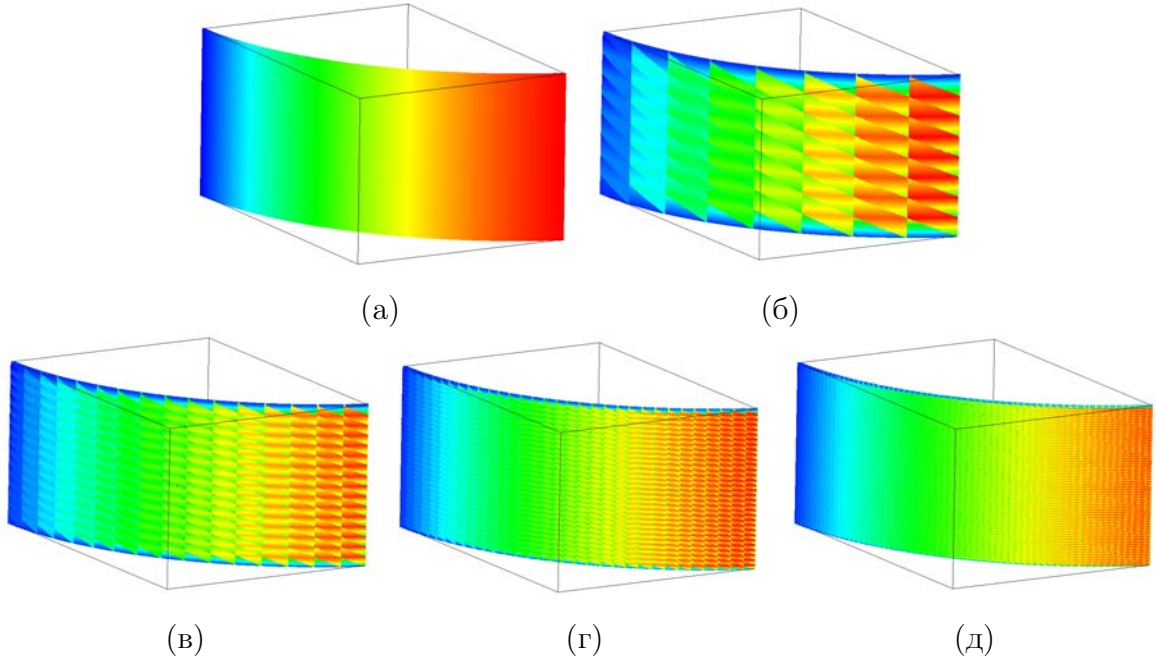


Рис. 12: (а): график функции  $u^2$ ; (б)-(д): графики функций  $u_{m_1}^2(x)$ .

**Пример аппроксимации на сферической поверхности.**

Рассмотрим на сферической поверхности  $\Omega_S$  функцию  $\mathbf{u}$ , определенную согласно (3.168) с  $\mathbf{f}(x) = (x_2, x_3, x_2)^T$ . На Рисунке 13 (а) представлен график третьей компоненты  $u^3(x)$  вектор-функции  $\mathbf{u}$ . Множество значений функции  $u^3$  на экране – сегмент  $[-0.424\dots, 1.045\dots]$ .

На Рисунках 13 (б)–(е) изображены приближения  $u_{m_1}^3(x)$  функции  $u^3$ , отвечающие равномерным сеткам в области параметров  $D$  с параметром разбиения  $n \in \{8, 16, 32, 64\}$  (по каждой из координатных осей  $0t_1$  и  $0t_2$ ), а в Таблице 4 – значения отклонений  $\|u^3 - u_{m_1}^3\|_\infty = \max_{x \in \Omega_S} |u^3(x) - u_{m_1}^3(x)|$ .

Таблица 4: Отклонение  $\|u^3 - u_{m_1}^3\|_\infty$  на сферическом экране  $\Omega_S$  в зависимости от значения параметра разбиения  $n$  множества  $D$ .

|                              |      |      |      |      |
|------------------------------|------|------|------|------|
| $n$                          | 8    | 16   | 32   | 64   |
| $\ u^3 - u_{m_1}^3\ _\infty$ | 0.61 | 0.21 | 0.09 | 0.05 |



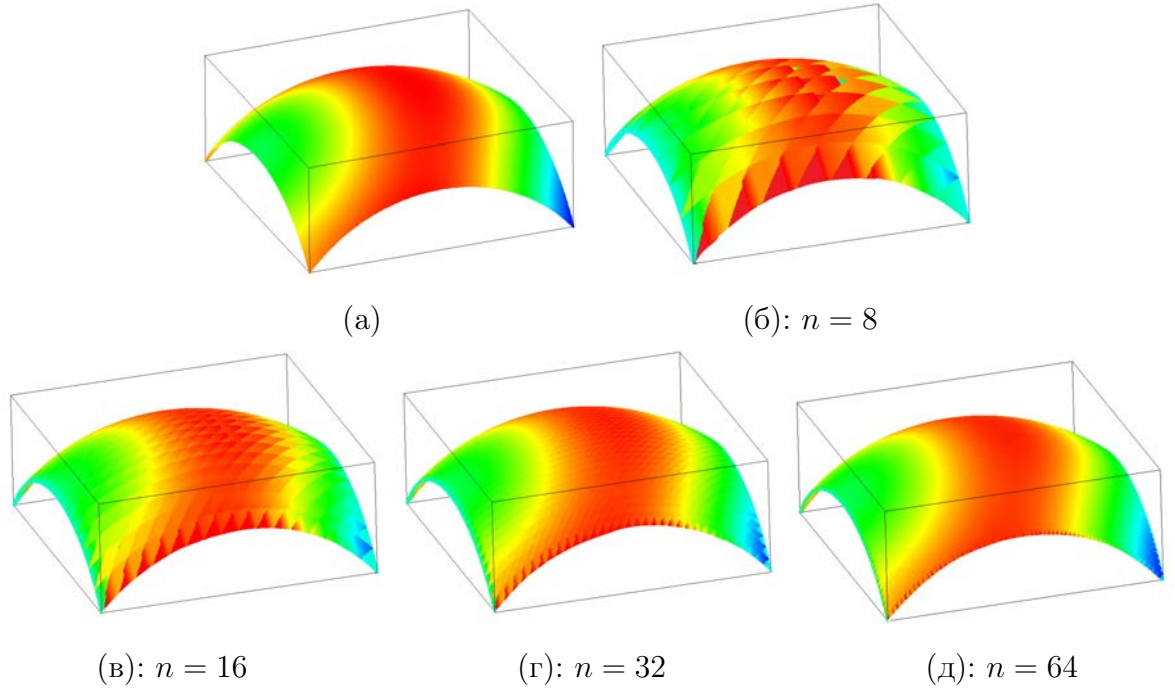


Рис. 13: (а): график функции  $u^3(x)$ ; (б)-(д): графики функций  $u_{m_1}^3(x)$ .

### 3.9 Сходимость метода Галеркина в векторной задаче дифракции на системе непересекающихся тел и экранов

Ниже сформулирована и доказана теорема о сходимости метода Галеркина для оператора  $\hat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$ . Будем придерживаться определения сходимости метода Галеркина, которое было дано в параграфе 1.8.

**Теорема 3.8.** [127, 135] Пусть в  $\mathbb{R}^3 \setminus Q$  выполнены условия

$$\operatorname{Re} \varepsilon_e > 0, \operatorname{Im} \varepsilon_e > 0, \operatorname{Re} \mu_e > 0, \operatorname{Im} \mu_e = 0. \quad (3.169)$$

Пусть в  $Q$  тензор относительной диэлектрической проницаемости  $\hat{\varepsilon}_r(x)$  таков, что в  $x \in \bar{Q}$  существует ограниченный тензор

$$\hat{\xi}(x) = (\hat{\varepsilon}_r(x) - \hat{\mathbf{I}})^{-1}, \quad (3.170)$$

где  $\hat{\mathbf{I}}$  – единичный тензор. Пусть для  $\hat{\varepsilon}_r(x)$  в  $\bar{Q}$  выполнено хотя бы одно из условий

$$\operatorname{Re}(\hat{\varepsilon}_r(x)\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \geq C_1|\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_1 > 1, \quad (3.171)$$

$$\operatorname{Im}(\hat{\varepsilon}_r(x)\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \geq C_2|\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_2 > 0 \text{ или} \quad (3.172)$$

$$-\operatorname{Im}(\widehat{\varepsilon}_r(x)\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \geq C_3|\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_3 > 0 \quad (3.173)$$

для всех векторов  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ . Пусть, кроме того,  $\widehat{\varepsilon}(x) = \varepsilon(x)\widehat{\mathbf{I}}$ , если  $\operatorname{Im} \varepsilon_{ij} = 0$ .

Пусть базисные функции  $\mathbf{v}_i^0(x)$  и  $\mathbf{v}_j^{(1)}(x)$  удовлетворяют условию аппроксимации в пространствах  $\mathbf{L}_2(Q)$  и  $W(\overline{\Omega})$  соответственно, причем  $\Omega$  – ориентируемая гладкая (класса  $C^\infty$ ) незамкнутая параметрически заданная поверхность.

Тогда метод Галеркина (3.105) является сходящимся для оператора  $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$ : приближенные решения  $\mathbf{u}_m$  сходятся к единственному решению  $\mathbf{u} \in \mathbf{X}$  уравнения (3.101) и имеет место квазиоптимальная оценка скорости сходимости

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_m\|_{\mathbf{X}} \leq C \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{X}_m} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}. \quad (3.174)$$

*Доказательство.* Представим оператор  $\widehat{\mathcal{L}}$  в виде

$$\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\mathcal{L}}_1 + \widehat{\mathcal{L}}_2 := \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{A}}_0 + \widehat{\mathcal{A}}_1 & 0 \\ 0 & \widehat{\mathcal{S}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \widehat{\mathcal{K}}_1 \\ \widehat{\mathcal{K}}_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.175)$$

и установим сначала сходимость метода для оператора  $\widehat{\mathcal{L}}_1$ .

Оператор  $\widehat{\mathcal{A}}_0 + \widehat{\mathcal{A}}_1$  является обратимым эллиптическим оператором в  $\mathbf{L}_2(Q)$  (см. Теорему 3.6 параграфа 3.2), так как представим в виде суммы коэрцитивного и компактного операторов. Из сходимости метода Галеркина для коэрцитивного оператора  $\widehat{\mathcal{A}}_0$  [87] и обратимости  $\widehat{\mathcal{A}}_0 + \widehat{\mathcal{A}}_1$  следует сходимость для  $\widehat{\mathcal{A}}_0 + \widehat{\mathcal{A}}_1$ . Из сходимости метода для  $\widehat{\mathcal{S}} : W \rightarrow W'$  (см. [47]) следует, что метод Галеркина сходится для  $\widehat{\mathcal{L}}_1 : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$ .

Теперь окончательный результат следует из того, что оператор  $\widehat{\mathcal{L}}_2$  компактен, а  $\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\mathcal{L}}_1 + \widehat{\mathcal{L}}_2$  инъективен в выбранных пространствах [87].  $\square$

## ГЛАВА 4. Векторная задача дифракции электромагнитной волны на объемных неоднородных диэлектрических телах, частично экранированных системой идеально проводящих экранов

Основные результаты главы опубликованы в работах [120, 122, 133, 136, 139, 144].

### 4.1 Постановка краевой задачи дифракции для системы уравнений Максвелла. Единственность квазиклассического решения краевой задачи

Пусть  $Q \subset \mathbb{R}^3$  – ограниченная область с гладкой границей  $\partial Q$ , расположенная в неограниченном однородном изотропном пространстве, диэлектрическая и магнитная проницаемости которого удовлетворяют условиям

$$\operatorname{Re} \varepsilon_e > 0, \operatorname{Im} \varepsilon_e \geq 0, \quad \operatorname{Re} \mu_e > 0, \operatorname{Im} \mu_e = 0, \quad (4.1)$$

а волновое число  $k_e = \omega \sqrt{\varepsilon_e \mu_e}$ , определено выбором ветви квадратного корня так, что выполнены условия

$$\operatorname{Re} k_e > 0, \operatorname{Im} k_e \geq 0. \quad (4.2)$$

Как и в предыдущей главе допускается многосвязность области  $Q$  и предполагается, что  $Q$  – диэлектрически неоднородная и анизотропная область. Ее постоянная магнитная проницаемость  $\mu_e$  совпадает с магнитной проницаемостью свободного пространства, а диэлектрическая проницаемость – тензор-функция  $\hat{\varepsilon}(x)$  с гладкими компонентами:  $\varepsilon_{ij} \in C^\infty(\overline{Q})$ .

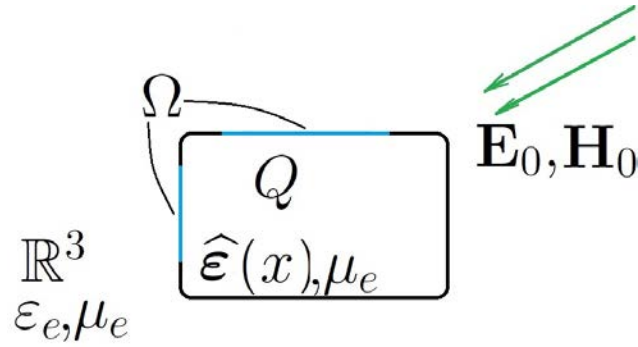


Рис. 14: Векторная задача дифракции на частично экранированном теле.

Для тензора относительной диэлектрической проницаемости  $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x) = \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)/\varepsilon_e$  выполнено условие непрерывной обратимости

$$\widehat{\boldsymbol{\xi}}(x) = (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x) - \widehat{\mathbf{I}})^{-1} \in C^\infty(\overline{Q}), \quad (4.3)$$

и одно из условий

$$\operatorname{Re}(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \geq C_1|\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_1 > 1, \quad (4.4)$$

$$\operatorname{Im}(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \geq C_2|\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_2 > 0 \text{ или} \quad (4.5)$$

$$-\operatorname{Im}(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \geq C_3|\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_3 > 0 \quad (4.6)$$

для всех векторов  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ .

Пусть, как и ранее,  $\Omega$  – конечная система попарно непересекающихся идеально проводящих экранов  $\Omega_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) с определенным заранее полем нормалей  $\boldsymbol{\nu}$ :  $\Omega = \cup \Omega_i$ ,  $\overline{\Omega} \subset \partial Q$ . Край  $\partial\Omega$  экрана  $\Omega$  – гладкая кривая (или система кривых) класса  $C^\infty$  без точек самопересечения,  $\partial\Omega_\delta$  – трубчатые окрестности края экрана,  $\Omega_\delta := \bigcup_{x \in \Omega} B_\delta(x)$  –  $\delta$ -окрестности экрана, а  $P^+ \subset \mathbb{R}^3 \setminus (\overline{Q})$ ,  $P^- \subset Q$  – произвольные области, соответственно внешняя и внутренняя к экрану  $\Omega$  и такие, что  $\Omega \subset \partial P^\pm$ . Пусть также  $\partial Q' := \partial Q \setminus \overline{\Omega}$ .

Условие частичного экранирования тела  $Q$  означает, что  $\Omega$  – подмножество гладкой части границы тела,

$$\overline{\Omega} \subset \partial Q, \quad \operatorname{mes}(\partial Q \setminus \overline{\Omega}) > 0, \quad (4.7)$$

причем  $\partial Q \setminus \bar{\Omega}$  – открытое множество на поверхности  $\partial Q$ .

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу дифракции на системе частично экранированных тел  $Q$  стороннего электромагнитного поля  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ , являющегося решением системы уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = -i\omega\varepsilon_e \mathbf{E}_0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = i\omega\mu_e \mathbf{H}_0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Требуется определить полное электромагнитное поле  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = (\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s) + (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$ , удовлетворяющее в  $\mathbb{R}^3 \setminus \partial Q$  системе уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\hat{\varepsilon}\mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_e \mathbf{H}, \end{cases} \quad (4.9)$$

условиям непрерывности касательных компонент

$$[\mathbf{E}_\tau]|_{\partial Q'} = [\mathbf{H}_\tau]|_{\partial Q'} = 0 \quad (4.10)$$

на неэкранированной части границы области неоднородности, условию

$$\mathbf{E}_\tau|_\Omega = 0, \quad (4.11)$$

во внутренних точках экрана  $\Omega$ , условиям конечности энергии в любом ограниченном объеме пространства

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in \mathbf{L}_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3) \quad (4.12)$$

и условиям излучения Сильвера-Мюллера на бесконечности для рассеянного поля:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s &= o(1/r), & \operatorname{Im} k_e &> 0, \\ \mathbf{H}_s \times \mathbf{e}_r - \mathbf{E}_s &= o(1/r), & \mathbf{E}_s \times \mathbf{e}_r - \mathbf{H}_s &= o(1/r), \\ \mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s &= O(1/r), & \operatorname{Im} k_e &= 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

при  $r \rightarrow \infty$ . Здесь  $r = |x|$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ .

Потребуем также, чтобы полное поле удовлетворяло следующим условиям гладкости:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^1(Q) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}) \cap C(\overline{Q} \setminus \overline{\Omega}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus (\overline{Q} \cup \overline{\Omega})) \\ \cap_{\delta>0} C(\overline{P^+} \setminus \partial\Omega_\delta) \cap_{\delta>0} C(\overline{P^-} \setminus \partial\Omega_\delta). \end{aligned} \quad (4.14)$$

**Определение 4.1.** Решение  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  задачи (4.9)–(4.13), удовлетворяющее условиям (4.14), называется **квазиклассическим решением** задачи дифракции в дифференциальной формулировке.

**Единственность квазиклассического решения задачи дифракции**

**Теорема 4.1.** [133, 136] Пусть свободное от рассеивателей трехмерное пространство характеризуется постоянными значениями проницаемостей  $\varepsilon_e, \mu_e$ , удовлетворяющих условиям (4.1) и (4.3). Диэлектрическая проницаемость в  $Q$  удовлетворяет одному из условий:

- $\text{Im } \varepsilon_{ij}(x) > 0$  в  $Q$ , тензор  $\widehat{\varepsilon}(x)$  удовлетворяет условиям (4.3)–(4.6) и является симметрическим;
- $\text{Im } \varepsilon_{ij}(x) \equiv 0$  в  $Q$  и  $\widehat{\varepsilon}(x) = \varepsilon(x)\widehat{\mathbf{I}}$ .

Тогда если квазиклассическое решение задачи (4.9)–(4.13) существует, то оно единственно.

*Доказательство.* 1. Пусть  $B = B_r(0)$  – такой шар радиуса  $r$  с центром в начале координат, что  $B \supset \overline{Q}$ . Рассмотрим ограниченные области  $V_1 := Q$  и  $V_2 := B \setminus \overline{Q}$ . Единичный вектор нормали на поверхности  $\partial Q$  (или  $\partial B$ ), внешней по отношению к области  $Q$  ( $B$ ) будем обозначать одним и тем же символом  $\mathbf{n}$  – из контекста всегда понятно, о какой нормали идет речь.

Пусть  $\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$  – сужения поля на области  $V_i$ . Переформулируем исходную краевую задачу в областях  $V_i$ :

$$\text{rot } \mathbf{H}_1 = -i\omega\widehat{\varepsilon}\mathbf{E}_1, \quad \text{rot } \mathbf{E}_1 = i\omega\mu_e\mathbf{H}_1 \text{ в } V_1, \quad (4.15)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_2 = -i\omega\varepsilon_e \mathbf{E}_2, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_2 = i\omega\mu_e \mathbf{H}_2 \text{ в } V_2, \quad (4.16)$$

$$\mathbf{E}_{1,\tau}|_{\partial Q \setminus \bar{\Omega}} = \mathbf{E}_{2,\tau}|_{\partial Q \setminus \bar{\Omega}}, \quad \mathbf{H}_{1,\tau}|_{\partial Q \setminus \bar{\Omega}} = \mathbf{H}_{2,\tau}|_{\partial Q \setminus \bar{\Omega}}, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{E}_{1,\tau}|_{\Omega} = \mathbf{E}_{2,\tau}|_{\Omega} = 0,$$

причем  $\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$  должны удовлетворять в  $\bar{V}_i$  условиям гладкости, вытекающим из (4.14).

Применяя лемму Лоренца (см. 129 Главы 3), получим:

$$\int_{\partial Q} (\mathbf{E}_1 \times \bar{\mathbf{H}}_1 + \bar{\mathbf{E}}_1 \times \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{n} ds = 0, \quad (4.18)$$

$$- \int_{\partial Q} (\mathbf{E}_2 \times \bar{\mathbf{H}}_2 + \bar{\mathbf{E}}_2 \times \mathbf{H}_2) \cdot \mathbf{n} ds + \quad (4.19)$$

$$+ \int_{\partial B} (\mathbf{E}_2 \times \bar{\mathbf{H}}_2 + \bar{\mathbf{E}}_2 \times \mathbf{H}_2) \cdot \mathbf{n} ds = 0.$$

Суммируя (4.18) и (4.19), получим с учетом условий сопряжения на  $\partial Q \setminus \bar{\Omega}$  и равенства нулю на  $\Omega$  касательной составляющей  $\mathbf{E}_\tau$  электрического поля:

$$\int_{\partial B} (\mathbf{E}_2 \times \bar{\mathbf{H}}_2 + \bar{\mathbf{E}}_2 \times \mathbf{H}_2) \cdot \mathbf{n} ds = 0. \quad (4.20)$$

Преобразуем левую часть (4.20) с учетом условий Сильвера-Мюллера:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial B} (\mathbf{E}_2 \times \bar{\mathbf{H}}_2 + \bar{\mathbf{E}}_2 \times \mathbf{H}_2) \cdot \mathbf{n} ds = \\ & \int_{\partial B} (\mathbf{E}_2 \times \bar{\mathbf{H}}_2 + \overline{\mathbf{E}_2 \times \bar{\mathbf{H}}_2}) \cdot \mathbf{n} ds = 2 \operatorname{Re} \int_{\partial B} (\mathbf{E}_2 \times \bar{\mathbf{H}}_2) \cdot \mathbf{n} ds = \\ & = 2 \operatorname{Re} \int_{\partial B} ((\mathbf{H}_2 \times \mathbf{n} + o(1/r)) \times \bar{\mathbf{H}}_2) \cdot \mathbf{n} ds = \\ & = 2 \operatorname{Re} \int_{\partial B} (\mathbf{H}_2 \times \mathbf{n} \times \bar{\mathbf{H}}_2) \cdot \mathbf{n} ds + o(1) = \\ & = 2 \operatorname{Re} \int_{\partial B} (\mathbf{H}_2 \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{H}_2 \times \mathbf{n}) ds + o(1) = \int_{\partial B} |\mathbf{H}_2 \times \mathbf{n}|^2 ds + o(1) = \\ & = \int_{\partial B} |\mathbf{H}_{2,\tau}|^2 ds + o(1). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_{\partial B} |\mathbf{H}_{2,\tau}|^2 ds = o(1).$$

Применяя лемму Реллиха (см. [95], с.86), заключаем, что  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2 \equiv 0$  вне  $\bar{Q}$ . Таким образом, установлено равенство нулю электромагнитного поля вне рассеивателя:

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \equiv 0 \text{ в } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}. \quad (4.21)$$

Докажем теперь, что  $\mathbf{E} = \mathbf{H} \equiv 0$  в  $Q$ .

Из непрерывности касательных компонент поля, (4.10), (4.14) и (4.21) следует

$$\mathbf{E}_\tau = \mathbf{H}_\tau = 0 \text{ на } \partial Q'. \quad (4.22)$$

Учитывая условие для скачка нормальной компоненты магнитного поля на границе раздела сред (см. [16], с. 41 и [51], с.43)

$$[\mu \mathbf{H}_n]|_{\partial Q'} = 0 \quad (4.23)$$

и требование  $\mu \equiv \mu_e$  всюду в  $\mathbb{R}^3$ , выводим

$$\mathbf{H}_n = 0 \text{ на } \partial Q'. \quad (4.24)$$

Далее воспользуемся свойством [16, 51]

$$[\varepsilon \mathbf{E}_n]|_{\partial Q'} = 0 \quad (4.25)$$

для скачка нормальной составляющей электрического поля. Из доказанного выше следует, что  $\varepsilon_e \mathbf{E}_n|_{\partial Q'} = 0$ , если выполнить операцию касательного следа извне  $Q$ . Из (4.25) для следа изнутри  $Q$  следует, что  $\varepsilon \mathbf{E}_n|_{\partial Q'} = 0$ . Так как диэлектрическая проницаемость не обращается в нуль на границе тела  $Q$ , то

$$\mathbf{E}_n|_{\partial Q'} = 0 \quad (4.26)$$



с каждой стороны поверхности  $\partial Q'$ . Таким образом, для полного электромагнитного поля выполняются (в классическом смысле) однородные условия на части границы области неоднородности:

$$\mathbf{E}|_{\partial Q'} = \mathbf{H}|_{\partial Q'} = 0. \quad (4.27)$$

Теперь можно записать включения

$$\mathbf{E}, \widehat{\varepsilon}\mathbf{E}, \mathbf{H} \in C_0(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\delta). \quad (4.28)$$

Выражая  $\mathbf{E}$  через  $\mathbf{H}$ , получим из уравнения (4.9) следующее равенство для  $\mathbf{H}$ :

$$\Delta \mathbf{H} + \frac{1}{\varepsilon(x)} \operatorname{grad} \varepsilon(x) \times \operatorname{rot} \mathbf{H} + k^2(x) \mathbf{H} = 0, \quad x \in Q, \quad (4.29)$$

где  $k^2(x) = \omega^2 \mu_e \varepsilon(x)$ , причем уравнение выполняется в классическом смысле.

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x) &= -\frac{1}{\varepsilon(x)} \operatorname{grad} \varepsilon(x) \times \operatorname{rot} \mathbf{H}(x) - k^2(x) \mathbf{H}(x) - \mathbf{H}(x) = \\ &= i\omega \operatorname{grad} \varepsilon(x) \times \mathbf{E}(x) - k^2(x) \mathbf{H}(x) - \mathbf{H}(x), \quad x \in Q. \end{aligned}$$

Тогда (4.29) можно записать в виде

$$\Delta \mathbf{H}(x) - \mathbf{H}(x) = \mathbf{F}(x), \quad x \in Q, \quad (4.30)$$

причем из установленных выше свойств решения однородной краевой задачи следует, что

$$\mathbf{F} \in C(\overline{Q} \setminus \overline{\Omega}), \quad \mathbf{F}|_{\partial Q \setminus \overline{\Omega}} = 0. \quad (4.31)$$

Обозначим через  $\tilde{\mathbf{F}}$  продолжение нулем функции  $\mathbf{F}$  вне  $Q$ . Тогда

$$\tilde{\mathbf{F}} \in C_0(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\delta). \quad (4.32)$$

Проверим, что в области  $V = Q \setminus \overline{\Omega}_\delta$  выполнены условия Утверждения А (с. 134).

Граница  $\partial V$  содержит гладкую часть  $S_1 = \partial Q \setminus \bar{\Omega}_\delta$  – поверхность класса не ниже  $C^3$  (то есть,  $p \geq 1$ ), оператор  $L = L' = \Delta - 1$  является сильно эллиптическим самосопряженным оператором порядка 2 ( $m = 1$ ) с постоянными коэффициентами. Функция  $\mathbf{H}$  принадлежит пространству  $\mathbf{L}_2(V) \supset C(\bar{V})$  ( $s = 0$ ). Так как, по крайней мере,  $\mathbf{F} \in \mathbf{L}_2(V)$ , то правая часть  $\mathbf{F} \in H_{\text{loc}}^{-2}(V, S_1)$ . Однородные условия  $D^0 \mathbf{H}^i = 0$  выполнены на поверхности  $S_1$  в силу ранее доказанного. Уравнение  $Lu = f$  также удовлетворено для всех компонент  $\mathbf{H}^i$ , так как для всех  $v \in H^2(V) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(V)$  верно

$$(L\mathbf{H}^i, v)_0 \equiv ((\Delta - 1)\mathbf{H}^i, v)_0 = (\mathbf{F}^i, v)_0.$$

Теперь, учитывая соотношения между параметрами  $p, s, m$  и фактическую принадлежность вектор-функции  $\mathbf{F}$  классу  $\mathbf{L}_2(V) = H^0(V)$  (то есть,  $t = 0$ ), заключаем из Утверждения А, что

$$\mathbf{H}^i \in H_{\text{loc}}^2(V), \text{ и } D^\beta \mathbf{H}^i|_{S_1} = 0, |\beta| \leq 0.$$

Следовательно

$$\mathbf{H} \in C_0^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\delta), \quad \alpha \in (0, 1/2).$$

Рассуждая аналогично, получаем, что

$$\mathbf{E} \in C_0^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\delta), \quad \alpha \in (0, 1/2).$$

Тогда

$$\tilde{\mathbf{F}} \in C_0^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\delta).$$

Из Утверждения Б на с. 135 при  $l = 2$  получим

$$\mathbf{H} \in C_0^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\delta),$$

а из принципа единственного продолжения [63] выведем, что

$$\mathbf{H} \equiv 0 \text{ в } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\delta.$$

Заметим теперь, что область  $\Omega_\delta$ , содержащая экран  $\Omega$  может быть выбрана так, что для любой внутренней точки  $x \in Q \setminus \overline{\Omega}$  области неоднородности (сколь угодно близкой к  $\partial Q$ ,) можно выбрать  $\delta > 0$  настолько малым, чтобы  $x$  лежала вне  $\overline{\Omega_\delta}$ . Отсюда окончательно заключаем, что

$$\mathbf{H} \equiv \mathbf{E} \equiv 0 \text{ в } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}.$$

Теорема доказана. □

## 4.2 Система интегро-дифференциальных уравнений. Коэрци- тивность квадратичной формы оператора задачи дифрак- ции. Его непрерывная обратимость

Будем использовать представление полного электрического поля в виде, описанном в предыдущей главе:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \quad (4.33)$$

где  $\mathbf{E}_1$  – поле, рассеянное экраном  $\Omega$ , а  $\mathbf{E}_2$  – поле, рассеянное телом  $Q$ .

Компоненты полного магнитного поля выразим через соответствующие компоненты электрического поля, полагая  $\mathbf{H}_i = \frac{1}{i\omega\mu_e} \text{rot } \mathbf{E}_i$ .

Будем искать поле  $\mathbf{E}_1$  в виде

$$\mathbf{E}_1(x) = (\text{grad div} + k_e^2) \int_{\Omega} G(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \quad (4.34)$$

где  $k_e$  – волновое число ( $k_e^2 = \omega^2 \varepsilon_e \mu_e$ ),  $G(x, y) = \frac{e^{ik_e|x-y|}}{4\pi|x-y|}$  – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца в свободном пространстве,  $\mathbf{u}$  – неизвестная поверхностная плотность на экране  $\Omega$ .

Следовательно, для поля  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$  верна система уравнений в  $\mathbb{R}^3 \setminus \partial Q$  :

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H}_2 = -i\omega\varepsilon_e \mathbf{E}_2 + \mathbf{j}_{p,E}, \\ \text{rot } \mathbf{E}_2 = i\omega\mu_e \mathbf{H}_2, \end{cases} \quad (4.35)$$

где  $\mathbf{j}_{p,E} = -i\omega(\widehat{\varepsilon} - \varepsilon_e \widehat{\mathbf{I}}) \mathbf{E}$  – ток поляризации.

Электрическое поле  $\mathbf{E}_2$  в  $\mathbb{R}^3 \setminus \partial Q$  области неоднородности определим с помощью векторного потенциала

$$\mathbf{A}_{\mathbf{E}_2}(x) = \int_Q G(x, y) \mathbf{j}_{p,E}(y) dy \quad (4.36)$$

по формуле

$$\mathbf{E}_2 = i\omega\mu_e \mathbf{A}_{\mathbf{E}_2} - \frac{1}{i\omega\varepsilon_e} \text{grad div } \mathbf{A}_{\mathbf{E}_2}. \quad (4.37)$$

Из определения полей  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{E}_1$  а также из равенств (4.33), (4.34), (4.36) и (4.37) выводим представление полного электрического поля

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) = & (k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(y) - \widehat{\mathbf{I}}) \mathbf{E}(y) dy + \\ & + (k_e^2 + \text{grad div}) \int_{\Omega} G(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y + \mathbf{E}_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial Q. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Рассматривая  $x$  в области неоднородности, получаем интегро-дифференциальное уравнение для  $\mathbf{E}$  в  $Q$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) - & (k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(y) - \widehat{\mathbf{I}}) \mathbf{E}(y) dy - \\ & - (k_e^2 + \text{grad div}) \int_{\Omega} G(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y = \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q. \end{aligned} \quad (4.39)$$

*Замечание 4.1.* Из условий гладкости поля следует, что уравнение (4.39) выполнено в  $Q$  поточечно (в классическом смысле). Действительно, так как  $\Omega \subset \partial Q$ , то во внутренних точках области  $Q$  поверхностный интеграл в (4.39) является бесконечно дифференцируемым. Для произвольной точки  $x \in Q$  выберем область  $Q' \subset Q$  так, чтобы  $Q' \ni x$  и  $\partial Q \cap \partial Q' = \emptyset$ . Введем ток  $\mathbf{J}(y) = (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(y) - \widehat{\mathbf{I}}) \mathbf{E}(y)$  и представим объемный потенциал в (4.39) в виде

$$\begin{aligned} \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy &= \int_{Q'} G(x, y) \mathbf{J}(y) dy + \int_{Q \setminus Q'} G(x, y) \mathbf{J}(y) dy = \\ &= I_1(x) + I_2(x). \end{aligned}$$

Слагаемое  $I_2(x)$  бесконечно дифференцируемо в  $Q'$ , а  $I_1(x)$  принадлежит по крайней мере классу  $C^2(Q')$ , так как плотность объемного потенциала  $\mathbf{J} \in C^1(Q') \cap C(\overline{Q'})$  (см. [6], с. 451). Теперь из уравнения (4.39) в  $Q$  с учетом (4.14) следует, что

$$\text{grad div} \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy \in C(Q).$$

Рассмотрим представление (4.38) полного электрического поля и применим условие Дирихле на идеально проводящем экране. Получим интегро-дифференциальное уравнение на  $\Omega$  :

$$\begin{aligned} & \left( - (k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(y) - \widehat{\mathbf{I}}) \mathbf{E}(y) dy - \right. \\ & \left. - (k_e^2 + \text{grad div}) \int_{\Omega} G(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y \right)_{\tau} = \mathbf{E}_{0,\tau}(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Вывод уравнения (4.40) требует дополнительного пояснения.

*Замечание 4.2.* 1. Пусть плотность  $\mathbf{u}$  такова, что верно включение  $\mathbf{u}, \text{div} \mathbf{u} \in C^1(\Omega)$ . Тогда во внутренних точках экрана  $\Omega$  касательные компоненты поля  $\mathbf{E}_1$  непрерывны (см. [17], с.94) вплоть до экрана  $\Omega$ . В силу постановки задачи  $\mathbf{E}_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ , поэтому существует предел  $\mathbf{E}_{0,\tau}(x)$  при  $x \rightarrow x_0 \in \Omega$ . Для полного поля  $\mathbf{E}$  существование такого предела обеспечено условием Дирихле. Тогда из уравнения (4.39) следует, что слагаемое

$$\left( (k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy \right)_{\tau}$$

непрерывно вплоть до  $\Omega$  (во внутренних точках экрана). Таким образом, второе интегро-дифференциальное уравнение можно рассматривать «поточечно».

2. Пусть условие  $\mathbf{u}, \text{div} \mathbf{u} \in C^1(\Omega)$  не выполняется. В этом случае, по крайней мере,  $\mathbf{u}, \text{div} \mathbf{u} \in \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega})$ , а все члены в равенствах (4.39) и (4.38) являются элементами пространства  $\mathbf{L}_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ . В силу уравнений Максвелла

и ротор этих составляющих поля также принадлежит  $\mathbf{L}_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ . Тогда [61] для вектор-функций из  $\mathbf{L}_2(Q)$  на гладкой части границы  $\partial Q$  существует след из пространства  $H^{-1/2}$ . Следовательно, уравнение (4.40) выполнено и понимается в смысле следов.

Таким образом, получена [120, 136] система интегро-дифференциальных уравнений задачи дифракции (4.9)–(4.13):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) - (k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y)(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(y) - \widehat{\mathbf{I}})\mathbf{E}(y)dy - \\ - (k_e^2 + \text{grad div}) \int_{\Omega} G(x, y)\mathbf{u}(y)ds_y = \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q, \\ \left( -(k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y)(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(y) - \widehat{\mathbf{I}})\mathbf{E}(y)dy - \right. \\ \left. -(k_e^2 + \text{grad div}) \int_{\Omega} G(x, y)\mathbf{u}(y)ds_y \right)_{\tau} = \mathbf{E}_{0,\tau}(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Символом  $\mathbf{v}_{\tau}$  обозначена операция взятия касательной компоненты векторного поля  $\mathbf{v}$  во внутренних точках экрана  $\Omega$  (см. [17], с. 97):

$$(\mathbf{v})_{\tau} = \mathbf{v} - \boldsymbol{\nu}(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}).$$

Разделив первое уравнение (4.41) на  $\bar{k}_e$ , а второе – на  $k_e$ , перепишем систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{k}_e} \widehat{\boldsymbol{\xi}}(x)\mathbf{J}(x) - \frac{1}{\bar{k}_e} (k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y)\mathbf{J}(y)dy - \\ - \frac{1}{\bar{k}_e} (k_e^2 + \text{grad div}) \int_{\Omega} G(x, y)\mathbf{u}(y)ds_y = \\ = \frac{1}{\bar{k}_e} \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q, \\ \left( - (k_e + \frac{1}{k_e} \text{grad div}) \int_Q G(x, y)\mathbf{J}(y)dy - \right. \\ \left. - (k_e + \frac{1}{k_e} \text{grad div}) \int_{\Omega} G(x, y)\mathbf{u}(y)ds_y \right)_{\tau} = \\ = \frac{1}{k_e} \mathbf{E}_{0,\tau}(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Представим функцию Грина  $G$  в виде  $G(x, y) = G_0(x, y) + G_1(x, y)$ , где

$$G_0(x, y) = \frac{e^{-|x-y|}}{4\pi |x-y|},$$

и определим матричный оператор системы (4.42):

$$\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\mathcal{A}} + \widehat{\mathcal{K}}^1 + \widehat{\mathcal{K}}^2. \quad (4.43)$$

Компоненты операторов в (4.43) определяются согласно (4.42):

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{A}}_{11}\mathbf{J}(x) &= \frac{1}{k_e}\widehat{\xi}(x)\mathbf{J}(x) - \frac{1}{k_e}\text{grad div} \int_Q G_0(x, y)\mathbf{J}(y)dy, \quad x \in Q, \\ \widehat{\mathcal{A}}_{12}\mathbf{u}(x) &= -\frac{1}{k_e}\text{grad div} \int_\Omega G_0(x, y)\mathbf{u}(y)ds_y, \quad x \in Q, \\ \widehat{\mathcal{A}}_{21}\mathbf{J}(x) &= \left(-\frac{1}{k_e}\text{grad div} \int_Q G_0(x, y)\mathbf{J}(y)dy\right)_\tau, \quad x \in \Omega, \\ \widehat{\mathcal{A}}_{22}\mathbf{u}(x) &= \left((k_e + \frac{1}{k_e}\text{grad div}) \int_\Omega G_0(x, y)\mathbf{u}(y)ds_y\right)_\tau, \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{K}}_{11}^1\mathbf{J}(x) &= -\frac{k_e^2}{k_e} \int_Q G_0(x, y)\mathbf{J}(y)dy, \quad x \in Q, \\ \widehat{\mathcal{K}}_{12}^1\mathbf{u}(x) &= -\frac{k_e^2}{k_e} \int_\Omega G_0(x, y)\mathbf{u}(y)ds_y, \quad x \in Q, \\ \widehat{\mathcal{K}}_{21}^1\mathbf{J}(x) &= \left(-k_e \int_Q G_0(x, y)\mathbf{J}(y)dy\right)_\tau, \quad x \in \Omega, \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\widehat{\mathcal{K}}_{22}^1\mathbf{u}(x) = \mathbf{O}, \quad x \in \Omega.$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{K}}_{11}^2\mathbf{J}(x) &= -\frac{1}{k_e}(k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G_1(x, y)\mathbf{J}(y)dy, \quad x \in Q, \\ \widehat{\mathcal{K}}_{12}^2\mathbf{u}(x) &= -\frac{1}{k_e}(k_e^2 + \text{grad div}) \int_\Omega G_1(x, y)\mathbf{u}(y)ds_y, \quad x \in Q, \\ \widehat{\mathcal{K}}_{21}^2\mathbf{J}(x) &= -\left((k_e + \frac{1}{k_e}\text{grad div}) \int_Q G_1(x, y)\mathbf{J}(y)dy\right)_\tau, \quad x \in \Omega, \\ \widehat{\mathcal{K}}_{22}^2\mathbf{u}(x) &= -\left((k_e + \frac{1}{k_e}\text{grad div}) \int_\Omega G_1(x, y)\mathbf{u}(y)ds_y\right)_\tau, \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Будем рассматривать оператор  $\widehat{\mathcal{L}}$  в тех же пространствах Соболева на многообразиях с краем, которые были определены в предыдущей главе,

$$\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{L}_2(Q) \times W(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbf{L}_2(Q) \times W'(\Omega). \quad (4.47)$$

### Коэрцитивность квадратичной формы оператора задачи дифракции. Его непрерывная обратимость

Будем использовать введенные ранее обозначения для области определения, множества значений матричного оператора  $\widehat{\mathcal{L}}$  и вектора решений системы (4.42):

$$\mathbf{L}_2(Q) \times W(\overline{\Omega}) =: \mathbf{X}, \quad \mathbf{L}_2(Q) \times W'(\Omega) =: \mathbf{X}', \quad (\mathbf{J}, \mathbf{u}) =: \mathbf{w} \in \mathbf{X}.$$

**Теорема 4.2.** [120, 122, 136] Пусть постоянные  $\varepsilon_e$ ,  $\mu_e$  удовлетворяют условиям (4.1) (причем  $\text{Im } k_e > 0$ ), а тензор диэлектрической проницаемости удовлетворяет условиям (4.3), (4.4)–(4.6). Тогда квадратичная форма  $\langle \widehat{\mathcal{L}}\mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle$  матричного оператора  $\widehat{\mathcal{L}}$  коэрцитивна, то есть найдется константа  $\gamma > 0$  и такой компактный оператор  $\widehat{\mathcal{L}}^c : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$ , что для всех  $\mathbf{w} \in \mathbf{X}$  выполняется неравенство

$$\text{Im} \langle (\widehat{\mathcal{L}} - \widehat{\mathcal{L}}^c)\mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{X}} \geq \gamma \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{X}}^2. \quad (4.48)$$

*Замечание 4.3.* В неравенстве (4.48) и далее скобки  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  используются для обозначения соотношения антидвойственности (антидвойственного спаривания) на паре гильбертовых пространств  $H', H$ , где  $H'$  антидвойственно к  $H$ . В нашей задаче и в формуле (4.48)  $H = \mathbf{X}$ , а  $H' = \mathbf{X}'$ . Такие же скобки будут использоваться для обозначения спаривания других пространств:  $H = H' = \mathbf{L}_2(Q)$  и  $H = W$ ,  $H' = W'$ . Во избежание путаницы будем в качестве нижнего индекса скобок указывать первое из взаимно двойственных пространств.

*Доказательство.* 1. Докажем сначала компактность операторов  $\widehat{\mathcal{K}}^1$ ,  $\widehat{\mathcal{K}}^2$  в выбранных пространствах. Компактность  $\widehat{\mathcal{K}}^2$  следует из того, интеграль-



ные операторы в определении всех компонент  $\widehat{\mathcal{K}}_{ij}^2$  имеют ядра с устранимой особенностью, вследствие чего допустимо вычисление производных (по крайней мере, первого порядка) под знаком интеграла.

Для установления компактности  $\widehat{\mathcal{K}}^1$  воспользуемся свойствами операторов типа потенциала, оператора следа и операторов вложения в пространствах Соболева.

Так как  $\mathbf{u} \in W$ , то  $\operatorname{div} \mathbf{u} \in \tilde{H}^{-1/2}(\Omega)$  (см. [17] и представление (3.45) в предыдущей главе). Поэтому  $K_{12}^1 \mathbf{u} \in H^1(Q)$  [17, 67] и оператор  $\widehat{\mathcal{K}}_{12}^1 : W \rightarrow \mathbf{L}_2(Q)$  компактен в силу компактности вложения  $H^1(Q)$  в  $\mathbf{L}_2(Q)$ .

Аналогично, из условия  $\mathbf{J} \in \mathbf{L}_2(Q)$  следует ([63], с. 208)

$$\int_Q G_0(x, y) \mathbf{J}(y) dy \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3),$$

откуда  $\widehat{\mathcal{K}}_{11}^1 \mathbf{J} \in H^2(Q)$  и  $K_{21}^1 \mathbf{J} \in H^{3/2}(\Omega)$ ; следовательно, операторы  $\widehat{\mathcal{K}}_{11}^1 : \mathbf{L}_2(Q) \rightarrow \mathbf{L}_2(Q)$  и  $\widehat{\mathcal{K}}_{21}^1 : \mathbf{L}_2(Q) \rightarrow W'$  компактны.

2. Теперь покажем, что форма  $\langle \widehat{\mathcal{A}} \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle$  оператора  $\widehat{\mathcal{A}}$  коэрцитивна. Рассмотрим квадратичную форму покомпонентно:

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\mathcal{A}} \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{X}} &= \left\langle \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{A}}_{11} & \widehat{\mathcal{A}}_{12} \\ \widehat{\mathcal{A}}_{21} & \widehat{\mathcal{A}}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbf{X}} = \\ &= \langle \widehat{\mathcal{A}}_{11} \mathbf{J}, \mathbf{J} \rangle_{\mathbf{L}_2(Q)} + \langle \widehat{\mathcal{A}}_{12} \mathbf{u}, \mathbf{J} \rangle_{\mathbf{L}_2(Q)} + \langle \widehat{\mathcal{A}}_{21} \mathbf{J}, \mathbf{u} \rangle_W + \langle \widehat{\mathcal{A}}_{22} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_W. \end{aligned} \quad (4.49)$$

В предыдущей главе было показано, что при выполнении ограничений на свойства пространства и объемного рассеивателя оператор

$$\widehat{\mathcal{A}} \mathbf{J}(x) = \hat{\xi}(x) \mathbf{J}(x) - \operatorname{grad} \operatorname{div} \int_Q G_0(x, y) \mathbf{J}(y) dy = \bar{k}_e \widehat{\mathcal{A}}_{11} \mathbf{J}(x)$$

является фредгольмовым с нулевым индексом (и эллиптическим), причем для его главной части  $\widehat{\mathcal{A}}_0$  верны неравенства

$$\operatorname{Re} \langle \widehat{\mathcal{A}}_0 \mathbf{J}, \mathbf{J} \rangle_{\mathbf{L}_2(Q)} \geq \gamma_1 \|\mathbf{J}\|_{\mathbf{L}_2(Q)}^2 \quad \text{при } \gamma_1 > 1, \quad (4.50)$$

$$\operatorname{Im} \langle \widehat{\mathcal{A}}_0 \mathbf{J}, \mathbf{J} \rangle_{\mathbf{L}_2(Q)} \geq \gamma_0 \|\mathbf{J}\|_{\mathbf{L}_2(Q)}^2 \quad \text{при } \gamma_0 \neq 0. \quad (4.51)$$

Обозначая  $1/\bar{k}_e = k_1$ ,  $k_1 = k'_1 + ik''_1$ , получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\langle \widehat{\mathcal{A}}_{11}\mathbf{J}, \mathbf{J}\rangle_{\mathbf{L}_2(Q)} &= \operatorname{Im}\left(k_1\langle \widehat{\mathcal{A}}\mathbf{J}, \mathbf{J}\rangle_{\mathbf{L}_2(Q)}\right) = \\ &= k'_1 \operatorname{Im}\langle \widehat{\mathcal{A}}\mathbf{J}, \mathbf{J}\rangle_{\mathbf{L}_2(Q)} + k''_1 \operatorname{Re}\langle \widehat{\mathcal{A}}\mathbf{J}, \mathbf{J}\rangle_{\mathbf{L}_2(Q)}. \end{aligned}$$

Предположим дополнительно, что если  $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r$  удовлетворяет (4.5),(4.6), то  $\operatorname{Im}(k_e) \operatorname{Re}(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) - \operatorname{Re}(k_e) \operatorname{Im}(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) \geq C_4|\mathbf{v}|^2$  при некотором  $C_4 > 0$ .

Отсюда, а также из (4.51), (4.50) и ограничений на  $\varepsilon_e$  выводим:

$$\operatorname{Im}\langle (\widehat{\mathcal{A}}_{11} - \widehat{\mathcal{A}}_{11}^c)\mathbf{J}, \mathbf{J}\rangle_{\mathbf{L}_2(Q)} \geq \gamma_2\|\mathbf{J}\|_{\mathbf{L}_2(Q)}^2, \quad (4.52)$$

где  $\gamma_2 > 0$ , а  $\widehat{\mathcal{A}}_{11}^c : \mathbf{L}_2(Q) \rightarrow \mathbf{L}_2(Q)$  – компактный оператор.

Как показано в ([17], с. 109), форма  $\langle \widehat{\mathcal{A}}_{22}\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_W$  коэрцитивна:

$$\operatorname{Im}\langle (\widehat{\mathcal{A}}_{22} - \widehat{\mathcal{A}}_{22}^c)\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_W \geq \gamma'\|\mathbf{u}\|_W^2, \quad \gamma' > 0. \quad (4.53)$$

Покажем, что

$$\langle \widehat{\mathcal{A}}_{12}\mathbf{u}, \mathbf{J}\rangle_{\mathbf{L}_2(Q)} = \overline{\langle \widehat{\mathcal{A}}_{21}\mathbf{J}, \mathbf{u}\rangle_W}. \quad (4.54)$$

Обозначим  $\frac{1}{k_e} = \frac{k_e}{|k_e|^2} =: k_1$ ,  $\bar{k}_1 = k_2$ . Тогда

$$\begin{aligned} -\langle \widehat{\mathcal{A}}_{12}\mathbf{u}, \mathbf{J}\rangle_{\mathbf{L}_2(Q)} &= \int_Q \overline{\mathbf{J}(x)} k_1 \operatorname{grad}_x \operatorname{div}_x \int_{\Omega} G_0(x, y)\mathbf{u}(y)ds_y dx = \\ &= k_1 \int_Q \operatorname{div}_x \left( \overline{\mathbf{J}(x)} \operatorname{div}_x \int_{\Omega} G_0(x, y)\mathbf{u}(y)ds_y \right) dx - \\ &- k_1 \int_Q \operatorname{div}_x \overline{\mathbf{J}(x)} \operatorname{div}_x \int_{\Omega} G_0(x, y)\mathbf{u}(y)ds_y dx = \quad (4.55) \\ &= k_1 \int_{\partial Q} \overline{\mathbf{J}(x)} \operatorname{div}_x \left( \int_{\Omega} G_0(x, y)\mathbf{u}(y)ds_y \right) \cdot \mathbf{n}_Q(x) ds_x \\ &- k_1 \int_Q \operatorname{div}_x \overline{\mathbf{J}(x)} \operatorname{div}_x \int_{\Omega} G_0(x, y)\mathbf{u}(y)ds_y dx =: i_1 + i_2. \end{aligned}$$

Исследуем квадратичную форму  $\langle \widehat{\mathcal{A}}_{21}\mathbf{J}, \mathbf{u}\rangle_W$  с учетом того, что  $\mathbf{u}$  кас-

тельно к  $\Omega$  :

$$\begin{aligned}
-\langle \widehat{\mathcal{A}}_{21} \mathbf{J}, \mathbf{u} \rangle_W &= \int_{\Omega} \overline{\mathbf{u}(x)} k_2 \left( \text{grad}_x \text{div}_x \int_Q G_0(x, y) \mathbf{J}(y) dy \right)_{\tau} ds_x = \\
&= k_2 \int_{\Omega} \overline{\mathbf{u}(x)} \text{grad}_x \text{div}_x \int_Q G_0(x, y) \mathbf{J}(y) dy ds_x = \\
&= k_2 \int_{\Omega} \overline{\mathbf{u}(x)} \text{grad}_x \int_Q \text{grad}_x G(x, y) \mathbf{J}(y) dy ds_x = \\
&= -k_2 \int_{\Omega} \overline{\mathbf{u}(x)} \text{grad}_x \int_Q \text{grad}_y G_0(x, y) \mathbf{J}(y) dy ds_x = \\
&= -k_2 \int_{\Omega} \overline{\mathbf{u}(x)} \text{grad}_x \left( \int_Q \text{div}_y (G_0(x, y) \mathbf{J}(y)) dy - \right. \\
&\quad \left. - \int_Q G_0(x, y) \text{div}_y \mathbf{J}(y) dy \right) ds_x =: I_1 + I_2.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Так как

$$\begin{aligned}
I_1 &= -k_2 \int_{\Omega} \overline{\mathbf{u}(x)} \text{grad}_x \int_{\partial Q} G_0(x, y) \mathbf{J}(y) \cdot \mathbf{n}_Q(y) ds_y ds_x = \\
&= -k_2 \int_{\Omega} \overline{\mathbf{u}(y)} \int_{\partial Q} \text{grad}_y G_0(y, x) (\mathbf{J}(x) \cdot \mathbf{n}_Q(x)) ds_x ds_y = \\
&= k_2 \int_{\partial Q} \int_{\Omega} (\overline{\mathbf{u}(y)} \cdot \text{grad}_x G_0(x, y)) (\mathbf{J}(x) \cdot \mathbf{n}_Q(x)) ds_y ds_x = \\
&= k_2 \int_{\partial Q} \mathbf{J}(x) \text{div}_x \left( \int_{\Omega} G_0(x, y) \overline{\mathbf{u}(y)} ds_y \right) \mathbf{n}_Q(x) ds_x = \bar{i}_1
\end{aligned} \tag{4.57}$$

и

$$\begin{aligned}
 I_2 &= k_2 \int_{\Omega} \overline{\mathbf{u}(x)} \operatorname{grad}_x \int_Q G_0(x, y) \operatorname{div}_y \mathbf{J}(y) dy ds_x = \\
 &= k_2 \int_{\Omega} \overline{\mathbf{u}(y)} \int_Q \operatorname{grad}_y G_0(y, x) \operatorname{div}_x \mathbf{J}(x) dx ds_y = \\
 &= k_2 \int_{\Omega} \overline{\mathbf{u}(y)} \int_Q \operatorname{grad}_y G_0(x, y) \operatorname{div}_x \mathbf{J}(x) dx ds_y = \\
 &= -k_2 \int_{\Omega} \overline{\mathbf{u}(y)} \int_Q \operatorname{grad}_x G_0(x, y) \operatorname{div}_x \mathbf{J}(x) dx ds_y = \\
 &= -k_2 \int_Q \operatorname{div}_x \mathbf{J}(x) \int_{\Omega} \operatorname{grad}_x G_0(x, y) \overline{\mathbf{u}(y)} dx ds_y = \bar{i}_2,
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

то получим требуемое соотношение:  $\langle \widehat{\mathcal{A}}_{12} \mathbf{u}, \mathbf{J} \rangle_{\mathbf{L}_2(Q)} = \overline{\langle \widehat{\mathcal{A}}_{21} \mathbf{J}, \mathbf{u} \rangle_W}$ .

Сделанные выкладки правомерны для достаточно гладких вектор-функций  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{J}$ . Ниже даны дополнительные пояснения для  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{J}$  из рассматриваемых пространств Соболева.

Рассмотрим снова форму  $\langle \widehat{\mathcal{A}}_{12} \mathbf{u}, \mathbf{J} \rangle_{\mathbf{L}_2(Q)}$ . Воспользуемся соотношением (см. [17], с.93)

$$\operatorname{div}_x \int_{\Omega} G_0(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y = \int_{\Omega} G_0(x, y) \operatorname{div} \mathbf{u}(y) ds_y,$$

где  $\operatorname{div} \mathbf{u}$  – операция касательной дивергенции (см. [17], с. 93) во внутренних точках экрана. Последовательно получим

$$\mathbf{u} \in W, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} \in H^{-1/2}(\Omega),$$

$$\operatorname{div}_x \int_{\Omega} G_0(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3),$$

откуда

$$\operatorname{grad}_x \operatorname{div}_x \int_{\Omega} G_0(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y \in \mathbf{L}_2(Q),$$

причем все операторы ограничены в указанных пространствах.

Рассмотрим теперь формулу  $\langle \widehat{\mathcal{A}}_{21} \mathbf{J}, \mathbf{u} \rangle_W$ . В силу свойств объемного потенциала, получим из  $\mathbf{J} \in \mathbf{L}_2(Q)$ , что

$$\varphi(x) := \operatorname{div}_x \int_Q G_0(x, y) \mathbf{J}(y) dy \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3).$$

Из равенства  $\operatorname{rot}_\nu(\operatorname{grad} \varphi)_\tau = 0$  ([17], с.87) и свойства ([17], с. 88) антидвойственного к  $W$  пространства

$$W' = \{ \mathbf{f}|_\Omega : \mathbf{f}, \operatorname{rot}_\nu \mathbf{f} \in H^{-1/2}(M) \}$$

закключаем, что

$$(\operatorname{grad}_x \operatorname{div}_x \int_Q G_0(x, y) \mathbf{J}(y) dy)_\tau \in W'.$$

Так как классы  $C_0^\infty(Q)$  и  $C_0^\infty(\Omega)$  плотны в  $\mathbf{L}_2(Q)$  и  $W(\overline{\Omega})$  соответственно, то доказанное равенство может быть продолжено по непрерывности.

Из доказанного выше, а также из (4.52) и (4.53) выводим

$$\operatorname{Im} \langle (\widehat{\mathcal{A}} - \widehat{\mathcal{A}}^c) \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{X}} \geq \gamma \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{X}}^2 \quad (4.59)$$

с некоторой константой  $\gamma > 0$  и компактным оператором  $\widehat{\mathcal{A}}^c : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$ .  $\square$

### Фредгольмовость матричного оператора и его непрерывная обратимость

Результат теоремы 4.2 может быть переформулирован:

**Теорема 4.3.** [120, 122, 136] Пусть постоянные  $\varepsilon_e, \mu_e$  удовлетворяют условиям (4.1) (причем  $\operatorname{Im} k_e > 0$ ), а тензор диэлектрической проницаемости удовлетворяет условиям (4.3), (4.4)–(4.6). Тогда оператор  $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$  является эллиптическим и фредгольмовым с нулевым индексом.

Ниже будет доказана инъективность и непрерывная обратимость матричного оператора  $\widehat{\mathcal{L}}$  задачи дифракции на частично экранированном изотропном неоднородном теле  $Q$ .

Докажем сначала вспомогательное утверждение.

**Лемма 4.1.** [133, 136] Пусть вектор-функция  $\mathbf{f}$ , определенная в ограниченной области  $V$  с гладкой границей  $\partial V$  принадлежит классу

$$\mathbf{L}_2(V, \operatorname{div}) := \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(V) : \operatorname{div} \mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(V)\},$$

а поверхность  $S$  класса  $C^\infty$  с заданным полем нормалей  $\mathbf{n}$  такова, что  $\bar{S} \subset V$ . Тогда на  $S$  выполняется равенство

$$[\mathbf{f}_n]|_S = 0. \quad (4.60)$$

*Доказательство.* Достаточно доказать утверждение для функций  $\mathbf{f} \in C_0^\infty(V)$  таких, что  $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$ , так как они образуют множество, всюду плотное в  $\mathbf{L}_2(V, \operatorname{div})$  (см. [44], с.166-167).

Предположим, что поверхность  $S$  такова, что  $[\mathbf{f}_n]|_S \neq 0$ . Тогда в силу гладкости  $\mathbf{f}$  найдется  $x_0 \in S$ , шар  $B := B_\delta(x_0)$  и такая часть  $S' = S \cap B$  поверхности  $S$ , что  $[\mathbf{f}_n]|_{S'} > 0$ . Определим две смежные подобласти  $B'$  и  $B''$  шара  $B$ :

$$\bar{B} = \bar{B}' \cup \bar{B}'', \quad \bar{S}' = \bar{B}' \cap \bar{B}''.$$

Применяя формулу Стокса, получим

$$\int_{\partial B} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} ds = \int_B \operatorname{div} \mathbf{f} dv = 0.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_B \operatorname{div} \mathbf{f} dv &= \int_{B'} \operatorname{div} \mathbf{f} dv + \int_{B''} \operatorname{div} \mathbf{f} dv = \int_{\partial B'} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\partial B''} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} ds = \\ &= \int_{\partial B' \setminus S'} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\partial B'' \setminus S'} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{S'} [\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}]|_{S'} ds = \\ &= \int_{\partial B} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{S'} [\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}]|_{S'} ds > 0. \end{aligned}$$

Полученное противоречие показывает, что  $[\mathbf{f}_n]|_S = 0$ .  $\square$

Потребуем, как и ранее, чтобы во всех точках области неоднородности существовала функция  $\xi(x) = (\varepsilon_r(x) - 1)^{-1} \in C^\infty(\bar{Q})$ . Всюду в  $\bar{Q}$  для  $\varepsilon_r(x)$  должно выполняться одно из условий (4.4)–(4.6).

Пусть диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon_e$  свободного пространства  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}$  удовлетворяет условиям (4.1).

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) - (k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y)(\varepsilon_r(y) - 1)\mathbf{E}(y)dy - \\ - (k_e^2 + \text{grad div}) \int_{\Omega} G(x, y)\mathbf{u}(y)ds_y = \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q, \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} \left( - (k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y)(\varepsilon_r(y) - 1)\mathbf{E}(y)dy - \right. \\ \left. - (k_e^2 + \text{grad div}) \int_{\Omega} G(x, y)\mathbf{u}(y)ds_y \right)_{\tau} = \mathbf{E}_{0,\tau}(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (4.62)$$

**Теорема 4.4.** [133, 136] Если однородная система (4.61), (4.62) имеет решение  $(\mathbf{E}, \mathbf{u}) \in \mathbf{L}_2(Q) \times W(\overline{\Omega})$  при  $\mathbf{E}_0 \equiv 0$ , то  $\mathbf{E} \equiv 0$  и  $\mathbf{u} \equiv 0$ .

*Доказательство.* 1. Пусть падающее поле  $\mathbf{E}_0$  тождественно равно нулю, а  $(\mathbf{E}, \mathbf{u}) \in \mathbf{L}_2(Q) \times W(\overline{\Omega})$  – решение системы интегро-дифференциальных уравнений с нулевой правой частью.

По решению  $\mathbf{E} \in \mathbf{L}_2(Q)$  определим векторный потенциал

$$\mathbf{V}_1(x) = \int_Q G(x, y)\eta(y)\mathbf{E}(y)dy \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3), \quad (4.63)$$

где  $\eta(x) = (\varepsilon_r(x) - 1) \in C^\infty(\overline{Q})$ , а по  $\mathbf{u} \in W(\overline{\Omega})$  – потенциал

$$\mathbf{V}_2(x) = \int_{\Omega} G(x, y)\mathbf{u}(y)ds \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3). \quad (4.64)$$

Введем новые вектор-функции  $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(x) = \tilde{\mathbf{E}}_1 + \tilde{\mathbf{E}}_2 = (k_0^2 + \text{grad div})V_1(x) + \\ + (k_0^2 + \text{grad div})V_2(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}}(x) = \frac{1}{i\omega\mu_e} \text{rot } \tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{H}}_1 + \tilde{\mathbf{H}}_2 = \\ = -i\omega\varepsilon_0 \text{rot } \mathbf{V}_1(x) - i\omega\varepsilon_0 \text{rot } \mathbf{V}_2(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

2. Покажем, что  $\mathbf{E} \equiv \tilde{\mathbf{E}}$  в  $Q$ .

Перепишем уравнение (4.61):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) - (k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) \eta(y) \mathbf{E}(y) dy = \\ = (k_e^2 + \text{grad div}) \int_{\Omega} G(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y + \mathbf{E}_0(x) =: \mathbf{E}_{0,1}, \quad x \in Q \end{aligned}$$

и введем ток  $\mathbf{J} = \eta(y) \mathbf{E}$ . Получим уравнение для тока  $\mathbf{J}$  с эллиптическим оператором (см. § 4-5 гл. 2)

$$\hat{\mathcal{A}}\mathbf{J} = \xi(x)\mathbf{J}(x) - (k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy.$$

Так как  $\mathbf{E}_{0,1} \in C^\infty(Q)$  и  $\varepsilon(x) \in C^\infty(\bar{Q})$ , то

$$\mathbf{J}, \mathbf{E} \in C^\infty(Q).$$

Тогда, используя бесконечно дифференцируемые функции-срезки и учитывая свойства гладкости объемного потенциала, получим

$$\tilde{\mathbf{E}} \in C^\alpha(Q_1), \quad Q_1 \subset Q, \quad \bar{Q}_1 \cap \bar{Q} = \emptyset.$$

Следовательно, функции  $\mathbf{E}$  и  $\tilde{\mathbf{E}}$  совпадают в  $Q$  в силу уравнений (4.61) при  $\mathbf{E}_0 \equiv 0$  и (4.65). Поэтому знаки  $\sim$  можно опустить.

Имеем в силу доказанного и (4.66):

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \partial Q). \quad (4.67)$$

3. Покажем, что

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in \mathbf{L}_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3), \quad \mathbf{H} \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}). \quad (4.68)$$

Для  $\mathbf{H}$  первое из включений следует из определения через потенциалы; то же верно и для  $\tilde{\mathbf{E}}_1$ . Так как  $\mathbf{u} \in W(\bar{\Omega})$ , то  $\text{div } \mathbf{u} \in W(\bar{\Omega})$ , причем [17]

$$\text{div} \int_{\Omega} G(x, y) \mathbf{u}(y) ds = \int_{\Omega} G(x, y) \text{div } \mathbf{u}(y) ds \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3),$$



откуда следует включение для  $\mathbf{E}$ .

Так как  $\mathbf{V}_1 \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$ , то  $\tilde{\mathbf{H}} \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$ . Учитывая, что  $\mathbf{V}_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$ , получаем  $\mathbf{H} \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$ .

4. Теперь заключаем, что для вектор-функций  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  верны уравнения Максвелла в  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ :

$$\text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H} \quad (4.69)$$

и, следовательно,

$$\text{rot } \mathbf{H} \in \mathbf{L}_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}), \quad \text{rot } \mathbf{E} \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}). \quad (4.70)$$

Тогда [61] на любой гладкой поверхности  $\Omega \subset \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$  существуют (в смысле следов из  $H^{-1/2}(\Omega)$ ) и равны сужения касательных компонент векторов  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ . В частности, на  $\partial Q'$  выполнены условия сопряжения

$$[\mathbf{E}_\tau]|_{\partial Q'} = [\mathbf{H}_\tau]|_{\partial Q'} = 0, \quad (4.71)$$

которые необходимо понимать как равенства нулю следов из пространства  $H^{-1/2}(M)$ . Здесь  $M \supset \partial Q'$  – гладкая замкнутая поверхность, ограничивающая некоторую область  $M^-$ .

Заметим, что из (4.70) следуют в смысле распределений, а вне  $\partial Q'$  – в классическом смысле равенства

$$\text{div}(\varepsilon\mathbf{E}) = \text{div } \mathbf{H} = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}. \quad (4.72)$$

Отсюда после, быть может, исправления  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  на подмножестве меры нуль вытекают следующие равенства:

$$[\varepsilon\mathbf{E}_n]|_{\partial Q'} = 0, \quad [\mathbf{H}_n]|_{\partial Q'} = 0. \quad (4.73)$$

5. Введем шар  $B_R \supset \bar{Q}$  достаточно большого радиуса  $R$  и определим  $Q_2 = B_R \setminus \bar{Q}$ .

Применив лемму Лоренца в ограниченных областях  $Q$  и  $Q_2$ , получим:

$$\int_{\partial Q} (\mathbf{E} \times \bar{\mathbf{H}} + \bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} ds = \int_Q i\omega((\varepsilon - \bar{\varepsilon})\bar{\mathbf{E}}) \cdot \bar{\mathbf{E}} dv = 0, \quad (4.74)$$

$$\int_{\partial Q \cup \partial B} (\mathbf{E} \times \bar{\mathbf{H}} + \bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n}_2 ds = \int_{Q_1} i\omega((\varepsilon_e - \bar{\varepsilon}_e)\bar{\mathbf{E}}) \cdot \bar{\mathbf{E}} dv = 0. \quad (4.75)$$

*Замечание 4.4.* Применимость леммы Лоренца для полей, имеющих особенности вблизи края экрана, обоснована в [17] (см. стр. 40–47).

Суммируя (4.74) и (4.75), выводим

$$\begin{aligned} & \int_{\partial Q} (\mathbf{E} \times \bar{\mathbf{H}} + \bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\partial Q} (\mathbf{E} \times \bar{\mathbf{H}} + \bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n}_2 ds + \\ & + \int_{\partial B} (\mathbf{E} \times \bar{\mathbf{H}} + \bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n}_2 ds = \\ & = \int_{\partial Q'} (\mathbf{E} \times \bar{\mathbf{H}} + \bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\partial Q'} (\mathbf{E} \times \bar{\mathbf{H}} + \bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n}_2 ds + \\ & + \int_{\Omega} (\mathbf{E} \times \bar{\mathbf{H}} + \bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\Omega} (\mathbf{E} \times \bar{\mathbf{H}} + \bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n}_2 ds + \\ & + \int_{\partial B} (\mathbf{E} \times \bar{\mathbf{H}} + \bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n}_2 ds = \int_{\partial B} (\mathbf{E} \times \bar{\mathbf{H}} + \bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n}_2 ds = 0. \end{aligned}$$

Интегралы по неэкранированной части границы  $\partial Q'$  сокращаются в силу условий сопряжения и направленности векторов нормали ( $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_2$  на  $\partial Q$ ), а интегралы по  $\Omega$  – в силу условия Дирихле на  $\Omega$  для касательных компонент  $\mathbf{E}_\tau$  электрического поля (последнее следует из уравнения (4.62)).

Далее, используя условия излучения для  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ , получим

$$\mathbf{E} = \mathbf{H} \equiv 0 \text{ в } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}. \quad (4.76)$$

Из (4.71) получим

$$\mathbf{E}_\tau|_{\partial Q'} = \mathbf{H}_\tau|_{\partial Q'} = 0, \quad (4.77)$$

а из (4.73) –

$$\mathbf{E}_n|_{\partial Q'} = \mathbf{H}_n|_{\partial Q'} = 0, \quad (4.78)$$

так как  $\varepsilon(x)$  – функция в  $\overline{Q}$ , не обращающаяся в нуль на  $\partial Q$ .

Следовательно, на неэкранированной части границы  $\partial Q'$  верно

$$\mathbf{E}|_{\partial Q'} = \mathbf{H}|_{\partial Q'} = 0. \quad (4.79)$$

6. Выражая  $\mathbf{E}$  через  $\mathbf{H}$ , выведем из (4.69) уравнение для  $\mathbf{H}$  :

$$\Delta \mathbf{H} + \frac{1}{\varepsilon(x)} \operatorname{grad} \varepsilon(x) \times \operatorname{rot} \mathbf{H} + k^2(x) \mathbf{H} = 0, \quad x \in Q, \quad (4.80)$$

где  $k^2(x) = \omega^2 \mu_e \varepsilon(x)$ , и уравнение выполняется в классическом смысле.

Определим функцию

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x) &= -\frac{1}{\varepsilon(x)} \operatorname{grad} \varepsilon(x) \times \operatorname{rot} \mathbf{H}(x) - k^2(x) \mathbf{H}(x) - \mathbf{H}(x) = \\ &= i\omega \operatorname{grad} \varepsilon(x) \times \mathbf{E}(x) - k^2(x) \mathbf{H}(x) - \mathbf{H}(x), \quad x \in Q. \end{aligned}$$

и перепишем уравнение (4.80):

$$\Delta \mathbf{H}(x) - \mathbf{H}(x) = \mathbf{F}(x), \quad x \in Q. \quad (4.81)$$

Проверим, что для уравнения (4.81) в области  $V = Q \setminus \overline{\Omega_\delta}$ , не содержащей некоторую окрестность экрана, выполнены условия Утверждения А (см. с. 134).

Рассмотрим  $S_1 = \partial Q \setminus \Omega_\delta$  в качестве гладкой части границы  $\partial V$  – это поверхность класса не ниже  $C^3$  ( $p = 1$ ). Оператор  $L = L' = \Delta - 1$  – самосопряженный и сильно эллиптический оператор порядка 2 ( $m = 1$ ). Для  $\mathbf{H}$  выполнено включение  $\mathbf{H} \in \mathbf{L}_2(V) \supset C(\overline{V})$  ( $s = 0$ ). Для правой части уравнения (4.81) выполнено  $\mathbf{F} \in H_{\text{loc}}^{-2}(V, S_1)$ , так как  $\mathbf{F} \in \mathbf{L}_2(V)$ . Выше показано, что условие  $D^0 \mathbf{H}^i = \mathbf{H}^i = 0$  выполнено на  $S_1$ . Скалярное уравнение  $Lu = f$  удовлетворено покомпонентно для всех  $\mathbf{H}^i$ , так как для всех  $v \in H^2(V) \cap W_2^1(V)$  верно

$$(L\mathbf{H}^i, v)_0 \equiv ((\Delta - 1)\mathbf{H}^i, v)_0 = (\mathbf{F}^i, v)_0.$$

Применяя Утверждение А, получим

$$\mathbf{H}^i \in H_{\text{loc}}^2(V), \text{ и } D^\beta \mathbf{H}^i|_{S_1} = 0 \text{ } (|\beta| \leq 0).$$

Тогда

$$\mathbf{H} \in C_0^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\delta), \quad \alpha \in (0, 1/2).$$

Выражая  $\mathbf{H}$  через  $\mathbf{E}$ , получим из (4.69) уравнение для  $\mathbf{E}$  :

$$\begin{aligned} (\Delta - 1)\mathbf{E} = & -k^2(x)\mathbf{E}(x) - \mathbf{E}(x) - \\ & - \operatorname{grad}\left(\frac{1}{\varepsilon(x)} \operatorname{grad} \varepsilon(x) \cdot \mathbf{E}(x)\right), \quad x \in Q \end{aligned} \quad (4.82)$$

причем правая часть принадлежит пространству  $H_{\text{loc}}^0(V)$ .

Повторяя рассуждения, применим к  $\mathbf{E}$  результат Утверждения А:

$$\mathbf{E} \in C_0^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\delta), \quad \alpha \in (0, 1/2).$$

Теперь правая части  $\tilde{\mathbf{F}}$  уравнения магнитного поля (4.81) – непрерывная финитная функция,

$$\tilde{\mathbf{F}} \in C_0^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\delta).$$

В силу Утверждения Б получаем

$$\mathbf{H} \in C_0^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\delta).$$

а в силу принципа единственного продолжения –

$$\mathbf{H} \equiv 0 \text{ в } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\delta.$$

Так как для любой точки  $x \in Q \setminus \bar{\Omega}$  можно выбрать  $\delta > 0$  настолько малым, чтобы  $x$  лежала вне  $\bar{\Omega}_\delta$ , то получаем окончательно

$$\mathbf{H} \equiv \mathbf{E} \equiv 0 \text{ в } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}.$$

Теорема доказана □

Из теоремы 4.3 о фредгольмовости с нулевым индексом оператора  $\hat{\mathcal{L}}$  и теоремы 4.4 о его инъективности непосредственно следует

**Теорема 4.5.** [133, 136] Пусть постоянные  $\varepsilon_e, \mu_e$  удовлетворяют условиям (4.1), причем  $\operatorname{Im} k_e > 0$ . Пусть тензор диэлектрической проницаемости  $\hat{\varepsilon}(x) = \varepsilon(x)\hat{\mathbf{I}}$  удовлетворяет условиям (4.3)–(4.6). Тогда оператор

$$\hat{\mathcal{L}} : \mathbf{L}_2(Q) \times W(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbf{L}_2(Q) \times W'(\Omega)$$

является непрерывно обратимым.

### 4.3 Формулировка метода Галеркина для системы интегро-дифференциальных уравнений в векторной задаче дифракции на частично экранированном теле

Формулировка метода Галеркина [133, 144] для векторной задачи дифракции на частично экранированном теле аналогична формулировке проекционного метода, данной в параграфе 3.4 предыдущей главы.

Мы рассматриваем уравнение (система в развернутой форме записи дана в (3.100))

$$\widehat{\mathcal{L}}\mathbf{U} = \mathbf{f}, \quad (4.83)$$

где  $\mathbf{U} = (\mathbf{J}, \mathbf{u})^T$  – точное решение задачи,  $\mathbf{f} = (\mathbf{E}_{0,Q}, \mathbf{E}_{0,\tau})^T$  – известная правая часть уравнения, а  $\widehat{\mathcal{L}}$  – матричный интегро-дифференциальный оператор системы,

$$\widehat{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{A}} & \widehat{\mathcal{K}}_1 \\ \widehat{\mathcal{K}}_2 & \widehat{\mathcal{S}} \end{pmatrix}. \quad (4.84)$$

Оператор  $\widehat{\mathcal{L}}$  рассматривается как отображение из пространства  $\mathbf{X} = \mathbf{L}_2(Q) \times W(\overline{\Omega})$  в антидвойственное пространство  $\mathbf{X}' = \mathbf{L}_2(Q) \times W'(\Omega)$ .

Приближенные решения уравнения (4.83) будем обозначать символом  $\mathbf{U}_m = (\mathbf{J}_{m_0}, \mathbf{u}_{m_1})^T$ . Компоненты решения  $\mathbf{U}_m$  представляются в виде линейных комбинаций базисных функций

$$\mathbf{J}_{m_0}(x) = \sum_{k=1}^{m_0} c_k^0 \mathbf{v}^{(0)}(x), \quad \mathbf{u}_{m_1}(x) = \sum_{k=1}^{m_1} c_k^1 \mathbf{v}^{(1)}(x). \quad (4.85)$$

Запишем также

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_m = \sum_{k=1}^m c_k \mathbf{v}_k(x), \quad c_k = c_k^0, \quad \mathbf{v}_k = (\mathbf{v}^{(0)}(x), 0)^T \text{ при } k \leq m_0, \\ c_k = c_{k-m_0}^1, \quad \mathbf{v}_k = (0, \mathbf{v}^{(1)}(x))^T \text{ при } k > m_0. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Согласно методу Галеркина неизвестные коэффициенты находятся из СЛАУ

$$\langle \widehat{\mathcal{L}}\mathbf{U}_m, \mathbf{v}_k \rangle_{\mathbf{X}} = \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_i \rangle_{\mathbf{X}} \quad \forall \mathbf{v}_i \in \mathbf{X}_m. \quad (4.87)$$

Здесь  $\mathbf{X}_m \subset \mathbf{X}$  – конечномерные подпространства,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_m &= \mathbf{X}_{m_0}^1 \times \mathbf{X}_{m_1}^2, \mathbf{X}_{m_0}^1 = \text{span}\{\mathbf{v}_1^{(0)}, \dots, \mathbf{v}_{m_0}^{(0)}\} \subset \mathbf{L}_2(Q), \\ \mathbf{X}_{m_1}^2 &= \text{span}\{\mathbf{v}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{v}_{m_1}^{(1)}\} \subset W(\overline{\Omega}). \end{aligned} \quad (4.88)$$

Через  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{X}}$  в (4.87) обозначена полуторалинейная форма антидвойственного спаривания пространств  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{X}'$ .

#### 4.4 Сходимость метода Галеркина в векторной задаче дифракции на частично экранированном теле

Ниже будет сформулирована и доказана теорема о сходимости метода Галеркина для оператора  $\widehat{\mathcal{L}}$ , действующего из пространства  $\mathbf{X}$  в  $\mathbf{X}'$ . Будем придерживаться определения сходимости метода Галеркина, которое было дано в параграфе 1.8.

**Теорема 4.6.** [133, 139] Пусть в  $\mathbb{R}^3 \setminus Q$  выполнены условия

$$\text{Re } \varepsilon_e > 0, \text{ Im } \varepsilon_e > 0, \quad \text{Re } \mu_e > 0, \text{ Im } \mu_e = 0. \quad (4.89)$$

Пусть в  $Q$  тензор относительной диэлектрической проницаемости  $\widehat{\varepsilon}_r(x)$  таков, что в  $x \in \overline{Q}$  существует ограниченный тензор

$$\widehat{\xi}(x) = (\widehat{\varepsilon}_r(x) - \widehat{\mathbf{I}})^{-1}, \quad (4.90)$$

где  $\widehat{\mathbf{I}}$  – единичный тензор. Пусть для  $\widehat{\varepsilon}_r(x)$  в  $\overline{Q}$  выполнены условия

$$\text{Re}(\widehat{\varepsilon}_r(x)\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \geq C_1|\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_1 > 1, \quad (4.91)$$

$$\text{Im}(\widehat{\varepsilon}_r(x)\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \geq C_2|\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_2 \neq 0 \text{ или} \quad (4.92)$$

$$-\text{Im}(\widehat{\varepsilon}_r(x)\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \geq C_3|\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_3 > 0 \quad (4.93)$$

для всех векторов  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ , и  $\widehat{\varepsilon}(x) = \varepsilon(x)\widehat{\mathbf{I}}$ .

Пусть для любых  $m_0, m_1 \in \mathbb{N}$  в области  $Q$  и на экране  $\Omega$  определены произвольным образом базисные функции  $\mathbf{v}_{i_1}^{(0)}$  и  $\mathbf{v}_{i_2}^{(1)}$ , удовлетворяющие

условию аппроксимации (1.61) в пространствах  $\mathbf{L}_2(Q)$  и  $W(\overline{\Omega})$  соответственно, причем  $\Omega$  – ориентируемая гладкая (класса  $C^\infty$ ) незамкнутая параметрически заданная поверхность.

Тогда метод Галеркина является сходящимся для оператора  $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$ : приближенные решения  $\mathbf{U}_m$  сходятся к единственному решению  $\mathbf{U} \in \mathbf{X}$  уравнения (4.83) и имеет место квазиоптимальная оценка скорости сходимости

$$\|\mathbf{U} - \mathbf{U}_m\|_{\mathbf{X}} \leq C \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{X}_m} \|\mathbf{U} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}. \quad (4.94)$$

*Доказательство.* В теореме 4.2 параграфа 4.2 было показано, что квадратичная форма  $\langle \widehat{\mathcal{L}}\mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{X}}$  матричного оператора  $\widehat{\mathcal{L}}$  коэрцитивна, то есть существует  $\gamma > 0$  и существует компактный оператор  $\widehat{\mathcal{L}}^c : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$  такие, что для всех  $\mathbf{w} \in \mathbf{X}$  выполняется неравенство

$$\operatorname{Im} \langle (\widehat{\mathcal{L}} - \widehat{\mathcal{L}}^c)\mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{X}} \geq \gamma \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{X}}^2.$$

Представим оператор  $\widehat{\mathcal{L}}$  в виде

$$\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\mathcal{L}}_1 + \widehat{\mathcal{L}}_2 := (\widehat{\mathcal{L}} - \widehat{\mathcal{L}}^c) + \widehat{\mathcal{L}}^c, \quad (4.95)$$

где  $\widehat{\mathcal{L}}^c : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$  – компактный оператор из теоремы 4.2.

Оператор  $\widehat{\mathcal{L}}_1$  является коэрцитивным и метод Галеркина для него сходится [87]. Так как оператор  $\widehat{\mathcal{L}}_2$ , а  $\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\mathcal{L}}_1 + \widehat{\mathcal{L}}_2$  инъективен в выбранных пространствах, то метод Галеркина является сходящимся и для  $\widehat{\mathcal{L}}_1 : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$  [87] в выбранных пространствах.  $\square$

#### 4.5 Выбор базисных функций и проблема согласованности сеток на двух- и трехмерных рассеивателях

Обсудим проблему согласованности расчетных сеток на рассеивателях различной размерности при решении задач дифракции на частично экранированных телах.

При реализации конечно-разностных методов решения краевых задач для системы уравнений Максвелла возникает ряд трудностей. Они связаны с тем, что в исходной постановке краевой задачи – и в дифференциальных уравнениях, и в граничных условиях – фигурирует полное поле  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ . Неотъемлемой частью задачи является условие Дирихле на идеально проводящем экране для электрического поля. Во внутренних точках поверхности  $\Omega$  задаются нулевые значения вектор-функции  $\mathbf{E}$ , которые должны использоваться для расчета поля в других (не лежащих на  $\Omega$ ) узлах сетки. В связи с этим возникает необходимость введения согласованных сеток на экране, в области неоднородности и свободном от рассеивателей пространстве: узлы на  $\Omega$  должны представлять подмножество узлов сетки в области неоднородности  $\bar{Q}$  и области  $\mathbb{R}^3 \setminus Q$ . Это существенно ограничивает возможности варьирования плотностей сеток на рассеивателях различной размерности.

Аналогичная трудность может возникнуть и при использовании метода конечных элементов. В области  $Q$  и на экране  $\Omega$  необходимо выбирать финитные базисные функции (обозначим их  $\varphi_{i,Q}$  и  $\varphi_{j,\Omega}$ ), чтобы для их носителей выполнялось соотношение  $\text{supp } \varphi_{i,Q} \cap \Omega = \varphi_{j,\Omega}$ . Иными словами, часть границы носителя  $\varphi_{i,Q}$ , лежащая на  $\partial Q$ , должна либо целиком принадлежать  $\Omega$ , либо иметь пустое пересечение с экраном. В противном случае условие Дирихле будет использовано неточно.

При реализации метода Галеркина для решения системы векторных интегро-дифференциальных уравнений на ограниченных многообразиях с краем такой трудности не возникает. Согласно предложенному методу в результате решения системы ИДУ находятся две вектор-функции: полное электрическое поле  $\mathbf{E}$  в области неоднородности  $Q$  и плотность  $\mathbf{u}$  на экране  $\Omega$ .

Главный результат предыдущего параграфа о сходимости метода Галеркина позволяет ввести минимальные ограничения на расчетные сетки. Достаточно потребовать лишь, чтобы базисные функции удовлетворяли усло-



вию аппроксимации. При этом, если выполнено это условие, никакого согласования сеток на  $Q$  и  $\Omega$  уже не требуется. Это позволяет, во-первых, строить расчетные сетки и определять базисные функции только из соображений удобства использования на рассеивателях той или иной формы. Во-вторых, можно произвольно и независимо друг от друга выбирать количественные параметры сеток (число носителей, шаги носителей вдоль разных измерений и т.д.), что дает большую свободу в определении блочной матрицы СЛАУ в методе Галеркина. Так, почти произвольным образом могут быть заданы порядок основной матрицы и размеры блоков, что особенно удобно для параллельной реализации численного метода на многопроцессорных системах.

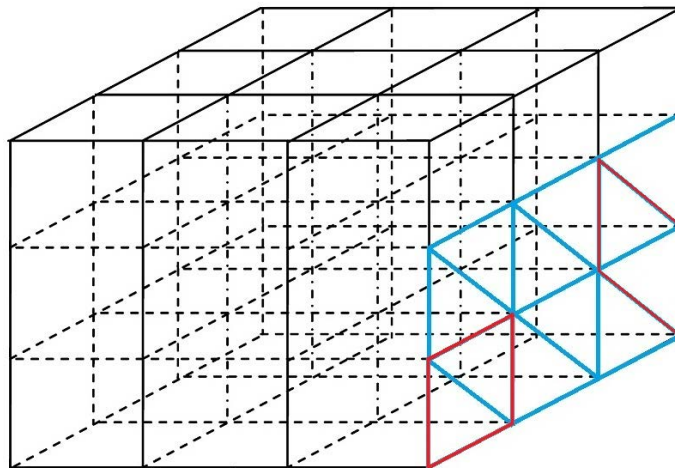


Рис. 15: Пример несогласованных сеток на объемном теле и экране. Красными линиями выделены границы носителей базисных функций на экранах.

В качестве базисных функций можно использовать, например, функции, описанные в параграфе 3.5 предыдущей главы. Напомним кратко идею их построения.

1. *Кусочно-постоянные базисные функции на объемном носителе.*

Пусть  $Q$  – область произвольной формы в  $\mathbb{R}^3$ . Введем параллелепипед  $Q'$ , содержащий область  $Q$ , и конечные элементы (см. параграф 1.6)

$$Q_{i_1 i_2 i_3} = Q \cap Q'_{i_1 i_2 i_3}, \quad i_k = 1, \dots, l_k.$$

Определим функции  $v_i^0$  как и в параграфе 1.6:

$$v_i^0(x) = v_{i_1 i_2 i_3}^0(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \cap Q_{i_1 i_2 i_3}, \\ 0, & x \notin Q \cap Q_{i_1 i_2 i_3}, \end{cases} \quad (4.96)$$

предполагая, что носители функций имеют положительный объем. Тогда приближение к решению  $\mathbf{J}$  запишется в виде

$$\mathbf{J}_{m_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^1 \\ \mathbf{J}^2 \\ \mathbf{J}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^l b_i^1 v_i^0(x) \\ \sum_{i'=1}^l b_{i'}^2 v_{i'}^0(x) \\ \sum_{i''=1}^l b_{i''}^3 v_{i''}^0(x). \end{bmatrix} \quad (4.97)$$

или

$$\mathbf{J}_{m_0} = \sum_{i=1}^{m_0} c_i^0 \mathbf{v}_i^0(x), \quad (4.98)$$

где  $m_0 = 3l$ , а  $\mathbf{v}_i(x)$  – базисные вектор-функции вида  $(v_i^0(x), 0, 0)^T$ ,  $(0, v_i^0(x), 0)^T$  и  $(0, 0, v_i^0(x))^T$ .

*2. Базисные функции на объемном носителе, кусочно-линейные по одной из координат.*

Второй способ аппроксимации, более удобный с точки зрения вычисления матричных элементов СЛАУ в методе Галеркина, состоит в следующем. Будем считать, что  $Q \subset Q'$ , где  $Q'$  – параллелепипед. Разобьем  $Q'$  как и в параграфе 1.6 параллелепипедами  $Q'_{i_1 i_2 i_3}$ . Введем обозначения

$$h^1 := |x_{1,i_1} - x_{1,i_1-1}|, \quad h^2 := |x_{2,i_2} - x_{2,i_2-1}|, \quad h^3 := |x_{3,i_3} - x_{3,i_3-1}|, \quad (4.99)$$

и определим три набора функций, кусочно-линейных по одной из декарто-

вых координат, и постоянных по двум другим:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{i_1, i_2, i_3}^1(x) &= \begin{cases} 1 - \frac{1}{h^1} |x_1 - x_{1, i_1}|, & x \in Q \cap \overline{Q'_{i_1, i_2, i_3} \cup Q'_{i_1+1, i_2, i_3}} \\ 0, & x \notin Q \cap \overline{Q'_{i_1, i_2, i_3} \cup Q'_{i_1+1, i_2, i_3}} \end{cases}, \\ \tilde{v}_{i_1, i_2, i_3}^2(x) &= \begin{cases} 1 - \frac{1}{h^2} |x_2 - x_{2, i_2}|, & x \in Q \cap \overline{Q'_{i_1, i_2, i_3} \cup Q'_{i_1, i_2+1, i_3}} \\ 0, & x \notin Q \cap \overline{Q'_{i_1, i_2, i_3} \cup Q'_{i_1, i_2+1, i_3}} \end{cases}, \\ \tilde{v}_{i_1, i_2, i_3}^3(x) &= \begin{cases} 1 - \frac{1}{h^3} |x_3 - x_{3, i_3}|, & x \in Q \cap \overline{Q'_{i_1, i_2, i_3} \cup Q'_{i_1, i_2, i_3+1}} \\ 0, & x \notin Q \cap \overline{Q'_{i_1, i_2, i_3} \cup Q'_{i_1, i_2, i_3+1}} \end{cases}, \end{aligned} \quad (4.100)$$

Тогда компоненты приближенного решения  $\mathbf{J}_{m_0}$  запишем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^1(x) &= \sum_{i_1=1}^{n_1-1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{i_3=1}^{n_3} b_{i_1 i_2 i_3}^1 \tilde{v}_{i_1, i_2, i_3}^1(x), \\ \mathbf{J}^2(x) &= \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2-1} \sum_{i_3=1}^{n_3} b_{i_1 i_2 i_3}^2 \tilde{v}_{i_1, i_2, i_3}^2(x), \\ \mathbf{J}^3(x) &= \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{i_3=1}^{n_3-1} b_{i_1 i_2 i_3}^3 \tilde{v}_{i_1, i_2, i_3}^3(x). \end{aligned} \quad (4.101)$$

Для представления векторного приближенного решения  $\mathbf{J}_{m_0}$  используем краткую форму записи

$$\mathbf{J}_{m_0} = \sum_{i=1}^{m_0} c_i^0 \mathbf{v}_i^{(0)}(x), \quad (4.102)$$

где  $m_0 = l_1 + l_2 + l_3$ , а  $\mathbf{v}_i^{(0)}(x)$  – базисные вектор-функции вида  $(\tilde{v}_{i_1, i_2, i_3}^1(x), 0, 0)^T$ ,  $(0, \tilde{v}_{i_1, i_2, i_3}^2(x), 0)^T$  и  $(0, 0, \tilde{v}_{i_1, i_2, i_3}^3(x))^T$ .

### 3. Базисные функции на неплоских экранах.

На (в общем случае) неплоском незамкнутом ориентируемом параметрически заданном экране  $\Omega$  будем использовать финитные базисные функции, представляющие собой образы функций RWG при отображении пространств сечений касательных расслоений. Для определения базисных вектор-функций на  $\Omega$  сначала определим прямоугольную область парамет-

ров  $D = \{(t_1, t_2) : t_i \in (0; a_i)\}$ . Повторяя процедуру, подробно описанную на с. 169–177, определим на  $D$  при заданном разбиении функции RWG  $\mathbf{v}_j^{(1,0)}(t)$ , а на неплоском экране  $\Omega$  – их образы вида

$$\mathbf{v}_j^{(1)}(x(t)) = \frac{\partial x}{\partial t} \mathbf{v}_j^{(1,0)}(t_1, t_2), \quad x(t) \in \Omega, \quad (4.103)$$

где функция  $x = x(t) : D \rightarrow \Omega$  определяет гладкую параметризованную поверхность  $\Omega$ .

В Теореме 3.7 предыдущей главы доказано, что эти функции удовлетворяют условию аппроксимации в  $W(\overline{\Omega})$ .

## ГЛАВА 5. О программной реализации метода Галеркина в задачах дифракции

Избранные результаты пятой главы опубликованы в работах [126, 128, 130, 149, 150].

### 5.1 Скалярная задача дифракции на акустически жесткой единичной сфере

Выбор этой задач в качестве тестовой был обусловлен, прежде всего, желанием апробировать метод построения базисных функций на непосредственно неплоском экране. Кроме того, для рассматриваемой задачи легко провести сравнение приближенных решений с известным аналитическим решением [149, 150].

Рассмотрим единичную сферу  $\Omega = S_1(0)$  с центром в начале координат, заданная параметрически:

$$x_1 = \cos \theta \cos \phi, \quad x_2 = \cos \theta \sin \phi, \quad x_3 = \sin \theta, \quad \theta \in [-\pi/2; \pi/2], \quad \phi \in [0; 2\pi).$$

Известно, что собственными функциями интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \left( \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} G(x, y) \varphi(y) ds_y \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} u_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (5.104)$$

являются функции вида

$$s_{n,m}(x) = P_n^m(\cos \theta) \cos(m\phi), \quad P_n^m(u) = (1 - u^2)^{m/2} \frac{d^m}{du^m} P_n(u), \quad (5.105)$$

где  $P_n(u)$  – полиномы Лежандра. График модуля функции  $s_{5,5}$  представлен на Рисунке 16 (а).

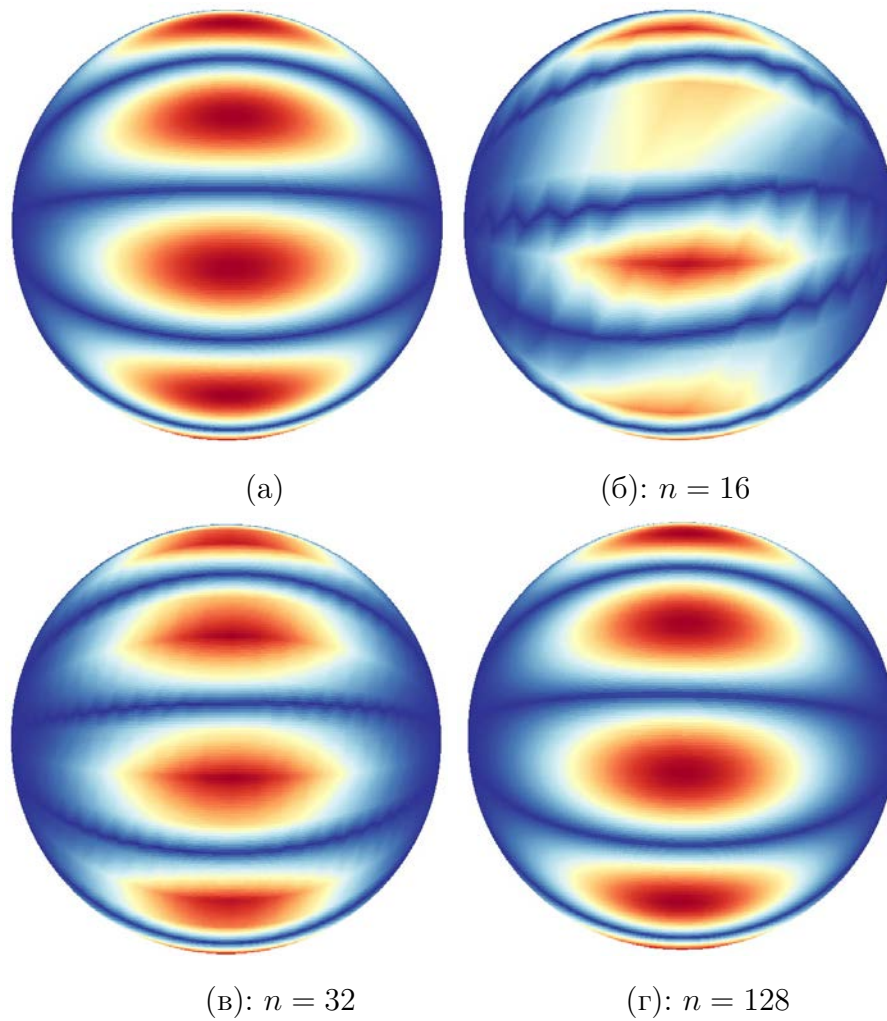


Рис. 16: Графики аналитического (а) и приближенных решений (б-г) на сфере.

В таблице 5 показаны данные о значениях среднеквадратичного отклонения  $\Delta_m := \|u_* - u_m\|_{L_2}$  приближенных решений  $u_m$  от точного  $u_*$ , экспериментально подтверждающие сходимость метода Галеркина ( $m = (n - 1)^2$  – общее число базисных функций).

Таблица 5: Решение задачи дифракции на единичной сфере.

|            |      |      |       |       |
|------------|------|------|-------|-------|
| $n$        | 16   | 32   | 64    | 128   |
| $\Delta_m$ | 0.76 | 0.19 | 0.051 | 0.013 |

## 5.2 Векторная задача дифракции на системе тел и экранов

В описанном ниже вычислительном эксперименте была численно решена задача дифракции плоской электромагнитной волны на квадратном идеально проводящем экране [130]. Подробный анализ расчетов в этой задаче приведен, например, в работе [99].

В проведенном эксперименте на квадратном экране размера  $0.75\lambda \times 0.75\lambda$ , расположенном в плоскости  $x_3 = 0$ , вводилась равномерная сетка с числом разбиений  $n$  по каждой из осей. Использованы векторные функции типа roof-top; падающая волна имеет вид  $E_0 = (1, 0, 0)$ . Для расчета матричных элементов применялись формулы (3.114). Проверка правильности результата при использовании именно этих формул и была главной целью численного эксперимента.

На рис. 17 представлены графики модулей первой и второй компоненты решения  $\mathbf{u}_{m_1}(t)$ ; число базисных вектор-функций (типа rooftop) на экране определяется по формуле  $m_1 = 2(n^2 - n)$ . Результаты расчетов совпадают с описанными в [99] с графической точностью.

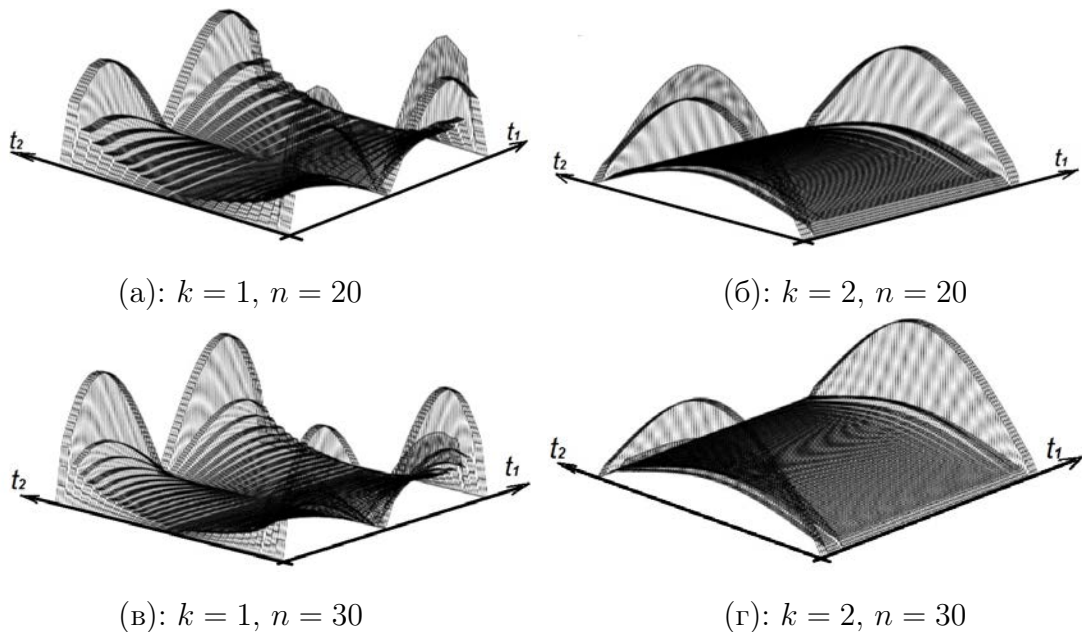


Рис. 17: Графики функций  $|\mathbf{u}_{m_1}^k(t)|$  на поверхности плоского экрана при различных значениях  $n$ ,  $m_1 = 2(n^2 - n)$ .

Рассмотрена [130] задача дифракции плоской электромагнитной волны с заданной частотой  $\omega = 15\text{ГГц}$  на системе рассеивателей, состоящей из неоднородного куба  $Q = [-\frac{\lambda}{2}; \frac{\lambda}{2}]^3$  и неплоского экрана, представляющего собой четверть сферы  $S_\lambda(-\frac{\lambda}{2} - 0.2, 0, 0)$ . Волновое число  $k_0 = \frac{2\pi\omega}{c}(6 + i)$ , а относительная диэлектрическая проницаемость в кубе кусочно постоянна:

$$\varepsilon_r(x) = \begin{cases} 4 + 2i, & x_2 > 0, \\ 2 + i, & x_2 \leq 0. \end{cases} \quad (5.106)$$

На рис. 18 приведены графики модулей приближенных решений  $\mathbf{J}_{m_0}$  и  $\mathbf{u}_{m_1}$  задачи дифракции для нескольких значений числа разбиений сетки  $n$ . Число базисных функций  $N = m_0 + m_1 = 3n^3 + 2(n^2 - n)$ .

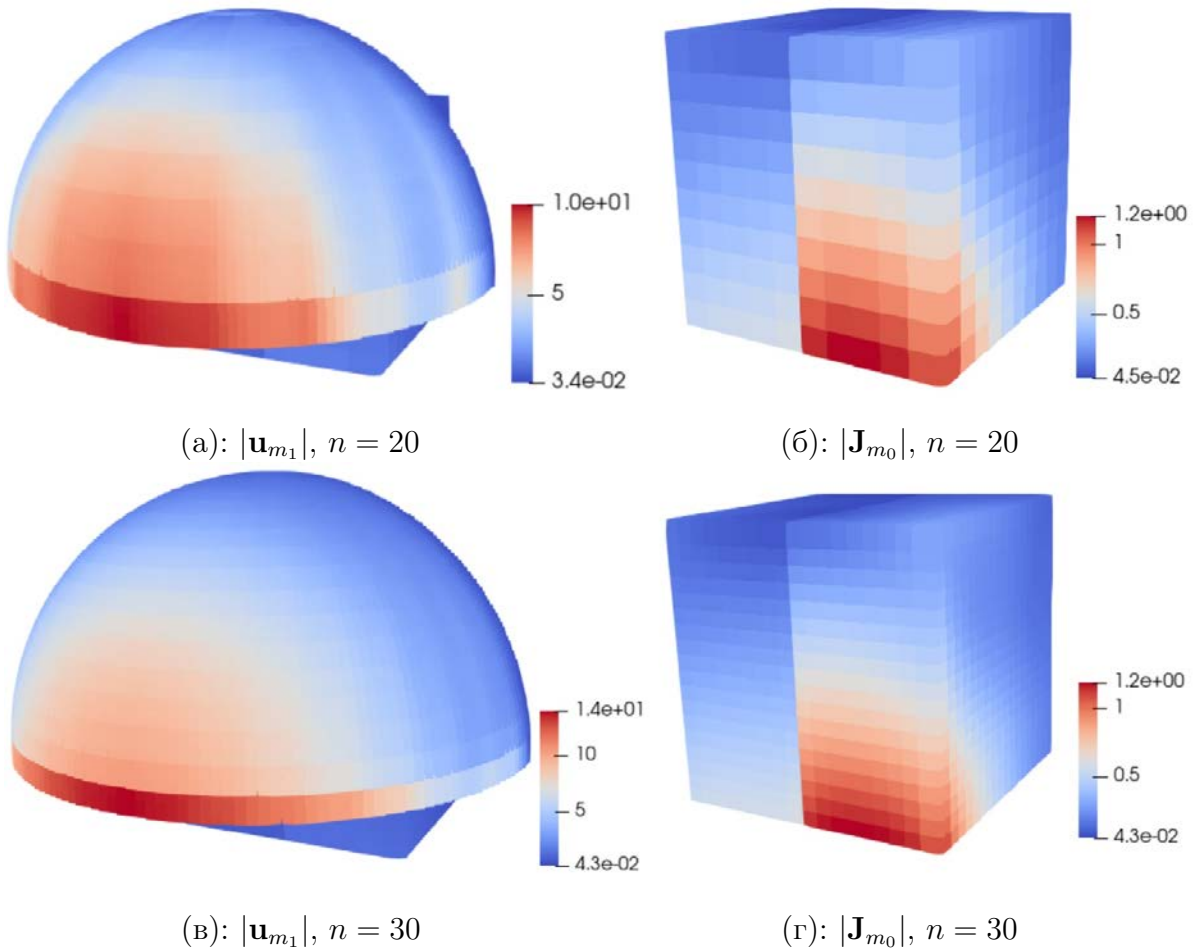


Рис. 18: Модуль плотности поверхностного тока  $|\mathbf{u}_{m_1}|$  на экране(а,в,д). Модуль вектора поляризации  $|\mathbf{J}_{m_0}|$  в области неоднородности (б,г,е).



Таблица 6: Внутренняя сходимость решения на теле.

|                      | $n_1 = 8, n_2 = 10$ | $n_1 = 10, n_2 = 12$ | $n_1 = 12, n_2 = 18$ |
|----------------------|---------------------|----------------------|----------------------|
| $\Delta(\mathbf{u})$ | 0.0200              | 0.0126               | 0.0043               |
| $\Delta(\mathbf{E})$ | 0.1352              | 0.1051               | 0.0764               |

Таблица 6 содержит сведения о внутренней сходимости метода Галеркина (здесь  $\Delta(\mathbf{f}) = \max |\mathbf{f}_{n_1} - \mathbf{f}_{n_2}|$ ).

На рисунке 19 представлены графики модулей приближенных решений  $\mathbf{J}_{m_0}$  и  $\mathbf{u}_{m_1}$  задачи дифракции на *отдельно* экране или неоднородном кубе. Сравнивая результаты на рисунках 19 и 18, можно заметить влияние идеально проводящего экрана на решение в области неоднородности: величина тока поляризации в «экранированной» части куба значительно уменьшилась в сравнении со случаем, когда экран отсутствует, что согласуется с физической сутью моделируемого процесса.

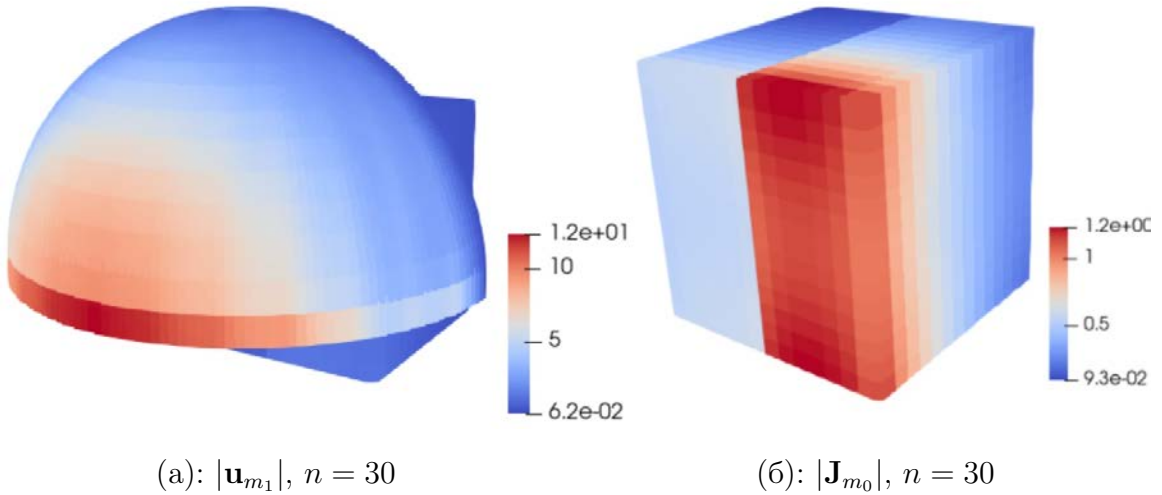


Рис. 19: Решение задачи дифракции на (отдельно) экране (а). Решение задачи дифракции на теле в отсутствии экрана (б).

### 5.3 О параллельном алгоритме решения задач дифракции

Метод Галеркина для решения векторных задач дифракции предъявляет достаточно высокие требования к вычислительным ресурсам. Это обусловлено:

- векторным характером задачи;
- наличием рассеивателей различной размерности;
- невозможностью (в случае неоднородного объемного рассеивателя) сведения задачи к уравнению двумерных многообразиях.

Для решения задачи с приемлемой точностью требуется вводить достаточно плотные сетки (не менее 10-20 конечных элементов на длину волны), что в свою очередь требует заполнения матриц достаточно высокого порядка ( $10^4 - 10^6$ ). Алгоритм расчета матричных элементов, выражающихся через многомерные интегралы и дифференциальные операторы на неплоском экране (касательные дивергенцию и градиент), также неэлементарен.

Известно, что в случае однородных тел и кусочно-плоских экранов матрица СЛАУ обладает «хорошей» структурой (например, является блочно-теплицевой). Однако в общем случае – при наличии сложной неоднородности в теле и неплоского экрана – такая структура не сохраняется.

Описанные трудности могут (хотя бы частично) быть преодолены разработкой параллельного алгоритма для решения задач за приемлемое время. Идея параллельного алгоритма решения задачи дифракции описана в статьях [130]; там же проведен обзор вычислительных экспериментов на многоядерном ПК [130] и кластере «Ломоносов-2» НИВЦ МГУ [126].

Для программной реализации параллельного численного метода, реализованного на языке C++, использовался интерфейс MPI [].

Для проверки эффективности параллельного алгоритма заполнения матрицы СЛАУ в методе Галеркина и решения СЛАУ методом Гаусса про-

ведена серия вычислительных экспериментов.

В таблице 7 показана зависимость времени решения задачи векторной задачи дифракции на системе «тело + экран» от числа используемых процессов. Эксперименты проведены <sup>3</sup> на ПК с процессором i9-12900 (16 ядер, 24 потоков), объемом оперативной памяти – 64 Гб.

Таблица 7: Время  $t_f$  заполнения матрицы СЛАУ и время  $t_s$  ее решения методом Гаусса.

|             |     |     |     |     |     |
|-------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $n_{proc}$  | 2   | 4   | 10  | 12  | 20  |
| $t_f, сек.$ | 180 | 115 | 63  | 52  | 40  |
| $t_s, сек.$ | 9.4 | 7.8 | 7.6 | 7.4 | 7.3 |

Проведенный эксперимент продемонстрировал определенную эффективность распараллеливания заполнения матрицы СЛАУ, что объясняется сравнительно небольшим объемом обмена данными между процессами. Эффективность параллельной реализации решения СЛАУ методом Гаусса существенно ниже в связи с достаточно большим объемом данных, участвующих в обмене между процессами.

Таблица 8: Время заполнения матрицы СЛАУ в векторной задаче дифракции на сфере

|   |            |            |             |             |              |
|---|------------|------------|-------------|-------------|--------------|
| <b>Число разбиений <math>n_1 = n_2</math></b> | <b>8</b>   | <b>16</b>  | <b>32</b>   | <b>64</b>   | <b>128</b>   |
| <b>Порядок матрицы <math>N</math></b>         | <b>112</b> | <b>480</b> | <b>1984</b> | <b>8064</b> | <b>32512</b> |
| <b>Число процессов <math>M</math></b>         | <b>4</b>   | 3.4        | 31          | 380         | 5649         |
| <b>8</b>                                      | 1.6        | 15         | 190         | 2824        | 49172        |
| <b>16</b>                                     | 0.739      | 7.5        | 94          | 1400        | 25081        |
| <b>32</b>                                     | 0.29       | 3.4        | 46          | 700         | 12813        |
| <b>64</b>                                     | 0.08       | 1.6        | 23          | 358         | 6716         |

Существенно более эффективным является реализация параллельного алгоритма на специализированных многопроцессорных вычислительных

<sup>3</sup>Параллельный алгоритм решения задачи дифракции на системе тел и экранов программно реализован на ПК и протестирован О.С. Скворцовым. (см.[130])

комплексах. Автором работы была проведена серия расчетов на кластере «Ломоносов-2» НИВЦ МГУ им. М.В. Ломоносова (программно реализован метод Галеркина для решения задачи дифракции, описанной в первом параграфе данной главы). Эффективность распараллеливания процедуры заполнения матрицы СЛАУ оказалась почти сто-процентной. Эффективность распараллеливания метода Гаусса для решения СЛАУ оказалась наиболее эффективной для порядков матрицы от 1000 до 15000. Сравнение данных Таблицы 7 с данными Таблиц 8 и 9 говорит о неоспоримом преимуществе в использовании специализированных кластеров над многоядерным домашним ПК.

Таблица 9: Время решения СЛАУ методом Гаусса в векторной задаче дифракции на сфере

| Порядок матрицы $N$   | <b>112</b> | <b>480</b> | <b>1984</b> | <b>8064</b> | <b>32512</b> |
|-----------------------|------------|------------|-------------|-------------|--------------|
| Число процессов $M$ 4 | 0.0007     | .031       | 2.4         | 288         | 4502         |
| <b>8</b>              | .0008      | .018       | 1.8         | 163         | 2600         |
| <b>16</b>             | 0.4        | 0.34       | 0.9         | 82          | 1393         |
| <b>32</b>             | 0.82       | 0.77       | 1           | 56          | 812          |
| <b>64</b>             | 2.31       | 1.7        | 2           | 36          | 450          |

## 5.4 Теплицевы матрицы и тензоры в задачах дифракции

Наиболее трудоемким при решении задач дифракции методом Галеркина является вычисление многомерных интегралов. Независимость их вычисления допускает эффективное распараллеливание решения задачи на этапе заполнения матрицы СЛАУ (см. выше).

Еще один способ сокращения времени расчетов связан симметрией ядра интегрального оператора (функция Грина  $G(x, y)$  и ее производные зависят от разности  $|x - y|$  и  $x - y$  соответственно.) Ниже на примере объемного интегрального уравнения Липпмана-Швингера описан один из возможных способов учета этой симметрии.

Рассмотрим ИУ по объемной области неоднородности  $Q \subset \mathbb{R}^3$ ,

$$Au(x) := \theta(x)u(x) - \int_Q G(x, y)u(y)dy = u_0(x), \quad x \in Q, \quad (5.107)$$

где  $G(x, y) = \frac{e^{ik_e|x-y|}}{4\pi|x-y|}$ , а  $\theta = (k^2(x) - k_e^2)^{-1}$ . Уравнение (5.107) – скалярный аналог ИУ Липпмана-Швингера, записанный «в токах». Такая запись уравнения позволяет максимально воспользоваться симметрией ядра ИУ независимо от вида неоднородности. Заметим, что к уравнению «в токах» можно и не переходить, а использовать некие средние значения функции, описывающей неоднородность, и выносить эти значения за знак интеграла. Такой подход неоднократно применялся автором, но в диссертационной работе не обсуждается.

Для простоты изложения основной идеи рассмотрим случай кубической области  $Q = [0, 1]^3 \subset \mathbb{R}^3$ . Введем в  $Q$  равномерную сетку, конечные элементы  $\Pi_i = \Pi_{i_1 i_2 i_3}$  и кусочно-постоянные базисные функции (см. п. 1.6 Главы 1).

Номер  $i$  и мультииндекс  $i_1 i_2 i_3$  свяжем равенством

$$i = i_3 n^2 + i_2 n + i_1, \quad (5.108)$$

устанавливая взаимно-однозначное соответствие между одно- и трехиндексной нумерацией.

Элементы основной матрицы СЛАУ вычисляются согласно методу Галеркина по формуле

$$[A']_{ij} = \delta_{ij} \int_{\Pi_i} \theta(x) dx - \int_{\Pi_i} \int_{\Pi_j} G(x, y) dy dx, \quad (5.109)$$

Очевидно,  $[A']$  есть сумма диагональной матрицы  $[D]$  и симметрической матрицы (обозначим ее  $[B]$ ). Ниже показано, что  $[B]$  – блочно-теплицева.

Приведем известные определения теплицевой матрицы и теплицева тензора четной валентности. Будем использовать нижнюю индексацию в обозначениях элементов тензоров и матриц. Предполагаем также, что все рассматриваемые индексы ( $i, j, i_k$  и т.д.) изменяются в пределах от 0 до  $n - 1$ .

**Определение 5.2.** *Квадратная матрица  $A$  ( $A_{ij}$ ) называется теплицевой, если из равенства  $i - j = i' - j'$  следует  $A_{ij} = A_{i'j'}$ .*

**Определение 5.3.** *Тензор  $A_{i_1 \dots i_m j_1 \dots j_m}$  валентности  $2m$  называется теплицевым, если из равенства  $i_k - j_k = i'_k - j'_k$ , выполненного для всех  $k = 1, \dots, m$ , следует, что  $A_{i_1 \dots i_m j_1 \dots j_m} = A_{i'_1 \dots i'_m j'_1 \dots j'_m}$ .*

*Замечание 5.5.* Если вместо матрицы  $[A']_{ij}$  в методе Галеркина формировать шестивалентный тензор  $A_{i_1 i_2 i_3 j_1 j_2 j_3}$ , то он будет теплицевым, так как ядро интегрального оператора зависит от модуля разности аргументов.

Для решения задач дифракции (как прямых, так и обратных) удобнее «разворачивать» такие тензоры в обычные квадратные матрицы в результате перехода от тройной индексации конечных элементов и базисных функций к однократной.

Итак, если  $A_{i_1 \dots i_m j_1 \dots j_m}$  –  $2m$ -валентный тензор порядка  $n$ , то квадратная

матрица  $A$  порядка  $n^m$  определяется по правилу

$$\begin{aligned} A_{ij} &= A_{i_1 \dots i_m j_1 \dots j_m}, \\ i &= i_m n^{m-1} + i_{m-1} n^{m-2} + \dots + i_1, \\ j &= j_m n^{m-1} + j_{m-1} n^{m-2} + \dots + j_1. \end{aligned} \quad (5.110)$$

Вопрос о структуре таких матриц решается в следующем утверждении.

**Свойство 5.1.** *Если тензор  $A_{i_1 \dots i_m j_1 \dots j_m}$  теплицев, то матрица  $A$ , определенная согласно (5.110), является блочно-теплицевой.*

Действительно, фиксируя значения всех индексов кроме, например,  $i_m$  и  $j_m$ , получим, что  $A_{\dots+i_m, \dots+j_m} = A_{\dots+i'_m, \dots+j'_m}$ , если  $i_m - j_m = i'_m - j'_m$ .

Проиллюстрируем, как выглядит блочно-теплицева матрица в при  $n = 3$ . Если валентность исходного тензора равна 2 ( $m = 1$ ), то Утверждение 5.1 тривиально, так как сразу получается теплицева матрица. Например, такая:

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

В случае  $m = 2$  матрица  $A$  может быть представлена в блочно-теплицевом виде

$$A = \begin{bmatrix} A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 \\ A_2^4 & A_2^1 & A_2^2 \\ A_2^5 & A_2^4 & A_2^1 \end{bmatrix}, \quad (5.111)$$

причем в общем случае  $A_2^{l_1} \neq A_2^{l_2}$  при  $l_1 \neq l_2$ , и все  $A_2^{l_1}$  - теплицевы матрицы.

При  $m = 3$  матрица  $A$  представляется в блочно-теплицевом виде

$$A = \begin{bmatrix} A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \\ A_3^4 & A_3^1 & A_3^2 \\ A_3^5 & A_3^4 & A_3^1 \end{bmatrix}, \quad (5.112)$$

все  $A_3^{l_1}$  - блочно-теплицевы матрицы вида (5.111). Пример такой матрицы представлен на Рисунке 5.112:

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1,36 | 0,73 | 0,37 | 0,73 | 0,53 | 0,33 | 0,37 | 0,33 | 0,26 | 0,73 | 0,53 | 0,33 | 0,53 | 0,43 | 0,3  | 0,33 | 0,3  | 0,25 | 0,37 | 0,33 | 0,26 | 0,33 | 0,3  | 0,25 | 0,26 | 0,25 | 0,21 |      |
| 0,73 | 1,36 | 0,73 | 0,53 | 0,73 | 0,53 | 0,33 | 0,37 | 0,33 | 0,53 | 0,73 | 0,53 | 0,43 | 0,53 | 0,43 | 0,3  | 0,33 | 0,3  | 0,33 | 0,37 | 0,33 | 0,33 | 0,3  | 0,33 | 0,3  | 0,25 | 0,26 | 0,25 |
| 0,37 | 0,73 | 1,36 | 0,33 | 0,53 | 0,73 | 0,26 | 0,33 | 0,37 | 0,33 | 0,53 | 0,73 | 0,3  | 0,43 | 0,53 | 0,25 | 0,3  | 0,33 | 0,26 | 0,33 | 0,37 | 0,25 | 0,3  | 0,33 | 0,21 | 0,25 | 0,26 |      |
| 0,73 | 0,53 | 0,33 | 1,36 | 0,73 | 0,37 | 0,73 | 0,53 | 0,33 | 0,53 | 0,43 | 0,3  | 0,73 | 0,53 | 0,33 | 0,53 | 0,43 | 0,3  | 0,33 | 0,3  | 0,25 | 0,37 | 0,33 | 0,26 | 0,33 | 0,3  | 0,25 |      |
| 0,53 | 0,73 | 0,53 | 0,73 | 1,36 | 0,73 | 0,53 | 0,73 | 0,53 | 0,43 | 0,53 | 0,43 | 0,53 | 0,73 | 0,53 | 0,43 | 0,53 | 0,43 | 0,33 | 0,37 | 0,33 | 0,3  | 0,33 | 0,37 | 0,3  | 0,33 | 0,3  |      |
| 0,33 | 0,53 | 0,73 | 0,37 | 0,73 | 1,36 | 0,33 | 0,53 | 0,73 | 0,3  | 0,43 | 0,53 | 0,33 | 0,53 | 0,73 | 0,3  | 0,43 | 0,53 | 0,25 | 0,3  | 0,33 | 0,26 | 0,33 | 0,37 | 0,25 | 0,3  | 0,33 |      |
| 0,37 | 0,33 | 0,26 | 0,73 | 0,53 | 0,33 | 1,36 | 0,73 | 0,37 | 0,33 | 0,3  | 0,25 | 0,53 | 0,43 | 0,3  | 0,73 | 0,53 | 0,33 | 0,26 | 0,25 | 0,21 | 0,33 | 0,3  | 0,25 | 0,37 | 0,33 | 0,26 |      |
| 0,33 | 0,37 | 0,33 | 0,53 | 0,73 | 0,53 | 0,73 | 1,36 | 0,73 | 0,3  | 0,33 | 0,3  | 0,43 | 0,53 | 0,43 | 0,53 | 0,73 | 0,53 | 0,25 | 0,26 | 0,25 | 0,3  | 0,33 | 0,3  | 0,33 | 0,37 | 0,33 |      |
| 0,26 | 0,33 | 0,37 | 0,33 | 0,53 | 0,73 | 0,37 | 0,73 | 1,36 | 0,25 | 0,3  | 0,33 | 0,3  | 0,43 | 0,53 | 0,33 | 0,53 | 0,73 | 0,21 | 0,25 | 0,26 | 0,25 | 0,3  | 0,33 | 0,26 | 0,33 | 0,37 |      |
| 0,73 | 0,53 | 0,33 | 0,53 | 0,43 | 0,3  | 0,33 | 0,3  | 0,25 | 1,36 | 0,73 | 0,37 | 0,73 | 0,53 | 0,33 | 0,37 | 0,33 | 0,26 | 0,73 | 0,53 | 0,33 | 0,53 | 0,43 | 0,3  | 0,33 | 0,3  | 0,25 |      |
| 0,53 | 0,73 | 0,53 | 0,43 | 0,53 | 0,43 | 0,3  | 0,33 | 0,3  | 0,73 | 1,36 | 0,73 | 0,53 | 0,73 | 0,53 | 0,33 | 0,37 | 0,33 | 0,53 | 0,73 | 0,53 | 0,43 | 0,53 | 0,43 | 0,3  | 0,33 | 0,3  |      |
| 0,33 | 0,53 | 0,73 | 0,3  | 0,43 | 0,53 | 0,25 | 0,3  | 0,33 | 0,37 | 0,73 | 1,36 | 0,33 | 0,53 | 0,73 | 0,26 | 0,33 | 0,37 | 0,33 | 0,53 | 0,73 | 0,3  | 0,43 | 0,53 | 0,25 | 0,3  | 0,33 |      |
| 0,53 | 0,43 | 0,3  | 0,73 | 0,53 | 0,33 | 0,53 | 0,43 | 0,3  | 0,73 | 0,53 | 0,33 | 1,36 | 0,73 | 0,37 | 0,73 | 0,53 | 0,33 | 0,53 | 0,43 | 0,3  | 0,73 | 0,53 | 0,33 | 0,53 | 0,43 | 0,3  |      |
| 0,43 | 0,53 | 0,43 | 0,53 | 0,73 | 0,53 | 0,43 | 0,53 | 0,43 | 0,53 | 0,73 | 0,53 | 0,73 | 1,36 | 0,73 | 0,53 | 0,73 | 0,53 | 0,43 | 0,53 | 0,43 | 0,53 | 0,73 | 0,53 | 0,43 | 0,53 | 0,43 |      |
| 0,3  | 0,43 | 0,53 | 0,33 | 0,53 | 0,73 | 0,3  | 0,43 | 0,53 | 0,33 | 0,53 | 0,73 | 0,37 | 0,73 | 1,36 | 0,33 | 0,53 | 0,73 | 0,3  | 0,43 | 0,53 | 0,33 | 0,53 | 0,73 | 0,3  | 0,43 | 0,53 |      |
| 0,33 | 0,3  | 0,25 | 0,53 | 0,43 | 0,3  | 0,73 | 0,53 | 0,33 | 0,37 | 0,33 | 0,26 | 0,73 | 0,53 | 0,33 | 1,36 | 0,73 | 0,37 | 0,33 | 0,3  | 0,25 | 0,53 | 0,43 | 0,3  | 0,73 | 0,53 | 0,33 |      |
| 0,3  | 0,33 | 0,3  | 0,43 | 0,53 | 0,43 | 0,53 | 0,73 | 0,53 | 0,33 | 0,37 | 0,33 | 0,53 | 0,73 | 0,53 | 0,73 | 1,36 | 0,73 | 0,3  | 0,33 | 0,3  | 0,43 | 0,53 | 0,43 | 0,53 | 0,73 | 0,53 |      |
| 0,25 | 0,3  | 0,33 | 0,3  | 0,43 | 0,53 | 0,33 | 0,53 | 0,73 | 0,26 | 0,33 | 0,37 | 0,33 | 0,53 | 0,73 | 0,37 | 0,73 | 1,36 | 0,25 | 0,3  | 0,33 | 0,3  | 0,43 | 0,53 | 0,33 | 0,53 | 0,73 |      |
| 0,37 | 0,33 | 0,26 | 0,33 | 0,3  | 0,25 | 0,26 | 0,25 | 0,21 | 0,73 | 0,53 | 0,33 | 0,53 | 0,43 | 0,3  | 0,33 | 0,3  | 0,25 | 1,36 | 0,73 | 0,37 | 0,73 | 0,53 | 0,33 | 0,37 | 0,33 | 0,26 |      |
| 0,33 | 0,37 | 0,33 | 0,3  | 0,33 | 0,3  | 0,25 | 0,26 | 0,25 | 0,53 | 0,73 | 0,53 | 0,43 | 0,53 | 0,43 | 0,3  | 0,33 | 0,3  | 0,73 | 1,36 | 0,73 | 0,53 | 0,73 | 0,53 | 0,33 | 0,37 | 0,33 |      |
| 0,26 | 0,33 | 0,37 | 0,25 | 0,3  | 0,33 | 0,21 | 0,25 | 0,26 | 0,33 | 0,53 | 0,73 | 0,3  | 0,43 | 0,53 | 0,25 | 0,3  | 0,33 | 0,37 | 0,73 | 1,36 | 0,33 | 0,53 | 0,73 | 0,26 | 0,33 | 0,37 |      |
| 0,33 | 0,3  | 0,25 | 0,37 | 0,33 | 0,26 | 0,33 | 0,3  | 0,25 | 0,53 | 0,43 | 0,3  | 0,73 | 0,53 | 0,33 | 0,53 | 0,43 | 0,3  | 0,73 | 0,53 | 0,33 | 1,36 | 0,73 | 0,37 | 0,73 | 0,53 | 0,33 |      |
| 0,3  | 0,33 | 0,3  | 0,33 | 0,37 | 0,33 | 0,3  | 0,33 | 0,3  | 0,43 | 0,53 | 0,43 | 0,53 | 0,73 | 0,53 | 0,43 | 0,53 | 0,43 | 0,53 | 0,73 | 0,53 | 0,73 | 1,36 | 0,73 | 0,53 | 0,73 | 0,53 |      |
| 0,25 | 0,3  | 0,33 | 0,26 | 0,33 | 0,37 | 0,25 | 0,3  | 0,33 | 0,3  | 0,43 | 0,53 | 0,33 | 0,53 | 0,73 | 0,3  | 0,43 | 0,53 | 0,33 | 0,53 | 0,73 | 0,37 | 0,73 | 1,36 | 0,33 | 0,53 | 0,73 |      |
| 0,26 | 0,25 | 0,21 | 0,33 | 0,3  | 0,25 | 0,37 | 0,33 | 0,26 | 0,33 | 0,3  | 0,25 | 0,53 | 0,43 | 0,3  | 0,73 | 0,53 | 0,33 | 0,37 | 0,33 | 0,26 | 0,73 | 0,53 | 0,33 | 1,36 | 0,73 | 0,37 |      |
| 0,25 | 0,26 | 0,25 | 0,3  | 0,33 | 0,3  | 0,33 | 0,37 | 0,33 | 0,3  | 0,33 | 0,3  | 0,43 | 0,53 | 0,43 | 0,53 | 0,73 | 0,53 | 0,33 | 0,37 | 0,33 | 0,53 | 0,73 | 0,53 | 0,73 | 1,36 | 0,73 |      |
| 0,21 | 0,25 | 0,26 | 0,25 | 0,3  | 0,33 | 0,26 | 0,33 | 0,37 | 0,25 | 0,3  | 0,33 | 0,3  | 0,43 | 0,53 | 0,33 | 0,53 | 0,73 | 0,26 | 0,33 | 0,37 | 0,33 | 0,53 | 0,73 | 0,37 | 0,73 | 1,36 |      |

Рис. 20: Блочно-теплицева матрица ( $n = m = 3$ ).

Структура развернутой матрицы при произвольном  $m$  обобщается по индукции.

Итак, блок  $[B]$  основной матрицы СЛАУ в методе Геллеркина для уравнения (5.107) является блочно-теплицевой в силу свойств ядра  $G(x, y)$ . Оценим число  $\nu(n)$  различных элементов в такой матрице. При  $m = 2$ , например,  $\nu(n) \leq n^2$  – это число различных блоков, умноженное на число различных элементов в каждом блоке. Для  $m^3$  (в трехмерной задаче дифракции) получим  $\nu(n) \leq n^3$ .

Эту важную для численного решения задачи дифракции оценку можно усилить; правда, лишь в случае канонических рассеивателей. Проведем все поясняющие выкладки в двухмерном случае ( $m = 2$ ) – для большей наглядности.

На  $Q = [0; 1]^2 \subset \mathbb{R}^3$  введем  $n^2$  квадратных конечных элементов  $\Pi_{i_1 i_2}$  и рассмотрим интегралы

$$B_{i_1 i_2 j_1 j_2} := \int_{\Pi_{i_1 i_2}} \int_{\Pi_{j_1 j_2}} G(x, y) dy dx. \tag{5.113}$$

Так как  $G(x, y) = G(|x - y|)$ , то значения интегралов  $B_{i_1 i_2 j_1 j_2}$  зависят от пар  $(I_1, I_2) := (|i_1 - j_1|, |i_2 - j_2|)$ , причем  $0 \leq I_k \leq n - 1$ . Например,



будет иметь место равенство  $\int_{\Pi_{00}} \int_{\Pi_{31}} G(x, y) dy dx = \int_{\Pi_{11}} \int_{\Pi_{42}} G(x, y) dy dx$  (см. Рисунок 21).

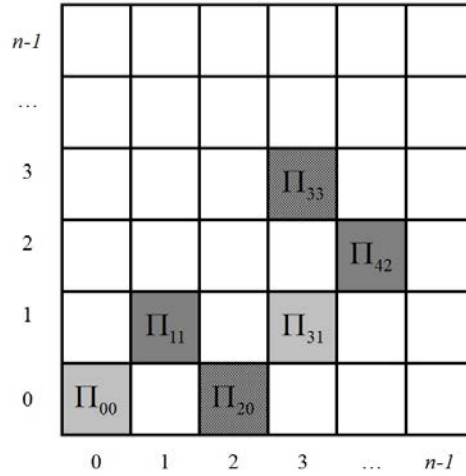


Рис. 21: Блочнo-теплицева матрица ( $n = m = 2$ ).

В этом примере  $(I_1, I_2) = (3, 1)$ . Далее, такое же значение примет и интеграл  $\int_{\Pi_{23}} \int_{\Pi_{33}} G(x, y) dy dx$  (здесь  $(I_1, I_2) = (1, 3)$ ). Заметим, что такая инвариантность относительно «поворотов» пар носителей не сохранится в случае конечных элементов прямоугольной формы.

Итак, число различных интегралов  $B_{i_1 i_2 j_1 j_2}$  равно

$$Card\{(I_1, I_2) : 0 \leq I_1 \leq I_2 \leq n - 1\} =: P_n^2,$$

где  $P_n^2 = C_{n+1}^2$  – треугольные числа.

В случае  $m = 3$  получим

**Утверждение 5.2.** Число различных элементов матрицы  $[B]$  равно

$$Card\{(I_1, I_2, I_3) : 0 \leq I_1 \leq I_2 \leq I_3 \leq n - 1\} =: P_n^3.$$

Здесь  $P_n^3 = C_{n+2}^3$  (а в общем случае  $P_n^m = C_{n+m-1}^m$ ) – так называемые симплектические числа.

В Таблице 10 проведено сравнение времени заполнения матрицы СЛАУ с учетом и без учета симметрии.

Таблица 10: Сравнение времени заполнения СЛАУ методом Гаусса в задаче дифракции на теле  $Q$

|   |      |                |        |        |
|---|------|----------------|--------|--------|
| Число разбиения $n$                               | 8    | 12             | 20     | 32     |
| Порядок матрицы $N$                               | 512  | 1728           | 8000   | 32768  |
| Число различных интегралов                        | 84   | 286            | 1330   | 5456   |
| Время заполнения матрицы (без учета симметрии), с | 583  | $6 \cdot 10^3$ | $10^5$ | $10^9$ |
| Время заполнения матрицы (с учетом симметрии), с  | 0.25 | 1.2            | 17     | 213    |

В качестве иллюстрации рассмотрена задача дифракции плоской волны на неоднородном теле  $Q \subset [0; 1]^3$ , представляющем собой объединение двух шаров с радиусами  $r_1 = 0.5$  и  $r_2 = 0.05$ . Неоднородность тела задается функцией  $\tilde{k}(x) = 2 + (1 + |x - x'|^{-1})$ , где  $x' = (0.5, 0.75, 0.75) \in Q$ .

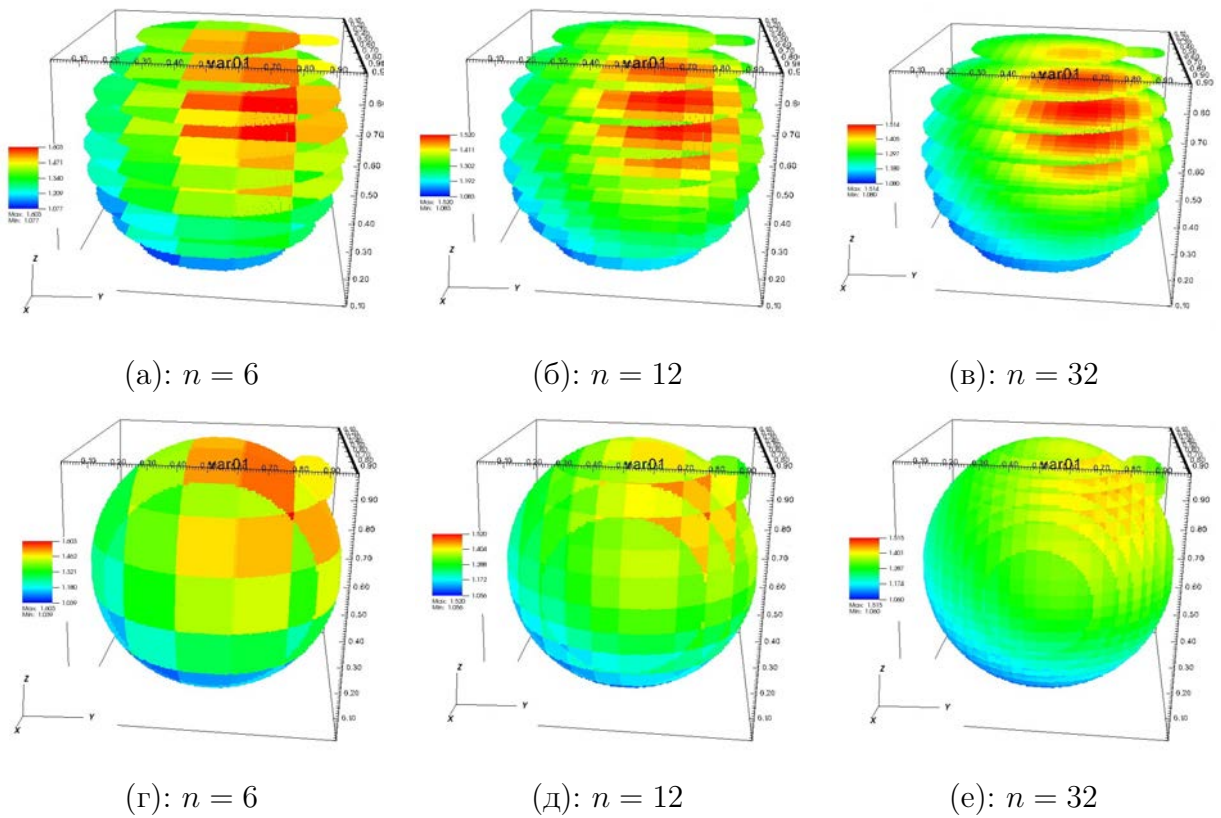


Рис. 22: Модуль решения  $|E|$  в сечениях области неоднородности и на ее поверхности.

На Рисунке 22 представлены графики приближенных решений при раз-

личном числе базисных функций  $m = n^3$  в сечениях ((а)–(в)) и на поверхности ((г)–(е)) области неоднородности. В Таблице 11 представлены результаты сравнения приближенных решений в равномерной метрике ( $\Delta_{n_1 n_2} = \max |E_{m_1} - E_{m_2}|, |E_{m_k}| \in (1, 2)$ ), иллюстрирующие внутреннюю сходимость метода Галеркина.

Таблица 11: Исследование внутренней сходимости метода Галеркина

| Числа разбиения $n_1, n_2$ | 6, 12 | 12, 16 | 16, 20 | 20, 32 |
|----------------------------|-------|--------|--------|--------|
| $\Delta_{n_1 n_2}$         | 0.15  | 0.11   | 0.065  | 0.043  |

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

### Основные научные результаты диссертации

В диссертации теоретически обоснован метод Галеркина для решения систем интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в задачах дифракции на частично экранированных телах и системах тел и экранов. К основным результатам диссертации относятся следующие:

- 1) доказана единственность решения краевых задач дифракции;
- 2) краевые задачи дифракции сведены к системам интегро-дифференциальных уравнений по ограниченным многообразиям с краем размерности 2 и 3;
- 3) доказаны теоремы о непрерывной обратимости и эллиптичности (в векторных задачах – для случая внешней среды с поглощением, то есть, при  $\text{Im}(\varepsilon_e) > 0$ ) матричных операторов интегро-дифференциальных уравнений в пространствах Соболева на многообразиях с краем размерности 2 и 3;
- 4) на многообразиях с краем размерности 2 и 3 введены скалярные и векторные базисные функции; доказано, что введенные базисные функции удовлетворяют условию аппроксимации в пространствах Соболева;
- 5) доказаны теоремы о сходимости метода Галеркина (в векторных задачах – при  $\text{Im}(\varepsilon_e) > 0$ ) для систем интегро-дифференциальных уравнений в пространствах Соболева;
- 6) описан алгоритм построения расчетных сеток и определения базисных функций для широкого класса тел и (в общем случае, неплоских) экранов, удовлетворяющих условию аппроксимации;
- 7) представлены формулы для определения матричных элементов в системах линейных алгебраических уравнений, возникающих при решении

задач дифракции методом Галеркина;

8) установлено, что в задачах дифракции на частично экранированном теле не требуется согласованности расчетных сеток на многообразиях различной размерности;

9) предложен и программно реализован эффективный параллельный алгоритм заполнения матрицы СЛАУ в методе Галеркина, учитывающий характерные особенности системы ИДУ.

## **Выводы**

В диссертации изучен новый класс задач дифракции монохроматических волн на частично экранированных неоднородных телах и системах тел и экранов. Полученные результаты позволили теоретически обосновать проекционный метод для решения таких задач. В частности, из результатов о непрерывной обратимости и эллиптичности интегро-дифференциальных операторов задач дифракции, а также в силу свойства аппроксимации для предложенных базисных функций (в том числе, вектор-функций на неплоских экранах) получены теоремы о сходимости метода Галеркина в скалярной и векторной задачах дифракции (включая квазиоптимальную оценку скорости сходимости метода).

## **Рекомендации по практическому использованию результатов**

Результаты диссертации носят преимущественно теоретический характер. Предложенные в работе численные методы могут быть применены для решения задач, возникающих в теории сложных СВЧ-устройств, радиолокации, СВЧ-томографии, а полученные теоретические результаты – при исследовании прямых и обратных задач дифракции на препятствиях сложной структуры. Подходы, использованные для разработки и обоснования проекционного метода, могут быть использованы при создании эффективных вычислительных алгоритмов и программных комплексов для решения подобных задач.

## Список литературы

- [1] **Агранович М. С.** Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. – Москва : МЦНМО, 2013. – 379 с.
- [2] **Березанский Ю. М.** Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев : Наукова Думка, 1965. – 799 с.
- [3] **Быховский Э. Б., Смирнов Н. В.** Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично-суммируемых по заданной области и операторах векторного анализа // Труды МИАН СССР. – 1960. – Т. 59, С. 5–36.
- [4] **Валовик Д. В., Смирнов Ю. Г.** Метод псевдодифференциальных операторов в задаче дифракции электромагнитной волны на диэлектрическом теле // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, № 4. – С. 509–517.
- [5] **Васильев, Е. Н.** Возбуждение тел вращения. – Москва : Радио и связь, 1987. – 272 с.
- [6] **Владимиров, В. С.** Уравнения математической физики. – Москва : Наука, 1981. – 512 с.
- [7] **Горейнов С. А., Оселедец И. В., Савостьянов Д. В., Тыртышников Е. Е.** Параллельные методы решения многоуровневых систем специального вида, возникающих в прямых и обратных задачах электродинамики // В сборнике: Научный сервис в сети Интернет: технологии параллельного программирования Труды Всероссийской научной конференции. Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, Ростовский государственный университет, Институт вычислительной математики РАН, 2006. – с. 166.
- [8] **Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.** Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. – Москва : Наука, 1971. – 352 с.
- [9] **Егоров Ю. В., Шубин М. А.** Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Элементы современной теории // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 31. Итоги науки и техники. – Москва : ВИНТИ, 1988. – С. 5–125.
- [10] **Еремин Ю. А., Свешников А. Г.** Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции. – Москва : Изд-во МГУ, 1992. – 182 с.
- [11] **Джексон, Дж.** Классическая электродинамика. – Москва : Мир, 1965. – 703 с.
- [12] **Дмитриев В. И., Захаров Е. В.** Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. – Москва : МаксПресс, 2008. – 314 с.

- [13] **Захаров Е. В., Пименов Ю. В.** Численный анализ дифракции радиоволн. – Москва : Радио и связь, 1982. – 184 с.
- [14] **Зорич, В. А.** Математический анализ. В 2 частях. Часть 2. – Москва : ФАЗИС, 1997. – xiv + 554 с.
- [15] **Ильинский А. С.** Проекционные методы для задач дифракции электромагнитных волн // Радиотехника и электроника. – 2005. – Т. 50, № 2. – С. 134–139.
- [16] **Ильинский А. С., Кравцов В. В., Свешников А. Г.** Математические модели электродинамики. – Москва : Высшая школа, 1991. – 224 с.
- [17] **Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г.** Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. – Москва : ИПРЖР, 1996. – 176 с.
- [18] **Като Т.** Теория возмущений линейных операторов. – Москва : Мир, 1972. – 739 с.
- [19] **Колтон Д.** Методы интегральных уравнений в теории рассеяния / Д. Колтон, Р. Кресс. – Москва : Мир, 1987. – 311 с.
- [20] **Крылов В. В.** Основы теории излучения и рассеяния звука. – Москва : Изд-во Московского университета, 1989. – 118 с. .
- [21] **Курант Р., Гильберт Д.** Методы математической физики. В 2 томах. Том 2. – Москва : Гостехиздат, 1951. – 620 с.
- [22] **Ладыженская О. А.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. – Москва : Наука, 1964. – 540 с.
- [23] **Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – Москва : Наука, 1973. – 578 с.
- [24] **Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.** Неоднородные граничные задачи и их приложения. – Москва : Мир, 1971. – 372 с.
- [25] **Мазья В. Г.** Пространства С. Л. Соболева. – Ленинград : Издательство ЛГУ, 1985. – 415 с.
- [26] **Марчук Г. И., Агошков В. И.** Введение в проекционно-сеточные методы. – Москва : Наука, 1981. – 416 с.
- [27] **Медведик М. Ю.** Применение функций крышек для решения задачи дифракции электромагнитных волн на экранах сложной формы // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки .– 2012 .– №3 (23) .– С. 84–98.

- [28] **Медведик М. Ю., Смирнов Ю. Г.** Эллиптичность интегрального уравнения электрического поля для поглощающих сред и сходимость метода Рао-Уилтона-Глиссона // Журнал вычислительной математики и математической физики – 2014. – Т. 54, № 1. – С. 105.
- [29] **Мизохата С.** Теория уравнений с частными производными. – Москва : Наука, 1977. – 504 с.
- [30] **Михлин С. Г.** Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – Москва : Физматгиз, 1962. – 254 с.
- [31] **Мищенко А. С.** Векторные расслоения и их применения. – Москва : Наука, 1984. – 208 с.
- [32] **Москалева М. А.** Задачи дифракции электромагнитных волн на системе произвольно расположенных тел и экранов : специальность 05.13.18 "Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ": автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук / Москалева Марина Александровна. – Пенза, 2017. – 22 с.
- [33] **Москалева М. А.** Исследование задачи дифракции электромагнитной волны на системе пересекающихся тел и экранов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 1 (37). – С. 37Ц49.
- [34] **Новиков С. П., Фоменко А. Т.** Элементы дифференциальной геометрии и топологии. – Москва: Наука, 1987. – 430 с.
- [35] **Постников, М. М.** Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия: Учеб. пособие для вузов. – Москва : Наука, 1987. – 480 с.
- [36] **Ремпель Ш., Шульце Б.-В.** Теория индекса эллиптических краевых задач. – Москва : Мир, 1986. – 576 с.
- [37] **Савостьянов Д. В., Тыртышников Е. Е.** О случае алгебраической эквивалентности метода коллокации и метода Галеркина // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т. 44, №4. – С. 686–693.
- [38] **Савостьянов Д. В., Тыртышников Е. Е.** Применение многоуровневых матриц специального вида для решения прямых и обратных задач электродинамики // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. – 2006. – Т. 7, № 1. – С. 1–16.
- [39] **Самохин А. Б.** Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. – Москва : Радио и Связь, 1998. – 160 с.



- [40] Самохин А. Б. Исследование задач дифракции электромагнитных волн в локально-неоднородных средах // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1990. – Т. 30, № 1. – С. 107–121.
- [41] Самохин А. Б. Объемные сингулярные интегральные уравнения для задач рассеяния на трехмерных диэлектрических структурах / А. Б. Самохин // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, № 9. – С. 215–1230.
- [42] Самохин А. Б., Самохина А. С. Объемные сингулярные интегральные уравнения для прозрачных структур над идеально проводящей плоскостью // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 9. – С. 1227.
- [43] Самохин А. Б., Шестопалов Ю. В. Исследование и метод решения задач рассеяния электромагнитных волн на диэлектрических и идеально проводящих структурах // Дифференциальные уравнения. – 2017. – Т. 53, № 9. – с. 1200.
- [44] Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. – Москва : Мир, 1984. – 472 с.
- [45] Славин И. В., Смирнов Ю. Г. Сильная эллиптичность гибридной формулировки для электромагнитной задачи дифракции // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2000. – Т. 40, № 2. – С. 286–299.
- [46] Смирнов Ю. Г. О разрешимости векторных электродинамических задач на незамкнутых поверхностях // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31, № 11. – С. 1936–1937.
- [47] Смирнов Ю. Г. О сходимости методов Галеркина для уравнений с операторами, эллиптическими на подпространствах, и решении уравнения электрического поля // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – Т. 47, № 1. – С. 133–143.
- [48] Смирнов Ю. Г. О фредгольмовости задачи дифракции на плоском ограниченном идеально проводящем экране // Доклады АН СССР. – 1991. – Т. 319, № 1. – С. 147–149.
- [49] Смирнов Ю. Г. Об эквивалентности электромагнитной задачи дифракции на неоднородном ограниченном диэлектрическом теле объемному сингулярному интегро-дифференциальному уравнению // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2016. – Т. 56, № 9. – С. 1657–1666.
- [50] Смирнов Ю. Г., Москалева М. А. Сходимость метода Галеркина в задаче дифракции электромагнитных волн на системе произвольно расположенных тел и экранов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 2 (38). – С. 78Ц86.

- [51] **Стрэттон Дж. А.** Теория электромагнетизма. – М.-Л. : ГИТТЛ, 1948. – 540 с.
- [52] **Тейлор М.** Псевдодифференциальные операторы. – Москва : Мир, 1985. – 472 с.
- [53] **Трибель Х.** Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. – Москва : Мир, 1980. – 665 с.
- [54] **Фельд Я. Н.** Дифракция электромагнитных волн на незамкнутых металлических поверхностях // Радиотехника и электроника. – 1975. – Т. 20, № 1. – С. 28–38.
- [55] **Фельд Я. Н.** Основы теории щелевых антенн. – Москва : Сов. радио, 1948. – 162 с.
- [56] **Хенль Х., Мауэ А., Вестпфаль Мауэ.** Теория дифракции. – Москва : Мир, 1964. – 428 с.
- [57] **Шубин М. А.** Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. – Москва : Добросвет, 2005. – 310 с.
- [58] **Adams Robert A. and Fournier John J. F.** Sobolev Spaces. 2nd edition. – Amsterdam: Academic Press, 2003. – 317 p.
- [59] **Banjai L.** Boundary element methods. – Zurich, 2007.
- [60] **Buffa, A.** The electric field integral equation on Lipschitz screens: definitions and numerical approximation / A. Buffa, S. H. Christiansen // Numer. Math. – 2003. – Vol. 94. – P. 229–267.
- [61] **Buffa A., Costabel M. and Sheen D.** On traces for  $H(\text{curl}, \Omega)$  in Lipschitz domains // J. Math. Anal. Appl. – 2002. – Vol. 276. – P. 845–867.
- [62] **Chern Shiing-shen** An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface // Proc. Amer. Math. Soc. – 1955. – Vol. 6. – P. 771–782.
- [63] **Colton D., Kress R.** Inverse Acoustic and Electromagnetic Theory. – Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag. – 1992. – 305 p.
- [64] **Colton D., Kress R.** Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. 3<sup>rd</sup> edition. – Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2013. – 405 p.
- [65] **Costabel M.** A Remark on the Regularity of Solutions of Maxwell's Equations on Lipschitz Domains // Math. Methods Appl. Sci. – 1990. – Vol. 12. – P. 365–368.
- [66] **Costabel M.** A Coercive Bilinear Form for Maxwell's Equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1991. – Vol. 157, № 2. – P. 527–541.
- [67] **Costabel M.** Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results // SIAM Journal of Mathematical Analysis. – 1988. – Vol. 19, №3. – P. 613–626.

- [68] **Costabel M., Darrigrand E. and Sakly H.** On the essential spectrum of the volume integral operator in electromagnetic scattering // C.R. Acad. Sci. Paris. – 2012. – Ser. I 350. – P. 193–197.
- [69] **Costabel M., Darrigrand E., Kone E. H.** Volume and surface integral equations for electromagnetic scattering by a dielectric body // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2010. – Vol. 234, №6. – P. 1817–1825.
- [70] **Costabel M., Le Louer F.** On the Kleinman-Martin integral equation method for electromagnetic scattering by a dielectric body // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 2011. – Vol. 71, № 2. – P. 635–656.
- [71] **Cranganu-Cretu B. and Hiptmair R.** Direct boundary integral equation method for electromagnetic scattering by partly coated dielectric objects // Comput. Visual Sci. – 2005. – Vol. 8, № 3. – P. 145–158.
- [72] **Daeva S.G., Setukha A.V.** Numerical Simulation of Scattering of Acoustic Waves by Inelastic Bodies using Hypersingular Boundary Equation // AIP Conf. Proceedings. – 2015. DOI: 10.1063/1.4912614.
- [73] **Huoyuan Duan, Ping Lin, Tan Rog C. E.** Solving a Maxwell Interface Problem by a Local  $L_2$  Projected  $C^0$  Finite Element Method // Numerical Mathematics and Advanced Applications - ENUMATH 2013: Proceedings of ENUMATH 2013. – 2013.
- [74] **Donepudi K. C., Gang K., Song J. M., etc.** Higher-Order MOM Implementation to Solve Integral Equations // Antennas and Propagation Society International Symposium. – 1999, IEEE. – Vol. 3. – P. 1716–1719.
- [75] **Duran M., Muga I., Muga J.-C.** The Helmholtz equation in a locally perturbed half-space with non-absorbing boundary // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 2009. – Vol. 191, № 1. – P. 143–172.
- [76] **Gmati N., Lanteri S., Mohamed A.** Discontinuous Galerkin method coupled with an integral representation for solving the three-dimensional time-harmonic Maxwell equations // Applied Acoustics. – 2015. – Vol. 108. – P. 59–62.
- [77] **Hanninen M., Taskinen M., and Sarvas J.** Singularity subtraction integral formulae for surface integral equations with RWG, rooftop and hybrid basis functions // Prog. Electromagn. Res. PIER. – 2006. – Vol. 63. – P. 243–278.
- [78] **Heuer N., Stephan E. P.** Iterative substructuring for hypersingular integral equations in  $\mathbb{R}^3$  // SIAM Journal on Scientific Computing. – 1998. – Vol. 20, № 2. – P. 739–749.
- [79] **Hsiao G. C., Stephan E. P., Wendland W. L.** On the Dirichlet problem in elasticity for a domain exterior to an arc // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 1991. – Vol. 34, № 1. – P. 1–19.

- [80] **Hsiao G. C., Wendland W. L.** Boundary integral equations. – New York: Springer, 2008. – 617 p.
- [81] **Hua Y., Liu Q. Z., etc.** A hybrid FE-BI method for electromagnetic scattering from dielectric bodies partially covered by conductors // J. Electromagnetic Waves and Appl. – 2008. – Vol. 22. – P. 423–430.
- [82] **Ilyinsky A. S., Smirnov Yu. G.** Electromagnetic Wave Diffraction by Conducting Screens. – Utrecht, the Netherlands : VSP, 1998. – 114 p.
- [83] **Kaiser L.** Electromagnetic Scattering of Plane Wave from a Finite Array of Partially-Shielded Dielectric Cylinders // Proceedings of the World Congress on Engineering 2009. – Vol. II, WCE 2009, July 1–3, London, U.K.
- [84] **Qutubuddin, Kh.** Method of Moment Analysis of Partially Shielded Chiral Bodies of Revolution, 2012. Electrical Eng. and Comp. Science – Dissertations. Paper 318.
- [85] **Kirsch A.** An integral equation approach and the interior transmission problem for Maxwell's equations // Inverse Problems and Imaging. – 2007. – Vol. 1, № 1. – P. 107–127.
- [86] **Kirsch A., Lechleiter A.** The operator equations of Lippmann-Schwinger type for acoustic and electromagnetic scattering problems in  $L_2$  // Applicable Analysis. – 2010. – Vol. 88. – P. 807–830.
- [87] **Kress, R.** Linear integral equations // Applied mathematical sciences. 89. – Springer Verlag New York Inc., 1989. – 299 p.
- [88] **Han Kui** A Domain Decomposition Scheme With Curvilinear Discretizations for Solving Large and Complex PEC Scattering Problems // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters 17:2. – 2018. – P. 242–246.
- [89] **Cakoni F., Colton D. and Monk P.** The direct and inverse scattering problems for partially coated obstacles // Inverse Problems. – 2001. – Vol.17. – P. 1997–2015.
- [90] **Chao Hsueh-Yung** Application of curvilinear basis functions and MLFMA for radiation and scattering problems involving curved PEC structures // IEEE Transactions on Antennas and Propagation 51:2. – 2003. – P.331–336.
- [91] **Latiri-Grouz C., Ammari H., Nédélec J.-C.** Scattering of Maxwell's equations with a Leontovich boundary condition in an inhomogeneous medium: a singular perturbation problem // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1999. – Vol. 59, № 4. – P. 1322–1334.
- [92] **Mu Lin, Wang Junping, Ye Wang, Zhang Wang.** A Weak Galerkin Finite Element Method for the Maxwell Equations // Journal of Scientific Computing. – 2015. – Vol. 65, № 1. – P. 1573–7691.

- [93] **Maue A. W.** Toward Formulator of a General Diffraction Problem via an Integral Equation // Zeitschrift fur Physik. – 1949. – Vol. 12. – P. 601–618.
- [94] **Mittra R.** Numerical and asymptotic techniques in electromagnetics. – New York : Springer, 1975. – 260 p.
- [95] **Mueller C.** Foundations of the mathematical theory of electromagnetic waves. – Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1969. – 353 p.
- [96] **Nazarchuk Z. T.** Diffraction of  $H$ -polarized electromagnetic waves by partially shielded dielectric cylinder // Radiophys Quantum Electron. – 1993. – Vol. 36. – P. 187.
- [97] **Nédélec J.-C.** Acoustic and Electromagnetic Equations. Integral Representations for Harmonic Problems. – New York : Springer, 2001. – 328 p.
- [98] **Operto S., Virieux J., Ribodetti A., Anderson J. E.** Finite-Difference Frequency-Domain Modeling of Viscoacoustic Wave Propagation in 2D Tilted Transversely Isotropic (TTI) Media // Geophys. – 2009. – Vol. 74, № 5. – P. 75–95.
- [99] **Peter A., Zwamborn M. and Peter M. van den Berg.** A Weak Form of the Conjugate Gradient FFT Method for Plate Problems // IEEE transactions on antennas and propagation. – 1991. – Vol. 39. – №2.
- [100] **Chen Ru-Shan, Jianjun Ding, etc.** A Multiresolution Curvilinear Rao-Wilton-Glisson Basis Function for Fast Analysis of Electromagnetic Scattering // IEEE Transactions on Antennas and Propagation 57:10. – 2009. – P. 3179–3188.
- [101] **Samokhin A., Kobayashi Y., Kobayashi K.** Stationary iteration methods for solving 3d electromagnetic scattering problems // Applied Mathematics and Computation. – 2013. – Vol. 222. – P. 107–122.
- [102] **Setukha A.V., Bezobrazova E.N.** // Russ. J. of Num. Analysis and Math. Modelling. – 2017. – Vol. 32, № 6.
- [103] **Smirnov Yu. G.** Method of Pseudodifferential Equations for Problems of Electromagnetic Wave Diffraction by Thin Screens // Journal of Communications, Technology and Electronics. – 2000. – Vol. 45. – P. 212–228.
- [104] **Sommerfeld A.** Mathematische Theorie der Diffraction // Math. Ann. – 1896. – vol. 47. – P. 317–374.
- [105] **Stephan E. P.** Boundary integral equations for screen problems in  $\mathbb{R}^3$  // Integral equations and potential theory. – 1987. – Vol. 10, №10. – pp. 236–257.
- [106] **Stephan E., Stephan W. L.** An Augmented Galerkin Procedure for the Boundary Integral Method Applied to Two-dimensional Screen and Crack Problems // Applicable Analysis. – 1984. – Vol. 18. – P. 105–128.

- [107] **Thompson L. L.** A review of Finite-Element Methods for Time-Harmonic Acoustics // J. Acoust. Soc. Am. – 2006. – Vol. 119, № 3. – P. 1315–1330.
- [108] **Turc C., Anand A., Bruno Anand, Chaubell J.** Efficient Solution of Three-Dimensional Problems of Acoustic and Electromagnetic Scattering by Open Surfaces // WAVES 2011 Proceedings. – 2011.
- [109] **Veliev E. I.** Electromagnetic wave diffraction by a grating of partially shielded dielectric bars of circular cross section, 1985.
- [110] **Vinogradov S. S., Sulima A. V.** Calculation of the absorption cross section of a partially shielded dielectric sphere // Translated from Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Radiofizika. – 1983. – Vol. 26, №10. – P. 1276–1281.
- [111] **Vinogradov S. S., Sulima A. V.** – Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR, Ser. A. – 1982. – Vol.55, №5.
- [112] **Wandzura S.** Electric current basis functions for curved surface // Electromagnetics. – 1992. – Vol. 12. – P. 77–97.
- [113] **Yuan X., Harrington R. F., Harrington S. S.** Electromagnetic scattering by a dielectric cylinder partially covered by conductors // J. Electromag. Waves Appl. – 1988. – Vol. 2, № 1. – P. 21–44.

## Список авторских публикаций

### Публикации, содержащие основные результаты диссертации

- [114] **Деревянчук Е. Д., Смолькин Е. Ю., Цупак А. А.** Метод Галеркина решения скалярной задачи рассеяния препятствием сложной формы // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 4 (32). – С. 57–68.
- [115] **Медведик М. Ю., Смирнов Ю. Г., Цупак А. А.** Скалярная задача дифракции плоской волны на системе непересекающихся экранов и неоднородных тел // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 8. – С. 1319–1331.
- Medvedik M.Y., Smirnov Y.G., Tsupak A.A.** Scalar problem of plane wave diffraction by a system of nonintersecting screens and inhomogeneous bodies // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2014. – Vol.54, № 8. – P. 1280–1292.
- [116] **Смирнов Ю. Г., Медведик М. Ю., Цупак А. А., Москалева М. А.** Задача дифракции акустических волн на системе тел, экранов и антенн // Математическое моделирование. – 2017. – Т. 29, № 1. – С. 109–118.

- [117] **Смирнов Ю. Г., Цупак А. А.** Метод интегральных уравнений в скалярной задаче дифракции на системе, состоящей из «мягкого» и «жесткого» экранов и неоднородного тела // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, № 9. – С. 1164–1174.  
**Smirnov Y.G., Tsupak A.A.** Method of integral equations in the scalar problem of diffraction on a system consisting of a "soft" and a "hard" screen and an inhomogeneous body // Differential Equations. – 2014. – Vol. 50, № 9. – P. 1150–1160.
- [118] **Смирнов Ю. Г., Цупак А. А.** Метод интегральных уравнений в скалярной задаче дифракции на частично экранированном неоднородном теле // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 9. – С. 1234–1244.  
**Smirnov Y.G., Tsupak A.A.** Method of integral equations in a scalar diffraction problem on a partially screened inhomogeneous body // Differential Equations. – 2015. – Vol. 51, № 9. – P. 1225–1235.
- [119] **Смирнов Ю. Г., Цупак А. А.** О существовании и единственности классического решения задачи дифракции электромагнитной волны на неоднородном диэлектрическом теле без потерь // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2017. – Т. 57, № 4. – С. 702–709.  
**Smirnov Y.G., Tsupak A.A.** On the unique existence of the classical solution to the problem of electromagnetic wave diffraction by an inhomogeneous lossless dielectric body // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2017. – Vol. 57, № 4. – P. 698–705.
- [120] **Смирнов Ю. Г., Цупак А. А.** О фредгольмовости уравнения электрического поля в векторной задаче дифракции на объемном частично экранированном теле // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Т. 52, № 9. – С. 1242–1251.  
**Smirnov Y.G., Tsupak A.A.** On the Fredholm property of the electric field equation in the vector diffraction problem for a partially screened solid // Differential Equations. – 2016. – Vol. 52, textnumero 9. – P. 1199–1208.
- [121] **Цупак А. А.** О единственности решения задачи дифракции акустической волны на системе непересекающихся экранов и неоднородных тел // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 1. – С. 30–38.
- [122] **Цупак А. А.** О фредгольмовости интегро-дифференциального оператора в задаче дифракции электромагнитной волны на объемном теле, частично экранированном системой плоских экранов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 4. – С. 3–11.
- [123] **Цупак А. А.** Проекционный метод решения скалярной задачи дифракции на неплоском жестком экране // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 2 (54). – С. 3–12. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-2-1.

- [124] **Цупак А. А.** Существование и единственность решения задачи дифракции акустической волны на объемном неоднородном теле, содержащем мягкий экран // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 3. – С. 61–71.
- [125] **Цупак А. А.** Существование и единственность решения скалярной задачи дифракции на объемном неоднородном теле с кусочно-гладким показателем преломления // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2018. – № 3 (47). – С. 17–26.
- [126] **Цупак А. А.** Численный метод и параллельный алгоритм решения задачи дифракции электромагнитной волны на неплоском идеально проводящем экране // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 4 (56). – С. 32–41. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-4-3.
- [127] **Цупак А. А.** Сходимость метода Галеркина в задаче дифракции электромагнитной волны на системе тел и неплоских экранов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2023. – № 4 (47). – С. 14-25.
- [128] **Цупак А. А., Романова Н. В.** Решение задачи дифракции акустической волны на системе жестких экранов методом Галеркина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 2 (38). – С.54–66.
- [129] **Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G., Tsupak A. A., Valovik D. A.** Vector problem of electromagnetic wave diffraction by a system of inhomogeneous volume bodies, thin screens, and wire antennas // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. – 2016. – Vol. 30, № 8. – P. 1086–1100. – DOI 10.1080/09205071.2016.1172990.
- [130] **Skvortsov O. S., Tsupak A. A.** Numerical Investigation of Electromagnetic Wave Scattering from an Inhomogeneous Solid and a Curvilinear Perfectly Conducting Screen // Technical Physics. – 2023. – Vol. 68, № 8. – P. 187–198. – DOI 10.1134/S1063784223070034;
- [131] **Smirnov, Yu. G.** Existence and uniqueness theorems in electromagnetic diffraction on systems of lossless dielectrics and perfectly conducting screens / Yu. G. Smirnov, A. A. Tsupak // Applicable Analysis. – 2017. – Vol. 96, № 8. – P. 1326–1341. – DOI 10.1080/09205071.2016.1172990.
- [132] **Smirnov Yu. G., Tsupak A. A.** Integro-differential Equations of the Vector Problem of Electromagnetic Wave Diffraction by a System of Nonintersecting Screens and



- Inhomogeneous Bodies // *Advances in Mathematical Physics*, 2015. – Vol. 2015, Article ID 945965, 6 pages. – DOI 10.1155/2015/945965.
- [133] **Smirnov Yu. G., Tsupak A. A.** Investigation Of Electromagnetic Wave Diffraction From An Inhomogeneous Partially Shielded Solid // *Applicable Analysis*. – 2018. – Vol. 97, № 11. – P. 1881–1895. – DOI 10.1080/00036811.2017.1343467.
- [134] **Smirnov Yu.G., Tsupak A.A., Valovik D.A.** On the volume singular integro-differential equation for the electromagnetic diffraction problem // *Applicable Analysis*. – 2017. – Vol. 96, № 2. – P. 173–189. – DOI 10.1080/00036811.2015.1115839.
- [135] **Tsupak A.A.** Electromagnetic Wave Scattering from Curvilinear Screens: Galerkin Method Convergence Proof // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2023. – Vol. 44, No. 9. – P. 4091–4100.

### Монографии

- [136] **Смирнов Ю. Г., Цупак А. А.** Математическая теория дифракции акустических и электромагнитных волн на системе экранов и неоднородных тел. – Москва : КноРус, 2016. – 224 с.
- Smirnov Yu. G., Tsupak A. A.** Diffraction of Acoustic and Electromagnetic Waves by Screens and Inhomogeneous Solids: Mathematical Theory. – Moscow : Ru-Science, 2016. – 214 p.

### Прочие публикации

- [137] **Смирнов Ю. Г., Цупак А. А.** О единственности решения обратной задачи дифракции на неоднородном теле с кусочно-гельдеровым показателем преломления в специальном классе функций // *Доклады Академии наук*. – 2019. – Т. 485, № 5. – С. 545–547.
- [138] **Цупак А. А.** Существование и единственность решения задачи дифракции акустической волны на частично экранированном теле // Тезисы докладов Пятой Международной конференции, посвященной 95-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л. Д. Кудрявцева. – Москва : Изд-во РУДН, 2018. – С. 159–160.
- [139] **Цупак А. А.** Сходимость метода Галеркина в задаче дифракции электромагнитных волн на системе частично экранированных тел // В книге: Математическое моделирование в электродинамике: теория, методы и приложения (тезисы докладов Международной научной конференции) под ред. Ю.Г. Смирнова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2019.

- [140] **Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G., Tsupak A. A.** Non-iterative two-step method for solving scalar inverse 3D diffraction problem // *Inverse Problems in Science and Engineering*. – 2020. – Vol. 28, № 10, – P. 1474–1492. – DOI 10.1080/17415977.2020.1727466.
- [141] **Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G., Tsupak A. A.** Two-step method for solving inverse problem of diffraction by an inhomogenous body // *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*. 38th. Ser. "Nonlinear and Inverse Problems in Electromagnetics - PIERS 2017". – 2018. – P. 83–92. – DOI 10.1007/978-3-319-94060-1\_7.
- [142] **Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G., Tsupak A. A.** The two-step method for determining a piecewise-continuous refractive index of a 2D scatterer by near field measurements // *Inverse Problems in Science and Engineering*. – 2020. – Vol. 28, № 3. – P. 427–447. – DOI 10.1080/17415977.2019.1597872.
- [143] **Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G., Smolkin E. Yu., Tsupak A. A.** Electromagnetic wave diffraction by a system of non-intersecting obstacles of various dimensions // *Proceedings of the 2015 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)*, 2015. – P. 1568–1571. – DOI: 10.1109/ICEAA.2015.7297389.
- [144] **Moskaleva M. A., Smirnov Yu. G., Tsupak A. A.** Electromagnetic Wave Diffraction by a System Of Arbitrarily Located 1D, 2D, And 3D Scatterers // *Proceedings of PIERS 2017, St Petersburg, Russia, May 22–25, 2017*. – P. 913–919. – DOI 10.1109/PIERS.2017.8261874.
- [145] **Smolkin E., Tsupak A. A.** Galerkin method for solving scalar problems of diffraction by a partially shielded inhomogeneous body // *2016 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)*, 2016. – P. 360–363, DOI 10.1109/ICEAA.2016.7731398.
- [146] **Smirnov Yu. G., Smolkin E. Yu., Tsupak A. A.** Scalar problem of diffraction of a plane wave from a system of two- and three-dimensional scatterers // *Proceedings of the International Conference Days on Diffraction (DD 2015)*. – 2015. – P. 313–317. – DOI : 10.1109/DD.2015.7354883.
- [147] **Smirnov Yu. G., Tsupak A. A.** Analysis of Electromagnetic Diffraction by a Dielectric Body in Several Domains Using the Volume Singular Integral Equation // *Proceedings of PIERS 2007, Prague, Czech Republic, August 27-30, 2007*. – P. 142.
- [148] **Tsupak A. A., Smirnov Yu. G.** On The Problem Of Diffraction By An Inhomogeneous Solid Partially Covered By Soft And Hard Screens // *Contemporary Problems Of Mathematics And Mechanics Proceedings Of The International*

Conference Dedicated To The 80Th Anniversary Of Academician V. A. Sadovnichy. – Moscow, 2019. – P. 213–215.

- [149] **Tsupak A. A.** Galerkin Method For Solving Hypersingular Integral Equation in the Problem of Acoustic Scattering From a Non-Planar Smooth Screen // В сборнике: Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии. Труды XX Международной конференции под ред. проф. В.П. Гергеля. – Нижний Новгород, 2020. – С. 22–26.
- [150] **Tsupak A.** On a General Approach for Numerical Solving Singular Integral Equations in the Scalar Problems of Diffraction by Curvilinear Smooth Screens // Communications in Computer and Information Science. – 1413. –P.154–160.