ОТЗЫВ официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Морозова Станислава Викторовича
на тему: «Построение чебышевских приближений
для матриц и тензоров и их применения»
по специальности 1.1.6. «Вычислительная математика»

Актуальность диссертационной работы. Задача построения малоранговых приближений для матриц и тензоров часто возникает в различных прикладных и теоретических задачах. Качество малорангового приближения существенно зависит от нормы, в которой оно рассматривается. В норме Фробениуса для матриц эта задача может быть решена на при помощи сингулярного разложения, а точность приближения определяется скоростью убывания сингулярных чисел. В то же время можно показать, что многие классы матриц (например, некоторые функционально порожденные матрицы) допускают эффективные малоранговые приближения в норме Чебышева даже при медленном убывании сингулярных чисел. Это свойство может быть использовано в задачах сжатия матриц и для ускорения многих вычислительных процедур.

Следует особо подчеркнуть, что описанная задача эквивалента задаче об оценке поперечника по Колмогорову в равномерной метрике «косого» октаэдра. При этом даже для классического октаэдра B_1^N порядки k-го поперечника в равномерной метрике найдены не для всех k и N. Задача об оценках поперечника детально изучена в работах советских математиков. При этом вопрос о алгоритмах построения оптимальных пространств изучен мало. Эта задача или, что эквививалентно, задача точного и даже приближенного нахождения малоранговых приближений в чебышевской норме является алгоритмически сложной. Например, известно, что задача проверки — существует ли для заданной системы векторов $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ и числа $\varepsilon > 0$ такое одномерное подпространство U, что все векторы a_j могут быть приближены подпространством U в l_∞ с погрешностью ε, является NP-полной. В диссертационной работе С. В. Морозова рассматривается задача нахождения малоранговых приближений матриц и тензоров в чебышевской норме, в частности предлагается алгоритм нахождения оптимального одномерного подпространства, приближающего заданную систему векторов в l_∞.

Новизна результатов научной работы. В диссертации С. В. Морозова предложен новый алгоритм построения малорангового приближения матриц произвольного размера в чебышевской норме. Для эффективного решения этой задачи используется алгоритм оптимального приближения заданного вектора подпространством в l_∞. Алгоритм был построен на основе оригинального критерия оптимальности решения через альтернанс, алгоритма Ремеза и эффективных обновлениях QR разложения.

Кроме этого в диссертации был предложен новый метод нахождения оптимального одномерного подпространства, приближающего заданную систему векторов в l_∞. Алгоритм может иметь экспоненциальную сложность для произвольной системы, однако для системы из двух векторов из $\mathbb{R}^n$ метод представляет из себя простую итерационную процедуру, сложность каждой итерации которого составляет $O(n^2)$ операций.

В работе также впервые предложен алгоритм построения малоранговых аппроксимаций тензоров (многомерных массивов) в чебышевской норме в каноническом полилинейном формате.

Степень обоснованности и достоверность научных положений, выводов и рекомендаций диссертационной работы. Достоверность результатов следует из строгости математических рассуждений и согласуется с численными экспериментами. Результаты диссертации опубликованы в 4 работах, индексируемых Scopus, WoS и RSCI, и докладывались на российских и международных конференциях.

Краткое содержание диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и заключения.

В первой главе обсуждается задача приближения заданного вектора подпространством. Большая часть главы состоит в переизложении теории равномерных приближений в дискретном случае. Из оригинальных результатов стоит отметить новый альтернансный критерий оптимальности и быстрый алгоритм построения оптимального приближения на основе алгоритма Ремеза и быстрых обновлений QR разложения матриц.

Вторая глава посвящена задаче построения малоранговых приближений матриц в чебышевской норме. В главе предлагается алгоритм, позволяющий находить приближения для произвольного ранга. Отдельное внимание посвящено задаче построения оптимальных приближений в случае ранга 1. Ранее в работах В. А. Даугавет был предложен метод переменных направлений для построения приближений ранга 1. Недостаток этого метода состоит в том, что метод запускается со случайных векторов и не позволяет находить оптимальные подпространства. В диссертации С. В. Морозова был проведен анализ знаков векторов в методе переменных направлений и было показано как выбрать конечное число стартовых точек таких, что метод, запущенный из них, обеспечивает оптимальное приближение. Следует отметить, что теоретическая оценка сложности предложенного алгоритма имеет экспоненциальный рост по рангу матрицы, однако он применим на практике для матриц размера порядка 100.

Вторая глава сопровождается большим количеством вычислительных экспериментов. Стоит отметить, что согласно численным экспериментам метод, предложенный в диссертации и примененный к единичным матрицам размера 16000, позволяет получать оценки сверху поперечников октаэдра, превосходящие все известные теоретические оценки.

В третьей главе диссертации обсуждаются вопросы построения малоранговых приближений тензоров в каноническом формате в равномерной норме. В частности, детально обсуждается случай приближения рангом 1. Глава сопровождается численным экспериментами. Среди них можно отметить примеры приближения функционально порожденных тензоров и задачу восстановления малоранговых тензоров из равномерного шума.

Автореферат в полной мере передает содержание диссертации.

Критические замечания по диссертационной работе. Как было сказано выше, рассматриваемая тематика тесно связана с работами по оценкам Колмогоровских поперечников, полученных в СССР еще в 70-80-е годы прошлого века. В последние десятилетия на западе получен ряд результатов о малоранговом приближении конкретных классов матриц, уступающих в точности работам, выполненным в СССР. Теорема из работы [5] Уделла и Таунсенда 2019 года, с которой начинается изложение главы 2, существенно слабее результата Гарнаева и Глускина 1984 года. В качестве замечания отмечу недостаточное знакомство автора с отечественными работами по теории поперечников. Этот недостаток не имеет принципиального значения, поскольку основная цель диссертации не в получении теоретических оценок, а в построении алгоритмов, применимых на практике.

Указанное замечание не умаляет значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.6. «Вычислительная математика» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Морозов Станислав Викторович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.6. «Вычислительная математика».

Официальный оппонент:
академик РАН, доктор физико-математических наук,
профессор, главный научный сотрудник, заведующий
отделом теории функций ФГБУН «Математич
имени В. А. Стеклова Российской академии на
КАШИН Борис Сергеевич

7.12.24

Контактные данные:
тел.: +7(499) 941-01-95, e-mail: kashin@mi-ras.ru
Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена диссертация:
01.01.01 — Теория функций и функциональный анализ

Адрес места работы:
119991, Москва, ул. Губкина, д. 8,
ФГБУН «Математический институт
имени В. А. Стеклова Российской академии наук»,
отдел теории функций
Тел.: +7(499) 941-01-95; e-mail: kashin@mi-ras.ru

Подпись сотрудника ФГБУН «Математический институт
имени В. А. Стеклова Российской академии наук»
Б. С. Кашина удостоверяю:

Подпись Кашина Б.С. заверяю
Главный с ... отдела
кадров ... тива О.О
17.12.2024