

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Удалов Артем Сергеевич

Численные методы повышенного порядка точности в механике трещин

Специальность 1.1.8. – Механика деформируемого твердого тела

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор

Звягин Александр Васильевич

Москва – 2024

Оглавление

Введение.....	3
Глава 1. Численный метод решения плоских задач механики разрушения повышенного порядка точности.....	23
1.1 Постановка задач.....	23
1.2 Численный метод решения.....	25
1.3 Коэффициенты интенсивности напряжений.....	33
1.4 Итоги главы 1.....	42
Глава 2. Верификация и валидация алгоритма. Численные результаты для ранее не исследованных задач.....	43
2.1 Верификация и валидация.....	43
2.2 Численные результаты.....	56
2.3 Итоги главы 2.....	61
Глава 3. Численный метод решения плоских задач теплопроводности тел с трещинами. Численные результаты.....	62
3.1 Постановка задач и численный метод решения.....	62
3.2 Численные результаты.....	72
3.3 Итоги главы 3.....	73
Заключение.....	74
Список литературы.....	75

Введение.

Актуальность и степень проработанности темы исследования.

С развитием инженерной мысли появляется огромное множество новых механизмов. Они активно развиваются и становятся сложнее, однако режимы их использования накладывают определенные, порой очень жесткие, условия на детали, из которых они состоят. В частности, в связи с высокой механической и тепловой нагрузкой приходится обязательно просчитывать прочность всех составляющих механизма, будь то тепловая машина или, например, обшивка летательного аппарата. Натурные эксперименты, проводимые как для отдельных деталей, так и для частей конструкции требуют большого количества времени и ресурсов. При этом полагаться на эксперименты, проведенные для определенного материала, нельзя, ибо технология создания определенной детали, а также процесс ее эксплуатации сильно влияют на вероятность ее разрушения. На данный момент абсолютно очевидно, что из-за наличия огромного количества микродефектов в технических материалах в большинстве случаев достичь теоретической прочности конструкции попросту не удастся даже на момент ввода ее в эксплуатацию. Наличие трещин и других нарушений целостности материала, из которого произведена деталь, может привести к стремительному разрушению всей конструкции. Так в 19 веке из-за трещин разрушались морские суда и различные тепловые агрегаты. Одним из самых громких примеров техногенной катастрофы может служить разрушение танкера "Скенектеди", который без видимых на то причин в спокойной воде разломился почти на две части. Дополнительной опасной чертой разрушения такого типа можно считать очень высокую скорость, с которой оно происходит. Например, трещина в танкере образовалась за считанные мгновения, а не развивалась на протяжении длительного времени.

Прочность материалов в смысле их «трещиностойкости» - одна из основных областей практического приложения механики разрушения. Разрушение тел,

связанное с зарождением и развитием в них трещин, для некоторых материалов называется хрупким. Для таких материалов область пластических деформаций пренебрежимо мала по сравнению с размерами трещины. Для большинства конструкционных материалов разрушение не является хрупким. Тем не менее, если размеры области пластических деформаций много меньше размеров трещины, упругое решение достаточно точно описывает поле напряжений вне пластической области. При этом пластические свойства учитываются в механике линейного разрушения физическими константами материала. Эти константы (например, коэффициенты интенсивности напряжений) определяются в экспериментах с учетом пластического поведения материала на конце трещины при её росте. Это позволяет применять методы линейной механики разрушения в тех случаях, когда характерные размеры областей развитых пластических деформаций малы по сравнению с размерами трещин. Дополнительный учет дефектов в математической модели описания среды позволяет корректировать предельно допустимые значения напряжений и деформаций для конструкционных материалов и более точно предсказывать поведение тех или иных сред. Так, например, для многих геологических процессов учет и использование трещин является основополагающим фактором. В некоторых случаях используется разрушение посредством использования дефектов, в некоторых – трещины служат основной причиной естественного разрушения горных пород. Примером первого случая может служить технология трещины гидроразрыва пласта, активно применяющаяся в нефтедобывающей отрасли. В ней посредством зарождения и дальнейшей эволюции разлома породы удается достичь интенсификации работы скважины. Примером второго – разрушение карьеров и шахт в горнодобывающей промышленности. Наличие трещин в породе сильно влияет на распределение напряжений. При достижении критических значений нагружения, к примеру, на борту карьера трещины могут начать расти, объединяться и в итоге полностью разрушить карьер.

Для предсказательного моделирования сред во всех этих случаях требуется поставить и решить многопараметрические масштабные задачи. Классическим подходом решения подобного рода задач можно считать так называемую линейную механику разрушения, то есть теорию трещин в рамках линейно-упругого приближения. Такой подход позволяет делать выводы о возможном разрушении тел на основе малого количества констант материала, геометрии тела, а также конфигурации нагрузок. Причем используемые константы уже получены экспериментально для большинства материалов, реально используемых на практике. В рамках этого подхода обычно не учитываются особенности микроструктуры материалов, однако даже в этом случае получение точного аналитического решения задачи связано со значительными математическими затруднениями. Все это приводит к необходимости развития численных методов и использования вычислительных машин как в чисто научных целях, так и для многочисленных приложений. При этом особый интерес представляет увеличение скорости получения результата при неизменной мощности и достаточной для приложений точности вычислений.

Многочисленные эксперименты показали применимость линейной механики разрушения для прикладных инженерных и геологических задач. К настоящему моменту накоплена достаточная база различных критериев разрушения и решений наиболее часто встречающихся локальных задач. На их основе строятся рекомендации для конструкторов, инженеров и других специалистов, работающих с вопросами прочности и разрушения. Однако методов способных решать многопараметрические задачи со сложной масштабной геометрией крайне мало.

В данной работе представлены численные методы линейной механики трещин для математического моделирования процесса разрушения среды под действием механических и тепловых нагрузок в рамках квазистатического приближения. Реализованные алгоритмы позволяют вычислять все необходимые параметры сред, ослабленных различными системами дефектов, с достаточной

для приложений точно. Представленные численные методы применимы как для ограниченных тел, так и для бесконечных. При помощи гипотезы о конечности области существенного влияния трещины на распределение искомым полей в среде они помимо конечного числа дефектов также позволяют моделировать бесконечные периодические системы трещин.

Цели работы.

Основной целью работы является разработка методов моделирования процесса разрушения линейно-упругого теплопроводящего материала, вызванного эволюцией находящихся в нем трещин. Она подразумевает под собой создание алгоритмов численного моделирования сред в рамках рассмотренных теорий, поиск аналитических решений, являющихся основой численных методов. Также дополнительно разрабатываются методики поиска различных параметров среды. В том числе особое внимание уделяется коэффициентам интенсивности напряжений, которые являются необходимыми параметрами для анализа поведения тел с трещинами. С их помощью в каждом конкретном случае делаются выводы о возможности роста трещины, его направлении, устойчивости, а также траектории итогового разрушения. Дополнительно для упрощения анализа и сравнения поведения различных систем трещин можно использовать так называемые коэффициенты влияния, являющиеся отношениями коэффициентов интенсивности напряжений в рассматриваемой задаче к коэффициентам, найденным в задаче об одиночной трещине при той же конфигурации нагрузки. С их помощью делаются выводы о локальном ослаблении среды по сравнению с классическим случаем, имеющим точное аналитическое решение. Такой подход упрощает описание свойств конкретной сложной системы трещин.

Помимо поиска параметров каждой трещины систем в различных задачах дополнительной целью является проверка гипотезы о конечности области существенного влияния трещины на распределение полей параметров состояния среды. Использование этой гипотезы в связке с алгоритмом, способным

моделировать большие системы дефектов, дает возможность получать результаты в задачах о бесконечных периодических системах трещин.

Научная новизна работы.

В данной работе впервые получены некоторые аналитические решения задачи теплопроводности и теории упругости сред с линией потери сплошности. На основе этих решений построены численные методы моделирования задач механики разрушения в рамках этих теорий. Предложена методика поиска коэффициентов интенсивности напряжений, использующая разложение М. Уильямса. Получены и проанализированы параметры сред с ломаными трещинами сложной формы и системами прямолинейных трещин, составляющих сложные двоякопериодические структуры.

Теоретическая и практическая ценность работы.

Результаты, полученные в рамках данной работы, могут быть использованы в исследовательских целях. С помощью предложенных методик можно моделировать различные ранее не рассмотренные конфигурации дефектов как в бесконечных средах, так и в конечных телах, подверженных тепловым и механическим нагрузкам. Также числовые значения в конкретных случаях могут быть использованы как верификационная база для других методов решения подобных задач.

Также благодаря достаточной для приложений точности представленные алгоритмы и методики можно использовать для предсказательного моделирования процессов хрупкого и квазихрупкого разрушения как в некоторых конструкционных материалах, так и в различных породах.

Методология и методы исследования.

Численные методы, предложенные в данной работе, основываются на разложении искомого решения задачи в ряд по некоторым полученным аналитическим решениям теории теплопроводности или линейной теории

упругости в зависимости от рассматриваемой задачи. Таким образом, в силу линейности уравнений, описывающих поведение среды, полученная сумма таких решений будет тождественно удовлетворять системе уравнений выбранной модели среды. Далее выбирается дискретный набор точек, в котором граничные условия краевой задачи выполняются точно, на остальные точки границы таких условий не накладывается. Таким образом, граничные условия исходной задачи выполняются приближенно.

Достоверность и обоснованность полученных результатов.

Достоверность результатов диссертации подтверждается верификацией и валидацией полученных результатов с результатами других авторов. Основная часть результатов тестовых задач сравнивалась с точными аналитическими решениями линейной механики разрушения, а также приближенными аналитическими и численными результатами, взятыми из хорошо известных публикаций других исследователей. Также проведено сравнение с некоторыми экспериментальными данными. Сверка производилась как для полей напряжений, перемещений и температур, так и для коэффициентов интенсивности напряжений и коэффициентов интенсивности теплового потока.

Апробация работы.

Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и семинарах:

- Международный научный симпозиум по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 110-летию со дня рождения А. А. Ильюшина.
- XIII всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, Санкт-Петербург.
- Ломоносовские чтения 2021, 2023.
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых Ломоносов 2020, 2022, 2023.

- Конференция-конкурс молодых ученых Научно-исследовательского института механики МГУ имени М.В. Ломоносова 2021, 2022.
- Научно-исследовательский семинар кафедры волновой и газовой динамики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством академика РАН Р.И. Нигматулина.
- Научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством проф. В.И. Горбачева.
- Научно-исследовательский семинар кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством проф. Д.В. Георгиевского.
- Научно-исследовательский семинар кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством члена-корр. РАН Е.В. Ломакина.

Публикации.

Основные результаты диссертации изложены в 5 печатных работах, из них 4 опубликованы в рецензируемых научных журналах, индексируемых в базах данных RSCI, Web of Science, Scopus.

Личный вклад.

Результаты, представленные в диссертации, получены лично автором. Во всех опубликованных работах вклад автора является определяющим. Автор занимался разработкой теоретических моделей, проведением численных расчетов, обработкой полученных результатов и подготовке их к публикации. В совместных работах А. В. Звягину принадлежат постановки задач и общее научное руководство.

Положения, выносимые на защиту.

1. Предложенные численные методы повышенного порядка точности решения плоских задач линейной механики разрушения и теплопроводности для сред, ослабленных произвольной системой трещин, позволяют получить решение в близкой окрестности трещин с относительной ошибкой менее 1%.
2. Разработанный метод численного определения коэффициентов интенсивности напряжений и T-напряжений, использующий асимптотическое разложение М. Уильямса, позволяет моделировать рост и возможный поворот трещин, используя дальнюю асимптотику.
3. Для двоякопериодических систем трещин установлено существенное влияние относительного сдвига трещин соседних слоев на коэффициенты интенсивности напряжений, как в механической, так и в тепловой задаче.
4. Показано, что для трещин наличие V-образного излома приводит к уменьшению коэффициента интенсивности напряжений по сравнению с прямолинейной трещиной той же длины.

Обзор литературы.

Люди задумывались о прочности и долговечности различных материалов по сути с появлением первых рукотворных предметов и простейших механизмов. Однако первые попытки научного подхода к изучению вопросов разрушения можно найти только в работах да Винчи и Галилея. Далее в работах Гука, Юнга, Лагранжа, Эйлера, Навье, Коши и Сен-Венана закладывались математические основы описания поведения твердых тел при их нагружении и деформировании. Физические законы и математические уравнения, которые были получены в этих работах, со временем оформились в единую теорию упругости, послужившую началом довольно большой области науки, связанной с прочностным анализом. Подробнее вывод этих уравнений и литературный обзор можно найти, например, в [1, 2]. Ключевой идеей расчета прочности в рамках линейной теории упругости

долгое время служило достижение максимальными напряжениями в рассматриваемом теле некоторых критических значений, после чего должно было следовать разрушение образца. Однако многие эксперименты показывали, что критические нагрузки для реальных образцов значительно меньше теоретически предсказанных. Поэтому далее в рамках тех же уравнений появилась теория локальной прочности, активно использующая такое понятие как концентрация напряжений. Результаты, полученные Колосовым, Мухелишвили, Инглисом и Нейбером обратили внимание научного сообщества на значительно влияющую на прочность неоднородность поля напряжений в телах со сложной геометрией. С некоторыми результатами, методами решения и подробной хронологией публикации литературы по этой теме можно ознакомиться в [3]. Однако вопросам дефектов и микроструктуры материалов уделялось крайне мало внимания. Появление, собственно, механики разрушения связывают с работами Гриффитса [4, 5], в которых впервые был предложен механизм разрушения материала из-за наличия в нем трещины. Основной идеей работ Гриффитса была математически описанная связь упругой энергии в некоторой окрестности трещины, накопленной вследствие нагружения среды, и энергии создания новой свободной поверхности трещины при ее эволюции. Эту связь он получил, изучая разрушение стеклянных образцов. Отличительной особенностью такого рода материалов в сравнении, например, с металлами является тот факт, что стадия разрушения происходит практически сразу после стадии упругого состояния, минуя пластическую стадию. Такой тип разрушения в настоящее время называют хрупким и в том виде, в котором его описал Гриффитс, он плохо применим для большинства конструкционных материалов. Однако в дальнейшем в работах [6–8] Ирвин и Орован показали, что в процессе разрушения в окрестности вершины трещины развивается пластическая область. Вне этой области материал остается упругим, и если размер пластической зоны мал по сравнению с характерным размером образца, анализ, основанный на решениях теории упругости, вполне применим. Основываясь на данных результатах в [7] можно найти критерий разрушения, использующий коэффициенты интенсивности напряжений. Эти параметры

участвуют в описании асимптотики полей напряжения в окрестности вершины трещины и являются определяющими при прогнозировании развития трещины. Если при заданной нагрузке коэффициент интенсивности напряжений превышает некоторое критическое значение, являющееся константой материала, то произойдет локальное разрушение материала ввиду эволюции трещины. Такой критерий носит название силового критерия разрушения и позволяет с большей точностью оценивать прочность образцов. Асимптотику напряжений в окрестности вершины трещины можно найти в работах [7, 9, 10]. Другим распространенным критерием разрушения считается так называемый энергетический критерий, основанный на рассмотрении J -интеграла [11, 12]. В работе [11] ищется интеграл энергии, не зависящий от контура интегрирования, содержащего вершину трещины, для плоской задачи упругой или упругопластической среды. Его приближенное значение вычисляется исходя из приближенной асимптотики упругого решения и использует коэффициенты интенсивности напряжений. Как было показано позднее эти критерии эквивалентны и могут быть использованы для предсказания разрушения в рамках квазихрупкого приближения. Доказательство эквивалентности и обзор на альтернативные, но реже используемые критерии можно найти в [13]. Все это послужило мощным импульсом к развитию так называемой теории квазихрупкого разрушения, которая на долгие годы стала одним из самых популярных направлений механики вообще и теории прочности в частности. Благодаря многочисленным работам [14-36] получилось осмыслить физические основы процесса разрушения и связать теорию с прикладными задачами. Используя математическое моделирование, удастся анализировать различные инженерные вопросы техники и конструкций, предсказывать поведение сред в геологии и решать проблемы горнодобывающей промышленности, а также объяснять масштабные явления в земной коре.

Математическими основами линейной механики разрушения безусловно служат результаты полученные в терминах механики твердого тела [1-3, 37, 38].

Для работы в рамках линейной механики разрушения выбирается модель линейно-упругой среды в случае плоских задач с некоторыми отрезками кривых, на которых терпит разрыв поле перемещений, и в случае пространственной задачи с некоторыми частями поверхностей, на которых рассматривается потеря сплошности. Ввиду крайней сложности получающихся краевых задач точных аналитических решений получено сравнительно немного. Для двумерного случая большая часть результатов получена при помощи теории функции комплексного переменного и представления Колосова-Мусхелишвили искомым полем напряжений и перемещений через две аналитические функции [3, 39]. Решенные аналитически задачи ограничиваются либо геометрическими конфигурациями с малым количеством трещин различных форм, либо некоторыми простейшими периодическими системами прямолинейных трещин. Чаще всего рассматриваются интегралы типа Коши [40] с неизвестными плотностями, после чего предлагаются различные методы их нахождения. Формулы для найденных аналитически коэффициентов интенсивности напряжений и ссылки на соответствующие работы можно найти в [41, 42]. В реальных образцах количество микродефектов велико, поэтому особый интерес представляют собой задачи о большом количестве трещин сложных форм. Однако вместо математического моделирования произвольно ориентированных систем с большим числом геометрических параметров нередко рассматривают периодические структуры. Примеры аналитических решений такого рода задач могут быть найдены в [26]. Интерес к таким конфигурациям во многом обусловлен возможностью сведения их к некоторой краевой задаче с малым числом трещин. Однако помимо возможности точного решения дополнительной мотивацией рассматривать задачи с периодическими системами ослаблений может служить специфика эволюции разрушения материалов. Так в работе [43] рассмотрен механизм, при котором возникновение одной трещины влечет за собой формирование периодической структуры вторичных трещин. Для пространственного случая чаще всего рассматриваются интегральные соотношения теории упругости. Постановку пространственных задач, обзор

полученных аналитических решений и методы решения можно найти в [44]. Также отдельные аналитические методы решения можно найти в [45, 46].

Далее стоит отметить методику решения Качанова [47, 48], которую можно отнести к приближенным аналитическим методам. Она подходит для моделирования как плоских, так и пространственных задач механики трещин. Основывается она на принципе суперпозиции и рассмотрении искомым полей напряжений и перемещений в окрестности определенной трещины. Вместо рассмотрения сложного напряженно-деформированного состояния среды, ослабленной системой трещин, рассматривается некоторое фиктивное влияние трещин системы на раскрытие выбранной трещины, заданное в определенной форме. Далее при помощи осредняющих математических преобразований получают решения в терминах простейших аналитических функций. Данная методика является простой в реализации, но ее точность существенно зависит от геометрической конфигурации ослаблений. Из-за этого она может быть применима для приближенных вычислений прикладных задач, в случае если допускается серьезная погрешность.

К приближенным аналитическим методам можно также отнести поиск полей напряжений и перемещений в окрестности трещины со свободными от нагрузки берегами при помощи разложения Уильямса [9, 10]. Решая плоские краевые задачи для бесконечного клина, Уильямс получил характеристические уравнения для нескольких типов граничных условий. Устремив угол раствора выреза к 0 и получив бесконечную среду с полубесконечным разрезом, он получил решение в виде бесконечного ряда по степеням расстояния от точки среды до вершины разреза. Таким образом, воспользовавшись наличием асимптотики напряжений заданного функционального вида с неизвестными коэффициентами, которые зависят только от конфигурации нагружения и геометрии среды, можно свести задачу линейной механики разрушения к поиску этих коэффициентов. Результаты вычисления коэффициентов разложения для различных задач можно найти в [49, 50]. Обычно принято отбрасывать все члены

асимптотических разложений кроме стремящихся в бесконечность при подходе к вершине разреза. На основе коэффициентов интенсивности напряжений делаются выводы о напряжениях в малой окрестности кончика трещины, однако если от нее отступить, то следующий член разложения начинает играть существенную роль. Этой проблеме посвящена работа [51]. В ней рассматриваются так называемые T -напряжения и утверждается, что несингулярный член асимптотического разложения может оказывать существенное влияние на размер и форму пластической зоны, развивающейся вокруг вершины трещины. Обзор работ, посвященных коэффициенту T , а также методом его поиска можно найти, к примеру, в [52].

Как уже отмечалось ранее, получение точных решений механики разрушения связано со значительными математическими трудностями. Наличие точек сингулярности для областей с разрезами и целых особых кривых в случае пространственных задач ведет к постановке сложных краевых задач, эффективное решение которых возможно только с помощью численных методов. Первым численным методом получившим серьезное развитие как в механике твердого тела вообще, так и в линейной механике трещин в частности, был так называемый метод конечных элементов [53-55]. Его теоретической основой является предположение о возможности представления тела в виде некоторого набора геометрических фигур, соединенных друг с другом лишь в некотором наборе узлов. Эти фигуры принято называть конечными элементами. При помощи теорем и соотношений теории упругости узловые перемещения и узловые усилия связываются линейными соотношениями. Матрица, задающая эту связь, называется матрицей жесткости элемента. Объединив все соотношения в глобальную систему линейных алгебраических уравнений, при заданных усилиях или перемещениях удастся отыскать узловые значения. По ним, в свою очередь, строятся напряжения, деформации и перемещения в пределах каждого элемента. Для интерполяции внутренних значений, к примеру, перемещений по узловым используются определенные функции формы. Выбор формы элементов и

интерполирующих функций зависит вообще говоря от поставленной задачи. Особенностью применения метода конечных элементов в задачах механики разрушения является учет медленной сходимости численного решения к точному ввиду наличия сингулярных точек. Из-за этого принято вводить некие специальные элементы в окрестности границы трещин. Они обладают особой геометрией и специально подобранными функциями формы, учитывающими асимптотику поведения решения вблизи особых точек. Это позволяет с большей эффективностью вычислять критические параметры разрушения, включая коэффициенты интенсивности напряжений и T-напряжения [52]. Алгоритмы, построенные при помощи данной методики, обладают рядом преимуществ. Метод конечных элементов является универсальным средством решения различных задач механики сплошной среды. Большинство аспектов внимательно изучено и проанализировано, вследствие чего он пользуется огромным спросом при разработке программных пакетов. Дополнительно можно отметить, что лежащее в основе метода разбиение всей среды на набор элементов интуитивно понятно при использовании такого рода алгоритмов в прикладных инженерных задачах. Поэтому он до сих пор пользуется популярностью и развивается. Однако рассматривая применимость метода конечных элементов к задачам механики разрушения можно отметить ряд недостатков. Как уже отмечалось ранее, сходимость решения, полученного без использования специальных элементов, является крайне медленной. Значения коэффициентов интенсивности напряжений из-за этого существенно зависят от сетки разбиения, что ведет к неточным результатам. Добавление особых форм элементов и интерполирующих функций при значительном измельчении сетки может давать приемлемые по точности результаты, однако существенно усложняет как саму численную схему, так и алгоритм разбиения среды на элементы. Это является причиной невозможности автоматизации процесса создания сетки в случае сложных геометрий систем трещин и зачастую причиной сложностей с выполнением условий, накладываемых на точность, при ограничениях на затраты памяти ЭВМ и времени выполнения программного кода. Дополнительным недостатком можно считать

невозможность рассмотрения безграничных сред, что усложняет верификацию алгоритмов и несколько снижает ценность результатов, полученных при помощи метода конечных элементов, для общей теории механики разрушения.

Альтернативными численными методами способными устранить озвученные ранее недостатки метода конечных элементов являются методы граничных элементов [56-58]. Это целая группа разнообразных алгоритмов, объединенных одной общей идеей: на элементы разбивается не вся среда, а лишь ее граница. Это позволяет уменьшить размерность задачи и потенциально существенно выиграть в затрачиваемых на решение задач вычислительных мощностях. Основной разновидностью методов граничных элементов являются методы граничных интегральных уравнений. Их сутью является сведение соответствующих краевых задач механики разрушения к некоторым интегральным соотношениям на границе рассматриваемой области и дальнейшему приближенному поиску функций, аппроксимирующих искомое решение. Свести задачу теории упругости к интегральным уравнениям на границе можно несколькими способами. Можно, например, воспользоваться теорией упругих потенциалов [59]. Также можно использовать формулы Бетти [60]. Дальнейшее решение основывается на численном поиске искомых функций, удовлетворяющих интегральным уравнениям, к примеру методом последовательных приближений или методом механических квадратур [59]. Однако вне зависимости от способов вычисления приходится приближенно обчислять сингулярные интегралы. Это можно делать, преобразуя их в некоторые регулярные интегралы [59, 61] либо понимая интегралы в смысле главного значения и явно их вычисляя. В итоге вопрос о точности таких численных решений сводится к вопросу о точности приближения сингулярных интегралов. Возможную численную схему, использующую метод последовательных приближений можно найти, например, в [61]. Другой разновидностью методов граничных элементов являются методы, основанные на разложении искомого решения в конечные ряды по некоторым точным решениям

вспомогательных краевых задач теории упругости [58, 62]. Классический метод решения плоских задач теории упругости, предложенный в [58], использует решения задач о заданных на отрезке усилиях либо о заданных на отрезке разрывах смещений. С их помощью строится аппроксимация искомого решения функциональным рядом. Сначала граница области разбивается на набор отрезков – граничных элементов, после чего на каждом из них рассматривается необходимое число решений вспомогательных задач заданного функционального вида с неизвестными коэффициентами, характеризующими вклад данного элемента в итоговое решение. Такой подход позволяет с достаточной для приложений точностью вычислять все необходимые поля в любой точке среды вне некоторой малой окрестности границы. Подходить к границе ближе, чем на размер граничного элемента, не рекомендуется, ввиду того, что решение получается разрывным с появлением особенностей на границах элементов. Однако при помощи данного подхода удастся решать прикладные задачи механики трещин [63 – 65]. Следует отметить, что в случае пространственных задач линейной механики разрушения также удастся решить базовые задачи о разрывах смещений на выбранном граничном элементе. В этом случае в виде граничных элементов берутся многоугольники. После получения аналитических решений строится численный метод решения [66 – 69].

Задача определения напряженно-деформированного состояния тел с трещинами, являющаяся классической для линейной механики разрушения, обычно рассматривается как статическая задача. Это связано с крайней математической трудностью динамических задач механики трещин. Набор полученных точных решений такого рода задач ограничивается самыми простейшими геометриями трещин и конфигурациями нагрузок [70 – 76]. Подробный обзор работ на эту тему можно найти в [13, 26, 77]. Обычно выделяются следующие группы проблем. В первую группу можно объединить задачи поиска зависимостей различных характеристик среды от времени при неподвижной трещине и изменяющейся во времени нагрузке. Закон изменения

нагрузки обычно рассматривается в виде гармонических функций либо имеет импульсный характер. Вторая группа вопросов связана с рассмотрением эволюции трещины. Основным вопросом является закон движения трещины, т.е. траектория роста, его скорость, распределение полей в среде и т.д. Ввиду сложности решения динамических задач предсказательное моделирование обычно ведется при помощи совокупности численных методов, аналитических закономерностей и экспериментальных данных. Возможным упрощением таких задач при сохранении приемлемой точности является рассмотрение квазистатической постановки. При данном подходе для любого момента времени используются уравнения равновесия упругой среды. Основным вопросом является поиск траектории роста трещины. Обычно кривую, по которой будет развиваться трещина, ищут при помощи одного из двух подходов. В первом предполагается, что при увеличении нагрузки на некоторую малую величину, трещина получит некоторое малое приращение, направление которого ищется исходя из критериев разрушения. Далее, пошагово прибавляя к исходной трещине прямолинейные отрезки и пересчитывая на каждом этапе напряженно-деформированное состояние, получают приближенную аппроксимацию траектории роста трещины. Этот способ реализуется при помощи численных методов и очень удобен для использования динамического программирования. Во втором подходе линию развития трещины ищут как кривую, на которой выполнены требования критериев разрушения и некоторые интегральные соотношения. Этот подход чаще всего используется для приближенного аналитического вычисления траектории квазистатического роста трещин. Задачи, решенные при помощи этих подходов можно найти, например, в [26].

Отметим, что вне зависимости от подхода к моделированию эволюции трещин, каждый раз выбирается один из многочисленных критериев разрушения, на основе которого делаются выводы о характеристиках роста. На практике обычно угол эволюции трещины вычисляют исходя из рассмотрения искомым полей в ее вершине. Первым критерием, предложившим такой подход, является

критерий максимальных растягивающих напряжений [78]. Он остается одним из самых популярных и по сей день из-за своей простоты и хорошего совпадения с экспериментальными данными. Рассмотрев асимптотику полей напряжений в полярной системе координат в окрестности конца трещины и добавив условие максимума растягивающих напряжений на выбранном направлении, получим некоторое тригонометрическое уравнение на угол дальнейшего разрушения. В зависимости от количества удерживаемых членов асимптотического разложения будем получать различные соотношения на угол, определяющий направление приращения длины трещины. Оставив только главные члены и решив тригонометрическое уравнение, получим зависимость этого угла от коэффициентов интенсивности напряжений [78]. Если удержать дополнительно несингулярный постоянный член разложения, то можно получить более сложную зависимость [79]. Обзор многочисленных альтернативных критериев, а также их сравнение друг с другом и экспериментальными данными приведено в работах [80, 81].

Одним из возможных путей развития классической линейной механики разрушения является добавление учета распределений полей температур и потоков тепла в среде. Рассмотрев их влияние на распределения напряжений и деформаций, т.е. решив задачу термоупругости, можно существенно расширить возможности применения механики разрушения для приложений. Ведь, как было отмечено ранее, все материалы, используемые в технике, содержат в своей структуре те или иные микродефекты. Элементы различных конструкций и механизмов, производящиеся из этих материалов, при эксплуатации помимо механических нагрузок могут подвергаться серьезным тепловым воздействиям. Это, в свою очередь, может послужить причиной развития дефектов и дальнейшего полного разрушения рассматриваемых объектов. К примеру, влияние термических эффектов на различные вопросы прочности реакторов представлены в [82]. Дополнительно можно отметить следующее интересное наблюдение. Эксперименты показали, что даже в сравнительно небольших

диапазонах изменений температуры внутри образца можно наблюдать как развитие трещин, так и появление новых ослаблений. Например, закономерности такого роста, вызванного различными режимами температурных воздействий на образец из материала, активно используемого в аэрокосмической промышленности, можно найти в [83]. Все это приводит к необходимости получения количественной и качественной оценки полей напряжений и температур в конкретных телах при заданной конфигурации внешних воздействий.

Основным инструментом для моделирования подобного рода задач по сей день остается линейная теория термоупругости. Показано, что в рамках данной теории наличие неоднородного температурного поля в многосвязной среде приводит к появлению поля напряжений [1, 2, 37]. Ввиду сложности математической постановки в механике разрушения эта теория чаще всего получает ряд упрощений и находит свое применение в приближении статических несвязанных задач термоупругости тел с трещинами, пример постановки которых можно найти в работах [3, 26]. Исходя из поведения теплового потока [84, 85] и напряжений [86, 87] в вершине трещины, можно сделать вывод о существенном влиянии конфигурации механического и температурного нагружения, а также геометрии системы микродефектов на дальнейшее развитие уже имеющихся дефектов и появление новых. Однако количество точных аналитических решений крайне мало и ограничивается простейшими случаями. Даже первый шаг решения несвязанных задач термоупругости, а именно нахождение поля температуры в среде, в большинстве задач вызывает значительные затруднения. Отсюда появляется необходимость развития численных методов решения подобного рода задач. Стоит отметить, как и в случае с решением изотермических задач в рамках линейно-упругой теории, основными используемыми разновидностями численных методов являются методы конечных элементов и методы граничных элементов.

Очевидно, что механика разрушения далеко не единственный из возможных подходов к моделированию и анализу вопросов прочности различных сред в смысле их трещиностойкости. Обзор на альтернативные способы можно найти в [88].

Глава 1. Численный метод решения плоских задач механики разрушения повышенного порядка точности.

В данной главе используются результаты работ [89, 90].

1.1 Постановка задач.

Рассмотрим линейно-упругую бесконечную среду, ослабленную системой трещин (рис. 1).

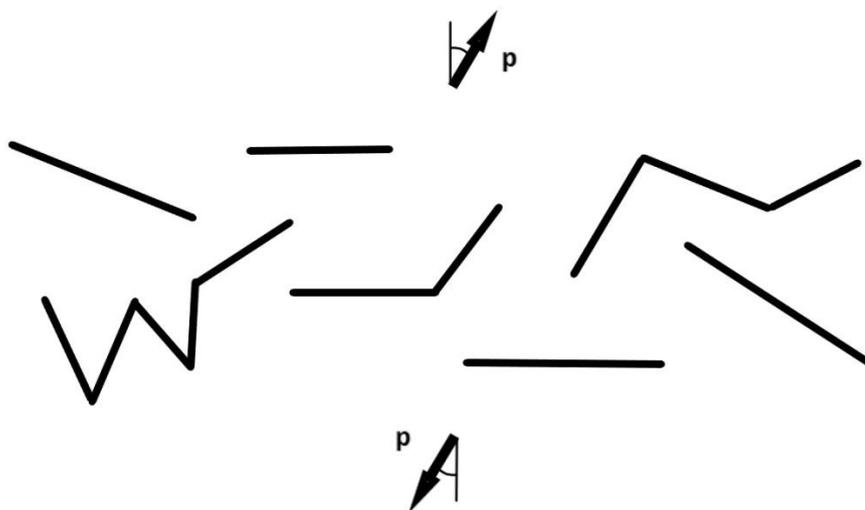


Рис. 1. Линейно-упругая среда, ослабленная системой трещин, под действием уравновешенных нагрузок, приложенных на бесконечности.

В плоских задачах механики разрушения под трещиной понимается кривая, на которой терпит разрыв вектор перемещений $u(x, y)$. Далее используются следующие обозначения: для компонент вектора перемещений – u_x, u_y ; для компонент тензора напряжений – $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона. Так как среда предполагается линейно-упругой в статических задачах компоненты тензора напряжений должны в отсутствие массовых сил удовлетворять уравнениям равновесия и условию совместности деформаций, записанного в напряжениях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0, \\ \Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Граничные условия во всех рассматриваемых задачах ставятся в напряжениях. Они задаются известным вектором напряжения на берегах трещин и на бесконечности. Нагрузки предполагаются постоянными и уравновешенными. В данной работе рассматриваются два типа задач: в первом нагрузка приложена на бесконечности, а берега трещин свободны от нагружения, во втором нагрузка приложена уже к берегам трещин, а на бесконечности равна нулю.

Решение задач первого типа в силу линейности системы уравнений можно свести к решению задачи второго типа, представив в виде суммы решений двух задач. Одна из них представляет собой задачу о трещинах под действием напряжений на ее берегах, то есть задачу второго типа. Вторая есть задача о среде бездефектной под действием исходных напряжений, приложенных на бесконечности. Ее решением является однородное поле напряжений, поэтому интерес представляет только поиск напряженно-деформированного состояния среды, соответствующего второму типу. Граничные условия в этом случае задаются исходя из следующего соображения. После взятия суперпозиции двух решений вектор напряжений на берегах трещины должен быть нулевым.

Так как рассматриваются исключительно плоские задачи, удобно воспользоваться аппаратом комплексного анализа. За комплексный аргумент примем величину $z = x + iy$, где i - мнимая единица, x , y – координаты. В теории упругости широко используются методы теории функций комплексной переменной [3, 39]. В частности, найдено общее решение системы уравнений (1). Оно может быть представлено формулами Колосова – Мусхелишвили:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2(\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}) \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= 2(\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z))\end{aligned}\quad (2)$$

где $\varphi(z), \psi(z)$ – произвольные голоморфные функции комплексной переменной $z = x + iy$.

При этом перемещения будут выражаться в следующей форме:

$$2\mu(u_x + iu_y) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}\quad (3)$$

В (2), (3) – верхняя черта означает операцию комплексного сопряжения, $\mu = E/[2(1+\nu)]$ – модуль сдвига, параметр κ зависит от рассматриваемой задачи, $\kappa = 3 - 4\nu$ для состояния плоской деформации, $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ для плоско – напряжённого состояния. Таким образом, решение любой краевой задачи сводится к определению двух функций $\varphi(z), \psi(z)$ из граничных условий.

1.2 Численный метод решения.

Функции $\varphi(z), \psi(z)$, благодаря которым строятся все требуемые поля, предлагается искать в виде конечных функциональных рядов. Ряд будет строиться как линейная комбинация аналитических решений некоторых вспомогательных задач теории упругости. Функциями разложения являются решения двух краевых задач о разрыве перемещений на отрезке заданной длины $2h$:

Задача I.

$$y = 0; |x| < h: [u_y] = D_y(x); \quad \sigma_{xy} = 0.\quad (4)$$

Задача II.

$$y = 0; |x| < h: [u_x] = D_x(x); \quad \sigma_{yy} = 0.\quad (5)$$

В (4) и (5) квадратные скобки означают разность краевых значений соответствующей компоненты перемещений для значений аргумента

$y = 0^\pm$, D_x, D_y – величины скачков перемещений, зависящие от локальной

координаты отрезка, на котором рассматривается разрыв. Будем строить решение модельных задач при помощи представления Колосова-Мусхелишвили (2), (3) для случая плоской деформации. Для случая плоско – напряженного состояния выкладки будут аналогичными.

Рассмотрим краевую задачу (4). Заметим, что граничное условие для компоненты тензора напряжений будет выполнено, если выразить искомые функции через одну функцию комплексного переменного в следующей форме:

$$\varphi'(z) = \frac{1}{2}T'(z), \quad \psi'(z) = -\frac{z}{2}T''(z) \quad \psi(z) = -\frac{1}{2}zT'(z) + \frac{1}{2}T(z). \quad (6)$$

В этом случае поля напряжений и перемещений примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \operatorname{Re}T'(z) - y \operatorname{Im}T''(z), \quad \sigma_{yy} = \operatorname{Re}T'(z) + y \operatorname{Im}T''(z), \quad \sigma_{xy} = -y \operatorname{Re}T''(z), \\ 2\mu \cdot u_x &= (1 - 2\nu) \operatorname{Re}T(z) - y \operatorname{Im}T'(z), \quad 2\mu \cdot u_y = 2(1 - \nu) \operatorname{Im}T(z) - y \operatorname{Re}T'(z). \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом остается найти функцию T , удовлетворяющую граничному условию для компоненты вектора перемещений. Запишем краевую задачу для искомой функции:

$$[\operatorname{Im}T(x)] = \frac{\mu}{1 - \nu} D_y(x), \quad |x| < h. \quad (8)$$

Решением задачи (8) будет функция T , взятая в форме интеграла типа Коши [40]:

$$T(z) = \frac{\mu}{1 - \nu} \frac{1}{2\pi} \int_{-h}^h \frac{D_y(t) dt}{t - z}. \quad (9)$$

Аналогичные выкладки можно провести для второй модельной задачи (5), решение которой так же будет получено при помощи функции, взятой в форме интеграла типа Коши. Потенциалы берутся в виде

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2}Q(z), \quad \psi(z) = -\frac{1}{2}(zQ)'. \quad (10)$$

Компоненты тензора напряжений и вектора перемещений, а также краевая задача для функции Q и ее решение в этом случае получаются следующими:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2\operatorname{Re}Q'(z) - y\operatorname{Im}Q''(z), & \sigma_{22} &= y\operatorname{Im}Q''(z), & \sigma_{12} &= -\operatorname{Im}Q'(z) - y\operatorname{Re}Q''(z), \\ 2\mu \cdot u_x &= 2(1-\nu)\operatorname{Re}Q(z) - y\operatorname{Im}Q'(z), & 2\mu \cdot u_y &= (1-2\nu)\operatorname{Im}Q(z) - y\operatorname{Re}Q'(z).\end{aligned}\quad (11)$$

$$[\operatorname{Re}Q(x)] = \frac{\mu}{(1-\nu)} D_x(x), \quad |x| < h. \quad (12)$$

$$Q(z) = \frac{\mu}{1-\nu} \frac{1}{2\pi i} \int_{-h}^h \frac{D_x(t) dt}{t-z}. \quad (13)$$

Заметим, что для величин разрыва компонент вектора перемещений D_x, D_y определенного функционального вида интегралы могут быть взяты. Так для постоянной, линейной, квадратичной и корневой зависимостей поля напряжений и перемещений получены в аналитическом виде. Например, для квадратичной зависимости $D_y(t) = at^2 + bt + c$ функция $T(z)$ будет иметь следующий вид:

$$T(z) = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \left[2h(az + b) + (az^2 + bz + c) \ln \frac{z-h}{z+h} \right]. \quad (14)$$

При помощи полученных решений модельных задач строится численный метод определения напряженно-деформированного состояния тел с трещинами. Каждая трещина заменяется набором прямолинейных отрезков длины $2h$, называемых граничными элементами. На каждом таком отрезке в его локальной системе координат с началом в центре элемента рассматриваются две задачи о нормальном и тангенсальном скачках вектора перемещений заданного функционального вида с неизвестными коэффициентами. Найденные ранее аналитические представления позволяют вычислить компоненты полей напряжений и перемещений, создаваемые каждым элементом в любой точке среды. В алгоритме используется квадратичная зависимость величин скачков для внутренних элементов и корневая для концевых. Элементы с корневой зависимостью будем называть спецэлементами. Для левого и правого концов трещин соответственно $D_k(t) = c_k \sqrt{h+t}$ и $D_k(t) = c_k \sqrt{h-t}$.

При выборе элементов всех рассмотренных ранее функциональных видов компоненты тензора напряжений и вектора перемещений будут зависеть от

неизвестных коэффициентов линейно. Дальнейшая реализация метода заключается в получении замкнутой системы линейных уравнений на искомые коэффициенты разрывов смещений. Заметим, что все решения, полученные по формулам (6) – (13), тождественно удовлетворяют исходной дифференциальной системе уравнений состояния среды, и в силу линейности этой системы, их сумма также будет решением. Просуммировав напряжения, создаваемые всеми элементами в какой-то точке границы, и приравняв их к данному по условию значению напряжений в этой точке, получим одно уравнение на искомые коэффициенты. При выполнении данного равенства получившееся решение будет удовлетворять граничному условию в некоторой точке границы. Рассмотрим два граничных условия на нормальную и касательную компоненты вектора напряжений в центрах граничных элементов. Получим $2N$ уравнений в задаче с разбиением границы на N элементов.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s(x^i, 0) &= \sum_{j=1}^N H_{ss}^{ij} a_s^j + \sum_{j=1}^N H_{sn}^{ij} a_n^j + \sum_{j=1}^N G_{ss}^{ij} b_s^j + \sum_{j=1}^N G_{sn}^{ij} b_n^j + \sum_{j=1}^N F_{ss}^{ij} c_s^j + \sum_{j=1}^N F_{sn}^{ij} c_n^j = 0 \\ \sigma_n(x^i, 0) &= \sum_{j=1}^N H_{ns}^{ij} a_s^j + \sum_{j=1}^N H_{nn}^{ij} a_n^j + \sum_{j=1}^N G_{ns}^{ij} b_s^j + \sum_{j=1}^N G_{nn}^{ij} b_n^j + \sum_{j=1}^N F_{ns}^{ij} c_s^j + \sum_{j=1}^N F_{nn}^{ij} c_n^j = -p \end{aligned} \right\} i = 1, \dots, N$$

Таким образом, в итоге получившееся решение будет удовлетворять граничным условиям исходной задачи в некотором дискретном наборе точек. Однако, в случае рассмотрения квадратичной или линейной зависимостей уравнений для замыкания системы на искомые коэффициенты недостаточно. Дополним их требованиями непрерывности скачков и их производных на концах необходимого количества соседних элементов. И получим, таким образом, замкнутую систему линейных уравнений. Решив ее, получим искомое разложение для решения исходной задачи по выбранным нами функциям в аналитическом виде.

Классическим случаем, рассмотренным в [58], является алгоритм, в котором величины скачков вектора перемещений на граничных элементах считаются константами. То есть $D_k(t) = c_k$. Такое приближение является достаточно грубым,

так как моделирование искомым решений происходит при помощи разрывных функций. Однако даже с его помощью удастся получить приемлемые для практики результаты распределений искомым полей в среде, если не рассматривать их в некоторой близкой к границе среды окрестности. Алгоритм с функциями D_x, D_y такого вида будем называть методом нулевого порядка точности. В случае выбора линейного вида этих функций будем называть методом первого порядка. Если рассматривается квадратичная зависимость, то методом второго порядка точности. А рассматривающийся в дальнейших задачах алгоритм с квадратичными и корневые величинами скачков вектора перемещений будем называть методом второго порядка точности со спецэлементами.

Для демонстрации эффективности реализованного алгоритма, а также его сравнения с алгоритмами меньшего порядка точности рассмотрим верификационную задачу о прямолинейной единичной трещине нормального отрыва длины L . Граничные условия для данной задачи записываются следующим образом:

$$y = 0, \quad |x| < l, \quad l = L/2, \quad \sigma_{yy} = -p, \quad \sigma_{xy} = 0.$$

Эта задача имеет точное аналитическое решение, которое может быть найдено, к примеру, в [3]. Рассмотрим перемещение берегов трещины и одну из компонент тензора напряжения на линии продолжения трещины:

$$|x| < l, \quad u_y(x, 0^\pm) = \pm \frac{p(1-\nu)}{\mu} \sqrt{l^2 - x^2}$$

$$x > l, \quad \sigma_{yy}(x, 0) = p \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - l^2}} - 1 \right)$$

Заметим, что нормальная компонента вектора перемещения симметрична относительно самой трещины для обоих берегов. Поэтому для перемещения рассмотрим только полученную численно геометрию верхнего берега трещины и сравним ее с аналитическим видом. На рис.2 представлено перемещение точек

верхнего берега трещины в зависимости от их координаты x глобальной системы координат. Здесь сплошной линией представлено аналитическое решение, пунктир соответствует методу нулевого порядка точности, штрихпунктир – методу первого порядка точности, а точечная кривая – методу второго порядка точности. На первом графике представлены результаты при разбиении трещины на 6 граничных элементов, на втором – на 20 элементов. Параметры расчета брались следующие:

$$L = 1; \frac{P}{\mu} = 0.1; \nu = 0.33$$

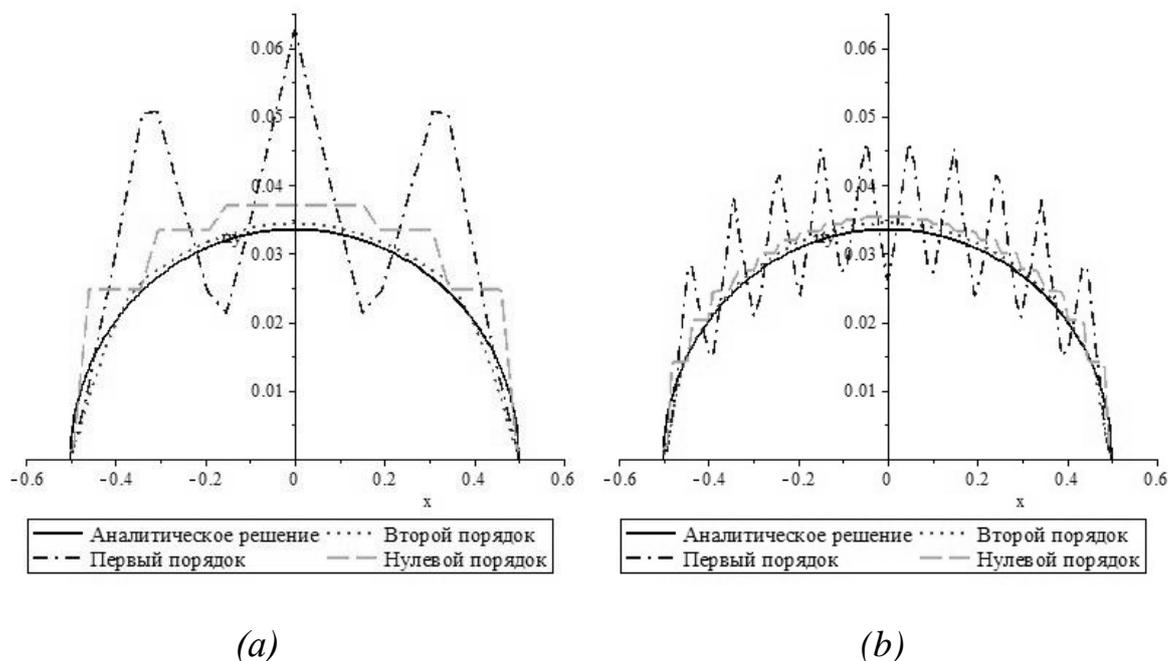


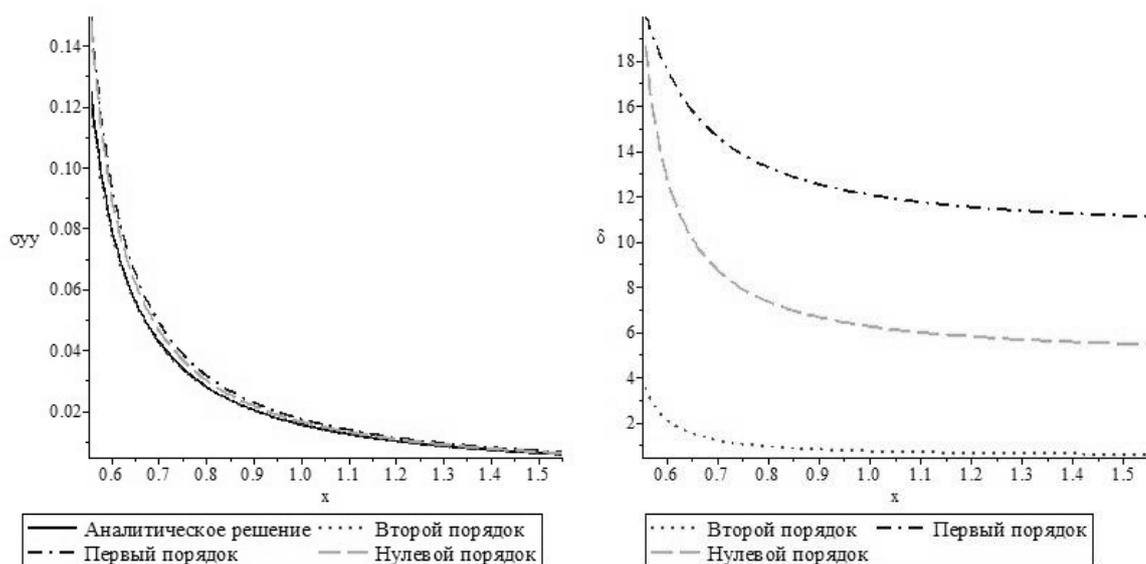
Рис. 2. Сравнение аналитического и численных решений, полученных на основе методов нулевого, первого и второго порядка точности: a – трещина разбита на 6 граничных элементов, b – на 20 граничных элементов.

Как видно из представленных графиков даже при малом разбиении решение методом второго порядка довольно точно аппроксимирует аналитическое, причем в обоих случаях его результат точнее решения классическим методом нулевого порядка точности, как качественно, так и количественно. Метод первого порядка точности заметно проигрывает им обоим. Причем при моделировании при помощи него в некоторых точках границы среды образуются изломы,

являющиеся дополнительными концентраторами напряжений, что не соответствует природе явления.

Для сравнения методов при моделировании среды на некотором расстоянии от трещины предлагается рассмотреть поведение компоненты тензора напряжения σ_{yy} на продолжении трещины и соответствующую им относительную ошибку:

$$\delta = \frac{|\sigma_{yy}^c - \sigma_{yy}^a|}{\sigma_{yy}^a} \cdot 100\%$$



(a)

(b)

Рис. 3. Зависимость σ_{yy} на продолжении трещины от координаты x для трех методов (a) и соответствующая относительная ошибка в процентах (b).

Из графиков видно, что вдали от трещины все три метода могут с некоторой приемлемой погрешностью моделировать поведение среды. Однако при приближении к концу трещины из графиков относительных ошибок становится ясно, что, как и в случае с раскрытием, метод второго порядка работает значительно точнее, чем классический метод, а метод первого порядка приближает решение хуже двух других. Из этого можно сделать вывод о фактической неработоспособности метода первого порядка точности. Также стоит заметить о заметном выигрыше метода с квадратичными плотностями скачков как

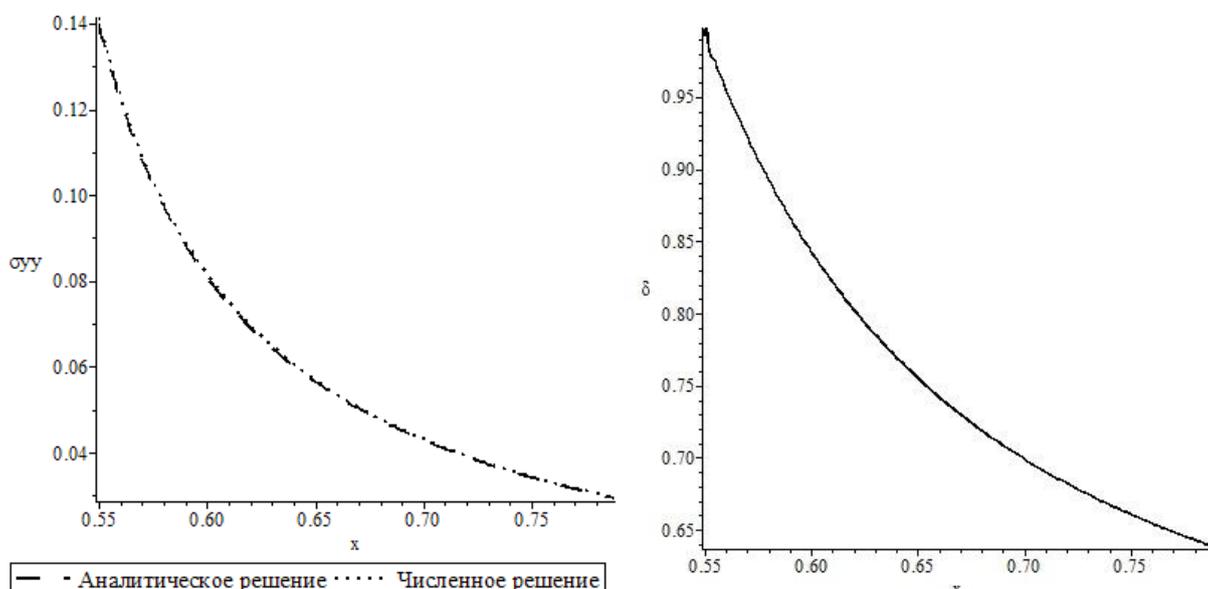
в точности при заданном числе элементов разбиения, так и в количестве элементов необходимом для достижения приемлемой для приложений точности.

Как видно из формулы раскрытия, при подходе к концу трещины поведение перемещения задается некоторой корневой зависимостью. Учесть особенность поведения среды в малой окрестности границы трещины позволяет использование так называемых специальных граничных элементов [58]. Для крайних левого и правого элемента длины $2h$ с центром локальной системы координат в центре элемента вводятся особые плотности скачков. Они будут равны соответственно:

$$D_{left}(t) = c_{left} \sqrt{h+t}$$

$$D_{right}(t) = c_{right} \sqrt{h-t}$$

Для такого функционального вида разрывов перемещений решение также удастся найти аналитически. Учет асимптотики перемещения позволяет значительно уточнить результаты. Использование описанных спецэлементов в алгоритме второго порядка точности при разбиении трещины на 20 элементов позволяет для компоненты тензора напряжения σ_{yy} достичь следующих результатов:



(a)

(b)

Рис. 4. Зависимость σ_{yy} на продолжении трещины от координаты x для метода второго порядка точности с использованием спецэлементов (a) и соответствующая относительная ошибка в процентах (b).

Как видно из графика относительной ошибки, она не превосходит 1%. Причем, что является очень важным для приложений, учет асимптотики вместе с требованиями непрерывной дифференцируемости плотности решения при моделировании среды позволяет подходить очень близко к краю трещины. При этом точность расчета сохраняется, в отличие от классического метода нулевого порядка точности, для которого естественным ограничением считается невозможность моделирования поведения среды на расстоянии от трещины меньшим величины граничного элемента.

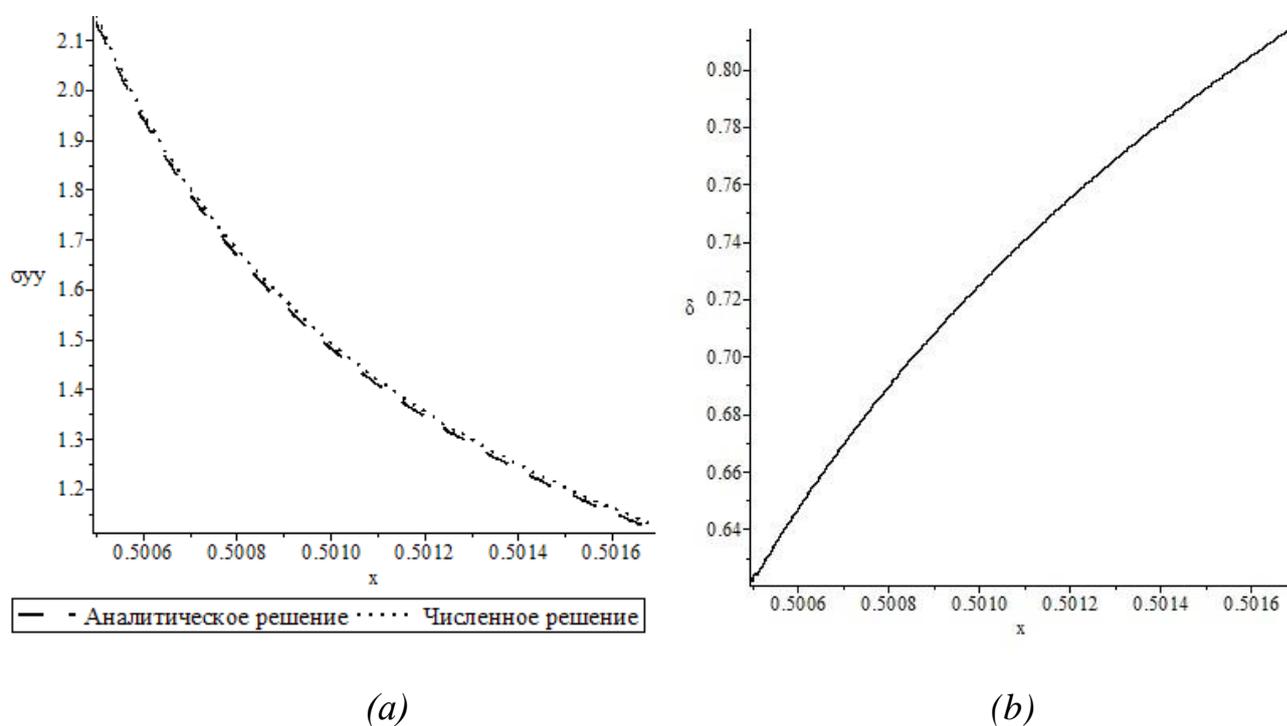


Рис. 5. Зависимость σ_{yy} на продолжении трещины от координаты x для метода второго порядка точности с использованием спецэлементов (a) и соответствующая относительная ошибка в процентах (b).

1.3 Коэффициенты интенсивности напряжений.

Одновременное повышение класса непрерывности решения и учет асимптотики вблизи концов трещины позволяет существенно увеличить точность вычислений предлагаемого алгоритма при том же разбиении границы. Достаточно высокая точность и возможность рассмотрения практически любых точек среды

(в том числе в малой окрестности самой трещины) позволяет, в свою очередь, искать специальные теоретические параметры необходимые для предсказательного моделирования с высокой точностью.

Для приложений важно уметь отвечать на вопрос: будет ли разрушаться материал при наличии в нем трещины или системы трещин при заданных нагрузках. Одним из самых часто используемых в линейной механике разрушения критериев роста трещины является силовой критерий Ирвина. Он заключается в сравнении коэффициентов интенсивности напряжений для трещины, получающихся при данной нагрузке, и критических коэффициентов интенсивности напряжений конкретного материала. Первый и второй коэффициенты интенсивности напряжения определяются следующим образом:

$$K_I = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{2\pi s} \sigma_{yy}(s); \quad K_{II} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{2\pi s} \sigma_{xy}(s), \quad (15)$$

где s – расстояние от конца трещины до точки среды, находящейся на продолжении трещины. Точное определение этих коэффициентов является наиболее сложной проблемой при численной реализации решения задачи разрушения.

Для определения этих коэффициентов предлагается два метода. Их верификация будет происходить при помощи задачи о нагружении одиночной трещины косой нагрузкой (рис. 6).

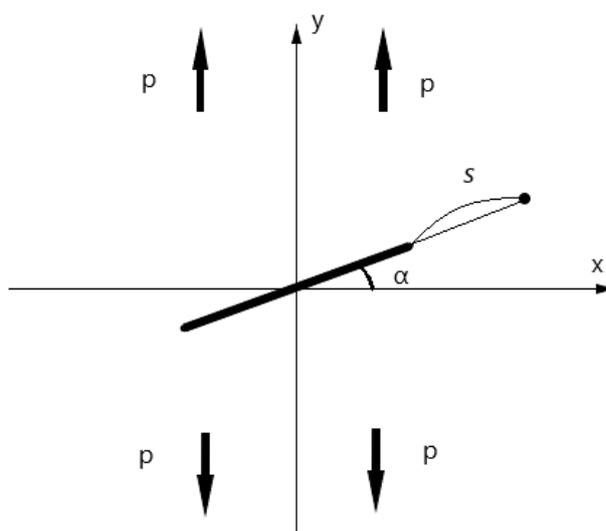


Рис. 6. Задача о нагружении одиночной трещины косой нагрузкой.

Аналитические значения коэффициентов интенсивности напряжения для этой задачи, взятые из [41], равны:

$$K_{I0} = p\sqrt{\pi l} \cdot \cos^2 \alpha, \quad K_{II0} = p\sqrt{\pi l} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha.$$

Первый метод определения этих коэффициентов основывается на определении (15). Чтобы найти их численно по определению, будем рассматривать соответствующее произведение из предела в точках на продолжении трещины с вычисленными численно значениями соответствующей компоненты тензора напряжения. На рис. 7 синим цветом показано аналитическое значение коэффициентов интенсивности напряжений, черным – численные значения соответствующих рассмотренных произведений при разбиении на 30 граничных элементов и угле $\alpha = \pi / 6$. На графиках кончик трещины соответствует значению 0,5 по оси абсцисс. Видно, что с подходом к кончику трещины численные значения стремятся к аналитическому. Значения, взятые на расстоянии одной миллионной длины трещины от кончика, позволяют получить КИН с относительной ошибкой менее 0.1%. Такая точность достигается благодаря учету построенным алгоритмом свойств трещины вблизи ее границы.

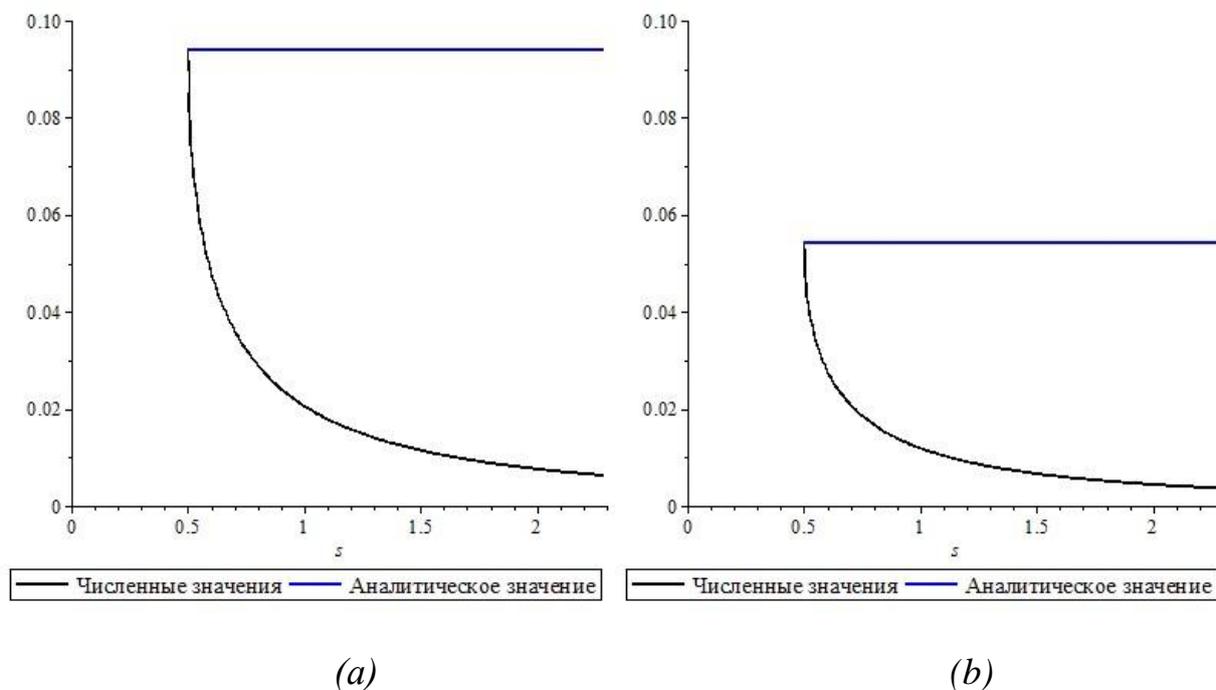


Рис. 7. Приближенное вычисление коэффициентов интенсивности напряжений по определению: $a - K_I, b - K_{II}$.

В настоящее время в механике разрушения вызывают интерес работы, связанные с поиском коэффициентов разложения М. Уильямса решения в окрестности конца трещины. Им показано, что для анализа поведения решения в особых точках в малой окрестности конца трещины со свободными от напряжения берегами поле напряжений может быть представлено в виде [9, 10]:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^m \cdot f_k^{m,ij}(\theta) \cdot r^{k/2-1}, \quad (16)$$

где r, θ – полярные координаты в системе отсчета с началом в конце трещины, в которой нулевой угол соответствует линии продолжения трещины. Функции $f(\theta)$ – известные угловые распределения, неизменные для любой конфигурации среды [49]:

$$f_k^{1,xx}(\theta) = \frac{k}{2} \left[\left(2 + \frac{k}{2} + (-1)^k \right) \cos\left(\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta\right) - \left(\frac{k}{2} - 1\right) \cos\left(\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta\right) \right]$$

$$f_k^{1,yy}(\theta) = \frac{k}{2} \left[\left(2 - \frac{k}{2} - (-1)^k \right) \cos\left(\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta\right) + \left(\frac{k}{2} - 1\right) \cos\left(\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta\right) \right]$$

$$f_k^{1,xy}(\theta) = \frac{k}{2} \left[\left(\frac{k}{2} - 1\right) \sin\left(\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta\right) - \left(\frac{k}{2} + (-1)^k\right) \sin\left(\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta\right) \right]$$

$$f_k^{2,xx}(\theta) = -\frac{k}{2} \left[\left(2 + \frac{k}{2} - (-1)^k \right) \sin\left(\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta\right) - \left(\frac{k}{2} - 1\right) \sin\left(\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta\right) \right]$$

$$f_k^{2,yy}(\theta) = -\frac{k}{2} \left[\left(2 - \frac{k}{2} + (-1)^k \right) \sin\left(\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta\right) + \left(\frac{k}{2} - 1\right) \sin\left(\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta\right) \right]$$

$$f_k^{2,xy}(\theta) = \frac{k}{2} \left[\left(\frac{k}{2} - 1\right) \cos\left(\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta\right) - \left(\frac{k}{2} - (-1)^k\right) \cos\left(\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta\right) \right]$$

Параметр m отвечает за тип нагружения: $m = 1$ – соответствует нормальному отрыву; $m = 2$ – соответствует случаю поперечного сдвига.

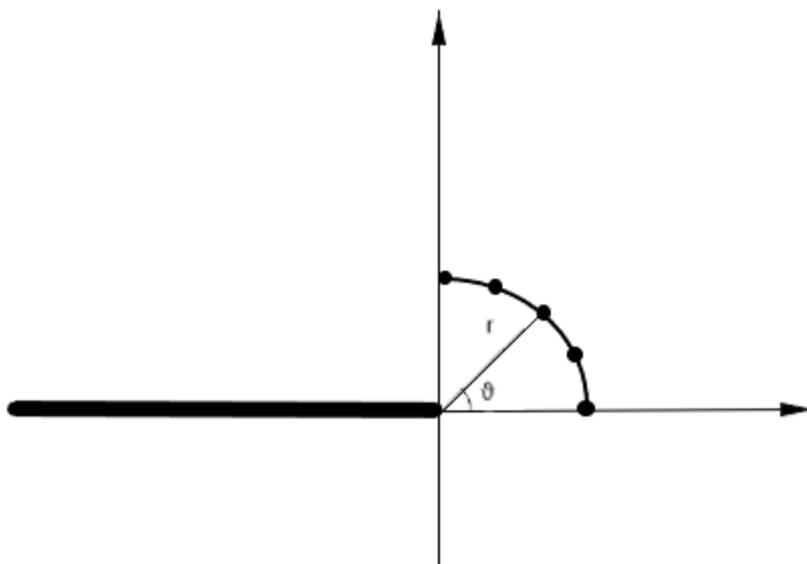


Рис. 8. Точки среды, рассмотренные для численного нахождения коэффициентов разложения М. Уильямса.

Таким образом, от геометрии задачи, величины и типа нагрузки зависят только коэффициенты a_k^m . Найдя эти коэффициенты, можно получить разложение полей напряжений и перемещений в виде ряда, однако аналитически эти коэффициенты удастся найти только для простейших конфигураций геометрии трещин [49]. Также на основе разложения Уильямса строятся некоторые численные методы. В них, оставляя конечное число слагаемых ряда, численное моделирование поля напряжений в окрестности края трещины сводится к поиску некоторого числа неизвестных коэффициентов.

В алгоритме, представленном в данной работе, после получения искомого поля могут быть найдены все необходимые параметры среды для различных конфигураций, в том числе коэффициенты разложения Уильямса. Сначала определяются численные значения напряжений для дискретного набора точек среды в окрестности конца трещины (рис. 8). После этого, оставляя фиксированное конечное число членов разложения, можно получить систему уравнений для некоторого количества неизвестных коэффициентов разложения. Используя метод наименьших квадратов, можно найти некоторое число коэффициентов a_k^m .

На рис. 9 представлены результаты сравнения напряжений в задаче о растяжении одиночной трещины единичной длины $L = 1$, заданной на бесконечности нормальной нагрузкой. Как видно, относительная ошибка не превосходит 0.2%.

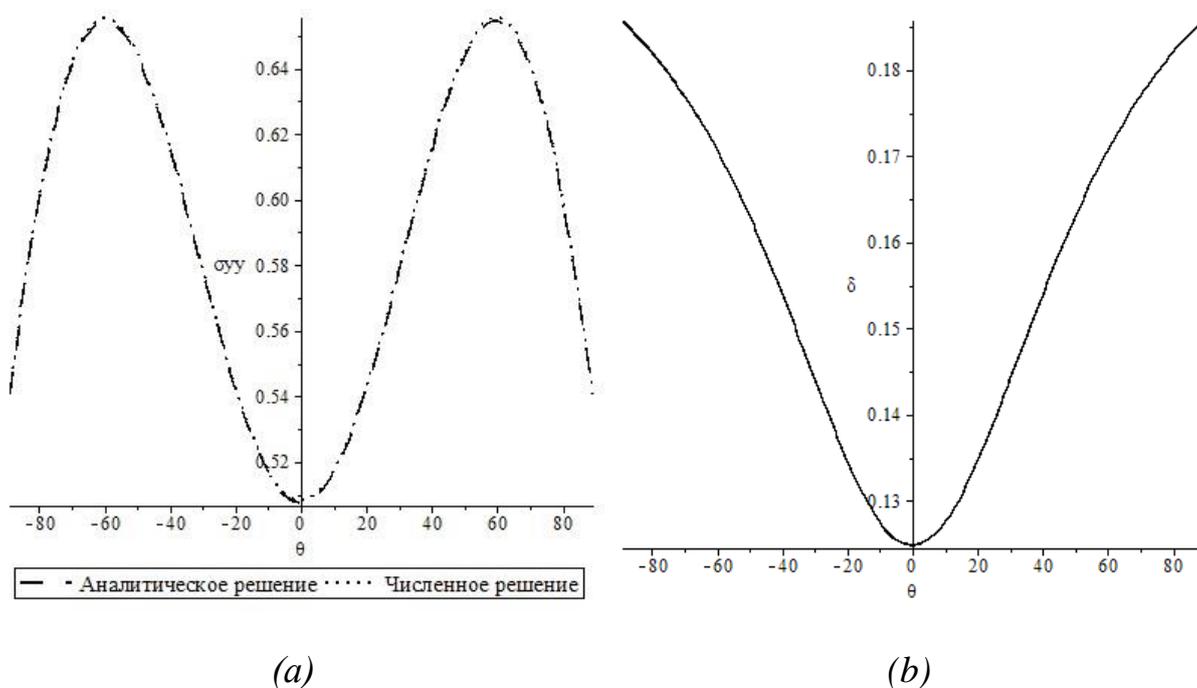
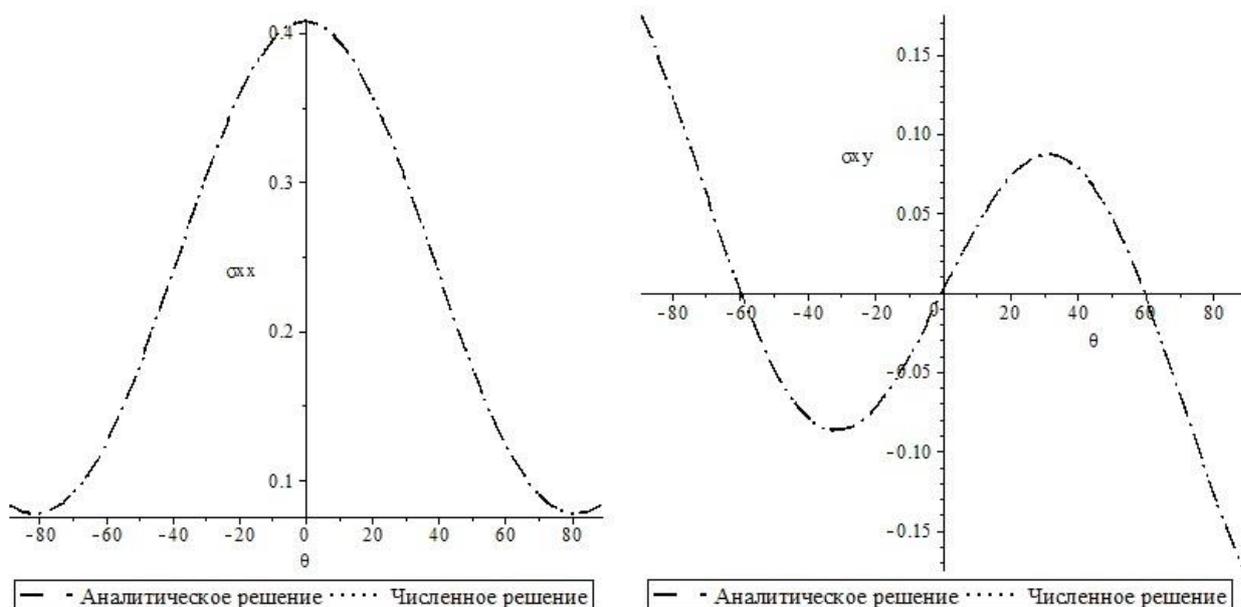


Рис. 9. Сравнение численных значений напряжений в зависимости от полярного угла θ и аналитических значений в задаче об одиночной трещине (a) и соответствующая относительная ошибка в процентах (b).

На рис. 9(a) на оси абсцисс отложен полярный угол θ , по оси ординат величина безразмерного напряжения σ_{yy}/μ . В представленном расчете приняты следующие параметры $p/\mu = 0.1$, $\nu = 0.33$, а трещина была разбита на 100 граничных элементов. Значения напряжения взяты на расстоянии $r/L = 0.01$ от края. Пунктирная кривая соответствует аналитическому решению, точечная кривая – численному решению с использованием разложения Уильямса. На рис. 9(b) представлена зависимость распределения относительной ошибки для разных значений полярного угла θ . Для компонент тензора напряжений σ_{xx}, σ_{xy} сравнение численных и аналитических результатов показано соответственно на рис. 10(a) и рис. 10(b).



(a)

(b)

Рис. 10. Сравнение численных значений напряжений в зависимости от полярного угла θ и аналитических значений в задаче об одиночной трещине.

Основные коэффициенты разложения, используемые в дальнейшем, в данной задаче удается находить с относительной ошибкой менее 1%.

При помощи описанного численного метода реализуется второй метод поиска коэффициентов интенсивности напряжений. Он основывается на асимптотическом разложении М. Уильямса (16) и применим только в случаях свободных от нагружения берегов трещин. Несложно заметить, что после подстановки представления соответствующей компоненты тензора напряжений, полученной из разложения, в определение (15), при значении угла $\theta = 0$ в локальной системе координат, связанной с концом трещины, получим выражения коэффициентов интенсивности напряжений через коэффициенты разложения Уильямса. Аналогичным образом можно получить выражение для так называемых Т-напряжений.

$$\begin{aligned}
 K_I &= \sqrt{2\pi} \cdot a_1^1 \cdot f_1^{1,yy}(0) \\
 K_{II} &= \sqrt{2\pi} \cdot a_1^2 \cdot f_1^{2,xy}(0). \\
 T &= a_2^1 \cdot f_2^{1,xx}(0)
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Таким образом задача поиска коэффициента интенсивности напряжений и Т-напряжений сводится к поиску первых коэффициентов асимптотического разложения Уильямса. При помощи описанного ранее алгоритма поиска этих коэффициентов удастся получить зависимость обоих коэффициентов интенсивности напряжений от угла α с относительной ошибкой, не превышающей 1,5% (рис.11, рис.12). На рис.11(a) приведена величина коэффициента интенсивности K_I в зависимости от угла α . Пунктиром изображена кривая аналитической зависимости, точечной кривой – численные результаты. На рис.11(b) представлено соответствующее распределение относительной ошибки.

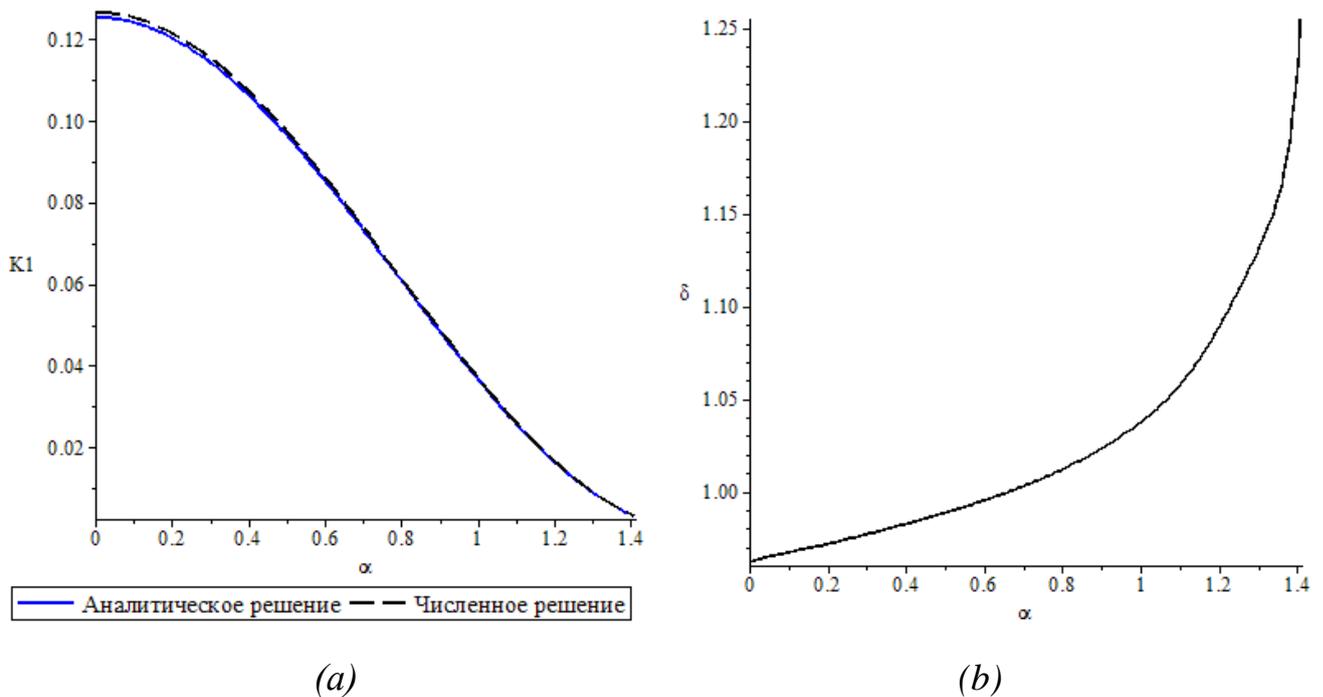


Рис. 11. Сравнение численных и аналитических значений первого коэффициента интенсивности напряжений в задаче об одиночной трещине под косой нагрузкой, в зависимости от угла нагружения $K_I(\alpha)$ (a), и соответствующая относительная ошибка в процентах (b).

Аналогичные результаты для зависимости коэффициента интенсивности напряжений $K_{II}(\alpha)$ и соответствующей относительной ошибки представлены на рис.12(a) и рис.12(b).

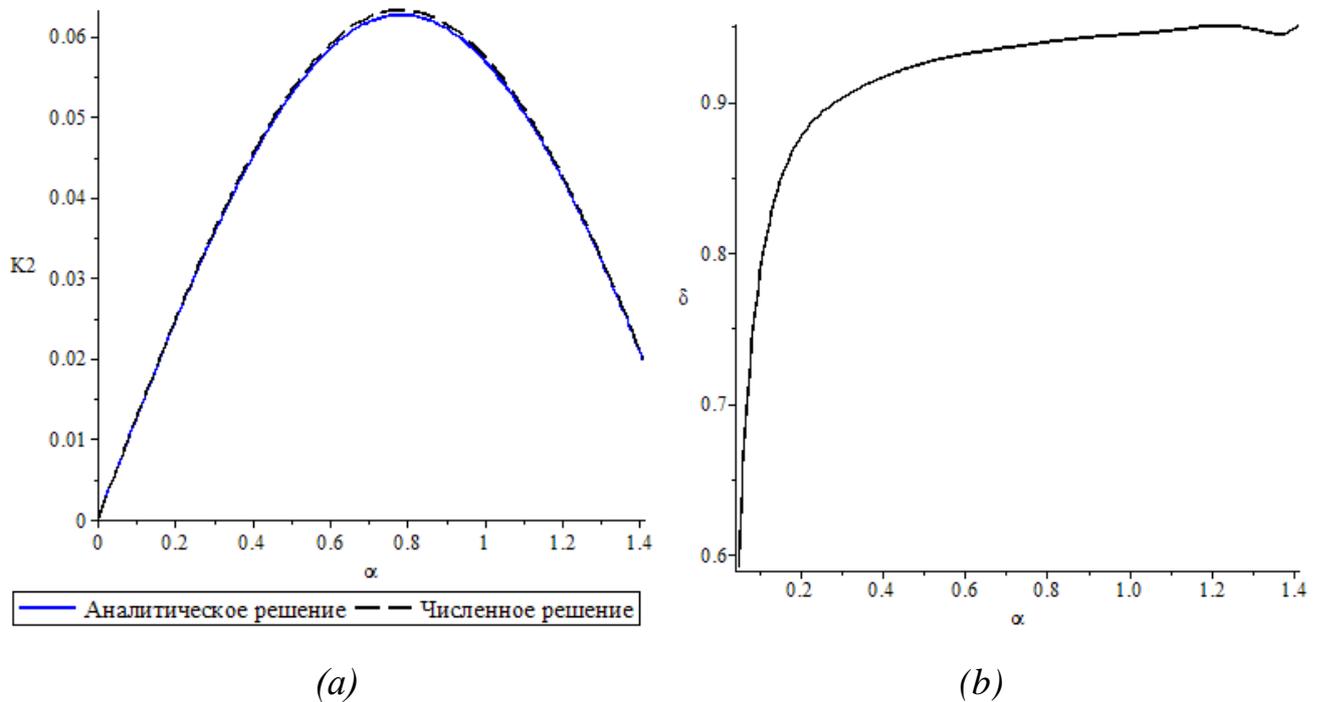


Рис. 12. Сравнение численных и аналитических значений второго коэффициента интенсивности напряжений в задаче об одиночной трещине под косой нагрузкой, в зависимости от угла нагружения $K_{II}(\alpha)$, (a) и соответствующая относительная ошибка в процентах (b).

Результаты верификации показывают, что предложенные методы позволяют достаточно точно и эффективно описывать напряженно-деформированное состояние сред, ослабленных одиночными трещинами. Однако, для многих приложений важно исследование больших систем трещин. Ввиду сложности аналитического решения такого рода задач, число найденных решений крайне мало. Для демонстрации возможностей использования предложенного метода в новых исследованиях, связанных с описанием поведения больших систем ослаблений, предлагается дополнительно рассмотреть верификационные задачи, представленные в следующей главе.

1.4 Итоги главы 1.

Разработан и реализован алгоритм повышенного порядка точности решения плоских задач механики разрушения для бесконечной линейно-упругой среды, ослабленной произвольной системой трещин. Рассмотрение скачков перемещений квадратичной формы позволяет избежать разрывов и изломов у плотности искомого решения. Это позволяет с достаточной точностью моделировать поведение среды в малых окрестностях трещин. Проведенная верификация показала, что решение методом второго порядка аппроксимирует аналитическое точнее решения классическим методом нулевого порядка точности, как качественно, так и количественно. Метод первого порядка точности фактически неработоспособен.

Разработан метод численного определения коэффициентов интенсивности напряжений и Т-напряжений, использующий асимптотическое разложение М. Уильямса в вершине трещины, позволяющий использовать дальнюю асимптотику.

Глава 2. Верификация и валидация алгоритма. Численные результаты для ранее не исследованных задач.

В данной главе используются результаты работ [90–92].

2.1 Верификация и валидация.

В задачах о системе трещин, находящихся под действием внешней нагрузки, при анализе состояния среды принято использовать так называемые коэффициенты влияния. Они представляют собой отношения коэффициентов интенсивности напряжений, вычисленных в вершинах выбранной трещины в рассматриваемой задаче, к коэффициентам интенсивности напряжений, вычисленным в задаче об одиночной трещине с той же внешней нагрузкой. Например, для первого коэффициента влияния будет использоваться следующая формула:

$$K = \frac{K_I}{K_{I0}}$$

Если коэффициент влияния меньше единицы, то опасность разрушения для тела с системой трещин меньше в сравнении с телом, ослабленном одиночной трещиной. Если коэффициент влияния больше единицы – ситуация с опасностью разрушения меняется на обратную. Учитывая это, в дальнейшем будем исследовать поведение коэффициентов влияния.

Для демонстрации эффективности алгоритма определения коэффициентов влияния, предлагается сравнить численные результаты и аналитическое решение в задаче о двух трещинах нормального отрыва одинаковой длины при разбиении каждой из них. Для этого сравним полученную зависимость первого коэффициента влияния во «внутреннем» кончике трещины от безразмерного параметра $2a/d$, где $2a$ – длина одной трещины, d – расстояние между центрами трещин. Аналитическое решение может быть найдено, например, в [93]:

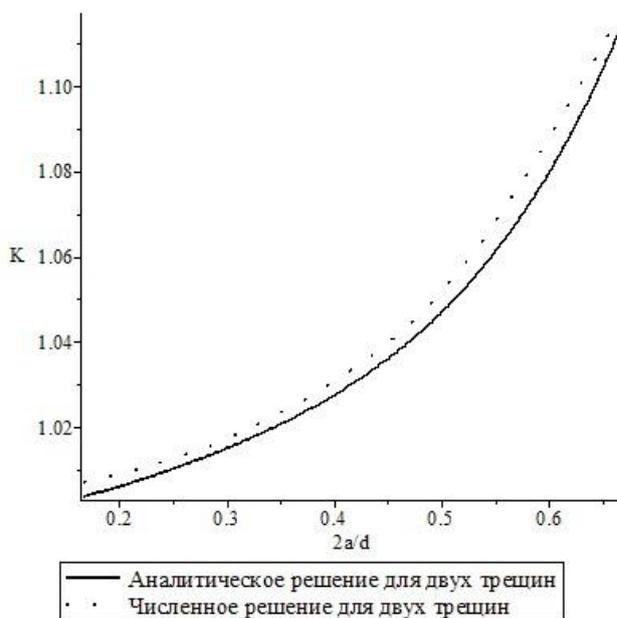
$$K = \frac{d-2a}{4a} \cdot \left(\frac{d-2a}{d} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{d+2a}{d-2a} \right)^2 \frac{E(k)}{H(k)} - 1 \right]$$

$$k = \left[1 - \left(\frac{d-2a}{d+2a} \right)^2 \right]^{1/2}$$

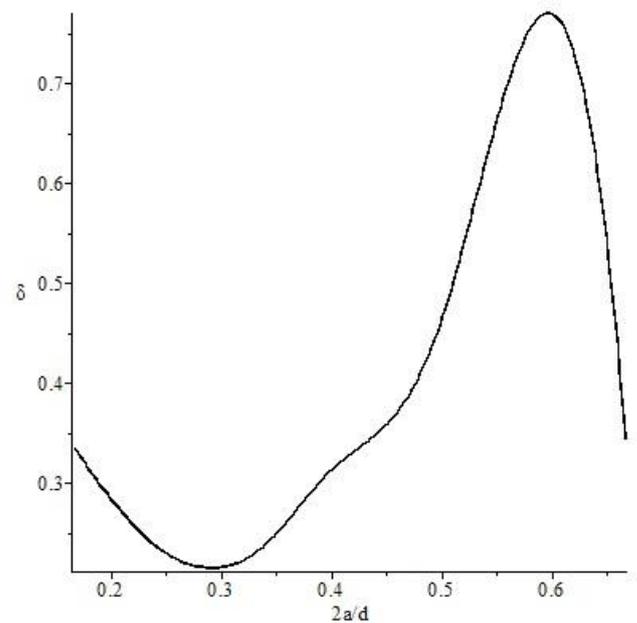
$$H(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \vartheta)^{-1/2} d\vartheta$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \vartheta)^{1/2} d\vartheta$$

$$\delta = \frac{|K^c - K^a|}{K^a} \cdot 100\%$$



(a)



(b)

Рис. 13. Сравнение численных и аналитических значений первого коэффициента влияния в задаче о двух трещинах нормального отрыва, лежащих на одной прямой (a) и соответствующая относительная ошибка в процентах (b).

На графике зависимости коэффициента влияния (рис. 13(a)) – сплошная линия соответствует аналитическому решению, точечная линия – численному при разбиении каждой трещины на 15 граничных элементов. Как видно из рис. 13(b) относительная ошибка численных результатов менее 1%.

Как уже было отмечено ранее, особый интерес для приложений представляют системы, состоящие из большого количества трещин. В работах [43] было показано, что вторичные трещины, зарождающиеся при разрушении материала, образуются на определенных выделенных линиях и образуют вместе с исходными некоторые квазишахматные структуры. Обоснованным является сведение подобных задач к некоторым периодическим системам трещин. Одним из способов моделирования периодических систем является решение задачи в выделенной области конечной области с соответствующими граничными условиями. Однако для трещин в большинстве нетривиальных случаев задача выделения области периодичности с корректно поставленными граничными условиями фактически нерешаема. Поэтому для механики разрушения требуется искать другие подходы. Один из возможных подходов, который не требует выделения области периодичности, во многом аналогичен принципу Сен-Венана. Воспользуемся тем, что область существенного влияния трещины на распределение напряжений конечна, за ее пределами влияние пренебрежимо мало. Это позволяет надеяться на то, что для анализа напряжений в окрестности конкретной трещины, вместо большой системы (в случае периодических трещин – бесконечно большой) можно рассматривать только трещины, дающие заметный вклад в окрестности выделенной конкретной трещины. Это возможно, если метод технически позволяет рассматривать достаточно большую систему трещин. При этом детальный анализ проводится для центральной трещины. Ожидается, что при увеличении количества трещин с сохранением конфигурации нагрузки и их взаимного расположения эффекты, связанные с конечностью системы, будут существенно проявляться лишь на некотором количестве краевых трещин. Если наши предположения верны, этот анализ позволит имитировать поведение трещины в бесконечной системе.

Благодаря особенностям представленного алгоритма появляется возможность моделировать бесконечную среду с достаточно большим конечным количеством трещин, причем с изменением расстояния между трещинами затраты памяти и требуемая производительность вычислительной машины не изменяются, так как на элементы разбиваются непосредственно кривые разрыва поля перемещений, а не сама среда. Рассмотрим системы из 2, 5, 10, 15 и 20 трещин, разбивая каждую из них на 11 граничных элементов. Параметры расчета совпадают с параметрами задачи о двух трещинах и единичной трещине нормального отрыва. Для верификации воспользуемся точным решением для бесконечной периодической системы [94]:

$$K = \sqrt{\left(\frac{d}{\pi a}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi a}{d}\right)}$$

Будем приводить значения первого коэффициента влияния для кончика центральной трещины:

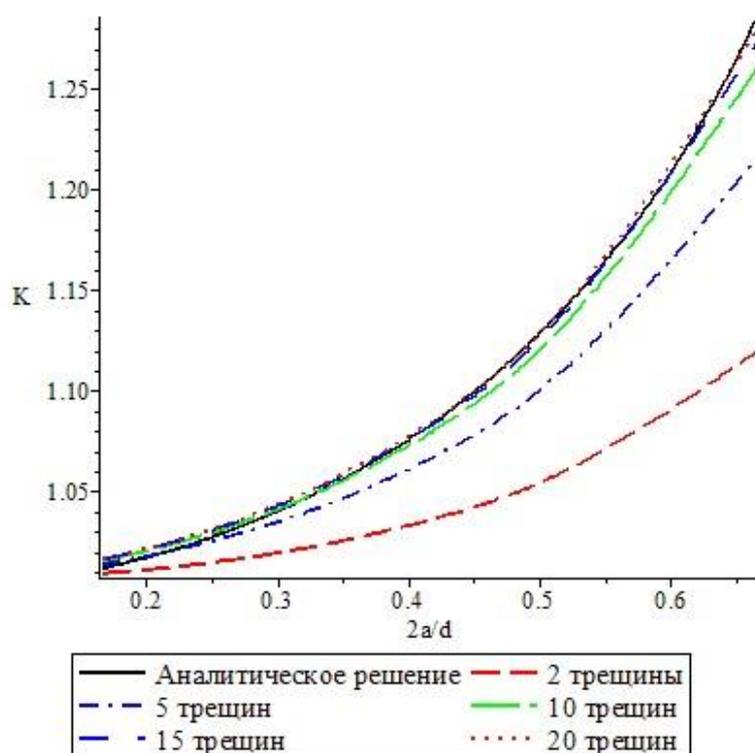


Рис. 14. Сравнение численных и аналитических значений первого коэффициента влияния в задаче о периодической системе трещин нормального отрыва, лежащих на одной прямой.

Как видно из рис. 14 с ростом числа трещин численные решения все более точно повторяют поведение аналитического.

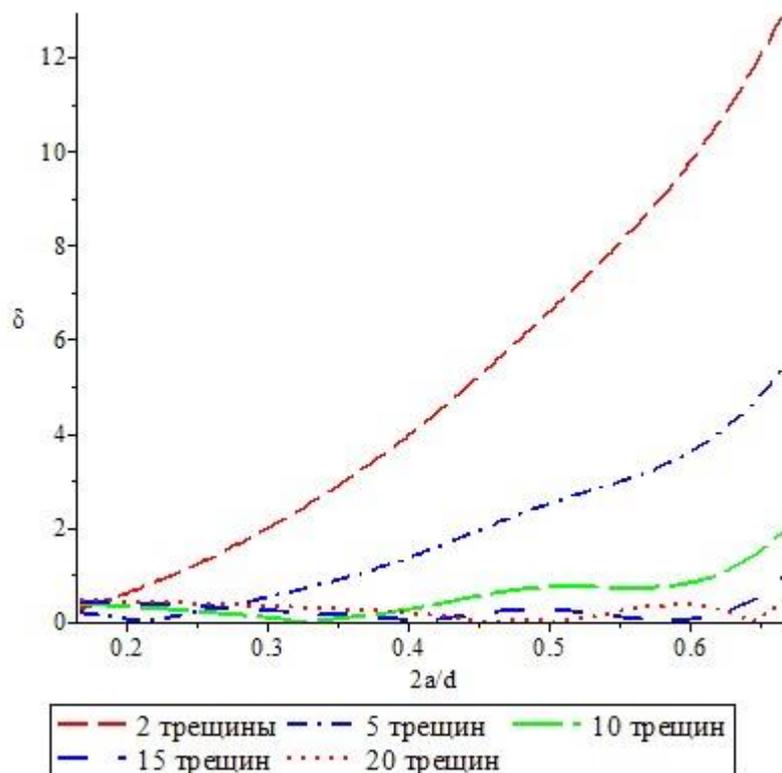


Рис. 15. Относительная ошибка численных значений первого коэффициента влияния в задаче о периодической системе трещин нормального отрыва, лежащих на одной прямой, для разного количества рассмотренных трещин.

Уже для 20 трещин получается достичь приемлемой точности (рис.15). Относительная ошибка в этом случае менее 0,5% (рис. 16).

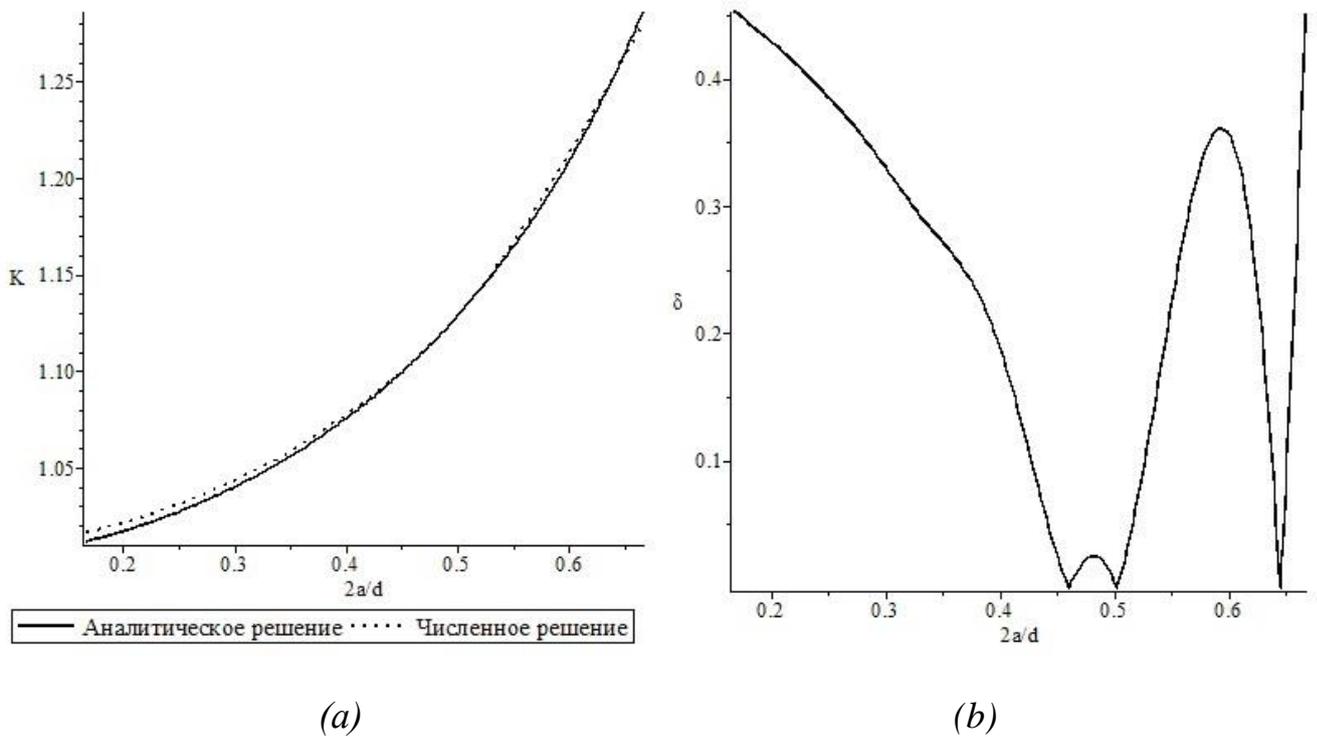


Рис. 16. Сравнение численных и аналитических значений первого коэффициента влияния в задаче о периодической системе трещин нормального отрыва, лежащих на одной прямой, при рассмотрении 20 трещин (a) и соответствующая относительная ошибка в процентах (b).

Исходя из представленных результатов верификации, можно утверждать, что использование метода граничных элементов с квадратичной плотностью скачков перемещений и дополнительное использование специальных граничных элементов позволяет описывать поведение двумерной линейно-упругой среды с большим количеством трещин, а также периодические системы трещин.

Далее рассмотрим во многом не исследованную двумерную задачу о бесконечной периодической системе трещин в бесконечной линейно-упругой среде, составляющих упорядоченную структуру и находящихся под косою нагрузкой, приложенной на бесконечности (рис. 17).

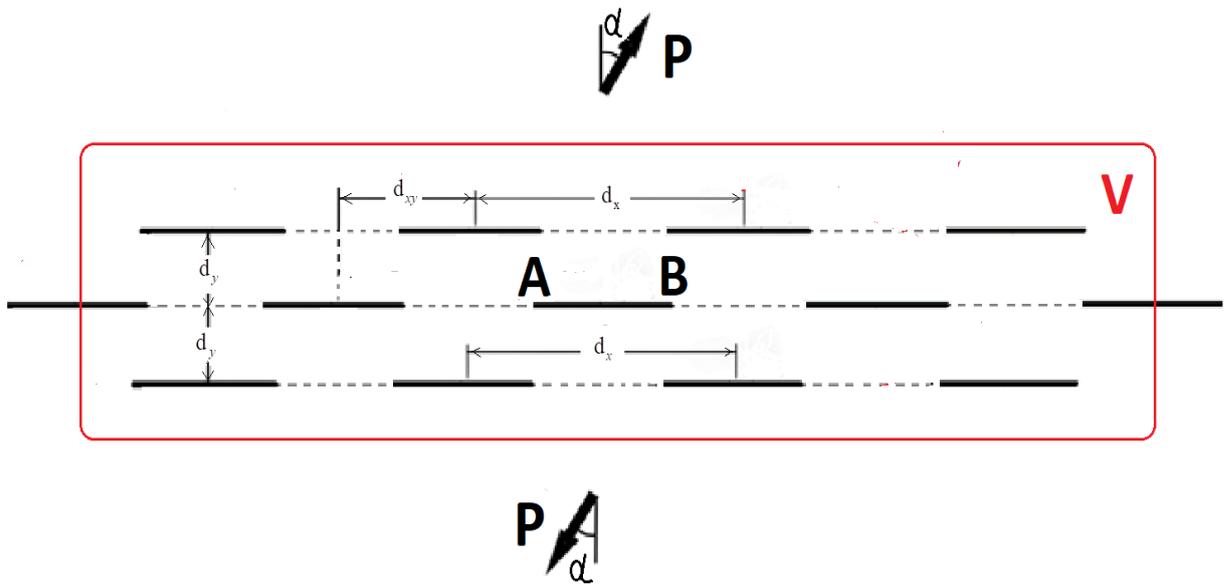


Рис.17. Задача о периодической системе трещин в бесконечной линейно-упругой среде, составляющих упорядоченную структуру и находящихся под косою нагрузкой, приложенной на бесконечности.

Все трещины системы прямолинейны и имеют одинаковую длину $L = 2a$. Будем называть слоем трещины, лежащие вдоль одной прямой. Все слои геометрически эквивалентны. В каждом слое расстояние между центрами соседних трещин равно d_x . Расстояние между соседними слоями трещин равно d_y . В случае, когда параметры d_{xy}, α равны нулю, мы имеем двоякопериодическую систему трещин. На бесконечности действует растягивающая нагрузка P под углом α к нормали. В общем случае каждый второй слой сдвигается на заданную величину d_{xy} . Данная конфигурация дополнительно интересна тем, что в случае $d_{xy} = 0, \alpha = 0$ задача имеет приближенное решение. Будем использовать нашу гипотезу для центральной трещины AB , считая, что на эту трещину существенное влияние оказывают лишь трещины, расположенные в некоторой области V (рис. 17). Увеличивая область, можно добиться достаточной точности вычислений необходимых для анализа параметров. Также, используя нашу гипотезу, будем рассматривать вместо

бесконечной системы трещин – конечную. Количество предполагается брать достаточно большим для того, чтобы центральная трещина достаточно точно имитировала поведение трещины в бесконечной периодической системе. Это количество будем определять эмпирически, варьируя область влияния V (рис. 17). На первом шаге выбираем размер по оси x , исходя из того, что область должна быть симметричной относительно трещины АВ и должна включать помимо АВ не менее двух соседних трещин. Тем самым мы зафиксировали характерный размер области влияния по направлению x . На втором шаге начинаем добавлять симметричным образом относительно трещины АВ слои в одну и другую сторону по оси y . Если количество добавленных слоев позволяет обеспечить выбранную точность, то процесс останавливается. После этого увеличиваем количество трещин по оси x на две трещины и по оси y – на два слоя. Если точность по-прежнему обеспечена, то завершаем процедуру выбора области влияния. На практике отношение размеров области зависит от отношения d_x/L и d_y/L , где L – длина трещины, а также от размеров граничного элемента. Отсюда, учитывая, что трещины рассматриваются единичной длины, можно найти соотношение сторон рассматриваемой области. Если рассматривать ее в виде прямоугольника, то отношение ширины к длине области рассматривалось не менее 0.4. Для верификации такого подхода воспользуемся известным решением данной задачи для нулевого смещения слоев $d_{xy} = 0$ и нулевого угла нагрузки $\alpha = 0$. Приближенные числовые значения могут быть найдены в [95].

На рис. 18(a) приведены значения первого коэффициента влияния k_1 для центральной трещины в зависимости от безразмерного параметра L/d_x , равного отношению длины трещины к расстоянию между центрами соседних трещин в слое. Пунктирная кривая соответствует аналитическому решению, точечная кривая – численным результатам. Соответствующая зависимость относительной ошибки представлена на рис. 18(b). В данных расчетах отношение расстояния между слоями к расстоянию между трещинами равно $d_y/d_x = 0.5$. Отсюда,

учитывая, что трещины рассматриваются единичной длины, можно найти соотношение сторон рассматриваемой области $4d_y/(4d_x + 1) \geq 0.4$.

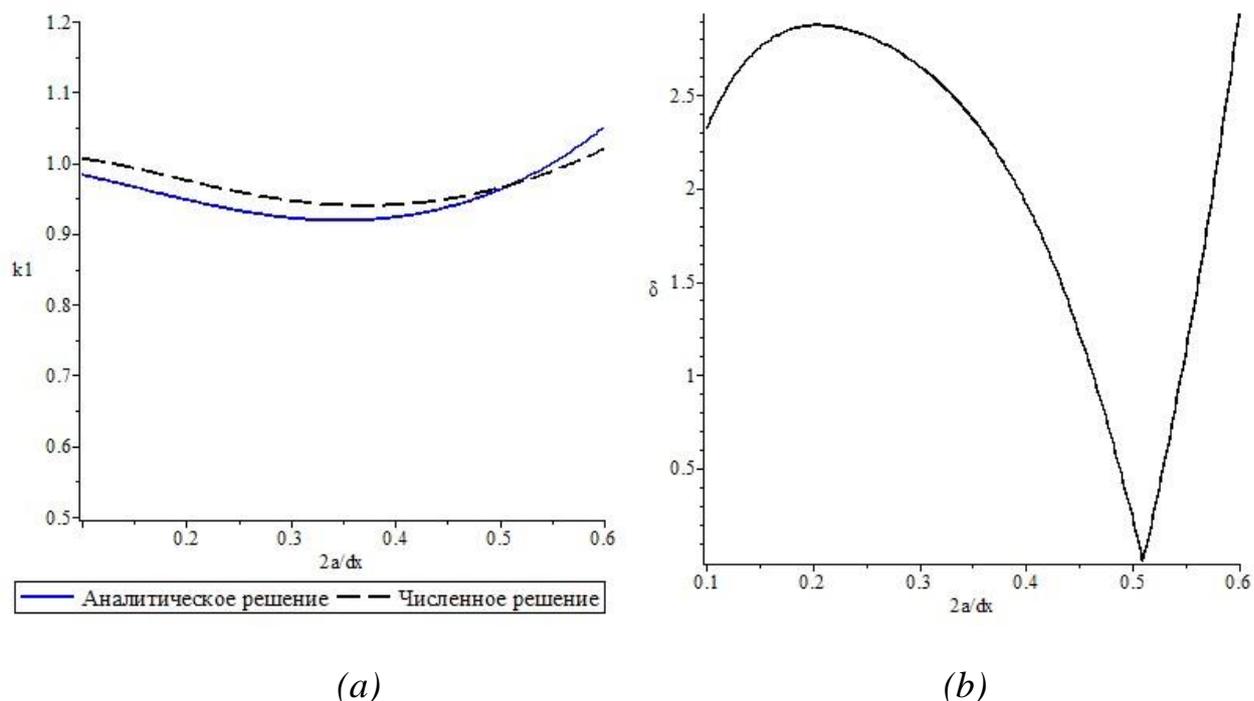


Рис. 18. Сравнение численных и аналитических значений первого коэффициента влияния в задаче о двоякопериодической системе трещин нормального отрыва в зависимости от безразмерного параметра L/d_x (a) и соответствующая относительная ошибка в процентах (b).

Как следует из результатов, представленных на рис. 18, относительная ошибка не превышает 3%. Этот результат получен, когда мы ограничились рассмотрением пяти слоёв, по пять трещин в каждом слое. Это позволяет говорить о том, что гипотеза верна и даёт возможность определять необходимые величины с приемлемой для приложений точностью.

Помимо моделирования больших систем прямолинейных трещин разработанный алгоритм позволяет анализировать поведение среды, ослабленной трещинами сложной формы. Рассмотрим бесконечную линейно-упругую среду, ослабленную двухзвенной ломаной трещиной, конфигурация которой показана на рис. 19.

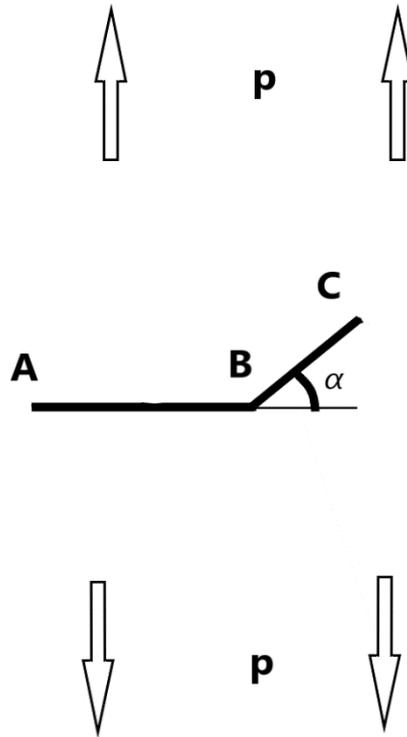


Рис. 19. Бесконечная линейно-упругая среда, ослабленная двухзвенной ломаной трещиной под действием уравновешенных нагрузок, приложенных на бесконечности.

Эта конфигурация хорошо известна и используется обычно для верификации предложенных методик моделирования в случае сложной геометрии трещин. К примеру, рассмотрев зависимости коэффициентов интенсивности напряжений в вершине С от угла α , определяющего направление излома, и сравнив их с результатами, взятыми из [96], получим:

Угол α	K_I	K_I (Chatterjee)	K_{II}	K_{II} (Chatterjee)
15	1.6621	1.6619	0.4749	0.4777
30	1.3502	1.3573	0.8342	0.8528
45	0.9215	0.9322	1.0022	1.0499
60	0.4808	0.4865	1.0472	1.0392

Трещина рассматривается с одинаковой длиной звеньев $L = 1$, первое звено которой расположено на оси x : $y = 0^\pm$, $|x| < L$. На бесконечности приложена

нормальная нагрузка единичной величины $\sigma_{yy} = p = 1$, $\sigma_{xy} = 0$. В таблице во второй и четвертой колонках представлены численные результаты, полученные при помощи разработанного алгоритма. В третьей и пятой – результаты из [96]. Сравнив их, получим очень хорошее совпадение. Также результаты, полученные при помощи данной методики, соответствуют результатам, представленным в работе [97]. В ней рассматривается зависимость коэффициентов интенсивности напряжений от длины звена АВ при такой же конфигурации геометрии и нагружения. Расчеты произведены с разбиением трещины на 100 граничных элементов.

На практике для многих конструкционных материалов характерны трещины в виде дуг. Также изначально прямолинейные трещины могут развиваться по некоторой сложной кривой, поэтому особый интерес представляют задачи моделирования сред с ослаблениями ненулевой кривизны. Далее рассмотрим верификационную задачу о простейшей криволинейной трещине (рис. 20).

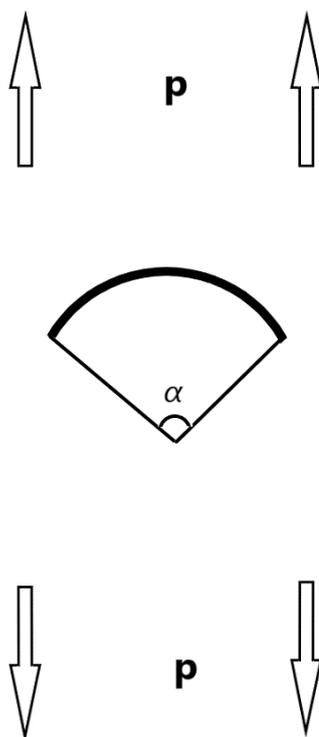


Рис. 20. Бесконечная линейно-упругая среда, ослабленная трещиной в виде дуги под действием уравновешенных нагрузок, приложенных на бесконечности.

Значения коэффициентов интенсивности напряжений данной задачи можно найти, например, в [98]. Так как метод предложенный в данной работе основывается на разбиении границы на прямолинейные отрезки, будем моделировать дугу ломаной линией, представляющей собой часть сторон некоторого правильного многоугольника. При разбиении дуги с углом раствора $\alpha = 90^\circ$ на 200 граничных элементов относительная ошибка коэффициентов интенсивности напряжений составляет менее 3%.

Исходя из результатов верификационных задач, можно утверждать, что представленная методика моделирования позволяет искать с достаточной для приложений точностью все необходимые параметры в задачах о трещинах сложной формы. Это позволяет, в свою очередь, рассматривать задачи о поиске траектории квазистатического роста трещин. Далее предложенный алгоритм определения напряженно-деформированного состояния среды и поиска коэффициентов интенсивности напряжений предлагается использовать при рассмотрении задач подобного рода.

В работе [78] показано, что направление роста трещины можно определить, проанализировав коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах трещины. Для этого рассмотрим приближенное представление компонент тензора напряжений в полярной системе координат в некоторой малой окрестности конца трещины:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r, \theta) &= \frac{1}{(2r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left(K_I \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta - 2K_{II} \tan \frac{\theta}{2} \right) \\ \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) &= \frac{1}{(2r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left(K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right) \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= \frac{1}{(2r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left(K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1) \right)\end{aligned}$$

Так называемый критерий максимальных растягивающих напряжений заключается в следующей системе условий:

$$\begin{cases} (2r)^{1/2} \sigma_{r,\vartheta}(r, \theta) = \cos \frac{\theta}{2} (K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \vartheta - 1)) = 0 \\ (2r)^{1/2} \sigma_{\vartheta,\vartheta}(r, \theta) = \cos \frac{\theta}{2} \left(K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right) = \text{const} = K_{IC} \end{cases}$$

Первое уравнение системы предназначено для поиска угла дальнейшего роста трещины. Второе уравнение, так называемое условие страгивания, по сути аналогично силовому критерию Ирвинга роста трещины. Очевидно, что чем точнее мы ищем коэффициенты интенсивности напряжений, тем точнее мы определяем наличие дальнейшего разрушения и направление роста трещины по данному критерию разрушения.

Рассмотрим задачу о вычислении траектории роста прямолинейной трещины, находящейся под косой нагрузкой (рис. 6). Предположим, что напряжения достаточные для того, чтобы трещина начала и продолжала расти. Тогда предлагается следующий алгоритм моделирования квазистатического роста. Рассматриваем исходную задачу, вычисляем напряжения и коэффициенты интенсивности напряжений. После этого по ним вычисляем угол разрушения в вершинах трещин и в заданном направлении приращиваем к линии трещины малые отрезки. Таким образом, выполнен один шаг квазистатического роста. После этого моделируем напряженно-деформированное состояние получившейся ломаной трещины, снова вычисляем угол роста по коэффициентам интенсивности и делаем еще одно приращение. Повторяя эти шаги, будем получать траекторию роста. В экспериментальных работах показано, что трещина, растет по некоторой криволинейной траектории. Так как мы приближаем ее ломаной становится очевидно, что точность приближения на прямую зависит от длины каждого шага. По сути в данной постановке вопрос точности траектории эквивалентен вопросу точности моделирования криволинейных трещин.

Валидация алгоритма была проведена при разбиении исходной трещины на 100 граничных элементов и приращивании на каждом шаге 4 элементов. После 10 шагов квазистатического роста полученная траектория была наложена на

фотографию эксперимента по распространению трещины в пластинке из плексигласа из работы [78]. Результаты представлены на рис. 21.

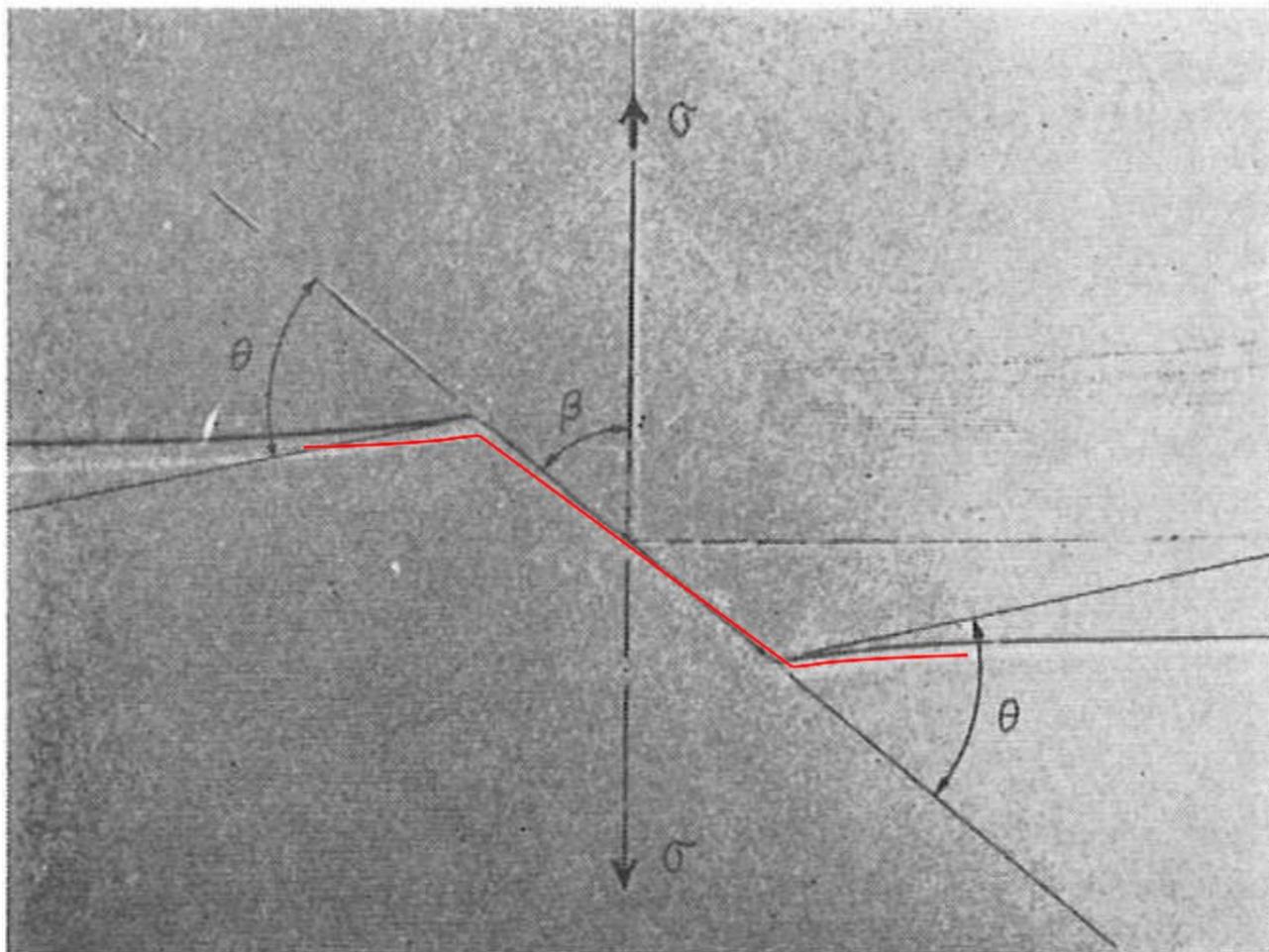


Рис. 21. Полученная численно траектория роста трещины, наложенная на фотографию эксперимента по распространению трещины в пластинке из плексигласа.

Красным цветом показана численная траектория, белым изображена реально получившаяся при растяжении пластины трещина. Как видно из рисунка предложенные численные методы позволяют с достаточной точностью моделировать задачи поиска траектории эволюции трещин.

2.2 Численные результаты.

Рассмотрим поставленную в предыдущем разделе задачу о «квазишахматной» системе при наличии сдвига (рис. 17). В этом случае задача

новая. Интересно исследовать влияние относительного сдвига слоев на коэффициенты влияния центральной трещины. Примем, что отношения $d_y/L = 0.5$, $d_x/L = 1.5$ и угол $\alpha = 30^\circ$ фиксированы. Зависимость $k_1(d_{xy}/L)$ для конца B центральной трещины AB представлена на рис. 22 пунктирной кривой, зависимость $k_2(d_{xy}/L)$ – точечной кривой. Интересно отметить, что сдвиговый коэффициент влияния k_2 не превышает единицы. В то же самое время коэффициент влияния k_1 , отвечающий за нормальный разрыв, с ростом сдвига может значительно превышать единицу. Максимальное значение он принимает в правой окрестности значения $d_{xy}/L = 1$. Если бы нагрузка P действовала строго по нормали, то максимальное значение соответствовало строго значению $d_{xy}/L = 1$. В данном расчете нагрузка действует под малым углом $\alpha = 30^\circ$ к нормали, поэтому точка достижения максимума чуть больше, чем значение $d_{xy}/L = 1$.

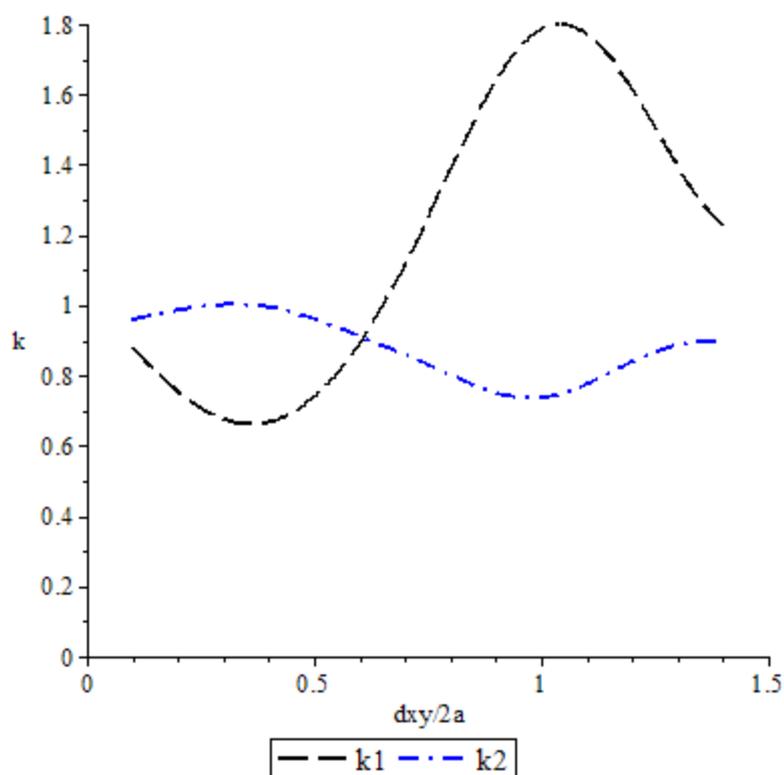


Рис. 22. Зависимость коэффициентов влияния от геометрического относительного сдвига слоев трещин d_{xy}/L с фиксированными расстояниями между слоями $d_y/L = 0.5$ и между соседними трещинами $d_x/L = 1.5$.

Во многих работах показано, что наличие трещины на продолжении основной увеличивает коэффициент интенсивности напряжений K_I . Если вторая трещина параллельна первой, а сдвига нет, коэффициент интенсивности уменьшается. В данной задаче проявляются обе тенденции, и их взаимное преобладание зависит от сдвига d_{xy} и расстояний d_x, d_y . Согласно этому, при уменьшении расстояния между слоями максимальное значение коэффициента влияния должно возрастать. Это и наблюдается в расчетах. При уменьшении расстояния $d_y/L = 0.3$ с сохранением остальных параметров (рис. 23) максимальное значение коэффициента k_1 возрастает. Если для значения $d_y/L = 0.5$ максимум k_1 был равен 1.8, то в случае значения $d_y/L = 0.3$ максимум k_1 равен 2.51. С уменьшением расстояния между слоями появляются области, в которых сдвиговой коэффициент влияния становится больше единицы.

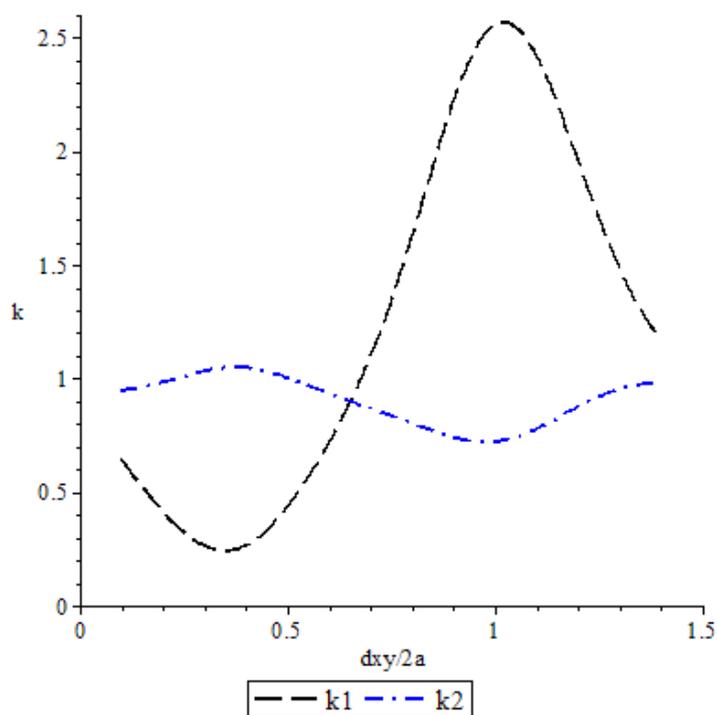


Рис. 23. Зависимость коэффициентов влияния от геометрического относительного сдвига слоев трещин d_{xy}/L с фиксированными расстояниями между слоями $d_y/L = 0.3$ и между соседними трещинами $d_x/L = 1.5$.

Таким образом становится понятно, что наличие в теле системы трещин подобной конфигурации может существенно влиять на прочностные характеристики образца. Такие зависимости коэффициентов интенсивности напряжений говорят о невозможности замены анклава трещин одной. Поэтому для моделирования напряженно-деформированного состояния сред с большим числом дефектов с достаточной для приложений точностью требуется учитывать взаимное влияние ослаблений.

Далее рассмотрим задачу о четырехзвенной ломаной $ABCDE$, на которой терпит разрыв поле перемещений (рис. 24). Среда, как и прежде, находится под действием уравновешенных нагрузок на бесконечности и задается постоянным тензором напряжений. Берега трещины свободны от нагрузки.

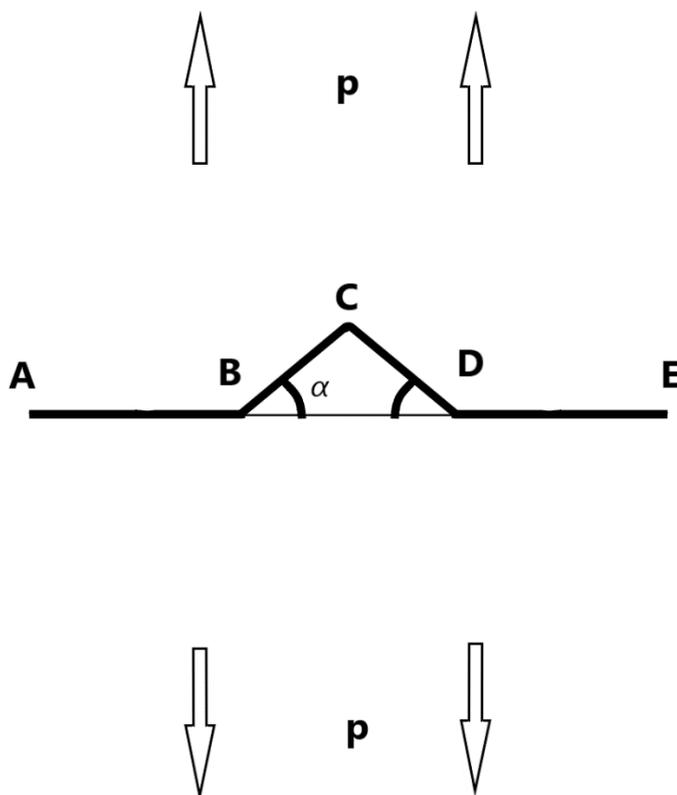


Рис. 24. Бесконечная линейно-упругая среда, ослабленная четырехзвенной ломаной трещиной под действием уравновешенных нагрузок, приложенных на бесконечности.

В этом случае также удобнее рассматривать не коэффициенты интенсивности напряжения, а коэффициенты влияния. Так как нагрузка нормальная по отношению к звеньям, в концах которых рассматриваются коэффициенты интенсивности напряжений, основной интерес представляет первый коэффициент влияния. Его зависимость от угла α представлена на рис. 25 сплошной линией. Стоит отметить, что в задачах о ломаных трещинах под действием нагрузок заданной конфигурации также логично рассмотреть коэффициент интенсивности напряжений, отнесенный к длине проекции трещины на ось OX . Его зависимость представлена на рис. 25 пунктиром. Его можно воспринимать как некоторый эффективный коэффициент влияния, так как определяющим параметром первого коэффициента интенсивности напряжений служит именно длина проекции трещины на направление перпендикулярное приложенной нагрузке.

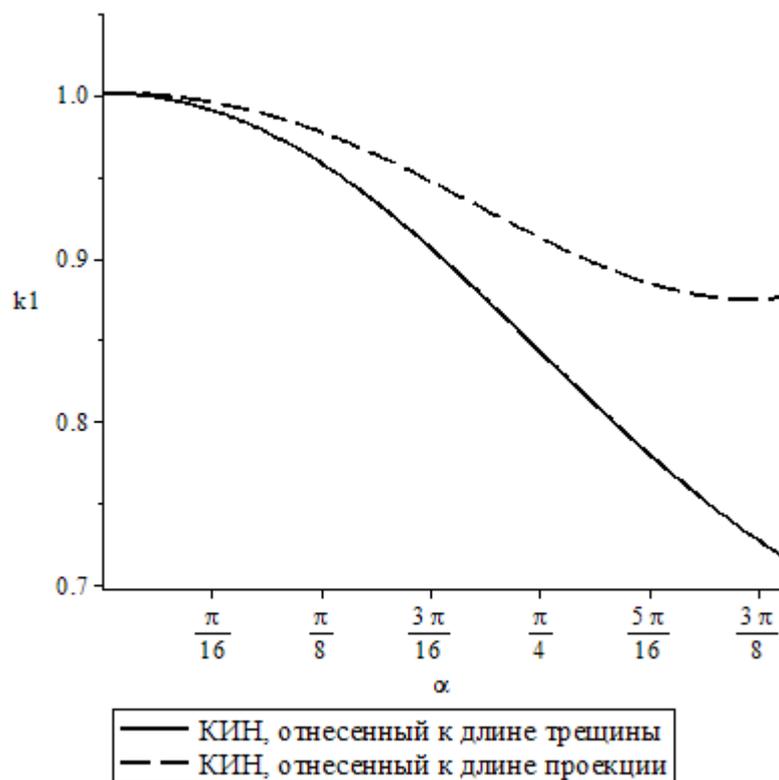


Рис. 25. Зависимость первого коэффициента влияния от угла α .

Расчеты произведены с разбиением трещины на 200 граничных элементов. Как видно из графика, наличие излома уменьшает коэффициент интенсивности по сравнению с конфигурацией прямолинейной трещины. С точки зрения

устойчивости можно считать, что ломаная трещина по сравнению с прямолинейной более устойчива.

2.3 Итоги главы 2.

Полученные результаты позволяют подвести итоги:

1. Использование представленной методики позволяет достаточно точно описывать параметры линейно-упругой среды, ослабленной большой (в том числе, и бесконечно большой) системой трещин.
2. Совпадение численных результатов с известными аналитическими решениями позволяет сделать вывод об эффективности предложенных алгоритмов исследования.
3. Показано, что предложенную гипотезу, о возможности сведения бесконечной системы трещин к конечной, можно использовать при исследовании задач для периодических систем.
4. При рассмотренных конфигурациях системы трещин установлено существенное влияние относительного сдвига соседних слоев на коэффициенты интенсивности напряжений (может происходить их увеличение или уменьшение в несколько раз).
5. Установлено, что для трещин V-образного излома коэффициенты интенсивности напряжений всегда меньше, чем для прямолинейной трещины той же длины.
6. Показано, что предложенные численные методы позволяют с достаточной степенью точности моделировать поиск траектории эволюции трещины.

Глава 3. Численный метод решения плоских задач теплопроводности тел с трещинами. Численные результаты.

В данной главе используются результаты работы [99].

3.1 Постановка задач и численный метод решения.

Рассмотрим стационарную плоскую задачу теплопроводности бесконечной теплопроводящей среды с N частично проницаемыми разрезами под действием теплового потока на бесконечности (рис. 26).

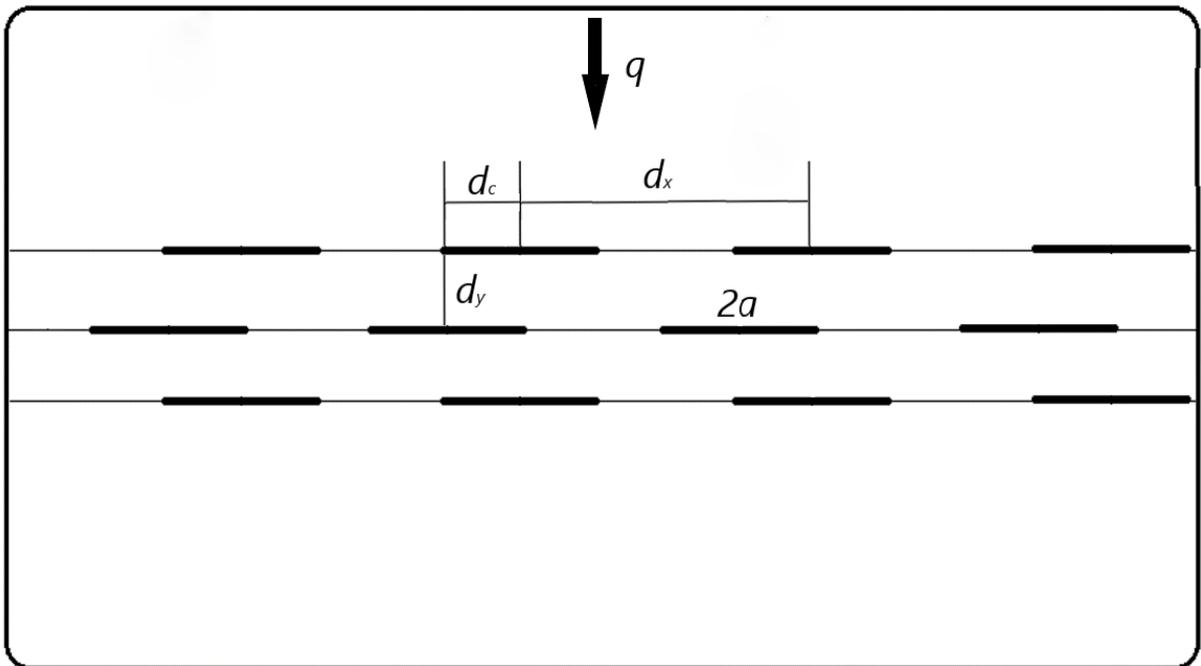


Рис. 26. Задача теплопроводности бесконечной теплопроводящей среды с N частично проницаемыми разрезами под действием теплового потока на бесконечности.

Все разрезы системы прямолинейны и параллельны оси OX декартовой системы координат, a – полудлина разрезов. Те разрезы, которые лежат вдоль одной прямой, будем называть слоем. Все слои геометрически эквивалентны. В каждом слое расстояние между центрами соседних трещин равно d_x . Расстояние между соседними слоями трещин равно d_y . Каждый второй слой сдвигается на

заданную величину d_c . В случае, когда параметр d_c равен нулю, мы имеем двоякопериодическую систему трещин. На бесконечности действует тепловой поток величины q^∞ . Трещины будем считать частично теплопроницаемыми, на их берегах действует тепловой поток q^0 . В случае теплоизолированных разрезов полагаем $q^0 = 0$. Запишем уравнение теплопроводности для стационарного поля температур без источников тепла и граничные условия, используя закон теплопроводности Фурье:

$$\Delta T(x, y) = 0$$

$$k \frac{\partial T}{\partial y} = -q^\infty, x^2 + y^2 \rightarrow \infty$$

$$k \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=y_i+0^+} = k \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=y_i+0^-} = -q^0, |x - x_i| \leq a$$

Здесь k – коэффициент теплопроводности материала, x_i, y_i – координаты центров разрезов. Базовыми размерными величинами задачи являются: a [м] – полудлина трещины; k [Вт/м*К] – коэффициент теплопроводности; q^∞ [Вт/м²] – тепловой поток на бесконечности. Далее для верификации с аналитическими решениями для построения графиков будут использоваться безразмерные величины:

$$\tilde{T} = \frac{Tk}{q^\infty \cdot 2a}$$

$$\tilde{q} = \frac{q}{q^\infty}$$

Волнистые линии для удобства опускаются. Все величины, связанные с расстоянием, будут отнесены к длине трещины.

Решение задачи представимо в виде суммы двух решений. Первое является решением задачи о распределении температуры в бездефектном материале. Поле температуры в этом случае может быть определено следующим образом:

$$T(x, y) = -\frac{q^\infty y}{k}$$

Вторая краевая задача определяется следующими соотношениями:

$$\Delta T(x, y) = 0$$

$$k \frac{\partial T}{\partial y} = 0, x^2 + y^2 \rightarrow \infty$$

$$k \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=y_i+0^+} = k \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=y_i+0^-} = q^\infty - q^0, |x - x_i| \leq a$$

Сумма решений этих двух задач будет являться решением исходной задачи. Решение второй задачи ищем в виде конечного функционального ряда по некоторым решениям модельных задач теплопроводности. Для построения модельного решения рассмотрим задачу элементарного разрыва температуры величины $D(x)$ на отрезке длины $2h$, который в дальнейшем будем называть граничным элементом. Перейдем к функции комплексного переменного, и, учитывая, что итоговое поле температуры должно быть вещественным имеем:

$$\Delta T(x, y) = 0 \Rightarrow T = F(z) + G(\bar{z})$$

$$T = 2 \cdot \operatorname{Re}(F(z))$$

Граничные условия в этом случае примут вид:

$$[\operatorname{Re} F(x)] = D(x), \quad |x| < h$$

Решением такой краевой задачи является функция, записанная при помощи интеграла типа Коши [40]:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-h}^h \frac{D(t) dt}{t - z}$$

Для определенных видов функциональной зависимости $D(x)$ интеграл может быть взят аналитически. В данной работе используются функции в виде

многочленов и корневой зависимости, которые ранее уже использовались в работах автора [89–91]. Например, для квадратичной зависимости будем иметь:

$$D(t) = at^2 + bt + c$$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \left[2h(az + b) + (az^2 + bz + c) \ln \frac{z - h}{z + h} \right]$$

Далее линии разрывов разбиваются на отрезки. Решение задачи представляется в виде суммы элементарных скачков на каждом из разрывов с неизвестными постоянными коэффициентами функций $D(x)$, своими для каждого скачка. Заметим, что мы можем найти распределение температуры, создаваемое разрывом температур, в любой точке среды. Для того чтобы отыскать коэффициенты получим замкнутую систему линейных алгебраических уравнений. Пусть сначала функция $D(x)$ равна константе на каждом граничном элементе, тогда коэффициенты a , b равны нулю, а мы ищем коэффициенты c для каждого элементарного разрыва температуры. Потребуем выполнение граничных условий в центрах всех элементов, на которые разбиты разрывы. Чтобы найти вектор теплового потока, требуется найти градиент температуры. Найдем нормальную к трещине составляющую, направленную по оси OY . Воспользуемся формулой комплексной производной:

$$q_y = -k \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} = -k \cdot \left(-\operatorname{Im} \left(\frac{\partial T(z)}{\partial z} \right) \right) = k \cdot \operatorname{Im} \left(\frac{\partial T(z)}{\partial z} \right)$$

Таким образом, приравняв к заданному значению тепловой поток, создаваемый всеми элементарными разрывами температур в центре какого-то выбранного граничного элемента, получим одно алгебраическое уравнение на величины скачков. В случае рассмотрения величин скачков константами, проделав данную операцию для центров каждого отрезка, на которые мы разбили разрывы, получим замкнутую систему уравнений.

$$q^\infty - q^0 = q_y(x^k, 0) = \sum_{j=1}^N F^{kj} c^j$$

Для верификации описанного метода, а также его дальнейших модификаций, рассмотрим задачи об N коллинеарных разрезах, лежащих на одной прямой (рис. 27), то есть случай одиночного слоя. Для этих задач имеются точные решения, которые можно найти в [84]. Будем сравнивать аналитические и численные результаты поля температуры, вычисленные в точках на линии параллельной линии разрезов на некотором расстоянии v от нее.

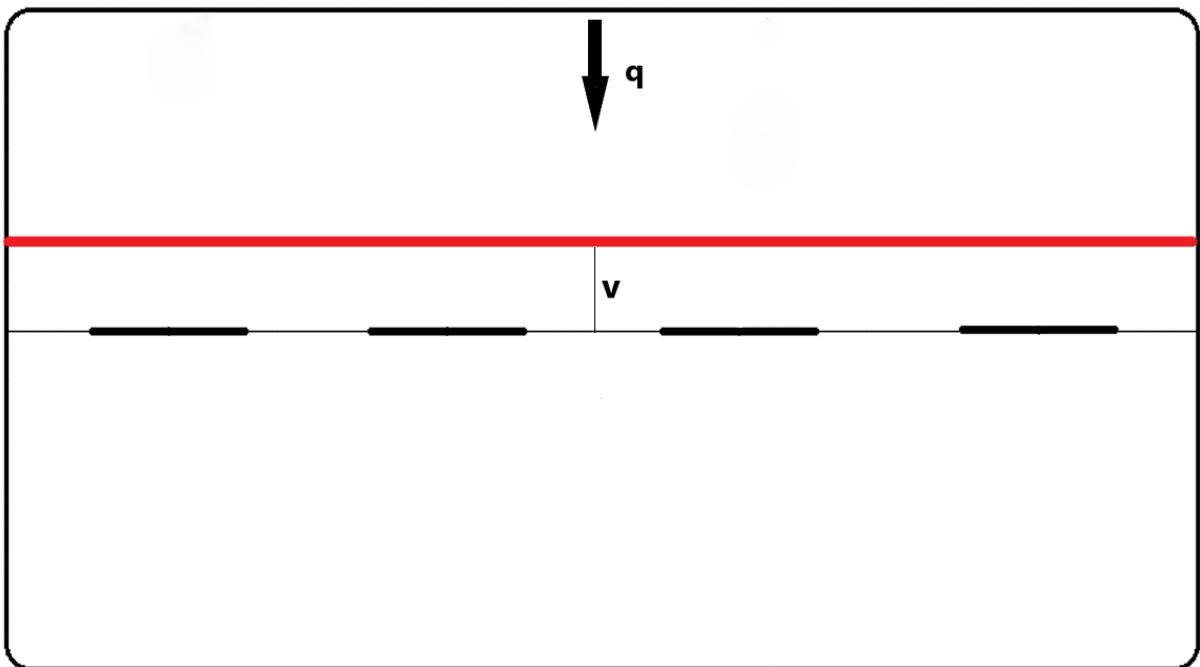


Рис. 27. Линия параллельная линии разрезов на расстоянии v от нее, в точках которой будут сравниваться аналитические и численные результаты поля температуры.

Сравнение аналитических и численных результатов поля температуры для задачи об одиночном теплоизолированном разрезе при разбиении разреза на 100 элементов на линии параллельной линии разреза на расстоянии 0.1 длины разреза вверх от него дает следующие результаты:

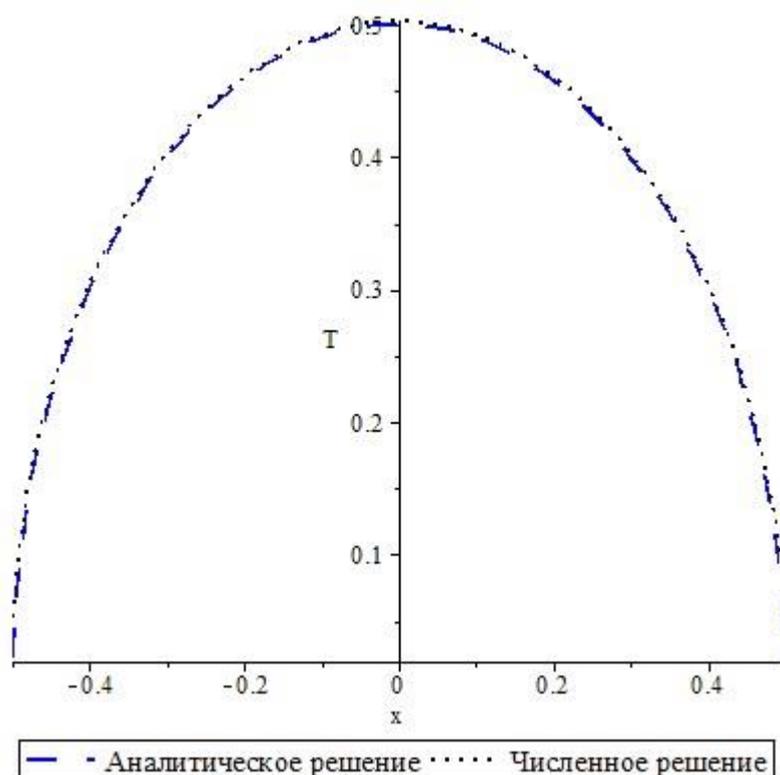


Рис. 28. Сравнение аналитических и численных результатов поля температуры для задачи об одиночном теплоизолированном разрезе при $\nu=0.1$.

Как видно из графика, при рассмотрении постоянных скачков температуры удается достаточно точно моделировать поле температуры в точках среды, не лежащих в малой окрестности трещины. Этого может быть вполне достаточно для инженерных приложений, однако основной научный интерес представляют точки, находящиеся вблизи вершин разрезов. Дополнительно стоит отметить, что в этих точках тепловой поток стремится к бесконечности при подходе к вершине разреза. Для того, чтобы с приемлемой точностью моделировать поля температуры и теплового потока, в малой окрестности, предлагается ряд усовершенствований.

Для начала рассмотрим величины скачков температуры в виде квадратичной зависимости от локальной координаты отрезка, на котором рассматривается элементарный разрыв. Заметим, что теперь функция, определяющая все искомые поля, линейно зависит от трех коэффициентов. Для

того, чтобы аналогично предыдущему случаю получить замкнутую систему линейных алгебраических уравнений, рассмотрим уже использовавшиеся граничные условия в дискретном наборе точек:

$$q^\infty - q^0 = q_y(x^k, 0) = \sum_{j=1}^N H^{kj} a^j + G^{kj} b^j + F^{kj} c^j$$

И дополним их условиями непрерывности решений в концах граничных элементов, а также непрерывности их производных в необходимом числе точек. Для демонстрации разницы двух методов рассмотрим задачу о 2 коллинеарных разрезах, лежащих на одной прямой. Ее аналитическое решение так же взято из [84]. Рассмотрим сравнение аналитических и численных результатов поля температуры уже для двух методов вблизи разреза. Возьмем линию параллельную разрезу на расстоянии 0.001 длины разреза и разобьем каждый разрез всего на пять элементов. Получим следующее распределение:

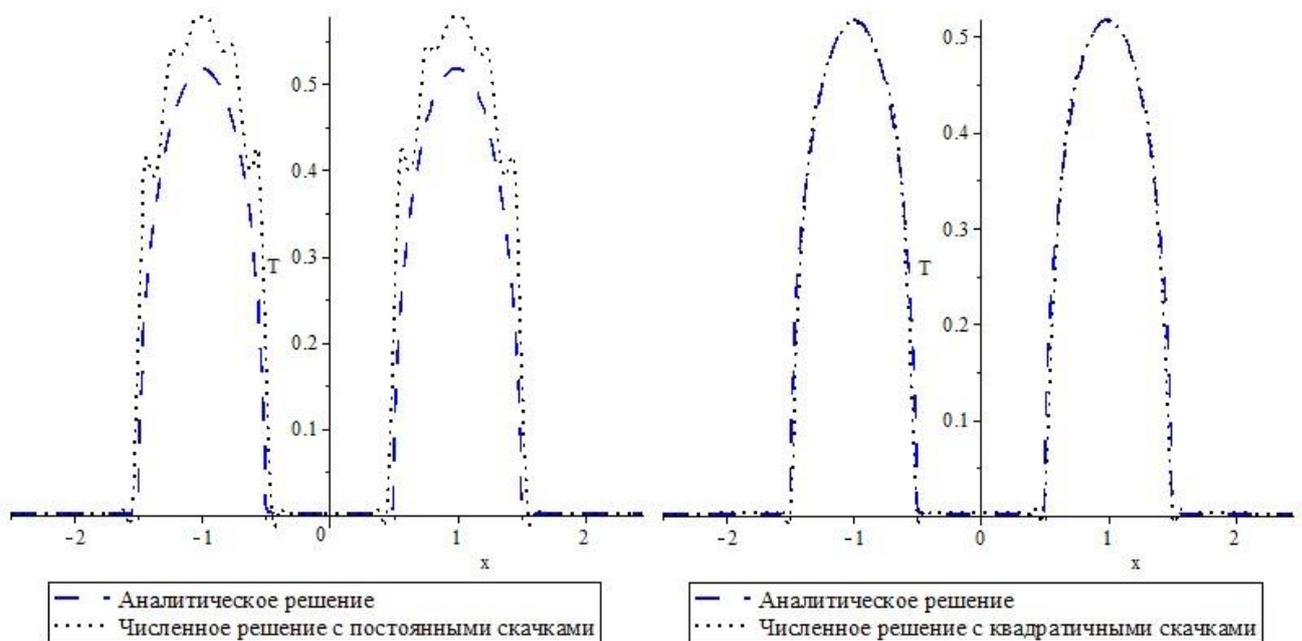


Рис. 29. Сравнение аналитических и численных результатов поля температуры для задачи о двух теплоизолированных разрезах, лежащих на одной прямой, при $\nu=0.001$ для метода нулевого порядка (a) и метода второго порядка (b).

На первом графике рис. 29 представлены результаты сравнения метода с константными величинами скачков, на втором – с квадратичными. Из графиков видно, что усовершенствованный метод позволяет использовать меньшее количество элементов для достижения заданной точности. При этом из-за отсутствия разрывов на границах элементов решение лучше воспроизводит физическую природу явления.

Для более точного моделирования асимптотики теплового потока, учитывая особенности решения в окрестности вершины трещины, предлагается для крайних элементов каждого разреза рассматривать плотность в корневой форме $D_{left}(t) = c_{left} \sqrt{h+t}$, $D_{right}(t) = c_{right} \sqrt{h-t}$. Заметим, что функции для теплового потока и температуры специальных граничных элементов также удастся найти в аналитическом виде, причем линейная зависимость от коэффициента сохраняется. Как было показано ранее, их использование в задачах линейно-упругой механики разрушения позволяет значительно уточнить результаты в малой окрестности вершины трещины. Для верификации снова рассмотрим задачу об одиночном разрезе, но теперь будем сравнивать у-компоненту теплового потока на продолжении разреза (рис. 30).

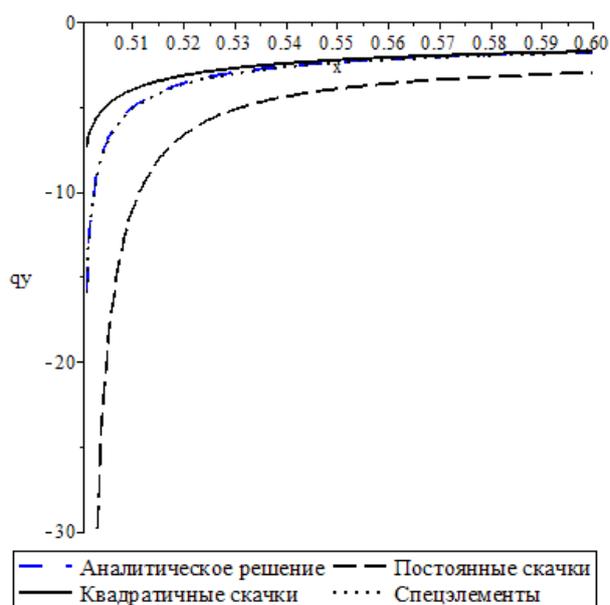


Рис. 30. Зависимость у-компоненты теплового потока на продолжении разреза от координаты x для трех методов.

Разбиение разреза производилось всего на 10 элементов. Как видно из графиков, при таком разбиении вблизи вершины разреза только метод второго порядка точности с использованием спецэлементов дает приемлемые результаты.

При помощи этих усовершенствований удастся моделировать большие системы разрезов в теплопроводящей среде с достаточно высокой точностью при разбиении разрезов на малое количество граничных элементов. Для демонстрации такой возможности рассмотрим еще одну решенную аналитически задачу о бесконечном числе разрезов на одной прямой. Воспользуемся гипотезой о конечности области существенного влияния разреза на распределение температурного поля в среде. Аналогичная гипотеза для задач линейно-упругой теории трещин была рассмотрена в предыдущей главе. Попробуем смоделировать бесконечную систему разрезов всего пятью, считая, что в окрестности центрального мы достаточно точно воспроизводим поведение вокруг выбранной трещины в периодической структуре. Каждый разрез, как и в предыдущей задаче, будет представлен в виде десяти последовательных отрезков – скачков температуры. Линия, на которой рассматривается поле температуры отстоит от линии разрезов на величину равную 0,1 длины разреза.

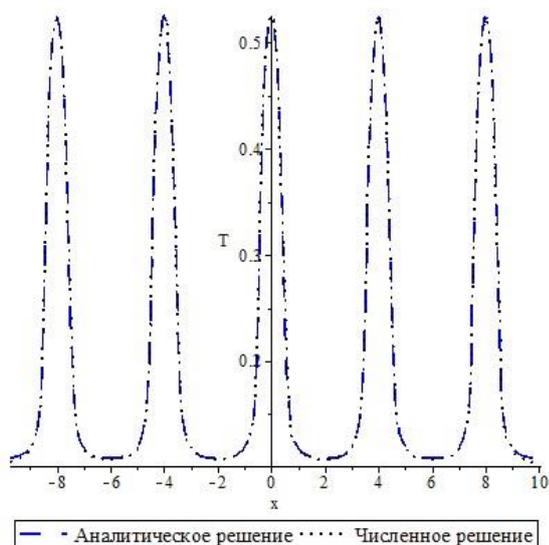


Рис. 31. Сравнение аналитических и численных результатов поля температуры для задачи о периодической системе коллинеарных теплоизолированных разрезов при $\nu=0.1$.

На рис. 31 можно наблюдать очень хорошее совпадение численных и аналитических результатов. Относительная ошибка в окрестности основного рассматриваемого разреза не превышает 1,5% (рис. 32), что в свою очередь подтверждает правильность гипотезы.

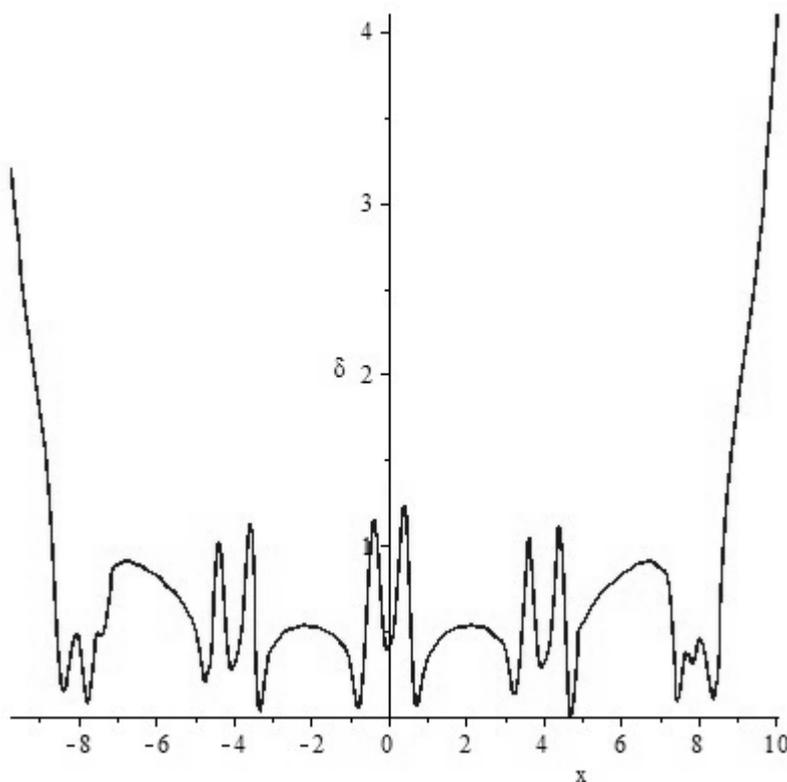


Рис. 32. Относительная ошибка поля температуры для задачи о периодической системе коллинеарных теплоизолированных разрезов при $\nu=0.1$.

Так как тепловой поток в вершинах трещин стремится к бесконечности, удобным параметром описания асимптотики его стремления является коэффициент интенсивности теплового потока. По аналогии со случаем линейно-упругой механики разрушения его можно ввести следующим образом:

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{s} q_y(s)$$

Здесь q_y - нормальная к трещине составляющая теплового потока, s - расстояние от вершины трещины до точки на линии продолжения трещины. В задаче одиночного разреза он вычислен аналитически [84] и равен:

$$K = -\left(1 - \frac{q^0}{q^\infty}\right) \sqrt{\frac{a}{2}} q^\infty$$

Искать численно его предлагается, воспользовавшись определением.

Рассмотрим произведение теплового потока на корень расстояния, вычисленное в некоторой точке на продолжении трещины, после чего будем рассматривать точки все более и более близкие к вершине трещины. Максимальное значение будет приближенным значением коэффициента интенсивности теплового потока. При разбиении разреза на 17 граничных элементов относительная ошибка составляет менее 1%.

3.2 Численные результаты.

В задачах с большой системой трещин удобно использовать так называемые коэффициенты влияния, представляющие собой отношение коэффициента интенсивности теплового потока, найденного в вершине некоторого разреза системы, к коэффициенту интенсивности теплового потока одиночного разреза при той же величине теплового потока. Зависимость такого коэффициента влияния в вершине центрального разреза системы, представленной на рис. 26, от величины сдвига d_c при разных значениях d_y и фиксированном значении $d_x = 4a$ представлена на рис. 33.

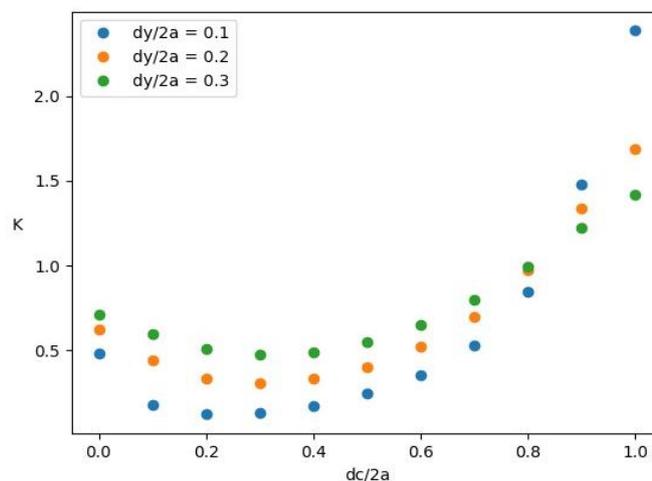


Рис. 33. Зависимость коэффициента влияния в задаче о «квазишахматной» системе разрезов от величины сдвига d_c при разных d_y и фиксированном $d_x = 4a$.

Вычисления производились для системы из 25 трещин: пять слоев по пять трещин каждый. Разбиение каждой трещины происходило на 10 граничных элементов. из графиков видно, что в зависимости от сдвига слоев коэффициент интенсивности теплового потока может быть как больше, так и меньше случая единичного разреза. Следовательно, точное моделирование температурного поля в материале с большой системой трещин невозможно без учета влияния всех трещин системы, лежащих в некоторой окрестности выбранной трещины.

3.3 Итоги главы 3.

Таким образом, предложенные методы моделирования поведения теплопроводящей среды, ослабленной системой частично теплопроницаемых разрезов, позволяют с необходимой для приложений точностью искать поля температуры и теплового потока в любой точке среды. Гипотеза ограниченности области существенного влияния трещин на температурное поле в среде подтвердилась при моделировании и применима вместе с представленным алгоритмом для анализа поведения периодических систем. Для двоякопериодических систем трещин установлено существенное влияние относительного сдвига трещин соседних слоев на коэффициенты интенсивности теплового потока.

Заключение.

Построенные численные методы повышенного порядка точности позволяют решать плоские задачи линейной механики разрушения и теплопроводности для сред, ослабленных произвольной системой трещин, и вычислять все параметры, необходимые для дальнейшего анализа процессов разрушения. Предложены методы численного определения коэффициентов интенсивности напряжений, T -напряжений, использующие асимптотическое разложение М. Уильямса в вершине трещины и метод определения коэффициентов интенсивности теплового потока.

Показано существенное влияние геометрии ослаблений среды на коэффициенты интенсивности напряжений и теплового потока. В случае двоякопериодических систем трещин установлены зависимости коэффициентов влияния от величины относительного смещения слоев трещин. В случае трещин с V -образным изломом под нагрузкой заданной конфигурации показано локальное упрочнение среды по сравнению с прямолинейной трещиной той же длины.

Возможным перспективным развитием некоторых изложенных методов является их обобщение на случай пространственных задач. Одним из возможных путей усовершенствования рассмотренного подхода можно считать задачи термоупругости и нелинейной механики разрушения.

Список литературы.

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. 4-е изд. — М: Наука, 1983. Т. 1. — 528 с.
2. Седов Л.И. Механика сплошной среды. 4-е изд. — М: Наука, 1984. Т. 2. — 560 с.
3. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966. — 708 с.
4. Griffith A.A. The phenomena of rupture and flow in solids // Philosophical Transactions Royal Society of London. Series A. — 1921. — Vol. 221. — P. 163–198.
5. Griffith A.A. The theory of rupture // In: Proceedings of the First International Congress for Applied Mechanics. Delft. — 1924. — P. 55–63.
6. Irwing G.R. Fracture dynamics. — In: Fracturing in metals. Cleveland: ASM. — 1948. — P. 147–166.
7. Irwin G.R. Analysis of Stress and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. // Trans. ASME. J. Appl. Mech. — 1957. — Vol. 24. — P. 361–364.
8. Orowan E. Energy criteria of fracture // The welding journal. — 1955. — Vol. 34. — № 3. — P. 1576–1606.
9. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. // J. Appl. Mech. — 1952. — Vol. 19. — P. 526–528.
10. Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. // ASME J. Appl. Mech. — 1957. — Vol. 24. — P. 109–114.
11. Rice J. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. // J. Appl. Mech. — 1968. — Vol. 35. — P. 379–386.
12. Райс Дж. Математические методы в механике разрушения. В кн.: Разрушение. Т. 2. Математические основы теории разрушения. — М.: Мир. 1975. — С. 204–335.

13. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. — М.: Наука, 1974. — 640 с.
14. Cherepanov G. P. Crack propagation in continuous media // J. Appl. Math. Mech. — 1967. — Vol. 31. — P. 503–512
15. Черепанов Г.П. Механика разрушения горных пород в процессе бурения. — М.: Недра, 1987. — 307 с.
16. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. — М.: Наука, 1983. — 296 с.
17. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. And Phys. Solida. — 1960. — Vol. 8. — P. 100–104.
18. Баренблатт Г.И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Общие представления и гипотезы. Осесимметричные трещины // ПММ. — 1959. — Т. 23. — №3. — С. 434–444.
19. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Прямолинейные трещины в плоских пластинках // ПММ. — 1959. — Т. 23. — №4. — С. 706–721.
20. Баренблатт Г.И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ПМТФ. — 1961. — № 4. — С. 3–56.
21. Баренблатт Г.И., Христианович С.А. О модуле сцепления в теории трещин // МТТ. — 1968. — №2. — С. 70–75.
22. Морозов Е.М. Вариационный принцип в механике разрушения // Докл. АН СССР. — 1969. — Т. 184 — №6. — С. 1308–1311.
23. Морозов Е.М., Фридман Я.Б. Некоторые закономерности в теории трещин // Прочность и деформация материалов в неравномерных физических полях. — 1968. — Т. 2. — С. 216–253.
24. Морозов Е.М. Метод расчета на прочность при наличии трещин // Проблемы прочности. — 1971. — № 1. — С. 35–40.
25. Партон В.З. Механика разрушения. От теории к практике. — М.: Наука, 1990. — 240с.

- 26.Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. — М.: Наука, 1974. — 416 с.
- 27.Перлин П. И., Самаров В. Н. Применение теории обобщенного потенциала к решению пространственных задач теории упругости для тел с разрезами и оценке хрупкого разрушения конструкций сложной формы // Изв. АН Казахской ССР. Серия физико-математическая. — 1974. — Т. 5. — С.72–73.
- 28.Перлин П. И., Самаров В. Н. Применение теории потенциала к решению пространственных задач теории упругости для тел с разрезами // Прикладные проблемы прочности и пластичности. — 1977. — Вып. 6. — С. 42–46.
- 29.Работнов Ю.А. Введение в механику разрушения. — М.: Наука, 1987. — 80 с.
- 30.Слепян Л.И. О волне хрупкого разрушения // МТТ. — 1968. — № 4. — С. 190–192.
- 31.Слепян Л.И. Динамика хрупкого разрушения в средах со структурой // МТТ. — 1984. — № 6. — С. 121–130.
- 32.Sih G., Paris P., Erdogan F. Crack-Tip, Stress-Intensity Factors for Plane Extension and Plate Bending Problems // Journal of Applied Mechanics. — 1962. — Vol. 29. — P. 306–312.
- 33.Sih G.C. Ed. Mechanics of fracture. V. 4. Elastodynamic crack problems. — Leyden: Noordhoff, 1977. — 352 p.
- 34.McClintock F.A., Irwin G.R. Plasticity aspects of fracture mechanics // ASTM Spec. Tech. Publ. — 1965 — № 381. — P. 84–114.
- 35.Paris P.C., Sih, G.C. Stress and analysis of cracks // ASTM Spec. Tech. Publ. — 1965 — № 381. — P. 30–83.
- 36.Paris P.C. Erdogan F. Critical analysis of crack propagation laws // Trans ASME J Basic Eng. Journal of Basic Engineering, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers. — 1963 — D. 85. — P. 528–534.
- 37.Новацкий В. Теория упругости. — М.: Мир, 1975. — 872 с.

38. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. — М.: Наука, 1975. — 576 с.
39. Колосов Г.В. Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче математической теории упругости // Юрьев. — 1909.
40. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. — М.: Наука Глав. ред. физ.-мат. лит., 1977. — 640с.
41. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. Под редакцией Мураками Ю. Т.1. — М.: Мир, — 1990 г.
42. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. Под редакцией Мураками Ю. Т.2. — М.: Мир, — 1990 г.
43. Гольдштейн Р. В., Капцов А.В. Формирование структур разрушения слабо взаимодействующих трещин. // МТТ. — 1982. — № 4. — С. 173–182.
44. Шифрин Е.И. Пространственные задачи линейной механики разрушения. — М.: Издательство Физико-математической литературы, 2002. — 368 с.
45. Пожарский Д.А. Периодические системы трещин в трансверсально изотропном теле. // МТТ. — 2019. — № 3. — С. 54–63.
46. Fabrikant V.I. Mixed boundary value problems of potential theory and their application in mechanics. — Kluwer Academic, Dordrecht, 1991. — 464 p.
47. Kachanov M. Elastic solids with many cracks: a simple method of analysis // International Journal of Solids and Structures. — 1987. — Vol. 23. — P. 23–43.
48. Kachanov M, Montagut E. A simple analysis of intersecting cracks and cracks intersecting a hole // International Journal of Fracture. — 1989. — Vol. 40. — P. 61–65.
49. Hello, G., Tahar, M.B. and Roelandt, I.M. Analytical Determination of Coefficients in Crack-Tip Stress Expansions for A Finite Crack in an Infinite Plane Medium. // International Journal of Solid and Structures. — 2012. — Vol. 49. — P. 556–566.

50. Hello G. Derivation of complete crack-tip stress expansions from Westergaard-Sanford solutions // International Journal of Solids and Structures. — 2018. — Vol. 144–145. — P. 265-275.
51. Larsson S.G., Carlsson A.J. Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic–plastic materials // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 1973. — Vol. 21. — P. 263–277.
52. Ayatollahi M.R., Pavier M.J., Smith D.J. Determination of T-stress from finite element analysis for mode I and mixed mode I/II loading // International journal of fracture. — 1998. — Vol. 91. — P. 283–298.
53. Chan S.K., Tuba I. S., Wilson W. K. On the finite element method in linear fracture mechanics // Engineering fracture mechanics. — 1970. — Vol. 2. — P. 1–17.
54. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975. — 541 с.
55. Морозов Е.М., Никишков Г.П. Метод конечных элементов в механике разрушения. — М.: Наука, 1980. — 254 с.
56. Бреббия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике // Пер. с англ. — М.: Мир, 1982. — 248с.
57. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках // Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 494с.
58. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. — М.: Мир, 1987. — 328 с.
59. Партон В.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. — М.: Наука, 1977. — 312 с.
60. Снеддон И.Н., Берри Д.С. Классическая теория упругости. — М.: Физматгиз, 1961. — 219 с.
61. Перлин П.И. Применение регулярных представлений сингулярных интегралов к решению уравнений второй основной задачи теории упругости // ПММ. — 1976. — Т. 40. — №2. — С. 366–371.

62. Zvyagin A.V., Luzhin A.A., Panfilov D.I., Shamina A.A. Numerical Method of Discontinuous Displacements in Spatial Problems of Fracture Mechanics // J. Mechanics of Solids. Allerton Press Inc. — 2021. — Vol. 56. — P. 119–130
63. Богданов А.И., Звягин А.В., Тьерсилен М. Взаимное влияние системы трещин на коэффициент интенсивности напряжений. // Вестник Моск. ун-та, Сер. 1. Математика. Механика. — 2004. — № 6. — С. 44–49.
64. Акулич А.В., Звягин А.В. Численное моделирование распространения трещины гидроразрыва. // Вестник Моск. ун-та, Сер. 1. Математика. Механика. — 2008. — № 1. — С. 43–49.
65. Акулич А.В., Звягин А.В. Взаимодействие трещины гидроразрыва с естественной трещиной // МЖГ. — 2008. — № 3. — С. 104–112
66. Zvyagin A.V., Panfilov D.I., Shamina A.A. The Mutual Influence of Disk-Shaped Cracks in Three-Dimensional Elastic Space // Moscow University Mechanics Bulletin. — 2019. — Vol. 74. — № 4. — P. 89–96
67. Shamina A.A., Zvyaguin A.V., Akulich A.V., Tyurenkova V.V., Smirnov N.N. The study of the strength of structures weakened by a system of cracks // Acta Astronautica. — 2020. — Vol. 176. — P. 620–627
68. Zvyagin A.V., Luzhin A.A., Smirnov N.N., Shamina A.A., Shamin A.Y. Stress intensity factors for branching cracks in space structures // Acta Astronautica. — 2021. — Vol. 180. — P. 66–72
69. Shamina A.A., Zvyagin A.V., Smirnov N.N., Luzhin A.A., Panfilov D.I., Udalov A.S. Computational modeling of cracks different forms in three-dimensional space // Acta Astronautica. — 2021. — Vol. 186. — P. 289–302.
70. Yoffe E.H. The moving Griffith crack // Phil. Mag. — 1951. — Vol. 42. — Pt. 2. — P. 739–750.
71. Broberg K.B. The propagation of a brittle crack // Arkiv for Fysik. — 1960. — Bd. 18. — H. 10. — P. 159–192.
72. Шер Е.Н. Об энергетическом условии в носике нестационарной трещины // ПМТФ. — 1969. — № 3. — С. 175–178.

73. Слепьян Л.И. Деформация у края растущей трещины // Изв. АН СССР. МТТ. — 1973. — № 4. — С. 139–148.
74. Слепьян Л.И. Растущая трещина при плоской деформации упругопластического тела // Изв. АН СССР. МТТ. — 1974. — № 1. — С. 57–67.
75. Слепьян Л.И. Динамика трещины в упругопластическом теле // Изв. АН СССР. МТТ. — 1976. — № 2. — С. 144–153.
76. Шер Е.Н. Динамика растущего с постоянной скоростью прямолинейного изолированного разреза в условиях антиплоской деформации // ПМТФ. — 1977. — № 4. — С. 166–177.
77. Рахматулин Х.А., Шемякин Е.И., Звягин А.В., Демьянов Ю.А. Прочность и разрушение при кратковременных нагрузках: учеб. пособие. — М.: Университетская книга, 2008. — 624 с.
78. Erdogan F., Sih G.C. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear // J. bas. Engng, ASME Trans. — 1963. — Vol. 85. — P. 519–525.
79. Smith D., Ayatollahi M. R., Pavier M.J. The role of T-stress in brittle fracture for linear elastic materials under mixed mode loading // FFEMS. — 2008. — Vol. 24. — P. 137–150.
80. Qian J., Fatemi A. Mixed mode fatigue crack growth: A literature survey // Eng. Frac. Mech. — 1996. — Vol. 55. — P. 969–990.
81. Richard H., Fulland M., Sander M. Theoretical crack path prediction // FFEMS. — 2005. — Vol. 28. — P. 3–12.
82. Фридман Я. Б., Соболев Н. Д., Борисов С. В., Егоров В. И., Конопленко В. П., Морозов Е. М., Шаповалов Л.А., Шорр Б.Ф. Некоторые вопросы термической прочности в реакторостроении // Атомная энергия. — 1961. — Т. 10. — № 6. — С. 606–619.
83. J. Petit, W. Berata, B. Bouchet, Fatigue crack growth behaviour of Ti6Al4V at elevated temperature in high vacuum, Scripta Metallurgica et Materialia. — 1992. — Vol. 26. — Issue 12. — P. 1889–1894.

84. G. C. Sih, Heat conduction in the infinite medium with lines of discontinuities // ASME J. Heat Transfer — 1965. — Vol. 95. — P. 293–297.
85. Da Yu Tzou, The singular behavior of the temperature gradient in the vicinity of a macrocrack tip, International Journal of Heat and Mass Transfer. — 1990. — V. 33. — Issue 12. — P. 2625–2630.
86. G. C. Sih, On the singular character of thermal stresses near a crack tip // Journal of Applied Mechanics. — 1962. — Vol. 29. — P. 587–589.
87. M. N. Vapu Rao, Thermal stresses around an insulated crack in an infinite plate subjected to a uniform heat flow // Int. J. Fract. — 1976. — Vol. 12. — P. 777–779.
88. Симонов Ю.Н., Георгиев М.Н., Симонов М.Ю. Основы физики и механики разрушения. — Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2012. — 203 с.
89. Звягин А.В., Удалов А.С. Метод разрывных смещений высокого порядка точности в механике трещин. // Вестник Моск. ун-та, Сер. 1. Математика. Механика. — 2020. — № 6. — С. 34–39.
90. A. V. Zvyagin, A. S. Udalov, A. A. Shamina, Boundary element method for investigating large systems of cracks using the Williams asymptotic series // Acta Astronautica. — 2022. — Vol. 194. — P. 480–487.
91. Звягин А. В., Удалов А. С. Численное моделирование ломаных трещин // Вестник Моск. ун-та, Сер. 1. Математика. Механика. — 2023. — № 1. — С. 44–48.
92. Звягин А.В., Лужин А.А., Удалов А.С., Шамина А.А. Численный расчет периодических систем трещин в упругом теле // Упругость и Неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 110-летию со дня рождения А. А. Ильюшина // Под ред. Г. Л. Бровко, И. Н. Молодцов, Н. В. Овчинникова. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2021. — С. 379–389.
93. Erdogan F. On the stress distribution in plates with collinear cuts under arbitrary loads // Proc. 4th U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. — 1962. — P. 547–553.

94. Westergaard H. M. Bearing pressures and cracks // ASME. J. Appl. Mech. — 1939. — Vol. 61. — № 2. — A49–A53.
95. Isida M., Ushijima N., Kishine N. Rectangular plates, strips and wide plates containing internal cracks under various boundary conditions // Trans. Japan Soc. Mech. Engrs. — 1981. — Vol. 47. — № 413 — P. 27–35.
96. Chatterjee S.N. The stress field in the neighborhood of a branched crack in an infinite elastic sheet // International Journal of Solids and Structures. — 1975. — Vol. 11. — P. 521–538.
97. Lo K. K. Analysis of branched cracks // ASME. J. Appl. Mech. — 1978. — Vol. 45. — № 4. — P. 797–802.
98. Sih G. C., Paris P. C., Erdogan F. Crack tip stress-intensity factors for plane bending problems // ASME. J. Appl. Mech. — 1962. — Vol. 29. — № 2. — P. 306–312.
99. Zvyagin A. V., Udalov A. S., Shamina A. A. Numerical modeling of heat conduction in bodies with cracks // Acta Astronautica. — 2023. — Vol. 214. — P. 196–201.