МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Дерюгина Наталья Николаевна

КОНТРАСТНЫЕ СТРУКТУРЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ СИСТЕМАХ С СИНГУЛЯРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ФИЗИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

1.3.3. — «Теоретическая физика»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва — 2023

Работа выполнена на кафедре математики физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: **Нефедов Николай Николаевич**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Кащенко Илья Сергеевич,** доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического моделирования ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова.

Качалов Василий Иванович, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики института электроэнергетики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МЭИ».

Дмитриев Михаил Геннадьевич, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук.

Защита диссертации состоится "18" мая 2023 г. в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.2 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, дом 1, стр 2, Физический факультет МГУ, физическая аудитория им. Р.В. Хохлова.

E-mail: ff.dissovet@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д.27) и на сайте https://dissovet.msu.ru/dissertation/011.2/2480.

Автореферат разослан "_____"______________2023 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.2,
доктор физико-математических наук,
профессор П.А. Поляков

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В задачах математического моделирования в классической теории поля, биофизике, химической кинетике и других научных областях естественным образом возникают сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения. Именно такие уравнения способны описать физические явления, для которых характерны резко изменяющиеся состояния рассматриваемой системы. В последние годы количество возникающих задач подобного рода особенно велико. Математически, такие явления описываются с помощью решений вида контрастных структур — функций, внутри области определения которых происходит резкое изменение их значений. В работе применяются два основных метода исследования контрастных структур — метод пограничных функций А. Б. Васильевой и метод дифференциальных неравенств, развитый в работах Н.Н. Нефёдова. Первый позволяет строить равномерные асимптотические приближения, второй позволяет доказать существование, локальную единственность и асимптотическую устойчивость решений с переходными слоями.

Целью данной работы является исследование контрастных структур в сингулярно возмущенных нелинейных двухкомпонентных системах с разными степенями малого параметра в ряде возможных постановок: с внутренним переходным слоем и пограничным переходным слоем, с сингулярным возмущением в дифференциальном операторе и в граничных условиях задачи.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Построение асимптотического приближения решения с пограничным переходным слоем или с внутренним переходным слоем.
2. Построение нижних и верхних решений как модификации построенной асимптотики по методу дифференциальных неравенств.
3. Формулирование условий существования решений для рассмотренных типов задач.
4. Доказательство устойчивости полученных стационарных решений.

Научная новизна: Метод пограничных функций применен для ряда сингулярно возмущенных нелинейных двухкомпонентных систем с разными степенями малого параметра. Построена формальная асимптотика, проведено доказательство корректности построенной асимптотики, ее существования, локальной единственности и асимптотической устойчивости по Ляпунову. Для параболической задачи с условиями Неймана сформулировано условие существования решения, расширяющее класс задач, для которых применимы построенный алгоритм.

Теоретическая и практическая значимость Теоретическая значимость работы состоит в расширении класса задач, для которых применен метод пограничных функций, сформулированы условия его применения и доказательства существования и единственности. Полученные результаты можно использовать для исследования других переходных слоев. Проведенные исследования имеют важное значение для теоретической физики в области пограничных слоев, возникающих в нелинейных системах. Разработанные математические методы могут применяться для описания явлений классической теории поля, например, неравновесной термодинамики. Практическая значимость работы заключается в возможности применения ее результатов в математическом моделировании в задачах биофизики, химической кинетики, экологии и других областей наук, в которых возникает скачкообразное изменение рассматриваемых величин.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Существуют решения в виде контрастных структур для нелинейных двухкомпонентных систем в случаях с разными характерными скоростями изменения компонент системы (степенями малого параметра при дифференциальных операторах для двух компонент), с внутренним переходным слоем и пограничным переходных слоем, с сингулярным возмущением в дифференциальном операторе и в граничных условиях задачи.
2. Полученный в работе алгоритм позволяет строить асимптотические разложения по малому параметру решений двумерных задач с пограничным или внутренним переходным слоем.
3. Для рассмотренных задач справедливы теоремы существования и асимптотической устойчивости решений по Ляпунову.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью математических методов, примененных для построения решений. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Результаты работы были доложены на следующих конференциях: Ломоносов (Москва, 2013), "Актуальные проблемы математической физики"(Москва, 2014), "Ломоносов"(Москва, 2015), "Волны-2015"(Красновидово, 2015), V Съезд биофизиков России (Ростов-на-Донуб 2015), IX Всероссийская конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и механики» с международным участием, посвященная памяти академика А.Ф. Сидорова (Дюрсо, 2018), Ломоносовские чтения (Москва, 2018), Тихоновские чтения (Москва, 2019), Ломоносов-2019 (Москва, 2019), 2nd

International Conference on Integrable Systems and Nonlinear Dynamics (Ярославль, 2020), Ломоносов-2022 (Москва, 2022).

Личный вклад. Личный вклад автора состоит в построении асимптотических приближений решений с пограничным или внутренним переходным слоем, установлении условий существования и устойчивости построенных решений. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причём вклад соискателя был определяющим. Вклад автора в статье "Автоволновая самоорганизация в неоднородных природно-антропогенных экосистемах"(Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия, 2016, №6, с. 39-45) составляет 1/4. В остальных работах, опубликованных в соавторстве, основополагающий вклад принадлежит соискателю.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 печатных изданиях, 5 из которых изданы в рецензируемых журналах из баз данных Scopus и Web of Science.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

В **первой главе** приведен обзор научных работ, посвященных близким к теме диссертации исследованиям, обозначено место диссертационной работы среди других современных работ, развивающих данное направление.

Вторая глава посвящена изучению системе уравнений типа реакция-диффузия с разными степенями малого параметра при дифференциальном операторе в замкнутой, односвязной двумерной области D, ограниченной достаточно гладкой границей ∂D:

$$\begin{cases} \mathcal{N}_u := \varepsilon^4 \Delta u - \dfrac{\partial u}{\partial t} - f(u,v,x,\varepsilon) = 0, x = (x_1,x_2) \in D, t > 0, \\ \mathcal{N}_v := \varepsilon^2 \Delta v - \dfrac{\partial v}{\partial t} - g(u,v,x,\varepsilon) = 0, x = (x_1,x_2) \in D, t > 0, \\ u(x,0,\varepsilon) = u_{init}(x,\varepsilon), v(x,0,\varepsilon) = v_{init}(x,\varepsilon),\ x \in \bar{D}, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} = h(x), x \in \partial D, \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial n}\right|_{\partial D} = q(x), x \in \partial D. \end{cases}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – малый параметр, функции $f(u,v,x,\varepsilon)$ и $g(u,v,x,\varepsilon)$ определены при $(u,v,x) \in G \equiv I_u \times I_v \times D$ и $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, где ε_0 – положительная константа. Производная в граничном условии берется по внутренней нормали к ∂D. В главе сформулированы условия существования и устойчивости по Ляпунову стационарного решения задачи. Для доказательства теорем использован асимптотический метод дифференциальных неравенств.

В **третьей главе** рассмотрены три двумерные задачи с сингулярными граничными условиями. В первом разделе главы рассматривается однокомпонентное уравнение реакция-диффузия с сингулярно возмущенным граничным условием Неймана. В следующем разделе рассматривается естественное обобщение данной задачи на случай сингулярно возмущенных условий третьего рода. Наконец, завершает главу задача, представляющая следующий шаг развития этого направления, а именно двухкомпонентная система уравнений реакция-диффузия с сингулярно возмущенными граничными условиями Неймана.

$$
\begin{cases}
\mathcal{N}_u(u,v) := \varepsilon^4 \Delta u - \dfrac{\partial u}{\partial t} - f(u,v,x,\varepsilon) = 0, x = (x_1,x_2) \in D, t > 0,\\
\mathcal{N}_v(u,v) := \varepsilon^2 \Delta v - \dfrac{\partial v}{\partial t} - g(u,v,x,\varepsilon) = 0, x = (x_1,x_2) \in D, t > 0,\\
u(x,0,\varepsilon) = u_{init}(x,\varepsilon), v(x,0,\varepsilon) = v_{init}(x,\varepsilon), \, (x) \in \bar{D},\\
\varepsilon^2 \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} = h(x), x \in \partial D,\\
\varepsilon \left.\dfrac{\partial v}{\partial n}\right|_{\partial D} = q(x), x \in \partial D.
\end{cases} \tag{1}
$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – малый параметр, функции $f(u,v,x,\varepsilon)$ и $g(u,v,x,\varepsilon)$ определены при $(u,v,x) \in G \equiv I_u \times I_v \times D$ и $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, где ε_0 – положительная константа.

В **четвертой главе** рассматривается система двух сингулярно возмущенных параболических уравнений в двумерной области с периодическими условиями по времени. Исследуются решения типа периодического фронта, локализованного в окрестности замкнутой кривой.

$$
\begin{cases}
\varepsilon^4 \Delta u - \varepsilon^4 u_t = f(u,v,\mathbf{x},t,\varepsilon),\\
\varepsilon^2 \Delta v - \varepsilon^2 v_t = g(u,v,\mathbf{x},t,\varepsilon),\\
\mathbf{x} = (x_1,x_2) \in D \subset R^2, t \in (0;+\infty),
\end{cases}
$$

с условиями:

$$
\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\partial D} = 0, \quad t \in (0;+\infty),
$$
$$
u(\mathbf{x},t) = u(\mathbf{x},t+T), \quad v(\mathbf{x},t) = v(\mathbf{x},t+T), \quad \mathbf{x} \in D, \quad t \in (0;+\infty),
$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, Δ — оператор Лапласа, D — ограниченная односвязная область с достаточно гладкой границей ∂D, f и g — достаточно гладкие и T-периодические функции в области $(u,v,\mathbf{x},t,\varepsilon) \in I_u \times I_v \times \bar{D} \times (0;+\infty) \times (0;\varepsilon_0]$, I_u и I_v — некоторые промежутки изменения переменных u и v, $\dfrac{\partial}{\partial n}$ — производная по внутренней нормали к ∂D. Получено асимптотическое приближение и доказана теорема существования решения типа периодического фронта в системе двух параболических уравнений с малым параметром при дифференциальном операторе в случае периодических условий по времени. Также доказана локальная единственность и асимптотическая устойчивость периодического решения.

Пятая глава посвящена исследованию краевой задачи для нелинейной параболической системы в двумерной области с периодическими условиями по времени, предложенную изначально как пространственно-временная модель урбоэкосистемы:

$$\begin{cases} \mu u_t - \mu D_u \Delta u = -\mu^{-1}(u(u-\alpha(x,y,t))(u-1)+uv), \\ \mu v_t - \mu D_v \Delta v = -\gamma v + \beta u, \ -L \le x,y \le L, t > 0; \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\mp L} = \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\mp L} = 0, \dfrac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=\mp L} = \dfrac{\partial v}{\partial y}\Big|_{y=\mp L} = 0. \end{cases}$$

Здесь $0 \le \mu \le 1$ – малый параметр, Δ – оператор Лапласа, $\alpha(x,y,t) > 0$ – функция, непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных, $\gamma > 0, \beta > 0$ – параметры системы, μD_u, μD_v – коэффициенты диффузии, u — функция интенсивности антропогенных факторов, а v — функция интенсивности природных факторов.

Для подобных задач доказана возможность существования решений с внутренним переходным слоем. В главе получено асимптотическое представление периодического решения с внутренним переходным слоем.

Заключение

Диссертационная работа посвящена теоретическому исследованию контрастных структур в нелинейных двухкомпонентных системах с сингулярным возмущением в нескольких возможных постановках:

- с внутренним переходным слоем и пограничным переходных слоем
- с сингулярным возмущением в дифференциальном операторе и в граничных условиях задачи.

Для исследования указанных задач применены метод пограничных функций и метод дифференциальных неравенств. Построена формальная асимптотика, проведено доказательство корректности построенной асимптотики, ее существования, локальной единственности и асимптотической устойчивости по Ляпунову.

Основные результаты работы.

- Для параболической задачи реакция-диффузия с условиями Неймана получены условия, при которых существуют решения с пограничным переходным слоем, позволяющие не требовать условия квазимонотонности. Таким образом расширен класс задач, для которых применимы стандартные методы асимптотической теории

– Разработан алгоритм построения асимптотических разложений для двухкомпонентных систем с разными степенями малого параметра с сингулярным возмущением в операторе и в граничных условиях, с внутренним и пограничным переходными слоями

– Для построенных решений доказаны теоремы существования, локальной единственности и асимптотической устойчивости по Ляпунову

– На примере реальных физических задач показана применимость разработанных алгоритмов

Результаты, предложенные в диссертационной работе, могут быть применены в качестве основы для исследования более сложных задач.

Публикации автора по теме диссертации
В рецензируемых журналах из баз данных Web of Science, SCOPUS

1. Существование и устойчивость стационарного решения с пограничным слоем системы уравнений реакция-диффузия с граничными условиями Неймана / Н. Н. Нефедов, Н. Н. Дерюгина // *Теоретическая и математическая физика*. — 2022. — Т. 212, № 1. — С. 83–94. (Импакт-фактор РИНЦ: 0,628). — (Translated version) Existence and stability of a stable stationary solution with a boundary layer for a system of reaction–diffusion equations with Neumann boundary conditions / N. N. Nefedov, N.N. Deryugina // *Theoretical and Mathematical Physics*. — 2022. — Vol. 212, no. 1. — P. 962– 971 (SJR: 0,324).

2. Существование периодического решения в виде двумерного фронта в системе параболических уравнений / А. А. Мельникова, Н. Н. Дерюгина // *Дифференциальные уравнения.* — 2020. — Т. 56, № 4. — С. 475–489. (Импакт-фактор РИНЦ: 1,052) — (Translated version) Existence of a periodic solution in the form of a two-dimensional front in a system of parabolic equations / A. A. Melnikova, N. N. Deryugina // *Differential Equations.* — 2020. — Vol. 56, no. 4. — P. 462–477. (SJR: 0,509)

3. Существование стационарного погранслойного решения в уравнении реакция—диффузия с сингулярным граничным условием Неймана / Н.Н. Нефедов, Н.Н. Дерюгина Н. Н. // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2020. — № 5. — С. 30–34. (Импакт-фактор РИНЦ: 0,619). — (Translated version) The existence of a boundary-layer stationary solution to a reaction–diffusion equation with singularly perturbed Neumann boundary condition / N. N. Nefedov, N.N. Deryugina // Moscow University Physics Bulletin. — 2020. — Vol. 75, no. 5. — P. 409–414. (SJR: 0,222)

4. Динамика автоволнового фронта в модели развития урбоэкосистем / А.А. Мельникова, Н.Н. Дерюгина // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2018. — №4. — С.48. (Импакт-фактор РИНЦ: 0,619). — (Translated version) The dynamics of the autowave front in a model of urban ecosystems / A. A. Melnikova, N.N. Derugina // Moscow University Physics Bulletin. — 2018. — Vol. 73, no. 3. — P. 284–292. (SJR: 0,222)

5. Автоволновая самоорганизация в неоднородных природно-антропогенных экосистемах / А. Э. Сидорова, Н. Т. Левашова, А. А. Мельникова и др. // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2016. — № 6. — С. 39–45. (Импакт-фактор РИНЦ: 0,619). — (Translated version) Autowave self-organization in heterogeneous natural–anthropogenic ecosystems / A. E. Sidorova, N. T. Levashova, A. A. Melnikova et al. // Moscow University Physics Bulletin. — 2016. — Vol. 71, no. 6. — P. 562–568. (SJR: 0,222)

В рецензируемых журналах из базы RSCI

6. Периодические изменения автоволнового фронта в двумерной системе параболических уравнений / А. А. Мельникова, Н.Н, Дерюгина // Моделирование и анализ информационных систем. — 2018. — Т. 25, № 1. — С. 112–124. Импакт-фактор РИНЦ: 0,394).

Публикации автора по теме диссертации
в материалах конференций

1. Periodic and stationary solutions of nonlinear reaction-diffusion problems with singularly perturbed boundary conditions / N. N. Nefedov, E. I. Nikulin, N N. Deryugina //. Second International Conference on Integrable Systems & Nonlinear Dynamics ISND–2020. — Yaroslavl: Filigran, 2020. — P. 82—83.

2. Boundary layer solution for an elliptic problem with a singular Neumann boundary condition / A. Melnikova, N. Deryugina // 2nd International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences. Belgorod-Russia, August 20-24, 2019. — Belgorod-Russia, 2019. — P. 18—19.
3. Система периодических параболических уравнений с малым параметром как модель сезонного изменения туристической активности/ Н. Н. Дерюгина // Материалы Международного молодежного научного форума ≪Ломоносов-2019≫ / под ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов. — Москва : Москва, 2019.
4. The Problem of the Front Motion to a Nonlinear System of Equations / A. A. Melnikova, N. N. Derugina // FDM'18: Seventh Conference on Finite Difference Methods: Theory and Applications. — Univesty of Rousse, Bulgaria, 2018. — P. 32—32.
5. Задача движения двумерного фронта для нелинейной системы параболических уравнений / А. А. Мельникова, Н. Н. Дерюгина // Международная конференция "Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения": сборник тезисов (г . Уфа, 12 – 16 марта 2018 г.) — БГПУ Уфа, 2018. — С. 54—54.
6. Задача о периодическом движении фронта: вопросы существования и асимптотики решения / А. А. Мельникова, Н. Н. Дерюгина // ЛОМОНОСОВСКИЕ ЧТЕНИЯ - 2018. СЕКЦИЯ ФИЗИКИ. Сборник тезисов докладов / под ред. Н.Н. Сысоева. — Физический факультет МГУ Москва, 2018. — С. 95—97.
7. Обоснование модели движения фронта в неоднородной среде для двухкомпонентной системы / А. А. Мельникова, Н. Н. Дерюгина // Тезисы докладов IX Всероссийской конференции "Актуальные проблемы прикладной математики и механики" с международным участием, посвященная памяти академика А.Ф. Сидорова (Абрау-Дюрсо, 3-8 сентября 2018 г.) — ИММ УрО РАН Екатеринбург, 2018. — С. 53—54.
8. Динамика движения автоволнового фронта в модели развития урбоэкосистемы / А. А. Мельникова, Н. Н. Дерюгина // Тихоновские чтения: научная конференция: тезисы докладов (23 октября - 27 октября 2017 г.) — МАКС Пресс Москва, 2017. — С. 73—73.
9. Механизмы автоволновой самоорганизации в природно-антропогенных экосистемах /А. Э. Сидорова [и др.] // Материалы XI международной научно-технической конференции "АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ХИМИИ" (Севастополь, 25-29 апреля 2016). Т. 1. — Севастопольский государственный университет г. Севастополь г. Севастополь, 2016. — С. 115—120.
10. Автоволновая самоорганизация в природно-антропогенных экосистемах / А. Э. Сидорова [и др.] // Труды школы-семинара "Физика и применение микроволн" ("Волны-2015"). — http://waves.phys.msu.ru, 2015. — С. 91.
11. Модель урбоэкосистем как сопряженных активных сред / Н. Н. Дерюгина [и др.] // Материалы тезисов V съезда биофизиков (Ростов-на-Дону, 4-10 октября 2015). Т. 2. — Издательство Федерального южного университета, 2015. — С. 355—355.
12. Стационарные решения в модели урбоэкосистемы / А. А. Мельникова, Н. Н. Дерюгина // Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам ≪Ломоносов-2015≫. Секция ≪Физика≫. Сборник тезисов. Т. 1. — Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, Физический факультет, 2015.
13. Применение контрастных структур в задачах биофизики / А. А. Мельникова, Н. Н. Дерюгина // Международный научный семинар "АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ". Сборник тезисов докладов. — Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, Физический факультет, 2014. — С. 143—145.
14. Контрастная структура типа всплеска в системе ФитцХью-Нагумо / А. А. Мельникова, Н. Н. Дерюгина // Материалы Международного молодежного научного форума ≪Ломоносов-2013≫ / Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, М.В. Чистякова.Т. 1 / под ред. А. Л. Брюханов [и др.]. — Москва : Москва, 2013.

Дерюгина Наталья Николаевна

Контрастные структуры в нелинейных двухкомпонентных системах с сингулярным возмущением и их применение в физическом моделировании

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук