

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА  
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи



**Резниченко Игорь Олегович**

**Улучшенные квадратурные формулы для вычисления потенциалов  
простого и двойного слоя для уравнений Лапласа и Гельмгольца**

Специальность 1.1.2 — дифференциальные уравнения и математическая  
физика

Диссертация

на соискание учёной степени кандидата  
физико-математических наук

Научный руководитель:  
кандидат физико-математических наук  
Валентина Викторовна Колыбасова

МОСКВА, 2023 г.

# Содержание

Введение	5
<b>1 Стационарная задача аэрогидродинамики — квадратурные формулы для потенциала простого слоя</b>	<b>22</b>
1.1 Улучшенная квадратурная формула для потенциала простого слоя	26
1.1.1 Постановка задачи	26
1.1.2 Канонический интеграл $\Theta_{nm}(x)$	31
1.1.3 Вычисление интеграла $J_1(H)$ при $\chi_1 > 0$	35
1.1.4 Вычисление интеграла $J_1(H)$ при $\chi_1 = 0$	39
1.1.5 Вычисление интеграла $J_2(H)$	40
1.1.6 Квадратурная формула для потенциала простого слоя	41
1.1.7 Стандартная квадратурная формула для потенциала простого слоя	41
1.1.8 Численные тесты	43
1.1.9 Выводы	46
1.1.10 Прямое значение потенциала простого слоя на поверхности	48
1.2 Квадратурная формула для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя	51
1.2.1 Постановка задачи	51
1.2.2 Вычисление канонического интеграла $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$ , когда точка $x$ лежит в области интегрирования	56
1.2.3 Вычисление канонического интеграла $T_{nm}(x)$ , когда точка $x$ не лежит в области интегрирования	59
1.2.4 Вычисление интегралов по $dV$	61
1.2.5 Вычисление интегралов по $dU$	63
1.2.6 Квадратурная формула для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя	74
1.2.7 Стандартная квадратурная формула для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя	75
1.2.8 Численные тесты	76
1.2.9 Выводы	78
1.3 Дополнение - вывод интеграла $I(H)$ , функции $\theta_{nm}(x)$	79
1.3.1 Вычисление интеграла $I(H)$ при $\chi_1 > 0$	81
1.3.2 Вычисление интеграла $I(H)$ при $\chi_1 = 0$	83

1.4	Применение квадратурных формул к численному решению внешней краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа в трёхмерной области . . . . .	85
1.4.1	Постановка задачи . . . . .	85
1.4.2	Применение улучшенной квадратурной формулы . . . . .	86
1.4.3	Применение стандартной квадратурной формулы . . . . .	88
1.4.4	Численные тесты . . . . .	91
1.4.5	Выводы . . . . .	94

**2 Задача определения стационарного теплового поля — квадратурные формулы для потенциала двойного слоя 97**

2.1	Квадратурная формула для потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью . . . . .	100
2.1.1	Постановка задачи . . . . .	100
2.1.2	Канонический интеграл $K_{nm}(x)$ . . . . .	103
2.1.3	Вычисление интегралов по $dV$ . . . . .	105
2.1.4	Вычисление интегралов по $dU$ . . . . .	108
2.1.5	Квадратурная формула для потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью . . . . .	115
2.1.6	Стандартная квадратурная формула для потенциала двойного слоя . . . . .	115
2.1.7	Численные тесты . . . . .	116
2.1.8	Выводы . . . . .	119
2.2	Квадратурная формула для прямого значения потенциала двойного слоя . . . . .	120
2.2.1	Постановка задачи . . . . .	121
2.2.2	Вычисление канонического интеграла, когда точка $x$ лежит в области интегрирования . . . . .	124
2.2.3	Вычисление канонического интеграла, когда точка $x$ не лежит в области интегрирования . . . . .	126
2.2.4	Квадратурная формула для прямого значения потенциала двойного слоя . . . . .	128
2.2.5	Стандартная квадратурная формула для прямого значения потенциала двойного слоя . . . . .	129
2.2.6	Численные тесты . . . . .	129
2.2.7	Выводы . . . . .	131
2.3	Квадратурная формула для потенциала двойного слоя с дифференцируемой плотностью . . . . .	133

2.3.1	Постановка задачи . . . . .	133
2.3.2	Вычисление интеграла . . . . .	136
2.3.3	Квадратурная формула для потенциала двойного слоя с дифференцируемой плотностью . . . . .	139
2.3.4	Квадратурная формула, основанная на свойствах телесного угла . . . . .	139
2.3.5	Численные тесты для диска . . . . .	140
2.3.6	Численные тесты для сферы . . . . .	144
2.3.7	Выводы . . . . .	146
2.4	Применение квадратурных формул к численному решению внутренней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа в трёхмерной области . . . . .	148
2.4.1	Постановка задачи . . . . .	148
2.4.2	Применение улучшенной квадратурной формулы . . . . .	149
2.4.3	Применение стандартной квадратурной формулы . . . . .	151
2.4.4	Применение формулы телесного угла . . . . .	153
2.4.5	Численные тесты . . . . .	155
2.4.6	Выводы . . . . .	159
	<b>Заключение</b>	<b>161</b>
	<b>Литература</b>	<b>163</b>

## Введение

Диссертационная работа посвящена одному из разделов математической физики — методу потенциалов. В первой главе решается задача об обтекании твёрдого тела потенциальным потоком однородной несжимаемой жидкости в трёхмерном случае. Вторая глава посвящена пространственной задаче определения стационарного теплового поля. Для решения этих задач в диссертационной работе автором получены новые квадратурные формулы для потенциалов простого и двойного слоя в трёхмерных областях для уравнений Лапласа и Гельмгольца.

Использование потенциалов в математической литературе называют также методом граничных интегральных уравнений. У этого метода можно выделить две основные области применения: доказательство разрешимости краевых задач и разработка алгоритмов их численного решения. Большое количество задач математической физики сводится к краевым задачам для уравнений Лапласа и Гельмгольца: обтекание препятствий потенциальным течением, распределение стационарного теплового поля, расчёт электростатического и гравитационного поля поверхностей сложной формы, распространение акустических и электромагнитных волн [1].

Стандартные квадратурные формулы, используемые в прикладных расчетах, не дают равномерной аппроксимации и равномерной сходимости потенциалов вблизи поверхности  $\Gamma$ , на которой задана плотность. При этом погрешность стандартных формул стремится к бесконечности, когда точка, в которой вычисляется квадратурная формула, приближается к определенным точкам на поверхности  $\Gamma$  [2, Глава 2]. В задаче стационарного обтекания, например, это означает, что при использовании стандартных квадратурных формул для потенциалов нельзя получить информацию о поведении поля скоростей в некотором слое вблизи поверхности. Следовательно, стандартные квадратурные формулы не сохраняют важнейшее свойство потенциалов, а именно их ограниченность и непрерывность вблизи поверхности. В диссертационной работе автором получены новые квадратурные формулы, сохраняющие указанное свойство этих потенциалов.

Потенциалы простого и двойного слоя используются при решении краевых задач математической физики методом граничных интегральных уравнений, который в математической литературе называют также методом потенциалов. У этого метода можно выделить две основные области применения: доказательство разрешимости краевых задач и разработка алгоритмов их численного решения. При решении внешних краевых задач в неограниченных областях этот метод является особенно эффективным, так как позволяет перейти от исходной трёхмерной задачи к двумерному интегральному уравнению на ограниченной

поверхности. Граничное интегральное уравнение является, по сути, формулировкой поставленной краевой задачи, в теории ведущей к её точному решению. При численной реализации метода погрешность появляется только из-за дискретизации интегрального уравнения и потенциалов, поскольку обычно невозможно аналитически выполнить интегрирование. Если метод численного интегрирования достаточно точный, обладает такими свойствами как равномерная сходимости и равномерная аппроксимация, то погрешности численного решения можно значительно уменьшить без увеличения времени вычислений. Численная реализация метода потенциалов с указанными свойствами создана автором в диссертационной работе.

### **Актуальность темы и степень её разработанности**

Теория потенциала и связанные с ней вопросы дифференциальных уравнений в частных производных уже в XIX веке были в центре внимания математиков. Основы классической теории потенциала заложены А. М. Ляпуновым [3]. В книге Гюнтера [4] даётся последовательное изложение классической теории гармонических поверхностных потенциалов в пространстве с плотностями, заданными на поверхностях Ляпунова. Изучаются свойства потенциалов простого и двойного слоя, а также ньютонова потенциала и их производных.

В книге [5] большое внимание уделяется исследованию теории операторов, порождённых задачами математической физики. Рассмотрены уравнения в банаховых пространствах, элементы теории сингулярных интегралов и сингулярных интегральных уравнений. Приводится геометрическая интерпретация потенциала двойного слоя на основе понятия телесного угла.

Потенциалы простого и двойного слоя используются в книге [6] для доказательства существования решений краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца в односвязных областях. В частности, для краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца показан процесс перехода от исходной задачи к интегральному уравнению Фредгольма 2 рода. Потенциалы простого, двойного слоя, а также ньютонов потенциал в этой книге вводятся как свёртки обобщённой функции плотности  $\mu(x)$  с соответствующей функцией от  $|x|$  в рамках изложения теории обобщённых функций в применении к задачам математической физики.

В книге [1] теория потенциала является базой для численного решения краевых задач для эллиптических уравнений. Полученные интегральные уравнения Фредгольма 2 рода затем решаются численно методом квадратур [7]. Также выводится асимптотическое выражение объёмного потенциала, рассматриваются функции влияния точечных источников, тепловые потенциалы простого и двойного слоя для решения уравнения теплопроводности. Применение потенциалов

к решению краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца рассмотрены в сборнике [8].

Обобщение классической теории потенциалов для эллиптических уравнений с переменными коэффициентами сделано в [9]. Для систем двумерных эллиптических уравнений обобщение сделано в [10]. В [11] представлен подробный обзор методов граничных интегральных уравнений для различных задач общей теории дифференциальных уравнений в частных производных произвольной размерности. Подробно рассмотрены граничные интегральные уравнения на кусочно-гладких поверхностях, полученные с помощью потенциалов простого и двойного слоя. Показано расширение границ применимости метода граничных интегральных уравнений за счёт включения новых классов краевых и начально-краевых задач математической физики, таких как задача с косою производной для уравнения Лапласа.

Методы теории потенциала используются для доказательства разрешимости задач математической физики и при разработке численных методов их решения. Потенциалы позволяют перейти от исходной краевой задачи к интегральному уравнению по границе области. Тем самым размерность исходной задачи уменьшается на единицу. Особенно данное преимущество заметно при решении внешних краевых задач для скалярного и векторного уравнений Гельмгольца, к которым во многих случаях сводится система уравнений Максвелла для установившихся колебаний [12]. В то время как авторы [12] говорят о том, что в случае прямой задачи теории дифракции теоретические основы метода потенциалов разработаны, существенные трудности остаются при численной реализации метода потенциалов. Таким образом, разработка улучшенных алгоритмов приближённого вычисления потенциалов является актуальной задачей математической физики.

В двумерном случае решение уравнения Лапласа можно представить через комплексные функции, что позволяет перейти от исходной краевой задачи к краевой задаче для аналитических функций. С помощью интегралов типа Коши задачи сводятся к граничным интегральным уравнениям [13, 14, 15]. Следует отметить, что применение этого метода приводит к сингулярным интегральным уравнениям. Разрешимость сингулярных уравнений и условия гладкости для плотности потенциалов изучены в [14]. Интегралы типа потенциала, сингулярные интегралы, интегралы типа Коши и потенциалы двойного слоя рассмотрены в пространствах Гёльдера с весом в монографиях [14, 15, 16].

При моделировании физического процесса основные усилия обычно направлены на решение дифференциальных уравнений, характеризующих физическую систему в конкретной области, которая может иметь очень сложную форму. На-

личие сложных границ на практике не позволяет построить явное решение задачи, поэтому используются численные методы, такие как метод разностных схем и конечных элементов [17]. В методе разностных схем дифференциальные операторы аппроксимируют более простыми алгебраическими (разностными) операторами, действующими в последовательности узлов, находящихся в интересующей области пространства. Метод конечных элементов состоит в том, чтобы искомое решение в рассматриваемой области приблизить некоторой суммой элементов, не являющихся бесконечно малыми (конечными элементами), которая аппроксимирует моделируемую систему. Однако существует широкий круг задач, в которых при использовании метода конечных элементов возникают трудности. Необходимость дискретизации всей интересующей области может приводить к очень большому числу конечных элементов. Особенно это заметно во внешних трёхмерных задачах, например в задачах рассеяния [12]. Кроме того, такая дискретизация может приводить к не обусловленным физически разрывам значений функций между смежными элементами [18].

На первый взгляд, конечно-разностные методы привлекательны тем, что позволяют применять их практически к любой системе дифференциальных уравнений. Однако учёт граничных условий нередко является громоздкой или затратной для машинного времени операцией. При этом точность конечно-разностных методов напрямую зависит от сгущения сетки, определяющей узловые точки. Получающиеся системы очень высокого порядка в некоторых задачах могут оказаться слишком большими даже для современных компьютеров [19].

Объединением идей метода конечных разностей и метода потенциалов является метод разностных потенциалов (МРП) [20]. МРП позволяет численно решать краевые задачи, используя вместо граничных интегральных уравнений т.н. граничные псевдо-дифференциальные уравнения.

В работе [21] рассмотрена внешняя задача Неймана в рамках численного решения задачи обтекания трёхмерных тел. На основе идей К.И. Бабенко о ненасыщаемых алгоритмах [22] было построено решение интегрального уравнения для потенциала простого слоя в задаче обтекания эллипсоидов вращения большого удлинения. Однако, не во всех задачах можно воспользоваться пространственной симметрией.

В монографии [23] и в [24] изучаются дифракционные явления, исследование которых сводится к скалярным двумерным задачам. В общем случае решается задача дифракции электромагнитного поля на периодической структуре из цилиндров произвольного сечения.

В монографии [25] решается задача дифракции в общем случае — краевая задача для уравнений Максвелла. Один из методов решения — сведение к объ-



ёмному сингулярному интегральному уравнению. Рассматривается решение векторного уравнения Гельмгольца, а для вспомогательных функций - скалярного уравнения Гельмгольца.

В [26] рассмотрены двумерные (плоские и осесимметричные) краевые задачи для уравнения Лапласа в области с границей в виде замкнутого гладкого контура. Решение этих двумерных задач сводится к интегральным уравнениям, для численного решения которых предложены квадратурные формулы, обеспечивающие быструю сходимость решений. В [27] предложен численный метод решения сингулярных интегральных уравнений, возникающих при сведении краевых задач гидродинамики к интегральным уравнениям с помощью потенциалов. Периодические интегральные уравнения, возникающие при решении двумерных краевых задач, предлагается численно решать в [28] через разложение функций в ряды Фурье. В случае бесконечно гладкой границы и правой части в интегральном уравнении метод даёт экспоненциальную сходимость в нормах пространств Соболева. Для двумерных задач примечательна работа [29], где для численного решения уравнения Гельмгольца в двумерной ограниченной односвязной области используется барицентрический метод. Тем не менее далеко не все результаты, полученные для решения двумерных задач, то есть для одномерного граничного интегрального уравнения, применимы в трёхмерном случае.

Методом граничных элементов (МГЭ) называют совокупность универсальных численных методов решения краевых задач [30]. Используя потенциалы, исходную краевую задачу для дифференциального уравнения сводят к интегральным уравнениям на границе области. Главным преимуществом МГЭ является возможность дискретизации лишь границы исследуемой области для численного решения задачи. Тем самым размерность задачи, а следовательно и порядок системы алгебраических уравнений уменьшается на единицу. Этим обуславливается самое очевидное отличие данного метода от хорошо известного метода конечных разностей (МКР) и метода конечных элементов (МКЭ), где зачастую приходится дискретизировать всю рассматриваемую область.

Во внешних краевых задачах, МГЭ автоматически удовлетворяет условиям на бесконечности в отличие от МКР и МКЭ, что уменьшает время вычислений. Уменьшение размерности на единицу в некоторых задачах математической физики оказывает решающее влияние на выбор данного метода решения [12].

Стандартные квадратурные формулы, используемые в прикладных расчетах для вычисления потенциала простого слоя для уравнений Лапласа и Гельмгольца, не обеспечивают равномерной аппроксимации и равномерной сходимости потенциала вблизи поверхности  $\Gamma$ , на которой задана плотность потенциала, и даже стремятся к бесконечности, когда точка, в которой вычисляется квадратур-

ная формула, стремится к определенным точкам на поверхности  $\Gamma$ , в то время как сам потенциал непрерывен во всем пространстве, в том числе во всех точках на поверхности  $\Gamma$ . Тем самым, не выполняется свойство ограниченности и непрерывности потенциала на поверхности  $\Gamma$  [2, Глава 2].

В двумерном случае улучшенная квадратурная формула для гармонического потенциала простого слоя с плотностью, заданной на разомкнутых кривых, предложена в [31, 32]. Эта формула может применяться при нахождении численных решений различных краевых задач для уравнений Лапласа вне разрезов и разомкнутых кривых на плоскости, а именно: для граничного условия с наклонной производной [33], для граничных условий Дирихле и Неймана [34, 35, 36, 37], для смешанного граничного условия [38], а также в краевых задачах с уравнением Гельмгольца [39, 40, 41, 42, 43].

В трёхмерном случае потенциал простого слоя, заданный на достаточно гладкой поверхности, можно вычислить, приближая эту поверхность поверхностью многогранника и вычисляя потенциал с плотностью, заданной на поверхности многогранника с учетом того, что каждая грань — кусочек некоторой плоскости [2]. При этом используются программы, которые строят поверхность многогранника. Однако замена гладкой поверхности на поверхность многогранника имеет ряд недостатков. Во-первых, вблизи рёбер и вершин многогранника производные потенциала простого слоя с плотностью, заданной на поверхности многогранника, могут иметь особенности, которых нет у потенциала с плотностью, заданной на гладкой поверхности, что снижает точность вычислений. Во-вторых, такой подход не может дать порядок аппроксимации выше единицы даже в случае постоянной плотности потенциала, так как основан на линеаризации, то есть на замене поверхности кусочками плоскости.

Гармонический потенциал двойного слоя используется при решении краевых задач для уравнения Лапласа методом интегральных уравнений. Такие задачи возникают в различных областях математической физики, например, в теории обтекания препятствий потоком идеальной жидкости, в электростатике, в задачах стационарной теплопроводности, в теории фильтрации и т.д. [30].

Потенциал двойного слоя используется также при решении краевых задач для уравнения Гельмгольца методом граничных интегральных уравнений. Такие задачи возникают в различных областях математической физики, например, в теории рассеяния акустических и электромагнитных волн на препятствиях, в геофизической гидродинамике, при изучении дифракции упругих волн [44], в теории тепловых волн в термодинамике и т.д. [30]. Поверхностные потенциалы применяются при решении уравнения Стокса методом граничных интегральных уравнений [45, 46, 47].

Численное решение краевых задач с помощью потенциала двойного слоя обсуждалось в [48], [49], [50] и состоит из двух этапов. На первом этапе, численно решая граничное интегральное уравнение, находят плотность потенциала. На втором этапе, подставляя численное значение плотности в квадратурную формулу, находят решение краевой задачи в любой точке области. Ввиду того, что стандартные квадратурные формулы для потенциала двойного слоя не дают равномерной сходимости и равномерной аппроксимации, при их использовании для повышения точности приходится либо уменьшать шаг сетки, либо проводить дополнительные построения вблизи границы, что увеличивает стоимость вычислений. Недостаточная точность вычисления потенциалов вблизи поверхности  $\Gamma$  с помощью стандартных квадратурных формул называется эффектом пограничного слоя [51, 52, 53, 54, 55, 56]. В [52] обсуждаются ограничения использования интерполяционного подхода к подынтегральным выражениям поверхностных потенциалов. Таким образом, задача по получению улучшенных квадратурных формул, обеспечивающих повышенную точность вблизи границы, является актуальной задачей математической физики.

В [57] в двумерном случае для замкнутой кривой класса  $C^5$  при кусочно-постоянной интерполяции плотности потенциала доказано, что при стремлении к границе рассматриваемой области вычисление потенциала двойного слоя с помощью простой квадратурной формулы Гаусса или квадратурных формул Ньютона-Котеса не обеспечивает равномерной сходимости и равномерной аппроксимаций потенциала двойного слоя вблизи границы.

Необходимость точного вычисления потенциалов вблизи границы области возникает при решении задач в тонкостенных и многослойных конструкциях, тонких покрытиях, пленках [58, 59, 60, 61], на концах трещин [62]. Сравнение сложностей при приближённом вычислении поверхностных потенциалов для уравнения Лапласа и Стокса вблизи поверхности рассмотрены в [63].

Пусть вычисление некоторого потенциала или его производной осуществляется в точке  $x$ . В методе граничных интегральных уравнений граница интересующей области  $\Gamma$  разбивается на ряд граничных элементов (ГЭ)  $\Gamma_i$ , в каждом из которых осуществляется некоторая аппроксимация подынтегрального выражения, после чего производится интегрирование. Ядра интегральных операторов имеют особенности в точках  $y \in \Gamma$ , поэтому выделяют несколько видов ГЭ  $\Gamma_i$ , где  $\Gamma = \cup_i \Gamma_i$ . Сингулярные ГЭ соответствуют случаю, когда  $x \in \Gamma_i$ , несингулярные ГЭ — когда точка  $x \notin \Gamma_i$  и находится далеко от  $\Gamma_i$ . Используют понятие почти сингулярных ГЭ [53]. В этом случае  $x \notin \Gamma_i$ , но расстояние от точки  $x$  мало по сравнению с  $\Gamma_i$ . Для вычисления интегралов на сингулярных и почти сингулярных граничных элементах требуются специальные методы.

Метод граничных элементов (МГЭ) имеет явное преимущество перед МКЭ при анализе тонкостенных структурных задач, поскольку требуется дискретизация только поверхности конструкции на граничные элементы и не налагается никаких упрощающих допущений [64, 65]. Тем не менее, даже для МГЭ в случае вычислений очень близко к поверхности необходимо с осторожностью использовать стандартные квадратурные формулы. Обзор применения методов граничных элементов для тонких слоёв содержится в [66, 57].

В [67] и [65] рассмотрены особенности применения метода граничных элементов в случае очень тонких пограничных слоёв. Приводятся численные примеры с разным выбором многоточечного (от 4 до 16 точек) шаблона для формулы Гаусса в зависимости от расстояния до точки сингулярности (метод адаптивного деления граничной области). Для двухмерных задач метод рассмотрен в [68]. В работах [53, 54, 58] отмечается, что методы адаптивного деления не обеспечивают достаточную точность или требуют больших затрат машинного времени при очень малых расстояниях от точки  $x$  до поверхности.

Существуют методы приближённого вычисления почти сингулярных интегралов, основанные на нелинейном преобразовании переменной интегрирования: экспоненциальные преобразования [69, 70], *sinh*-преобразования [71, 54]. Данные подходы не обеспечивают равномерной аппроксимации, поскольку справедливы для расстояний от точки вычислений до поверхности, превышающих некоторую фиксированную величину  $R_0$ , определяемую численно.

В работах [58, 61, 70] считается, что подынтегральные функции, возникающие при аппроксимации производных потенциала простого слоя для двумерного уравнения Лапласа, имеют вид:  $\mu(y)(\rho^2 + d^2)^{-1}$ , где  $\rho(x, y)$  и  $d(x, y)$  — функции специального вида, а  $\mu(t)$  — медленно меняющаяся функция. Для потенциала двойного слоя в [57] с целью аппроксимации рассматривается функция вида:  $\mu_1(y)(\rho_1^2 + d_1^2)^{-1} + \mu_2(y)(\rho_2^2 + d_2^2)^{-1}$ . Для кривых на плоскости класса  $C^5$  с помощью аналитического интегрирования по переменной  $\rho$  вычисляются интегралы на граничном элементе, если величины  $d$  и  $\rho$  не превосходят трети радиуса круга Ляпунова, а остальные интегралы вычисляются с помощью простой квадратурной формулы Гаусса. Доказывается, что такие аппроксимации потенциала двойного слоя устойчиво сходятся с кубической скоростью вблизи и на самой границе класса  $C^5$ .

Другой метод вычисления поверхностных потенциалов вблизи точек сингулярности называется квадратурным разложением (quadrature by expansion - QBX) [72]. В этом подходе для вычисления потенциалов в точке поверхности либо вблизи поверхности выбирается вспомогательная точка вблизи поверхности, в которой ядро потенциала разлагается в ряд по полиномам Лежандра (сфе-

рическим функциям). Конечная сумма ряда при этом будет гладкой. Однако, для каждой точки, где вычисляется потенциал, надо выбирать свою вспомогательную точку и вычислять разложение по полиномам Лежандра заново. Если вычисления необходимо провести в большом числе точек, метод выглядит очень затратным. Проще использовать стандартную квадратурную формулу с малым шагом, так как она не использует локальные координаты. Сходимость метода QBX исследовалась в [73]. Различные алгоритмы для его реализации даны в [74]. Погрешность данного метода сильно зависит от гладкости разложения и сходимости получаемого выражения при стремлении точки разложения к исходной. Строгое обоснование применения данного метода очень близко к поверхности пока рассмотрено только для двумерных потенциалов простого и двойного слоя в [75]. Тестирования подобного подхода на задаче высокочастотной дифракции с характерным размером рассеивателя порядка 700 длин волн вблизи поверхности приведено в [76].

В работе [77] обсуждается необходимость перехода от стандартных формул численного интегрирования к более совершенным при вычислении поверхностных потенциалов вблизи поверхности, на которой задаётся плотность потенциала. Проводятся комплексные оценки для двух методов — квадратурной формулы Гаусса-Лежандра и формулы трапеции для гладких поверхностей в трёхмерном пространстве.

В работе [78] предложен альтернативный подход к решению классической двумерной задачи Дирихле при помощи логарифмического потенциала простого слоя. Вместо сведения исходной краевой задачи к интегральному уравнению Фредгольма 2 рода, используется уравнение 1 рода с логарифмическим ядром [79]. Для решения применяется формула трапеций. Как отмечают авторы, погрешность данного метода сильно возрастает при приближении к границе поверхности. Для трёхмерной задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца похожий процесс строится в [80], где показано, что можно приближённо решать такие уравнения без привычной в таких задачах процедуры регуляризации [81]. Решения получаемых интегральных уравнений при условии их существования ищутся в виде линейных комбинаций решений вспомогательных корректно разрешимых уравнений с близкими волновыми числами.

В [51] предложен оригинальный метод вычисления потенциала простого и двойного слоя, основанный на характерной замене переменной в сферических координатах с последовательным интегрированием по зенитному и азимутальному углу. Потенциалы вычисляются в локальных координатах в точке  $x$ , лежащей вблизи поверхности на расстоянии  $\epsilon$  от основания перпендикуляра  $y^*$ , опущенного из  $x$  на поверхность. Рассматривая асимптотическое разложение потенциала

для малых  $\epsilon$ , авторы сводят задачу к вычислению вспомогательных интегралов в точке  $y^*$ . Вычисление возникающих интегралов происходит по формуле трапеций и по квадратурной формуле Гаусса-Лежандра. Методы, использующие локальные координаты, нацелены на вычисление потенциала в одной точке, поэтому они не дают равномерной аппроксимации вблизи поверхности. В [82] предлагаются различные варианты замены ядра почти сингулярных операторов потенциала простого и двойного слоя (линейные функции, приближение на основе фундаментальных решений, функций Грина, двух квадратичных функций). В [83] значение потенциала в точке, лежащей вблизи поверхности, выражается через разложение Тейлора по нормальным производным с центром в основании перпендикуляра, опущенного из точки на поверхность. Сам потенциал и его нормальная производная в основании перпендикуляра считаются известными. Старшие нормальные производные можно найти, решая вспомогательные интегральные уравнения. На основе численных тестов обсуждается применимость данного подхода.

В методе коллокаций приближенное решение принадлежит линейному конечномерному пространству функций. Неизвестные координаты разложения по базису определяются из уравнений коллокаций и краевых условий задачи. Уравнения коллокаций означают, что приближенное решение удовлетворяет исходному граничному условию в конечном числе точек. В [84] проведено обоснование метода коллокаций для граничного интегрального уравнения внешней задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца. В [85] в общем виде строится формула для производной потенциала двойного слоя для уравнения Гельмгольца. Аналогичные исследования для тепловых потенциалов проведены в [86, 87].

В статье [88] была получена квадратурная формула для потенциала простого слоя, сохраняющая свойство равномерной сходимости и равномерной аппроксимации при переходе через поверхность  $\Gamma$ . Результат этой работы был усилен автором в смысле порядка сходимости и аппроксимации в разделе 1.1 диссертации. Подход из [88] был применен для получения квадратурной формулы для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя в разделе 1.2 диссертации, для потенциала двойного слоя в разделе 2.1, для прямого значения потенциала двойного слоя в разделе 2.2. Все необходимые интегралы при выводе квадратурных формул вычислены аналитически. В [89] был создан новый метод аналитического интегрирования иррациональности определённого вида.

### **Цели работы**

В работе [88] была построена квадратурная формула для потенциала простого слоя, обеспечивающая равномерную сходимость и равномерную аппроксимацию,

а также сохраняющая свойство непрерывности этого потенциала при переходе через поверхность, на которой задана его плотность. Цель диссертации состоит в расширении этого метода и создании новых квадратурных формул для поверхностных потенциалов, обеспечивающих повышенную точность, в том числе вблизи поверхности, где задана плотность потенциала, без увеличения времени вычислений. Качественные квадратурные формулы нужны для численного решения краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца методом граничных интегральных уравнений.

К целям работы относится усиление результатов из [88], а именно повышение порядка равномерной сходимости и равномерной аппроксимации квадратурной формулы для потенциала простого слоя, получение новой формулы с повышенной точностью. Целью работы было также развитие этого метода и получение других квадратурных формул повышенной точности для поверхностных потенциалов, создающих замкнутую инфраструктуру для более точного численного решения краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца методом потенциалов.

Указанные цели достигаются путём решения следующих **задач**:

- Получение новой квадратурной формулы для вычисления потенциала простого слоя в любой точке вне поверхности, где задана плотность потенциала, а также на самой поверхности.
- Построение квадратурной формулы для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя. Построение квадратурных формул для потенциала двойного слоя и его прямого значения.
- Применение полученных автором в диссертации квадратурных формул для решения краевых задач, возникающих при изучении процессов обтекания и определении стационарного теплового поля, в том числе вблизи поверхности, где задано граничное условие.

### **Положения, выносимые на защиту**

- 1) Автором решена проблема вычисления потенциала простого слоя вблизи поверхности, на которой задана плотность потенциала. Для этого в диссертации построена новая квадратурная формула для потенциала простого слоя и доказано, что она обеспечивает равномерную сходимость и равномерную аппроксимацию потенциала вне указанной поверхности, что также подтверждается численными тестами. Полученная квадратурная формула

сохраняет свойство непрерывности потенциала при переходе через указанную поверхность. Разработана квадратурная формула также для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя, обладающая повышенной точностью.

- 2) Автором решена проблема вычисления потенциала двойного слоя вблизи поверхности, на которой задана плотность потенциала. Для этого в работе построена квадратурная формула для потенциала двойного слоя, показывающая значительно меньшую погрешность вычислений вблизи поверхности, на которой задана плотность потенциала, чем стандартные квадратурные формулы, что подтверждается численными тестами. Получена квадратурная формула для прямого значения потенциала двойного слоя.
- 3) Представленные в работе решения краевых задач для уравнения Лапласа (внешней задачи Неймана и внутренней задачи Дирихле) при помощи полученных квадратурных формул показывают эффективность разработанного метода для решения стационарной задачи обтекания твёрдого тела потенциальным потоком идеальной жидкости, а также для решения задачи по определению стационарного теплового поля.

### **Научная новизна**

В диссертации автором разработаны новые квадратурные формулы для поверхностных потенциалов для уравнений Лапласа и Гельмгольца. В первой главе при решении задачи обтекания твёрдого тела потенциальным потоком идеальной жидкости полученные формулы позволяют определять потенциал скорости с равномерной сходимостью и равномерной аппроксимацией. Используя результаты, полученные во второй главе, решается задача определения стационарного теплового поля на расстояниях порядка размера аппроксимации и менее. В работе развит новый метод приближения поверхностных потенциалов, позволяющий в случае малых расстояний до поверхности (где задана плотность потенциала) сохранять важнейшие свойства потенциала простого слоя и повысить точность вычислений потенциала двойного слоя. Все результаты диссертации являются новыми.

### **Методы исследования.**

В рамках исследования применяются подходы математической физики, математического анализа, методов вычислительной математики и аналитического интегрирования. Автором были получены явные аналитические выражения для возникающих интегралов. Для реализации численных тестов с использованием составленных квадратурных формул были написаны вычислительные программы для компьютера.



## **Теоретическая и практическая значимость работы**

Получение новых, более точных квадратурных формул для приближённого вычисления потенциалов простого и двойного слоя, а также их прямых значений, имеет большое значение для метода граничных интегральных уравнений. Одно из главных преимуществ этого метода состоит в понижении размерности решаемой задачи на единицу. В определённых случаях это оказывает решающее влияние на стоимость вычислений и, как следствие, на оправданность применяемого метода. Таким образом, получение улучшенных квадратурных формул, обеспечивающих повышенную точность вблизи границы, открывает новые возможности применения метода граничных интегральных уравнений.

Эффективность разработанных в диссертации квадратурных формул очевидна при сравнении результатов вычислений с расчётами, полученными с помощью других приближённых формул для потенциалов простого и двойного слоя. Предложенный в диссертации подход имеет преимущества перед стандартными квадратурными формулами, используемыми в прикладных расчётах, поскольку обеспечивает повышенную точность при том же времени вычислений. Это расширяет сферу применения метода потенциалов к численному решению краевых задач математической физики.

**Личный вклад автора** состоит в создании новых квадратурных формул для потенциалов простого и двойного слоя с повышенной точностью. Автором были получены явные аналитические выражения для возникающих при этом интегралов. Для реализации численных тестов с использованием составленных квадратурных формул были написаны вычислительные программы для компьютера.

### **Достоверность результатов**

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгими математическими выкладками и доказательствами утверждений, апробацией на конференциях и семинарах, а также публикациями в рецензируемых журналах. Результаты других авторов, упомянутые в тексте диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

В численных тестах известные точные значения потенциалов сравнивались с приближёнными значениями, вычисленными по новым квадратурным формулам. Для точных значений потенциалов были использованы явные выражения для потенциалов простого и двойного слоя, получаемые аналитически. Как показано в численных тестах, значения потенциалов, полученные с помощью новых квадратурных формул, хорошо аппроксимируют точные выражения для этих потенциалов. При разработке вычислительных программ для реализации численных тестов использовалось современное программное обеспечение.

## **Соответствие диссертации паспорту научной специальности**

Тема, объект и предмет исследования диссертации соответствуют паспорту специальности 1.1.2 — дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки) по следующим пунктам:

1. Общая теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.
2. Начальные, краевые и смешанные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.
17. Математические проблемы механики сплошной среды.
18. Математические проблемы оптики и электродинамики.
20. Математические проблемы термодинамики, кинетики и статистической физики.

### **Апробация работы**

Предложенные методы и полученные результаты прошли апробацию и обсуждение на международных и всероссийских конференциях и семинарах:

Научная конференция "Вычислительная математика и ее приложения", посвященная памяти профессора Александра Александровича Абрамова, МФТИ, Долгопрудный, 9 ноября 2019.

Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов-2020", МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 10-27 ноября 2020;

VI Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием "Современные проблемы физико-математических наук", ФГБОУ ВО "Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева", Орёл, 4-5 декабря 2020;

Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов-2021", МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 12-23 апреля 2021;

4th international Moscow conference "Computer Algebra" CCAS 2021, Москва, 28-29 июня 2021;

13th International ISAAC Congress, Ghent, Belgium, Бельгия, 3-6 августа 2021;

VII Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием "Современные проблемы физико-математических наук", ФГБОУ ВО "Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева", Орёл, 18-21 ноября 2021;

Научный семинар кафедры математики физического факультета МГУ им М.В. Ломоносова, Москва, 2022.

Научный семинар им. К.И. Бабенко, ИПМ им М.В. Келдыша, Москва, 2022;

Научный семинар "Обратные задачи математической физики" под руководством А.Б. Бакушинского, А.В. Тихонравова, А.Г. Яголы, МГУ им М.В. Ломо-

носова, Москва, 2022.

### Публикации

Основные результаты по теме диссертации изложены в 10 работах автора, 6 из которых индексируются в Web of Science и Scopus.

**Научные статьи, опубликованные в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по направлению 1.1.2 — дифференциальные уравнения и математическая физика**

- 1) Резниченко И.О. О квадратурной формуле для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя в трёхмерном случае / Резниченко И.О., Крутицкий П.А. // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. № 98. С. 1 - 31 (РИНЦ 0.512) 1.9 п.л. / Соавтору принадлежит постановка задачи и проверка результатов. Остальные результаты статьи получены Резниченко И.О.
- 2) Резниченко И.О. Квадратурная формула для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя / Крутицкий П.А., Резниченко И.О., Колыбасова В В. // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56, № 9. С. 1270 - 1288 (WoS 0.784, Scopus 0.509, РИНЦ 8.043) 1.1 п.л. / Соавторам принадлежит постановка задачи и проверка результатов. Остальные результаты статьи получены Резниченко И.О.
- 3) Резниченко И. О. О вычислении одного интеграла с квадратичной иррациональностью / Резниченко И. О., Крутицкий П. А. // Современные проблемы физико-математических наук. Материалы IV Международной научно-практической конференции, 4-5 декабря 2020 года, ОГУ им. И.С. Тургенева Орел. 2020. С. 92-99. (РИНЦ) 0.4 п.л. / Соавтору принадлежит постановка задачи и проверка результатов. Остальные результаты статьи получены Резниченко И.О.
- 4) Reznichenko I. O. Quadrature Formula for the Double Layer Potential / I. O. Reznichenko, P. A. Krutitskii // Computer Algebra, 28 - 29 июня 2021 года, ООО "МАКС Пресс". 2021. С. 96 - 99. (РИНЦ) 0.2 п.л.
- 5) Резниченко И.О. Квадратурная формула для гармонического потенциала двойного слоя / Крутицкий П.А., Резниченко И.О. // Дифференциальные уравнения. 2021. Т.57, № 7. С. 932 - 950 (WoS 0.784, Scopus 0.509, РИНЦ 8.043) 1.1 п.л. / Соавтору принадлежит постановка задачи и проверка результатов. Остальные результаты статьи получены Резниченко И.О.

- 6) Резниченко И.О. О вычислении прямого значения потенциала двойного слоя в трёхмерном случае // Современные проблемы физико-математических наук: Материалы VII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, Орел, 18-21 ноября 2021 года ОГУ им. И.С. Тургенева Орел. 2021. С. 104 - 113. (РИНЦ) 0.6 п.л.
- 7) Резниченко И.О. Квадратурная формула для прямого значения потенциала двойного слоя / Резниченко И.О., Крутицкий П.А. // Программирование. 2022. № 3. С. 92 - 100 (Scopus 0.37, РИНЦ 1.012) 0.5 п.л. / Соавтору принадлежит постановка задачи и проверка результатов. Остальные результаты статьи получены Резниченко И.О.
- 8) Резниченко И.О. Квадратурная формула для потенциала двойного слоя в случае уравнения Гельмгольца / Крутицкий П.А., Резниченко И.О. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. Т. 62, № 3. С. 421 - 436 (WoS 0.769, Scopus 0.503, РИНЦ 0.884) 0.9 п.л. / Соавтору принадлежит постановка задачи и проверка результатов. Остальные результаты статьи получены Резниченко И.О.
- 9) Резниченко И.О. Квадратурная формула для потенциала двойного слоя с дифференцируемой плотностью / Крутицкий П. А., Резниченко И.О. // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58, № 8. С. 1121 - 1131 (WoS 0.784, Scopus 0.509, РИНЦ 8.043) 0.6 п.л. / Соавтору принадлежит постановка задачи и проверка результатов. Остальные результаты статьи получены Резниченко И.О.
- 10) Резниченко И.О. Улучшенная квадратурная формула для потенциала простого слоя / Крутицкий П. А., Резниченко И.О. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2023. Т. 63, № 2. С. 44-58 (WoS 0.769, Scopus 0.503, РИНЦ 0.884) 0.9 п.л. / Соавтору принадлежит постановка задачи и проверка результатов. Остальные результаты статьи получены Резниченко И.О.

### **Благодарности**

Выражаю глубокую благодарность научному руководителю кандидату физико-математических наук Валентине Викторовне Колыбасовой за постановку задач, внимание к работе и поддержку. Выражаю глубокую благодарность кандидату физико-математических наук Крутицкому Павлу Александровичу за плодотворную совместную работу и поддержку. Выражаю глубокую благодарность профессорско-преподавательскому составу физического факультета МГУ

за полученное образование. Благодарю всех сотрудников кафедры математики физического факультета МГУ за внимание и доброжелательное отношение. Благодарю своих родителей.

### **Объём и структура работы**

В первой главе решается задача стационарного обтекания твёрдого тела потенциальным потоком идеальной невязкой несжимаемой среды в трёхмерном случае. Построены новые квадратурные формулы для потенциала простого слоя, его прямого значения, а также для прямого значения его нормальной производной. Проведены численные тесты, показывающие, что новые формулы обеспечивают более высокую точность вычислений, по сравнению с известными формулами. При помощи полученных формул дано численное решение внешней краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа в трёхмерной области.

Во второй главе решается трёхмерная задача по определению стационарного теплового поля. Построены две новые квадратурные формулы для потенциала двойного слоя для уравнений Лапласа и Гельмгольца, а также формула для его прямого значения. Сделаны численные тесты, демонстрирующие, что новые формулы обеспечивают более высокую точность вычислений, по сравнению с известными формулами. При помощи полученных формул была решена внутренняя краевая задача Дирихле для уравнения Лапласа в трёхмерной области.

Диссертация состоит из введения, двух глав и заключения, содержит 4 рисунка и 25 таблиц. Список литературы содержит 100 наименований. Полный объём диссертации составляет 171 страниц.

# 1 Стационарная задача аэрогидродинамики — квадратурные формулы для потенциала простого слоя

Диссертация состоит из двух глав. В первой главе рассматривается пространственное стационарное обтекание тела в идеальной невязкой несжимаемой среде со скоростью  $v = (v_1, v_2, v_3)$ . Плотность среды не изменяется при обтекании. Пусть  $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ . Считая движение безвихревым, вводим потенциал скорости  $u(x_1, x_2, x_3)$  так что проекции скорости будут

$$v_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad v_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad v_3 = \frac{\partial u}{\partial x_3}.$$

Уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$$

показывает, что функция  $u$  должна удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0.$$

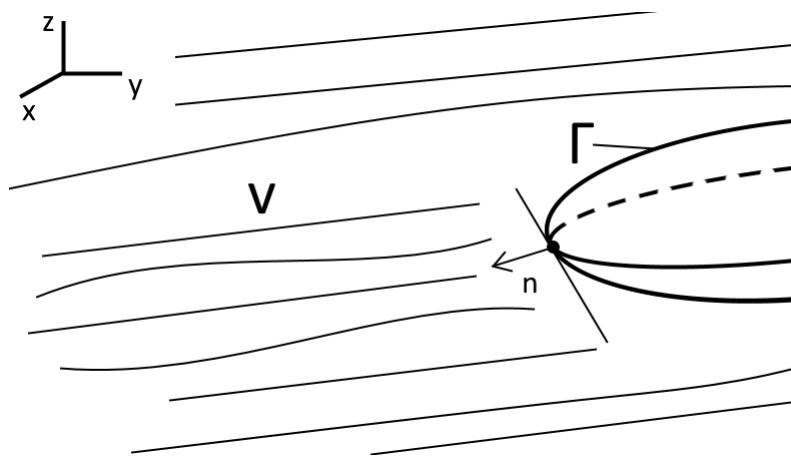


Рис. 1: Обтекание твёрдого тела потенциальным потоком идеальной жидкости.

Граничное условие на поверхности твёрдого тела в идеальной жидкости - это условие о непротекании потока сквозь поверхность тела [49]

$$(v_n)|_{\Gamma} = f(x),$$

где  $f(x)$  — нормальная составляющая скорости точки на поверхности  $\Gamma$ . Поскольку

$$v_n = \frac{\partial u}{\partial n},$$

то это условие на поверхности твёрдого тела принимает вид:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = f(x).$$

Введем в пространстве декартову систему координат  $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ . Пусть  $\Gamma$  — простая гладкая замкнутая поверхность класса  $C^3$ , ограничивающая объёмно-односвязную внутреннюю область  $D$ . Рассмотрим внешнюю краевую задачу Неймана для уравнения Лапласа с непрерывным граничным условием, заданным на  $\Gamma$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & u \in C^1(\overline{R^3 \setminus D}) \cap C^2(R^3 \setminus \overline{D}), \\ \left. \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = f(x), & x \in \Gamma, f(x) \in C^1(\Gamma), \\ u = O\left(\frac{1}{|x|}\right), & |x| \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\partial/\partial \mathbf{n}$  означает правильную нормальную производную [6] к поверхности  $\Gamma$  извне в точке  $x$  и подразумевается, что функция  $u(x)$  имеет правильную нормальную производную на  $\Gamma$ . Найдём решение задачи Неймана в виде потенциала простого слоя  $\mathcal{V}_0[\mu](x)$

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) = \frac{1}{4\pi} \int_{y \in \Gamma} \mu(y) \frac{1}{|x - y|} dS_y, \quad (2)$$

где  $\mu = \mu(y) \in C^0(\Gamma)$  — плотность потенциала. Потенциал простого слоя  $\mathcal{V}_0[\mu](x)$  — гармоническая функция в области  $R^3 \setminus \overline{D}$ . Нормальная производная извне к поверхности  $\Gamma$  даётся выражением [6, 90]

$$\frac{1}{2}\mu(x) + \left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{\Gamma}, \quad x \in \Gamma, \quad (3)$$

где  $\mathcal{V}_0[\mu](x)/\partial \mathbf{n}_x|_{\Gamma}$  — прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя для уравнения Лапласа на поверхности  $\Gamma$

$$\frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \frac{1}{|x - y|} ds_y, \quad (4)$$

а  $\mathbf{n}_x$  — внутренняя единичная нормаль. Приравнивая это выражение к функции, заданной на  $\Gamma$ , получаем уравнение

$$\frac{1}{2}\mu(x) + \left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{\Gamma} = f(x), \quad x \in \Gamma. \quad (5)$$

Равенство (5) представляет собой линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода, которое, как известно, однозначно разрешимо [6, §28.3], [90].

Интегралы в (2) и (4) как правило невозможно найти в явном виде

$$\int_{\Gamma} \frac{\mu(y)}{|x-y|} ds_y, \quad x \notin \Gamma, \quad \int_{\Gamma} \mu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \frac{1}{|x-y|} ds_y, \quad x \in \Gamma,$$

поэтому для нахождения значений потенциала простого слоя, а также его нормальной производной на поверхности используют специальные формулы.

Стандартные квадратурные формулы для потенциала простого слоя, используемые в прикладных расчетах, не дают равномерной аппроксимации и равномерной сходимости вблизи поверхности  $\Gamma$ , на которой задана плотность. При этом погрешность стандартных формул стремится к бесконечности, когда точка, в которой вычисляется квадратурная формула, приближается к определенным точкам на поверхности [2].

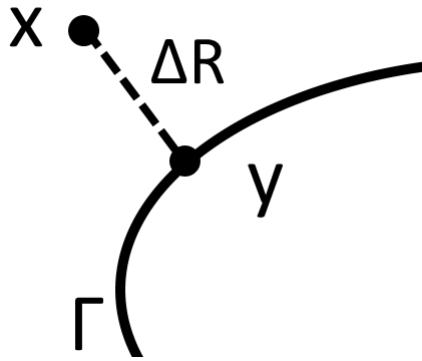


Рис. 2: При уменьшении  $\Delta R = |x - y|$  погрешность стандартных квадратурных формул стремится к бесконечности.

В результате возникает ситуация, когда при  $|x - y| < \Delta R$ , где  $\Delta R$  - некоторое малое расстояние до поверхности твёрдого тела, для вычисления потенциала простого слоя при использовании стандартных квадратурных формул приходится настолько уменьшать шаг дискретизации поверхности, что вычисления в слое на расстоянии  $\Delta R$  становятся практически невыполнимыми.

В разделе 1.1 выводится квадратурная формула для потенциала простого слоя (2), дающая равномерную аппроксимацию и равномерную сходимость более высокого порядка, чем известные формулы. Полученная квадратурная формула также сохраняет свойство непрерывности потенциала простого слоя при переходе через поверхность, на которой задана плотность потенциала.

В разделе 1.2 выводится улучшенная квадратурная формула для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя (4) с гладкой плот-



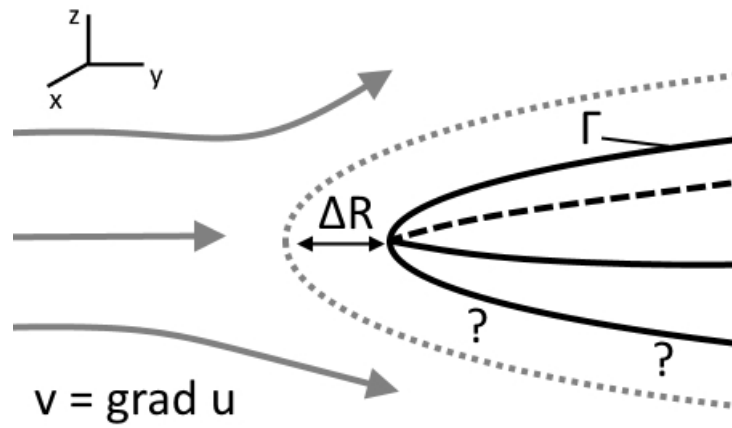


Рис. 3: При использовании стандартных квадратурных формул не сохраняется важнейшее свойство потенциала простого слоя, а именно его ограниченность и непрерывность во всём пространстве.

ностью. Эта квадратурная формула обеспечивает более высокую точность вычислений, чем стандартная квадратурная формула. Полученная квадратурная формула может быть использована при численном решении граничных интегральных уравнений, возникающих при изучении краевых задач для уравнений математической физики.

В разделе 1.3 рассмотрен вспомогательный интеграл, который используется при выводе квадратурных формул.

В разделе 1.4 построенные квадратурные формулы применяются к численному решению внешней краевой задачи Неймана, возникающей при рассмотрении стационарной задачи аэрогидродинамики. Граничное условие задаётся на поверхности сферы.

## 1.1 Улучшенная квадратурная формула для потенциала простого слоя

Потенциал простого слоя непрерывен во всем пространстве, в том числе во всех точках на поверхности  $\Gamma$ , на которой задана плотность потенциала [4]. С другой стороны стандартная квадратурная формула для потенциала простого слоя для уравнений Лапласа и Гельмгольца, используемая в инженерных расчетах, не даёт равномерной аппроксимации потенциала вблизи поверхности  $\Gamma$ , на которой задана плотность потенциала, и даже стремится к бесконечности, когда точка, в которой вычисляется квадратурная формула, стремится к определенным точкам на поверхности  $\Gamma$  [2, Глава 2]. Следовательно, стандартная квадратурная формула не сохраняет важнейшее свойство потенциала, а именно его ограниченность и непрерывность на поверхности  $\Gamma$ . В [88, 91] предложена квадратурная формула, которая сохраняет указанное свойство потенциала простого слоя, а также даёт равномерную аппроксимацию и равномерную сходимость к потенциалу простого слоя для точек, лежащих вне  $\Gamma$ .

В данном разделе проведено улучшение квадратурной формулы из [88, 91] с учетом гладкости коэффициента, появляющегося при параметризации в потенциале. Благодаря сделанным преобразованиям, канонический интеграл, возникающий в квадратурной формуле, вычисляется с более высокой точностью, чем в [88, 91]. В результате получена квадратурная формула, дающая равномерную аппроксимацию и равномерную сходимость к потенциалу простого слоя более высокого порядка, чем в [88, 91], что подтверждается численными тестами. Полученная формула сохраняет также свойство непрерывности потенциала простого слоя при переходе через поверхность  $\Gamma$ .

### 1.1.1 Постановка задачи

Введем в пространстве декартову систему координат  $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ .

Пусть  $\Gamma$  — простая гладкая замкнутая поверхность класса  $C^3$ , ограничивающая объёмно-односвязную внутреннюю область [92, с. 201]. Предположим, что поверхность  $\Gamma$  параметризована так, что на нее отображается прямоугольник:

$$\begin{aligned} y &= (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma, & y_1 &= y_1(u, v), & y_2 &= y_2(u, v), & y_3 &= y_3(u, v); \\ & & u &\in [0, A], & v &\in [0, B]; \\ & & y_j(u, v) &\in C^2([0, A] \times [0, B]), & & j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (6)$$

Потребуем также, чтобы различным внутренним точкам прямоугольника при указанном отображении соответствовали различные точки поверхности. Сферу,

поверхность эллипсоида, гладкие поверхности фигур вращения, поверхность тора и многие другие более сложные поверхности можно параметризовать таким образом. Кроме того, сложные поверхности можно разбить на несколько частей и для каждой части ввести свою параметризацию, тогда дальнейшие рассуждения справедливы для каждой такой части. Введём  $N$  точек  $u_n$  с шагом  $h$  на отрезке  $[0, A]$  и  $M$  точек  $v_m$  на отрезке  $[0, B]$  и рассмотрим разбиение прямоугольника  $[0, A] \times [0, B]$ , который отображается на поверхность  $\Gamma$

$$A = Nh, \quad B = MH, \quad u_n = (n + 1/2)h, \quad n = 0, \dots, N - 1;$$

$$v_m = (m + 1/2)H, \quad m = 0, \dots, M - 1.$$

Тем самым прямоугольник  $[0, A] \times [0, B]$  разбивается на  $N \times M$  маленьких прямоугольничков и через  $(u_n, v_m)$  обозначены серединки этих прямоугольничков.

Известно [93, Глава 14, § 1], что компоненты вектора нормали (не единичного)  $\eta(y) = (\eta_1(y), \eta_2(y), \eta_3(y))$  в точке поверхности  $y = (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma$  определяется через определители второго порядка формулами

$$\eta_1 = \begin{vmatrix} (y_2)_u & (y_3)_u \\ (y_2)_v & (y_3)_v \end{vmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{vmatrix} (y_3)_u & (y_1)_u \\ (y_3)_v & (y_1)_v \end{vmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{vmatrix} (y_1)_u & (y_2)_u \\ (y_1)_v & (y_2)_v \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Положим  $|\eta(y)| = \sqrt{(\eta_1(y))^2 + (\eta_2(y))^2 + (\eta_3(y))^2}$ . Известно [93, Глава 14, § 1–2], что

$$\int_{\Gamma} F(y) ds_y = \int_0^A du \int_0^B dv F(y(u, v)) |\eta(y(u, v))|.$$

Заметим, что если  $|\eta(y(u, v))| = 0$  в некоторой точке, то функция  $|\eta(y(u, v))|$  может быть недифференцируемой в этой точке. Поэтому дополнительно потребуем, чтобы

$$|\eta(y(u, v))| \in C^2([0, A] \times [0, B]). \quad (8)$$

Кроме того, потребуем, чтобы

$$|\eta(y(u, v))| > 0, \quad \forall (u, v) \in ((0, A) \times (0, B)). \quad (9)$$

Потенциал простого слоя используется при решении краевых задач методом интегральных уравнений. Рассмотрим потенциал простого слоя для уравнения Лапласа с заданной на поверхности  $\Gamma$  плотностью  $\mu(y) \in C^0(\Gamma)$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0[\mu](x) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mu(y)}{|x - y|} ds_y = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^A du \int_0^B dv \frac{\mu(y(u, v))}{|x - y(u, v)|} |\eta(y(u, v))| = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} \frac{\mu(y(u, v))}{|x - y(u, v)|} |\eta(y(u, v))| du dv, \quad (10)$$

где для простоты  $k \geq 0$  и

$$|x - y(u, v)| = \sqrt{(x_1 - y_1(u, v))^2 + (x_2 - y_2(u, v))^2 + (x_3 - y_3(u, v))^2}.$$

Введём обозначения

$$\mu(y(u, v)) = \mu(u, v), \quad \eta(y(u, v)) = \eta(u, v)$$

$$\mu_{nm} = \mu(y(u_n, v_m)), \quad \eta_{nm} = \eta(y(u_n, v_m)).$$

Тогда при  $h, H \rightarrow 0$  по формуле Тейлора получим

$$\mu(u, v) = \mu_{nm} + (\mu)'_u(u, v)(u - u_n) + (\mu)'_v(u, v)(v - v_m), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} |\eta(u, v)| &= |\eta_{nm}| + (|\eta|)'_u(u, v)(u - u_n) + (|\eta|)'_v(u, v)(v - v_m) + \\ &+ \frac{1}{2}(|\eta|)''_{uu}(u, v)(u - u_n)^2 + (|\eta|)''_{uv}(u, v)(u - u_n)(v - v_m) + \frac{1}{2}(|\eta|)''_{vv}(u, v)(v - v_m)^2, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $u, \hat{u} \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$ ,  $v, \hat{v} \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$ .

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0(x) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mu_{nm} \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \times \\ &\times \frac{|\eta_{nm}| + (|\eta|)'_u(u, v)(u - u_n) + (|\eta|)'_v(u, v)(v - v_m)}{|x - y(u, v)|} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \sigma_0(x) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \frac{1}{|x - y(u, v)|} \times \left[ \mu_{nm} \times \right. \\ &\times \left( \frac{1}{2}(|\eta|)''_{uu}(u, v)(u - u_n)^2 + (|\eta|)''_{uv}(u, v)(u - u_n)(v - v_m) + \frac{1}{2}(|\eta|)''_{vv}(u, v)(v - v_m)^2 \right) + \\ &\quad \left. + \left( (\mu)'_u(u, v)(u - u_n) + (\mu)'_v(u, v)(v - v_m) \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( |\eta_{nm}| + (|\eta|)'_u(u, v)(u - u_n) + (|\eta|)'_v(u, v)(v - v_m) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} (|\eta|)''_{uu}(u, v)(u - u_n)^2 + (|\eta|)''_{uv}(u, v)(u - u_n)(v - v_m) + \frac{1}{2} (|\eta|)''_{vv}(u, v)(v - v_m)^2 \Big] \quad (13)$$

Нетрудно показать, что

$$|\sigma_0(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \|\mu(y(u, v))\|_{C^1([0, A] \times [0, B])} \|\eta(y(u, v))\|_{C^2([0, A] \times [0, B])} (h^2 + H^2) \times \\ \times \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{u_n - h/2}^{u_n + h/2} du \int_{v_m - H/2}^{v_m + H/2} dv \frac{1}{|x - y(u, v)|}. \quad (14)$$

При этом

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{u_n - h/2}^{u_n + h/2} du \int_{v_m - H/2}^{v_m + H/2} dv \frac{1}{|x - y(u, v)|} = \int_0^A du \int_0^B dv \frac{1}{|x - y(u, v)|} = \\ = \int_{\Gamma} \frac{|\eta(y(u, v))|^{-1}}{|x - y|} ds_y = 4\pi \mathcal{V}_0[|\eta(y(u, v))|^{-1}](x). \quad (15)$$

Здесь  $\mathcal{V}_0[|\eta(y(u, v))|^{-1}](x)$  — потенциал простого слоя с непрерывной плотностью, он непрерывен и равномерно ограничен для всех  $x \in R^3$ .

В итоге имеет место оценка

$$|\sigma_0(x)| \leq \text{const} \|\mu(y(u, v))\|_{C^1([0, A] \times [0, B])} \|\eta(y(u, v))\|_{C^2([0, A] \times [0, B])} (h^2 + H^2), \quad (16)$$

где оценка выполняется равномерно по  $x \in R^3$ . Следовательно,

$$\sigma_0(x) = O(h^2 + H^2)$$

равномерно по всем  $x$  в  $R^3$ .

Таким образом, для потенциала простого слоя для уравнения Лапласа имеет место соотношение

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) = \mathcal{S}_0(x) + \sigma_0(x), \quad (17) \\ \mathcal{S}_0(x) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mu_{nm} \int_{u_n - h/2}^{u_n + h/2} du \int_{v_m - H/2}^{v_m + H/2} dv \times \\ \times \frac{|\eta_{nm}| + (|\eta|)'_u(u, v)(u - u_n) + (|\eta|)'_v(u, v)(v - v_m)}{|x - y(u, v)|},$$

а для  $\sigma_0(x)$  выполняется оценка (16).

Рассмотрим теперь потенциал простого слоя для уравнения Гельмгольца с заданной на поверхности  $\Gamma$  плотностью  $\mu(y) \in C^1(\Gamma)$

$$\mathcal{V}_k[\mu](x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mu(y) e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds_y =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^A du \int_0^B dv \frac{\mu(y(u, v)) \exp(ik|x - y(u, v)|)}{|x - y(u, v)|} |\eta(y(u, v))| = \\
&= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} \frac{\mu(y(u, v)) \exp(ik|x - y(u, v)|)}{|x - y(u, v)|} |\eta(y(u, v))| dudv,
\end{aligned} \tag{18}$$

где для простоты  $k \geq 0$  и

$$|x - y(u, v)| = \sqrt{(x_1 - y_1(u, v))^2 + (x_2 - y_2(u, v))^2 + (x_3 - y_3(u, v))^2}.$$

Если  $k = 0$ , то потенциал  $\mathcal{V}_k[\mu](x)$  переходит в потенциал простого слоя для уравнения Лапласа. В [88, 91] показано, что при  $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$  и  $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$

$$|x - y(u, v)| = |x - y(u_n, v_m)| + O(h + H),$$

$$\exp(ik|x - y(u, v)|) = \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|) + O(h + H)$$

для любого  $x \notin \Gamma$ . Константы в оценках функций, обозначенных как  $O(h + H)$ , не зависят от  $n, m$  и от расположения  $x \notin \Gamma$ . Поэтому

$$\begin{aligned}
&\mu(y)|\eta(y)| \exp(ik|x - y(u, v)|) = \\
&= \mu_{nm}(|\eta_{nm}| + (|\eta|)'_u(u, v)(u - u_n) + (|\eta|)'_v(u, v)(v - v_m)) \times \\
&\quad \times \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|) + f_{n,m}(\mu; u, v, x),
\end{aligned}$$

где для  $f_{n,m}(\mu; u, v, x)$  справедлива оценка

$$|f_{n,m}(\mu; u, v, x)| \leq \text{const} \|\mu(y(u, v))\|_{C^1([0,A] \times [0,B])} \|\eta(y(u, v))\|_{C^2([0,A] \times [0,B])} (h^2 + H^2),$$

которая выполняется равномерно по  $x \notin \Gamma$  сразу для всех возможных  $n, m$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_k(x) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mu_{nm} \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|) \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \times \\
&\quad \times \frac{|\eta_{nm}| + (|\eta|)'_u(u, v)(u - u_n) + (|\eta|)'_v(u, v)(v - v_m)}{|x - y(u, v)|}
\end{aligned} \tag{19}$$

и

$$\sigma_k(x) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \frac{|f_{n,m}(\mu; u, v, x)|}{|x - y(u, v)|} \tag{20}$$

Для  $\sigma_k(x)$  имеет место оценка

$$|\sigma_k(x)| \leq \frac{c_1}{4\pi} \|\mu(y(u, v))\|_{C^1([0,A] \times [0,B])} \|\eta(y(u, v))\|_{C^2([0,A] \times [0,B])} (h^2 + H^2) \times \\ \times \int_0^A du \int_0^B dv \frac{|\eta(y(u, v))|}{|x - y(u, v)|},$$

где константа  $c_1 > 0$ . Отсюда, используя (15), получаем

$$|\sigma_k(x)| \leq \frac{c_2}{4\pi} \|\mu(y(u, v))\|_{C^1([0,A] \times [0,B])} \|\eta(y(u, v))\|_{C^2([0,A] \times [0,B])} (h^2 + H^2), \quad (21)$$

где  $c_2$  - некоторая положительная константа, и оценка выполняется равномерно по  $x \notin \Gamma$ . Следовательно,

$$\sigma_k(x) = O(h^2 + H^2)$$

равномерно по всем  $x$  в  $R^3$ .

Таким образом, для потенциала простого слоя для уравнения Гельмгольца имеет место соотношение

$$\mathcal{V}_k[\mu](x) = \mathcal{S}_k(x) + \sigma_k(x), \quad (22)$$

где  $\mathcal{S}_k(x)$  даётся выражением (19) а для  $\sigma_k(x)$  выполняется оценка (21).

Следовательно, используя (18), имеем

$$\mathcal{V}_k[\mu](x) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mu_{nm} \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|) \times \\ \times \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \frac{|\eta(y(u, v))|}{|x - y(u, v)|}. \quad (23)$$

Как видно из соотношения (23), для получения квадратурной формулы необходимо вычислить интеграл

$$\int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \frac{|\eta(y(u, v))|}{|x - y(u, v)|}, \quad (24)$$

который будем называть *каноническим интегралом*.

### 1.1.2 Канонический интеграл $\Theta_{nm}(x)$

Пусть точка  $x$  не принадлежит кусочку поверхности, вдоль которого изменяется точка  $y = y(u, v)$  в интеграле (24). Центром этого кусочка является точка

$y(u_n, v_m)$ . В интеграле (24)  $(u - u_n) \in [-h/2, h/2]$ ,  $(v - v_m) \in [-H/2, H/2]$ . Разложим  $y_j(u, v)$  по формуле Тейлора с центром в точке  $(u_n, v_m)$ , тогда для  $j = 1, 2, 3$  получим

$$y_j(u, v) = y_j(u_n, v_m) + D_j + O(H^2 + h^2),$$

где

$$D_j = (y_j)'_u(u - u_n) + (y_j)'_v(v - v_m).$$

Все производные берутся в точке  $(u_n, v_m)$ . Положим

$$r^2 = |x - y(u_n, v_m)|^2 = \sum_{j=1}^3 r_j^2 \neq 0, \quad r_j = y_j(u_n, v_m) - x_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

тогда

$$y_j(u, v) - x_j = r_j + D_j + O(H^2 + h^2), \quad j = 1, 2, 3.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |x - y(u, v)|^2 &= \sum_{j=1}^3 (x_j - y_j(u, v))^2 \approx \sum_{j=1}^3 (r_j^2 + 2r_j D_j + D_j^2) = \\ &= r^2 + 2P(u - u_n) + 2Q(v - v_m) + \alpha^2(u - u_n)^2 + \beta^2(v - v_m)^2 + 2\delta(u - u_n)(v - v_m) = \\ &= \beta^2(V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)^2 - (\delta U + Q)^2/\beta^2 + \alpha^2 U^2 + 2PU + r^2, \end{aligned}$$

где  $U = u - u_n$ ,  $V = v - v_m$ ,

$$P = \sum_{j=1}^3 r_j (y_j)'_u, \quad Q = \sum_{j=1}^3 r_j (y_j)'_v, \quad \alpha^2 = \sum_{j=1}^3 ((y_j)'_u)^2,$$

$$\beta^2 = \sum_{j=1}^3 ((y_j)'_v)^2, \quad \delta = \sum_{j=1}^3 (y_j)'_u (y_j)'_v.$$

Производные по  $u$  и  $v$  берутся в точке  $u = u_n$ ,  $v = v_m$ . Можно показать [93, Гл. 14, § 1], что

$$\alpha^2 \beta^2 - \delta^2 = |\eta(y(u_n, v_m))|^2. \quad (25)$$

Согласно условию (9),  $|\eta(y(u_n, v_m))| > 0$  для всех возможных  $n, m$ , поэтому

$$\alpha^2 \beta^2 - \delta^2 > 0. \quad (26)$$

Отсюда следует, что  $\alpha^2 > 0$  и  $\beta^2 > 0$ .



В силу (8), для всех возможных  $n, m$ , при  $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$  и  $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$  функция  $|\eta(y(u, v))|$  может быть разложена в точке  $(u_n, v_m)$  по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано [93, Гл. 10, § 5.3]

$$\begin{aligned} & |\eta(y(u, v))| = \\ & = |\eta(y(u_n, v_m))| + |\eta|'_u(u - u_n) + |\eta|'_v(v - v_m) + o\left(\sqrt{(u - u_n)^2 + (v - v_m)^2}\right) = \\ & = |\eta(y(u_n, v_m))| + |\eta|'_u U + |\eta|'_v V + o\left(\sqrt{(u - u_n)^2 + (v - v_m)^2}\right). \end{aligned} \quad (27)$$

Производные по  $u$  и  $v$  берутся в точке  $(u_n, v_m)$ .

Выражения для  $|\eta|'_u$  и  $|\eta|'_v$  можно найти с помощью формулы (25), эти выражения имеют вид

$$|\eta|'_u = \frac{(\alpha^2)'_u \beta^2 + \alpha^2 (\beta^2)'_u - 2\delta \delta'_u}{2\sqrt{\alpha^2 \beta^2 - \delta^2}}, \quad |\eta|'_v = \frac{(\alpha^2)'_v \beta^2 + \alpha^2 (\beta^2)'_v - 2\delta \delta'_v}{2\sqrt{\alpha^2 \beta^2 - \delta^2}},$$

где

$$\begin{aligned} (\alpha^2)'_u &= 2 \sum_{j=1}^3 (y_j)'_u (y_j)''_{uu}, & (\alpha^2)'_v &= 2 \sum_{j=1}^3 (y_j)'_u (y_j)''_{uv}, \\ (\beta^2)'_u &= 2 \sum_{j=1}^3 (y_j)'_v (y_j)''_{uv}, & (\beta^2)'_v &= 2 \sum_{j=1}^3 (y_j)'_v (y_j)''_{vv}, \\ (\delta)'_u &= \sum_{j=1}^3 (y_j)''_{uu} (y_j)'_v + (y_j)'_u (y_j)''_{uv}, & (\delta)'_v &= \sum_{j=1}^3 (y_j)''_{uv} (y_j)'_v + (y_j)'_u (y_j)''_{vv}. \end{aligned}$$

Выражения для  $|\eta|'_u$  и  $|\eta|'_v$  можно также записать в виде

$$|\eta|'_u = \frac{(\eta, \eta'_u)}{|\eta|}, \quad |\eta|'_v = \frac{(\eta, \eta'_v)}{|\eta|},$$

где  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение векторов, и

$$\begin{aligned} (\eta_1)'_u &= (y_2)_{uu} (y_3)_v + (y_2)_u (y_3)_{uv} - (y_3)_{uu} (y_2)_v - (y_3)_u (y_2)_{uv}, \\ (\eta_2)'_u &= (y_3)_{uu} (y_1)_v + (y_3)_u (y_1)_{uv} - (y_1)_{uu} (y_3)_v - (y_1)_u (y_3)_{uv}, \\ (\eta_3)'_u &= (y_1)_{uu} (y_2)_v + (y_1)_u (y_2)_{uv} - (y_2)_{uu} (y_1)_v - (y_2)_u (y_1)_{uv}, \\ (\eta_1)'_v &= (y_2)_{uv} (y_3)_v + (y_2)_u (y_3)_{vv} - (y_3)_{uv} (y_2)_v - (y_3)_u (y_2)_{vv}, \\ (\eta_2)'_v &= (y_3)_{uv} (y_1)_v + (y_3)_u (y_1)_{vv} - (y_1)_{uv} (y_3)_v - (y_1)_u (y_3)_{vv}, \\ (\eta_3)'_v &= (y_1)_{uv} (y_2)_v + (y_1)_u (y_2)_{vv} - (y_2)_{uv} (y_1)_v - (y_2)_u (y_1)_{vv}. \end{aligned}$$

Целью этого пункта является вычисление интеграла (24), который можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_k(x) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mu_{nm} \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|) \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \frac{|\eta(y(u, v))|}{|x - y(u, v)|} \approx \\
&\approx \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mu_{nm} \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|) \int_{-h/2}^{h/2} dU \int_{-H/2}^{H/2} dV \times \\
&\times \frac{|\eta(y(u_n, v_m))| + |\eta'_u U + \eta'_v V|}{\beta \sqrt{(V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)^2 + (-\delta U + Q)^2/\beta^2 + \alpha^2 U^2 + 2PU + r^2}/\beta^2} = \\
&= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mu_{nm} \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|) \int_{-h/2}^{h/2} dU \int_{-H/2}^{H/2} dV \times \\
&\times \frac{|\eta(y(u_n, v_m))| - |\eta'_v Q/\beta^2 + U(|\eta'_u - \eta'_v \delta/\beta^2) + \eta'_v(V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)|}{\beta \sqrt{(V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)^2 + (-\delta U + Q)^2/\beta^2 + \alpha^2 U^2 + 2PU + r^2}/\beta^2} = \\
&= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mu_{nm} \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|) \times \\
&\times (|\eta(y(u_n, v_m))| - |\eta'_v Q/\beta^2|) \theta_{nm}(x) + \frac{|\eta'_u - \eta'_v \delta/\beta^2|}{\beta} (J_1(H) - J_1(-H)) + \\
&+ \frac{|\eta'_v|}{\beta} (J_2(H) - J_2(-H)) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mu_{nm} \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|) \Theta_{nm}(x). \quad (28)
\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения  $\Theta_{nm}(x)$ ,  $\theta_{nm}(x)$ ,  $J_1(H)$  и  $J_2(H)$ . Функция  $\theta_{nm}(x)$  найдена в явном виде в [88, 91], для полноты изложения её вывод дан в пункте 1.4 ниже. Интеграл  $J_1(H)$  возникает после интегрирования по  $V$  с учётом неравенства (26) а также в соответствии с [94, пункт 1.2.43.13], и имеет вид

$$\begin{aligned}
J_1(H) &= \int_{-h/2}^{h/2} dU \times \\
&\times U \ln \left| \frac{H}{2} + \frac{\delta U + Q}{\beta^2} + \sqrt{\left(\frac{H}{2} + \frac{\delta U + Q}{\beta^2}\right)^2 - \frac{(\delta U + Q)^2}{\beta^4} + \frac{\alpha^2 U^2 + 2PU + r^2}{\beta^2}} \right| = \\
&= \int_{-h/2}^{h/2} U \ln \left| \varepsilon + \delta_0 U + \sqrt{\alpha_0^2 U^2 + 2\beta_0 U + \chi_0} \right| dU, \quad (29)
\end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\delta_0 = \frac{\delta}{\beta^2}, \quad \alpha_0^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2} > 0, \quad \varepsilon = \frac{H}{2} + \frac{Q}{\beta^2}, \quad \beta_0 = \frac{\delta H + 2P}{2\beta^2}, \quad \chi_0 = \frac{H^2}{4} + \frac{HQ + r^2}{\beta^2}.$$

Интеграл  $J_2(H)$  возникает после интегрирования по  $V$  с учётом неравенства (26) и с использованием [94, пункт 1.2.43.14]. Интеграл  $J_2(H)$  дается выражением

$$\begin{aligned} J_2(H) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sqrt{\left(\frac{H}{2} + \frac{\delta U + Q}{\beta^2}\right)^2 - \frac{(\delta U + Q)^2}{\beta^4} + \frac{\alpha^2 U^2 + 2PU + r^2}{\beta^2}} dU = \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \sqrt{\alpha_0^2 U^2 + 2\beta_0 U + \chi_0} dU. \end{aligned} \quad (30)$$

В [88, 91] показано, квадратный трехчлен в интегралах  $J_1(H)$ ,  $J_2(H)$  неотрицателен. Следовательно, дискриминант этого квадратного трехчлена неположителен, т.е.  $\beta_0^2 - \alpha_0^2 \chi_0 \leq 0$ . Поэтому положим  $\chi_1^2 = \chi_0 - \beta_0^2/\alpha_0^2 \geq 0$  и преобразуем подкоренное выражение в интеграле к виду

$$\alpha_0^2 U^2 + 2\beta_0 U + \chi_0 = (\alpha_0 U + \beta_0/\alpha_0)^2 + \chi_1^2.$$

Тем самым интегралы  $J_1(H)$  и  $J_2(H)$  принимают вид

$$\begin{aligned} J_1(H) &= \int_{-h/2}^{h/2} U \ln \left| \varepsilon + \delta_0 U + \sqrt{(\alpha_0 U + \beta_0/\alpha_0)^2 + \chi_1^2} \right| dU, \\ J_2(H) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sqrt{(\alpha_0 U + \beta_0/\alpha_0)^2 + \chi_1^2} dU. \end{aligned}$$

Теперь надо рассмотреть 2 случая:  $\chi_1 > 0$  и  $\chi_1 = 0$ . Интегралы  $J_1(-H)$ ,  $J_2(-H)$  вычисляется по тем же формулам, что и интегралы  $J_1(H)$ ,  $J_2(H)$  но в параметрах  $\varepsilon$ ,  $\beta_0$ ,  $\chi_0$  надо заменить  $H$  на  $-H$ .

### 1.1.3 Вычисление интеграла $J_1(H)$ при $\chi_1 > 0$

Рассмотрим случай  $\chi_1 > 0$ . Сделаем гиперболическую замену переменной в интеграле  $J_1(H)$  по формулам

$$U = (\chi_1 \operatorname{sh} t - \beta_0/\alpha_0)/\alpha_0, \quad t = \operatorname{arcsch}(\zeta), \quad \zeta = (\alpha_0 U + \beta_0/\alpha_0)/\chi_1,$$

и обозначим  $t_{\pm} = \operatorname{arcsch}(\zeta_{\pm})$ ,  $\zeta_{\pm} = (\pm\alpha_0 h/2 + \beta_0/\alpha_0)/\chi_1$ . Тогда, используя тождество  $\operatorname{sh}^2 t + 1 = \operatorname{ch}^2 t$ , находим

$$J_1(H) = \frac{\chi_1}{\alpha_0} \int_{t_-}^{t_+} (\chi_1 \operatorname{sh} t - \frac{\beta_0}{\alpha_0}) \frac{1}{\alpha_0} \ln \left| \varepsilon - \frac{\delta_0 \beta_0}{\alpha_0^2} + \frac{\delta_0 \chi_1}{\alpha_0} \operatorname{sh} t + \chi_1 \operatorname{ch} t \right| d \operatorname{sh} t =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\chi_1^2}{\alpha_0^2} \int_{t_-}^{t_+} \left( \operatorname{sh} t - \frac{\beta_0}{\alpha_0 \chi_1} \right) \ln \left| \varepsilon - \frac{\delta_0 \beta_0}{\alpha_0^2} + \frac{\delta_0 \chi_1}{\alpha_0} \operatorname{sh} t + \chi_1 \operatorname{ch} t \right| d \operatorname{sh} t = \\
&= \frac{\chi_1^2}{2\alpha_0^2} \int_{t_-}^{t_+} \ln \left| \varepsilon - \frac{\delta_0 \beta_0}{\alpha_0^2} + \frac{\delta_0 \chi_1}{\alpha_0} \operatorname{sh} t + \chi_1 \operatorname{ch} t \right| d \operatorname{sh}^2 t - \frac{\beta_0}{\alpha_0^2} I(H),
\end{aligned}$$

где интеграл

$$I(H) = \frac{\chi_1}{\alpha_0} \int_{t_-}^{t_+} \ln \left| \varepsilon - \frac{\delta_0 \beta_0}{\alpha_0^2} + \frac{\delta_0 \chi_1}{\alpha_0} \operatorname{sh} t + \chi_1 \operatorname{ch} t \right| d \operatorname{sh} t$$

вычислен явно в [88, 91]. Для полноты изложения вывод интеграла  $I(H)$  даётся в пункте 1.4 ниже. Обозначив  $\varepsilon_1 = \varepsilon - \delta_0 \beta_0 / \alpha_0^2$ ,  $\delta_1 = \delta_0 \chi_1 / \alpha_0$ , и интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned}
J_1(H) &= \frac{\chi_1^2}{2\alpha_0^2} \int_{t_-}^{t_+} \ln |\varepsilon_1 + \delta_1 \operatorname{sh} t + \chi_1 \operatorname{ch} t| d \operatorname{sh}^2 t - \frac{\beta_0}{\alpha_0^2} I(H) = \\
&= \frac{\chi_1^2}{2\alpha_0^2} (\ln |\varepsilon_1 + \delta_1 \operatorname{sh} t + \chi_1 \operatorname{ch} t|) \operatorname{sh}^2 t \Big|_{t_-}^{t_+} - \frac{\chi_1^2}{2\alpha_0^2} J_{11} - \frac{\beta_0}{\alpha_0^2} I(H) = \\
&= \frac{\chi_1^2}{2\alpha_0^2} \left( \ln \left| \varepsilon_1 + \delta_1 \zeta + \chi_1 \sqrt{\zeta^2 + 1} \right| \right) \zeta^2 \Big|_{\zeta_-}^{\zeta_+} - \frac{\chi_1^2}{2\alpha_0^2} J_{11} - \frac{\beta_0}{\alpha_0^2} I(H),
\end{aligned}$$

где

$$J_{11} = \int_{t_-}^{t_+} \frac{(\delta_1 \operatorname{ch} t + \chi_1 \operatorname{sh} t) \operatorname{sh}^2 t}{\varepsilon_1 + \delta_1 \operatorname{sh} t + \chi_1 \operatorname{ch} t} dt.$$

В интеграле  $J_{11}$  сделаем замену переменной  $z = \exp(t) > 0$ , тогда находим

$$\operatorname{sh} t = \frac{z^2 - 1}{2z}, \quad \operatorname{ch} t = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad t = \ln z, \quad dt = \frac{dz}{z},$$

$$z_{\pm} = \exp(t_{\pm}) = \operatorname{sh} t_{\pm} + \operatorname{ch} t_{\pm} = \operatorname{sh} t_{\pm} + \sqrt{\operatorname{sh}^2 t_{\pm} + 1} = \zeta_{\pm} + \sqrt{\zeta_{\pm}^2 + 1},$$

$$\begin{aligned}
J_{11} &= \int_{z_-}^{z_+} \frac{(z^2 - 1)}{2z} \cdot \frac{(z^2 - 1)(\delta_1(z^2 + 1) + \chi_1(z^2 - 1))}{4\varepsilon_1 z^2 + 2z(z^2 - 1)\delta_1 + 2z(z^2 + 1)\chi_1} \cdot \frac{dz}{z} = \\
&= \int_{z_-}^{z_+} \frac{(z^2 - 1)}{2z} \cdot \frac{(\delta_1 + \chi_1)z^4 - 2\chi_1 z^2 + \chi_1 - \delta_1}{2z^2 ((\delta_1 + \chi_1)z^2 + 2\varepsilon_1 z + \chi_1 - \delta_1)} dz = \\
&= \int_{z_-}^{z_+} \frac{(\delta_1 + \chi_1)z^6 - (3\chi_1 + \delta_1)z^4 + (3\chi_1 - \delta_1)z^2 - \chi_1 + \delta_1}{4z^3 ((\delta_1 + \chi_1)z^2 + 2\varepsilon_1 z + \chi_1 - \delta_1)} dz = \\
&= \frac{\delta_+}{4} J_{12} - \frac{3\chi_1 + \delta_1}{4} J_{13} + \frac{3\chi_1 - \delta_1}{4} J_{14} - \frac{\delta_-}{4} J_{15}. \tag{31}
\end{aligned}$$

где  $\delta_{\pm} = \chi_1 \pm \delta_1 = \chi_1(1 \pm \delta_0/\alpha_0)$ , и введены обозначения

$$J_{12} = \int_{z_-}^{z_+} \frac{z^3 dz}{\delta_+ z^2 + 2\varepsilon_1 z + \delta_-}, \quad J_{13} = \int_{z_-}^{z_+} \frac{z dz}{\delta_+ z^2 + 2\varepsilon_1 z + \delta_-},$$

$$J_{14} = \int_{z_-}^{z_+} \frac{dz}{z(\delta_+ z^2 + 2\varepsilon_1 z + \delta_-)}, \quad J_{15} = \int_{z_-}^{z_+} \frac{dz}{z^3(\delta_+ z^2 + 2\varepsilon_1 z + \delta_-)}.$$

Необходимо пояснить, что если  $\delta_+ = 0$ , то в формуле (31) отсутствует слагаемое  $(\delta_+/4)J_{12}$ , а если  $\delta_- = 0$ , то в формуле (31) отсутствует слагаемое  $(\delta_-/4)J_{15}$ . Заметим также, что  $\delta_+$  и  $\delta_-$  не могут обращаться в ноль одновременно. Действительно, если  $\delta_+ = \delta_- = 0$ , то  $\chi_1 = 0$ , а в данном пункте рассматривается случай  $\chi_1 > 0$ . Вычислим интегралы  $J_{12}$ ,  $J_{13}$ ,  $J_{14}$ ,  $J_{15}$  при разных значениях параметров. Рассмотрим также вспомогательный интеграл:

$$J_0 = \int_{z_-}^{z_+} \frac{dz}{\delta_+ z^2 + 2\varepsilon_1 z + \delta_-}.$$

I. Пусть  $\delta_+ \neq 0$ .

Используя [94, пункт 1.2.8.13], вычислим интеграл  $J_0$ . Если  $\varepsilon_1^2 - \delta_+ \delta_- > 0$ , то

$$J_0 = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_1^2 - \delta_+ \delta_-}} \ln \left| \frac{\delta_+ z + \varepsilon_1 - \sqrt{\varepsilon_1^2 - \delta_+ \delta_-}}{\delta_+ z + \varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 - \delta_+ \delta_-}} \right| \Big|_{z_-}^{z_+}.$$

Если  $\varepsilon_1^2 - \delta_+ \delta_- < 0$ , то

$$J_0 = \frac{1}{\sqrt{\delta_+ \delta_- - \varepsilon_1^2}} \operatorname{arctg} \frac{\delta_+ z + \varepsilon_1}{\sqrt{\delta_+ \delta_- - \varepsilon_1^2}} \Big|_{z_-}^{z_+}.$$

Если  $\varepsilon_1^2 - \delta_+ \delta_- = 0$ , то

$$J_0 = - \frac{1}{\delta_+ z + \varepsilon_1} \Big|_{z_-}^{z_+}.$$

Интеграл  $J_{12}$  вычисляется согласно [94, пункт 1.2.8.21] и имеет вид

$$J_{12} = \left( \frac{\delta_+ z^2 - 4\varepsilon_1 z}{2\delta_+^2} + \frac{4\varepsilon_1^2 - \delta_+ \delta_-}{2\delta_+^3} \ln |\delta_+ z^2 + 2\varepsilon_1 z + \delta_-| \right) \Big|_{z_-}^{z_+} - \frac{\varepsilon_1(4\varepsilon_1^2 - 3\delta_+ \delta_-)}{\delta_+^3} J_0.$$

Интеграл  $J_{13}$  вычисляется согласно [94, пункты 1.2.8.19 и 1.2.4.17] и имеет вид

$$J_{13} = \frac{1}{2\delta_+} \ln |\delta_+ z^2 + 2\varepsilon_1 z + \delta_-| \Big|_{z_-}^{z_+} - \frac{\varepsilon_1}{\delta_+} J_0.$$

Интеграл  $J_{14}$  находится в соответствии с [94, пункт 1.2.8.25]. Если  $\varepsilon_1^2 - \delta_+\delta_- \neq 0$  и  $\delta_- \neq 0$  то

$$J_{14} = \frac{1}{2\delta_-} \ln \frac{z^2}{|\delta_+z^2 + 2\varepsilon_1z + \delta_-|} \Big|_{z_-}^{z_+} - \frac{\varepsilon_1}{\delta_-} J_0.$$

Если  $\varepsilon_1^2 - \delta_+\delta_- = 0$  и  $\delta_- \neq 0$  то, в соответствии с [94, пункт 1.2.5.12], и учитывая, что  $\varepsilon_1^2 = \delta_+\delta_-$  :

$$J_{14} = -\frac{\delta_+}{\varepsilon_1^2} \ln \left| \frac{\delta_+z + \varepsilon_1}{\delta_+z} \right| \Big|_{z_-}^{z_+} - \frac{\varepsilon_1}{\delta_-} J_0.$$

В этом интеграле необходимо отдельно рассмотреть ещё два случая.

Если  $\delta_- = 0$  и  $\varepsilon_1 \neq 0$ , то, в соответствии с [94, пункт 1.2.5.10]

$$J_{14} = \frac{1}{\delta_+} \left( -\frac{\delta_+}{2\varepsilon_1z} + \frac{\delta_+^2}{4\varepsilon_1^2} \ln \left| \frac{z + 2\varepsilon_1/\delta_+}{z} \right| \right) \Big|_{z_-}^{z_+}.$$

Если  $\delta_- = 0$  и  $\varepsilon_1 = 0$ , то

$$J_{14} = \int_{z_-}^{z_+} \frac{dz}{\delta_+z^3} = -\frac{1}{2\delta_+z^2} \Big|_{z_-}^{z_+}.$$

Интеграл  $J_{15}$  находится в соответствии с [94, пункт 1.2.8.27] и даётся выражением

$$J_{15} = \left( \frac{4\varepsilon_1z - \delta_-}{2\delta_-^2z^2} + \frac{4\varepsilon_1^2 - \delta_+\delta_-}{2\delta_-^3} \ln \frac{z^2}{|\delta_+z^2 + 2\varepsilon_1z + \delta_-|} \right) \Big|_{z_-}^{z_+} + \frac{2\varepsilon_1(3\delta_+\delta_- - 4\varepsilon_1^2)}{2\delta_-^3} J_0, \quad \delta_- \neq 0.$$

Как отмечено выше, если  $\delta_- = 0$ , то слагаемое  $(\delta_-/4)J_{15}$  в формуле (31) отсутствует, поэтому интеграл  $J_{15}$  в этом случае вычислять не нужно.

**Замечание.** Если  $\varepsilon_1^2 - \delta_+\delta_- = 0$  и  $\delta_- \neq 0$ , то при вычислении интеграла  $J_{11}$  линейная комбинация интегралов  $J_0$  равна нулю.

II. Пусть  $\delta_+ = 0$ .

Как указано выше, в этом случае в формуле (31) отсутствует слагаемое с интегралом  $J_{12}$ , поэтому интеграл  $J_{12}$  вычислять не нужно. Кроме того, как показано выше,  $\delta_- \neq 0$ , если  $\delta_+ = 0$ , поэтому надо рассмотреть 2 случая:  $\varepsilon_1 \neq 0$  и  $\varepsilon_1 = 0$ .

Если  $\delta_+ = 0$  и  $\varepsilon_1 \neq 0$ , то

$$J_0 = \frac{1}{2\varepsilon_1} \ln |2\varepsilon_1 z + \delta_-| \Big|_{z_-}^{z_+}, \quad J_{13} = \frac{1}{2\varepsilon_1} \left( z - \frac{\delta_-}{2\varepsilon_1} \ln \left| z + \frac{\delta_-}{2\varepsilon_1} \right| \right) \Big|_{z_-}^{z_+},$$

и, согласно пунктам 1.2.5.9 и 1.2.5.11 в [94],

$$J_{14} = \frac{1}{\delta_-} \ln \left| \frac{z}{z + \delta_-/(2\varepsilon_1)} \right| \Big|_{z_-}^{z_+},$$

$$J_{15} = \frac{1}{2\varepsilon_1} \left( \frac{4\varepsilon_1^2}{\delta_-^2} \cdot \frac{1}{z} - \frac{2\varepsilon_1}{\delta_-} \cdot \frac{1}{2z^2} - \frac{8\varepsilon_1^3}{\delta_-^3} \ln \left| \frac{z + \delta_-/(2\varepsilon_1)}{z} \right| \right) \Big|_{z_-}^{z_+}.$$

Если  $\delta_+ = 0$  и  $\varepsilon_1 = 0$ , то

$$J_0 = \frac{z}{\delta_-} \Big|_{z_-}^{z_+}, \quad J_{13} = \frac{z^2}{2\delta_-} \Big|_{z_-}^{z_+}, \quad J_{14} = \frac{\ln z}{\delta_-} \Big|_{z_-}^{z_+}, \quad J_{15} = -\frac{1}{2\delta_-} \cdot \frac{1}{z^2} \Big|_{z_-}^{z_+}.$$

Здесь использовался тот факт, что  $z_{\pm} > 0$ .

#### 1.1.4 Вычисление интеграла $J_1(H)$ при $\chi_1 = 0$

Поскольку  $\alpha_0 > 0$ , подкоренное выражение в  $J_1(H)$  принимает вид

$$\alpha_0^2 U^2 + 2\beta_0 U + \chi_0 = \alpha_0^2 \left( U + \frac{\beta_0}{\alpha_0^2} \right)^2,$$

следовательно

$$J_1(H) = \int_{-h/2}^{h/2} U \ln \left| \varepsilon + \delta_0 U + \alpha_0 \left| U + \frac{\beta_0}{\alpha_0^2} \right| \right| dU.$$

1) Если  $-\beta_0/\alpha_0^2 \in (-h/2, h/2)$ , то

$$J_1(H) = \int_{-h/2}^{-\beta_0/\alpha_0^2} U \ln \left| (\delta_0 - \alpha_0) U + \varepsilon - \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right| dU +$$

$$+ \int_{-\beta_0/\alpha_0^2}^{h/2} U \ln \left| (\delta_0 + \alpha_0) U + \varepsilon + \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right| dU =$$

$$= J_{16} \left( -\frac{h}{2}, -\frac{\beta_0}{\alpha_0^2}, \delta_0 - \alpha_0, \varepsilon - \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right) + J_{16} \left( -\frac{\beta_0}{\alpha_0^2}, \frac{h}{2}, \delta_0 + \alpha_0, \varepsilon + \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right),$$

где введено обозначение

$$J_{16}(U_1, U_2, \kappa_1, \kappa_2) = \int_{U_1}^{U_2} U \ln |\kappa_1 U + \kappa_2| dU.$$

2) Если  $-\beta_0/\alpha_0^2 \in [h/2, +\infty)$ , то

$$J_1(H) = \int_{-h/2}^{h/2} U \ln \left| (\delta_0 - \alpha_0) U + \varepsilon - \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right| dU = J_{16} \left( -\frac{h}{2}, \frac{h}{2}, \delta_0 - \alpha_0, \varepsilon - \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right).$$

3) Если  $-\beta_0/\alpha_0^2 \in (-\infty, -h/2]$ , то

$$J_1(H) = \int_{-h/2}^{h/2} \ln \left| (\delta_0 + \alpha_0) U + \varepsilon + \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right| dU = J_{16} \left( -\frac{h}{2}, \frac{h}{2}, \delta_0 + \alpha_0, \varepsilon + \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right).$$

Вычислим интеграл  $J_{16}(U_1, U_2, \kappa_1, \kappa_2)$  согласно [94, пункт 1.6.5.5].

1) При  $\kappa_1 \neq 0$ :

$$J_{16}(U_1, U_2, \kappa_1, \kappa_2) = \left( \frac{1}{2} \left( U^2 - \frac{\kappa_2^2}{\kappa_1^2} \right) \ln |\kappa_1 U + \kappa_2| - \frac{1}{2} \left( \frac{U^2}{2} - \frac{\kappa_2 U}{\kappa_1} \right) \right) \Big|_{U_1}^{U_2}.$$

2) При  $\kappa_1 = 0$ :

$$J_{16}(U_1, U_2, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{(U_2^2 - U_1^2)}{2} \ln |\kappa_2|.$$

### 1.1.5 Вычисление интеграла $J_2(H)$

I. Пусть  $\chi_1 > 0$ .

Интеграл  $J_2$  вычисляется согласно [94, пункт 1.2.41.8] и имеет вид

$$\begin{aligned} J_2(H) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sqrt{(\alpha_0 U + \beta_0/\alpha_0)^2 + \chi_1^2} dU = \\ &= \frac{1}{\alpha_0} \int_{-h/2}^{h/2} \sqrt{(\alpha_0 U + \beta_0/\alpha_0)^2 + \chi_1^2} d(\alpha_0 U + \beta_0/\alpha_0) = \\ &= \frac{1}{2\alpha_0} (\alpha_0 U + \beta_0/\alpha_0) ((\alpha_0 U + \beta_0/\alpha_0)^2 + \chi_1^2)^{1/2} \Big|_{U=-h/2}^{U=h/2} + \\ &+ \frac{\chi_1^2}{2\alpha_0} \ln \left| (\alpha_0 U + \beta_0/\alpha_0) + ((\alpha_0 U + \beta_0/\alpha_0)^2 + \chi_1^2)^{1/2} \right| \Big|_{U=-h/2}^{U=h/2}. \end{aligned}$$

II. Пусть  $\chi_1 = 0$ .



Введём обозначения:  $t = \alpha_0 U + \beta_0/\alpha_0$ ,  $t_{\pm} = \alpha_0(\pm h/2) + \beta_0/\alpha_0$ . Поскольку  $\alpha_0 > 0$ , и, очевидно,  $t_+ > t_-$ , получаем

$$J_2(H) = \int_{-h/2}^{h/2} \sqrt{(\alpha_0 U + \beta_0/\alpha_0)^2} dU = \frac{1}{\alpha_0} \int_{t_-}^{t_+} |t| dt,$$

$$J_2(H) = \begin{cases} (t_+^2 - t_-^2)/(2\alpha_0) & t_- \geq 0, \\ (t_+^2 + t_-^2)/(2\alpha_0) & t_- < 0, t_+ > 0, \\ -(t_+^2 - t_-^2)/(2\alpha_0) & t_- < 0, t_+ \leq 0. \end{cases} \quad (32)$$

### 1.1.6 Квадратурная формула для потенциала простого слоя

Из приведённых рассуждений вытекает следующий результат.

**Теорема 1.1.** Пусть  $\Gamma$  — простая гладкая замкнутая поверхность класса  $C^3$ , ограничивающая объёмно-односвязную внутреннюю область. Пусть  $\Gamma$  допускает параметризацию (6) со свойствами (8), (9), и  $\mu(y) \in C^1(\Gamma)$ . Тогда для потенциала простого слоя для уравнения Гельмгольца (18) при  $x \notin \Gamma$  справедливо представление (22), где для  $\tilde{\sigma}_k(x)$  при любом расположении  $x$  выполняется оценка (21). Кроме того, для  $\tilde{\mathcal{S}}_k(x)$  имеет место квадратурная формула (28), где интегралы  $\Theta_{nm}$ ,  $\theta_{nm}$ ,  $J_1(H)$  и  $J_2(H)$  вычислены в явном виде.

Если  $k = 0$ , то потенциал простого слоя для уравнения Гельмгольца переходит в потенциал простого слоя для уравнения Лапласа, соответственно, квадратурная формула при  $k = 0$  принимает вид квадратурной формулы для гармонического потенциала простого слоя.

### 1.1.7 Стандартная квадратурная формула для потенциала простого слоя

Разработанная квадратурная формула (28) является альтернативой стандартной квадратурной формуле для потенциала простого слоя вне поверхности  $\Gamma$ , используемой в инженерных расчётах [2, Глава 2]

$$\mathcal{S}_k(x) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mu_{nm} \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|) \frac{hH|\eta(y(u_n, v_m))|}{|x - y(u_n, v_m)|}. \quad (33)$$

Стандартная квадратурная формула получается из формулы (23) заменой канонического интеграла из (24) на его следующее приближенное значение

$$\frac{hH|\eta(y(u_n, v_m))|}{|x - y(u_n, v_m)|}.$$

В инженерных расчетах при вычислении потенциала простого слоя  $\mathcal{V}_k[\mu](x)$  стандартная формула используется для всех точек  $x \notin \Gamma$ , однако вблизи поверхности  $\Gamma$  она даёт большую ошибку в вычислениях.

При  $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$  и  $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$  функцию  $y(u, v)$  можно разложить по формуле Тейлора с центром в точке  $(u_n, v_m)$ , следовательно

$$\frac{1}{|x - y(u, v)|} = \left( \sum_{j=1}^3 (x_j - y_j(u_n, v_m) + O(h + H))^2 \right)^{-1/2} =$$

$$\left( |x - y(u_n, v_m)|^2 \left( 1 + \frac{O(h + H)}{|x - y(u_n, v_m)|} \right) \right)^{-1/2} = \frac{1}{|x - y(u_n, v_m)|} + \frac{O(h + H)}{|x - y(u_n, v_m)|^2}.$$

Тогда получим стандартную квадратурную формулу  $\mathcal{K}_k(x)$  для потенциала  $\mathcal{V}_k[\mu](x)$

$$\mathcal{S}_k(x) = \mathcal{K}_k(x) + \tilde{\mathcal{K}}_k(x),$$

$$\mathcal{K}_k(x) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mu_{nm} \frac{hH |\eta(y(u_n, v_m))| \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|)}{|x - y(u_n, v_m)|},$$

$$|\tilde{\mathcal{K}}_k(x)| \leq \|\mu(y(u, v))\|_{C^1([0,A] \times [0,B])} \left( \frac{1}{(\min_{y \in \Gamma} |x - y|)^2} + \frac{1}{\min_{y \in \Gamma} |x - y|} \right) \cdot \text{const} \cdot (h + H),$$

Из приведённых рассуждений вытекает следующий результат.

**Лемма 1.1.** *Стандартная квадратурная формула (33) не обеспечивает равномерной аппроксимации потенциала простого слоя, то есть, при стремлении точки  $x$  к поверхности  $\Gamma$  и фиксированном шаге  $h, H$  ошибка стандартной формулы стремится к бесконечности.*

Главный недостаток стандартной квадратурной формулы при фиксированных  $h$  и  $H$  заключается в том, что она не даёт равномерной аппроксимации потенциала  $\mathcal{V}_k[\mu](x)$  вблизи поверхности  $\Gamma$ , более того, если  $x$  приближается к одной из точек  $y(u_n, v_m) \in \Gamma$ , то слагаемое  $hH|x - y(u_n, v_m)|^{-1}$  в выражении для стандартной формулы неограниченно возрастает и стремится к бесконечности, в то время как сам потенциал  $\mathcal{V}_k[\mu](x)$  является непрерывной и ограниченной функцией во всем пространстве  $R^3$ . Иначе говоря, если точка  $x$  приближается к  $\Gamma$ , то стандартная формула стремится к бесконечности в определенных точках на  $\Gamma$ , тогда как сам потенциал  $\mathcal{V}_k[\mu](x)$  непрерывен при  $x$  стремящемся к любой точке на  $\Gamma$ . Следовательно, стандартная квадратурная формула не сохраняет важнейшее свойство потенциала простого слоя  $\mathcal{V}_k[\mu](x)$ , а именно свойство непрерывности потенциала  $\mathcal{V}_k[\mu](x)$  при переходе через  $\Gamma$ .

### 1.1.8 Численные тесты

Тестирование квадратурных формул для потенциалов простого слоя для уравнений Лапласа и Гельмгольца проведено в случае, когда поверхность  $\Gamma$  является сферой единичного радиуса, которая задана параметрически уравнениями:

$$y_1(u, v) = \sin v \cos u, \quad y_2(u, v) = \sin v \sin u, \quad y_3(u, v) = \cos v, \quad (34)$$

причём  $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ . Отметим, что в данном случае  $|\eta(y(u, v))| = \sin v$  и  $|\eta(y(u, 0))| = |\eta(y(u, \pi))| = 0$  для всех  $u \in [0, 2\pi]$ . Иначе говоря,  $|\eta(y)| = 0$  на полюсах сферы при такой параметризации, но условия теоремы 1.1 выполняются.

В рассматриваемых тестовых примерах для потенциала простого слоя с заданной на единичной сфере плотностью известно явное выражение во всём пространстве, поэтому точные значения потенциала можно сравнить с приближенными, вычисленными по квадратурным формулам. Во всех тестах приближенное значение потенциала простого слоя вычислялось по квадратурной формуле (28) в некоторых точках на вспомогательных сферах, имеющих центры в начале координат и радиусы, равные  $1 \pm \Delta R$ . Тем самым, вспомогательные сферы находятся либо внутри, либо снаружи сферы единичного радиуса, на которой задана плотность потенциала, на расстоянии  $\Delta R$  от неё. Затем были рассчитаны значения абсолютных погрешностей в этих точках, либо относительных погрешностей (когда абсолютная погрешность делится на модуль точного значения потенциала в данной точке), и для каждой вспомогательной сферы определялись максимумы значений этих погрешностей. Найденные погрешности сравниваются с погрешностями, полученными для стандартной и улучшенной квадратурной формулы из [88], [91].

Координаты точек, которые использовались для оценки максимальной абсолютной либо относительной погрешности:

$$x_j^{ql} = Ry_j(u_q, v_l), \quad j = 1, 2, 3, \\ u_q = \frac{2\pi}{2N}q, \quad q = 0, 1, 2; \quad v_l = \frac{\pi}{2M}l, \quad l = 0, \dots, 2M, \quad (35)$$

где  $y_j(u, v)$  определяется формулами (34),  $R$  — радиус вспомогательной сферы. То есть эти точки расположены над и под центрами участков разбиения единичной сферы, серединами границ между такими участками и пересечениями этих границ. Отметим, что эти точки распределены не по всей сфере, а находятся вблизи нулевого меридиана.

Вычисления проводились для различных значений  $M$  и  $N$ . Значения шагов определяются формулами  $h = 2\pi/N$ ,  $H = \pi/M$ . Если  $N = M = 25$ , то  $h \approx 0.25$ ,  $H \approx 0.13$ ; если  $N = M = 50$ , то  $h \approx 0.126$ ,  $H \approx 0.063$ ; если  $N = M = 100$ , то  $h \approx 0.063$ ,  $H \approx 0.031$ .

В таблицах приведены рассчитанные максимальные значения погрешностей. В левом столбце указано отличие радиуса вспомогательной сферы от единицы: для внутренних сфер радиус равен  $1 - \Delta R$ , для внешних  $1 + \Delta R$ . В верхней строке указаны значения  $M, N$ . Первое число в ячейках таблицы - максимальная погрешность для стандартной квадратурной формулы на данной вспомогательной сфере, второе число после точки с запятой - максимальная погрешность на данной сфере для улучшенной квадратурной формулы из [88, 91], а третье число - максимальная погрешность для квадратурной формулы (28).

**Тест 1** для квадратурной формулы в случае уравнения Лапласа. В данном тесте использовалась плотность потенциала  $\mu(y(u, v)) = 4\pi$ , тогда гармонический потенциал простого слоя имеет вид

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) = \begin{cases} 4\pi & \text{при } |x| < 1 \\ \frac{4\pi}{|x|} & \text{при } |x| > 1 \end{cases}.$$

В таблице 1 приведены рассчитанные максимальные значения относительных погрешностей.

**Тест 2** для квадратурной формулы в случае уравнения Лапласа. В данном тесте использовалась плотность потенциала  $\mu(y(u, v)) = \cos u \sin v$ , при этом гармонический потенциал простого слоя имеет вид

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) = \begin{cases} \frac{|x| \cos \varphi \sin \vartheta}{3} & \text{при } |x| < 1, \\ \frac{\cos \varphi \sin \vartheta}{3|x|^2} & \text{при } |x| > 1, \end{cases},$$

где  $\vartheta$  и  $\varphi$  — зенитный и азимутальный углы в сферических координатах с центром в начале координат. Методика вычислений в этом тесте аналогична таковой в тесте 1. Отличие состоит лишь в том, что в формулах (35) теперь  $q = 0, \dots, 2N$ , т.е. точки распределены по всей сфере. В таблице 2 приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей.

**Тест 3** для квадратурной формулы в случае уравнения Гельмгольца. В данном тесте использовалась плотность потенциала  $\mu(y(u, v)) = k$ . Тогда потенциал

$\Delta R$	$M = N = 25$	$M = N = 50$	$M = N = 100$
0.1	4.0E-3; 4.0E-3; 0.0019	9.0E-4; 9.7E-4; 0.00044	2.2E-4; 2.4E-4; 0.00011
0.01	0.21; 0.040; 0.0035	0.042; 0.014; 0.00076	7.1E-3; 4.2E-3; 0.00015
0.001	2.5; 0.065; 0.0042	0.60; 0.038; 0.0011	0.14; 0.017; 0.00026
0.0001	25; 0.069; 0.0043	6.3; 0.045; 0.0012	1.56; 0.027; 0.0003
1E-5	251; 0.069; 0.0043	62.8; 0.046; 0.0012	15.7; 0.028; 0.0003
1E-6	2513; 0.069; 0.0044	628; 0.046; 0.0012	157; 0.028; 0.0003

Внутренние сферы

$\Delta R$	$M = N = 25$	$M = N = 50$	$M = N = 100$
0.1	4.9E-3; 5.8E-3; 0.0015	9.9E-4; 1.4E-3; 0.00035	2.4E-4; 3.4E-4; 8.6E-5
0.01	0.21; 0.048; 0.003	0.043; 0.016; 0.00073	7.2E-3; 4.3E-3; 0.00014
0.001	2.5; 0.075; 0.0035	0.60; 0.046; 0.00045	0.15; 0.019; 0.00026
0.0001	25; 0.070; 0.0043	6.3; 0.047; 0.0011	1.6; 0.031; 0.00021
1E-5	251; 0.069; 0.0043	62.8; 0.046; 0.0011	15.7; 0.029; 0.00029
1E-6	2513; 0.069; 0.0043	628; 0.046; 0.0012	157; 0.029; 0.0003

Внешние сферы

Таблица 1: Максимальная относительная погрешность квадратурных формул в тесте 1.

простого слоя для уравнения Гельмгольца имеет вид

$$\mathcal{V}_k[\mu](x) = \begin{cases} e^{ik} \cdot \frac{\sin(k|x|)}{|x|} & \text{при } |x| < 1, \\ \sin k \cdot \frac{e^{ik|x|}}{|x|} & \text{при } |x| > 1, \end{cases},$$

где  $k = 1$ . Методика вычислений в тесте 3 аналогична таковой в тесте 1. В таблице 3 приведены рассчитанные максимальные значения относительных погрешностей.

**Тест 4** для квадратурной формулы в случае уравнения Гельмгольца. В данном тесте использовалась плотность потенциала  $\mu(y(u, v)) = k^3 \cos v$ . При этом

$\Delta R$	$M = N = 25$	$M = N = 50$	$M = N = 100$
0.1	3.4E-3; 2.7E-3; 0.0024	1.1E-4; 6.4E-4; 5.7E-4	2.8E-7; 1.6E-4; 1.4E-4
0.01	0.21; 4.7E-3; 0.0044	0.042; 1.0E-3; 9.7E-4	7.1E-3; 2.2E-4; 2.0E-4
0.001	2.5; 5.5E-3; 0.0051	0.60; 1.4E-3; 0.0013	0.14; 3.4E-4; 3.1E-4
0.0001	25; 5.6E-3; 0.0052	6.2; 1.5E-3; 0.0014	1.6; 3.7E-4; 3.5E-4
1E-5	251; 0.0056; 0.0053	62.6; 0.0015; 0.0014	15.7; 3.7E-4; 3.5E-4
1E-6	2513; 0.0056; 0.0053	626; 0.0015; 0.0014	157; 3.7E-4; 3.5E-4

### Внутренние сферы

$\Delta R$	$M = N = 25$	$M = N = 50$	$M = N = 100$
0.1	4.1E-3; 3.9E-4; 0.00066	1.6E-4; 8.5E-5; 1.4E-4	6.9E-7; 2.1E-5; 3.4E-5
0.01	0.21; 1.7E-3; 0.002	0.042; 4.2E-4; 5.1E-4	7.1E-3; 6.8E-5; 8.9E-5
0.001	2.5; 4.7E-3; 0.0044	0.60; 5.5E-4; 4.7E-4	0.14; 1.8E-4; 2.1E-4
0.0001	25; 5.5E-3; 0.0052	6.2; 1.4E-3; 0.0013	1.6; 2.8E-4; 2.6E-4
1E-5	251; 0.0056; 0.0053	62.6; 0.0015; 0.0014	15.7; 3.6E-4; 3.4E-4
1E-6	2513; 0.0056; 0.0053	626; 0.0015; 0.0014	157; 3.7E-4; 3.5E-4

### Внешние сферы

Таблица 2: Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 2

потенциал простого слоя имеет вид

$$\mathcal{V}_k[\mu](x) = \begin{cases} (ik - 1)e^{ik} \cdot \frac{k|x| \cos(k|x|) - \sin(k|x|)}{|x|^2} \cos \vartheta & \text{при } |x| < 1, \\ (k \cos k - \sin k) \cdot \frac{(ik|x| - 1)e^{ik|x|}}{|x|^2} \cos \vartheta & \text{при } |x| > 1, \end{cases}$$

где  $\vartheta$  — зенитный угол в сферических координатах с центром в начале координат,  $k = 1$ . Методика вычислений в этом тесте такая же, как и в тесте 2. В таблице 4 приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей.

### 1.1.9 Выводы

Как указано выше, первое число в ячейках таблиц — погрешность стандартной квадратурной формулы, второе число — погрешность улучшенной квадратурной формулы из [88, 91], третье число — погрешность квадратурной формулы (28).

$\Delta R$	$M = N = 25$	$M = N = 50$	$M = N = 100$
0.1	4.3E-3; 4.8E-3; 0.0029	9.7E-4; 1.2E-3; 6.7E-4	2.4E-4; 2.9E-4; 1.7E-4
0.01	0.24; 0.047; 0.0069	0.050; 0.017; 0.0017	8.4E-3; 4.9E-3; 3.8E-4
0.001	2.9; 0.077; 0.008	0.72; 0.045; 0.0022	0.17; 0.021; 5.7E-4
0.0001	30; 0.082; 0.0081	7.4; 0.053; 0.0023	1.9; 0.032; 6.1E-4
1E-5	299; 0.082; 0.0082	74.6; 0.054; 0.0023	18.6; 0.034; 6.1E-4
1E-6	2987; 0.082; 0.0082	746; 0.055; 0.0023	187; 0.034; 6.1E-4

Внутренние сферы

$\Delta R$	$M = N = 25$	$M = N = 50$	$M = N = 100$
0.1	5.4E-3; 6.9E-3; 0.0027	1.1E-3; 1.7E-3; 5.6E-4	2.7E-4; 4.1E-4; 1.4E-4
0.01	0.25; 0.057; 0.0063	0.051; 0.018; 0.0015	8.6E-3; 5.1E-3; 3.4E-4
0.001	2.9; 0.089; 0.0075	0.72; 0.054; 0.0017	0.17; 0.023; 5.2E-4
0.0001	30; 0.083; 0.0081	7.4; 0.056; 0.0022	1.9; 0.037; 5.4E-4
1E-5	299; 0.082; 0.0082	74.6; 0.055; 0.0023	18.7; 0.034; 6.1E-4
1E-6	2987; 0.082; 0.0082	746; 0.055; 0.0023	187; 0.034; 6.1E-4

Внешние сферы

Таблица 3: Максимальная относительная погрешность квадратурных формул в тесте 3

Из таблиц видно, что квадратурная формула (28) даёт второй порядок (по  $H$ ) равномерной сходимости к потенциалу простого слоя и обеспечивает равномерную аппроксимацию потенциала с погрешностью  $O(hH)$ . Погрешность  $O(hH)$  не зависит от расстояния до  $\Gamma$  и справедлива даже на очень малых расстояниях. Улучшенная квадратурная формула из [88, 91] даёт первый порядок (по  $H$ ) равномерной сходимости к потенциалу простого слоя и обеспечивает равномерную аппроксимацию потенциала с погрешностью  $O(H)$ . Тем самым, формула (28) превосходит результат, полученный в [88, 91]. Обе эти формулы сохраняют свойство непрерывности потенциала простого слоя при переходе через поверхность  $\Gamma$ , что также следует из приведенных численных результатов. Из таблиц также вытекает, что стандартная квадратурная формула (см. пункт 1.1.7) не даёт равномерной сходимости к потенциалу простого слоя и не обеспечивает равномерную аппроксимацию потенциала простого слоя, поскольку при фиксированном  $H$  стремится к бесконечности при приближении к поверхности  $\Gamma$ .

Отметим, что в тесте 2 формула (28) не даёт существенного повышения точности по сравнению с улучшенной формулой из [88, 91]. Это объясняется тем,

$\Delta R$	$M = N = 25$	$M = N = 50$	$M = N = 100$
0.1	3.9E-3; 4.4E-3; 0.0013	8.6E-4; 1.1E-3; 3.1E-4	2.1E-4; 2.7E-4; 7.8E-5
0.01	0.097; 0.040; 0.0023	0.019; 0.014; 5.2E-4	2.8E-3; 4.2E-3; 1.1E-4
0.001	1.2; 0.065; 0.0032	0.30; 0.038; 8.0E-4	0.071; 0.017; 1.9E-4
0.0001	13; 0.069; 0.0033	3.1; 0.045; 8.9E-4	0.78; 0.027; 2.3E-4
1E-5	125; 0.069; 0.0034	31.4; 0.046; 9.1E-4	7.84; 0.028; 2.4E-4
1E-6	1254; 0.069; 0.0034	314; 0.046; 9.1E-4	78.5; 0.029; 2.4E-4

#### Внутренние сферы

$\Delta R$	$M = N = 25$	$M = N = 50$	$M = N = 100$
0.1	3.9E-3; 5.4E-3; 7.0E-4	8.8E-4; 1.3E-3; 1.5E-4	2.1E-4; 3.2E-4; 3.8E-5
0.01	0.098; 0.048; 0.0018	0.019; 0.015; 4.8E-4	2.9E-3; 4.3E-3; 1.0E-4
0.001	1.2; 0.074; 0.0028	0.30; 0.046; 5.6E-4	0.071; 0.019; 1.7E-4
0.0001	13; 0.070; 0.0033	3.1; 0.047; 8.5E-4	0.78; 0.031; 1.9E-4
1E-5	125; 0.069; 0.0034	31.4; 0.046; 0.0009	7.84; 0.029; 2.3E-4
1E-6	1254; 0.069; 0.0034	314; 0.046; 9.1E-4	78.5; 0.029; 2.4E-4

#### Внешние сферы

Таблица 4: Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 4

что максимальная погрешность формулы из [88, 91] достигается вблизи полюсов сферы, а в тесте 2 плотность потенциала обращается в ноль на полюсах, за счет чего погрешность формулы из [88, 91] уменьшается. Высокая погрешность формулы из [88, 91] вблизи полюсов сферы вызвана тем, что длина нормали обнуляется на полюсах, но меняется вблизи полюсов наиболее быстро, а формула из [88, 91] не учитывает производные длины нормали. В формуле (28) длина нормали учитывается более точно, чем в формуле из [88, 91], в частности, в (28) учтены производные длины нормали, поэтому в остальных тестах, кроме теста 2, формула (28) показывает более высокую точность.

#### 1.1.10 Прямое значение потенциала простого слоя на поверхности

Используя полученные результаты, можно построить квадратурную формулу для прямого значения потенциала простого слоя, когда точка  $x$  лежит на поверхности  $\Gamma$  в одном из узлов. Пусть  $x = y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$ , и  $y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$  — один из узлов на поверхности  $\Gamma$ . Если  $(n, m) \neq (\hat{n}, \hat{m})$ , (т.е.  $x = y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) \neq y(u_n, v_m)$ ) то



интеграл (24) можно считать приближенно равным функции  $\Theta_{nm}(x)$ , которая найдена в пунктах 1.1.2 – 1.1.5 в явном виде. Остаётся приближенно вычислить интеграл (24) когда  $(n, m) = (\hat{n}, \hat{m})$  (т.е.  $y(u, v)$  принадлежит маленькому кусочку поверхности с центром в точке  $x = y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$ ). В этом случае, применяя формулу Тейлора с центром в точке  $(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$ , находим

$$\begin{aligned} |y(u, v) - x|^2 &\approx \sum_{j=1}^3 ((y_j)'_u(u - u_{\hat{n}}) + (y_j)'_v(v - v_{\hat{m}}))^2 = \\ &= \sum_{j=1}^3 (((y_j)'_u)^2(u - u_{\hat{n}})^2 + ((y_j)'_v)^2(v - v_{\hat{m}})^2 + 2(y_j)'_u(y_j)'_v(u - u_{\hat{n}})(v - v_{\hat{m}})) = \\ &= \alpha^2(u - u_{\hat{n}})^2 + \beta^2(v - v_{\hat{m}})^2 + 2\delta(u - u_{\hat{n}})(v - v_{\hat{m}}) = \\ &= \rho^2(\alpha^2 \cos^2 \phi + \beta^2 \sin^2 \phi + 2\delta \cos \phi \sin \phi), \end{aligned}$$

где  $\rho = \sqrt{(u - u_{\hat{n}})^2 + (v - v_{\hat{m}})^2}$ ,  $\cos \phi = (u - u_{\hat{n}})/\rho$ ,  $\sin \phi = (v - v_{\hat{m}})/\rho$ , формулы для  $\alpha^2$ ,  $\beta^2$ ,  $\delta$  даны в пункте 1.1.2, и в них все производные  $(y_j)'_u$  и  $(y_j)'_v$  берутся в точке  $u = u_{\hat{n}}$ ,  $v = v_{\hat{m}}$ . Рассмотрим канонический интеграл

$$\begin{aligned} &\int_{u_{\hat{n}}-h/2}^{u_{\hat{n}}+h/2} du \int_{v_{\hat{m}}-H/2}^{v_{\hat{m}}+H/2} dv \frac{|\eta(y(u, v))|}{|x - y(u, v)|} \approx |\eta(y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}))| \times \\ &\times \int_{u_{\hat{n}}-h/2}^{u_{\hat{n}}+h/2} du \int_{v_{\hat{m}}-H/2}^{v_{\hat{m}}+H/2} dv \frac{1}{\sqrt{\alpha^2(u - u_{\hat{n}})^2 + \beta^2(v - v_{\hat{m}})^2 + 2\delta(u - u_{\hat{n}})(v - v_{\hat{m}})}} = \\ &= |\eta(y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}))| \mathcal{I}_{\hat{n}, \hat{m}}. \end{aligned}$$

Здесь введено обозначение  $\mathcal{I}_{\hat{n}, \hat{m}}$ . Интеграл  $\mathcal{I}_{\hat{n}, \hat{m}}$  вычислен в [88, 91] и даётся выражением

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\hat{n}, \hat{m}} &= \frac{h}{\beta} \ln \left| z + \sqrt{z^2 + (\alpha/\beta)^2 - (\delta/\beta^2)^2} \right| \Big|_{-H/h+\delta/\beta^2}^{H/h+\delta/\beta^2} - \\ &- \frac{H}{\alpha} \ln \left| z + \sqrt{z^2 - (\delta/\alpha^2)^2 + (\beta/\alpha)^2} \right| \Big|_{h/H+\delta/\alpha^2}^{-h/H+\delta/\alpha^2}. \end{aligned}$$

Из приведенных рассуждений вытекает, что если точка  $x$  лежит на поверхности  $\Gamma$  в узле  $y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$ , то квадратурная формула для прямого значения потенциала простого слоя имеет вид

$$\mathcal{V}_k[\mu](x)|_{x=y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) \in \Gamma} \approx \frac{1}{4\pi} \mu_{\hat{n}\hat{m}} |\eta(y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}))| \mathcal{I}_{\hat{n}, \hat{m}} +$$

Номер теста	$M = N = 25$	$M = N = 50$	$M = N = 100$
1	0.0087; 0.0014	0.0049; 0.00035	0.0026; 8.8E-5
2	0.0011; 0.00099	0.0003; 0.00026	7.8E-5; 6.7E-5
3	0.010; 0.0019	0.0058; 4.9E-4	0.0031; 1.2E-4
4	0.0089; 0.0012	0.0049; 3.1E-4	0.0026; 8.0E-5

Таблица 5: Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тестах 1 — 4.

$$+ \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{n=N-1, m=M-1 \\ n=0, m=0 \\ (n,m) \neq (\hat{n}, \hat{m})}} \mu_{nm} \exp(ik|y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) - y(u_n, v_m)|) \Theta_{nm}(y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})), \quad k \geq 0. \quad (36)$$

При выводе формулы (36) используется соотношение (27) и предположение, что во всех узловых точках вектор нормали  $\eta$  имеет положительную длину, т.е.  $|\eta(y(u_n, v_m))| > 0$  для всех возможных  $n, m$ . Данные условия выполняются, если выполнены условия (8), (9). Квадратурная формула (36) может использоваться для численного решения граничных интегральных уравнений, возникающих при решении краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца методом потенциалов.

Сходимость формулы (36) проверена на тестах 1 — 4 из пункта 1.1.7, полученные результаты приведены в таблице 5, где указана максимальная погрешность вычислений в узловых точках единичной сферы для каждого теста. В таблице по тестам 1 и 3 приводится максимальная относительная погрешность, а по тестам 2 и 4 — максимальная абсолютная погрешность. Для сравнения в таблице 5 приводятся результаты по квадратурной формуле, построенной в [88, 91]. Первое число в таблице 5 — максимальная погрешность квадратурной формулы из [88, 91], а второе число — максимальная погрешность квадратурной формулы (36). Из таблицы 5 следует, что квадратурная формула (36) сходится и аппроксимирует прямое значение потенциала простого слоя с погрешностью  $O(hH)$ . Кроме того, как видно из таблицы 5, квадратурная формула (36) имеет второй порядок сходимости по  $H$ , тогда как квадратурная формула из [88, 91] даёт сходимость первого порядка.

## 1.2 Квадратурная формула для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя

В этом разделе выводится квадратурная формула для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя с гладкой плотностью, заданной на замкнутой либо разомкнутой поверхности. Рассматриваются потенциалы простого слоя для уравнений Лапласа и Гельмгольца. Предложенная квадратурная формула даёт значительно более высокую точность, чем стандартная квадратурная формула, что подтверждается численными тестами. Выведенная квадратурная формула может использоваться при численном решении краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца методом потенциалов и граничных интегральных уравнений.

### 1.2.1 Постановка задачи

Введем в пространстве декартову систему координат  $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ . Пусть  $\Gamma$  — простая гладкая замкнутая поверхность класса  $C^2$ , ограничивающая объёмно-односвязную внутреннюю область [92, с. 201], либо простая гладкая ограниченная разомкнутая поверхность класса  $C^2$ , содержащая свои предельные точки [93, Глава 14, § 1]. Предположим, что поверхность  $\Gamma$  параметризована так, что на нее отображается прямоугольник:

$$\begin{aligned} y = (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma, \quad y_1 = y_1(u, v), \quad y_2 = y_2(u, v), \quad y_3 = y_3(u, v); \\ u \in [0, A], \quad v \in [0, B]; \\ y_j(u, v) \in C^2([0, A] \times [0, B]), \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (37)$$

Потребуем также, чтобы различным внутренним точкам прямоугольника при указанном отображении соответствовали различные точки поверхности. Сферу, поверхность эллипсоида, гладкие поверхности фигур вращения, поверхность тора и многие другие более сложные поверхности можно параметризовать таким образом. Кроме того, сложные поверхности можно разбить на несколько частей и для каждой части ввести свою параметризацию, тогда дальнейшие рассуждения справедливы для каждой такой части. Введём  $N$  точек  $u_n$  с шагом  $h$  на отрезке  $[0, A]$  и  $M$  точек  $v_m$  на отрезке  $[0, B]$  и рассмотрим разбиение прямоугольника  $[0, A] \times [0, B]$ , который отображается на поверхность  $\Gamma$

$$\begin{aligned} A = Nh, \quad B = MH, \quad u_n = (n + 1/2)h, \quad n = 0, \dots, N - 1; \\ v_m = (m + 1/2)H, \quad m = 0, \dots, M - 1. \end{aligned}$$

Тем самым прямоугольник  $[0, A] \times [0, B]$  разбивается на  $N \times M$  маленьких прямоугольничков и через  $(u_n, v_m)$  обозначены серединки этих прямоугольничков. Точки  $y(u_n, v_m)$ , расположенные на  $\Gamma$  для всевозможных  $n, m$ , будем называть узлами.

Известно [93, Глава 14, § 1], что компоненты вектора нормали (не единичного)  $\eta(y) = (\eta_1(y), \eta_2(y), \eta_3(y))$  в точке поверхности  $y = (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma$  выражаются через определители второго порядка формулами:

$$\eta_1 = \begin{vmatrix} (y_2)_u & (y_3)_u \\ (y_2)_v & (y_3)_v \end{vmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{vmatrix} (y_3)_u & (y_1)_u \\ (y_3)_v & (y_1)_v \end{vmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{vmatrix} (y_1)_u & (y_2)_u \\ (y_1)_v & (y_2)_v \end{vmatrix}. \quad (38)$$

Положим  $|\eta(y)| = \sqrt{(\eta_1(y))^2 + (\eta_2(y))^2 + (\eta_3(y))^2}$ . Известно [93, Глава 14, § 1–2], что

$$\int_{\Gamma} F(y) ds_y = \int_0^A du \int_0^B dv F(y(u, v)) |\eta(y(u, v))|.$$

Заметим, что если  $|\eta(y(u, v))| = 0$  в некоторой точке, то функция  $|\eta(y(u, v))|$  может быть недифференцируемой в этой точке. Поэтому дополнительно потребуем, чтобы

$$|\eta(y(u, v))| \in C^1([0, A] \times [0, B]). \quad (39)$$

Тогда для всех возможных  $n, m$ , при  $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$  и  $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$  функция  $|\eta(y(u, v))|$  может быть разложена по формуле Тейлора с остаточным членом 1-го порядка

$$|\eta(y(u, v))| = |\eta(y(u_n, v_m))| + O(h + H). \quad (40)$$

Кроме того, потребуем, чтобы

$$|\eta(y(u, v))| > 0, \quad \forall (u, v) \in ((0, A) \times (0, B)). \quad (41)$$

Из условия (41) следует, что  $|\eta(y(u, v))| \in C^1((0, A) \times (0, B))$ , но условие (39) не следует.

Потенциал простого слоя для уравнения Гельмгольца с заданной на поверхности  $\Gamma$  плотностью  $\mu(y) \in C^0(\Gamma)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_k[\mu](x) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mu(y) e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds_y = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^A du \int_0^B dv \frac{\mu(y(u, v)) \exp(ik|x-y(u, v)|)}{|x-y(u, v)|} |\eta(y(u, v))|, \end{aligned} \quad (42)$$

где  $|x - y(u, v)| = \sqrt{(x_1 - y_1(u, v))^2 + (x_2 - y_2(u, v))^2 + (x_3 - y_3(u, v))^2}$ , и для простоты константа  $k \geq 0$ ; если же  $k = 0$ , то потенциал  $\mathcal{V}_k[\mu](x)$  переходит в гармонический потенциал  $\mathcal{V}_0[\mu](x)$  для уравнения Лапласа.

Пусть  $\mathbf{n}_x = \eta(x)/|\eta(x)|$  — вектор единичной нормали в точке  $x \in \Gamma$ , тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} &= |\eta(x)|^{-1} (\eta(x), \nabla_x) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} = \\ &= \frac{1}{|\eta(x)|} \frac{\exp(ik|x-y|)(ik|x-y| - 1)}{|x-y|^2} \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(x)(x_j - y_j)}{|x-y|}. \end{aligned}$$

Прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя  $\mathcal{V}_k[\mu](x)$  в точке  $x = y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) \in \Gamma$  имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}_k[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds_y = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mu(y) \frac{1}{|\eta(x)|} \frac{\exp(ik|x-y|)(ik|x-y| - 1)}{|x-y|^2} \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(x)(x_j - y_j)}{|x-y|} ds_y = \frac{1}{4\pi|\eta(x)|} \times \\ &\times \int_0^A du \int_0^B dv \mu(y(u, v)) |\eta(y(u, v))| \exp(ik|x-y(u, v)|) (ik|x-y(u, v)| - 1) \times \\ &\times \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(x)(x_j - y_j(u, v))}{|x-y(u, v)|^3} = \\ &= \frac{1}{4\pi|\eta(x)|} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \mu(y(u, v)) |\eta(y(u, v))| \times \\ &\times \exp(ik|x-y(u, v)|) (ik|x-y(u, v)| - 1) \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(x)(x_j - y_j(u, v))}{|x-y(u, v)|^3}. \quad (43) \end{aligned}$$

Известно [6, §27.5], что прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя в наших предположениях является непрерывной на  $\Gamma$  функцией.

В [88, 91] показано, что при  $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$  и  $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$

$$|x - y(u, v)| = |x - y(u_n, v_m)| + O(h + H),$$

$$\exp(ik|x - y(u, v)|) = \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|) + O(h + H),$$

$$\mu(y(u, v)) = \mu_{nm} + o(1),$$

где  $\mu_{nm} = \mu(y(u_n, v_m))$ . Константы в оценках функций, обозначенных как  $O(h + H)$ ,  $o(1)$  не зависят от  $n, m$  и от расположения  $x$  в узлах  $\Gamma$ , поэтому можно записать

$$\mu(y) \exp(ik|x - y(u, v)|) (ik|x - y(u, v)| - 1) =$$

$$= \mu_{nm} \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|)(ik|x - y(u_n, v_m)| - 1) + f_{n,m}(\mu; u, v, x),$$

где для функции  $f_{n,m}(\mu; u, v, x)$  справедлива оценка

$$|f_{n,m}(\mu; u, v, x)| \leq \text{const} \|\mu(y(u, v))\|_{C^0([0,A] \times [0,B])} \tilde{f}(h, H). \quad (44)$$

Множитель  $\tilde{f}(h, H) = o(1)$ , т.е.  $\tilde{f}(h, H) \rightarrow 0$ , при  $h, H \rightarrow 0$ . Оценка (44) выполняется при любом расположении  $x$  в узлах  $\Gamma$  сразу для всех возможных  $n, m$ . Представим (43), в виде

$$\frac{\partial \mathcal{V}_k[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} = \tilde{\mathcal{S}}_k(x) + \tilde{\sigma}_k(x), \quad (45)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}_k(x) &= \frac{1}{4\pi|\eta(x)|} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mu_{nm} \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|)(ik|x - y(u_n, v_m)| - 1) \times \\ &\times \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv |\eta(y(u, v))| \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(x)(x_j - y_j(u, v))}{|x - y(u, v)|^3}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_k(x) &= \frac{1}{4\pi|\eta(x)|} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv |\eta(y(u, v))| f_{n,m}(\mu; u, v, x) \times \\ &\times \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(x)(x_j - y_j(u, v))}{|x - y(u, v)|^3}. \end{aligned}$$

Поскольку поверхность  $\Gamma$  принадлежит классу  $C^2$ , то для всех  $x, y \in \Gamma$  справедливо неравенство [12, Теорема 2.2]:  $|\eta(x), (x - y)| \leq \text{const} |x - y|^2$ . Учитывая это соотношение и неравенство (44), получаем, что для  $\tilde{\sigma}_k(x)$  имеет место оценка

$$|\tilde{\sigma}_k(x)| \leq \frac{c_1}{4\pi} \|\mu(y(u, v))\|_{C^0([0,A] \times [0,B])} \tilde{f}(h, H) \int_0^A du \int_0^B dv \frac{|\eta(y(u, v))|}{|x - y(u, v)|},$$

где константа  $c_1 > 0$ . Заметим, что

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^A du \int_0^B dv \frac{|\eta(y(u, v))|}{|x - y(u, v)|} = \mathcal{V}_0[1](x)$$

— гармонический потенциал простого слоя (42) с единичной плотностью, он непрерывен и равномерно ограничен для всех  $x \in R^3$  (см. [6, § 27]), поэтому

$$|\tilde{\sigma}_k(x)| \leq c_2 \|\mu(y(u, v))\|_{C^0([0,A] \times [0,B])} \tilde{f}(h, H), \quad (47)$$

где константа  $c_2 > 0$ , и оценка выполняется при любом расположении  $x$  в узлах  $\Gamma$ . Следовательно,  $\tilde{\sigma}_k(x) = o(1)$ , если  $h, H \rightarrow 0$ , при любом возможном положении  $x$ .

Согласно (45), нахождение квадратурной формулы для нормальной производной потенциала простого слоя сводится к нахождению квадратурной формулы для  $\tilde{\mathcal{S}}_k(x)$ , а чтобы построить эту квадратурную формулу надо вычислить интеграл в (46), который, в силу (40), можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv |\eta(y(u, v))| \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(x)(x_j - y_j(u, v))}{|x - y(u, v)|^3} \approx \\ & \approx -|\eta(y(u_n, v_m))| \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(x)(y_j(u, v) - x_j)}{|x - y(u, v)|^3}. \end{aligned} \quad (48)$$

Последний интеграл будем называть каноническим, при его вычислении будем различать 2 случая.

В первом случае  $(\hat{n}, \hat{m}) = (n, m)$ , т.е.  $x = y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) = y(u_n, v_m)$ , канонический интеграл обозначим  $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$

$$\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}} = \int_{u_{\hat{n}}-h/2}^{u_{\hat{n}}+h/2} du \int_{v_{\hat{m}}-H/2}^{v_{\hat{m}}+H/2} dv \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(x)(y_j(u, v) - x_j)}{|x - y(u, v)|^3}.$$

Во втором случае  $(\hat{n}, \hat{m}) \neq (n, m)$ , т.е.  $x = y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) \neq y(u_n, v_m)$ , канонический интеграл обозначим  $T_{nm}(x)$

$$T_{nm}(x) = \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(x)(y_j(u, v) - x_j)}{|x - y(u, v)|^3}. \quad (49)$$

Используя обозначения для канонического интеграла, формулу (46) для  $\tilde{\mathcal{S}}_k(x)$  можно преобразовать к следующему виду

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathcal{S}}_k(x) \Big|_{x=y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) \in \Gamma} \approx \frac{1}{4\pi} \mu_{\hat{n}\hat{m}} \mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}} + \frac{1}{4\pi |\eta(x)|} \times \\ & \times \sum_{\substack{n=N-1, m=M-1 \\ n=0, m=0 \\ (n, m) \neq (\hat{n}, \hat{m})}} \mu_{nm} |\eta(y(u_n, v_m))| \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|) (1 - ik|x - y(u_n, v_m)|) T_{nm}(x). \end{aligned} \quad (50)$$

Перейдём к вычислению канонического интеграла.

### 1.2.2 Вычисление канонического интеграла $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$ , когда точка $x$ лежит в области интегрирования

В данном случае интегрирование ведется по прямоугольничку с центром в точке  $(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$ , которой отвечает точка  $y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) = x$  на поверхности  $\Gamma$ . Применяя формулу Тейлора с центром в точке  $(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$ , находим

$$\begin{aligned} |y(u, v) - x|^2 &= |y(u, v) - y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})|^2 \approx \sum_{j=1}^3 ((y_j)'_u (u - u_{\hat{n}}) + (y_j)'_v (v - v_{\hat{m}}))^2 = \\ &= \sum_{j=1}^3 (((y_j)'_u)^2 (u - u_{\hat{n}})^2 + ((y_j)'_v)^2 (v - v_{\hat{m}})^2 + 2(y_j)'_u (y_j)'_v (u - u_{\hat{n}})(v - v_{\hat{m}})) = \\ &= \alpha^2 (u - u_{\hat{n}})^2 + \beta^2 (v - v_{\hat{m}})^2 + 2\delta (u - u_{\hat{n}})(v - v_{\hat{m}}), \\ \alpha^2 &= \sum_{j=1}^3 ((y_j)'_u)^2, \quad \beta^2 = \sum_{j=1}^3 ((y_j)'_v)^2, \quad \delta = \sum_{j=1}^3 (y_j)'_u (y_j)'_v, \end{aligned}$$

где  $(y_j)'_u$  и  $(y_j)'_v$  берутся в точке  $(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$ . Заметим, что  $\alpha^2 \beta^2 - \delta^2 = |\eta(x)|^2$  согласно [93, Гл. 14, § 1], поэтому  $\alpha^2 > 0$  и  $\beta^2 > 0$  в силу условия (41). Далее

$$\begin{aligned} y_j - x_j &\approx (y_j)'_u (u - u_{\hat{n}}) + (y_j)'_v (v - v_{\hat{m}}) + \frac{1}{2} (y_j)''_{uu} (u - u_{\hat{n}})^2 + \frac{1}{2} (y_j)''_{vv} (v - v_{\hat{m}})^2 + \\ &\quad + (y_j)''_{uv} (u - u_{\hat{n}})(v - v_{\hat{m}}), \end{aligned}$$

все производные по  $u, v$  берутся в точке  $(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$ . Легко проверить [93, Глава 14, § 1.2], что

$$\sum_{j=1}^3 \eta_j(x) (y_j)'_u = \sum_{j=1}^3 \eta_j(x) (y_j)'_v = 0,$$

следовательно

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \eta_j(x) (y_j - x_j) &\approx \xi_1 (u - u_{\hat{n}})^2 + \xi_2 (v - v_{\hat{m}})^2 + \xi_3 (u - u_{\hat{n}})(v - v_{\hat{m}}), \\ \xi_1 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \eta_j(x) (y_j)''_{uu}, \quad \xi_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \eta_j(x) (y_j)''_{vv}, \quad \xi_3 = \sum_{j=1}^3 \eta_j(x) (y_j)''_{uv}. \end{aligned}$$

Канонический интеграл  $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$  принимает вид

$$\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}} = \int_{u_{\hat{n}}-h/2}^{u_{\hat{n}}+h/2} du \int_{v_{\hat{m}}-H/2}^{v_{\hat{m}}+H/2} dv \frac{\sum_{j=1}^3 \eta_j(x) (y_j - x_j)}{|x - y|^3} \approx$$



$$\begin{aligned}
&\approx \int_{u_{\hat{n}}-h/2}^{u_{\hat{n}}+h/2} du \int_{v_{\hat{m}}-H/2}^{v_{\hat{m}}+H/2} dv \frac{\xi_1(u-u_{\hat{n}})^2 + \xi_2(v-v_{\hat{m}})^2 + \xi_3(u-u_{\hat{n}})(v-v_{\hat{m}})}{(\alpha^2(u-u_{\hat{n}})^2 + \beta^2(v-v_{\hat{m}})^2 + 2\delta(u-u_{\hat{n}})(v-v_{\hat{m}}))^{3/2}} = \\
&= \int_{-h/2}^{h/2} dU \int_{-H/2}^{H/2} dV \frac{\xi_1 U^2 + \xi_2 V^2 + \xi_3 UV}{(\alpha^2 U^2 + \beta^2 V^2 + 2\delta UV)^{3/2}},
\end{aligned}$$

где  $U = u - u_{\hat{n}}$ ,  $V = v - v_{\hat{m}}$ . Переходя к полярным координатам

$$\rho = \sqrt{U^2 + V^2}, \quad U = \rho \cos \phi, \quad V = \rho \sin \phi,$$

получим

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}} &\approx \int_{u_{\hat{n}}-h/2}^{u_{\hat{n}}+h/2} du \int_{v_{\hat{m}}-H/2}^{v_{\hat{m}}+H/2} dv \frac{\xi_1 \cos^2 \phi + \xi_2 \sin^2 \phi + \xi_3 \cos \phi \sin \phi}{\rho(\alpha^2 \cos^2 \phi + \beta^2 \sin^2 \phi + 2\delta \cos \phi \sin \phi)^{3/2}} = \\
&= 2 \int_{-\arctg(H/h)}^{\arctg(H/h)} d\phi \int_0^{h/(2 \cos \phi)} \rho d\rho \frac{\xi_1 \cos^2 \phi + \xi_2 \sin^2 \phi + \xi_3 \cos \phi \sin \phi}{\rho(\alpha^2 \cos^2 \phi + \beta^2 \sin^2 \phi + 2\delta \cos \phi \sin \phi)^{3/2}} + \\
&+ 2 \int_{\arctg(h/H)}^{\pi - \arctg(h/H)} d\phi \int_0^{H/(2 \sin \phi)} \rho d\rho \frac{\xi_1 \cos^2 \phi + \xi_2 \sin^2 \phi + \xi_3 \cos \phi \sin \phi}{\rho(\alpha^2 \cos^2 \phi + \beta^2 \sin^2 \phi + 2\delta \cos \phi \sin \phi)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Коэффициент 2 возник из-за того, что подынтегральная функция в исходном интеграле не меняется при замене  $U$ ,  $V$  на  $-U$ ,  $-V$ , поэтому интеграл по прямоугольнику равен удвоенному интегралу по треугольнику, который лежит над главной диагональю в прямоугольнике. Сокращая  $\rho$  и вычисля интеграл по  $\rho$ , получим

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}} &\approx h \int_{-\arctg(H/h)}^{\arctg(H/h)} \frac{\xi_1 \cos^2 \phi + \xi_2 \sin^2 \phi + \xi_3 \cos \phi \sin \phi}{\cos \phi (\alpha^2 \cos^2 \phi + \beta^2 \sin^2 \phi + 2\delta \cos \phi \sin \phi)^{3/2}} d\phi + \\
&+ H \int_{\arctg(h/H)}^{\pi - \arctg(h/H)} \frac{\xi_1 \cos^2 \phi + \xi_2 \sin^2 \phi + \xi_3 \cos \phi \sin \phi}{\sin \phi (\alpha^2 \cos^2 \phi + \beta^2 \sin^2 \phi + 2\delta \cos \phi \sin \phi)^{3/2}} d\phi = \\
&= h \int_{-\arctg(H/h)}^{\arctg(H/h)} \frac{\xi_1 + \xi_2 \operatorname{tg}^2 \phi + \xi_3 \operatorname{tg} \phi}{\cos^2 \phi (\alpha^2 + \beta^2 \operatorname{tg}^2 \phi + 2\delta \operatorname{tg} \phi)^{3/2}} d\phi + \\
&+ H \int_{\arctg(h/H)}^{\pi - \arctg(h/H)} \frac{\xi_1 \operatorname{ctg}^2 \phi + \xi_2 + \xi_3 \operatorname{ctg} \phi}{\sin^2 \phi (\alpha^2 \operatorname{ctg}^2 \phi + \beta^2 + 2\delta \operatorname{ctg} \phi)^{3/2}} d\phi = \\
&= h \int_{-\arctg(H/h)}^{\arctg(H/h)} \frac{(\xi_1 + \xi_2 \operatorname{tg}^2 \phi + \xi_3 \operatorname{tg} \phi) d \operatorname{tg} \phi}{(\alpha^2 + \beta^2 \operatorname{tg}^2 \phi + 2\delta \operatorname{tg} \phi)^{3/2}} - \\
&- H \int_{\arctg(h/H)}^{\pi - \arctg(h/H)} \frac{(\xi_1 \operatorname{ctg}^2 \phi + \xi_2 + \xi_3 \operatorname{ctg} \phi) d \operatorname{ctg} \phi}{(\alpha^2 \operatorname{ctg}^2 \phi + \beta^2 + 2\delta \operatorname{ctg} \phi)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Полагая  $t = \operatorname{tg} \phi$  в 1-ом интеграле и  $t = \operatorname{ctg} \phi$  во 2-ом, получим

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}} &\approx h \int_{-H/h}^{H/h} \frac{\xi_1 + \xi_2 t^2 + \xi_3 t}{(\alpha^2 + \beta^2 t^2 + 2\delta t)^{3/2}} dt - H \int_{h/H}^{-h/H} \frac{\xi_1 t^2 + \xi_2 + \xi_3 t}{(\alpha^2 t^2 + \beta^2 + 2\delta t)^{3/2}} dt = \\
&= \frac{h}{\beta^3} \int_{-H/h}^{H/h} \times \\
&\frac{\xi_2(t + \delta/\beta^2)^2 + (t + \delta/\beta^2)(\xi_3 - \xi_2 2\delta/\beta^2) - \xi_2(\delta/\beta^2)^2 + \xi_1 - \delta/\beta^2(\xi_3 - \xi_2 2\delta/\beta^2)}{((\alpha/\beta)^2 + (t + \delta/\beta^2)^2 - (\delta/\beta^2)^2)^{3/2}} dt - \\
&\quad - \frac{H}{\alpha^3} \int_{h/H}^{-h/H} \times \\
&\frac{\xi_1(t + \delta/\alpha^2)^2 + (t + \delta/\alpha^2)(\xi_3 - 2\xi_1\delta/\alpha^2) - \xi_1(\delta/\alpha^2)^2 + \xi_2 - \delta/\alpha^2(\xi_3 - 2\xi_1\delta/\alpha^2)}{((t + \delta/\alpha^2)^2 - (\delta/\alpha^2)^2 + (\beta/\alpha)^2)^{3/2}} dt.
\end{aligned}$$

Сделаем замену  $z = t + \delta/\alpha^2$  и воспользуемся интегралами 1.2.43.17–1.2.43.19 из книги [94]. Тогда получим

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}} &\approx \frac{h}{\beta^3} \int_{-H/h+\delta/\beta^2}^{H/h+\delta/\beta^2} \times \\
&\times \frac{\xi_2 z^2 + z(\xi_3 - 2\xi_2\delta/\beta^2) - \xi_2(\delta/\beta^2)^2 + \xi_1 - \delta/\beta^2(\xi_3 - 2\xi_2\delta/\beta^2)}{(z^2 + (\alpha/\beta)^2 - (\delta/\beta^2)^2)^{3/2}} dz - \\
&- \frac{H}{\alpha^3} \int_{h/H+\delta/\alpha^2}^{-h/H+\delta/\alpha^2} \frac{\xi_1 z^2 + z(\xi_3 - 2\xi_1\delta/\alpha^2) - \xi_1(\delta/\alpha^2)^2 + \xi_2 - \delta/\alpha^2(\xi_3 - 2\xi_1\delta/\alpha^2)}{(z^2 - (\delta/\alpha^2)^2 + (\beta/\alpha)^2)^{3/2}} dz = \\
&= \frac{h}{\beta^3} \left( -\frac{\xi_2 z}{\sqrt{z^2 + (\alpha/\beta)^2 - (\delta/\beta^2)^2}} + \xi_2 \ln \left| z + \sqrt{z^2 + (\alpha/\beta)^2 - (\delta/\beta^2)^2} \right| - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\xi_3 - 2\xi_2\delta/\beta^2}{\sqrt{z^2 + (\alpha/\beta)^2 - (\delta/\beta^2)^2}} + \right. \\
&\quad \left. + z \frac{\xi_2(\delta/\beta^2)^2 + \xi_1 - \xi_3\delta/\beta^2}{((\alpha/\beta)^2 - (\delta/\beta^2)^2)\sqrt{z^2 + (\alpha/\beta)^2 - (\delta/\beta^2)^2}} \right) \Bigg|_{-H/h+\delta/\beta^2}^{H/h+\delta/\beta^2} - \\
&- \frac{H}{\alpha^3} \left( -\frac{\xi_1 z}{\sqrt{z^2 - (\delta/\alpha^2)^2 + (\beta/\alpha)^2}} + \xi_1 \ln \left| z + \sqrt{z^2 - (\delta/\alpha^2)^2 + (\beta/\alpha)^2} \right| - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\xi_3 - 2\xi_1\delta/\alpha^2}{\sqrt{z^2 - (\delta/\alpha^2)^2 + (\beta/\alpha)^2}} + \right.
\end{aligned}$$

$$+z \frac{\xi_1(\delta/\alpha^2)^2 + \xi_2 - \xi_3\delta/\alpha^2}{(-(\delta/\alpha^2)^2 + (\beta/\alpha)^2)\sqrt{z^2 - (\delta/\alpha^2)^2 + (\beta/\alpha)^2}} \Bigg|_{h/H+\delta/\alpha^2}^{-h/H+\delta/\alpha^2}.$$

Таким образом, интеграл  $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$  приближенно вычислен в явном виде.

### 1.2.3 Вычисление канонического интеграла $T_{nm}(x)$ , когда точка $x$ не лежит в области интегрирования

В данном случае интегрирование ведется по прямоугольничку с центром в точке  $(u_n, v_m)$ , которой отвечает точка  $y(u_n, v_m)$  на поверхности  $\Gamma$ . При этом точка  $x$  расположена в другом узле на поверхности  $\Gamma$ , т.е.  $x = y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) \neq y(u_n, v_m)$ . Разложим  $y_j(u, v)$  по формуле Тейлора с центром в точке  $(u_n, v_m)$  до членов первого порядка, тогда для  $j = 1, 2, 3$  получим

$$y_j(u, v) = y_j(u_n, v_m) + D_j + O(H^2 + h^2),$$

где

$$D_j = (y_j)'_u(u - u_n) + (y_j)'_v(v - v_m).$$

Все производные берутся в точке  $(u_n, v_m)$ . Положим

$$r^2 = |x - y(u_n, v_m)|^2 = \sum_{j=1}^3 r_j^2 \neq 0, \quad r_j = y_j(u_n, v_m) - x_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

тогда

$$y_j(u, v) - x_j = r_j + D_j + O(H^2 + h^2), \quad j = 1, 2, 3.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |x - y(u, v)|^2 &= \sum_{j=1}^3 (x_j - y_j(u, v))^2 \approx \sum_{j=1}^3 (r_j^2 + 2r_j D_j + D_j^2) = \\ &= r^2 + 2P(u - u_n) + 2Q(v - v_m) + \alpha^2(u - u_n)^2 + \beta^2(v - v_m)^2 + 2\delta(u - u_n)(v - v_m) = \\ &= \beta^2(V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)^2 - (\delta U + Q)^2/\beta^2 + \alpha^2 U^2 + 2PU + r^2, \end{aligned}$$

где  $U = u - u_n$ ,  $V = v - v_m$ , а

$$P = \sum_{j=1}^3 r_j (y_j)'_u, \quad Q = \sum_{j=1}^3 r_j (y_j)'_v, \quad \alpha^2 = \sum_{j=1}^3 ((y_j)'_u)^2,$$

$$\beta^2 = \sum_{j=1}^3 ((y_j)'_v)^2, \quad \delta = \sum_{j=1}^3 (y_j)'_u (y_j)'_v.$$

Производные по  $u$  и  $v$  берутся в точке  $u = u_n$ ,  $v = v_m$ . Для вычисления

$$\sum_{j=1}^3 \eta_j(x)(y_j - x_j)$$

разложим  $y_j(u, v)$  по формуле Тейлора с центром в точке  $(u_n, v_m)$  до членов второго порядка

$$\begin{aligned} y_j - x_j &\approx r_j + (y_j)'_u(u - u_n) + (y_j)'_v(v - v_m) + \frac{1}{2}(y_j)''_{uu}(u - u_n)^2 + \\ &+ \frac{1}{2}(y_j)''_{vv}(v - v_m)^2 + (y_j)''_{uv}(u - u_n)(v - v_m), \end{aligned}$$

тогда

$$\sum_{j=1}^3 \eta_j(x)(y_j - x_j) = R + \xi_4 U + \xi_5 V + \xi_1 U^2 + \xi_2 V^2 + \xi_3 UV, \quad R = \sum_{j=1}^3 \eta_j(x)r_j,$$

где

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \eta_j(x)(y_j)''_{uu}, \quad \xi_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \eta_j(x)(y_j)''_{vv}, \quad \xi_3 = \sum_{j=1}^3 \eta_j(x)(y_j)''_{uv},$$

$$\xi_4 = \sum_{j=1}^3 \eta_j(x)(y_j)'_u, \quad \xi_5 = \sum_{j=1}^3 \eta_j(x)(y_j)'_v.$$

Производные по  $u$ ,  $v$  берутся в точке  $(u_n, v_m)$ , а компоненты вектора нормали определены в (38). Таким образом,

$$\begin{aligned} T_{nm}(x) &= \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \frac{\sum_{j=1}^3 \eta_j(x)(y_j - x_j)}{|x - y|^3} \approx \int_{-h/2}^{h/2} dU \int_{-H/2}^{H/2} dV \times \\ &\times \frac{R + \xi_4 U + \xi_5 V + \xi_1 U^2 + \xi_2 V^2 + \xi_3 UV}{\beta^3((V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)^2 - (\delta U + Q)^2/\beta^4 + (\alpha^2 U^2 + 2PU + r^2)/\beta^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (51)$$

## 1.2.4 Вычисление интегралов по $dV$

Введём обозначения

$$z = V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2 = V + c, \quad c = \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2, \quad (52)$$

$$\begin{aligned} a &= -c^2 + (\alpha^2 U^2 + 2PU + r^2)/\beta^2 = -(\delta U + Q)^2/\beta^4 + (\alpha^2 U^2 + 2PU + r^2)/\beta^2 = \\ &= \frac{1}{\beta^4} ((\alpha^2 \beta^2 - \delta^2)U^2 + 2(P\beta^2 - \delta Q)U + r^2\beta^2 - Q^2). \end{aligned}$$

Можно показать [93, Гл. 14, § 1], что

$$\alpha^2 \beta^2 - \delta^2 = |\eta(y(u_n, v_m))|^2.$$

Согласно условию (41),  $|\eta(y(u_n, v_m))| > 0$  для всех возможных  $n, m$ , поэтому

$$\alpha^2 \beta^2 - \delta^2 > 0. \quad (53)$$

Отсюда следует, что  $\alpha^2 > 0$  и  $\beta^2 > 0$ . Кроме того, отсюда следует, что  $a \neq 0$ , поскольку  $a$  представлено квадратичным полиномом по  $U$ , в котором коэффициент при  $U^2$  положителен:  $(\alpha^2 \beta^2 - \delta^2)/\beta^4 > 0$ .

Покажем, что  $a \geq 0$ . Положим  $\tilde{D}_j = (y_j)'_u U - (y_j)'_v c$ , где  $c$  определено в (52), и рассмотрим преобразования с учетом введенных обозначений

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 (r_j + \tilde{D}_j)^2 &= \sum_{j=1}^3 (r_j^2 + 2r_j \tilde{D}_j + \tilde{D}_j^2) = r^2 + 2 \sum_{j=1}^3 r_j \tilde{D}_j + \sum_{j=1}^3 \tilde{D}_j^2 = \\ &= r^2 + 2PU - 2Qc + \alpha^2 U^2 + \beta^2 c^2 - 2\delta U c = \\ &= \beta^2 \left( c^2 - 2 \frac{\delta U + Q}{\beta^2} c + \left( \frac{\delta U + Q}{\beta^2} \right)^2 \right) - \frac{(\delta U + Q)^2}{\beta^2} + \alpha^2 U^2 + 2PU + r^2 = \\ &= \beta^2 \left( -c + \frac{\delta U + Q}{\beta^2} \right)^2 - \frac{(\delta U + Q)^2}{\beta^2} + \alpha^2 U^2 + 2PU + r^2 = \\ &= -\frac{(\delta U + Q)^2}{\beta^2} + \alpha^2 U^2 + 2PU + r^2 = a\beta^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Как отмечено выше  $\beta^2 > 0$ , поэтому, поделив полученное соотношение на  $\beta^2$ , заключаем, что  $a \geq 0$ . Следовательно, квадратичный полином, обозначенный через  $a$ , неотрицательный.

Положим

$$b = \xi_2 c^2 - \xi_5 c - \xi_3 U c + R + \xi_4 U + \xi_1 U^2 =$$

$$= U^2 \left( \xi_2 \frac{\delta^2}{\beta^4} + \xi_1 - \xi_3 \frac{\delta}{\beta^2} \right) + U \left( 2\xi_2 \frac{\delta Q}{\beta^4} + \xi_4 - \xi_3 \frac{Q}{\beta^2} - \xi_5 \frac{\delta}{\beta^2} \right) + R - \frac{\xi_5 Q}{\beta^2} + \xi_2 \frac{Q^2}{\beta^4},$$

$$z_{\pm} = \pm H/2 + c = \pm H/2 + (\delta U + Q)/\beta^2.$$

Применяя введенные обозначения, вычислим в (51) интеграл по  $V$ , переходя к переменной  $z$

$$\int_{-H/2}^{H/2} dV \frac{R + \xi_4 U + \xi_5 V + \xi_1 U^2 + \xi_2 V^2 + \xi_3 UV}{((V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)^2 - (\delta U + Q)^2/\beta^4 + (\alpha^2 U^2 + 2PU + r^2)/\beta^2)^{3/2}} =$$

$$= \int_{-H/2}^{H/2} dV \frac{\xi_2 (V + c - c)^2 + (\xi_3 U + \xi_5)(V + c - c) + R + \xi_4 U + \xi_1 U^2}{((V + c)^2 + a)^{3/2}} =$$

$$= \int_{z_-}^{z_+} dz \frac{\xi_2 z^2 + (\xi_3 U + \xi_5 - 2\xi_2 c)z + b}{(z^2 + a)^{3/2}} =$$

$$= \left( \left( \frac{b}{a} - \xi_2 \right) z - \xi_3 U - \xi_5 + 2\xi_2 c \right) \frac{1}{\sqrt{z^2 + a}} \Big|_{z_-}^{z_+} + \xi_2 \ln \left| z + \sqrt{z^2 + a} \right| \Big|_{z_-}^{z_+},$$

где использованы интегралы 1.2.43.17–1.2.43.19 из книги [94]. Заметим, что

$$\xi_2 \int_{-h/2}^{h/2} dU \ln \left| z + \sqrt{z^2 + a} \right| \Big|_{z_-}^{z_+} = \xi_2 \beta \theta_{nm}(x),$$

где функция  $\theta_{nm}(x)$  выведена в разделе 1.3 в явном виде. Интеграл в (51) можно записать в виде

$$T_{nm}(x) \approx \frac{1}{\beta^3} (\xi_2 \beta \theta_{nm}(x) + J(H) - J(-H)).$$

Поскольку функция  $\theta_{nm}(x)$  даётся в разделе 1.3, задача сводится к вычислению интеграла

$$J(\pm H) = \int_{-h/2}^{h/2} dU \frac{(b/a - \xi_2)z_{\pm} - \xi_3 U - \xi_5 + 2\xi_2 c}{\sqrt{z_{\pm}^2 + a}} =$$

$$= \int_{-h/2}^{h/2} dU \frac{(b/a - \xi_2)(\pm H/2 + c) - \xi_3 U - \xi_5 + 2\xi_2 c}{\sqrt{(\pm H/2 + c)^2 + a}}.$$

Достаточно вычислить интеграл  $J(H)$ . Интеграл  $J(-H)$  вычисляется по тем же формулам, что и интеграл  $J(H)$ , в которых  $H$  надо заменить на  $-H$ . Вычислим интеграл  $J(H)$ . Распишем величины, входящие в подынтегральную функцию, в виде многочленов по  $U$  :

$$a = C_2U^2 + C_1U + C_0,$$

$$C_2 = (\alpha^2 - \delta^2/\beta^2)/\beta^2, \quad C_1 = (2P - 2\delta Q/\beta^2)/\beta^2, \quad C_0 = (r^2 - Q^2/\beta^2)/\beta^2;$$

$$z_+^2 + a = B_2U^2 + B_1U + B_0,$$

$$B_2 = \alpha^2/\beta^2, \quad B_1 = (H\delta + 2P)/\beta^2, \quad B_0 = H^2/4 + (HQ + r^2)/\beta^2;$$

$$b = A_2U^2 + A_1U + A_0,$$

$$A_2 = \xi_1 - \xi_3\delta/\beta^2 + \xi_2\delta^2/\beta^4, \quad A_1 = \xi_4 - \xi_5\delta/\beta^2 - \xi_3Q/\beta^2 + 2\xi_2\delta Q/\beta^4,$$

$$A_0 = R - \xi_5Q/\beta^2 + \xi_2Q^2/\beta^4;$$

$$bz_+ = (A_2U^2 + A_1U + A_0)(\delta U/\beta^2 + H/2 + Q/\beta^2) = E_3U^3 + E_2U^2 + E_1U + E_0,$$

$$E_3 = A_2\delta/\beta^2, \quad E_2 = A_2(H/2 + Q/\beta^2) + A_1\delta/\beta^2,$$

$$E_1 = A_1(H/2 + Q/\beta^2) + A_0\delta/\beta^2, \quad E_0 = A_0(H/2 + Q/\beta^2);$$

$$\xi_2z_+ + \xi_3U + \xi_5 - 2\xi_2c = F_1U + F_0, \quad F_1 = \xi_3 - \xi_2\delta/\beta^2, \quad F_0 = \xi_5 - \xi_2Q/\beta^2 + \xi_2H/2.$$

Применяя введенные обозначения, запишем интеграл  $J(H)$  в виде

$$J(H) = J_1 - J_2,$$

$$J_1 = \int_{-h/2}^{h/2} dU \frac{E_3U^3 + E_2U^2 + E_1U + E_0}{(C_2U^2 + C_1U + C_0)\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0}},$$

$$J_2 = \int_{-h/2}^{h/2} dU \frac{F_1U + F_0}{\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0}}.$$

### 1.2.5 Вычисление интегралов по $dU$

Используя деление многочленов и учитывая, что  $C_2 > 0$  в силу (53), приведем интеграл  $J_1$  к виду

$$J_1 = J_{11} + J_{12},$$

$$J_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} dU \frac{L_1U + L_0}{\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0}},$$

$$J_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} dU \frac{S_1 U + S_0}{(C_2 U^2 + C_1 U + C_0) \sqrt{B_2 U^2 + B_1 U + B_0}}, \quad (54)$$

где

$$L_1 = \frac{E_3}{C_2}, \quad L_0 = \frac{E_2 C_2 - E_3 C_1}{C_2^2}, \quad S_1 = E_1 - \frac{E_3 C_0}{C_2} - \frac{C_1 (E_2 C_2 - E_3 C_1)}{C_2^2},$$

$$S_0 = E_0 - \frac{C_0 (E_2 C_2 - E_3 C_1)}{C_2^2}.$$

Отметим, что  $B_1^2 - 4B_2 B_0 \leq 0$ . Если  $B_1^2 - 4B_2 B_0 = 0$  и  $-B_1/(2B_2) \in [-h/2, h/2]$ , то в силу [88, п. 2], [91, п. 3] точка  $x$  лежит на том кусочке касательной плоскости, проведённой в точке  $y(u_n, v_m)$ , по которому идёт интегрирование в каноническом интеграле после линеаризации  $y(u, v)$  вблизи узла  $y(u_n, v_m)$ . Однако точка  $x$  не попадает на этот кусочек касательной плоскости, т.к. лежит в другом узле на  $\Gamma$ . Поэтому если  $B_1^2 - 4B_2 B_0 = 0$ , то  $-B_1/(2B_2) \notin [-h/2, h/2]$ .

Поскольку  $B_2 > 0$ , интегралы  $J_{11}$  и  $J_2$  находятся с помощью табличных интегралов 2.261 и 2.264 из книги [95]

$$J_{11} = \frac{L_1}{B_2} \sqrt{B_2 U^2 + B_1 U + B_0} +$$

$$+ \left( L_0 - \frac{L_1 B_1}{2B_2} \right) \frac{1}{\sqrt{B_2}} \ln \left| 2B_2 U + B_1 + 2\sqrt{B_2} \sqrt{B_2 U^2 + B_1 U + B_0} \right| \Bigg|_{U=-h/2}^{U=h/2},$$

$$J_2 = \frac{F_1}{B_2} \sqrt{B_2 U^2 + B_1 U + B_0} +$$

$$+ \left( F_0 - \frac{F_1 B_1}{2B_2} \right) \frac{1}{\sqrt{B_2}} \ln \left| 2B_2 U + B_1 + 2\sqrt{B_2} \sqrt{B_2 U^2 + B_1 U + B_0} \right| \Bigg|_{U=-h/2}^{U=h/2}.$$

Остается вычислить интеграл  $J_{12}$ . Способ вычисления интеграла зависит от знака дискриминанта квадратного трехчлена  $C_2 U^2 + C_1 U + C_0$ , стоящего в знаменателе подынтегральной функции.

**Первый случай:**  $C_1^2 - 4C_2 C_0 > 0$ . Выше показано, что квадратичный полином, обозначенный как  $a$  — неотрицательный, следовательно его дискриминант неположительный:  $C_1^2 - 4C_2 C_0 \leq 0$ , поэтому первый случай не реализуется.

**Второй случай:**  $C_1^2 - 4C_2 C_0 = 0$ . В этом случае  $C_2 U^2 + C_1 U + C_0 = C_2 (U - U_1)^2$ , где  $U_1 = -C_1/(2C_2)$  — корень многочлена. Применяя соотношение

$$\frac{S_1 U + S_0}{(U - U_1)^2} = \frac{S_1 (U - U_1) + S_0 + U_1 S_1}{(U - U_1)^2} = \frac{S_1}{U - U_1} + \frac{S_0 + U_1 S_1}{(U - U_1)^2},$$



получим

$$J_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{S_1 dU}{C_2(U - U_1)\sqrt{B_2 U^2 + B_1 U + B_0}} + \frac{S_0 + U_1 S_1}{C_2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{dU}{(U - U_1)^2 \sqrt{B_2 U^2 + B_1 U + B_0}}.$$

Либо  $U_1 > h/2$ , либо  $U_1 < -h/2$ . Случай  $U_1 \in [-h/2, h/2]$  не реализуется, т.к. точка  $x$  лежит в узле, отличном от  $y(u_n, v_m)$ , и не попадает на маленький кусочек касательной плоскости вблизи точки  $y(u_n, v_m)$ , по которому ведётся интегрирование в каноническом интеграле после линеаризации  $y(u, v)$  около  $y(u_n, v_m)$ . Сделав замену  $t = 1/(U - U_1)$ , находим [92, ч.1, гл. 7, §10, пункт 5]:

$$t_1 = \frac{2}{h - 2U_1}, \quad t_2 = -\frac{2}{h + 2U_1},$$

$$\begin{aligned} J_{12} &= -\frac{S_1}{C_2} \int_{t_2}^{t_1} \frac{\operatorname{sgn}(t) \cdot dt}{\sqrt{(U_1^2 B_2 + U_1 B_1 + B_0)t^2 + (2B_2 U_1 + B_1)t + B_2}} - \\ &- \frac{S_0 + U_1 S_1}{C_2} \int_{t_2}^{t_1} \frac{\operatorname{sgn}(t) \cdot t dt}{\sqrt{(U_1^2 B_2 + U_1 B_1 + B_0)t^2 + (2B_2 U_1 + B_1)t + B_2}} = \\ &= -\frac{S_1}{C_2} \operatorname{sgn}(C_1) \int_{t_2}^{t_1} \frac{dt}{\sqrt{\omega_2 t^2 + \omega_1 t + B_2}} - \frac{S_0 + U_1 S_1}{C_2} \operatorname{sgn}(C_1) \int_{t_2}^{t_1} \frac{t dt}{\sqrt{\omega_2 t^2 + \omega_1 t + B_2}}, \end{aligned}$$

где  $\omega_1 = 2B_2 U_1 + B_1$ ,  $\omega_2 = U_1^2 B_2 + U_1 B_1 + B_0$ . Как показано выше,  $a \geq 0$ , поэтому и  $\omega_2 \geq 0$ . Если  $\omega_2 > 0$ , то с помощью табличных интегралов 2.261 и 2.264 из книги [95], получаем

$$\begin{aligned} J_{12}(t_2, t_1) &= \frac{-S_1 \operatorname{sgn}(C_1)}{C_2 \sqrt{\omega_2}} \ln \left| 2\omega_2 t + \omega_1 + 2\sqrt{\omega_2} \sqrt{\omega_2 t^2 + \omega_1 t + B_2} \right| \Big|_{t_2}^{t_1} - \\ &- \frac{S_0 + U_1 S_1}{C_2} \operatorname{sgn}(C_1) \left( \frac{1}{\omega_2} \sqrt{\omega_2 t^2 + \omega_1 t + B_2} - \right. \\ &\left. - \frac{\omega_1}{2\omega_2} \frac{1}{\sqrt{\omega_2}} \ln \left| 2\omega_2 t + \omega_1 + 2\sqrt{\omega_2} \sqrt{\omega_2 t^2 + \omega_1 t + B_2} \right| \right) \Big|_{t_2}^{t_1}. \end{aligned}$$

Если  $\omega_2 = 0$ , а  $\omega_1 \neq 0$ , то, пользуясь интегралами 1.2.18.5, 1.2.18.6 из книги [94], находим

$$\begin{aligned} J_{12}(t_2, t_1) &= -\frac{S_1}{C_2} \cdot \frac{2}{\omega_1} \operatorname{sgn}(C_1) \sqrt{\omega_1 t + B_2} \Big|_{t_2}^{t_1} - \\ &- \frac{S_0 + U_1 S_1}{C_2} \operatorname{sgn}(C_1) \frac{2(\omega_1 t - 2B_2)}{3\omega_1^2} \sqrt{\omega_1 t + B_2} \Big|_{t_2}^{t_1}. \end{aligned}$$

Если  $\omega_2 = 0$  и  $\omega_1 = 0$ , то

$$J_{12}(t_2, t_1) = -\frac{S_1}{C_2} \cdot \frac{\operatorname{sgn}(C_1)}{\sqrt{B_2}} t \Big|_{t_2}^{t_1} - \frac{S_0 + U_1 S_1}{C_2} \cdot \frac{\operatorname{sgn}(C_1)}{2\sqrt{B_2}} t^2 \Big|_{t_2}^{t_1}.$$

Тем самым, во втором случае интеграл  $J_{12}$  вычислен явно.

**Третий случай:**  $C_1^2 - 4C_2C_0 < 0$ . В этом случае многочлен  $C_2U^2 + C_1U + C_0$  неприводимый. Рассмотрим различные варианты вычисления интеграла  $J_{12}$  из (54), воспользовавшись методом, предложенным в [92, ч.1, гл. 7, §10, пункт 5, (7.75)] или в [95, раздел 2.25].

**Вариант 1.** Если  $B_1 = B_2C_1/C_2$ , то в интеграле  $J_{12}$  достаточно сделать замену  $U = t - C_1/(2C_2)$ . Пусть, кроме того

$$t_1 = \frac{h}{2} + \frac{C_1}{2C_2}, \quad t_2 = -\frac{h}{2} + \frac{C_1}{2C_2}, \quad t_2 < t_1,$$

тогда

$$\begin{aligned} J_{12} &= \int_{t_2}^{t_1} \frac{[S_1 t + (-S_1 C_1/(2C_2) + S_0)] dt}{C_2 [t^2 + C_0/C_2 - C_1^2/(4C_2^2)] \sqrt{B_2 t^2 + B_0 - B_2 C_1^2/(4C_2^2)}} = \\ &= \frac{1}{C_2} \left( \frac{S_1}{2} \int_{t=t_2}^{t=t_1} \frac{dt^2}{[t^2 + \sigma_1] \sqrt{B_2 t^2 + \sigma_2}} + \left( -\frac{S_1 C_1}{2C_2} + S_0 \right) \int_{t_2}^{t_1} \frac{dt}{[t^2 + \sigma_1] \sqrt{B_2 t^2 + \sigma_2}} \right), \end{aligned}$$

где

$$\sigma_1 = \frac{C_0}{C_2} - \frac{C_1^2}{4C_2^2} > 0, \quad \sigma_2 = B_0 - \frac{B_2 C_1^2}{4C_2^2} \geq 0.$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} J_{121} &= \frac{S_1}{2C_2} \int_{t=t_2}^{t=t_1} \frac{dt^2}{[t^2 + \sigma_1] \sqrt{B_2 t^2 + \sigma_2}}, \\ J_{122} &= \frac{1}{C_2 \sqrt{B_2}} \left( -\frac{S_1 C_1}{2C_2} + S_0 \right) \int_{t_2}^{t_1} \frac{dt}{[t^2 + \sigma_1] \sqrt{t^2 + \sigma_2/B_2}}, \end{aligned}$$

получим

$$J_{12} = J_{121} + J_{122}. \quad (55)$$

Используя табличный интеграл 2.246 из книги [95], находим интеграл  $J_{121}$  в явном виде.

1. Если  $\sigma_1 B_2 - \sigma_2 > 0$ , то

$$J_{121} = \frac{S_1}{C_2 \sqrt{\sigma_1 B_2 - \sigma_2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{B_2 t^2 + \sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1 B_2 - \sigma_2}} \right) \Big|_{t_2}^{t_1}.$$

2. Если  $\sigma_1 B_2 - \sigma_2 < 0$ , то

$$J_{121} = \frac{S_1}{2C_2\sqrt{\sigma_2 - \sigma_1 B_2}} \ln \left| \frac{\sqrt{B_2 t^2 + \sigma_2} - \sqrt{\sigma_2 - \sigma_1 B_2}}{\sqrt{B_2 t^2 + \sigma_2} + \sqrt{\sigma_2 - \sigma_1 B_2}} \right| \Bigg|_{t_2}^{t_1}.$$

3. Если  $\sigma_1 B_2 - \sigma_2 = 0$ , то

$$J_{121} = -\frac{S_1}{C_2\sqrt{B_2 t^2 + \sigma_2}} \Bigg|_{t_2}^{t_1}.$$

Используя табличные интегралы 1.2.43.17, 1.2.45.10, 1.2.45.13 и 1.2.11.10 из книги [94], находим интеграл  $J_{122}$  в явном виде.

1. Если  $\sigma_2 > 0$  и  $\sigma_2 - B_2\sigma_1 < 0$ , то

$$J_{122} = \frac{1}{C_2\sqrt{B_2}} \left( -\frac{S_1 C_1}{2C_2} + S_0 \right) \frac{1}{\sqrt{\sigma_1(\sigma_1 - \sigma_2/B_2)}} \times \\ \times \ln \left| \frac{t\sqrt{\sigma_1 - \sigma_2/B_2} + \sqrt{\sigma_1(t^2 + \sigma_2/B_2)}}{\sqrt{t^2 + \sigma_1}} \right| \Bigg|_{t_2}^{t_1}.$$

2. Если  $\sigma_2 - B_2\sigma_1 > 0$ , то

$$J_{122} = \frac{1}{C_2\sqrt{B_2}} \left( -\frac{S_1 C_1}{2C_2} + S_0 \right) \frac{1}{\sqrt{\sigma_1(\sigma_2/B_2 - \sigma_1)}} \operatorname{arctg} \frac{t\sqrt{\sigma_2/B_2 - \sigma_1}}{\sqrt{\sigma_1(t^2 + \sigma_2/B_2)}} \Bigg|_{t_2}^{t_1}.$$

3. Если  $\sigma_1 - \sigma_2/B_2 = 0$ , то

$$J_{122} = \frac{1}{C_2\sqrt{B_2}} \left( -\frac{S_1 C_1}{2C_2} + S_0 \right) \frac{t}{\sigma_1\sqrt{t^2 + \sigma_1}} \Bigg|_{t_2}^{t_1}.$$

4. Если  $\sigma_2 = 0$  и  $|B_1/(2B_2)| > h/2$ , то

$$J_{122} = \frac{1}{C_2\sqrt{B_2}} \left( -\frac{S_1 C_1}{2C_2} + S_0 \right) \operatorname{sgn}(B_1) \frac{1}{2\sigma_1} \ln \frac{t^2}{|t^2 + \sigma_1|} \Bigg|_{t_2}^{t_1}.$$

Итак, в этом варианте интеграл  $J_{12}$  из (54) вычисляется явно по формуле (55).

**Вариант 2.** Пусть  $B_1 \neq B_2 C_1 / C_2$ . В [88, пункт 2], [91, пункт 3] показано, что квадратный трехчлен под корнем в (54) неотрицателен (этот результат вытекает также и из приведенных в пункте 1.2.4 выкладок), поэтому его дискриминант

неположителен, т.е.  $B_1^2/(4B_2^2) - B_0/B_2 \leq 0$ . Положим  $\chi_1^2 = B_0/B_2 - B_1^2/(4B_2^2) \geq 0$ .  
Далее рассмотрим 2 варианта: **2а** и **2б**.

**Вариант 2а:**  $\chi_1 > 0$ . Преобразуем

$$\begin{aligned} B_2 U^2 + B_1 U + B_0 &= B_2 \left[ \left( U + \frac{B_1}{2B_2} \right)^2 + \chi_1^2 \right] = \\ &= B_2 \chi_1^2 \left[ \left( U + \frac{B_1}{2B_2} \right)^2 / \chi_1^2 + 1 \right] = B_2 \chi_1^2 (\operatorname{sh}^2 t + 1), \end{aligned}$$

где сделана гиперболическая замена

$$\operatorname{sh} t = \left( U + \frac{B_1}{2B_2} \right) / \chi_1, \quad U = \chi_1 \operatorname{sh} t - \frac{B_1}{2B_2}, \quad t = \operatorname{arcsch} \left[ \left( U + \frac{B_1}{2B_2} \right) / \chi_1 \right].$$

Теперь рассмотрим второй квадратный трехчлен в знаменателе (учитывая условие, принятое в **третьем случае**) и линейную функцию в числителе:

$$\begin{aligned} C_2 U^2 + C_1 U + C_0 &= C_2 \left( \chi_1^2 \operatorname{sh}^2 t - \frac{\chi_1 B_1}{B_2} \operatorname{sh} t + \frac{B_1^2}{4B_2^2} \right) + C_1 \chi_1 \operatorname{sh} t + C_0 - \frac{B_1 C_1}{2B_2} = \\ &= C_2 \chi_1^2 \operatorname{sh}^2 t + \left( C_1 \chi_1 - \frac{\chi_1 B_1 C_2}{B_2} \right) \operatorname{sh} t + \frac{B_1^2 C_2}{4B_2^2} - \frac{B_1 C_1}{2B_2} + C_0 = \nu_2 \operatorname{sh}^2 t + \nu_1 \operatorname{sh} t + \nu_0 > 0, \\ S_1 U + S_0 &= S_1 \chi_1 \operatorname{sh} t - \frac{B_1 S_1}{2B_2} + S_0 = \epsilon_1 \operatorname{sh} t + \epsilon_0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \nu_2 &= C_2 \chi_1^2 > 0, \quad \nu_1 = C_1 \chi_1 - \chi_1 B_1 C_2 / B_2, \quad \nu_0 = B_1^2 C_2 / (4B_2^2) - B_1 C_1 / (2B_2) + C_0, \\ \epsilon_1 &= S_1 \chi_1, \quad \epsilon_0 = S_0 - B_1 S_1 / (2B_2). \end{aligned}$$

Поскольку  $\nu_2 \operatorname{sh}^2 t + \nu_1 \operatorname{sh} t + \nu_0 > 0$ , дискриминант этого квадратного трехчлена относительно  $\operatorname{sh} t$  отрицательный, т.е.

$$\nu_1^2 - 4\nu_2\nu_0 < 0. \quad (56)$$

Кроме того,  $\nu_1 \neq 0$  в силу условий, принятых в **варианте 2** и в **варианте 2а**.

Учитывая, что  $dU = \chi_1 \operatorname{ch} t dt$  и  $\operatorname{sh}^2 t + 1 = \operatorname{ch}^2 t$ , запишем

$$J_{12} = \frac{1}{\sqrt{B_2}} \int_{t_-}^{t_+} \operatorname{ch} t \cdot dt \frac{\epsilon_1 \operatorname{sh} t + \epsilon_0}{(\nu_2 \operatorname{sh}^2 t + \nu_1 \operatorname{sh} t + \nu_0) \operatorname{ch} t}, \quad t_{\pm} = \operatorname{arcsch} \left[ \left( \pm \frac{h}{2} + \frac{B_1}{2B_2} \right) / \chi_1 \right].$$

Разобьём знаменатель на произведение двух линейных функций от  $\text{sh } t$  с комплексными коэффициентами

$$J_{12} = \frac{1}{\sqrt{B_2}} \int_{t_-}^{t_+} dt \frac{\epsilon_1 \text{sh } t + \epsilon_0}{\nu_2 (\text{sh } t - G_-)(\text{sh } t - G_+)} = \frac{1}{\nu_2 \sqrt{B_2}} \int_{t_-}^{t_+} dt \left( \frac{\lambda_-}{\text{sh } t - G_-} + \frac{\lambda_+}{\text{sh } t - G_+} \right),$$

где  $G_-$ ,  $G_+$  — комплексные корни уравнения  $\nu_2 \text{sh}^2 t + \nu_1 \text{sh } t + \nu_0 = 0$  относительно  $\text{sh } t$ :

$$G_- = \frac{-\nu_1 - \sqrt{\nu_1^2 - 4\nu_2\nu_0}}{2\nu_2} = g_1 - ig_2, \quad G_+ = \frac{-\nu_1 + \sqrt{\nu_1^2 - 4\nu_2\nu_0}}{2\nu_2} = g_1 + ig_2,$$

$$g_1 = -\frac{\nu_1}{2\nu_2} \neq 0, \quad g_2 = \frac{\sqrt{|\nu_1^2 - 4\nu_2\nu_0|}}{2\nu_2} > 0, \quad g_1, g_2 \in R; \quad G_+ = \overline{G_-}. \quad (57)$$

Отметим, что  $g_2 \neq 0$  в силу (56). Коэффициенты  $\lambda_{\pm}$  зависят от  $G_{\pm}$ :

$$\lambda_- = \frac{\epsilon_1 G_- + \epsilon_0}{G_- - G_+} = \frac{\epsilon_1 G_- + \epsilon_0}{-2g_2 i}, \quad \lambda_+ = \frac{\epsilon_1 G_+ + \epsilon_0}{G_+ - G_-} = \frac{\epsilon_1 G_+ + \epsilon_0}{2g_2 i}. \quad (58)$$

Рассмотрим

$$\frac{\lambda_{\pm}}{\text{sh } t - G_{\pm}} = \frac{\lambda_{\pm}}{(e^t - e^{-t})/2 - G_{\pm}} \cdot \frac{e^t}{e^t} = \frac{2\lambda_{\pm} e^t}{e^{2t} - 2G_{\pm} e^t - 1}.$$

Тогда, перейдя к замене  $\zeta = e^t$ ,  $d\zeta = e^t dt$ ,  $dt = d\zeta/\zeta$ ,

$$\zeta_1 = \exp \left( \text{arcsh} \left[ \left( -\frac{h}{2} + \frac{B_1}{2B_2} \right) / \chi_1 \right] \right), \quad \zeta_2 = \exp \left( \text{arcsh} \left[ \left( \frac{h}{2} + \frac{B_1}{2B_2} \right) / \chi_1 \right] \right), \quad (59)$$

получим

$$J_{12} = \frac{1}{\nu_2 \sqrt{B_2}} \int_{t_-}^{t_+} dt \left( \frac{2\lambda_- e^t}{e^{2t} - 2G_- e^t - 1} + \frac{2\lambda_+ e^t}{e^{2t} - 2G_+ e^t - 1} \right) =$$

$$= \frac{1}{\nu_2 \sqrt{B_2}} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{d\zeta}{\zeta} \cdot \left( \frac{2\lambda_- \zeta}{\zeta^2 - 2G_- \zeta - 1} + \frac{2\lambda_+ \zeta}{\zeta^2 - 2G_+ \zeta - 1} \right)$$

$$= \frac{2}{\nu_2 \sqrt{B_2}} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\zeta \left( \frac{\lambda_-}{\zeta^2 - 2G_- \zeta - 1} + \frac{\lambda_+}{\zeta^2 - 2G_+ \zeta - 1} \right).$$

В данном случае нельзя применить стандартные формулы для нахождения первообразной от вещественных подынтегральных функций поскольку в нашем случае коэффициенты комплексные. Введём обозначения:  $Z_{1-} = G_- - \sqrt{G_-^2 + 1}$ ,  $Z_{1+} = G_- + \sqrt{G_-^2 + 1}$ ,

$$Z_{2-} = G_+ - \sqrt{G_+^2 + 1}, \quad Z_{2+} = G_+ + \sqrt{G_+^2 + 1}, \quad (60)$$

$$\gamma_- = \frac{1}{2\sqrt{G_-^2 + 1}}, \quad \gamma_+ = \frac{1}{2\sqrt{G_+^2 + 1}}. \quad (61)$$

Знаменатель в (61) не обращается в ноль, т.к.  $g_1 \neq 0$  как отмечено выше. В результате

$$\begin{aligned} J_{12} &= \frac{2}{\nu_2\sqrt{B_2}} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\zeta \left( \frac{\lambda_-}{(\zeta - Z_{1-})(\zeta - Z_{1+})} + \frac{\lambda_+}{(\zeta - Z_{2-})(\zeta - Z_{2+})} \right) = \\ &= \frac{-2}{\nu_2\sqrt{B_2}} \left[ \lambda_- \gamma_- \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\zeta \left( \frac{1}{\zeta - Z_{1-}} - \frac{1}{\zeta - Z_{1+}} \right) + \lambda_+ \gamma_+ \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\zeta \left( \frac{1}{\zeta - Z_{2-}} - \frac{1}{\zeta - Z_{2+}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Принимая во внимание выражения (57), (58), (60), (61), получаем

$$\lambda_- = \overline{\lambda_+}, \quad Z_{1-} = \overline{Z_{2-}}, \quad Z_{1+} = \overline{Z_{2+}}, \quad \gamma_+ = \overline{\gamma_-}.$$

Тогда

$$J_{12} = \frac{-2}{\nu_2\sqrt{B_2}} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\zeta \left[ \overline{\lambda_+ \gamma_+ \left( \frac{1}{\zeta - Z_{2-}} - \frac{1}{\zeta - Z_{2+}} \right)} + \lambda_+ \gamma_+ \left( \frac{1}{\zeta - Z_{2-}} - \frac{1}{\zeta - Z_{2+}} \right) \right].$$

Так как  $\zeta_1, \zeta_2 \in R$ , то под интегралом находится сумма двух комплексно сопряженных функций, поэтому интеграл  $J_{12}$  вещественный

$$J_{12} = \frac{-4}{\nu_2\sqrt{B_2}} \cdot \operatorname{Re} \left[ \lambda_+ \gamma_+ \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\zeta \left( \frac{1}{\zeta - Z_{2-}} - \frac{1}{\zeta - Z_{2+}} \right) \right].$$

В итоге

$$J_{12} = \frac{-4}{\nu_2\sqrt{B_2}} \cdot \operatorname{Re} \left[ \lambda_+ \gamma_+ \left( \ln(Z_{2-} - \zeta_2) - \ln(Z_{2-} - \zeta_1) - \ln(Z_{2+} - \zeta_2) + \ln(Z_{2+} - \zeta_1) \right) \right]. \quad (62)$$

Логарифмы с комплексными аргументами  $Z_{2\pm} - \zeta_l$ , где  $l = 1, 2$ , преобразуются по формуле

$$\ln(Z_{2\pm} - \zeta_l) = \ln|Z_{2\pm} - \zeta_l| + i \arg(Z_{2\pm} - \zeta_l), \quad l = 1, 2. \quad (63)$$

Рассмотрим величины, входящие в (60), (61). Поскольку  $g_2 = \operatorname{Im} G_+ > 0$ , то можно считать, что  $\arg G_+ \in (0, \pi)$ , тогда  $\arg(G_+^2 + 1) \in (0, 2\pi)$  и  $\arg \sqrt{G_+^2 + 1} = (1/2) \arg(G_+^2 + 1) \in (0, \pi)$ , поэтому  $\operatorname{Im}(\sqrt{G_+^2 + 1}) > 0$ . Более того, если  $\arg G_+ \in (0, \pi/2)$ , то  $\arg(\sqrt{G_+^2 + 1}) \in (0, \pi/2)$ , а если  $\arg G_+ \in (\pi/2, \pi)$ , то  $\arg(\sqrt{G_+^2 + 1}) \in (\pi/2, \pi)$ . Следовательно

$$\operatorname{sgn}(\operatorname{Re} \sqrt{G_+^2 + 1}) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Re} G_+) = \operatorname{sgn} g_1.$$

Положим

$$G_+^2 + 1 = g_1^2 - g_2^2 + 1 + 2g_1g_2i = |G_+^2 + 1| \exp(i\Psi), \quad \Psi = \arg(G_+^2 + 1),$$

$$\cos \Psi = \frac{g_1^2 - g_2^2 + 1}{|G_+^2 + 1|}, \quad |G_+^2 + 1| = \sqrt{(g_1^2 - g_2^2 + 1)^2 + 4g_1^2g_2^2}. \quad (64)$$

Используя тригонометрические формулы [96], получим

$$\sqrt{G_+^2 + 1} = \sqrt{|G_+^2 + 1|} \exp(i\Psi/2) = \sqrt{|G_+^2 + 1|} \left( \cos \frac{\Psi}{2} + i \sin \frac{\Psi}{2} \right),$$

$$\cos \frac{\Psi}{2} = \operatorname{sgn}(g_1) \sqrt{\frac{1 + \cos \Psi}{2}} = \operatorname{sgn}(g_1) \sqrt{\frac{|G_+^2 + 1| + g_1^2 - g_2^2 + 1}{2|G_+^2 + 1|}},$$

$$\sin \frac{\Psi}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \Psi}{2}} = \sqrt{\frac{|G_+^2 + 1| - (g_1^2 - g_2^2 + 1)}{2|G_+^2 + 1|}}. \quad (65)$$

Поскольку  $\arg \sqrt{G_+^2 + 1} = \Psi/2 \in (0, \pi)$ , то  $(-\Psi/2) \in (-\pi, 0)$ . Следовательно

$$\gamma_+ = \frac{1}{2\sqrt{G_+^2 + 1}} = \frac{\exp(-i\Psi/2)}{2\sqrt{|G_+^2 + 1|}},$$

$$\operatorname{Re} \gamma_+ = \frac{\cos(\Psi/2)}{2\sqrt{|G_+^2 + 1|}} = \operatorname{sgn}(g_1) \frac{\sqrt{|G_+^2 + 1| + g_1^2 - g_2^2 + 1}}{2\sqrt{2}|G_+^2 + 1|},$$

$$\operatorname{Im} \gamma_+ = -\frac{\sin(\Psi/2)}{2\sqrt{|G_+^2 + 1|}} = -\frac{\sqrt{|G_+^2 + 1| - (g_1^2 - g_2^2 + 1)}}{2\sqrt{2}|G_+^2 + 1|}, \quad (66)$$

где  $g_1$  и  $g_2$  определяются в (57), а  $|G_+^2 + 1|$  в (64).

**Лемма.** Пусть  $G_+ = g_1 + ig_2$ , где  $g_1, g_2$  — вещественные числа и  $g_2 > 0$ , тогда

$$g_2 = \operatorname{Im} G_+ > |\operatorname{Im} \sqrt{G_+^2 + 1}|.$$

Доказательство. Используя обозначения и соотношения из (64), (65), находим

$$\operatorname{Im} \sqrt{G_+^2 + 1} = \sqrt{|G_+^2 + 1|} \sin \frac{\Psi}{2} =$$

$$= \sqrt{|G_+^2 + 1|} \sqrt{\frac{|G_+^2 + 1| - (g_1^2 - g_2^2 + 1)}{2|G_+^2 + 1|}} = \sqrt{\frac{|G_+^2 + 1| - (g_1^2 - g_2^2 + 1)}{2}}. \quad (67)$$

Поскольку  $g_2 > 0$ , можно проверить, что

$$|G_+^2 + 1| = \sqrt{(g_1^2 - g_2^2 + 1)^2 + 4g_1^2g_2^2} < g_1^2 + g_2^2 + 1,$$

поэтому

$$\frac{1}{2}(|G_+^2 + 1| - (g_1^2 - g_2^2 + 1)) < g_2^2.$$

Из (67) вытекает, что

$$(\operatorname{Im} \sqrt{G_+^2 + 1})^2 = \frac{1}{2}(|G_+^2 + 1| - (g_1^2 - g_2^2 + 1)).$$

Следовательно,

$$(\operatorname{Im} \sqrt{G_+^2 + 1})^2 < g_2^2,$$

откуда  $|\operatorname{Im} \sqrt{G_+^2 + 1}| < g_2$ . Лемма доказана.

**Следствие.** Если выполнены условия леммы, то

$$\operatorname{Im}(Z_{2\pm} - \zeta_l) = \operatorname{Im}(G_+ \pm \sqrt{G_+^2 + 1}) > 0, \quad l = 1, 2.$$

Поскольку  $Z_{2\pm} = (G_+ \pm \sqrt{G_+^2 + 1})$  согласно (60), а  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  — вещественные числа, находим

$$Z_{2\pm} - \zeta_l = \operatorname{Re}(Z_{2\pm} - \zeta_l) + i \operatorname{Im}(Z_{2\pm} - \zeta_l),$$

$$\operatorname{Re}(Z_{2\pm} - \zeta_l) = g_1 \pm \sqrt{|G_+^2 + 1|} \cos \frac{\Psi}{2} - \zeta_l, \quad \operatorname{Im}(Z_{2\pm} - \zeta_l) = g_2 \pm \sqrt{|G_+^2 + 1|} \sin \frac{\Psi}{2},$$

$$|Z_{2\pm} - \zeta_l| = \sqrt{\left(g_1 \pm \sqrt{|G_+^2 + 1|} \cos \frac{\Psi}{2} - \zeta_l\right)^2 + \left(g_2 \pm \sqrt{|G_+^2 + 1|} \sin \frac{\Psi}{2}\right)^2}, \quad l = 1, 2. \quad (68)$$

По следствию к лемме,  $\operatorname{Im}(Z_{2\pm} - \zeta_l) > 0$ , поэтому можно считать, что  $\arg(Z_{2\pm} - \zeta_l) \in (0, \pi)$ , где  $l = 1, 2$ . Следовательно,

$$\arg(Z_{2\pm} - \zeta_l) = \arccos \frac{\operatorname{Re}(Z_{2\pm} - \zeta_l)}{|Z_{2\pm} - \zeta_l|} = \arccos \frac{g_1 \pm \sqrt{|G_+^2 + 1|} \cos(\Psi/2) - \zeta_l}{|Z_{2\pm} - \zeta_l|}, \quad (69)$$

где  $l = 1, 2$ . В (68), (69), используются обозначения из (57), (59), (64), (65).

Из (58) вытекает, что

$$\lambda_+ = \frac{\epsilon_1 G_+ + \epsilon_0}{G_+ - G_-} = \frac{\epsilon_1(g_1 + ig_2) + \epsilon_0}{2ig_2} = \frac{\epsilon_1}{2} - \frac{\epsilon_1 g_1 + \epsilon_0}{2g_2} i,$$

поэтому

$$\operatorname{Re} \lambda_+ = \frac{\epsilon_1}{2}, \quad \operatorname{Im} \lambda_+ = -\frac{\epsilon_1 g_1 + \epsilon_0}{2g_2}. \quad (70)$$



Положим

$$\lambda_+ \gamma_+ = \Lambda_1 + i\Lambda_2,$$

$$\Lambda_1 = \frac{\epsilon_1}{2} \operatorname{Re} \gamma_+ + \frac{\epsilon_1 g_1 + \epsilon_0}{2g_2} \operatorname{Im} \gamma_+, \quad \Lambda_2 = \frac{\epsilon_1}{2} \operatorname{Im} \gamma_+ - \frac{\epsilon_1 g_1 + \epsilon_0}{2g_2} \operatorname{Re} \gamma_+,$$

где  $\operatorname{Re} \gamma_+$  и  $\operatorname{Im} \gamma_+$  однозначно определяются в (66) с использованием (57), (64). Применяя формулу (68), находим сумму логарифмов

$$s_1 = \ln |Z_{2-} - \zeta_2| - \ln |Z_{2-} - \zeta_1| - \ln |Z_{2+} - \zeta_2| + \ln |Z_{2+} - \zeta_1| = -\frac{1}{2} \sum_{q=1}^2 \sum_{l=1}^2 (-1)^{q+l} \times$$

$$\times \ln \left[ \left( g_1 + (-1)^q \sqrt{|G_+^2 + 1|} \cos \frac{\Psi}{2} - \zeta_l \right)^2 + \left( g_2 + (-1)^q \sqrt{|G_+^2 + 1|} \sin \frac{\Psi}{2} \right)^2 \right].$$

Используя формулу (69), вычисляем сумму аргументов

$$s_2 = \arg(Z_{2-} - \zeta_2) - \arg(Z_{2-} - \zeta_1) - \arg(Z_{2+} - \zeta_2) + \arg(Z_{2+} - \zeta_1) = -\sum_{q=1}^2 \sum_{l=1}^2 (-1)^{q+l} \times$$

$$\times \arccos \frac{g_1 + (-1)^q \sqrt{|G_+^2 + 1|} \cos(\Psi/2) - \zeta_l}{\sqrt{\left( g_1 + (-1)^q \sqrt{|G_+^2 + 1|} \cos \frac{\Psi}{2} - \zeta_l \right)^2 + \left( g_2 + (-1)^q \sqrt{|G_+^2 + 1|} \sin \frac{\Psi}{2} \right)^2}}.$$

В формулах для  $s_1$ ,  $s_2$  использованы обозначения из (57), (59), (64), (65). Согласно (62) и (63), получим

$$J_{12} = \frac{-4}{\nu_2 \sqrt{B_2}} \cdot \operatorname{Re} [\lambda_+ \gamma_+ (s_1 + i s_2)] = \frac{-4}{\nu_2 \sqrt{B_2}} \cdot \operatorname{Re} [(\Lambda_1 + i\Lambda_2)(s_1 + i s_2)].$$

В итоге

$$J_{12} = \frac{-4}{\nu_2 \sqrt{B_2}} \cdot (\Lambda_1 s_1 - \Lambda_2 s_2).$$

Таким образом, в **варианте 2а** интеграл  $J_{12}$  вычислен явно.

**Вариант 2б:**  $\chi_1 = 0$ . В этом случае

$$B_2 U^2 + B_1 U + B_0 = B_2 \left[ \left( U + \frac{B_1}{2B_2} \right)^2 + \chi_1^2 \right] = B_2 \left( U + \frac{B_1}{2B_2} \right)^2 = B_2 (U + \Omega)^2,$$

где  $\Omega = B_1/(2B_2)$ . Как отмечено выше, случай  $\Omega \in [-h/2, h/2]$  не реализуется, поэтому считаем, что  $|\Omega| > h/2$ . Тогда

$$J_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} dU \frac{S_1 U + S_0}{(C_2 U^2 + C_1 U + C_0) \sqrt{B_2 U^2 + B_1 U + B_0}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{B_2}} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{(S_1 U + S_0) \operatorname{sgn}(U + \Omega) dU}{(C_2 U^2 + C_1 U + C_0)(U + \Omega)} = \\
&= \frac{\operatorname{sgn}(\Omega)}{\sqrt{B_2}} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{(S_1 U + S_0) dU}{(C_2 U^2 + C_1 U + C_0)(U + \Omega)} = \\
&= \frac{\operatorname{sgn}(\Omega)}{\sqrt{B_2}} \left[ p_1 \int_{-h/2}^{h/2} \frac{U dU}{C_2 U^2 + C_1 U + C_0} + \right. \\
&\quad \left. + p_2 \int_{-h/2}^{h/2} \frac{dU}{C_2 U^2 + C_1 U + C_0} + p_3 \int_{-h/2}^{h/2} \frac{dU}{U + \Omega} \right], \tag{71}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
p_1 &= -\frac{C_2(S_1 \Omega - S_0)}{C_1 \Omega - C_0 - C_2 \Omega^2}, \quad p_2 = \frac{S_0}{\Omega} - \frac{C_0(S_1 \Omega - S_0)}{\Omega(C_1 \Omega - C_0 - C_2 \Omega^2)}, \\
p_3 &= \frac{S_1 \Omega - S_0}{C_1 \Omega - C_0 - C_2 \Omega^2}.
\end{aligned}$$

Интегралы в (71) табличные. Воспользуемся формулами 1.2.8.19 и 1.2.8.13 из [94]. Учитывая, что  $C_1^2 - 4C_2C_0 < 0$ , находим

$$\begin{aligned}
J_{12} &= \frac{\operatorname{sgn}(\Omega)}{\sqrt{B_2}} \left( p_3 \ln |U + \Omega| + \frac{p_1}{2C_2} \ln |C_2 U^2 + C_1 U + C_0| - \right. \\
&\quad \left. - \frac{p_1 C_1}{C_2 \sqrt{4C_2 C_0 - C_1^2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2C_2 U + C_1}{\sqrt{4C_2 C_0 - C_1^2}} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2p_2}{\sqrt{4C_2 C_0 - C_1^2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2C_2 U + C_1}{\sqrt{4C_2 C_0 - C_1^2}} \right) \right) \Big|_{U=-h/2}^{U=h/2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, в **варианте 2б** интеграл  $J_{12}$  вычислен явно.

### 1.2.6 Квадратурная формула для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя

Из приведённых рассуждений вытекает следующий результат.

**Теорема 1.2.** Пусть  $\Gamma$  — простая гладкая замкнутая поверхность класса  $C^2$ , ограничивающая объёмно-односвязную внутреннюю область, либо простая гладкая ограниченная разомкнутая поверхность класса  $C^2$ , содержащая свои предельные точки.

Пусть  $\Gamma$  допускает параметризацию (37) со свойствами (39), (41); и  $\mu(y) \in C^0(\Gamma)$ , а точка  $x$  расположена в одном из узлов на  $\Gamma$ . Тогда для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя для уравнения Гельмгольца (43) справедливо представление (45), где для  $\tilde{\sigma}_k(x)$  при любом расположении  $x$  в узлах  $\Gamma$  выполняется оценка (47). Кроме того, для  $\tilde{S}_k(x)$  имеет место квадратурная формула (50), где интегралы  $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$  и  $T_{nm}(x)$  приближенно вычислены в пунктах 1.2.2 и 1.2.3 в явном виде.

Результаты для прямого значения нормальной производной гармонического потенциала простого слоя получаются из приведенных результатов в частном случае  $k = 0$ .

### 1.2.7 Стандартная квадратурная формула для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя

Квадратурная формула (50) является альтернативой стандартной квадратурной формуле для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя  $K_k(x)$ , используемой в инженерных расчётах [2, Глава 2]

$$K_k(x)|_{x=y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) \in \Gamma} = \frac{1}{4\pi|\eta(x)|} \sum_{\substack{n=0, m=0 \\ (n,m) \neq (\hat{n}, \hat{m})}}^{n=N-1, m=M-1} \mu_{nm} |\eta(y(u_n, v_m))| \exp(ik|x-y(u_n, v_m)|) \times \\ \times (1 - ik|x-y(u_n, v_m)|) \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(x)(y_j(u_n, v_m) - x_j)}{|x-y(u_n, v_m)|^3} hH. \quad (72)$$

Стандартная квадратурная формула получается из формулы (50) обнулением  $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$  и заменой канонического интеграла  $T_{nm}(x)$  из (49) на его следующее приближенное значение

$$hH \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(x)(y_j(u_n, v_m) - x_j)}{|x-y(u_n, v_m)|^3}.$$

Обнуление интеграла  $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$  можно обосновать следующим образом. Интеграл в (48) равен интегралу по кусочку поверхности  $\Gamma$  с центром в точке  $x = y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$ , а он, в свою очередь, приближенно равен интегралу от той же функции по кусочку касательной плоскости, проведенной в точке  $x$ . Вектор нормали  $\eta$  к поверхности в точке  $x$  будет и вектором нормали к касательной плоскости. На касательной плоскости вектор  $(y(u, v) - x)$  ортогонален вектору нормали  $\eta$ , поэтому их скалярное произведение, стоящее в числителе в (48), тождественно равно нулю для всех  $y$ , а значит, и интеграл по кусочку касательной плоскости равен нулю.

Поскольку этот интеграл приближенно равен интегралу  $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$ , умноженному на взятую со знаком минус длину вектора нормали  $\eta$  в точке  $x$ , то можно считать, что и интеграл  $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$  приближенно равен нулю.

### 1.2.8 Численные тесты

Тестирование квадратурных формул для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя для уравнений Лапласа и Гельмгольца проведено в случае, когда поверхность  $\Gamma$  является сферой единичного радиуса, которая задана параметрически уравнениями:

$$y_1(u, v) = \sin v \cos u, \quad y_2(u, v) = \sin v \sin u, \quad y_3(u, v) = \cos v, \quad (73)$$

причём  $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ . В численных тестах используются явные формулы внутри и вне сферы из [88] для потенциалов простого слоя с заданной плотностью.

Согласно [6, гл. 5, § 27, п. 7], прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя на поверхности  $\Gamma$  можно найти по формуле

$$\frac{\partial \mathcal{V}_k[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{\Gamma} = -\frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{\partial \mathcal{V}_k[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{\Gamma^+} + \frac{\partial \mathcal{V}_k[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{\Gamma^-} \right].$$

Здесь поверхность  $\Gamma$  рассматривается как двусторонняя, через  $\Gamma^-$  обозначена сторона, которую мы видим, глядя навстречу вектору нормали  $\mathbf{n}_x$ , а через  $\Gamma^+$  обозначена противоположная сторона. В формуле берутся предельные значения нормальной производной потенциала простого слоя на разных сторонах  $\Gamma$ . Отметим, что направление единичной нормали  $\mathbf{n}_x$  совпадает с направлением нормали  $\eta$ , т.к. вектор  $\mathbf{n}_x$  получается из  $\eta$  в результате нормировки. Знак минус в приведенной формуле, в отличие от [6, гл. 5, § 27, п. 7], объясняется выбором противоположного направления вектора нормали. Пусть теперь  $\Gamma$  — единичная сфера, заданная параметризацией (73), тогда формулы (38) для нормали  $\eta$  определяют внутреннюю нормаль на сфере, а значит,  $\Gamma^-$  — внутренняя сторона единичной сферы, а  $\Gamma^+$  — её внешняя сторона.

В тестах точное прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя в узловых точках сравнивалось с приближенными значениями, вычисленными по квадратурным формулам — по улучшенной формуле (50) в соответствии с Теоремой и по стандартной формуле (72). В каждой узловой точке вычислялась абсолютная погрешность по обеим формулам. Вычисления проводились для разных значений  $M$  и  $N$ . Значения шагов определяются формулами  $h = 2\pi/N$ ,  $H = \pi/M$ . Если  $N/2 = M = 25$ , то  $h = H \approx 0.13$ ; если

$N/2 = M = 50$ , то  $h = H \approx 0.063$ ; если  $N/2 = M = 100$ , то  $h = H \approx 0.031$ . В таблице для каждого теста приводится максимум абсолютной погрешности вычислений по всем узловым точкам сферы. В первой строке таблицы указаны значения  $N, M$ , в последующих строках — максимальные погрешности для стандартной и улучшенной квадратурных формул в каждом тесте.

**Тест 1** для квадратурных формул в случае уравнения Лапласа. В данном тесте использовалась плотность потенциала  $\mu(y(u, v)) = 1$ , тогда гармонический потенциал простого слоя и прямое значение его нормальной производной имеют вид:

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| < 1 \\ \frac{1}{|x|} & \text{при } |x| > 1 \end{cases}, \quad \left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{|x|=1} = \frac{1}{2}.$$

**Тест 2** для квадратурных формул в случае уравнения Лапласа. В данном тесте использовалась плотность потенциала  $\mu(y(u, v)) = \cos u \sin v$ , тогда гармонический потенциал простого слоя и прямое значение его нормальной производной имеют вид:

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) = \begin{cases} \frac{|x| \cos \varphi \sin \vartheta}{3} & \text{если } |x| < 1, \\ \frac{\cos \varphi \sin \vartheta}{3|x|^2} & \text{если } |x| > 1. \end{cases}, \quad \left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{|x|=1} = \frac{\cos \varphi \sin \vartheta}{6},$$

где  $\varphi$  и  $\vartheta$  — азимутальный и зенитный углы в сферических координатах с началом в центре сферы.

**Тест 3** для квадратурных формул в случае уравнения Лапласа. В данном тесте использовалась плотность потенциала  $\mu(y(u, v)) = \cos v$ , тогда гармонический потенциал простого слоя и прямое значение его нормальной производной имеют вид:

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) = \begin{cases} \frac{|x| \cos \vartheta}{3} & \text{при } |x| < 1 \\ \frac{\cos \vartheta}{3|x|^2} & \text{при } |x| > 1 \end{cases}, \quad \left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{|x|=1} = \frac{\cos \vartheta}{6},$$

где  $\vartheta$  — зенитный угол в сферических координатах с началом в центре сферы.

**Тест 4** для квадратурных формул в случае уравнения Гельмгольца. В данном тесте использовалась плотность потенциала  $\mu(y(u, v)) = k$ , тогда потенциал

простого слоя и прямое значение его нормальной производной имеют вид:

$$\mathcal{V}_k[\mu](x) = \begin{cases} e^{ik} \cdot \frac{\sin(k|x|)}{|x|} & \text{если } |x| < 1, \\ \sin k \cdot \frac{e^{ik|x|}}{|x|} & \text{если } |x| > 1. \end{cases},$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}_k[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{|x|=1} = -\frac{e^{ik} \sin k}{2} \cdot (k \operatorname{ctg} k - 2 + ik),$$

где  $k = 1$ .

**Тест 5** для квадратурных формул в случае уравнения Гельмгольца. В данном тесте использовалась плотность потенциала  $\mu(y(u, v)) = k^3 \cos v$ , тогда потенциал простого слоя и прямое значение его нормальной производной имеют вид:

$$\mathcal{V}_k[\mu](x) = \begin{cases} (ik - 1)e^{ik} \cdot \frac{k|x| \cos(k|x|) - \sin(k|x|)}{|x|^2} \cos \vartheta & \text{если } |x| < 1, \\ (k \cos k - \sin k) \cdot \frac{(ik|x| - 1)e^{ik|x|}}{|x|^2} \cos \vartheta & \text{если } |x| > 1. \end{cases},$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}_k[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{|x|=1} = -\frac{e^{ik} \cos \vartheta}{2} (\sin k(-ik^3 + 2k^2 + 4ik - 4) + \cos k(-k^3 - 4ik^2 + 4k)),$$

где  $\vartheta$  — зенитный угол в сферических координатах с началом в центре сферы,  $k = 1$ .

### 1.2.9 Выводы

Результаты расчетов в приведенных тестовых примерах показывают, что погрешность вычислений по улучшенной квадратурной формуле, предложенной в теореме 1.2, в несколько раз меньше, чем погрешность вычислений по стандартной квадратурной формуле. Тем самым, улучшенная квадратурная формула обеспечивает значительно более высокую точность вычислений прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя. Улучшенная квадратурная формула может найти применение при численном решении граничных интегральных уравнений, возникающих в процессе решения краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца методом потенциалов.

номер теста	квадратурная формула	$M = N/2 = 25$	$M = N/2 = 50$	$M = N/2 = 100$
1	стандартная $K_k$	0.02524	0.01255	0.00629
1	улучшенная $\tilde{S}_k$	0.00241	0.00195	0.00117
2	стандартная $K_k$	0.03126	0.01289	0.0063
2	улучшенная $\tilde{S}_k$	0.00094	0.00025	6.4E-5
3	стандартная $K_k$	0.01681	0.00848	0.00444
3	улучшенная $\tilde{S}_k$	0.00338	0.00219	0.00123
4	стандартная $K_k$	0.02491	0.01252	0.00628
4	улучшенная $\tilde{S}_k$	0.00257	0.00181	0.00114
5	стандартная $K_k$	0.01681	0.00848	0.00444
5	улучшенная $\tilde{S}_k$	0.00326	0.00216	0.00122

Таблица 6: Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тестах 1 – 5.

### 1.3 Дополнение - вывод интеграла $I(H)$ , функции $\theta_{nm}(x)$

Целью этого пункта является вычисление следующего интеграла

$$\begin{aligned}
& \int_{-h/2}^{h/2} dU \int_{-H/2}^{H/2} dV \times \\
& \times \frac{1}{\beta \sqrt{(V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)^2 + (-(\delta U + Q)^2/\beta^2 + \alpha^2 U^2 + 2PU + r^2)/\beta^2}} = \\
& = \theta_{nm}(x) = \frac{1}{\beta} (I(H) - I(-H)) \approx \int_{u_n - h/2}^{u_n + h/2} du \int_{v_m - H/2}^{v_m + H/2} dv \frac{1}{|x - y(u, v)|}.
\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения  $\theta_{nm}(x)$  и  $I(H)$ . Интеграл  $I(H)$  возникает после интегрирования по  $V$  с учётом неравенства (26) а также в соответствии с [94,

пункт 1.2.43.13], и имеет вид

$$\begin{aligned}
I(H) &= \int_{-h/2}^{h/2} dU \times \\
&\times \ln \left| \frac{H}{2} + \frac{\delta U + Q}{\beta^2} + \sqrt{\left(\frac{H}{2} + \frac{\delta U + Q}{\beta^2}\right)^2 - \frac{(\delta U + Q)^2}{\beta^4} + \frac{\alpha^2 U^2 + 2PU + r^2}{\beta^2}} \right| = \\
&= \int_{-h/2}^{h/2} dU \ln \left| \varepsilon + \delta_0 U + \sqrt{\alpha_0^2 U^2 + 2\beta_0 U + \chi_0} \right|, \tag{74}
\end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\delta_0 = \frac{\delta}{\beta^2}, \quad \alpha_0^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2} > 0, \quad \varepsilon = \frac{H}{2} + \frac{Q}{\beta^2}, \quad \beta_0 = \frac{\delta H + 2P}{2\beta^2}, \quad \chi_0 = \frac{H^2}{4} + \frac{HQ + r^2}{\beta^2}.$$

Интеграл  $I(H)$  вычислен аналитически в [88, 91], и его вывод приводится в настоящей работе для полноты изложения, поскольку он активно используется в тексте.

Покажем, что в интеграле квадратный трехчлен под корнем неотрицателен. Положим  $\tilde{D}_j = (y_j)'_u U + (y_j)'_v H/2$ , и рассмотрим преобразования

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^3 (r_j + \tilde{D}_j)^2 &= \sum_{j=1}^3 (r_j^2 + 2r_j \tilde{D}_j + \tilde{D}_j^2) = r^2 + 2 \sum_{j=1}^3 r_j \tilde{D}_j + \sum_{j=1}^3 \tilde{D}_j^2 = \\
&= r^2 + 2PU + 2Q \frac{H}{2} + \alpha^2 U^2 + \beta^2 \left(\frac{H}{2}\right)^2 + 2\delta U \frac{H}{2} = \\
&= \beta^2 \left( \left(\frac{H}{2}\right)^2 + 2 \frac{\delta U + Q}{\beta^2} \left(\frac{H}{2}\right) + \left(\frac{\delta U + Q}{\beta^2}\right)^2 \right) - \frac{(\delta U + Q)^2}{\beta^2} + \alpha^2 U^2 + 2PU + r^2 = \\
&= \beta^2 \left( \left(\frac{H}{2} + \frac{\delta U + Q}{\beta^2}\right)^2 - \frac{(\delta U + Q)^2}{\beta^4} + \frac{\alpha^2 U^2 + 2PU + r^2}{\beta^2} \right) = \alpha_0^2 U^2 + 2\beta_0 U + \chi_0 \geq 0.
\end{aligned}$$

Тем самым, квадратный трехчлен неотрицателен, а значит, его дискриминант неположителен, т.е.  $\beta_0^2 - \alpha_0^2 \chi_0 \leq 0$ . Поэтому положим  $\chi_1^2 = \chi_0 - \beta_0^2/\alpha_0^2 \geq 0$  и преобразуем подкоренное выражение в интеграле к виду

$$\alpha_0^2 U^2 + 2\beta_0 U + \chi_0 = (\alpha_0 U + \beta_0/\alpha_0)^2 + \chi_1^2.$$

Теперь надо рассмотреть 2 случая:  $\chi_1 > 0$  и  $\chi_1 = 0$ . Интеграл  $I(-H)$  вычисляется по тем же формулам, что и интеграл  $I(H)$ , но в параметрах  $\varepsilon$ ,  $\beta_0$ ,  $\chi_0$  надо заменить  $H$  на  $-H$ .



### 1.3.1 Вычисление интеграла $I(H)$ при $\chi_1 > 0$

Рассмотрим случай  $\chi_1 > 0$ . Сделаем гиперболическую замену переменной в интеграле  $I(H)$  по формулам

$$U = (\chi_1 \operatorname{sh} t - \beta_0/\alpha_0)/\alpha_0, \quad t = \operatorname{arcsch}(\zeta), \quad \zeta = (\alpha_0 U + \beta_0/\alpha_0)/\chi_1,$$

и обозначим  $t_{\pm} = \operatorname{arcsch}(\zeta_{\pm})$ ,  $\zeta_{\pm} = (\pm\alpha_0 h/2 + \beta_0/\alpha_0)/\chi_1$ , тогда, используя тождество  $\operatorname{sh}^2 t + 1 = \operatorname{ch}^2 t$ , находим

$$I(H) = \frac{\chi_1}{\alpha_0} \int_{t_-}^{t_+} \ln \left| \varepsilon - \frac{\delta_0 \beta_0}{\alpha_0^2} + \frac{\delta_0 \chi_1}{\alpha_0} \operatorname{sh} t + \chi_1 \operatorname{ch} t \right| d \operatorname{sh} t.$$

Обозначив  $\varepsilon_1 = \varepsilon - \delta_0 \beta_0/\alpha_0^2$ ,  $\delta_1 = \delta_0 \chi_1/\alpha_0$ , и интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} I(H) &= \frac{\chi_1}{\alpha_0} \int_{t_-}^{t_+} \ln |\varepsilon_1 + \delta_1 \operatorname{sh} t + \chi_1 \operatorname{ch} t| d \operatorname{sh} t = \\ &= \frac{\chi_1}{\alpha_0} (\ln |\varepsilon_1 + \delta_1 \operatorname{sh} t + \chi_1 \operatorname{ch} t|) \operatorname{sh} t \Big|_{t_-}^{t_+} - \frac{\chi_1}{\alpha_0} I_1 = \\ &= \frac{\chi_1}{\alpha_0} \left( \ln \left| \varepsilon_1 + \delta_1 \zeta + \chi_1 \sqrt{\zeta^2 + 1} \right| \right) \zeta \Big|_{\zeta_-}^{\zeta_+} - \frac{\chi_1}{\alpha_0} I_1, \end{aligned}$$

где

$$I_1 = \int_{t_-}^{t_+} \frac{(\delta_1 \operatorname{ch} t + \chi_1 \operatorname{sh} t) \operatorname{sh} t}{\varepsilon_1 + \delta_1 \operatorname{sh} t + \chi_1 \operatorname{ch} t} dt.$$

В интеграле  $I_1$  сделаем замену переменной  $z = \exp(t) > 0$ , тогда находим

$$\operatorname{sh} t = \frac{z^2 - 1}{2z}, \quad \operatorname{ch} t = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad t = \ln z, \quad dt = \frac{dz}{z},$$

$$z_{\pm} = \exp(t_{\pm}) = \operatorname{sh} t_{\pm} + \operatorname{ch} t_{\pm} = \operatorname{sh} t_{\pm} + \sqrt{\operatorname{sh}^2 t_{\pm} + 1} = \zeta_{\pm} + \sqrt{\zeta_{\pm}^2 + 1},$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{z_-}^{z_+} \frac{(z^2 - 1)(\delta_1(z^2 + 1) + \chi_1(z^2 - 1))}{4\varepsilon_1 z^2 + 2z(z^2 - 1)\delta_1 + 2z(z^2 + 1)\chi_1} \frac{dz}{z} = \\ &= \int_{z_-}^{z_+} \frac{(\delta_1 + \chi_1)z^4 - 2\chi_1 z^2 + \chi_1 - \delta_1}{2z^2((\delta_1 + \chi_1)z^2 + 2\varepsilon_1 z + \chi_1 - \delta_1)} dz = \frac{\delta_+}{2} I_2 - \chi_1 I_3 + \frac{\delta_-}{2} I_4, \end{aligned} \quad (75)$$

где  $\delta_{\pm} = \chi_1 \pm \delta_1 = \chi_1(1 \pm \delta_0/\alpha_0)$ , и введены обозначения

$$I_2 = \int_{z_-}^{z_+} \frac{z^2 dz}{\delta_+ z^2 + 2\varepsilon_1 z + \delta_-}, \quad I_3 = \int_{z_-}^{z_+} \frac{dz}{\delta_+ z^2 + 2\varepsilon_1 z + \delta_-},$$

$$I_4 = \int_{z_-}^{z_+} \frac{dz}{z^2(\delta_+ z^2 + 2\varepsilon_1 z + \delta_-)}.$$

Необходимо пояснить, что если  $\delta_+ = 0$ , то в формуле (75) отсутствует слагаемое  $(\delta_+/2)I_2$ , а если  $\delta_- = 0$ , то в формуле (75) отсутствует слагаемое  $(\delta_-/2)I_4$ . Заметим также, что  $\delta_+$  и  $\delta_-$  не могут обращаться в ноль одновременно. Действительно, если  $\delta_+ = \delta_- = 0$ , то  $\chi_1 = 0$ , а в данном пункте рассматривается случай  $\chi_1 > 0$ . Вычислим интегралы  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$  при разных значениях параметров.

I. Пусть  $\delta_+ \neq 0$ . Используя [94, пункт 1.2.8.13], вычислим интеграл  $I_3$ . Если  $\varepsilon_1^2 - \delta_+ \delta_- > 0$ , то

$$I_3 = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_1^2 - \delta_+ \delta_-}} \ln \left| \frac{\delta_+ z + \varepsilon_1 - \sqrt{\varepsilon_1^2 - \delta_+ \delta_-}}{\delta_+ z + \varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 - \delta_+ \delta_-}} \right| \Big|_{z_-}^{z_+}.$$

Если  $\varepsilon_1^2 - \delta_+ \delta_- < 0$ , то

$$I_3 = \frac{1}{\sqrt{\delta_+ \delta_- - \varepsilon_1^2}} \operatorname{arctg} \frac{\delta_+ z + \varepsilon_1}{\sqrt{\delta_+ \delta_- - \varepsilon_1^2}} \Big|_{z_-}^{z_+}.$$

Если  $\varepsilon_1^2 - \delta_+ \delta_- = 0$ , то

$$I_3 = - \frac{1}{\delta_+ z + \varepsilon_1} \Big|_{z_-}^{z_+}.$$

При  $\delta_+ \neq 0$  интеграл  $I_2$  вычисляется согласно [94, пункт 1.2.8.20] и имеет вид

$$I_2 = \frac{1}{\delta_+} \left( z - \frac{\varepsilon_1}{\delta_+} \ln |\delta_+ z^2 + 2\varepsilon_1 z + \delta_-| \right) \Big|_{z_-}^{z_+} + \frac{2\varepsilon_1^2 - \delta_+ \delta_-}{\delta_+^2} I_3,$$

а интеграл  $I_4$  находится в соответствии с [94, пункт 1.2.8.26] и даётся выражением

$$I_4 = \frac{1}{\delta_-} \left( -\frac{1}{z} - \frac{\varepsilon_1}{\delta_-} \ln \frac{z^2}{|\delta_+ z^2 + 2\varepsilon_1 z + \delta_-|} \right) \Big|_{z_-}^{z_+} + \frac{2\varepsilon_1^2 - \delta_+ \delta_-}{\delta_-^2} I_3, \quad \delta_- \neq 0.$$

Как отмечено выше, если  $\delta_- = 0$ , то слагаемое  $(\delta_-/2)I_4$  в формуле (75) отсутствует, поэтому интеграл  $I_4$  в этом случае вычислять не нужно.

II. Пусть  $\delta_+ = 0$ . Как указано выше, в этом случае в формуле (75) отсутствует слагаемое с интегралом  $I_2$ , поэтому интеграл  $I_2$  вычислять не нужно. Кроме того, как показано выше,  $\delta_- \neq 0$ , если  $\delta_+ = 0$ , поэтому надо рассмотреть 2 случая:  $\varepsilon_1 \neq 0$  и  $\varepsilon_1 = 0$ . Если  $\delta_+ = 0$  и  $\varepsilon_1 \neq 0$ , то

$$I_3 = \frac{1}{2\varepsilon_1} \ln |2\varepsilon_1 z + \delta_-| \Big|_{z_-}^{z_+}, \quad I_4 = \left( -\frac{1}{\delta_- z} + \frac{2\varepsilon_1}{\delta_-^2} \ln \left| \frac{2\varepsilon_1 z + \delta_-}{z} \right| \right) \Big|_{z_-}^{z_+}.$$

Если  $\delta_+ = 0$  и  $\varepsilon_1 = 0$ , то

$$I_3 = \frac{z}{\delta_-} \Big|_{z_-}^{z_+}, \quad I_4 = -\frac{1}{\delta_- z} \Big|_{z_-}^{z_+}.$$

### 1.3.2 Вычисление интеграла $I(H)$ при $\chi_1 = 0$

Поскольку  $\alpha_0 > 0$ , подкоренное выражение в  $I(H)$  принимает вид

$$\alpha_0^2 U^2 + 2\beta_0 U + \chi_0 = \alpha_0^2 \left( U + \frac{\beta_0}{\alpha_0^2} \right)^2,$$

следовательно

$$I(H) = \int_{-h/2}^{h/2} dU \ln \left| \varepsilon + \delta_0 U + \alpha_0 \left| U + \frac{\beta_0}{\alpha_0^2} \right| \right|.$$

1) Если  $-\beta_0/\alpha_0^2 \in (-h/2, h/2)$ , то

$$\begin{aligned} I(H) &= \int_{-h/2}^{-\beta_0/\alpha_0^2} dU \ln |(\delta_0 - \alpha_0) U + \varepsilon - \\ &\quad - \frac{\beta_0}{\alpha_0}| + \int_{-\beta_0/\alpha_0^2}^{h/2} dU \ln \left| (\delta_0 + \alpha_0) U + \varepsilon + \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right| = \\ &= I_5 \left( -\frac{h}{2}, -\frac{\beta_0}{\alpha_0^2}, \delta_0 - \alpha_0, \varepsilon - \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right) + I_5 \left( -\frac{\beta_0}{\alpha_0^2}, \frac{h}{2}, \delta_0 + \alpha_0, \varepsilon + \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right), \end{aligned}$$

где введено обозначение

$$I_5(U_1, U_2, \kappa_1, \kappa_2) = \int_{U_1}^{U_2} dU \ln |\kappa_1 U + \kappa_2|.$$

2) Если  $-\beta_0/\alpha_0^2 \in [h/2, +\infty)$ , то

$$I(H) = \int_{-h/2}^{h/2} dU \ln \left| (\delta_0 - \alpha_0) U + \varepsilon - \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right| = I_5 \left( -\frac{h}{2}, \frac{h}{2}, \delta_0 - \alpha_0, \varepsilon - \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right).$$

3) Если  $-\beta_0/\alpha_0^2 \in (-\infty, -h/2]$ , то

$$I(H) = \int_{-h/2}^{h/2} dU \ln \left| (\delta_0 + \alpha_0) U + \varepsilon + \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right| = I_5 \left( -\frac{h}{2}, \frac{h}{2}, \delta_0 + \alpha_0, \varepsilon + \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right).$$

Вычислим интеграл  $I_5(U_1, U_2, \kappa_1, \kappa_2)$ .

1) При  $\kappa_1 \neq 0$ :

$$I_5(U_1, U_2, \kappa_1, \kappa_2) = \left( -U + \left( U + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) \ln |\kappa_1 U + \kappa_2| \right) \Big|_{U_1}^{U_2}.$$

2) При  $\kappa_1 = 0$ :  $I_5(U_1, U_2, \kappa_1, \kappa_2) = (U_2 - U_1) \ln |\kappa_2|$ .

## 1.4 Применение квадратурных формул к численному решению внешней краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа в трёхмерной области

### 1.4.1 Постановка задачи

Введем в пространстве декартову систему координат  $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ . Пусть  $\Gamma$  — простая гладкая замкнутая поверхность класса  $C^3$ , ограничивающая объёмно-односвязную внутреннюю область  $D$ . Рассмотрим внешнюю краевую задачу Неймана для уравнения Лапласа с непрерывным граничным условием, заданным на  $\Gamma$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & u \in C^1(\overline{R^3 \setminus D}) \cap C^2(R^3 \setminus \overline{D}), \\ \left. \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = f(x), & x \in \Gamma, f(x) \in C^1(\Gamma), \\ u = O\left(\frac{1}{|x|}\right), & |x| \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (76)$$

где  $\partial/\partial \mathbf{n}$  означает правильную нормальную производную [6] к поверхности  $\Gamma$  извне в точке  $x$  и подразумевается, что функция  $u(x)$  имеет правильную нормальную производную на  $\Gamma$ . Найдём решение задачи Неймана в виде потенциала простого слоя  $\mathcal{V}_0[\mu](x)$

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) = \frac{1}{4\pi} \int_{y \in \Gamma} \mu(y) \frac{1}{|x - y|} dS_y, \quad (77)$$

где  $\mu = \mu(y) \in C^0(\Gamma)$  — плотность потенциала. Потенциал простого слоя  $\mathcal{V}_0[\mu](x)$  — гармоническая функция в области  $R^3 \setminus \overline{D}$ . Нормальная производная извне к поверхности  $\Gamma$  даётся выражением [6, 90]

$$\frac{1}{2}\mu(x) + \left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{\Gamma}, \quad x \in \Gamma, \quad (78)$$

где  $\mathcal{V}_0[\mu](x)/\partial \mathbf{n}_x|_{\Gamma}$  — прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя для уравнения Лапласа на поверхности  $\Gamma$ , а  $\mathbf{n}_x$  — внутренняя единичная нормаль. Приравнивая это выражение к функции, заданной на  $\Gamma$ , получаем уравнение

$$\frac{1}{2}\mu(x) + \left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{\Gamma} = f(x), \quad x \in \Gamma. \quad (79)$$

Равенство (79) представляет собой линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода, которое, как известно, однозначно разрешимо [6, §28.3],[90].

Рассмотрим параметризацию поверхности  $\Gamma$ , при котором на нее отображается прямоугольник

$$\begin{aligned} y &= (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma, \quad y_1 = y_1(u, v), \quad y_2 = y_2(u, v), \quad y_3 = y_3(u, v); \\ u &\in [0, A], \quad v \in [0, B]; \\ y_j(u, v) &\in C^2([0, A] \times [0, B]), \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (80)$$

Введём  $N$  точек  $u_n$  с шагом  $h$  на отрезке  $[0, A]$  и  $M$  точек  $v_m$  на отрезке  $[0, B]$  и рассмотрим разбиение прямоугольника  $[0, A] \times [0, B]$ , который отображается на поверхность  $\Gamma$

$$\begin{aligned} A &= Nh, \quad B = MH, \quad u_n = (n + 1/2)h, \quad n = 0, \dots, N - 1; \\ v_m &= (m + 1/2)H, \quad m = 0, \dots, M - 1. \end{aligned}$$

Тем самым прямоугольник  $[0, A] \times [0, B]$  разбивается на  $N \times M$  малых прямоугольников, центры которых обозначены как  $(u_n, v_m)$  и используются в качестве реперных точек в уравнении (79). Введём сквозную нумерацию всех малых прямоугольников размера  $h \times H$  на  $\Gamma$

$$p = mN + n, \quad (81)$$

тогда  $0 \leq p \leq NM - 1$ . Если задан номер  $p$ , то номера  $n, m$  находятся однозначно

$$m = [p/N], \quad n = p - [p/N]N, \quad (82)$$

где  $[\cdot]$  обозначает целую часть неотрицательного вещественного числа. Под  $y^p = y(u_n, v_m)$ ,  $p = 0, 1, \dots, NM - 1$ , будем понимать точку центра малого прямоугольника  $(u_n, v_m)$ , где  $n$  и  $m$  определяются соотношениями (82).

Замечание. Поскольку во многих средах программирования нумерация строк и столбцов матриц начинается с единицы, приведём здесь формулы сквозной нумерации в этом случае

$$p = mN + n, \quad m = \left[ \frac{p-1}{N} \right], \quad n = p - \left[ \frac{p-1}{N} \right] N,$$

где  $n = 1, 2, \dots, N$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$  и  $1 \leq p \leq NM$ .

#### 1.4.2 Применение улучшенной квадратурной формулы

В разделе 1.2 в явном виде получена квадратурная формула для прямого значения потенциала простого слоя на поверхности  $\Gamma$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}_k[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{x=y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) \in \Gamma} \approx \frac{1}{4\pi} \mu^{\hat{n}\hat{m}} \mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}} + \frac{1}{4\pi |\eta(x)|} \times \quad (83)$$

$$\times \sum_{\substack{n=0, m=0 \\ (n,m) \neq (\hat{n}, \hat{m})}}^{n=N-1, m=M-1} \mu_{nm} |\eta(y(u_n, v_m))| \exp(ik|x-y(u_n, v_m)|) (1-ik|x-y(u_n, v_m)|) T_{nm}(x),$$

где интеграл  $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$  вычислен в явном виде в пункте 1.2.2, а интеграл  $T_{nm}(x)$  вычислен в явном виде в разделе 1.2.3. Применяя сквозную нумерацию (81), а также учитывая, что для уравнения Лапласа  $k = 0$ , формула (83) принимает вид

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{x=y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) \in \Gamma} &\approx \frac{1}{4\pi} \mu_{\hat{n}\hat{m}} \mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}} + \frac{1}{4\pi |\eta_{\hat{n}\hat{m}}|} \sum_{\substack{n=0, m=0 \\ (n,m) \neq (\hat{n}, \hat{m})}}^{n=N-1, m=M-1} \mu_{nm} |\eta_{nm}| T_{nm}(x) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \mu_{\hat{p}} \mathcal{J}^{\hat{p}} + \frac{1}{4\pi |\eta_{\hat{p}}|} \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq \hat{p}}}^{NM-1} \mu_p |\eta_p| T_p(x), \end{aligned} \quad (84)$$

где  $\mu_p = \mu(y^p) = \mu_{nm}$  — значения плотности потенциала в центрах малых прямоугольников  $y^p$ ,  $T_p(x) = T_{nm}(x)$ , а  $|\eta_p| = |\eta(y^p)| = |\eta_{nm}|$  — значения модуля нормали в центрах малых прямоугольников. Интеграл  $\mathcal{J}^{\hat{p}} = \mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$ , значение плотности  $\mu_{\hat{p}} = \mu(y^{\hat{p}}) = \mu_{\hat{n}\hat{m}}$  и значения модуля нормали  $|\eta_{\hat{p}}| = |\eta(y^{\hat{p}})| = \eta_{\hat{n}\hat{m}}$  соответствуют случаю, когда точка  $x$  лежит в области интегрирования. В данном случае интегрирование ведется по малому прямоугольнику с центром в точке  $(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$ , которому отвечает точка  $y^{\hat{p}} = y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) = x$  на поверхности  $\Gamma$ .

Таким образом при заданной параметризации поверхности  $\Gamma$  интегральное уравнение (79) сводится к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно  $N \cdot M$  значений неизвестной функции плотности потенциала  $\mu(y^p) = \mu_p$  в точках  $y^p = y(u_n, v_m)$

$$\frac{1}{2} \mu_{\hat{p}} + \frac{1}{4\pi} \mu_{\hat{p}} \mathcal{J}^{\hat{p}} + \frac{1}{4\pi |\eta_{\hat{p}}|} \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq \hat{p}}}^{NM-1} \mu_p |\eta_p| T_p^{\hat{p}} = f_{\hat{p}}, \quad \hat{p} = 0, 1, 2, \dots, NM - 1, \quad (85)$$

где  $f_{\hat{p}} = f(y^{\hat{p}})$  — значения функции граничного условия на поверхности  $\Gamma$ , а  $T_p(x) = T_p(y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})) = T_p(y^{\hat{p}}) = T_p^{\hat{p}}$ .

Домножим систему (85) на  $4\pi$  и запишем её в общем виде

$$\sum_{p=0}^{NM-1} \left( (\mathcal{J}^{\hat{p}} + 2\pi) \Delta_p^{\hat{p}} + \frac{|\eta_p|}{|\eta_{\hat{p}}|} T_p^{\hat{p}} (1 - \Delta_p^{\hat{p}}) \right) \mu_p = 4\pi f_{\hat{p}}, \quad (86)$$

где  $\hat{p} = 0, 1, 2, \dots, NM - 1$  и

$$\Delta_p^{\hat{p}} = \begin{cases} 1, & \text{если } p = \hat{p}, \\ 0, & \text{если } p \neq \hat{p}. \end{cases}$$

Домножим каждое  $\hat{p}$ -ое уравнение системы (86) на  $|\eta_{\hat{p}}|$

$$\sum_{p=0}^{NM-1} (|\eta_{\hat{p}}| (\mathcal{J}^{\hat{p}} + 2\pi) \Delta_p^{\hat{p}} + |\eta_p| T_p^{\hat{p}} (1 - \Delta_p^{\hat{p}})) \mu_p = 4\pi |\eta_{\hat{p}}| f_{\hat{p}}, \quad (87)$$

где  $\hat{p} = 0, 1, 2, \dots, NM-1$ . Запишем систему (87) в матричном виде (см. уравнение (96)).

Обращая матрицу в левой части равенства (96) и умножая обратную матрицу на столбец со значениями функции граничного условия, мы получаем значения плотности потенциала  $\mu_{\hat{p}} = \mu(y^{\hat{p}})$  в центрах малых прямоугольников  $y^{\hat{p}}$ , которые затем будут использованы для вычисления потенциала простого слоя везде вне  $\Gamma$ , решая тем самым исходную краевую задачу.

Для вычисления потенциала простого слоя будем использовать либо квадратурную формулу, полученную в работе [88, 91]

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mu_{nm} \theta_{nm}(x), \quad (88)$$

либо квадратурную формулу, полученную в разделе 1.1

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mu_{nm} \Theta_{nm}(x), \quad (89)$$

где интеграл  $\theta_{nm}(x)$ , выведен в явном виде в работах [88, 91], а интеграл  $\Theta_{nm}(x)$ , выведен в явном виде в пунктах 1.1.2 — 1.1.5. Отличие формул (88) и (89) состоит в том, что при вычислении канонического интеграла  $\Theta_{nm}(x)$  в (89) учитывались производные нормали, как показано в разделе 1.1.

### 1.4.3 Применение стандартной квадратурной формулы

В пункте 1.2.7 была рассмотрена стандартная квадратурная формула для прямого значения потенциала простого слоя на поверхности  $\Gamma$ , часто используемая в инженерных расчётах [2, Глава 2]. Стандартная квадратурная формула получается заменой канонического интеграла при  $x \neq y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$  на его приближенное значение и обнулением канонического интеграла по кусочку поверхности  $\Gamma$  с центром в точке  $x = y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{x=y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) \in \Gamma} \approx \frac{1}{4\pi |\eta_{\hat{n}\hat{m}}|} \sum_{\substack{n=0, m=0 \\ (n,m) \neq (\hat{n}, \hat{m})}}^{n=N-1, m=M-1} \mu_{nm} |\eta_{nm}| \mathcal{B}_{nm}(x) \quad (90)$$



где

$$\mathcal{B}_{nm}(x) = hH \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(x)(y_j(u_n, v_m) - x_j)}{|x - y(u_n, v_m)|^3}. \quad (91)$$

Обоснование обнуления интеграла по кусочку поверхности  $\Gamma$  с центром в точке  $x = y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$  дано в п. 1.2.7. Применяя сквозную нумерацию (81), формула (90) принимает вид

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{x=y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) \in \Gamma} \approx \frac{1}{4\pi|\eta_{\hat{p}}|} \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq \hat{p}}}^{NM-1} \mu_p |\eta_p| \mathcal{B}_p(x), \quad (92)$$

где  $\mu_p = \mu(y^p) = \mu_{nm}$  — значения плотности потенциала в центрах малых прямоугольников  $y^p$ , а  $\mathcal{B}_p(x) = \mathcal{B}_{nm}(x)$ .

Таким образом при заданной параметризации поверхности  $\Gamma$  интегральное уравнение (79) сводится к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно  $N \cdot M$  значений неизвестной функции плотности потенциала  $\mu(y^p) = \mu_p$  в точках  $y^p = y(u_n, v_m)$

$$\frac{1}{2}\mu_{\hat{p}} + \frac{1}{4\pi|\eta_{\hat{p}}|} \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq \hat{p}}}^{NM-1} \mu_p |\eta_p| \mathcal{B}_p^{\hat{p}} = f_{\hat{p}}, \quad \hat{p} = 0, 1, 2, \dots, NM - 1, \quad (93)$$

где  $f_{\hat{p}} = f(y^{\hat{p}})$  — значения функции граничного условия на поверхности  $\Gamma$ , а  $\mathcal{B}_p(x) = \mathcal{B}_p(y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})) = \mathcal{B}_p(y^{\hat{p}}) = \mathcal{B}_p^{\hat{p}}$ . Домножим систему (93) на  $4\pi$  и запишем её в общем виде

$$\sum_{p=0}^{NM-1} \left( 2\pi\Delta_p^{\hat{p}} + \frac{|\eta_p|}{|\eta_{\hat{p}}|} \mathcal{B}_p^{\hat{p}} (1 - \Delta_p^{\hat{p}}) \right) \mu_p = 4\pi f_{\hat{p}}, \quad (94)$$

где  $\hat{p} = 0, 1, 2, \dots, NM - 1$  и

$$\Delta_p^{\hat{p}} = \begin{cases} 1, & \text{если } p = \hat{p}, \\ 0, & \text{если } p \neq \hat{p} \end{cases}.$$

Домножим каждое  $\hat{p}$ -ое уравнение системы на  $|\eta_{\hat{p}}|$

$$\sum_{p=0}^{NM-1} \left( 2\pi|\eta_{\hat{p}}|\Delta_p^{\hat{p}} + |\eta_p|\mathcal{B}_p^{\hat{p}} (1 - \Delta_p^{\hat{p}}) \right) \mu_p = 4\pi|\eta_{\hat{p}}|f_{\hat{p}}, \quad (95)$$

где  $\hat{p} = 0, 1, 2, \dots, NM - 1$ . Запишем систему (95) в матричном виде (см. уравнение (97)). Из этой системы уравнений мы получаем значения плотности потенциала

$$\begin{pmatrix}
|\eta_0|(\mathcal{J}^0 + 2\pi) & |\eta_1|T_1^0 & \dots & |\eta_{\hat{p}-1}|T_{\hat{p}-1}^0 & |\eta_{\hat{p}}|T_{\hat{p}}^0 & \dots & \dots & |\eta_{NM-1}|T_{NM-1}^0 \\
|\eta_0|T_0^1 & |\eta_1|(\mathcal{J}^1 + 2\pi) & \dots & |\eta_{\hat{p}-1}|T_{\hat{p}-1}^1 & |\eta_{\hat{p}}|T_{\hat{p}}^1 & \dots & \dots & |\eta_{NM-1}|T_{NM-1}^1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
|\eta_0|T_0^{\hat{p}} & |\eta_1|T_1^{\hat{p}} & \dots & |\eta_{\hat{p}-1}|T_{\hat{p}-1}^{\hat{p}} & |\eta_{\hat{p}}|(\mathcal{J}^{\hat{p}} + 2\pi) & \dots & \dots & |\eta_{NM-1}|T_{NM-1}^{\hat{p}} \\
|\eta_0|T_0^{\hat{p}+1} & |\eta_1|T_1^{\hat{p}+1} & \dots & |\eta_{\hat{p}-1}|T_{\hat{p}-1}^{\hat{p}+1} & |\eta_{\hat{p}}|T_{\hat{p}}^{\hat{p}+1} & |\eta_{\hat{p}+1}|(\mathcal{J}^{\hat{p}+1} + 2\pi) & \dots & |\eta_{NM-1}|T_{NM-1}^{\hat{p}+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
|\eta_0|T_0^{NM-1} & |\eta_1|T_1^{NM-1} & \dots & |\eta_{\hat{p}-1}|T_{\hat{p}-1}^{NM-1} & |\eta_{\hat{p}}|T_{\hat{p}}^{NM-1} & |\eta_{\hat{p}+1}|T_{\hat{p}+1}^{NM-1} & \dots & |\eta_{NM-1}|(\mathcal{J}^{NM-1} + 2\pi)
\end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{NM-1} \end{pmatrix} = 4\pi \begin{pmatrix} |\eta_0|f_0 \\ |\eta_1|f_1 \\ \vdots \\ |\eta_{NM-1}|f_{NM-1} \end{pmatrix} \quad (96)$$

$$\begin{pmatrix}
2\pi|\eta_0| & |\eta_1|\mathcal{B}_1^0 & \dots & |\eta_{\hat{p}-1}|\mathcal{B}_{\hat{p}-1}^0 & |\eta_{\hat{p}}|\mathcal{B}_{\hat{p}}^0 & \dots & \dots & |\eta_{NM-1}|\mathcal{B}_{NM-1}^0 \\
|\eta_0|\mathcal{B}_0^1 & 2\pi|\eta_1| & \dots & |\eta_{\hat{p}-1}|\mathcal{B}_{\hat{p}-1}^1 & |\eta_{\hat{p}}|\mathcal{B}_{\hat{p}}^1 & \dots & \dots & |\eta_{NM-1}|\mathcal{B}_{NM-1}^1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
|\eta_0|\mathcal{B}_0^{\hat{p}} & |\eta_1|\mathcal{B}_1^{\hat{p}} & \dots & |\eta_{\hat{p}-1}|\mathcal{B}_{\hat{p}-1}^{\hat{p}} & 2\pi|\eta_{\hat{p}}| & \dots & \dots & |\eta_{NM-1}|\mathcal{B}_{NM-1}^{\hat{p}} \\
|\eta_0|\mathcal{B}_0^{\hat{p}+1} & |\eta_1|\mathcal{B}_1^{\hat{p}+1} & \dots & |\eta_{\hat{p}-1}|\mathcal{B}_{\hat{p}-1}^{\hat{p}+1} & |\eta_{\hat{p}}|\mathcal{B}_{\hat{p}}^{\hat{p}+1} & |\eta_{\hat{p}+1}|\mathcal{B}_{\hat{p}+1}^{\hat{p}+1} & \dots & |\eta_{NM-1}|\mathcal{B}_{NM-1}^{\hat{p}+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
|\eta_0|\mathcal{B}_0^{NM-1} & |\eta_1|\mathcal{B}_1^{NM-1} & \dots & |\eta_{\hat{p}-1}|\mathcal{B}_{\hat{p}-1}^{NM-1} & |\eta_{\hat{p}}|\mathcal{B}_{\hat{p}}^{NM-1} & |\eta_{\hat{p}+1}|\mathcal{B}_{\hat{p}+1}^{NM-1} & \dots & 2\pi|\eta_{NM-1}|
\end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{NM-1} \end{pmatrix} = 4\pi \begin{pmatrix} |\eta_0|f_0 \\ |\eta_1|f_1 \\ \vdots \\ |\eta_{NM-1}|f_{NM-1} \end{pmatrix} \quad (97)$$

$\mu_{\hat{p}} = \mu(y^{\hat{p}})$  в центрах малых прямоугольников  $y^{\hat{p}}$ , которые затем будут использованы для вычисления потенциала простого слоя везде вне  $\Gamma$ , решая тем самым исходную краевую задачу. Для вычисления потенциала простого слоя будем использовать стандартную квадратурную формулу для потенциала простого слоя из пункта 1.1.7

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0, m=0}^{n=N-1, m=M-1} \mu_{nm} \mathcal{D}_{nm}(x) = \frac{1}{4\pi} \sum_{p=0}^{NM-1} \mu_p \mathcal{D}_p(x), \quad (98)$$

где

$$\mathcal{D}_{nm} = \frac{hH|\eta(y(u_n, v_m))|}{|x - y(u_n, v_m)|},$$

а  $\mathcal{D}_p(x) = \mathcal{D}_{nm}(x)$ .

#### 1.4.4 Численные тесты

Решение внешней краевой задачи Неймана описанным методом состоит из двух этапов. На первом этапе при помощи одной из двух приведённых квадратурных формул для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя мы получаем значения плотности потенциала  $\mu_p$ ,  $p = 0, 1, \dots, NM - 1$  в центрах малых прямоугольников, решая соответствующую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Это может быть либо построенная в разделе 1.2 квадратурная формула (84) либо стандартная квадратурная формула (92).

На втором этапе полученные значения плотности потенциала  $\mu_p$  используются при вычислении потенциала простого слоя в любой точке области  $R^3 \setminus \bar{D}$  по одной из трёх формул. Это может быть либо квадратурная формула (88) из работ [88, 91], либо построенная в разделе 1.1 квадратурная формула (89), либо стандартная квадратурная формула (98).

В приведённых ниже численных тестах значения плотности потенциала  $\mu_p$ , полученные при помощи улучшенной формулы (84), мы будем использовать только в формулах (88) и (89). Аналогично, значения плотности потенциала  $\mu_p$ , полученные при помощи стандартной формулы (92) мы будем использовать только в формуле (98).

Тестирование проведено в случае, когда поверхность  $\Gamma$  является сферой единичного радиуса, которая задана параметрически уравнениями

$$y_1(u, v) = \cos u \sin v, \quad y_2(u, v) = \sin u \sin v, \quad y_3(u, v) = \cos v, \quad (99)$$

причём  $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ .

Вычисления потенциала простого слоя — решения исходной внешней краевой задачи Неймана проводились в некоторых точках на вспомогательных сферах, имеющих центры в начале координат и радиусы, равные  $1 + \Delta R$ . Тем самым, вспомогательные сферы находятся вне сферы единичного радиуса, на которой задана плотность потенциала, на расстоянии  $\Delta R$  от неё. Затем были рассчитаны значения абсолютных погрешностей в этих точках, и для каждой вспомогательной сферы определялись максимумы значений этих погрешностей.

Координаты точек, которые использовались для оценки максимальной абсолютной погрешности

$$x_j^{ql} = Ry_j(u_q, v_l), \quad j = 1, 2, 3,$$

$$u_q = \frac{2\pi}{2N}q, \quad q = 0, \dots, 2N; \quad v_l = \frac{\pi}{2M}l, \quad l = 1, \dots, 2M - 1, \quad (100)$$

где  $y_j(u, v)$  определяется формулами (99),  $R$  — радиус вспомогательной сферы. То есть эти точки расположены над центрами участков разбиения единичной сферы, серединами границ между такими участками и пересечениями этих границ. Отметим, что эти точки распределены по всей сфере.

Вычисления проводились для различных значений  $M$  и  $N$ . Значения шагов определяются формулами  $h = 2\pi/N$ ,  $H = \pi/M$ . Если  $N/2 = M = 10$ , то  $h = H \approx 0.31$ ; если  $N/2 = M = 20$ , то  $h = H \approx 0.16$ ; если  $N/2 = M = 40$ , то  $h = H \approx 0.079$ .

В таблицах 9 — 11 приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей. В левом столбце указано отличие радиуса  $\Delta R$  вспомогательной сферы от единицы, тем самым её радиус будет равен  $1 + \Delta R$ . В верхней строке указаны значения  $M, N$ .

Первое число в ячейках таблиц 9, 10 и 11 — максимальная погрешность стандартной квадратурной формулы (98) на данной сфере, при использовании формулы (92) для получения значений плотности потенциала. Второе число после точки с запятой — максимальная погрешность квадратурной формулы (88) из работ [88, 91] на данной вспомогательной сфере, при использовании (84) для получения значений плотности потенциала  $\mu_p$ . Третье число после точки с запятой — максимальная погрешность улучшенной квадратурной формулы (89) из раздела 1.1 на данной вспомогательной сфере, при использовании (84) для получения значений плотности потенциала  $\mu_p$ .

**Тест 1.** При граничном условии вида  $f(x) = 1$ ,  $x \in \Gamma$  решение внешней краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа известно и даётся выражением

$$u(x) = \frac{1}{|x|} \text{ при } |x| > 1. \quad (101)$$

Плотность потенциала простого слоя при этом равна

$$\mu(x) = 1, \quad x \in \Gamma. \quad (102)$$

В таблице 9 приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей решения задачи.

**Тест 2.** При граничном условии вида  $f(x) = 2/3 \cdot \cos \varphi \sin \vartheta$ ,  $x \in \Gamma$  решение внешней краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа известно и даётся выражением

$$u(x) = \frac{\cos \varphi \sin \vartheta}{3|x|^2} \quad \text{при } |x| > 1. \quad (103)$$

Плотность потенциала простого слоя при этом равна

$$\mu(x) = \cos \varphi \sin \vartheta, \quad x \in \Gamma, \quad (104)$$

где  $\vartheta$  и  $\varphi$  — зенитный и азимутальный углы в сферических координатах с центром в начале координат. В таблице 10 приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей решения задачи.

**Тест 3.** При граничном условии вида  $f(x) = 2/3 \cdot \cos \vartheta$  решение внешней краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа известно и даётся выражением

$$u(x) = \frac{\cos \vartheta}{3|x|^2} \quad \text{при } |x| > 1. \quad (105)$$

Плотность потенциала простого слоя при этом равна

$$\mu(x) = \cos \vartheta, \quad x \in \Gamma, \quad (106)$$

где  $\vartheta$  — зенитный угол в сферических координатах с центром в начале координат. В таблице 11 приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей решения задачи.

Рассмотрим сначала погрешности вычисления плотности потенциала простого слоя. Первое число в ячейках таблицы 7 — максимальная абсолютная погрешность плотности потенциала  $\mu_p$ , полученной с помощью стандартной квадратурной формулы (92). Второе число (после точки с запятой) — максимальная абсолютная погрешность плотности потенциала  $\mu_p$ , полученной с помощью улучшенной квадратурной формулы (84) из раздела 1.2.

Рассмотрим также среднюю абсолютную погрешность по всем реперным точкам (81) в уравнении (79). Первое число в ячейках таблицы 8 — средняя абсолютная погрешность плотности потенциала  $\mu_p$ , полученной с помощью стандартной квадратурной формулы (92). Второе число (после точки с запятой) — средняя абсолютная погрешность плотности потенциала  $\mu_p$ , полученной с помощью улучшенной квадратурной формулы (84).

Номер теста	$N/2 = M = 10$	$N/2 = M = 20$	$N/2 = M = 40$
Тест 1	0.055; 0.019	0.035; 0.011	0.026; 0.0073
Тест 2	0.077; 0.025	0.038; 0.012	0.019; 0.0055
Тест 3	0.046; 0.016	0.025; 0.0083	0.021; 0.0057

Таблица 7: Максимальная абсолютная погрешность плотности потенциала в тестах 1–3

Номер теста	$N/2 = M = 10$	$N/2 = M = 20$	$N/2 = M = 40$
Тест 1	0.04; 0.016	0.02; 0.007	0.01; 0.0032
Тест 2	0.026; 0.0094	0.013; 0.0042	0.0063; 0.0020
Тест 3	0.029; 0.011	0.016; 0.0055	0.0079; 0.0026

Таблица 8: Средняя абсолютная погрешность плотности потенциала в тестах 1–3

#### 1.4.5 Выводы

Из таблицы 7 видно, что максимальная абсолютная погрешность плотности потенциала  $\mu_p$ , полученной с помощью улучшенной квадратурной формулы (84) из раздела 1.1 в несколько раз меньше погрешности плотности потенциала, полученной с помощью стандартной квадратурной формулы (92). Аналогичное можно утверждать и о средней абсолютной погрешности плотности потенциала в таблице 8. В обеих таблицах формула (84) показывает первый порядок (по  $H$ ) сходимости. В таблице 7 в тестах 1 и 3 стандартная формула (92) сходится медленнее.

Сделаем оценку максимальной абсолютной погрешности решения исходной задачи для тестов 1–3 из таблиц 9 – 11

1) Из таблиц 9 – 11 также следует, что стандартная квадратурная формула (92) не обеспечивает равномерной аппроксимации и равномерной сходимости решения в виде потенциала простого слоя, поскольку при фиксированном шаге  $H$  погрешность стремится к бесконечности при приближении к поверхности  $\Gamma$ .

2) Квадратурные формулы (88) и (89) обеспечивают первый порядок равномерной сходимости по  $H$  и равномерную аппроксимацию с погрешностью  $O(H)$ . Величина порядка сходимости и аппроксимации при использовании этих формул определяется тем фактом, что значения плотности потенциала  $\mu_{nm}$  определялись при помощи формулы для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя (84) из раздела 1.2, имеющей первый порядок сходимости по  $H$ .

$\Delta R$	$N/2 = M = 10$	$N/2 = M = 20$	$N/2 = M = 40$
0.1	0.071; 0.033; 0.022;	0.024; 0.014; 0.0087;	0.011; 0.0052; 0.0038
0.06	0.11; 0.034; 0.023;	0.03; 0.016; 0.0089;	0.011; 0.0063; 0.0038
0.03	0.24; 0.034; 0.024;	0.054; 0.017; 0.0092;	0.014; 0.0078; 0.0039
0.01	0.78; 0.033; 0.022;	0.18; 0.017; 0.0098;	0.041; 0.0088; 0.004
0.001	8.14; 0.033; 0.018;	1.99; 0.017; 0.0078;	0.48; 0.009; 0.0039
0.0001	81.8; 0.033; 0.018;	20.1; 0.017; 0.0077;	4.96; 0.009; 0.0036

Таблица 9: Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 1

$\Delta R$	$N/2 = M = 10$	$N/2 = M = 20$	$N/2 = M = 40$
0.1	0.043; 0.0073; 0.0091;	0.011; 0.0032; 0.0036;	0.0049; 0.0015; 0.0016
0.06	0.085; 0.0084; 0.01;	0.017; 0.0035; 0.004;	0.0056; 0.0016; 0.0017
0.03	0.21; 0.0092; 0.012;	0.042; 0.004; 0.0045;	0.0089; 0.0017; 0.0019
0.01	0.74; 0.0074; 0.0096;	0.17; 0.0046; 0.0052;	0.036; 0.0019; 0.0021
0.001	8.09; 0.0059; 0.0065;	1.98; 0.0029; 0.0033;	0.48; 0.0019; 0.002
0.0001	81.6; 0.0066; 0.0064;	20.2; 0.0029; 0.0033;	4.97; 0.0016; 0.0017

Таблица 10: Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 2

$\Delta R$	$N/2 = M = 10$	$N/2 = M = 20$	$N/2 = M = 40$
0.1	0.026; 0.019; 0.0049;	0.0085; 0.0081; 0.0021;	0.0033; 0.0029; 0.001
0.06	0.042; 0.021; 0.0057;	0.011; 0.01; 0.0024;	0.0039; 0.004; 0.0011
0.03	0.1; 0.022; 0.0069;	0.02; 0.012; 0.0026;	0.0057; 0.0056; 0.0012
0.01	0.38; 0.022; 0.0067;	0.082; 0.013; 0.003;	0.017; 0.0068; 0.0013
0.001	4.14; 0.022; 0.005;	0.98; 0.013; 0.0024;	0.24; 0.007; 0.0014
0.0001	41.8; 0.022; 0.0056;	10; 0.013; 0.0021;	2.48; 0.007; 0.0011

Таблица 11: Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 3

Формулы (88) и (89) сохраняют свойство непрерывности потенциала простого слоя при стремлении к поверхности  $\Gamma$ , что также следует из приведенных численных результатов.

3) В тестах 1 и 3 формула (89) из раздела 1.1 показывает значительно более высокую точность, чем формула (88) из [88, 91]. Отметим, что максимальная погрешность формулы (88) достигается вблизи полюсов сферы. Это вызвано тем,

что длина нормали  $|\eta|$  обнуляется на полюсах, но меняется там наиболее быстро. При этом формула (88) не учитывает производные длины нормали. В формуле (89) используется более точное выражение для длины нормали  $|\eta|$ , поэтому в тестах 1 и 3 она показывает более низкую погрешность.

В то же время в тесте 2 формула (89) не даёт повышения точности по сравнению с формулой (88). Это объясняется тем, что в тесте 2 на полюсах сферы обращается в ноль и плотность потенциала  $\mu(x)$ , за счет чего погрешность формулы (88) уменьшается.



## 2 Задача определения стационарного теплового поля — квадратурные формулы для потенциала двойного слоя

Диссертация состоит из двух глав. Во второй главе рассматривается трёхмерная задача по определению стационарного теплового поля. Требуется узнать распределение температуры в некотором объёме, на границах которого задаётся распределение температуры. Установившееся внутри объёма распределение температуры  $u(x_1, x_2, x_3)$  удовлетворяет уравнению Лапласа внутри области  $D$  с заданным на поверхности распределением температуры  $f(x)$ .

Введем в пространстве декартову систему координат  $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ . Пусть  $\Gamma$  — простая гладкая замкнутая поверхность класса  $C^2$ , ограничивающая объёмно-односвязную внутреннюю область  $D$ . Рассмотрим внутреннюю краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа с непрерывным граничным условием, заданным на  $\Gamma$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & u \in C^0(\bar{D}) \cap C^2(D), \\ u(x)|_{\Gamma} = f(x), & x \in \Gamma, f(x) \in C^0(\Gamma) \end{cases}. \quad (107)$$

Найдём решение задачи Дирихле в виде потенциала двойного слоя  $\mathcal{W}_0[\mu](x)$

$$\mathcal{W}_0[\mu](x) = \frac{1}{4\pi} \int_{y \in \Gamma} \mu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{1}{|x - y|} dS_y, \quad (108)$$

где  $\mu = \mu(y) \in C^0(\Gamma)$  — плотность потенциала, а  $\mathbf{n}_y$  — внутренняя единичная нормаль. Потенциал двойного слоя  $\mathcal{W}_0[\mu](x)$  — гармоническая функция в области  $D$ . Предельное значение потенциала двойного слоя на  $\Gamma$  из области  $D$  даётся выражением [6, 90]

$$\frac{1}{2}\mu(x) + \mathcal{W}_0[\mu](x)|_{\Gamma}, \quad x \in \Gamma, \quad (109)$$

где  $\mathcal{W}_0[\mu](x)|_{\Gamma}$  — прямое значение потенциала двойного слоя для уравнения Лапласа на поверхности  $\Gamma$ . Приравнявая это выражение к функции, заданной на  $\Gamma$ , получаем уравнение

$$\frac{1}{2}\mu(x) + \mathcal{W}_0[\mu](x)|_{\Gamma} = f(x), \quad x \in \Gamma. \quad (110)$$

Равенство (110) представляет собой линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода, которое, как известно, однозначно разрешимо [6, §28.3],[90].

Стандартные квадратурные формула для потенциала двойного слоя не дают равномерной аппроксимации потенциала вблизи поверхности и даже стремятся к бесконечности при стремлении точки  $x$  к поверхности  $\Gamma$  [2].

При расстояниях  $|x - y|$  до поверхности  $\Gamma$  меньше некоторого  $\Delta R$ , для вычисления потенциала двойного слоя при использовании стандартных квадратурных формул приходится настолько уменьшать шаг дискретизации поверхности, что вычисления в слое на расстоянии  $\Delta R$  становятся практически невыполнимыми.

Особенно это заметно в задачах, где рассматриваются поверхности с напылением, то есть слои с неодинаковой теплопроводностью, например в задачах разрушения тонких структур покрытий с трещинами на границе раздела. Для корректного описания смещений и полей напряжений необходимо использовать принципиально новые методы вычислений [97].

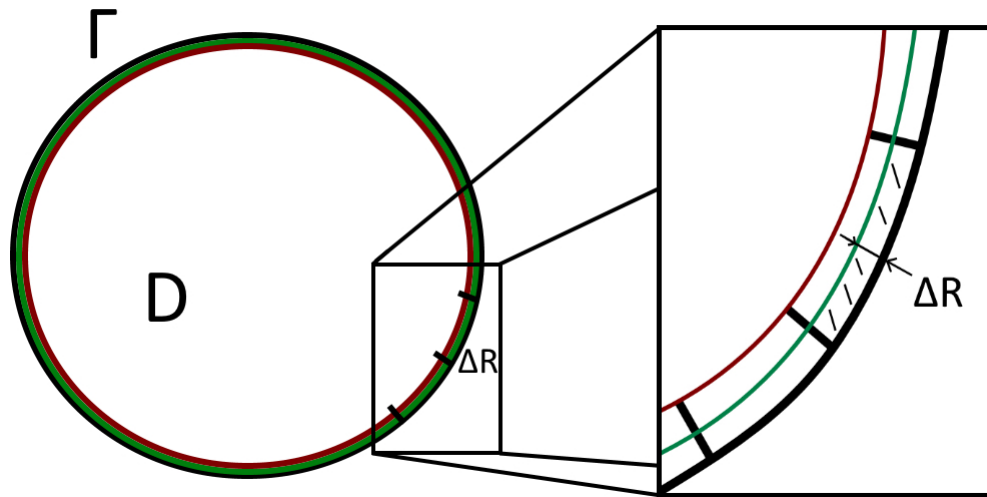


Рис. 4: Проблема определения значений потенциала двойного слоя при помощи стандартных квадратурных формул особенно актуальна для поверхностей с тонким многослойным напылением.

В разделе 2.1 выводится квадратурная формула для потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью, заданной на гладкой замкнутой либо разомкнутой поверхности. Эта квадратурная формула дает более высокую точность вычислений, чем стандартная квадратурная формула, что подтверждается численными тестами. Преимущество новой квадратурной формулы особенно заметно вблизи поверхности, где стандартная квадратурная формула быстро расходится, тогда как новая формула обеспечивает приемлемую точность вычислений для точек, отстоящих от поверхности на расстояниях, сопоставимых с шагом интегрирования и более.

Подход, использованный в Главе 1 с целью построения квадратурной формулы для потенциала простого слоя, применяется в Главе 2 к построению квадратурной формулы для потенциала двойного слоя.

В разделе 2.2 выводится улучшенная квадратурная формула для прямого зна-

чения потенциала двойного слоя. Улучшенная формула даёт значительно более высокую точность чем стандартная, что подтверждается численными тестами.

В разделе 2.3 проведено обобщение формулы из раздела 2.1 на случай дифференцируемой плотности в потенциале, что позволяет повысить точность вычислений потенциала двойного слоя, если плотность в потенциале дифференцируема. Более высокая точность вычислений потенциала подтверждается численными тестами и особенно заметна, когда плотность представлена гладкими осциллирующими функциями. Результаты вычислений с использованием выведенной формулы сравниваются с аналогичными вычислениями по стандартной квадратурной формуле [2, Гл. 2] и по формуле, основанной на определении телесного угла [98].

В разделе 2.4 построенные квадратурные формулы применяются к численному решению внутренней краевой задачи Дирихле, возникающей при рассмотрении задачи определения стационарного теплового поля. Граничное условие задаётся на поверхности сферы.

## 2.1 Квадратурная формула для потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью

Потенциал двойного слоя используется при численном решении краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца методом граничных интегральных уравнений, например в [48], [49], [50]. Численное решение краевых задач на основании такого подхода состоит из двух этапов. На первом этапе задачу сводят к граничному интегральному уравнению при помощи потенциала двойного слоя, и, решая уравнение численно, находят плотность потенциала.

Тем самым для численного решения краевых задач указанным методом нужно иметь квадратурные формулы, которые с хорошей точностью вычисляют значения потенциала двойного слоя в любой точке пространства где задана плотность потенциала. В инженерных расчетах используются стандартные квадратурные формулы для потенциалов [2], но их точность оставляет желать лучшего.

В данном разделе построена новая квадратурная формула для потенциала двойного слоя. Формула обеспечивает более высокую точность вычислений, чем стандартная квадратурная формула, что подтверждается численными тестами. Преимущество новой формулы по сравнению со стандартной особенно заметно на небольших расстояниях от границы.

### 2.1.1 Постановка задачи

Введем в пространстве декартову систему координат  $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ . Пусть  $\Gamma$  — простая гладкая замкнутая поверхность класса  $C^2$ , ограничивающая объёмно-односвязную внутреннюю область [92, с. 201], либо простая гладкая ограниченная разомкнутая ориентированная поверхность класса  $C^2$ , содержащая свои предельные точки [93, Глава 14, § 1]. Предположим, что поверхность  $\Gamma$  параметризована так, что на нее отображается прямоугольник:

$$y = (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma, \quad y_1 = y_1(u, v), \quad y_2 = y_2(u, v), \quad y_3 = y_3(u, v);$$

$$u \in [0, A], \quad v \in [0, B];$$

$$y_j(u, v) \in C^2([0, A] \times [0, B]), \quad j = 1, 2, 3. \quad (111)$$

Потребуем также, чтобы различным внутренним точкам прямоугольника при указанном отображении соответствовали различные точки поверхности. Сферу, поверхность эллипсоида, гладкие поверхности фигур вращения, поверхность тора и многие другие более сложные поверхности можно параметризовать таким образом. Кроме того, сложные поверхности можно разбить на несколько частей

и для каждой части ввести свою параметризацию, тогда дальнейшие рассуждения справедливы для каждой такой части. Введём  $N$  точек  $u_n$  с шагом  $h$  на отрезке  $[0, A]$  и  $M$  точек  $v_m$  на отрезке  $[0, B]$  и рассмотрим разбиение прямоугольника  $[0, A] \times [0, B]$ , который отображается на поверхность  $\Gamma$

$$A = Nh, \quad B = MH, \quad u_n = (n + 1/2)h, \quad n = 0, \dots, N - 1;$$

$$v_m = (m + 1/2)H, \quad m = 0, \dots, M - 1.$$

Тем самым прямоугольник  $[0, A] \times [0, B]$  разбивается на  $N \times M$  маленьких прямоугольничков и через  $(u_n, v_m)$  обозначены серединки этих прямоугольничков.

Известно [93, Глава 14, § 1], что компоненты вектора нормали (не единичного)  $\eta(y) = (\eta_1(y), \eta_2(y), \eta_3(y))$  в точке поверхности  $y = (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma$  выражаются через определители второго порядка формулами

$$\eta_1 = \begin{vmatrix} (y_2)_u & (y_3)_u \\ (y_2)_v & (y_3)_v \end{vmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{vmatrix} (y_3)_u & (y_1)_u \\ (y_3)_v & (y_1)_v \end{vmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{vmatrix} (y_1)_u & (y_2)_u \\ (y_1)_v & (y_2)_v \end{vmatrix}. \quad (112)$$

Положим  $|\eta(y)| = \sqrt{(\eta_1(y))^2 + (\eta_2(y))^2 + (\eta_3(y))^2}$ . Известно [93, Глава 14, § 1–2], что

$$\int_{\Gamma} F(y) ds_y = \int_0^A du \int_0^B dv F(y(u, v)) |\eta(y(u, v))|.$$

Потребуем, чтобы

$$|\eta(y(u, v))| > 0, \quad \forall (u, v) \in ((0, A) \times (0, B)). \quad (113)$$

Из условия (113) следует, что  $|\eta(y(u, v))| \in C^1((0, A) \times (0, B))$ .

Через  $\mathbf{n}_y$  обозначим единичную нормаль в точке  $y \in \Gamma$ , т.е.  $\mathbf{n}_y = \eta(y)/|\eta(y)|$ . Производная по нормали  $\mathbf{n}_y$  имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} = |\eta(y)|^{-1} (\eta(y), \nabla_y).$$

Обозначим  $|x - y(u, v)| = \sqrt{(x_1 - y_1(u, v))^2 + (x_2 - y_2(u, v))^2 + (x_3 - y_3(u, v))^2}$  и заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} |x - y| = \frac{1}{|\eta(y)|} \sum_{j=1}^3 \eta_j(y) \frac{y_j - x_j}{|x - y|}.$$

Потенциал двойного слоя для уравнения Гельмгольца используется при решении краевых задач методом интегральных уравнений. Пусть  $x \notin \Gamma$ . Рассмотрим потенциал двойного слоя для уравнения Гельмгольца с заданной на поверхности  $\Gamma$  плотностью  $\mu(y) \in C^0(\Gamma)$

$$\mathcal{W}_k[\mu](x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds_y =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mu(y) \frac{1}{|\eta(y)|} \frac{\exp(ik|x-y|)(ik|x-y|-1)}{|x-y|^2} \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(y)(y_j-x_j)}{|x-y|} ds_y = \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^A du \int_0^B dv \mu(y(u,v)) \exp(ik|x-y(u,v)|)(ik|x-y(u,v)|-1) \times \\
&\quad \times \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(y(u,v))(y_j(u,v)-x_j)}{|x-y(u,v)|^3} = \\
&= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \mu(y(u,v)) \times \\
&\quad \times \exp(ik|x-y(u,v)|)(ik|x-y(u,v)|-1) \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(y(u,v))(y_j(u,v)-x_j)}{|x-y(u,v)|^3}, \quad (114)
\end{aligned}$$

где  $k \geq 0$ . Пусть  $\mu_{nm} = \mu(y(u_n, v_m))$ , тогда

$$\mu(y(u, v)) = \mu_{nm} + o(1), \quad (115)$$

для  $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$  и  $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$ .

Так же как и в [88] можно показать, что при  $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$  и  $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$

$$|x - y(u, v)| = |x - y(u_n, v_m)| + O(h + H),$$

$$\exp(ik|x - y(u, v)|) = \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|) + O(h + H)$$

для любого  $x \notin \Gamma$ . Константы в оценках функций, обозначенных как  $O(h + H)$ , не зависят от  $n, m$  и от расположения  $x \notin \Gamma$ .

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_k[\mu](x) &\approx \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mu_{nm} \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|)(ik|x - y(u_n, v_m)| - 1) \times \\
&\quad \times \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(y(u, v))(y_j(u, v) - x_j)}{|x - y(u, v)|^3}. \quad (116)
\end{aligned}$$

Таким образом, чтобы получить квадратурную формулу для потенциала двойного слоя при  $x \notin \Gamma$ , необходимо вычислить интеграл

$$\int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(y(u, v))(y_j(u, v) - x_j)}{|x - y(u, v)|^3}, \quad (117)$$

который будем называть каноническим интегралом.

### 2.1.2 Канонический интеграл $K_{nm}(x)$

Пусть точка  $x$  не принадлежит кусочку поверхности  $\Gamma$ , на котором изменяется точка  $y = y(u, v)$ , когда  $(u - u_n) \in [-h/2, h/2]$  и  $(v - v_m) \in [-H/2, H/2]$ . Разложим  $y_j(u, v)$  по формуле Тейлора с центром в точке  $(u_n, v_m)$ , тогда для  $j = 1, 2, 3$  получим

$$y_j(u, v) = y_j(u_n, v_m) + D_j + O(H^2 + h^2),$$

где

$$D_j = (y_j)'_u(u - u_n) + (y_j)'_v(v - v_m).$$

Здесь и далее все производные по  $u$  и  $v$  берутся в точке  $(u_n, v_m)$ . Положим

$$r^2 = |x - y(u_n, v_m)|^2 = \sum_{j=1}^3 r_j^2 \neq 0, \quad r_j = y_j(u_n, v_m) - x_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

тогда

$$y_j(u, v) - x_j = r_j + D_j + O(H^2 + h^2), \quad j = 1, 2, 3.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |x - y(u, v)|^2 &= \sum_{j=1}^3 (x_j - y_j(u, v))^2 \approx \sum_{j=1}^3 (r_j^2 + 2r_j D_j + D_j^2) = \\ &= r^2 + 2P(u - u_n) + 2Q(v - v_m) + \alpha^2(u - u_n)^2 + \beta^2(v - v_m)^2 + 2\delta(u - u_n)(v - v_m) = \\ &= \beta^2(V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)^2 - (\delta U + Q)^2/\beta^2 + \alpha^2 U^2 + 2PU + r^2, \end{aligned}$$

где  $U = u - u_n$ ,  $V = v - v_m$ ,

$$P = \sum_{j=1}^3 r_j (y_j)'_u, \quad Q = \sum_{j=1}^3 r_j (y_j)'_v,$$

$$\alpha^2 = \sum_{j=1}^3 ((y_j)'_u)^2, \quad \beta^2 = \sum_{j=1}^3 ((y_j)'_v)^2, \quad \delta = \sum_{j=1}^3 (y_j)'_u (y_j)'_v.$$

Производные по  $u$  и  $v$  берутся в точке  $u = u_n$ ,  $v = v_m$ . Можно показать [93, Гл. 14, § 1], что

$$\alpha^2 \beta^2 - \delta^2 = |\eta(y(u_n, v_m))|^2. \quad (118)$$

Согласно условию (113),  $|\eta(y(u_n, v_m))| > 0$  для всех возможных  $n, m$ , поэтому

$$\alpha^2 \beta^2 - \delta^2 > 0. \quad (119)$$

Отсюда следует, что  $\alpha^2 > 0$  и  $\beta^2 > 0$ .

Применяя формулу Тейлора в точке  $(u_n, v_m)$  с остаточным членом в форме Пеано [93, Гл. 10, § 5.3], находим

$$\eta_j(y(u, v)) = \eta_j(y(u_n, v_m)) + (\eta_j)'_u(u - u_n) + (\eta_j)'_v(v - v_m) + o\left(\sqrt{(u - u_n)^2 + (v - v_m)^2}\right).$$

Производные по  $u$  и  $v$  берутся в точке  $(u_n, v_m)$ .

Для вычисления выражения

$$\sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u, v))(y_j(u, v) - x_j)$$

с учетом формул

$$\sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u_n, v_m))(y_j)'_u = \sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u_n, v_m))(y_j)'_v = 0,$$

отражающих ортогональность вектора нормали и касательных векторов к поверхности (см. [93, Гл. 14, § 1.2]), воспользуемся разложением по формуле Тейлора в точке  $(u_n, v_m)$  с остаточным членом в форме Пеано

$$y_j(u, v) - x_j = r_j + (y_j)'_u(u - u_n) + (y_j)'_v(v - v_m) + \frac{1}{2}(y_j)''_{uu}(u - u_n)^2 + \\ + \frac{1}{2}(y_j)''_{vv}(v - v_m)^2 + (y_j)''_{uv}(u - u_n)(v - v_m) + o\left((u - u_n)^2 + (v - v_m)^2\right),$$

тогда

$$\sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u, v))(y_j(u, v) - x_j) \approx R + \xi_4 U + \xi_5 V + \xi_1 U^2 + \xi_2 V^2 + \xi_3 UV,$$

где  $U = u - u_n$ ,  $V = v - v_m$ ,

$$\xi_1 = \sum_{j=1}^3 \left( \frac{1}{2} \eta_j(y(u_n, v_m))(y_j)''_{uu} + (\eta_j)'_u (y_j)'_u \right),$$

$$\xi_2 = \sum_{j=1}^3 \left( \frac{1}{2} \eta_j(y(u_n, v_m))(y_j)''_{vv} + (\eta_j)'_v (y_j)'_v \right),$$

$$\xi_3 = \sum_{j=1}^3 \left( \eta_j(y(u_n, v_m))(y_j)''_{uv} + (\eta_j)'_u (y_j)'_v + (\eta_j)'_v (y_j)'_u \right),$$



$$\xi_4 = \sum_{j=1}^3 (\eta_j)'_u r_j, \quad \xi_5 = \sum_{j=1}^3 (\eta_j)'_v r_j, \quad R = \sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u_n, v_m)) r_j.$$

Все производные по  $u$ ,  $v$  берутся в точке  $(u_n, v_m)$ .

Из приведенных соотношений вытекает, что канонический интеграл (117) приближенно равен следующему интегралу, который обозначим через  $K_{nm}(x)$

$$\begin{aligned} & \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \frac{1}{|x - y(u, v)|^3} \sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u, v))(y_j(u, v) - x_j) \approx \int_{-h/2}^{h/2} dU \int_{-H/2}^{H/2} dV \times \\ & \times \frac{R + \xi_4 U + \xi_5 V + \xi_1 U^2 + \xi_2 V^2 + \xi_3 UV}{\beta^3 ((V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)^2 - (\delta U + Q)^2/\beta^4 + (\alpha^2 U^2 + 2PU + r^2)/\beta^2)^{3/2}} = \\ & = K_{nm}(x). \end{aligned}$$

Следовательно, чтобы вывести квадратурную формулу для потенциала двойного слоя, необходимо вычислить интеграл  $K_{nm}(x)$  в явном виде.

### 2.1.3 Вычисление интегралов по $dV$

Введём обозначения

$$z = V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2 = V + c, \quad c = \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2, \quad (120)$$

$$\begin{aligned} a &= -c^2 + (\alpha^2 U^2 + 2PU + r^2)/\beta^2 = -(\delta U + Q)^2/\beta^4 + (\alpha^2 U^2 + 2PU + r^2)/\beta^2 = \\ &= \frac{1}{\beta^4} ((\alpha^2 \beta^2 - \delta^2)U^2 + 2(P\beta^2 - \delta Q)U + r^2 \beta^2 - Q^2). \end{aligned}$$

Как показано выше, из неравенства (119) вытекает, что  $\alpha^2 > 0$  и  $\beta^2 > 0$ . Кроме того, из неравенства (119) следует, что  $a \neq 0$ , поскольку  $a$  представлено квадратичным полиномом по  $U$ , в котором коэффициент при  $U^2$  положителен:  $(\alpha^2 \beta^2 - \delta^2)/\beta^4 > 0$ .

Покажем, что  $a \geq 0$ . Положим  $\tilde{D}_j = (y_j)'_u U - (y_j)'_v c$ , где  $c$  определено в (120), и рассмотрим преобразования с учетом введенных обозначений

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 (r_j + \tilde{D}_j)^2 &= \sum_{j=1}^3 (r_j^2 + 2r_j \tilde{D}_j + \tilde{D}_j^2) = r^2 + 2 \sum_{j=1}^3 r_j \tilde{D}_j + \sum_{j=1}^3 \tilde{D}_j^2 = \\ &= r^2 + 2PU - 2Qc + \alpha^2 U^2 + \beta^2 c^2 - 2\delta U c = \\ &= \beta^2 \left( c^2 - 2 \frac{\delta U + Q}{\beta^2} c + \left( \frac{\delta U + Q}{\beta^2} \right)^2 \right) - \frac{(\delta U + Q)^2}{\beta^2} + \alpha^2 U^2 + 2PU + r^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta^2 \left( -c + \frac{\delta U + Q}{\beta^2} \right)^2 - \frac{(\delta U + Q)^2}{\beta^2} + \alpha^2 U^2 + 2PU + r^2 = \\
&= -\frac{(\delta U + Q)^2}{\beta^2} + \alpha^2 U^2 + 2PU + r^2 = a\beta^2 \geq 0.
\end{aligned} \tag{121}$$

Как отмечено выше  $\beta^2 > 0$ , поэтому, поделив полученное соотношение на  $\beta^2$ , заключаем, что  $a \geq 0$ . Следовательно, квадратичный полином, обозначенный через  $a$ , неотрицательный.

Положим

$$\begin{aligned}
b &= \xi_2 c^2 - \xi_5 c - \xi_3 U c + R + \xi_4 U + \xi_1 U^2 = \\
&= U^2 \left( \xi_2 \frac{\delta^2}{\beta^4} + \xi_1 - \xi_3 \frac{\delta}{\beta^2} \right) + U \left( 2\xi_2 \frac{\delta Q}{\beta^4} + \xi_4 - \xi_3 \frac{Q}{\beta^2} - \xi_5 \frac{\delta}{\beta^2} \right) + R - \frac{\xi_5 Q}{\beta^2} + \xi_2 \frac{Q^2}{\beta^4}, \\
z_{\pm} &= \pm H/2 + c = \pm H/2 + (\delta U + Q)/\beta^2.
\end{aligned}$$

Применяя введенные обозначения, вычислим в  $K_{nm}(x)$  интеграл по  $V$ , переходя к переменной  $z$

$$\begin{aligned}
&\int_{-H/2}^{H/2} dV \frac{R + \xi_4 U + \xi_5 V + \xi_1 U^2 + \xi_2 V^2 + \xi_3 UV}{((V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)^2 - (\delta U + Q)^2/\beta^4 + (\alpha^2 U^2 + 2PU + r^2)/\beta^2)^{3/2}} = \\
&= \int_{-H/2}^{H/2} dV \frac{\xi_2 (V + c - c)^2 + (\xi_3 U + \xi_5)(V + c - c) + R + \xi_4 U + \xi_1 U^2}{((V + c)^2 + a)^{3/2}} = \\
&= \int_{z_-}^{z_+} dz \frac{\xi_2 z^2 + (\xi_3 U + \xi_5 - 2\xi_2 c)z + b}{(z^2 + a)^{3/2}} = \left( \left( \frac{b}{a} - \xi_2 \right) z - \xi_3 U - \xi_5 + 2\xi_2 c \right) \frac{1}{\sqrt{z^2 + a}} \Big|_{z_-}^{z_+} + \\
&\quad + \xi_2 \ln \left| z + \sqrt{z^2 + a} \right| \Big|_{z_-}^{z_+},
\end{aligned}$$

где использованы интегралы 1.2.43.17–1.2.43.19 из книги [94]. Заметим, что

$$\xi_2 \int_{-h/2}^{h/2} dU \ln \left| z + \sqrt{z^2 + a} \right| \Big|_{z_-}^{z_+} = \xi_2 \beta \theta_{nm}(x),$$

где функция  $\theta_{nm}(x)$  найдена в явном виде в разделе 1.4. Интеграл  $K_{nm}(x)$  можно записать в виде

$$K_{nm}(x) = \frac{1}{\beta^3} (\xi_2 \beta \theta_{nm}(x) + J(H) - J(-H)). \tag{122}$$

Поскольку функция  $\theta_{nm}(x)$  найдена в разделе 1.4, задача сводится к вычислению интеграла

$$\begin{aligned} J(\pm H) &= \int_{-h/2}^{h/2} dU \frac{(b/a - \xi_2)z_{\pm} - \xi_3 U - \xi_5 + 2\xi_2 c}{\sqrt{z_{\pm}^2 + a}} = \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} dU \frac{(b/a - \xi_2)(\pm H/2 + c) - \xi_3 U - \xi_5 + 2\xi_2 c}{\sqrt{(\pm H/2 + c)^2 + a}}. \end{aligned}$$

Достаточно вычислить интеграл  $J(H)$ . Интеграл  $J(-H)$  вычисляется по тем же формулам, что и интеграл  $J(H)$ , в которых  $H$  надо заменить на  $-H$ . Вычислим интеграл  $J(H)$ . Распишем величины, входящие в подынтегральную функцию, в виде многочленов по  $U$  :

$$\begin{aligned} a &= C_2 U^2 + C_1 U + C_0, \\ C_2 &= (\alpha^2 - \delta^2/\beta^2)/\beta^2, \quad C_1 = (2P - 2\delta Q/\beta^2)/\beta^2, \quad C_0 = (r^2 - Q^2/\beta^2)/\beta^2; \\ z_+^2 + a &= B_2 U^2 + B_1 U + B_0, \\ B_2 &= \alpha^2/\beta^2, \quad B_1 = (H\delta + 2P)/\beta^2, \quad B_0 = H^2/4 + (HQ + r^2)/\beta^2; \\ b &= A_2 U^2 + A_1 U + A_0, \\ A_2 &= \xi_1 - \xi_3 \delta/\beta^2 + \xi_2 \delta^2/\beta^4, \quad A_1 = \xi_4 - \xi_5 \delta/\beta^2 - \xi_3 Q/\beta^2 + 2\xi_2 \delta Q/\beta^4, \\ A_0 &= R - \xi_5 Q/\beta^2 + \xi_2 Q^2/\beta^4; \\ bz_+ &= (A_2 U^2 + A_1 U + A_0)(\delta U/\beta^2 + H/2 + Q/\beta^2) = E_3 U^3 + E_2 U^2 + E_1 U + E_0, \\ E_3 &= A_2 \delta/\beta^2, \quad E_2 = A_2(H/2 + Q/\beta^2) + A_1 \delta/\beta^2, \\ E_1 &= A_1(H/2 + Q/\beta^2) + A_0 \delta/\beta^2, \quad E_0 = A_0(H/2 + Q/\beta^2); \\ \xi_2 z_+ + \xi_3 U + \xi_5 - 2\xi_2 c &= F_1 U + F_0, \quad F_1 = \xi_3 - \xi_2 \delta/\beta^2, \quad F_0 = \xi_5 - \xi_2 Q/\beta^2 + \xi_2 H/2. \end{aligned}$$

Применяя введенные обозначения, запишем интеграл  $J(H)$  в виде

$$J(H) = J_1 - J_2, \tag{123}$$

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} dU \frac{E_3 U^3 + E_2 U^2 + E_1 U + E_0}{(C_2 U^2 + C_1 U + C_0) \sqrt{B_2 U^2 + B_1 U + B_0}}, \\ J_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} dU \frac{F_1 U + F_0}{\sqrt{B_2 U^2 + B_1 U + B_0}}. \end{aligned}$$

### 2.1.4 Вычисление интегралов по $dU$

Используя деление многочленов и учитывая, что  $C_2 > 0$  в силу (119), приведем интеграл  $J_1$  к виду

$$J_1 = J_{11} + J_{12},$$

$$J_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} dU \frac{L_1 U + L_0}{\sqrt{B_2 U^2 + B_1 U + B_0}},$$

$$J_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} dU \frac{S_1 U + S_0}{(C_2 U^2 + C_1 U + C_0) \sqrt{B_2 U^2 + B_1 U + B_0}}, \quad (124)$$

где

$$L_1 = \frac{E_3}{C_2}, \quad L_0 = \frac{E_2 C_2 - E_3 C_1}{C_2^2}, \quad S_1 = E_1 - \frac{E_3 C_0}{C_2} - \frac{C_1 (E_2 C_2 - E_3 C_1)}{C_2^2},$$

$$S_0 = E_0 - \frac{C_0 (E_2 C_2 - E_3 C_1)}{C_2^2}.$$

Если  $B_1^2 - 4B_2 B_0 = 0$  и  $-B_1/(2B_2) \in [-h/2, h/2]$ , то в силу [88, п. 2] точка  $x$  лежит на маленьком кусочке проходящей через  $y(u_n, v_m)$  касательной плоскости, по которому ведётся интегрирование в каноническом интеграле после линейаризации  $y(u, v)$  вблизи  $y(u_n, v_m)$ . В данном случае в знаменателе канонического интеграла с такой линейаризацией возникает особенность в точке  $x$ . Однако если в числителе провести такую же линейаризацию, а нормаль приближенно заменить нормалью в точке  $y(u_n, v_m)$ , то числитель будет тождественно равен нулю, т.к.  $x$  лежит в касательной плоскости, проходящей через  $y(u_n, v_m)$ . С другой стороны, исходный канонический интеграл (без линейаризации) не имеет особенности, т.к.  $x \notin \Gamma$ , и может быть оценён как  $O(hH)$ . Поэтому если  $B_1^2 - 4B_2 B_0 = 0$  и  $-B_1/(2B_2) \in [-h/2, h/2]$ , будем считать, что  $K_{nm}(x) \approx 0$ . Далее предполагаем, что указанное условие не выполняется.

Поскольку  $B_2 > 0$ , интегралы  $J_{11}$  и  $J_2$  находятся с помощью табличных интегралов 2.261 и 2.264 из книги [95]

$$J_{11} = \frac{L_1}{B_2} \sqrt{B_2 U^2 + B_1 U + B_0} +$$

$$+ \left( L_0 - \frac{L_1 B_1}{2B_2} \right) \frac{1}{\sqrt{B_2}} \ln \left| \frac{2B_2 U + B_1 + 2\sqrt{B_2} \sqrt{B_2 U^2 + B_1 U + B_0}}{2B_2 U + B_1 - 2\sqrt{B_2} \sqrt{B_2 U^2 + B_1 U + B_0}} \right| \Bigg|_{U=-h/2}^{U=h/2}, \quad (125)$$

$$J_2 = \frac{F_1}{B_2} \sqrt{B_2 U^2 + B_1 U + B_0} +$$

$$+ \left( F_0 - \frac{F_1 B_1}{2B_2} \right) \frac{1}{\sqrt{B_2}} \ln \left| 2B_2 U + B_1 + 2\sqrt{B_2} \sqrt{B_2 U^2 + B_1 U + B_0} \right| \Bigg|_{U=-h/2}^{U=h/2}. \quad (126)$$

Остается вычислить интеграл  $J_{12}$ . Способ вычисления интеграла зависит от знака дискриминанта квадратного трехчлена  $C_2 U^2 + C_1 U + C_0$ , стоящего в знаменателе подынтегральной функции.

**Первый случай:**  $C_1^2 - 4C_2 C_0 > 0$ . Выше показано, что квадратичный полином, обозначенный как  $a$  — неотрицательный, следовательно его дискриминант неположительный:  $C_1^2 - 4C_2 C_0 \leq 0$ , поэтому первый случай не реализуется.

**Второй случай:**  $C_1^2 - 4C_2 C_0 = 0$ . В этом случае  $C_2 U^2 + C_1 U + C_0 = C_2 (U - U_1)^2$ , где  $U_1 = -C_1/(2C_2)$  — корень многочлена. Если  $U_1 \in [-h/2, h/2]$ , то в силу (121) точка  $x$  лежит на маленьком кусочке проходящей через  $y(u_n, v_m)$  касательной плоскости, по которому ведётся интегрирование в каноническом интеграле после линейаризации  $y(u, v)$  вблизи  $y(u_n, v_m)$ . В данном случае в знаменателе канонического интеграла с такой линейаризацией возникает особенность в точке  $x$ . Однако если в числителе провести такую же линейаризацию, а нормаль приближенно заменить нормалью в точке  $y(u_n, v_m)$ , то числитель будет тождественно равен нулю, т.к.  $x$  лежит в касательной плоскости, проходящей через  $y(u_n, v_m)$ . С другой стороны, исходный канонический интеграл (без линейаризации) не имеет особенности, т.к.  $x \notin \Gamma$ , и может быть оценён как  $O(hH)$ . Поэтому если  $U_1 \in [-h/2, h/2]$ , будем считать, что  $K_{nm}(x) \approx 0$ . Пусть  $U_1 \notin [-h/2, h/2]$ . Применяя соотношение

$$\frac{S_1 U + S_0}{(U - U_1)^2} = \frac{S_1 (U - U_1) + S_0 + U_1 S_1}{(U - U_1)^2} = \frac{S_1}{U - U_1} + \frac{S_0 + U_1 S_1}{(U - U_1)^2},$$

получим

$$J_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{S_1 dU}{C_2 (U - U_1) \sqrt{B_2 U^2 + B_1 U + B_0}} + \frac{S_0 + U_1 S_1}{C_2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{dU}{(U - U_1)^2 \sqrt{B_2 U^2 + B_1 U + B_0}}.$$

Сделав замену  $t = 1/(U - U_1)$ , находим [92, ч.1, гл. 7, §10, пункт 5]:

$$t_1 = \frac{2}{h - 2U_1}, \quad t_2 = -\frac{2}{h + 2U_1},$$

$$J_{12} = -\frac{S_1}{C_2} \int_{t_2}^{t_1} \frac{\operatorname{sgn}(t) \cdot dt}{\sqrt{(U_1^2 B_2 + U_1 B_1 + B_0)t^2 + (2B_2 U_1 + B_1)t + B_2}} - \frac{S_0 + U_1 S_1}{C_2} \int_{t_2}^{t_1} \frac{\operatorname{sgn}(t) \cdot t dt}{\sqrt{(U_1^2 B_2 + U_1 B_1 + B_0)t^2 + (2B_2 U_1 + B_1)t + B_2}} =$$

$$= -\frac{S_1}{C_2} \operatorname{sgn}(C_1) \int_{t_2}^{t_1} \frac{dt}{\sqrt{\omega_2 t^2 + \omega_1 t + B_2}} - \frac{S_0 + U_1 S_1}{C_2} \operatorname{sgn}(C_1) \int_{t_2}^{t_1} \frac{t dt}{\sqrt{\omega_2 t^2 + \omega_1 t + B_2}},$$

где  $\omega_1 = 2B_2 U_1 + B_1$ ,  $\omega_2 = U_1^2 B_2 + U_1 B_1 + B_0$ . Как показано выше,  $a \geq 0$ , поэтому и  $\omega_2 \geq 0$ . Если  $\omega_2 > 0$ , то с помощью табличных интегралов 2.261 и 2.264 из книги [95], получаем

$$J_{12} = \frac{-S_1 \operatorname{sgn}(C_1)}{C_2 \sqrt{\omega_2}} \ln \left| 2\omega_2 t + \omega_1 + 2\sqrt{\omega_2} \sqrt{\omega_2 t^2 + \omega_1 t + B_2} \right| \Big|_{t_2}^{t_1} - \\ - \frac{S_0 + U_1 S_1}{C_2} \operatorname{sgn}(C_1) \left( \frac{1}{\omega_2} \sqrt{\omega_2 t^2 + \omega_1 t + B_2} - \right. \\ \left. - \frac{\omega_1}{2\omega_2} \frac{1}{\sqrt{\omega_2}} \ln \left| 2\omega_2 t + \omega_1 + 2\sqrt{\omega_2} \sqrt{\omega_2 t^2 + \omega_1 t + B_2} \right| \right) \Big|_{t_2}^{t_1}.$$

Если  $\omega_2 = 0$ , а  $\omega_1 \neq 0$ , то, пользуясь интегралами 1.2.18.5, 1.2.18.6 из книги [94], находим

$$J_{12} = -\frac{S_1}{C_2} \cdot \frac{2}{\omega_1} \operatorname{sgn}(C_1) \sqrt{\omega_1 t + B_2} \Big|_{t_2}^{t_1} - \frac{S_0 + U_1 S_1}{C_2} \operatorname{sgn}(C_1) \frac{2(\omega_1 t - 2B_2)}{3\omega_1^2} \sqrt{\omega_1 t + B_2} \Big|_{t_2}^{t_1}.$$

Если  $\omega_2 = 0$  и  $\omega_1 = 0$ , то

$$J_{12} = -\frac{S_1}{C_2} \cdot \frac{\operatorname{sgn}(C_1)}{\sqrt{B_2}} t \Big|_{t_2}^{t_1} - \frac{S_0 + U_1 S_1}{C_2} \cdot \frac{\operatorname{sgn}(C_1)}{2\sqrt{B_2}} t^2 \Big|_{t_2}^{t_1}.$$

Тем самым, во втором случае интеграл  $J_{12}$  вычислен явно.

**Третий случай:**  $C_1^2 - 4C_2 C_0 < 0$ . В этом случае многочлен  $C_2 U^2 + C_1 U + C_0$  неприводимый. Рассмотрим различные варианты вычисления интеграла  $J_{12}$  из (124), воспользовавшись методом, предложенным в [92, ч.1, гл. 7, §10, пункт 5, (7.75)] или в [95, раздел 2.25].

**Вариант 1.** Если  $B_1 = B_2 C_1 / C_2$ , то в интеграле  $J_{12}$  достаточно сделать замену  $U = t - C_1 / (2C_2)$ . Пусть, кроме того

$$t_1 = \frac{h}{2} + \frac{C_1}{2C_2}, \quad t_2 = -\frac{h}{2} + \frac{C_1}{2C_2}, \quad t_2 < t_1,$$

тогда

$$J_{12} = \int_{t_2}^{t_1} \frac{[S_1 t + (-S_1 C_1 / (2C_2) + S_0)] dt}{C_2 \left[ t^2 + C_0 / C_2 - C_1^2 / (4C_2^2) \right] \sqrt{B_2 t^2 + B_0 - B_2 C_1^2 / (4C_2^2)}} =$$

$$= \frac{1}{C_2} \left( \frac{S_1}{2} \int_{t=t_2}^{t=t_1} \frac{dt^2}{[t^2 + \sigma_1] \sqrt{B_2 t^2 + \sigma_2}} + \left( -\frac{S_1 C_1}{2C_2} + S_0 \right) \int_{t_2}^{t_1} \frac{dt}{[t^2 + \sigma_1] \sqrt{B_2 t^2 + \sigma_2}} \right),$$

где

$$\sigma_1 = \frac{C_0}{C_2} - \frac{C_1^2}{4C_2^2} > 0, \quad \sigma_2 = B_0 - \frac{B_2 C_1^2}{4C_2^2} \geq 0.$$

Вводя обозначения

$$J_{121} = \frac{S_1}{2C_2} \int_{t=t_2}^{t=t_1} \frac{dt^2}{[t^2 + \sigma_1] \sqrt{B_2 t^2 + \sigma_2}},$$

$$J_{122} = \frac{1}{C_2 \sqrt{B_2}} \left( -\frac{S_1 C_1}{2C_2} + S_0 \right) \int_{t_2}^{t_1} \frac{dt}{[t^2 + \sigma_1] \sqrt{t^2 + \sigma_2/B_2}},$$

получим

$$J_{12} = J_{121} + J_{122}. \quad (127)$$

Используя табличный интеграл 2.246 из книги [95], находим интеграл  $J_{121}$  в явном виде.

1. Если  $\sigma_1 B_2 - \sigma_2 > 0$ , то

$$J_{121} = \frac{S_1}{C_2 \sqrt{\sigma_1 B_2 - \sigma_2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{B_2 t^2 + \sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1 B_2 - \sigma_2}} \right) \Big|_{t_2}^{t_1}.$$

2. Если  $\sigma_1 B_2 - \sigma_2 < 0$ , то

$$J_{121} = \frac{S_1}{2C_2 \sqrt{\sigma_2 - \sigma_1 B_2}} \ln \left| \frac{\sqrt{B_2 t^2 + \sigma_2} - \sqrt{\sigma_2 - \sigma_1 B_2}}{\sqrt{B_2 t^2 + \sigma_2} + \sqrt{\sigma_2 - \sigma_1 B_2}} \right| \Big|_{t_2}^{t_1}.$$

3. Если  $\sigma_1 B_2 - \sigma_2 = 0$ , то

$$J_{121} = -\frac{S_1}{C_2 \sqrt{B_2 t^2 + \sigma_2}} \Big|_{t_2}^{t_1}.$$

Используя табличные интегралы 1.2.43.17, 1.2.45.10, 1.2.45.13 и 1.2.11.10 из книги [94], находим интеграл  $J_{122}$  в явном виде.

1. Если  $\sigma_2 > 0$  и  $\sigma_2 - B_2 \sigma_1 < 0$ , то

$$J_{122} = \frac{1}{C_2 \sqrt{B_2}} \left( -\frac{S_1 C_1}{2C_2} + S_0 \right) \frac{1}{\sqrt{\sigma_1(\sigma_1 - \sigma_2/B_2)}} \ln \left| \frac{t \sqrt{\sigma_1 - \sigma_2/B_2} + \sqrt{\sigma_1(t^2 + \sigma_2/B_2)}}{\sqrt{t^2 + \sigma_1}} \right| \Big|_{t_2}^{t_1}.$$

2. Если  $\sigma_2 - B_2\sigma_1 > 0$ , то

$$J_{122} = \frac{1}{C_2\sqrt{B_2}} \left( -\frac{S_1C_1}{2C_2} + S_0 \right) \frac{1}{\sqrt{\sigma_1(\sigma_2/B_2 - \sigma_1)}} \operatorname{arctg} \frac{t\sqrt{\sigma_2/B_2 - \sigma_1}}{\sqrt{\sigma_1(t^2 + \sigma_2/B_2)}} \Big|_{t_2}^{t_1}.$$

3. Если  $\sigma_1 - \sigma_2/B_2 = 0$ , то

$$J_{122} = \frac{1}{C_2\sqrt{B_2}} \left( -\frac{S_1C_1}{2C_2} + S_0 \right) \frac{t}{\sigma_1\sqrt{t^2 + \sigma_1}} \Big|_{t_2}^{t_1}.$$

4. Если  $\sigma_2 = 0$  и  $|B_1/(2B_2)| > h/2$ , то

$$J_{122} = \frac{1}{C_2\sqrt{B_2}} \left( -\frac{S_1C_1}{2C_2} + S_0 \right) \operatorname{sgn}(B_1) \frac{1}{2\sigma_1} \ln \frac{t^2}{|t^2 + \sigma_1|} \Big|_{t_2}^{t_1}.$$

Итак, в этом варианте интеграл  $J_{12}$  из (124) вычисляется явно по формуле (127).

**Вариант 2.** Пусть  $B_1 \neq B_2C_1/C_2$ . В [88, пункт 2] показано, что квадратный трехчлен под корнем в (124) неотрицателен (этот результат вытекает также и из приведенных выше выкладок), поэтому его дискриминант неположителен, т.е.  $B_1^2/(4B_2^2) - B_0/B_2 \leq 0$ . Положим  $\chi_1^2 = B_0/B_2 - B_1^2/(4B_2^2) \geq 0$ . Далее рассмотрим 2 варианта: **2а** и **2б**.

**Вариант 2а:**  $\chi_1 > 0$ . Преобразуем

$$\begin{aligned} B_2U^2 + B_1U + B_0 &= B_2 \left[ \left( U + \frac{B_1}{2B_2} \right)^2 + \chi_1^2 \right] = \\ &= B_2\chi_1^2 \left[ \left( U + \frac{B_1}{2B_2} \right)^2 / \chi_1^2 + 1 \right] = B_2\chi_1^2 (\operatorname{sh}^2 t + 1), \end{aligned}$$

где сделана гиперболическая замена

$$\operatorname{sh} t = \left( U + \frac{B_1}{2B_2} \right) / \chi_1, \quad U = \chi_1 \operatorname{sh} t - \frac{B_1}{2B_2}, \quad t = \operatorname{arcsch} \left[ \left( U + \frac{B_1}{2B_2} \right) / \chi_1 \right].$$

Теперь рассмотрим второй квадратный трехчлен в знаменателе (учитывая условие, принятое в **третьем случае**) и линейную функцию в числителе:

$$\begin{aligned} C_2U^2 + C_1U + C_0 &= C_2 \left( \chi_1^2 \operatorname{sh}^2 t - \frac{\chi_1 B_1}{B_2} \operatorname{sh} t + \frac{B_1^2}{4B_2^2} \right) + C_1\chi_1 \operatorname{sh} t + C_0 - \frac{B_1C_1}{2B_2} = \\ &= C_2\chi_1^2 \operatorname{sh}^2 t + \left( C_1\chi_1 - \frac{\chi_1 B_1 C_2}{B_2} \right) \operatorname{sh} t + \frac{B_1^2 C_2}{4B_2^2} - \frac{B_1 C_1}{2B_2} + C_0 = \nu_2 \operatorname{sh}^2 t + \nu_1 \operatorname{sh} t + \nu_0 > 0, \end{aligned}$$



$$S_1 U + S_0 = S_1 \chi_1 \operatorname{sh} t - \frac{B_1 S_1}{2B_2} + S_0 = \epsilon_1 \operatorname{sh} t + \epsilon_0,$$

где

$$\nu_2 = C_2 \chi_1^2 > 0, \quad \nu_1 = C_1 \chi_1 - \chi_1 B_1 C_2 / B_2, \quad \nu_0 = B_1^2 C_2 / (4B_2^2) - B_1 C_1 / (2B_2) + C_0,$$

$$\epsilon_1 = S_1 \chi_1, \quad \epsilon_0 = S_0 - B_1 S_1 / (2B_2).$$

Поскольку  $\nu_2 \operatorname{sh}^2 t + \nu_1 \operatorname{sh} t + \nu_0 > 0$ , дискриминант этого квадратного трехчлена относительно  $\operatorname{sh} t$  отрицательный, т.е.

$$\nu_1^2 - 4\nu_2 \nu_0 < 0. \quad (128)$$

Кроме того,  $\nu_1 \neq 0$  в силу условий, принятых в **варианте 2** и в **варианте 2а**.

Учитывая, что  $dU = \chi_1 \operatorname{ch} t dt$  и  $\operatorname{sh}^2 t + 1 = \operatorname{ch}^2 t$ , запишем

$$J_{12} = \frac{1}{\sqrt{B_2}} \int_{t_-}^{t_+} \operatorname{ch} t \cdot dt \frac{\epsilon_1 \operatorname{sh} t + \epsilon_0}{(\nu_2 \operatorname{sh}^2 t + \nu_1 \operatorname{sh} t + \nu_0) \operatorname{ch} t}, \quad t_{\pm} = \operatorname{arcsch} \left[ \left( \pm \frac{h}{2} + \frac{B_1}{2B_2} \right) / \chi_1 \right].$$

Этот интеграл можно вычислить в явном виде, переходя к комплексным числам.

Чтобы привести окончательную формулу для интеграла, введём обозначения:

$$g_1 = -\frac{\nu_1}{2\nu_2} \neq 0, \quad g_2 = \frac{\sqrt{|\nu_1^2 - 4\nu_2 \nu_0|}}{2\nu_2} > 0, \quad |G_+^2 + 1| = \sqrt{(g_1^2 - g_2^2 + 1)^2 + 4g_1^2 g_2^2},$$

$$\zeta_1 = \exp \left( \operatorname{arcsch} \left[ \left( -\frac{h}{2} + \frac{B_1}{2B_2} \right) / \chi_1 \right] \right), \quad \zeta_2 = \exp \left( \operatorname{arcsch} \left[ \left( \frac{h}{2} + \frac{B_1}{2B_2} \right) / \chi_1 \right] \right),$$

$$\cos \frac{\Psi}{2} = \operatorname{sgn}(g_1) \sqrt{\frac{|G_+^2 + 1| + g_1^2 - g_2^2 + 1}{2|G_+^2 + 1|}}, \quad \sin \frac{\Psi}{2} = \sqrt{\frac{|G_+^2 + 1| - (g_1^2 - g_2^2 + 1)}{2|G_+^2 + 1|}},$$

$$\operatorname{Re} \gamma_+ = \frac{\cos(\Psi/2)}{2\sqrt{|G_+^2 + 1|}} = \operatorname{sgn}(g_1) \frac{\sqrt{|G_+^2 + 1| + g_1^2 - g_2^2 + 1}}{2\sqrt{2}|G_+^2 + 1|},$$

$$\operatorname{Im} \gamma_+ = -\frac{\sin(\Psi/2)}{2\sqrt{|G_+^2 + 1|}} = -\frac{\sqrt{|G_+^2 + 1| - (g_1^2 - g_2^2 + 1)}}{2\sqrt{2}|G_+^2 + 1|},$$

$$\Lambda_1 = \frac{\epsilon_1}{2} \operatorname{Re} \gamma_+ + \frac{\epsilon_1 g_1 + \epsilon_0}{2g_2} \operatorname{Im} \gamma_+, \quad \Lambda_2 = \frac{\epsilon_1}{2} \operatorname{Im} \gamma_+ - \frac{\epsilon_1 g_1 + \epsilon_0}{2g_2} \operatorname{Re} \gamma_+,$$

$$s_1 = -\frac{1}{2} \sum_{q=1}^2 \sum_{l=1}^2 (-1)^{q+l} \times$$

$$\times \ln \left[ \left( g_1 + (-1)^q \sqrt{|G_+^2 + 1|} \cos \frac{\Psi}{2} - \zeta_l \right)^2 + \left( g_2 + (-1)^q \sqrt{|G_+^2 + 1|} \sin \frac{\Psi}{2} \right)^2 \right],$$

$$s_2 = - \sum_{q=1}^2 \sum_{l=1}^2 (-1)^{q+l} \times$$

$$\times \arccos \frac{g_1 + (-1)^q \sqrt{|G_+^2 + 1|} \cos(\Psi/2) - \zeta_l}{\sqrt{\left(g_1 + (-1)^q \sqrt{|G_+^2 + 1|} \cos \frac{\Psi}{2} - \zeta_l\right)^2 + \left(g_2 + (-1)^q \sqrt{|G_+^2 + 1|} \sin \frac{\Psi}{2}\right)^2}}.$$

Используя приведённые обозначения, интеграл  $J_{12}$  можно записать в виде

$$J_{12} = \frac{-4}{\nu_2 \sqrt{B_2}} \cdot (\Lambda_1 s_1 - \Lambda_2 s_2).$$

Таким образом, в **варианте 2а** интеграл  $J_{12}$  вычислен явно.

**Вариант 2б:**  $\chi_1 = 0$ . В этом случае

$$B_2 U^2 + B_1 U + B_0 = B_2 \left[ \left( U + \frac{B_1}{2B_2} \right)^2 + \chi_1^2 \right] = B_2 \left( U + \frac{B_1}{2B_2} \right)^2 = B_2 (U + \Omega)^2,$$

где  $\Omega = B_1/(2B_2)$ . Как отмечено выше, считаем, что  $\Omega \notin [-h/2, h/2]$ . Тогда

$$J_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} dU \frac{S_1 U + S_0}{(C_2 U^2 + C_1 U + C_0) \sqrt{B_2 U^2 + B_1 U + B_0}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{B_2}} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{(S_1 U + S_0) \operatorname{sgn}(U + \Omega) dU}{(C_2 U^2 + C_1 U + C_0) (U + \Omega)} =$$

$$\frac{\operatorname{sgn}(\Omega)}{\sqrt{B_2}} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{(S_1 U + S_0) dU}{(C_2 U^2 + C_1 U + C_0) (U + \Omega)} = \frac{\operatorname{sgn}(\Omega)}{\sqrt{B_2}} \times$$

$$\times \left[ p_1 \int_{-h/2}^{h/2} \frac{U dU}{C_2 U^2 + C_1 U + C_0} + p_2 \int_{-h/2}^{h/2} \frac{dU}{C_2 U^2 + C_1 U + C_0} + p_3 \int_{-h/2}^{h/2} \frac{dU}{U + \Omega} \right], \quad (129)$$

где

$$p_1 = -\frac{C_2(S_1 \Omega - S_0)}{C_1 \Omega - C_0 - C_2 \Omega^2}, \quad p_2 = \frac{S_0}{\Omega} - \frac{C_0(S_1 \Omega - S_0)}{\Omega(C_1 \Omega - C_0 - C_2 \Omega^2)},$$

$$p_3 = \frac{S_1 \Omega - S_0}{C_1 \Omega - C_0 - C_2 \Omega^2}.$$

Интегралы в (129) табличные. Воспользуемся формулами 1.2.8.19 и 1.2.8.13 из [94]. Учитывая, что  $C_1^2 - 4C_2 C_0 < 0$ , находим

$$J_{12} = \frac{\operatorname{sgn}(\Omega)}{\sqrt{B_2}} \left( p_3 \ln |U + \Omega| + \frac{p_1}{2C_2} \ln |C_2 U^2 + C_1 U + C_0| - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{p_1 C_1}{C_2 \sqrt{4C_2 C_0 - C_1^2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2C_2 U + C_1}{\sqrt{4C_2 C_0 - C_1^2}} \right) + \\
& + \frac{2p_2}{\sqrt{4C_2 C_0 - C_1^2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2C_2 U + C_1}{\sqrt{4C_2 C_0 - C_1^2}} \right) \Bigg|_{U=-h/2}^{U=h/2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, в **варианте 2б** интеграл  $J_{12}$  вычислен явно.

### 2.1.5 Квадратурная формула для потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью

Из приведённых рассуждений вытекает следующий результат.

**Теорема 2.1.** Пусть  $\Gamma$  — простая гладкая замкнутая поверхность класса  $C^2$ , ограничивающая объёмно-односвязную внутреннюю область, либо простая гладкая ограниченная разомкнутая ориентированная поверхность класса  $C^2$ , содержащая свои предельные точки. Пусть  $\Gamma$  допускает параметризацию (111) со свойством (113), и  $\mu(y) \in C^0(\Gamma)$ . Тогда для потенциала двойного слоя (114) при  $x \notin \Gamma$  и  $k \geq 0$  имеет место квадратурная формула

$$\mathcal{W}_k[\mu](x) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mu_{nm} \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|) (ik|x - y(u_n, v_m)| - 1) K_{nm}(x), \quad (130)$$

где интеграл  $K_{nm}(x)$  вычислен в явном виде в пунктах 2.1.2 — 2.1.4.

Формула для  $K_{nm}(x)$  приводится в (122), где выражение для функции  $\theta_{nm}(x)$  даётся в явном виде в разделе 1.3, интеграл  $J(H)$  определяется в (123),  $J_1$  находится по формуле (124), а  $J_2$  найдено в (126). Интеграл  $J_{11}$  вычислен в (125), а интеграл  $J_{12}$  вычисляется в явном виде в пункте 2.1.4 для различных случаев.

Если  $k = 0$ , то потенциал двойного слоя для уравнения Гельмгольца переходит в потенциал двойного слоя для уравнения Лапаласа, соответственно, квадратурная формула (130) при  $k = 0$  принимает вид квадратурной формулы для гармонического потенциала двойного слоя.

### 2.1.6 Стандартная квадратурная формула для потенциала двойного слоя

Квадратурная формула (130) является альтернативой стандартной квадратурной формуле для потенциала двойного слоя вне поверхности  $\Gamma$ , используемой в

инженерных расчётах [2, Глава 2]

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_k[\mu](x) &\approx \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mu_{nm} \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|) (ik|x - y(u_n, v_m)| - 1) \times \\ &\times \frac{hH}{|x - y(u_n, v_m)|^3} \sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u_n, v_m))(y_j(u_n, v_m) - x_j). \end{aligned} \quad (131)$$

Стандартная квадратурная формула получается из формулы (116) заменой канонического интеграла из (117) на его следующее приближенное значение

$$\frac{hH}{|x - y(u_n, v_m)|^3} \sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u_n, v_m))(y_j(u_n, v_m) - x_j).$$

Пусть для простоты  $\Gamma$  — замкнутая поверхность. Стандартная квадратурная формула (131) стремится к бесконечности если точка  $x$  стремится изнутри либо извне  $\Gamma$  к одной из точек  $y(u_n, v_m) \in \Gamma$ , хотя сам потенциал двойного слоя в наших предположениях ограничен на  $\Gamma$  и непрерывно продолжим на  $\Gamma$  изнутри и извне. Другими словами, если точка  $x$  стремится к точке на  $\Gamma$  изнутри или извне, то потенциал двойного слоя стремится к конечному пределу. Стандартная квадратурная формула не сохраняет важнейшие свойства потенциала двойного слоя, а именно, ограниченность на  $\Gamma$  и непрерывную продолжимость на  $\Gamma$  извне или изнутри. Стандартная квадратурная формула не даёт равномерной аппроксимации потенциала двойного слоя как во внутренней так и во внешней областях с границей  $\Gamma$  и, при фиксированном  $h$ , стремится к бесконечности при приближении к границе.

Помимо стандартной квадратурной формулы, для нахождения потенциала двойного слоя можно использовать формулу, основанную на вычислении телесных углов [98, с. 87]. Сравнение этой формулы с формулой, предложенной в настоящем разделе приведено в разделе 2.3.

### 2.1.7 Численные тесты

Тестирование улучшенной (130) и стандартной (131) квадратурных формул проведено в случае, когда поверхность  $\Gamma$  является сферой единичного радиуса, которая задана параметрически уравнениями:

$$y_1(u, v) = \cos u \sin v, \quad y_2(u, v) = \sin u \sin v, \quad y_3(u, v) = \cos v, \quad (132)$$

причём  $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ . Отметим, что в данном случае  $|\eta(y(u, v))| = \sin v$  и  $|\eta(y(u, 0))| = |\eta(y(u, \pi))| = 0$  для всех  $u \in [0, 2\pi]$ . Иначе говоря,  $|\eta(y)| = 0$  на полюсах сферы при такой параметризации, но условия теоремы выполняются.

Согласно [6, § 27.6], плотность потенциала двойного слоя на поверхности  $\Gamma$  можно найти по формуле

$$\mu(x)|_{\Gamma} = \mathcal{W}_k[\mu](x)|_{\Gamma^-} - \mathcal{W}_k[\mu](x)|_{\Gamma^+}.$$

Здесь поверхность  $\Gamma$  рассматривается как двусторонняя, через  $\Gamma^-$  обозначена сторона, которую мы видим, глядя навстречу вектору нормали  $\mathbf{n}_y$ , а через  $\Gamma^+$  обозначена противоположная сторона. В формуле берутся предельные значения потенциала двойного слоя на разных сторонах  $\Gamma$ . Отметим, что направление единичной нормали  $\mathbf{n}_y$  совпадает с направлением нормали  $\eta$ , т.к. вектор  $\mathbf{n}_y$  получается из  $\eta$  в результате нормировки. Пусть теперь  $\Gamma$  — единичная сфера, заданная параметризацией (132), тогда формулы (112) для нормали  $\eta$  определяют внутреннюю нормаль на сфере, а значит,  $\Gamma^-$  — внутренняя сторона единичной сферы, а  $\Gamma^+$  — её внешняя сторона.

В рассматриваемых тестовых примерах для потенциала двойного слоя с заданной на единичной сфере плотностью известно явное выражение во всём пространстве, поэтому точные значения потенциала можно сравнить с приближенными, вычисленными по квадратурным формулам. Во всех тестах приближенное значение потенциала двойного слоя вычислялось по стандартной квадратурной формуле (131) и по улучшенной квадратурной формуле (130) в некоторых точках на вспомогательных сферах, имеющих центры в начале координат и радиусы, равные  $1 \pm \Delta R$ . Тем самым, вспомогательные сферы находятся либо внутри, либо снаружи сферы единичного радиуса, на которой задана плотность потенциала, на расстоянии  $\Delta R$  от неё. Затем были рассчитаны значения абсолютных погрешностей в этих точках, и для каждой вспомогательной сферы определялись максимумы значений этих погрешностей.

Координаты точек, которые использовались для оценки максимальной абсолютной погрешности:

$$x_j^{ql} = Ry_j(u_q, v_l), \quad j = 1, 2, 3,$$

$$u_q = \frac{2\pi}{2N}q, \quad q = 0, \dots, 2N; \quad v_l = \frac{\pi}{2M}l, \quad l = 1, \dots, 2M - 1, \quad (133)$$

где  $y_j(u, v)$  определяется формулами (132),  $R$  — радиус вспомогательной сферы. То есть эти точки расположены над и под центрами участков разбиения единичной сферы, серединами границ между такими участками и пересечениями этих границ.

Вычисления проводились для различных значений  $M$  и  $N$ . Значения шагов определяются формулами  $h = 2\pi/N$ ,  $H = \pi/M$ . Если  $N/2 = M = 25$ , то  $h = H \approx 0.13$ ; если  $N/2 = M = 50$ , то  $h = H \approx 0.063$ ; если  $N/2 = M = 100$ , то  $h = H \approx 0.031$ .

В таблицах приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей. В левом столбце указано отличие радиуса вспомогательной сферы от единицы: для внутренних сфер радиус равен  $1 - \Delta R$ , для внешних  $1 + \Delta R$ . В верхней строке указаны значения  $M, N$ . Первое число в ячейках таблицы — максимальная погрешность для стандартной квадратурной формулы на данной вспомогательной сфере, а число после точки с запятой — максимальная погрешность на данной сфере для улучшенной формулы.

**Тест 1.** В данном тесте использовалась плотность потенциала  $\mu(y(u, v)) = k$ , тогда потенциал двойного слоя для уравнения Гельмгольца имеет вид

$$\mathcal{W}_k[\mu](x) = \begin{cases} (1 - ik) \exp(ik) \frac{\sin(k|x|)}{|x|} & \text{при } |x| < 1, \\ (\sin k - k \cos k) \frac{\exp(ik|x|)}{|x|} & \text{при } |x| > 1, \end{cases}$$

где  $k = 1$ . В таблице 12 приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей.

**Тест 2.** В данном тесте использовалась плотность потенциала

$\mu(y(u, v)) = k^3 \cos v$ . При этом потенциал двойного слоя имеет вид

$$\mathcal{W}_k[\mu](x) = \begin{cases} (k^2 + 2(ik - 1)) \exp(ik) \frac{k|x| \cos(k|x|) - \sin(k|x|)}{|x|^2} \cos \vartheta & \text{при } |x| < 1, \\ (2k \cos k + (k^2 - 2) \sin k) \frac{(ik|x| - 1) \exp(ik|x|)}{|x|^2} \cos \vartheta & \text{при } |x| > 1, \end{cases}$$

где  $\vartheta$  — зенитный угол в сферических координатах с центром в начале координат,  $k = 1$ . В таблице 13 приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей.

**Тест 3.** В данном тесте использовалась плотность потенциала

$\mu(y(u, v)) = k^3 \sin v \cos u$ . Тогда, при этом потенциал двойного слоя имеет вид

$$\mathcal{W}_k[\mu](x) = \begin{cases} (k^2 + 2(ik - 1)) \exp(ik) \frac{k|x| \cos(k|x|) - \sin(k|x|)}{|x|^2} \sin \vartheta \cos \varphi, & |x| < 1, \\ (2k \cos k + (k^2 - 2) \sin k) \frac{(ik|x| - 1) \exp(ik|x|)}{|x|^2} \sin \vartheta \cos \varphi, & |x| > 1, \end{cases}$$

$\Delta R$	$M = N/2 = 25$	$M = N/2 = 50$	$M = N/2 = 100$
0.1	0.029; 0.0089	0.0079; 0.0024	0.0021; 0.00062
0.06	0.13; 0.012	0.020; 0.0038	0.0055; 0.0010
0.03	1.04; 0.034	0.13; 0.0065	0.020; 0.0019
0.01	12.1; 0.12	2.74; 0.031	0.49; 0.0061

Внутренние сферы

$\Delta R$	$M = N/2 = 25$	$M = N/2 = 50$	$M = N/2 = 100$
0.1	0.028; 0.0077	0.0077; 0.0021	0.0020; 0.00054
0.06	0.15; 0.014	0.020; 0.0035	0.0055; 0.00093
0.03	1.08; 0.042	0.14; 0.0069	0.020; 0.0018
0.01	12.1; 0.24	2.76; 0.036	0.50; 0.0063

Внешние сферы

Таблица 12: Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 1

где  $\vartheta$  и  $\varphi$  — зенитный и азимутальный углы в сферических координатах с центром в начале координат,  $k = 1$ . В таблице 14 приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей.

### 2.1.8 Выводы

Как указано выше, первое число в ячейках таблиц — погрешность стандартной квадратурной формулы, а второе число — погрешность улучшенной квадратурной формулы. Из таблиц видно, что улучшенная квадратурная формула обеспечивает более высокую точность вычислений вблизи границы  $\Gamma$ , чем стандартная. Кроме того, при фиксированных  $h, H$  стандартная формула быстро расходится при приближении к границе. Тесты показывают, что улучшенная формула даёт хорошую точность вычислений для всех точек, расположенных на расстоянии  $H$  и более от границы  $\Gamma$ . В этом случае улучшенная квадратурная формула имеет второй порядок сходимости и обеспечивает максимальную погрешность вычислений порядка  $O(hH)$ . На расстояниях порядка  $hH$  до границы улучшенная формула даёт погрешность  $O(H)$ , а погрешность стандартной квадратурной формулы стремительно возрастает.

$\Delta R$	$M = N/2 = 25$	$M = N/2 = 50$	$M = N/2 = 100$
0.1	0.029; 0.0091	0.0079; 0.0025	0.0020; 0.00064
0.06	0.082; 0.012	0.020; 0.0039	0.0055; 0.0010
0.03	0.48; 0.025	0.082; 0.0062	0.020; 0.0019
0.01	5.97; 0.079	1.31; 0.019	0.22; 0.0045

Внутренние сферы

$\Delta R$	$M = N/2 = 25$	$M = N/2 = 50$	$M = N/2 = 100$
0.1	0.028; 0.0074	0.0078; 0.0020	0.0020; 0.00052
0.06	0.083; 0.011	0.020; 0.0034	0.0055; 0.00091
0.03	0.50; 0.024	0.082; 0.0058	0.020; 0.0018
0.01	5.99; 0.10	1.32; 0.020	0.22; 0.0044

Внешние сферы

Таблица 13: Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 2

## 2.2 Квадратурная формула для прямого значения потенциала двойного слоя

Потенциалы простого и двойного слоя позволяют сводить краевые задачи для уравнений Лапласа и Гельмгольца к граничным интегральным уравнениям, которые затем решаются численно с целью нахождения численного решения краевой задачи.

Для численного решения интегральных уравнений нужно иметь квадратурные формулы, которые с хорошей точностью вычисляют прямые значения потенциалов на поверхности, где задана плотность потенциала.

В данном разделе выводится квадратурная формула для прямого значения потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью, заданной на замкнутой либо разомкнутой поверхности. Рассматриваются потенциалы двойного слоя для уравнений Лапласа и Гельмгольца. Выведенная квадратурная формула может использоваться при численном решении граничных интегральных уравнений, возникающих при решении краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца методом потенциалов. Предложенная квадратурная формула даёт значительно более высокую точность, чем стандартная квадратурная формула, что подтверждается численными тестами.



$\Delta R$	$M = N/2 = 25$	$M = N/2 = 50$	$M = N/2 = 100$
0.1	0.012; 0.0072	5.7E-5; 0.0018	1.5E-6; 4.5E-4
0.06	0.13; 0.013	0.0046; 0.0029	8.8E-6; 7.1E-4
0.03	1.04; 0.035	0.13; 0.0068	0.0050; 0.0014
0.01	12.08; 0.12	2.74; 0.032	0.49; 0.0062

Внутренние сферы

$\Delta R$	$M = N/2 = 25$	$M = N/2 = 50$	$M = N/2 = 100$
0.1	0.019; 0.0062	0.00014; 0.0014	1.8E-6; 3.6E-4
0.06	0.15; 0.013	0.0062; 0.0026	1.7E-5; 6.3E-4
0.03	1.07; 0.041	0.14; 0.0068	0.0058; 0.0013
0.01	12.1; 0.24	2.76; 0.036	0.50; 0.0063

Внешние сферы

Таблица 14: Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 3

### 2.2.1 Постановка задачи

Введем в пространстве декартову систему координат  $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ . Пусть  $\Gamma$  — простая гладкая замкнутая поверхность класса  $C^2$ , ограничивающая объёмно-односвязную внутреннюю область [92, с. 201], либо простая гладкая ограниченная разомкнутая ориентированная поверхность класса  $C^2$ , содержащая свои предельные точки [93, Глава 14, § 1]. Предположим, что поверхность  $\Gamma$  параметризована так, что на нее отображается прямоугольник:

$$y = (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma, \quad y_1 = y_1(u, v), \quad y_2 = y_2(u, v), \quad y_3 = y_3(u, v);$$

$$u \in [0, A], \quad v \in [0, B];$$

$$y_j(u, v) \in C^2([0, A] \times [0, B]), \quad j = 1, 2, 3. \quad (134)$$

Потребуем также, чтобы различным внутренним точкам прямоугольника при указанном отображении соответствовали различные точки поверхности. Сферу, поверхность эллипсоида, гладкие поверхности фигур вращения, поверхность тора и многие другие более сложные поверхности можно параметризовать таким образом. Кроме того, сложные поверхности можно разбить на несколько частей и для каждой части ввести свою параметризацию, тогда дальнейшие рассуждения справедливы для каждой такой части. Введём  $N$  точек  $u_n$  с шагом  $h$  на

отрезке  $[0, A]$  и  $M$  точек  $v_m$  на отрезке  $[0, B]$  и рассмотрим разбиение прямоугольника  $[0, A] \times [0, B]$ , который отображается на поверхность  $\Gamma$

$$A = Nh, \quad B = MH, \quad u_n = (n + 1/2)h, \quad n = 0, \dots, N - 1;$$

$$v_m = (m + 1/2)H, \quad m = 0, \dots, M - 1.$$

Тем самым прямоугольник  $[0, A] \times [0, B]$  разбивается на  $N \times M$  маленьких прямоугольничков и через  $(u_n, v_m)$  обозначены серединки этих прямоугольничков.

Известно [93, Гл. 14, § 1], что компоненты вектора нормали (не единичного)  $\eta(y) = (\eta_1(y), \eta_2(y), \eta_3(y))$  в точке поверхности  $y = (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma$  выражаются через определители второго порядка формулами

$$\eta_1 = \begin{vmatrix} (y_2)_u & (y_3)_u \\ (y_2)_v & (y_3)_v \end{vmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{vmatrix} (y_3)_u & (y_1)_u \\ (y_3)_v & (y_1)_v \end{vmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{vmatrix} (y_1)_u & (y_2)_u \\ (y_1)_v & (y_2)_v \end{vmatrix}. \quad (135)$$

Положим  $|\eta(y)| = \sqrt{(\eta_1(y))^2 + (\eta_2(y))^2 + (\eta_3(y))^2}$ . Кроме того, известно [93, Гл. 14], что

$$\int_{\Gamma} F(y) ds_y = \int_0^A du \int_0^B dv F(y(u, v)) |\eta(y(u, v))|.$$

Потребуем, чтобы

$$|\eta(y(u, v))| > 0, \quad \forall (u, v) \in ((0, A) \times (0, B)). \quad (136)$$

Из условия (136) следует, что  $|\eta(y(u, v))| \in C^1((0, A) \times (0, B))$ . Обозначим через  $\mathbf{n}_y$  единичную нормаль в точке  $y \in \Gamma$ , т.е.  $\mathbf{n}_y = \eta(y)/|\eta(y)|$ . Производная по нормали  $\mathbf{n}_y$  имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} = |\eta(y)|^{-1} (\eta(y), \nabla_y).$$

Обозначим  $|x - y(u, v)| = \sqrt{(x_1 - y_1(u, v))^2 + (x_2 - y_2(u, v))^2 + (x_3 - y_3(u, v))^2}$  и заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} |x - y| = \frac{1}{|\eta(y)|} \sum_{j=1}^3 \eta_j(y) \frac{y_j - x_j}{|x - y|}.$$

Потенциал двойного слоя для уравнения Гельмгольца используется при решении краевых задач методом интегральных уравнений. Пусть  $\mu(y) \in C^0(\Gamma)$ . Прямое значение потенциала двойного слоя в точке  $x = y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{n}}) \in \Gamma$  имеет вид

$$\mathcal{W}_k[\mu](x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds_y =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mu(y) \frac{1}{|\eta(y)|} \frac{\exp(ik|x-y|)(ik|x-y|-1)}{|x-y|^2} \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(y)(y_j-x_j)}{|x-y|} ds_y = \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^A du \int_0^B dv \mu(y(u,v)) \exp(ik|x-y(u,v)|)(ik|x-y(u,v)|-1) \times \\
&\quad \times \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(y(u,v))(y_j(u,v)-x_j)}{|x-y(u,v)|^3} = \\
&= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \mu(y(u,v)) \times \\
&\quad \times \exp(ik|x-y(u,v)|)(ik|x-y(u,v)|-1) \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(y(u,v))(y_j(u,v)-x_j)}{|x-y(u,v)|^3}, \quad (137)
\end{aligned}$$

где  $k \geq 0$ . Известно [6, §27.5], что прямое значение потенциала двойного слоя в наших предположениях является непрерывной на  $\Gamma$  функцией. Пусть  $\mu_{nm} = \mu(y(u_n, v_m))$ , тогда

$$\mu(y(u, v)) = \mu_{nm} + o(1),$$

для  $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$  и  $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$ . Так же как и в [88] можно показать, что при  $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$  и  $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$  выполняются оценки

$$|x - y(u, v)| = |x - y(u_n, v_m)| + O(h + H),$$

$$\exp(ik|x - y(u, v)|) = \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|) + O(h + H).$$

Константы в оценках функций, обозначенных как  $O(h + H)$ , не зависят от  $n, m$  и от расположения  $x$  в узлах  $\Gamma$ . Следовательно,

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_k[\mu](x)|_{x=y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) \in \Gamma} &\approx \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mu_{nm} \exp(ik|x-y(u_n, v_m)|)(ik|x-y(u_n, v_m)|-1) \times \\
&\quad \times \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(y(u, v))(y_j(u, v)-x_j)}{|x-y(u, v)|^3}. \quad (138)
\end{aligned}$$

Таким образом, чтобы получить квадратурную формулу для прямого значения потенциала двойного слоя при  $x = y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) \in \Gamma$ , необходимо вычислить двойной интеграл в (138), который будем называть каноническим интегралом.

## 2.2.2 Вычисление канонического интеграла, когда точка $x$ лежит в области интегрирования

В данном случае интегрирование ведется по прямоугольничку с центром в точке  $(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$ , которой отвечает точка  $y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) = x$  на поверхности  $\Gamma$ . Применяя формулу Тейлора с центром в точке  $(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$ , находим

$$\begin{aligned} |y(u, v) - x|^2 &= |y(u, v) - y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})|^2 \approx \sum_{j=1}^3 ((y_j)'_u(u - u_{\hat{n}}) + (y_j)'_v(v - v_{\hat{m}}))^2 = \\ &= \sum_{j=1}^3 (((y_j)'_u)^2(u - u_{\hat{n}})^2 + ((y_j)'_v)^2(v - v_{\hat{m}})^2 + 2(y_j)'_u(y_j)'_v(u - u_{\hat{n}})(v - v_{\hat{m}})) = \\ &= \alpha^2(u - u_{\hat{n}})^2 + \beta^2(v - v_{\hat{m}})^2 + 2\delta(u - u_{\hat{n}})(v - v_{\hat{m}}), \\ \alpha^2 &= \sum_{j=1}^3 ((y_j)'_u)^2, \quad \beta^2 = \sum_{j=1}^3 ((y_j)'_v)^2, \quad \delta = \sum_{j=1}^3 (y_j)'_u(y_j)'_v, \end{aligned}$$

где  $(y_j)'_u$  и  $(y_j)'_v$  берутся в точке  $(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$ . Заметим, что  $\alpha^2\beta^2 - \delta^2 = |\eta(x)|^2$  согласно [93, Гл. 14, § 1], поэтому  $\alpha^2 > 0$  и  $\beta^2 > 0$  в силу условия (136). Далее, используя формулу Тейлора в точке  $(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$  с остаточным членом в форме Пеано [93, Гл. 10, § 5.3], получаем

$$\begin{aligned} y_j - x_j &= (y_j)'_u(u - u_{\hat{n}}) + (y_j)'_v(v - v_{\hat{m}}) + \frac{1}{2}(y_j)''_{uu}(u - u_{\hat{n}})^2 \\ &+ \frac{1}{2}(y_j)''_{vv}(v - v_{\hat{m}})^2 + (y_j)''_{uv}(u - u_{\hat{n}})(v - v_{\hat{m}}) + o((u - u_{\hat{n}})^2 + (v - v_{\hat{m}})^2), \end{aligned}$$

$$\eta_j(y(u, v)) = \eta_j(y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})) + (\eta_j)'_u(u - u_{\hat{n}}) + (\eta_j)'_v(v - v_{\hat{m}}) + o\left(\sqrt{(u - u_{\hat{n}})^2 + (v - v_{\hat{m}})^2}\right).$$

Производные по  $u$  и  $v$  берутся в точке  $(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$ . Легко проверить, что

$$\sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}))(y_j)'_u = \sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}))(y_j)'_v = 0,$$

следовательно

$$\sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u, v))(y_j - x_j) \approx \xi_1(u - u_{\hat{n}})^2 + \xi_2(v - v_{\hat{m}})^2 + \xi_3(u - u_{\hat{n}})(v - v_{\hat{m}}),$$

$$\xi_1 = \sum_{j=1}^3 \left( \frac{1}{2} \eta_j(y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}))(y_j)''_{uu} + (\eta_j)'_u(y_j)'_u \right),$$

$$\xi_2 = \sum_{j=1}^3 \left( \frac{1}{2} \eta_j(y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}))(y_j)''_{vv} + (\eta_j)'_v (y_j)'_v \right),$$

$$\xi_3 = \sum_{j=1}^3 \left( \eta_j(y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}))(y_j)''_{uv} + (\eta_j)'_u (y_j)'_v + (\eta_j)'_v (y_j)'_u \right).$$

Производные по  $u$  и  $v$  берутся в точке  $(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$ . Из приведенных соотношений вытекает, что в рассматриваемом случае канонический интеграл в (138) приближенно равен следующему интегралу, который обозначим через  $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$

$$\int_{u_{\hat{n}}-h/2}^{u_{\hat{n}}+h/2} du \int_{v_{\hat{m}}-H/2}^{v_{\hat{m}}+H/2} dv \frac{\sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u, v))(y_j - x_j)}{|x - y|^3} \approx$$

$$= \int_{-h/2}^{h/2} dU \int_{-H/2}^{H/2} dV \frac{\xi_1 U^2 + \xi_2 V^2 + \xi_3 UV}{(\alpha^2 U^2 + \beta^2 V^2 + 2\delta UV)^{3/2}} = \mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}},$$

где  $U = u - u_{\hat{n}}$ ,  $V = v - v_{\hat{m}}$ . Вычислим интеграл  $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$  в явном виде. Перейдя к полярным координатам  $\rho = \sqrt{U^2 + V^2}$ ,  $U = \rho \cos \phi$ ,  $V = \rho \sin \phi$ , мы преобразуем выражение под интегралом в сумму двух рациональных дробей. Применяя в получившихся двух интегралах замены  $t = \operatorname{tg} \phi$  и  $t = \operatorname{ctg} \phi$  соответственно, а затем сделав замену  $z = t + \delta/\alpha^2$  мы приходим к табличным интегралам. В итоге получается явное выражение для  $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$ .

Подробно процесс вывода интеграла  $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$  описан в разделе 1.2. Явное выражение для  $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$  имеет вид

$$\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}} = \frac{h}{\beta^3} \left( -\frac{\xi_2 z}{\sqrt{z^2 + (\alpha/\beta)^2 - (\delta/\beta^2)^2}} + \xi_2 \ln \left| z + \sqrt{z^2 + (\alpha/\beta)^2 - (\delta/\beta^2)^2} \right| - \right.$$

$$\left. -\frac{\xi_3 - 2\xi_2 \delta/\beta^2}{\sqrt{z^2 + (\alpha/\beta)^2 - (\delta/\beta^2)^2}} + \right.$$

$$\left. + z \frac{\xi_2 (\delta/\beta^2)^2 + \xi_1 - \xi_3 \delta/\beta^2}{((\alpha/\beta)^2 - (\delta/\beta^2)^2) \sqrt{z^2 + (\alpha/\beta)^2 - (\delta/\beta^2)^2}} \right) \Bigg|_{-H/h+\delta/\beta^2}^{H/h+\delta/\beta^2} -$$

$$-\frac{H}{\alpha^3} \left( -\frac{\xi_1 z}{\sqrt{z^2 - (\delta/\alpha^2)^2 + (\beta/\alpha)^2}} + \xi_1 \ln \left| z + \sqrt{z^2 - (\delta/\alpha^2)^2 + (\beta/\alpha)^2} \right| - \right.$$

$$\left. -\frac{\xi_3 - 2\xi_1 \delta/\alpha^2}{\sqrt{z^2 - (\delta/\alpha^2)^2 + (\beta/\alpha)^2}} + \right)$$

$$+z \frac{\xi_1(\delta/\alpha^2)^2 + \xi_2 - \xi_3\delta/\alpha^2}{(-(\delta/\alpha^2)^2 + (\beta/\alpha)^2)\sqrt{z^2 - (\delta/\alpha^2)^2 + (\beta/\alpha)^2}} \Bigg|_{h/H+\delta/\alpha^2}^{-h/H+\delta/\alpha^2}.$$

### 2.2.3 Вычисление канонического интеграла, когда точка $x$ не лежит в области интегрирования

Пусть точка  $x$  не принадлежит кусочку поверхности  $\Gamma$ , на котором изменяется точка  $y = y(u, v)$ , когда  $(u - u_n) \in [-h/2, h/2]$  и  $(v - v_m) \in [-H/2, H/2]$ . Разложим  $y_j(u, v)$  по формуле Тейлора с центром в точке  $(u_n, v_m)$ , тогда для  $j = 1, 2, 3$  получим

$$y_j(u, v) = y_j(u_n, v_m) + D_j + O(H^2 + h^2),$$

где

$$D_j = (y_j)'_u(u - u_n) + (y_j)'_v(v - v_m).$$

Здесь и далее все производные по  $u$  и  $v$  берутся в точке  $(u_n, v_m)$ . Положим

$$r^2 = |x - y(u_n, v_m)|^2 = \sum_{j=1}^3 r_j^2 \neq 0, \quad r_j = y_j(u_n, v_m) - x_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

тогда

$$y_j(u, v) - x_j = r_j + D_j + O(H^2 + h^2), \quad j = 1, 2, 3.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |x - y(u, v)|^2 &= \sum_{j=1}^3 (x_j - y_j(u, v))^2 \approx \sum_{j=1}^3 (r_j^2 + 2r_j D_j + D_j^2) = \\ &= r^2 + 2P(u - u_n) + 2Q(v - v_m) + \alpha^2(u - u_n)^2 + \beta^2(v - v_m)^2 + 2\delta(u - u_n)(v - v_m) = \\ &= \beta^2(V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)^2 - (\delta U + Q)^2/\beta^2 + \alpha^2 U^2 + 2PU + r^2, \end{aligned}$$

где  $U = u - u_n$ ,  $V = v - v_m$ ,

$$P = \sum_{j=1}^3 r_j (y_j)'_u, \quad Q = \sum_{j=1}^3 r_j (y_j)'_v,$$

$$\alpha^2 = \sum_{j=1}^3 ((y_j)'_u)^2, \quad \beta^2 = \sum_{j=1}^3 ((y_j)'_v)^2, \quad \delta = \sum_{j=1}^3 (y_j)'_u (y_j)'_v.$$

Производные по  $u$  и  $v$  берутся в точке  $u = u_n$ ,  $v = v_m$ . Используя результаты из § 1 главы 14 в [93], можно показать, что  $\alpha^2\beta^2 - \delta^2 = |\eta(y(u_n, v_m))|^2$ . По условию (136),  $|\eta(y(u_n, v_m))| > 0$  для всех возможных  $n, m$ , поэтому  $\alpha^2\beta^2 - \delta^2 > 0$ . Следовательно,  $\alpha^2 > 0$  и  $\beta^2 > 0$ . Применяя формулу Тейлора в точке  $(u_n, v_m)$  с остаточным членом в форме Пеано, находим

$$\eta_j(y(u, v)) = \eta_j(y(u_n, v_m)) + (\eta_j)'_u(u - u_n) + (\eta_j)'_v(v - v_m) + o\left(\sqrt{(u - u_n)^2 + (v - v_m)^2}\right).$$

Производные по  $u$  и  $v$  берутся в точке  $(u_n, v_m)$ . Для вычисления выражения

$$\sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u, v))(y_j(u, v) - x_j)$$

с учетом формул

$$\sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u_n, v_m))(y_j)'_u = \sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u_n, v_m))(y_j)'_v = 0,$$

отражающих ортогональность вектора нормали и касательных векторов к поверхности (см. главу 14 в [93]), воспользуемся разложением по формуле Тейлора в точке  $(u_n, v_m)$  с остаточным членом в форме Пеано

$$y_j(u, v) - x_j = r_j + (y_j)'_u(u - u_n) + (y_j)'_v(v - v_m) + \frac{1}{2}(y_j)''_{uu}(u - u_n)^2 + \\ + \frac{1}{2}(y_j)''_{vv}(v - v_m)^2 + (y_j)''_{uv}(u - u_n)(v - v_m) + o\left((u - u_n)^2 + (v - v_m)^2\right),$$

тогда

$$\sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u, v))(y_j(u, v) - x_j) \approx R + \xi_4 U + \xi_5 V + \xi_1 U^2 + \xi_2 V^2 + \xi_3 UV,$$

где  $U = u - u_n$ ,  $V = v - v_m$  и

$$\xi_1 = \sum_{j=1}^3 \left( \frac{1}{2} \eta_j(y(u_n, v_m))(y_j)''_{uu} + (\eta_j)'_u (y_j)'_u \right),$$

$$\xi_2 = \sum_{j=1}^3 \left( \frac{1}{2} \eta_j(y(u_n, v_m))(y_j)''_{vv} + (\eta_j)'_v (y_j)'_v \right),$$

$$\xi_3 = \sum_{j=1}^3 \left( \eta_j(y(u_n, v_m))(y_j)''_{uv} + (\eta_j)'_u (y_j)'_v + (\eta_j)'_v (y_j)'_u \right),$$

$$\xi_4 = \sum_{j=1}^3 (\eta_j)'_u r_j, \quad \xi_5 = \sum_{j=1}^3 (\eta_j)'_v r_j, \quad R = \sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u_n, v_m)) r_j.$$

Все производные по  $u$ ,  $v$  берутся в точке  $(u_n, v_m)$ . Из приведенных соотношений вытекает, что в рассматриваемом случае канонический интеграл из (138) приближенно равен следующему интегралу, который обозначим через  $K_{nm}(x)$

$$\begin{aligned} & \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \frac{1}{|x - y(u, v)|^3} \sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u, v))(y_j(u, v) - x_j) \approx \int_{-h/2}^{h/2} dU \int_{-H/2}^{H/2} dV \times \\ & \times \frac{R + \xi_4 U + \xi_5 V + \xi_1 U^2 + \xi_2 V^2 + \xi_3 UV}{\beta^3((V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)^2 - (\delta U + Q)^2/\beta^4 + (\alpha^2 U^2 + 2PU + r^2)/\beta^2)^{3/2}} = \\ & = K_{nm}(x). \end{aligned} \quad (139)$$

Интеграл  $K_{nm}(x)$  вычислен в явном виде в разделе 2.1.

#### 2.2.4 Квадратурная формула для прямого значения потенциала двойного слоя

Из приведённых рассуждений вытекает следующий результат.

**Теорема 2.2.** Пусть  $\Gamma$  — простая гладкая замкнутая поверхность класса  $C^2$ , ограничивающая объёмно-односвязную внутреннюю область, либо простая гладкая ограниченная разомкнутая ориентированная поверхность класса  $C^2$ , содержащая свои предельные точки. Пусть  $\Gamma$  допускает параметризацию (134) со свойством (136), и  $\mu(y) \in C^0(\Gamma)$ . Тогда для прямого значения потенциала двойного слоя (137) на  $\Gamma$  при  $x = y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) \in \Gamma$  и  $k \geq 0$  имеет место квадратурная формула

$$\begin{aligned} & \mathcal{W}_k[\mu](x)|_{x=y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) \in \Gamma} \approx -\frac{1}{4\pi} \mu_{\hat{n}\hat{m}} \mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}} + \\ & + \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{n=N-1, m=M-1 \\ n=0, m=0 \\ (n,m) \neq (\hat{n}, \hat{m})}} \mu_{nm} \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|) (ik|x - y(u_n, v_m)| - 1) K_{nm}(x), \end{aligned} \quad (140)$$

где интеграл  $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$  вычислен в явном виде в пункте 2.2.2, а интеграл  $K_{nm}(x)$  из (139) вычислен в явном виде в разделе 2.1.

Если  $k = 0$ , то потенциал двойного слоя для уравнения Гельмгольца переходит в потенциал двойного слоя для уравнения Лапласа, соответственно, квадратурная формула (140) при  $k = 0$  принимает вид квадратурной формулы для прямого значения гармонического потенциала двойного слоя на поверхности  $\Gamma$ .



### 2.2.5 Стандартная квадратурная формула для прямого значения потенциала двойного слоя

Квадратурная формула (140) является альтернативой стандартной квадратурной формуле для прямого значения потенциала двойного слоя на поверхности  $\Gamma$ , используемой в инженерных расчётах [2, Глава 2]. Стандартная квадратурная формула получается из формулы (138) заменой канонического интеграла при  $x \neq y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$  на его приближенное значение

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_k[\mu](x) \approx & \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{n=0, m=0 \\ (n,m) \neq (\hat{n}, \hat{m})}}^{n=N-1, m=M-1} \mu_{nm} \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|)(ik|x - y(u_n, v_m)| - 1) \times \\ & \times \frac{hH}{|x - y(u_n, v_m)|^3} \sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u_n, v_m))(y_j(u_n, v_m) - x_j) \end{aligned} \quad (141)$$

и обнулением канонического интеграла по кусочку поверхности  $\Gamma$  с центром в точке  $x = y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$ . Обнуление канонического интеграла в данном случае можно обосновать следующим образом. Этот интеграл приближенно равен интегралу от той же функции по кусочку касательной плоскости, проведенной в точке  $x$ . Вектор нормали  $\eta$  к поверхности в точке  $y$  можно приближенно заменить на вектор нормали в точке  $x = y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$ , а он является и вектором нормали к касательной плоскости. На касательной плоскости вектор  $(y(u, v) - x)$  ортогонален вектору нормали в точке  $x$ , поэтому их скалярное произведение тождественно равно нулю для всех  $y$ , а значит, и интеграл по кусочку касательной плоскости равен нулю. Поскольку этот интеграл приближенно равен каноническому интегралу по кусочку поверхности  $\Gamma$  с центром в точке  $x = y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$ , то можно считать, что и последний интеграл приближенно равен нулю.

### 2.2.6 Численные тесты

Тестирование улучшенной (140) и стандартной (141) квадратурных формул проведено в случае, когда поверхность  $\Gamma$  является сферой единичного радиуса, которая задана параметрически уравнениями:

$$y_1(u, v) = \cos u \sin v, \quad y_2(u, v) = \sin u \sin v, \quad y_3(u, v) = \cos v, \quad (142)$$

причём  $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ . Отметим, что в данном случае  $|\eta(y(u, v))| = \sin v$  и  $|\eta(y(u, 0))| = |\eta(y(u, \pi))| = 0$  для всех  $u \in [0, 2\pi]$ . Иначе говоря,  $|\eta(y)| = 0$  на полюсах сферы при такой параметризации, но условия теоремы выполняются.

Согласно [6, гл. 5, § 27, п. 7], прямое значение потенциала двойного слоя на поверхности  $\Gamma$  можно найти по формуле

$$\mathcal{W}_k[\mu](x)|_{\Gamma} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \mathcal{W}_k[\mu](x)|_{\Gamma^+} + \mathcal{W}_k[\mu](x)|_{\Gamma^-} \right].$$

Здесь поверхность  $\Gamma$  рассматривается как двусторонняя, через  $\Gamma^-$  обозначена сторона, которую мы видим, глядя навстречу вектору нормали  $\mathbf{n}_y$ , а через  $\Gamma^+$  обозначена противоположная сторона. В формуле берутся предельные значения потенциала двойного слоя на разных сторонах  $\Gamma$ . Отметим, что направление единичной нормали  $\mathbf{n}_y$  совпадает с направлением нормали  $\eta$ , т.к. вектор  $\mathbf{n}_y$  получается из  $\eta$  в результате нормировки. Пусть теперь  $\Gamma$  — единичная сфера, заданная параметризацией (142), тогда формулы (135) для нормали  $\eta$  определяют внутреннюю нормаль на сфере, а значит,  $\Gamma^-$  — внутренняя сторона единичной сферы, а  $\Gamma^+$  — её внешняя сторона.

В тестах точное прямое значение потенциала двойного слоя в узловых точках сравнивалось с приближенными значениями, вычисленными по квадратурным формулам — по улучшенной формуле (140) в соответствии с Теоремой и по стандартной формуле (141). В каждой узловой точке вычислялась абсолютная погрешность по обеим формулам. Вычисления проводились для разных значений  $M$  и  $N$ . Значения шагов определяются формулами  $h = 2\pi/N$ ,  $H = \pi/M$ . Если  $N/2 = M = 25$ , то  $h = H \approx 0.13$ ; если  $N/2 = M = 50$ , то  $h = H \approx 0.063$ ; если  $N/2 = M = 100$ , то  $h = H \approx 0.031$ . В таблице для каждого теста приводится максимум абсолютной погрешности вычислений по всем узловым точкам сферы. В первой строке таблицы указаны значения  $N, M$ , в последующих строках — максимальные погрешности для стандартной и улучшенной квадратурных формул в каждом тесте.

Для тестирования квадратурных формул в случае уравнений Лапласа и Гельмгольца были использованы различные плотности в потенциале. Для каждой заданной в тестах плотности известно аналитическое выражение потенциала двойного слоя и его прямого значения на единичной сфере. При этом через  $\varphi$  и  $\vartheta$  обозначаются азимутальный и зенитный углы в сферических координатах с началом в центре сферы. В случае уравнения Гельмгольца, значение  $k$  выбиралось равным единице.

**Тест 1.** Плотность потенциала  $\mu(y(u, v)) = 1$ ,

$$\mathcal{W}_0[\mu](x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| < 1 \\ 0 & \text{при } |x| > 1 \end{cases}, \quad \mathcal{W}_0[\mu](x)|_{|x|=1} = \frac{1}{2}.$$

**Тест 2.** Плотность потенциала  $\mu(y(u, v)) = \cos u \sin v$ ,

$$\mathcal{W}_0[\mu](x) = \begin{cases} \frac{2|x| \cos \varphi \sin \vartheta}{3} & \text{если } |x| < 1 \\ -\frac{\cos \varphi \sin \vartheta}{3|x|^2} & \text{если } |x| > 1 \end{cases}, \quad \mathcal{W}_0[\mu](x)|_{|x|=1} = \frac{\cos \varphi \sin \vartheta}{6}.$$

**Тест 3.** Плотность потенциала  $\mu(y(u, v)) = (3 \cos^2 v - 1)/2$ ,

$$\mathcal{W}_0[\mu](x) = \begin{cases} \frac{3|x|^2(3 \cos^2 \vartheta - 1)}{10} & \text{при } |x| < 1 \\ -\frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{5|x|^3} & \text{при } |x| > 1 \end{cases}, \quad \mathcal{W}_0[\mu](x)|_{|x|=1} = \frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{20}.$$

**Тест 4.** Плотность потенциала  $\mu(y(u, v)) = k$ ,

$$\mathcal{W}_k[\mu](x) = \begin{cases} (1 - ik) \exp(ik) \frac{\sin(k|x|)}{|x|} & \text{если } |x| < 1 \\ (\sin k - k \cos k) \frac{\exp(ik|x|)}{|x|} & \text{если } |x| > 1 \end{cases},$$

$$\mathcal{W}_k[\mu](x)|_{|x|=1} = \frac{1}{2} ((2 - ik) \sin k - \cos k) \exp(ik).$$

**Тест 5.** Плотность потенциала  $\mu(y(u, v)) = k^3 \cos v$ ,

$$\mathcal{W}_k[\mu](x) = \begin{cases} (k^2 + 2(ik - 1)) \exp(ik) \frac{k|x| \cos(k|x|) - \sin(k|x|)}{|x|^2} \cos \vartheta & \text{если } |x| < 1 \\ (2k \cos k + (k^2 - 2) \sin k) \frac{(ik|x| - 1) \exp(ik|x|)}{|x|^2} \cos \vartheta & \text{если } |x| > 1 \end{cases},$$

$$\mathcal{W}_k[\mu](x)|_{|x|=1} = \frac{1}{2} ((k^2 + 4(ik - 1))(k \cos k - \sin k) + k^2 \sin k(ik - 1)) \exp(ik) \cos \vartheta.$$

## 2.2.7 Выводы

Результаты расчетов в приведенных тестовых примерах показывают, что улучшенная квадратурная формула имеет первый порядок сходимости, в то время как стандартная формула сходится медленнее. Погрешность вычислений

номер теста	квадратурная формула	$M = N/2 = 25$	$M = N/2 = 50$	$M = N/2 = 100$
1	стандартная	0.019	0.0097	0.0062
1	улучшенная	0.012	0.0063	0.0032
2	стандартная	0.019	0.0097	0.0049
2	улучшенная	0.00050	0.00014	3.8E-5
3	стандартная	0.011	0.0089	0.0062
3	улучшенная	0.011	0.0060	0.0031
4	стандартная	0.019	0.0097	0.0062
4	улучшенная	0.012	0.0063	0.0032
5	стандартная	0.011	0.0089	0.0062
5	улучшенная	0.012	0.0063	0.0032

Таблица 15: Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тестах 1 – 5.

по улучшенной квадратурной формуле, предложенной в Теореме, меньше, чем погрешность вычислений по стандартной квадратурной формуле. Тем самым, улучшенная квадратурная формула обеспечивает более высокую точность вычислений прямого значения потенциала двойного слоя.

Отметим, что в тестовых примерах погрешность вычислений по улучшенной квадратурной формуле возрастает к полюсам сферам, которые являются особыми точками в силу выбранной параметризации (142). Вычисления по улучшенной квадратурной формуле в тесте 2 показывают более высокую точность, т.к. плотность в потенциале двойного слоя и его прямое значение обращаются в нуль на полюсах сферы.

Улучшенная квадратурная формула может найти применение при численном решении граничных интегральных уравнений, возникающих в процессе решения краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца методом потенциалов.

## 2.3 Квадратурная формула для потенциала двойного слоя с дифференцируемой плотностью

Для вычисления потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью в прикладных расчетах используют стандартную квадратурную формулу [2, Гл. 2] либо формулу, основанную на определении телесного угла [98]. Однако обе эти формулы не позволяют повысить точность вычислений в случае дифференцируемой плотности, т.к. не допускают обобщений на этот случай. Квадратурная формула для потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью, полученная в разделе 2.1, допускает обобщение на случай дифференцируемой плотности.

В данном разделе с использованием подхода из пункта 2.1 выводится квадратурная формула для потенциала двойного слоя с дифференцируемой плотностью, заданной на гладкой замкнутой либо разомкнутой поверхности. Проведенные численные тесты показывают, что эта квадратурная формула даёт более высокую точность вычислений вблизи поверхности, где задана плотность потенциала, чем квадратурные формулы, в которых дифференцируемость плотности не учитывается, и плотность предполагается лишь непрерывной. Преимущество новой квадратурной формулы особенно заметно в случае, когда плотность потенциала представлена гладкими осциллирующими функциями. Полученная квадратурная формула позволяет повысить точность вычисления потенциала без увеличения стоимости вычислений.

### 2.3.1 Постановка задачи

Введем в пространстве декартову систему координат  $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ . Пусть  $\Gamma$  — простая гладкая замкнутая поверхность класса  $C^2$ , ограничивающая объёмно-односвязную внутреннюю область [92, с. 201], либо простая гладкая ограниченная разомкнутая ориентированная поверхность класса  $C^2$ , содержащая свои предельные точки [93, Глава 14, § 1]. Предположим, что поверхность  $\Gamma$  параметризована так, что на нее отображается прямоугольник:

$$\begin{aligned} y &= (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma, \quad y_1 = y_1(u, v), \quad y_2 = y_2(u, v), \quad y_3 = y_3(u, v); \\ u &\in [0, A], \quad v \in [0, B]; \\ y_j(u, v) &\in C^2([0, A] \times [0, B]), \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{143}$$

Потребуем также, чтобы различным внутренним точкам прямоугольника при указанном отображении соответствовали различные точки поверхности. Сферу,

поверхность эллипсоида, гладкие поверхности фигур вращения, поверхность тора и многие другие более сложные поверхности можно параметризовать таким образом. Кроме того, сложные поверхности можно разбить на несколько частей и для каждой части ввести свою параметризацию, тогда дальнейшие рассуждения справедливы для каждой такой части. Введём  $N$  точек  $u_n$  с шагом  $h$  на отрезке  $[0, A]$  и  $M$  точек  $v_m$  на отрезке  $[0, B]$  и рассмотрим разбиение прямоугольника  $[0, A] \times [0, B]$ , который отображается на поверхность  $\Gamma$

$$A = Nh, \quad B = MH, \quad u_n = (n + 1/2)h, \quad n = 0, \dots, N - 1;$$

$$v_m = (m + 1/2)H, \quad m = 0, \dots, M - 1.$$

Тем самым прямоугольник  $[0, A] \times [0, B]$  разбивается на  $N \times M$  маленьких прямоугольничков и через  $(u_n, v_m)$  обозначены серединки этих прямоугольничков.

Известно [93, Глава 14, § 1], что компоненты вектора нормали (не единичного)  $\eta(y) = (\eta_1(y), \eta_2(y), \eta_3(y))$  в точке поверхности  $y = (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma$  выражаются через определители второго порядка формулами

$$\eta_1 = \begin{vmatrix} (y_2)_u & (y_3)_u \\ (y_2)_v & (y_3)_v \end{vmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{vmatrix} (y_3)_u & (y_1)_u \\ (y_3)_v & (y_1)_v \end{vmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{vmatrix} (y_1)_u & (y_2)_u \\ (y_1)_v & (y_2)_v \end{vmatrix}. \quad (144)$$

Положим  $|\eta(y)| = \sqrt{(\eta_1(y))^2 + (\eta_2(y))^2 + (\eta_3(y))^2}$ . Известно [93, Глава 14, § 1–2], что

$$\int_{\Gamma} F(y) ds_y = \int_0^A du \int_0^B dv F(y(u, v)) |\eta(y(u, v))|.$$

Потребуем, чтобы

$$|\eta(y(u, v))| > 0, \quad \forall (u, v) \in ((0, A) \times (0, B)). \quad (145)$$

Из условия (145) следует, что  $|\eta(y(u, v))| \in C^1((0, A) \times (0, B))$ .

Через  $\mathbf{n}_y$  обозначим единичную нормаль в точке  $y \in \Gamma$ , т.е.  $\mathbf{n}_y = \eta(y)/|\eta(y)|$ . Производная по нормали  $\mathbf{n}_y$  имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} = |\eta(y)|^{-1} (\eta(y), \nabla_y).$$

Обозначим  $|x - y(u, v)| = \sqrt{(x_1 - y_1(u, v))^2 + (x_2 - y_2(u, v))^2 + (x_3 - y_3(u, v))^2}$  и заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} |x - y| = \frac{1}{|\eta(y)|} \sum_{j=1}^3 \eta_j(y) \frac{y_j - x_j}{|x - y|}.$$

Потенциал двойного слоя для уравнения Гельмгольца используется при решении краевых задач методом интегральных уравнений. Пусть  $x \notin \Gamma$ . Рассмотрим

потенциал двойного слоя для уравнения Гельмгольца с заданной на поверхности  $\Gamma$  дифференцируемой плотностью  $\mu(y) \in C^1(\Gamma)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_k[\mu](x) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds_y = \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mu(y) \frac{1}{|\eta(y)|} \frac{\exp(ik|x-y|)(ik|x-y|-1)}{|x-y|^2} \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(y)(y_j-x_j)}{|x-y|} ds_y = \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^A du \int_0^B dv \mu(y(u,v)) \exp(ik|x-y(u,v)|)(ik|x-y(u,v)|-1) \times \\
&\quad \times \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(y(u,v))(y_j(u,v)-x_j)}{|x-y(u,v)|^3} = \\
&= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \mu(y(u,v)) \times \\
&\quad \times \exp(ik|x-y(u,v)|)(ik|x-y(u,v)|-1) \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(y(u,v))(y_j(u,v)-x_j)}{|x-y(u,v)|^3}, \quad (146)
\end{aligned}$$

где  $k \geq 0$ . При  $k = 0$  потенциал (146) переходит в потенциал двойного слоя для уравнения Лапласа.

Так же как и в [88] можно показать, что при  $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$  и  $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$

$$|x - y(u, v)| = |x - y(u_n, v_m)| + O(h + H),$$

$$\exp(ik|x - y(u, v)|) = \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|) + O(h + H)$$

для любого  $x \notin \Gamma$ . Константы в оценках функций, обозначенных как  $O(h + H)$ , не зависят от  $n, m$  и от расположения  $x \notin \Gamma$ .

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_k[\mu](x) &\approx \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|)(ik|x - y(u_n, v_m)| - 1) \times \\
&\quad \times \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \mu(y(u, v)) \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(y(u, v))(y_j(u, v) - x_j)}{|x - y(u, v)|^3}. \quad (147)
\end{aligned}$$

Таким образом, чтобы получить квадратурную формулу для потенциала двойного слоя при  $x \notin \Gamma$ , необходимо вычислить следующий интеграл

$$\int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \mu(y(u, v)) \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(y(u, v))(y_j(u, v) - x_j)}{|x - y(u, v)|^3}. \quad (148)$$

### 2.3.2 Вычисление интеграла

Пусть точка  $x$  не принадлежит кусочку поверхности  $\Gamma$ , на котором изменяется точка  $y = y(u, v)$ , когда  $(u - u_n) \in [-h/2, h/2]$  и  $(v - v_m) \in [-H/2, H/2]$ . Разложим  $y_j(u, v)$  по формуле Тейлора с центром в точке  $(u_n, v_m)$ , тогда для  $j = 1, 2, 3$  получим

$$y_j(u, v) = y_j(u_n, v_m) + D_j + O(H^2 + h^2),$$

где

$$D_j = (y_j)'_u(u - u_n) + (y_j)'_v(v - v_m).$$

Здесь и далее все производные по  $u$  и  $v$  берутся в точке  $(u_n, v_m)$ . Положим

$$r^2 = |x - y(u_n, v_m)|^2 = \sum_{j=1}^3 r_j^2 \neq 0, \quad r_j = y_j(u_n, v_m) - x_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

тогда

$$y_j(u, v) - x_j = r_j + D_j + O(H^2 + h^2), \quad j = 1, 2, 3.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |x - y(u, v)|^2 &= \sum_{j=1}^3 (x_j - y_j(u, v))^2 \approx \sum_{j=1}^3 (r_j^2 + 2r_j D_j + D_j^2) = \\ &= r^2 + 2P(u - u_n) + 2Q(v - v_m) + \alpha^2(u - u_n)^2 + \beta^2(v - v_m)^2 + 2\delta(u - u_n)(v - v_m) = \\ &= \beta^2(V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)^2 - (\delta U + Q)^2/\beta^2 + \alpha^2 U^2 + 2PU + r^2, \end{aligned}$$

где  $U = u - u_n$ ,  $V = v - v_m$ ,

$$P = \sum_{j=1}^3 r_j (y_j)'_u, \quad Q = \sum_{j=1}^3 r_j (y_j)'_v,$$

$$\alpha^2 = \sum_{j=1}^3 ((y_j)'_u)^2, \quad \beta^2 = \sum_{j=1}^3 ((y_j)'_v)^2, \quad \delta = \sum_{j=1}^3 (y_j)'_u (y_j)'_v.$$



Производные по  $u$  и  $v$  берутся в точке  $u = u_n$ ,  $v = v_m$ . Можно показать [93, Гл. 14, § 1], что

$$\alpha^2\beta^2 - \delta^2 = |\eta(y(u_n, v_m))|^2. \quad (149)$$

Согласно условию (145),  $|\eta(y(u_n, v_m))| > 0$  для всех возможных  $n, m$ , поэтому

$$\alpha^2\beta^2 - \delta^2 > 0. \quad (150)$$

Отсюда следует, что  $\alpha^2 > 0$  и  $\beta^2 > 0$ .

Применяя формулу Тейлора в точке  $(u_n, v_m)$  с остаточным членом в форме Пеано [93, Гл. 10, § 5.3], находим

$$\eta_j(y(u, v)) = \eta_j(y(u_n, v_m)) + (\eta_j)'_u(u - u_n) + (\eta_j)'_v(v - v_m) + o\left(\sqrt{(u - u_n)^2 + (v - v_m)^2}\right).$$

Аналогично, поскольку  $\mu(y(u, v)) \in C^1(\Gamma)$ , получим

$$\mu(y(u, v)) = \mu(y(u_n, v_m)) + \mu'_u(u - u_n) + \mu'_v(v - v_m) + o\left(\sqrt{(u - u_n)^2 + (v - v_m)^2}\right), \quad (151)$$

где  $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$  и  $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$ . Производные по  $u$  и  $v$  берутся в точке  $(u_n, v_m)$ .

Для вычисления выражения

$$\sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u, v))(y_j(u, v) - x_j)$$

с учетом формул

$$\sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u_n, v_m))(y_j)'_u = \sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u_n, v_m))(y_j)'_v = 0,$$

отражающих ортогональность вектора нормали и касательных векторов к поверхности (см. [93, Гл. 14, § 1.2]), воспользуемся разложением по формуле Тейлора в точке  $(u_n, v_m)$  с остаточным членом в форме Пеано

$$\begin{aligned} y_j(u, v) - x_j &= r_j + (y_j)'_u(u - u_n) + (y_j)'_v(v - v_m) + \frac{1}{2}(y_j)''_{uu}(u - u_n)^2 + \\ &+ \frac{1}{2}(y_j)''_{vv}(v - v_m)^2 + (y_j)''_{uv}(u - u_n)(v - v_m) + o\left(\sqrt{(u - u_n)^2 + (v - v_m)^2}\right), \end{aligned}$$

тогда

$$\mu(y(u, v)) \sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u, v))(y_j(u, v) - x_j) \approx R + \xi_4 U + \xi_5 V + \xi_1 U^2 + \xi_2 V^2 + \xi_3 UV,$$

где  $U = u - u_n$ ,  $V = v - v_m$ ,

$$\xi_1 = \sum_{j=1}^3 \left( \mu(y(u_n, v_m)) \left( \frac{1}{2} \eta_j(y(u_n, v_m)) (y_j)''_{uu} + (\eta_j)'_u (y_j)'_u \right) + \mu'_u (\eta_j)'_u r_j \right),$$

$$\xi_2 = \sum_{j=1}^3 \left( \mu(y(u_n, v_m)) \left( \frac{1}{2} \eta_j(y(u_n, v_m)) (y_j)''_{vv} + (\eta_j)'_v (y_j)'_v \right) + \mu'_v (\eta_j)'_v r_j \right),$$

$$\xi_3 = \sum_{j=1}^3 \left( \mu(y(u_n, v_m)) \left( \eta_j(y(u_n, v_m)) (y_j)''_{uv} + (\eta_j)'_u (y_j)'_v + (\eta_j)'_v (y_j)'_u \right) + \mu'_u (\eta_j)'_v r_j + \mu'_v (\eta_j)'_u r_j \right),$$

$$\xi_4 = \sum_{j=1}^3 \left( \mu(y(u_n, v_m)) (\eta_j)'_u r_j + \mu'_u \eta_j(y(u_n, v_m)) r_j \right),$$

$$\xi_5 = \sum_{j=1}^3 \left( \mu(y(u_n, v_m)) (\eta_j)'_v r_j + \mu'_v \eta_j(y(u_n, v_m)) r_j \right),$$

$$R = \mu(y(u_n, v_m)) \sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u_n, v_m)) r_j.$$

Все производные по  $u$ ,  $v$  берутся в точке  $(u_n, v_m)$ .

Из приведенных соотношений вытекает, что интеграл (148) приближенно равен следующему интегралу, который обозначим через  $K_{nm}(x)$

$$\int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \frac{\mu(y(u, v))}{|x - y(u, v)|^3} \sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u, v)) (y_j(u, v) - x_j) \approx \int_{-h/2}^{h/2} dU \int_{-H/2}^{H/2} dV \times$$

$$\times \frac{R + \xi_4 U + \xi_5 V + \xi_1 U^2 + \xi_2 V^2 + \xi_3 UV}{\beta^3 ((V + \delta U / \beta^2 + Q / \beta^2)^2 - (\delta U + Q)^2 / \beta^4 + (\alpha^2 U^2 + 2PU + r^2) / \beta^2)^{3/2}} =$$

$$= K_{nm}(x). \quad (152)$$

Следовательно, чтобы вывести квадратурную формулу для потенциала двойного слоя, необходимо вычислить интеграл  $K_{nm}(x)$  в явном виде. Этот интеграл вычислен в разделе 2.1.

### 2.3.3 Квадратурная формула для потенциала двойного слоя с дифференцируемой плотностью

Из приведённых рассуждений вытекает следующий результат.

**Теорема 2.3.** Пусть  $\Gamma$  — простая гладкая замкнутая поверхность класса  $C^2$ , ограничивающая объёмно-односвязную внутреннюю область, либо простая гладкая ограниченная разомкнутая ориентированная поверхность класса  $C^2$ , содержащая свои предельные точки. Пусть  $\Gamma$  допускает параметризацию (143) со свойством (145), и  $\mu(y) \in C^1(\Gamma)$ . Тогда для потенциала двойного слоя (146) при  $x \notin \Gamma$  и  $k \geq 0$  имеет место квадратурная формула

$$\mathcal{W}_k[\mu](x) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \exp(ik|x-y(u_n, v_m)|) (ik|x-y(u_n, v_m)|-1) K_{nm}(x) + \epsilon_{NM}(x), \quad (153)$$

где  $\epsilon_{NM}(x) \rightarrow 0$  при  $N, M \rightarrow \infty$ . Интеграл  $K_{nm}(x)$ , выписанный в (152), вычислен в явном виде в разделе 2.1, а коэффициенты в  $K_{nm}(x)$  берутся из пункта 2.3.2.

Если  $k = 0$ , то потенциал двойного слоя для уравнения Гельмгольца переходит в потенциал двойного слоя для уравнения Лапласа, соответственно, квадратурная формула (153) при  $k = 0$  принимает вид квадратурной формулы для гармонического потенциала двойного слоя.

Если в (153) при вычислении коэффициентов в  $K_{nm}(x)$  в пункте 2.3.2 положить  $\mu'_u = \mu'_v = 0$ , то формула (153) при  $k = 0$  переходит в квадратурную формулу для потенциала двойного слоя из раздела 2.1, где плотность  $\mu(y)$  не предполагается дифференцируемой, а считается всего лишь непрерывной. Тем самым, формула (153) обобщает прежнюю квадратурную формулу для потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью из раздела 2.1 на случай дифференцируемой плотности. Ниже эффективность квадратурной формулы (153) оценивается на тестовых примерах и сравнивается с эффективностью других формул.

### 2.3.4 Квадратурная формула, основанная на свойствах телесного угла

Рассмотрим треугольник с вершинами  $x^1, x^2, x^3$ . Известно [5, с.253], что телесный угол  $\Omega(x; x^1, x^2, x^3)$ , под которым этот треугольник виден из точки  $x$ , с точностью до знака, зависящего от выбранного на треугольнике направления

нормали, равен определённом на этом треугольнике потенциалу двойного слоя с единичной плотностью, умноженному на  $4\pi$ . С другой стороны, для телесного угла, под которым треугольник с вершинами  $x^1$ ,  $x^2$ ,  $x^3$  виден из точки  $x$ , имеется явная формула [99], [100, результат (359)]

$$\begin{aligned} \Omega(x; x^1, x^2, x^3) = & 2 \arccos \left( \sqrt{\frac{|R_1| |R_2| |R_3|}{2}} \times \right. \\ & \times \frac{|R_1| |R_2| |R_3| + (R_1, R_2)|R_3| + (R_2, R_3)|R_1| + (R_3, R_1)|R_2|}{\sqrt{|R_1| |R_2| |R_3| + (R_1, R_2)|R_3|}} \times \\ & \left. \times \frac{1}{\sqrt{|R_1| |R_2| |R_3| + (R_2, R_3)|R_1|}} \frac{1}{\sqrt{|R_1| |R_2| |R_3| + (R_3, R_1)|R_2|}} \right), \end{aligned}$$

где через  $R_1 = x^1 - x$ ,  $R_2 = x^2 - x$ ,  $R_3 = x^3 - x$  обозначены векторы, а через  $(\cdot, \cdot)$  обозначено скалярное произведение. Используя указанную формулу для телесного угла и параметризацию (143), можно вывести следующую квадратурную формулу для потенциала двойного слоя с плотностью  $\mu(y)$  на поверхности  $\Gamma$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_k[\mu](x) \approx & \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mu(y(u_n, v_m)) \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|) (ik|x - y(u_n, v_m)| - 1) \times \\ & \times \{ \Omega(x; y(u_n - h/2, v_m - H/2), y(u_n - h/2, v_m + H/2), y(u_n + h/2, v_m - H/2)) + \\ & + \Omega(x; y(u_n + h/2, v_m + H/2), y(u_n - h/2, v_m + H/2), y(u_n + h/2, v_m - H/2)) \} \times \\ & \times \operatorname{sgn} \left( \sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u_n, v_m))(y_j(u_n, v_m) - x_j) \right). \end{aligned} \quad (154)$$

Квадратурная формула (154) используется в инженерных расчетах, однако она не допускает улучшения за счет учета производных в случае дифференцируемой плотности в потенциале двойного слоя.

### 2.3.5 Численные тесты для диска

В тестах для диска оценивается эффективность квадратурных формул вблизи поверхности  $\Gamma$ , когда поверхность  $\Gamma$  является круговым диском единичного радиуса, расположенным в плоскости  $x_3 = 0$  с центром в начале координат. Тем самым,  $\Gamma$  является разомкнутой поверхностью, которая задана уравнениями

$$y_1(u, v) = u \cos v, \quad y_2(u, v) = u \sin v, \quad y_3(u, v) = 0, \quad (155)$$

причём  $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$ . Отметим, что в данном случае  $|\eta(y(u, v))| = u$ , и направление нормали  $\eta(y)$  на диске  $\Gamma$  совпадает с направлением оси  $Ox_3$ . Кроме того,  $|\eta(y(0, v))| = 0$  для всех  $v \in [0, 2\pi]$ . Иначе говоря,  $|\eta(y)| = 0$  в центре диска при такой параметризации. Согласно [6, § 27.6], плотность потенциала двойного слоя на диске  $\Gamma$  можно найти по формуле

$$\mu(x)|_{\Gamma} = 2 \mathcal{W}_k[\mu](x)|_{\Gamma^-}. \quad (156)$$

Здесь диск  $\Gamma$  рассматривается как двусторонняя поверхность, через  $\Gamma^-$  обозначена сторона, которую мы видим, глядя навстречу вектору нормали  $\mathbf{n}_y$ . Направление единичной нормали  $\mathbf{n}_y$  совпадает с направлением нормали  $\eta$ , т.к. вектор  $\mathbf{n}_y$  получается из  $\eta$  в результате нормировки. В формуле (156) берется предельное значение потенциала двойного слоя на верхней стороне  $\Gamma$ , т.е. на  $\Gamma^-$ . Отметим, что потенциал двойного слоя  $\mathcal{W}_k[\mu](x)$  равен нулю в плоскости  $x_3 = 0$  вне диска  $\Gamma$ .

Эффективность квадратурных формул вблизи поверхности  $\Gamma$  можно оценивать следующим образом. В тестовых примерах известно явное выражение плотности потенциала  $\mu(y)$  на диске  $\Gamma$ . Для точек  $x$ , расположенных над диском  $\Gamma$ , значение потенциала  $\mathcal{W}_k[\mu](x_1, x_2, x_3)$  при уменьшении  $x_3 > 0$  должно сходиться к значению  $(1/2)\mu(x_1, x_2)$  согласно формуле (156) в силу непрерывности потенциала вплоть до границы. Поэтому приближенные значения потенциала, вычисленные по квадратурным формулам, также должны стремиться к известному значению  $(1/2)\mu(x_1, x_2)$ . Однако для совсем малых величин  $x_3 > 0$ , значения, вычисленные по квадратурным формулам, перестают приближаться к  $(1/2)\mu(x_1, x_2)$  из-за дискретности квадратурных формул. Тесты позволяют оценить расстояния до границы, на которых квадратурные формулы приближаются к предельным значениям потенциала и расстояние, начиная с которого они перестают приближаться. Кроме того, тесты показывают, насколько хорошо квадратурные формулы аппроксимируют предельные значения потенциала вблизи границы.

Во всех тестах приближенное значение потенциала двойного слоя вычислялось по прежней квадратурной формуле из раздела 2.1, по новой квадратурной формуле (153) и по формуле (154) в некоторых точках на единичных вспомогательных дисках, имеющих центры с координатами  $(0, 0, x_3)$  и расположенных параллельно плоскости  $x_3 = 0$  над диском  $\Gamma$ . Затем в каждой такой точке  $(x_1, x_2, x_3)$  на вспомогательном диске был найден модуль разности между значением квадратурной формулы в данной точке и явным значением  $(1/2)\mu(x_1, x_2)$  при  $x_3 = 0$ . На каждом вспомогательном диске был найден максимум модуля таких разностей по всем указанным точкам для каждой квадратурной формулы.

Результаты представлены в таблицах.

Координаты точек, которые использовались для оценки максимального модуля разности:

$$\begin{aligned} x_j^{ql} &= y_j(u_q, v_l), \quad j = 1, 2, \\ u_q &= \frac{1}{2N}q, \quad q = 0, \dots, 2N; \quad v_l = \frac{2\pi}{2M}l, \quad l = 0, 1, 2, \end{aligned} \quad (157)$$

где  $y_j(u, v)$  определяется формулами (155),  $x_3$  — расстояние вспомогательного диска до диска  $\Gamma$ . То есть эти точки расположены над центрами участков разбиения диска  $\Gamma$ , серединами границ между такими участками и пересечениями этих границ. Отметим, что эти точки распределены не по всему вспомогательному диску, а находятся вблизи радиуса с полярным углом  $v = H/2$ .

Вычисления проводились для различных значений  $M$  и  $N$ . Значения шагов определяются формулами  $h = 1/N$ ,  $H = 2\pi/M$ . Если  $N = M/5 = 10$ , то  $h \approx 0.1$ ,  $H \approx 0.13$ ; если  $N = M/5 = 20$ , то  $h \approx 0.05$ ,  $H \approx 0.063$ ; если  $N = M/5 = 40$ , то  $h \approx 0.025$ ,  $H \approx 0.03$ .

В таблицах для каждого вспомогательного диска с координатой  $x_3$  приведены рассчитанные максимальные абсолютные отклонения значений квадратурных формул от явных предельных значений потенциала двойного слоя на  $\Gamma$  по точкам (157). В левом столбце указана величина  $x_3$  для вспомогательного диска. В верхней строке указаны значения  $M, N$ . Первое число в ячейках таблицы — максимальное отклонение для новой формулы (153) на данном вспомогательном диске, второе число после точки с запятой — максимальное отклонение для прежней квадратурной формулы из раздела 2.1, на данном диске, третье число — максимальное отклонение для формулы (154).

В численных тестах квадратурные формулы сравниваются при  $k = 0$ , т.е. для потенциала двойного слоя в случае уравнения Лапласа.

**Тест 1.** В данном тесте использовалась плотность потенциала

$$\mu(y(u, v)) = 1 - u^2.$$

При этом потенциал двойного слоя непрерывен на кромке диска  $\Gamma$ , но его производные терпят разрыв, хотя и ограничены. Потенциал в рассматриваемом случае не зависит от полярного угла  $v$ , как и его плотность. В таблице 16 приведены рассчитанные максимальные абсолютные отклонения квадратурных формул от предельных значений потенциала.

**Тест 2.** В данном тесте использовалась плотность потенциала

$$\mu(y(u, v)) = \sin 3\pi u.$$

$x_3$	$M/5 = N = 10$	$M/5 = N = 20$	$M/5 = N = 40$
0.03	0.029; 0.034; 0.033	0.029; 0.029; 0.029	0.029; 0.029; 0.029
0.01	0.017; 0.028; 0.22	0.012; 0.018; 0.017	0.012; 0.014; 0.014
0.008	0.019; 0.028; 0.41	0.01; 0.017; 0.016	0.01; 0.012; 0.012
0.006	0.026; 0.031; 0.47	0.0082; 0.016; 0.015	0.0081; 0.011; 0.011
0.004	0.044; 0.051; 0.49	0.0069; 0.015; 0.022	0.0059; 0.0092; 0.0092
0.002	0.1; 0.11; 0.5	0.014; 0.016; 0.49	0.0034 0.0078; 0.0077

Таблица 16: Максимальные абсолютные отклонения квадратурных формул в тесте 1

При этом потенциал двойного слоя непрерывен на кромке диска  $\Gamma$ , но его производные терпят разрыв, как и в предыдущем тесте. Как и в тесте 1, плотность потенциала не зависит от полярного угла  $v$ , поэтому и сам потенциал от него не зависит. В таблице 17 приведены рассчитанные максимальные абсолютные отклонения квадратурных формул от предельных значений потенциала.

$x_3$	$M/5 = N = 10$	$M/5 = N = 20$	$M/5 = N = 40$
0.03	0.11; 0.15; 0.15	0.12; 0.13; 0.13	0.15; 0.15; 0.15
0.01	0.047; 0.12; 0.53	0.05; 0.069; 0.068	0.074; 0.073; 0.073
0.008	0.042; 0.12; 0.53	0.041; 0.067; 0.066	0.062; 0.06; 0.06
0.006	0.036; 0.12; 0.55	0.032; 0.065; 0.063	0.049; 0.047; 0.047
0.004	0.057; 0.13; 0.54	0.023; 0.063; 0.11	0.034; 0.038; 0.037
0.002	0.15; 0.21; 0.52	0.023; 0.062; 0.51	0.018; 0.034; 0.033

Таблица 17: Максимальные абсолютные отклонения квадратурных формул в тесте 2

**Тест 3.** В данном тесте использовалась плотность потенциала

$$\mu(y(u, v)) = (u(1 - u))^2 \cos(10v).$$

При этом потенциал и его первые производные являются непрерывными на кромке диска  $\Gamma$ . В данном тесте, в отличие от предыдущих, в формуле (157) вместо  $l = 0, 1, 2$  взяты значения  $l = 0, 1, \dots, 2M$ , чтобы учесть зависимость потенциала двойного слоя от полярного угла  $v$ . В первых двух тестах плотность потенциала двойного слоя от  $v$  не зависит, поэтому и сам потенциал от  $v$  не зависит.

В таблице 18 приведены рассчитанные максимальные абсолютные отклонения квадратурных формул от предельных значений потенциала.

$x_3$	$M/5 = N = 10$	$M/5 = N = 20$	$M/5 = N = 40$
0.03	0.014; 0.017; 0.017	0.015; 0.015; 0.015	0.015; 0.015; 0.015
0.01	0.0056; 0.01; 0.02	0.0061; 0.007; 0.007	0.0064; 0.0065; 0.0065
0.008	0.0045; 0.01; 0.036	0.0049; 0.006; 0.0059	0.0052; 0.0054; 0.0054
0.006	0.0034; 0.01; 0.034	0.0037; 0.005; 0.0049	0.004; 0.0042; 0.0042
0.004	0.0027; 0.011; 0.034	0.0024; 0.004; 0.0038	0.0027; 0.003; 0.0029
0.002	0.0071; 0.014; 0.032	0.0014; 0.0037; 0.031	0.0014; 0.0017; 0.0017

Таблица 18: Максимальные абсолютные отклонения квадратурных формул в тесте 3

### 2.3.6 Численные тесты для сферы

В тестах для сферы оценивается эффективность квадратурных формул вблизи поверхности  $\Gamma$ , которая является сферой единичного радиуса и задана параметрически уравнениями:

$$y_1(u, v) = \cos u \sin v, \quad y_2(u, v) = \sin u \sin v, \quad y_3(u, v) = \cos v, \quad (158)$$

причём  $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ . Отметим, что в данном случае  $|\eta(y(u, v))| = \sin v$  и  $|\eta(y(u, 0))| = |\eta(y(u, \pi))| = 0$  для всех  $u \in [0, 2\pi]$ . Иначе говоря,  $|\eta(y)| = 0$  на полюсах сферы при такой параметризации, но условия теоремы выполняются.

В тестах для диска явные значения для потенциала двойного слоя были известны только на поверхности диска. В отличие от тестов для диска, в тестах для сферы известно явное выражение потенциала двойного слоя во всех точках внутри единичной сферы, поэтому точные значения потенциала можно сравнить с приближенными, вычисленными по квадратурным формулам. Во всех тестах приближенное значение потенциала двойного слоя вычислялось по новой квадратурной формуле (153), в которой учитывается, что плотность  $\mu(y(u, v))$  дифференцируема на  $\Gamma$ , по прежней квадратурной формуле из раздела 2.1, в которой плотность  $\mu(y(u, v))$  считается всего лишь непрерывной на  $\Gamma$ , и её дифференцируемость не учитывается, а также по формуле (154). Вычисления проводились в некоторых точках на вспомогательных сферах, имеющих центры в начале координат и радиусы, равные  $1 - \Delta R$ . Тем самым, вспомогательные сферы находятся внутри сферы единичного радиуса, на которой задана плотность потенциала, на расстоянии  $\Delta R$  от неё. Затем были рассчитаны значения абсолютных погрешностей в этих точках, и для каждой вспомогательной сферы определялись максимумы значений этих погрешностей.

Координаты точек, которые использовались для оценки максимальной абсо-



лотной погрешности:

$$x_j^{ql} = Ry_j(u_q, v_l), \quad j = 1, 2, 3,$$

$$u_q = \frac{2\pi}{2N}q, \quad q = 0, \dots, 2N; \quad v_l = \frac{\pi}{2M}l, \quad l = 1, \dots, 2M - 1, \quad (159)$$

где  $y_j(u, v)$  определяется формулами (158),  $R$  — радиус вспомогательной сферы. То есть эти точки расположены под центрами участков разбиения единичной сферы, серединами границ между такими участками и пересечениями этих границ. Отметим, что эти точки распределены по всей сфере.

Вычисления проводились для различных значений  $M$  и  $N$ . Значения шагов определяются формулами  $h = 2\pi/N$ ,  $H = \pi/M$ . Если  $N/2 = M = 16$ , то  $h = H \approx 0.2$ ; если  $N/2 = M = 32$ , то  $h = H \approx 0.098$ ; если  $N/2 = M = 64$ , то  $h = H \approx 0.049$ .

В таблицах приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей. В левом столбце указано отличие радиуса  $\Delta R$  вспомогательной сферы от единицы, тем самым её радиус будет равен  $1 - \Delta R$ . В верхней строке указаны значения  $M, N$ . Первое число в ячейках таблицы — максимальная погрешность для новой формулы (153) на данной вспомогательной сфере, второе число после точки с запятой — максимальная погрешность для прежней квадратурной формулы из раздела 2.1, на данной сфере, третье число — максимальная погрешность для формулы (154).

В численных тестах квадратурные формулы сравниваются при  $k = 0$ , т.е. для потенциала двойного слоя в случае уравнения Лапласа.

**Тест 4.** В данном тесте использовалась плотность потенциала

$$\mu(y(u, v)) = P_{10}(\cos v),$$

тогда гармонический потенциал двойного слоя внутри единичной сферы  $\Gamma$  имеет вид

$$\mathcal{W}_0[\mu](x) = \frac{11|x|^{10}}{21}P_{10}(\cos \vartheta), \quad |x| < 1,$$

где

$$P_{10}(\cos v) = \frac{1}{256} \left( 46189 \cos^{10} v - 109395 \cos^8 v + 90090 \cos^6 v - \right. \\ \left. - 30030 \cos^4 v + 3465 \cos^2 v - 63 \right)$$

— полином Лежандра десятой степени от  $\cos v$ ,  $\vartheta$  — зенитный угол в сферических координатах с центром в начале координат. В таблице 19 приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей.

$\Delta R$	$N/2 = M = 16$	$N/2 = M = 32$	$N/2 = M = 64$
0.2	0.0077; 0.01; 0.01	0.0022; 0.0026; 0.0024	0.00056; 0.00065; 0.00059
0.1	0.012; 0.025; 0.024	0.0036; 0.0053; 0.0045	0.00094; 0.0014; 0.0011
0.06	0.013; 0.045; 0.041	0.0043; 0.0084; 0.0067	0.0012; 0.0023; 0.0015
0.03	0.019; 0.074; 0.063	0.0048; 0.017; 0.011	0.0018; 0.0046; 0.0022

Таблица 19: Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 4

**Тест 5.** В данном тесте использовалась плотность потенциала

$$\mu(y(u, v)) = \cos(10u) \sin^{10} v,$$

тогда гармонический потенциал двойного слоя внутри единичной сферы  $\Gamma$  имеет вид

$$\mathcal{W}_0[\mu](x) = \frac{11|x|^{10} \cos(10\varphi) \sin^{10} \vartheta}{21}, \quad |x| < 1,$$

где  $\vartheta$  и  $\varphi$  — зенитный и азимутальный углы в сферических координатах с центром в начале координат. В таблице 20 приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей.

$\Delta R$	$N/2 = M = 16$	$N/2 = M = 32$	$N/2 = M = 64$
0.2	0.0046; 0.013; 0.0093	0.0016; 0.0031; 0.002	0.00043; 0.00078; 0.0005
0.1	0.012; 0.058; 0.046	0.0044; 0.011; 0.0068	0.0012; 0.0027; 0.0016
0.06	0.013; 0.11; 0.09	0.0055; 0.021; 0.013	0.0015; 0.0046; 0.0026
0.03	0.061; 0.2; 0.15	0.0047; 0.046; 0.026	0.0011; 0.0085; 0.0042

Таблица 20: Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 5

### 2.3.7 Выводы

Как указано выше, первое число в ячейках таблиц — погрешность новой квадратурной формулы (153), а второе число — погрешность прежней квадратурной формулы из раздела 2.1. Третье число — это погрешность формулы (154) с телесным углом.

Во всех тестах для диска максимальные отклонения новой квадратурной формулы (153) от предельных значений потенциала существенно меньше, чем отклонения у двух остальных формул. В тестах 2 и 3, где плотность  $\mu(y(u, v))$  задана

осциллирующими функциями, на расстояниях от диска  $x_3 \approx H^2$  отклонения новой формулы (153) от предельных значений потенциала в два-три раза меньше чем у остальных формул. В тесте 1 на таких же расстояниях от диска отклонения новой формулы (153) от предельных значений потенциала в полтора-два раза меньше, чем у двух других формул.

В тестах для сферы из таблиц 4 и 5 следует, что как квадратурная формула для потенциала двойного слоя из раздела 2.1 так и квадратурная формула с телесным углом (154) на расстоянии  $H$  от сферы дают погрешность  $O(H^2)$ , а на расстоянии  $H^2$  от сферы дают погрешность  $O(H)$ .

Как видно из таблиц 4 и 5, в тестах для сферы погрешность новой квадратурной формулы (153) значительно меньше погрешностей двух других формул для всех приведённых величин  $M$  и  $N$ . На расстояниях порядка  $H$  от сферы погрешность формулы (153) в 1.3 - 2 раза меньше, чем у остальных квадратурных формул. На расстояниях порядка  $H^2$  от сферы погрешность формулы (153) в два-три раза меньше, чем у двух других квадратурных формул.

Таким образом, сделанные тесты показывают, что новая квадратурная формула (153) обеспечивает более высокую точность вычислений вблизи границы  $\Gamma$ , чем квадратурная формула из раздела 2.1 и чем формула с телесным углом. Эффективность новой квадратурной формулы (153) для потенциала двойного слоя с дифференцируемой плотностью особенно ощутима, если плотность в потенциале представлена гладкими осциллирующими функциями. Как показывают тестовые примеры, формула (153) позволяет существенно повысить точность вычислений потенциала двойного слоя с дифференцируемой плотностью вблизи поверхности  $\Gamma$  без увеличения стоимости вычислений.

## 2.4 Применение квадратурных формул к численному решению внутренней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа в трёхмерной области

### 2.4.1 Постановка задачи

Введем в пространстве декартову систему координат  $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ . Пусть  $\Gamma$  — простая гладкая замкнутая поверхность класса  $C^2$ , ограничивающая объёмно-односвязную внутреннюю область  $D$ . Рассмотрим внутреннюю краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа с непрерывным граничным условием, заданным на  $\Gamma$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & u \in C^0(\bar{D}) \cap C^2(D), \\ u(x)|_{\Gamma} = f(x), & x \in \Gamma, f(x) \in C^0(\Gamma) \end{cases}. \quad (160)$$

Найдём решение задачи Дирихле в виде потенциала двойного слоя  $\mathcal{W}_0[\mu](x)$

$$\mathcal{W}_0[\mu](x) = \frac{1}{4\pi} \int_{y \in \Gamma} \mu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{1}{|x - y|} dS_y, \quad (161)$$

где  $\mu = \mu(y) \in C^0(\Gamma)$  — плотность потенциала, а  $\mathbf{n}_y$  — внутренняя единичная нормаль. Потенциал двойного слоя  $\mathcal{W}_0[\mu](x)$  — гармоническая функция в области  $D$ . Предельное значение потенциала двойного слоя на  $\Gamma$  из области  $D$  даёт выражением [6, 90]

$$\frac{1}{2}\mu(x) + \mathcal{W}_0[\mu](x)|_{\Gamma}, \quad x \in \Gamma, \quad (162)$$

где  $\mathcal{W}_0[\mu](x)|_{\Gamma}$  — прямое значение потенциала двойного слоя для уравнения Лапласа на поверхности  $\Gamma$ . Приравнивая это выражение к функции, заданной на  $\Gamma$ , получаем уравнение

$$\frac{1}{2}\mu(x) + \mathcal{W}_0[\mu](x)|_{\Gamma} = f(x), \quad x \in \Gamma. \quad (163)$$

Равенство (163) представляет собой линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода, которое, как известно, однозначно разрешимо [6, §28.3], [90].

Рассмотрим параметризацию поверхности  $\Gamma$ , при котором на нее отображается прямоугольник

$$\begin{aligned} y &= (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma, \quad y_1 = y_1(u, v), \quad y_2 = y_2(u, v), \quad y_3 = y_3(u, v); \\ &u \in [0, A], \quad v \in [0, B]; \\ &y_j(u, v) \in C^2([0, A] \times [0, B]), \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (164)$$

Введём  $N$  точек  $u_n$  с шагом  $h$  на отрезке  $[0, A]$  и  $M$  точек  $v_m$  на отрезке  $[0, B]$  и рассмотрим разбиение прямоугольника  $[0, A] \times [0, B]$ , который отображается на поверхность  $\Gamma$

$$A = Nh, \quad B = MH, \quad u_n = (n + 1/2)h, \quad n = 0, \dots, N - 1, \\ v_m = (m + 1/2)H, \quad m = 0, \dots, M - 1.$$

Тем самым прямоугольник  $[0, A] \times [0, B]$  разбивается на  $N \times M$  маленьких прямоугольничков и через  $(u_n, v_m)$  обозначены серединки этих прямоугольничков.

В качестве реперных точек в уравнении (163) берём середины  $(u_n, v_m)$  малых прямоугольничков. Введём сквозную нумерацию всех малых прямоугольничков размера  $h \times H$  на  $\Gamma$

$$p = mN + n, \quad (165)$$

тогда  $0 \leq p \leq NM - 1$ . Если задан номер  $p$ , то номера  $n, m$  находятся однозначно

$$m = [p/N], \quad n = p - [p/N]N, \quad (166)$$

где  $[\cdot]$  обозначает целую часть неотрицательного вещественного числа. Под  $y^p = y(u_n, v_m)$ ,  $p = 0, 1, \dots, NM - 1$ , будем понимать точку центра малого прямоугольничка  $(u_n, v_m)$ , где  $n$  и  $m$  определяются соотношениями (166).

Замечание. Поскольку во многих средах программирования нумерация строк и столбцов матриц начинается с единицы, приведём здесь формулы сквозной нумерации в этом случае

$$p = mN + n, \quad m = \left[ \frac{p-1}{N} \right], \quad n = p - \left[ \frac{p-1}{N} \right] N,$$

где  $n = 1, 2, \dots, N$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$  и  $1 \leq p \leq NM$ .

#### 2.4.2 Применение улучшенной квадратурной формулы

В разделе 2.2 в явном виде получена квадратурная формула для прямого значения потенциала двойного слоя на поверхности

$$\mathcal{W}_k[\mu](x)|_{x=y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) \in \Gamma} \approx -\frac{1}{4\pi} \mu_{\hat{n}\hat{m}} \mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}} + \\ + \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{n=0, m=0 \\ (n,m) \neq (\hat{n}, \hat{m})}}^{n=N-1, m=M-1} \mu_{nm} \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|) (ik|x - y(u_n, v_m)| - 1) K_{nm}(x), \quad (167)$$

где интеграл  $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$  вычислен в явном виде в пункте 2.2.2, а интеграл  $K_{nm}(x)$  вычислен в явном виде в разделе 2.1. Применяя сквозную нумерацию (165), а

также учитывая, что для уравнения Лапласа  $k = 0$ , формула (167) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_0[\mu](x)|_{x=y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) \in \Gamma} &\approx -\frac{1}{4\pi} \mu_{\hat{n}\hat{m}} \mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}} - \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{n=0, m=0 \\ (n,m) \neq (\hat{n}, \hat{m})}}^{n=N-1, m=M-1} \mu_{nm} K_{nm}(x) = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \mu_{\hat{p}} \mathcal{J}^{\hat{p}} - \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq \hat{p}}}^{NM-1} \mu_p K_p(x), \end{aligned} \quad (168)$$

где  $\mu_p = \mu(y^p) = \mu_{\hat{n}\hat{m}}$  — значения плотности потенциала в центрах малых прямоугольников  $y^p$ , а  $K_p(x) = K_{nm}(x)$ . Интеграл  $\mathcal{J}^{\hat{p}} = \mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$  и значение плотности  $\mu_{\hat{p}} = \mu(y^{\hat{p}})$  соответствуют случаю, когда точка  $x$  лежит в области интегрирования. В данном случае интегрирование ведется по малому прямоугольнику с центром в точке  $(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$ , которому отвечает точка  $y^{\hat{p}} = y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) = x$  на поверхности  $\Gamma$ .

Таким образом при заданной параметризации поверхности  $\Gamma$  интегральное уравнение (163) сводится к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно  $N \cdot M$  значений неизвестной функции плотности потенциала  $\mu(y^p) = \mu_p$  в точках  $y^p = y(u_n, v_m)$

$$\frac{1}{2} \mu_{\hat{p}} - \frac{1}{4\pi} \mu_{\hat{p}} \mathcal{J}^{\hat{p}} - \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq \hat{p}}}^{NM-1} \mu_p K_p^{\hat{p}} = f_{\hat{p}}, \quad \hat{p} = 0, 1, 2, \dots, NM - 1, \quad (169)$$

где  $f_{\hat{p}} = f(y^{\hat{p}})$  — значения функции граничного условия на поверхности  $\Gamma$ , а  $K_p(x) = K_p(y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})) = K_p(y^{\hat{p}}) = K_p^{\hat{p}}$ . Домножим систему (169) на  $-4\pi$  и запишем её в общем виде

$$\sum_{p=0}^{NM-1} ((\mathcal{J}^{\hat{p}} - 2\pi) \Delta_p^{\hat{p}} + K_p^{\hat{p}} (1 - \Delta_p^{\hat{p}})) \mu_p = -4\pi f_{\hat{p}}, \quad (170)$$

где  $\hat{p} = 0, 1, 2, \dots, NM - 1$  и

$$\Delta_p^{\hat{p}} = \begin{cases} 1, & \text{если } p = \hat{p}, \\ 0, & \text{если } p \neq \hat{p}. \end{cases}$$

Запишем систему (170) в матричном виде

$$\begin{pmatrix}
\mathcal{J}^0 - 2\pi & K_1^0 & \cdots & K_{\hat{p}-1}^0 & K_{\hat{p}}^0 & K_{\hat{p}+1}^0 & \cdots & K_{NM-1}^0 \\
K_0^1 & \mathcal{J}^1 - 2\pi & \cdots & K_{\hat{p}-1}^1 & K_{\hat{p}}^1 & K_{\hat{p}+1}^1 & \cdots & K_{NM-1}^1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
K_0^{\hat{p}} & K_1^{\hat{p}} & \cdots & K_{\hat{p}-1}^{\hat{p}} & \mathcal{J}^{\hat{p}} - 2\pi & K_{\hat{p}+1}^{\hat{p}} & \cdots & K_{NM-1}^{\hat{p}} \\
K_0^{\hat{p}+1} & K_1^{\hat{p}+1} & \cdots & K_{\hat{p}-1}^{\hat{p}+1} & K_{\hat{p}}^{\hat{p}+1} & \mathcal{J}^{\hat{p}+1} - 2\pi & \cdots & K_{NM-1}^{\hat{p}+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
K_0^{NM-1} & K_1^{NM-1} & \cdots & K_{\hat{p}-1}^{NM-1} & K_{\hat{p}}^{NM-1} & K_{\hat{p}+1}^{NM-1} & \cdots & \mathcal{J}^{NM-1} - 2\pi
\end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{NM-1} \end{pmatrix} = -4\pi \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{NM-1} \end{pmatrix}. \quad (171)$$

Обращая матрицу в левой части равенства (171) и умножая обратную матрицу на столбец со значениями функции граничного условия, мы получаем значения плотности потенциала  $\mu_{\hat{p}} = \mu(y^{\hat{p}})$  в центрах малых прямоугольников  $y^{\hat{p}}$ , которые затем будут использованы для вычисления потенциала двойного слоя везде внутри  $\Gamma$ , решая тем самым исходную краевую задачу.

Для вычисления потенциала двойного слоя будем использовать квадратурную формулу, полученную ранее в разделе 2.1

$$\mathcal{W}_0[\mu](x) \approx -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mu_{nm} K_{nm}(x) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{p=0}^{NM-1} \mu_p K_p(x). \quad (172)$$

### 2.4.3 Применение стандартной квадратурной формулы

В пункте 2.2.5 была рассмотрена стандартная квадратурная формула для прямого значения потенциала двойного слоя на поверхности  $\Gamma$ , часто используемая в инженерных расчётах [2, Глава 2]. Стандартная квадратурная формула получается заменой канонического интеграла при  $x \neq y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$  на его приближенное значение и обнулением канонического интеграла по кусочку поверхности  $\Gamma$  с центром в точке  $x = y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$

$$\mathcal{W}_0[\mu](x)|_{x=y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) \in \Gamma} \approx -\frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{n=0, m=0 \\ (n,m) \neq (\hat{n}, \hat{m}) \\ n=N-1, \\ m=M-1}} \mu_{nm} \mathcal{Q}_{nm}(x), \quad (173)$$

где

$$\mathcal{Q}_{nm}(x) = \frac{hH}{|x - y(u_n, v_m)|^3} \sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u_n, v_m))(y_j(u_n, v_m) - x_j). \quad (174)$$

Обоснование обнуления интеграла по кусочку поверхности  $\Gamma$  с центром в точке  $x = y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$  дано в п. 2.2.5. Применяя сквозную нумерацию (165), формула (173) принимает вид

$$\mathcal{W}_0[\mu](x)|_{x=y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) \in \Gamma} \approx -\frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq \hat{p}}}^{NM-1} \mu_p \mathcal{Q}_p(x), \quad (175)$$

где  $\mu_p = \mu(y^p) = \mu_{nm}$  — значения плотности потенциала в центрах малых прямоугольников  $y^p$ , а  $\mathcal{Q}_p(x) = \mathcal{Q}_{nm}(x)$ .

Таким образом при заданной параметризации поверхности  $\Gamma$  интегральное уравнение (163) сводится к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно  $N \cdot M$  значений неизвестной функции плотности потенциала  $\mu(y^p) = \mu_p$  в точках  $y^p = y(u_n, v_m)$

$$\frac{1}{2}\mu_{\hat{p}} - \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq \hat{p}}}^{NM-1} \mu_p \mathcal{Q}_p^{\hat{p}} = f_{\hat{p}}, \quad \hat{p} = 0, 1, 2, \dots, NM - 1, \quad (176)$$

где  $f_{\hat{p}} = f(y^{\hat{p}})$  — значения функции граничного условия на поверхности  $\Gamma$ , а  $\mathcal{Q}_p(x) = \mathcal{Q}_p(y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})) = \mathcal{Q}_p(y^{\hat{p}}) = \mathcal{Q}_p^{\hat{p}}$ . Домножим систему (176) на  $-4\pi$  и запишем её в общем виде

$$\sum_{p=0}^{NM-1} (-2\pi \Delta_p^{\hat{p}} + \mathcal{Q}_p^{\hat{p}} (1 - \Delta_p^{\hat{p}})) \mu_p = -4\pi f_{\hat{p}}, \quad (177)$$

где  $\hat{p} = 0, 1, 2, \dots, NM - 1$  и

$$\Delta_p^{\hat{p}} = \begin{cases} 1, & \text{если } p = \hat{p}, \\ 0, & \text{если } p \neq \hat{p} \end{cases}.$$



Запишем систему (177) в матричном виде

$$\begin{pmatrix}
-2\pi & \mathcal{Q}_1^0 & \cdots & \mathcal{Q}_{\hat{p}-1}^0 & \mathcal{Q}_{\hat{p}}^0 & \mathcal{Q}_{\hat{p}+1}^0 & \cdots & \mathcal{Q}_{NM-1}^0 \\
\mathcal{Q}_0^1 & -2\pi & \cdots & \mathcal{Q}_{\hat{p}-1}^1 & \mathcal{Q}_{\hat{p}}^1 & \mathcal{Q}_{\hat{p}+1}^1 & \cdots & \mathcal{Q}_{NM-1}^1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\mathcal{Q}_0^{\hat{p}} & \mathcal{Q}_1^{\hat{p}} & \cdots & \mathcal{Q}_{\hat{p}-1}^{\hat{p}} & -2\pi & \mathcal{Q}_{\hat{p}+1}^{\hat{p}} & \cdots & \mathcal{Q}_{NM-1}^{\hat{p}} \\
\mathcal{Q}_0^{\hat{p}+1} & \mathcal{Q}_1^{\hat{p}+1} & \cdots & \mathcal{Q}_{\hat{p}-1}^{\hat{p}+1} & \mathcal{Q}_{\hat{p}}^{\hat{p}+1} & -2\pi & \cdots & \mathcal{Q}_{NM-1}^{\hat{p}+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\mathcal{Q}_0^{NM-1} & \mathcal{Q}_1^{NM-1} & \cdots & \mathcal{Q}_{\hat{p}-1}^{NM-1} & \mathcal{Q}_{\hat{p}}^{NM-1} & \mathcal{Q}_{\hat{p}+1}^{NM-1} & \cdots & -2\pi
\end{pmatrix} \times
\begin{pmatrix}
\mu_0 \\
\mu_1 \\
\vdots \\
\mu_{NM-1}
\end{pmatrix} = -4\pi \begin{pmatrix}
f_0 \\
f_1 \\
\vdots \\
f_{NM-1}
\end{pmatrix}. \quad (178)$$

Из этой системы уравнений мы получаем значения плотности потенциала  $\mu_{\hat{p}} = \mu(y^{\hat{p}})$  в центрах малых прямоугольников  $y^{\hat{p}}$ , которые затем будут использованы для вычисления потенциала двойного слоя везде внутри  $\Gamma$ , решая тем самым исходную краевую задачу. Для вычисления потенциала двойного слоя будем использовать следующую формулу

$$\mathcal{W}_0[\mu](x) \approx \sum_{n=0, m=0}^{n=N-1, m=M-1} \mu_{nm} \mathcal{Q}_{nm}(x) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{p=0}^{NM-1} \mu_p \mathcal{Q}_p(x). \quad (179)$$

#### 2.4.4 Применение формулы телесного угла

В пункте 2.3.4 была рассмотрена квадратурная формула для потенциала двойного слоя, основанная на свойствах телесного угла. При помощи этой формулы легко получить выражение для прямого значения потенциала двойного слоя. Для этого нужно заменить канонический интеграл при  $x \neq y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$  на его приближенное значение и обнулить канонический интеграл по кусочку поверхности  $\Gamma$  с центром в точке  $x = y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$

$$\mathcal{W}_0[\mu](x)|_{x=y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) \in \Gamma} \approx -\frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{n=0, m=0 \\ (n,m) \neq (\hat{n}, \hat{m})}}^{n=N-1, m=M-1} \mu_{nm} \mathcal{A}_{nm}(x), \quad (180)$$

где  $\mathcal{A}_{nm}(x)$  даётся выражением

$$\{\Omega(x; y(u_n - h/2, v_m - H/2), y(u_n - h/2, v_m + H/2), y(u_n + h/2, v_m - H/2)) +$$

$$\begin{aligned}
& +\Omega(x; y(u_n + h/2, v_m + H/2), y(u_n - h/2, v_m + H/2), y(u_n + h/2, v_m - H/2))\} \times \\
& \times \operatorname{sgn} \left( \sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u_n, v_m))(y_j(u_n, v_m) - x_j) \right) = \mathcal{A}_{nm}(x). \quad (181)
\end{aligned}$$

Явное выражение для функции  $\Omega(x; x^1, x^2, x^3)$  дано в пункте 2.3.4. Обоснование обнуления интеграла по кусочку поверхности  $\Gamma$  с центром в точке  $x = y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$  аналогично таковому из п. 2.2.5.

Применяя сквозную нумерацию (165), формула (180) принимает вид

$$\mathcal{W}_0[\mu](x)|_{x=y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) \in \Gamma} \approx -\frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq \hat{p}}}^{NM-1} \mu_p \mathcal{A}_p(x), \quad (182)$$

где  $\mu_p = \mu(y^p) = \mu_{nm}$  — значения плотности потенциала в центрах малых прямоугольников  $y^p$ , а  $\mathcal{A}_p(x) = \mathcal{A}_{nm}(x)$ . Таким образом при заданной параметризации поверхности  $\Gamma$  интегральное уравнение (163) сводится к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно  $N \cdot M$  значений неизвестной функции плотности потенциала  $\mu(y^p) = \mu_p$  в точках  $y^p = y(u_n, v_m)$

$$\frac{1}{2}\mu_{\hat{p}} - \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq \hat{p}}}^{NM-1} \mu_p \mathcal{A}_p^{\hat{p}} = f_{\hat{p}}, \quad \hat{p} = 0, 1, 2, \dots, NM - 1, \quad (183)$$

где  $f_{\hat{p}} = f(y^{\hat{p}})$  — значения функции граничного условия на поверхности  $\Gamma$ , а  $\mathcal{A}_p(x) = \mathcal{A}_p(y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})) = \mathcal{A}_p(y^{\hat{p}}) = \mathcal{A}_p^{\hat{p}}$ . Домножим систему (183) на  $-4\pi$  и запишем её в общем виде

$$\sum_{p=0}^{NM-1} (-2\pi \Delta_p^{\hat{p}} + \mathcal{A}_p^{\hat{p}} (1 - \Delta_p^{\hat{p}})) \mu_p = -4\pi f_{\hat{p}}, \quad (184)$$

где  $\hat{p} = 0, 1, 2, \dots, NM - 1$  и

$$\Delta_p^{\hat{p}} = \begin{cases} 1, & \text{если } p = \hat{p}, \\ 0, & \text{если } p \neq \hat{p} \end{cases}.$$

Запишем систему (184) в матричном виде

$$\begin{pmatrix}
-2\pi & \mathcal{A}_1^0 & \cdots & \mathcal{A}_{\hat{p}-1}^0 & \mathcal{A}_{\hat{p}}^0 & \mathcal{A}_{\hat{p}+1}^0 & \cdots & \mathcal{A}_{NM-1}^0 \\
\mathcal{A}_0^1 & -2\pi & \cdots & \mathcal{A}_{\hat{p}-1}^1 & \mathcal{A}_{\hat{p}}^1 & \mathcal{A}_{\hat{p}+1}^1 & \cdots & \mathcal{A}_{NM-1}^1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\mathcal{A}_0^{\hat{p}} & \mathcal{A}_1^{\hat{p}} & \cdots & \mathcal{A}_{\hat{p}-1}^{\hat{p}} & -2\pi & \mathcal{A}_{\hat{p}+1}^{\hat{p}} & \cdots & \mathcal{A}_{NM-1}^{\hat{p}} \\
\mathcal{A}_0^{\hat{p}+1} & \mathcal{A}_1^{\hat{p}+1} & \cdots & \mathcal{A}_{\hat{p}-1}^{\hat{p}+1} & \mathcal{A}_{\hat{p}}^{\hat{p}+1} & -2\pi & \cdots & \mathcal{A}_{NM-1}^{\hat{p}+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\mathcal{A}_0^{NM-1} & \mathcal{A}_1^{NM-1} & \cdots & \mathcal{A}_{\hat{p}-1}^{NM-1} & \mathcal{A}_{\hat{p}}^{NM-1} & \mathcal{A}_{\hat{p}+1}^{NM-1} & \cdots & -2\pi
\end{pmatrix} \times
\begin{pmatrix}
\mu_0 \\
\mu_1 \\
\vdots \\
\mu_{NM-1}
\end{pmatrix} = -4\pi \begin{pmatrix}
f_0 \\
f_1 \\
\vdots \\
f_{NM-1}
\end{pmatrix}. \quad (185)$$

Из этой системы уравнений мы получаем значения плотности потенциала  $\mu_{\hat{p}} = \mu(y^{\hat{p}})$  в центрах малых прямоугольников  $y^{\hat{p}}$ , которые затем будут использованы для вычисления потенциала двойного слоя везде внутри  $\Gamma$ , решая тем самым исходную краевую задачу. Для вычисления потенциала двойного слоя будем использовать следующую формулу

$$\mathcal{W}_0[\mu](x) \approx \sum_{n=0, m=0}^{n=N-1, m=M-1} \mu_{nm} \mathcal{A}_{nm}(x), = -\frac{1}{4\pi} \sum_{p=0}^{NM-1} \mu_p \mathcal{A}_p(x). \quad (186)$$

#### 2.4.5 Численные тесты

Решение внутренней краевой задачи Дирихле описанным методом состоит из двух этапов. На первом этапе при помощи одной из трёх приведённых квадратурных формул для прямого значения потенциала двойного слоя мы получаем значения плотности потенциала  $\mu_p$ ,  $p = 0, 1, \dots, NM - 1$  в центрах малых прямоугольников, решая соответствующую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Это может быть либо построенная в разделе 2.2 новая квадратурная формула (168), либо стандартная квадратурная формула (175), либо формула, основанная на определении телесного угла (182).

На втором этапе полученные значения плотности потенциала  $\mu_p$  используются при вычислении потенциала двойного слоя в любой точке внутренней области  $D$  по одной из трёх формул. Это может быть либо построенная в разделе 2.1

новая квадратурная формула (172), либо стандартная квадратурная формула (179), либо формула, основанная на определении телесного угла (186).

В приведённых ниже численных тестах значения плотности потенциала  $\mu_p$ , полученные при помощи улучшенной формулы (168), мы будем использовать только в формуле (172). Аналогично, значения плотности потенциала  $\mu_p$ , полученные при помощи стандартной формулы (175) мы будем использовать только в формуле (179). Значения плотности потенциала  $\mu_p$ , полученные при помощи формулы для телесного угла (182) мы будем использовать только с формулой для телесного угла (186).

Тестирование проведено в случае, когда поверхность  $\Gamma$  является сферой единичного радиуса, которая задана параметрически уравнениями

$$y_1(u, v) = \cos u \sin v, \quad y_2(u, v) = \sin u \sin v, \quad y_3(u, v) = \cos v, \quad (187)$$

причём  $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ .

Вычисления потенциала двойного слоя — решения исходной внутренней краевой задачи Дирихле проводились в некоторых точках на вспомогательных сферах, имеющих центры в начале координат и радиусы, равные  $1 - \Delta R$ . Тем самым, вспомогательные сферы находятся внутри сферы единичного радиуса, на которой задана плотность потенциала, на расстоянии  $\Delta R$  от неё. Затем были рассчитаны значения абсолютных погрешностей в этих точках, и для каждой вспомогательной сферы определялись максимумы значений этих погрешностей.

Координаты точек, которые использовались для оценки максимальной абсолютной погрешности

$$x_j^{ql} = Ry_j(u_q, v_l), \quad j = 1, 2, 3, \\ u_q = \left(\frac{2\pi}{N} + \frac{1}{2}\right)q, \quad q = 0, \dots, N; \quad v_l = \left(\frac{\pi}{M} + \frac{1}{2}\right)l, \quad l = 0, \dots, M, \quad (188)$$

где  $y_j(u, v)$  определяется формулами (187),  $R$  — радиус вспомогательной сферы. То есть эти точки расположены под центрами участков разбиения единичной сферы (вдоль линий нормалей, проведённых из центров малых прямоугольников). Отметим, что эти точки распределены по всей сфере.

Вычисления проводились для различных значений  $M$  и  $N$ . Значения шагов определяются формулами  $h = 2\pi/N$ ,  $H = \pi/M$ . Если  $N/2 = M = 10$ , то  $h = H \approx 0.31$ ; если  $N/2 = M = 20$ , то  $h = H \approx 0.16$ ; если  $N/2 = M = 40$ , то  $h = H \approx 0.079$ .

В таблицах приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей. В левом столбце указано отличие радиуса  $\Delta R$  вспомогательной сферы от единицы, тем самым её радиус будет равен  $1 - \Delta R$ . В верхней строке указаны значения  $M, N$ .

Первое число в ячейках таблиц 23, 24 и 25 — максимальная погрешность улучшенной квадратурной формулы (172) на данной вспомогательной сфере, при использовании (168) для получения значений плотности потенциала  $\mu_p$ . Второе число после точки с запятой — максимальная погрешность стандартной квадратурной формулы (179) на данной сфере, при использовании формулы (175) для получения значений плотности потенциала. Третье число — максимальная погрешность при использовании формулы на основе понятия телесного угла (186), где для получения значений плотности потенциала была использована формула (182).

**Тест 1.** При граничном условии вида  $f(x) = 1$ ,  $x \in \Gamma$  решение внутренней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа известно и даётся выражением

$$u(x) = 1 \text{ при } |x| < 1. \quad (189)$$

Плотность потенциала двойного слоя при этом равна

$$\mu(x) = 1, \quad x \in \Gamma. \quad (190)$$

В таблице 23 приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей решения задачи.

**Тест 2.** При граничном условии вида  $f(x) = 2/3 \cdot \cos \varphi \sin \vartheta$ ,  $x \in \Gamma$  решение внутренней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа известно и даётся выражением

$$u(x) = \frac{2|x| \cos \varphi \sin \vartheta}{3} \text{ при } |x| < 1. \quad (191)$$

Плотность потенциала двойного слоя при этом равна

$$\mu(x) = \cos \varphi \sin \vartheta, \quad x \in \Gamma, \quad (192)$$

где  $\vartheta$  и  $\varphi$  — зенитный и азимутальный углы в сферических координатах с центром в начале координат. В таблице 24 приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей решения задачи.

**Тест 3.** При граничном условии вида  $f(x) = 3/10 \cdot (3 \cos^2 \vartheta - 1)$  решение внутренней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа известно и даётся выражением

$$u(x) = \frac{3|x|^2(3 \cos^2 \vartheta - 1)}{10} \text{ при } |x| < 1. \quad (193)$$

Плотность потенциала двойного слоя при этом равна

$$\mu(x) = \frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{2}, \quad x \in \Gamma, \quad (194)$$

где  $\vartheta$  — зенитный угол в сферических координатах с центром в начале координат. В таблице 25 приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей решения задачи.

Рассмотрим сначала погрешности вычисления плотности потенциала двойного слоя. Первое число в ячейках таблицы 21 — максимальная абсолютная погрешность плотности потенциала  $\mu_p$ , полученной с помощью улучшенной квадратурной формулы (168). Второе число после точки с запятой — максимальная абсолютная погрешность плотности потенциала  $\mu_p$ , полученной с помощью стандартной квадратурной формулы (175). Третье число — максимальная абсолютная погрешность плотности потенциала  $\mu_p$ , полученной с помощью квадратурной формулы (182) на основе понятия телесного угла.

Номер теста	$N/2 = M = 10$	$N/2 = M = 20$	$N/2 = M = 40$
Тест 1	0.047; 0.055; 0.11	0.028; 0.035; 0.17	0.015; 0.026; 0.19
Тест 2	0.0032; 0.077; 0.11	0.0013; 0.038; 0.054	4.1E-4; 0.019; 0.027
Тест 3	0.038; 0.039; 0.068	0.025; 0.021; 0.15	0.014; 0.019; 0.19

Таблица 21: Максимальная абсолютная погрешность плотности потенциала в тестах 1–3

Рассмотрим также среднюю абсолютную погрешность по всем реперным точкам (165) в уравнении (163). Первое число в ячейках таблицы 22 — средняя абсолютная погрешность плотности потенциала  $\mu_p$ , полученной с помощью улучшенной квадратурной формулы (168). Второе число после точки с запятой — средняя абсолютная погрешность плотности потенциала  $\mu_p$ , полученной с помощью стандартной квадратурной формулы (175). Третье число — средняя абсолютная погрешность плотности потенциала  $\mu_p$ , полученной с помощью квадратурной формулы (182) на основе понятия телесного угла.

Номер теста	$N/2 = M = 10$	$N/2 = M = 20$	$N/2 = M = 40$
Тест 1	0.012; 0.04; 0.078	0.004; 0.02; 0.046	0.0012; 0.01; 0.027
Тест 2	0.0013; 0.027; 0.041	3.8E-4; 0.013; 0.02	1E-4; 0.0063; 0.01
Тест 3	0.011; 0.023; 0.047	0.0036; 0.013; 0.031	0.0011; 0.0066; 0.02

Таблица 22: Средняя абсолютная погрешность плотности потенциала в тестах 1–3

$\Delta R$	$N/2 = M = 10$	$N/2 = M = 20$	$N/2 = M = 40$
0.5	0.012; 0.046; 0.069	0.0031; 0.023; 0.033	0.00079; 0.011; 0.016
0.2	0.022; 0.081; 0.073	0.0061; 0.024; 0.035	0.0015; 0.012; 0.017
0.1	0.025; 0.53; 0.074	0.01; 0.063; 0.036	0.0028; 0.013; 0.021
0.06	0.021; 1.89; 0.075	0.012; 0.31; 0.04	0.0043; 0.029; 0.038
0.03	0.013; 8.64; 0.075	0.01; 1.86; 0.056	0.0057; 0.3; 0.061
0.01	0.0051; 81.3; 0.071	0.0046; 19.6; 0.069	0.0038; 4.56; 0.083

Таблица 23: Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 1

$\Delta R$	$N/2 = M = 16$	$N/2 = M = 32$	$N/2 = M = 64$
0.5	0.0099; 0.024; 0.035	0.0026; 0.012; 0.017	0.00066; 0.0059; 0.0086
0.2	0.022; 0.072; 0.057	0.0065; 0.02; 0.028	0.0016; 0.0097; 0.014
0.1	0.025; 0.52; 0.066	0.011; 0.061; 0.032	0.003; 0.012; 0.016
0.06	0.021; 1.89; 0.07	0.012; 0.31; 0.034	0.0045; 0.029; 0.017
0.03	0.013; 8.62; 0.073	0.01; 1.87; 0.035	0.0058; 0.3; 0.017
0.01	0.0049; 81.2; 0.014	0.0046; 19.7; 0.037	0.0038; 4.57; 0.018

Таблица 24: Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 2

$\Delta R$	$N/2 = M = 16$	$N/2 = M = 32$	$N/2 = M = 64$
0.5	0.0063; 0.0088; 0.011	0.0016; 0.0041; 0.0062	0.0004; 0.0021; 0.0032
0.2	0.013; 0.049; 0.021	0.0038; 0.014; 0.011	0.00097; 0.0041; 0.0075
0.1	0.014; 0.25; 0.028	0.0061; 0.042; 0.029	0.0017; 0.011; 0.024
0.06	0.012; 0.9; 0.032	0.0074; 0.15; 0.044	0.0025; 0.027; 0.04
0.03	0.008; 4.11; 0.035	0.0065; 0.92; 0.059	0.0035; 0.15; 0.062
0.01	0.0032; 38.7; 0.072	0.0032; 9.76; 0.071	0.0026; 2.28; 0.084

Таблица 25: Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 3

## 2.4.6 Выводы

Из таблицы 21 видно, что максимальная абсолютная погрешность плотности потенциала, полученной с помощью улучшенной квадратурной формулы (168), не превышает погрешности плотности потенциала, полученной с помощью стандартной квадратурной формулы (175), и значительно меньше погрешности плотности потенциала, полученной с помощью формулы для телесного угла (182).

Также для теста 2 с зануляющейся на полюсах сферы плотностью потенциала, улучшенная формула показывает в несколько раз меньшую погрешность, чем для двух других формул.

В таблице 22 средняя абсолютная погрешность плотности потенциала, полученной с помощью улучшенной квадратурной формулы (168), в несколько раз меньше средних погрешностей, полученных двумя остальными методами. Также видно, что при вычислении средних значений погрешности плотности потенциала улучшенная квадратурная формула (168) даёт более высокий порядок сходимости, чем формулы (175) и (182).

При использованном расположении точек для оценки максимальной абсолютной погрешности (188) из таблиц 23 — 25 следуют выводы

1) Для улучшенной формулы для потенциала двойного слоя, имеет место аппроксимация с погрешностью  $O(H^2)$ . Погрешность  $O(H^2)$  не зависит от расстояния до  $\Gamma$  и справедлива даже для очень малых расстояний  $\Delta R$ .

Для расстояний  $\Delta R$  до сферы более  $H$  этот подход даёт второй порядок (по  $H$ ) сходимости. Для расстояний от  $H$  до  $H^2$  имеет место первый порядок (по  $H$ ) сходимости. Для расстояний менее  $H^2$  погрешность данного подхода в несколько раз меньше погрешности, получаемой при использовании формулы телесного угла.

2) Для подхода к решению задачи с помощью формулы на основе телесного угла имеет место аппроксимация с погрешностью  $O(H)$ . Для расстояний  $\Delta R$  до сферы не менее  $H$  имеет место первый (по  $H$ ) порядок сходимости.

3) Стандартная квадратурная формула не даёт приемлимой аппроксимации вблизи границы, поскольку при приближении к границе сферы и фиксированном шаге  $H$  численное решение стремится к бесконечности.



## Заключение

Основным результатом диссертации является усовершенствованный автором метод, с помощью которого решается задача стационарного обтекания твёрдого тела потенциальным потоком жидкости и задача по определению стационарного теплового поля. Для этого автором были получены новые квадратурные формулы для потенциалов простого и двойного слоя.

В диссертации построена новая квадратурная формула для потенциала простого слоя для уравнений Лапласа и Гельмгольца, обеспечивающая равномерную сходимости и равномерную аппроксимацию вблизи поверхности, на которой задана плотность потенциала. Полученная квадратурная формула сохраняет свойства непрерывности потенциала при переходе через указанную поверхность. В работе также построена новая квадратурная формула для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя. Вместе эти формулы были применены к решению трёхмерной внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа методом граничных интегральных уравнений. К такой краевой задаче сводится изучение стационарного обтекания твёрдого тела потенциальным потоком идеальной жидкости. Расчёты решения на малом расстоянии от поверхности, на которой задано граничное условие краевой задачи, показали, что полученные формулы обеспечивают повышенную точность по сравнению с известными квадратурными формулами.

В диссертационной работе автором построены квадратурные формулы для потенциала двойного слоя для уравнений Лапласа и Гельмгольца. Отдельно изучены случаи непрерывной и дифференцируемой плотности потенциала. Обе формулы показывают значительно меньшую погрешность вычислений вблизи поверхности, на которой задана плотность потенциала, чем стандартные квадратурные формулы, что подтверждается численными тестами. В работе также получена квадратурная формула для прямого значения потенциала двойного слоя. Эти формулы были применены к решению трёхмерной внутренней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом граничных интегральных уравнений. К такой постановке сводится задача по определению стационарного теплового поля. Сравнение численного решения при помощи полученных автором квадратурных формул с численным решением, полученным при помощи известных квадратурных формул, показало эффективность созданного в диссертации подхода.

Разработанные в диссертации квадратурные формулы могут быть применены к численному решению краевых задач математической физики. Областью практического применения результатов служит численное моделирование фи-

зических процессов и явлений в тонкостенных и многослойных конструкциях, тонких покрытиях, плёнках. Результаты работы могут быть интересны специалистам, работающим в области математической физики, дифференциальных уравнений, математического моделирования и математического анализа.

## Список литературы

- [1] Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 2004.
- [2] Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л., Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.
- [3] Ляпунов А. М., Собрание сочинений. — М.: изд-во АН СССР, 1954. Т. 1.
- [4] Гюнтер Н.М., Теория потенциала и её применение к основным задачам математической физики. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953.
- [5] Михлин С.Г., Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977.
- [6] Владимиров В.С., Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 1981.
- [7] Васильева А.Б., Тихонов А.Н., Интегральные уравнения. М.: Физматлит, 2004.
- [8] Владимиров В. С., Михайлов В. П., Вашарин А. А., Каримова Х. Х., Сидоров Ю. В. и Шабунин М. И. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1974.
- [9] Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: Издательство иностранной литературы, 1957.
- [10] Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.
- [11] Мазья В.Г., Граничные интегральные уравнения. Итоги науки и техники, Современные проблемы математики: фундаментальные направления. Т. 27. М.: ВINITI, 1988.
- [12] Колтон Д., Кресс Р., Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.
- [13] Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.

- [14] Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
- [15] Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Физматлит, 1963.
- [16] Солдатов А. П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи // Современная математика. Фундаментальные направления. 2017. Т. 63, № 1. С. 1-189.
- [17] Калиткин Н. Н., Корякин П. В., Численные методы: Методы математической физики. М.: Изд-во Academia, 2013.
- [18] Зенкевич О., Метод конечных элементов в технике. М. Мир, 1975.
- [19] Самарский А. А., Гулин А. В., Численные методы. М.: Мир, 1989.
- [20] Рябенский В. С., Метод разностных потенциалов и его приложения. М.: Физматлит. 2001.
- [21] Белых В. Н., К проблеме численной реализации интегральных операторов осесимметричных краевых задач (алгоритмы без насыщения) // Уфимский математический журнал. 2012. Т. 4, № 4. С. 22 — 37.
- [22] Бабенко К. И., Основы численного анализа. Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". 2002.
- [23] Галишникова Т. Н., Ильинский А. С. — Численные методы в задачах дифракции. М.: Издательство МГУ, 1987.
- [24] Ильинский А. С., Капустин Ю. Ю., Самохин А. Б. — Математическая модель задачи дифракции на однородном цилиндрическом теле // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38, № 9. С. 1563-1571.
- [25] Смирнов Ю. Г. — Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза: Информационно-издательский центр ПензГУ, 2009.
- [26] Петров А. Г., Квадратурные формулы для периодических функций и их применение в методе граничных элементов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48, № 8. С. 1344—1361.
- [27] Марчевский И. К., Разработка и реализация Т-схем численного решения граничных интегральных уравнений в математических моделях вихревых методов вычислительной гидродинамики, дис. ... докт. физико-матем. наук, 05.13.18, МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, 2021.

- [28] Saranen J., Vainikko G. Periodic Integral and Pseudodifferential Equations with Numerical Approximation. Springer. 2002.
- [29] Ильинский А.С., Полянский И.С., Степанов Д.Е. — О сходимости барицентрического метода в решении внутренних задач Дирихле и Неймана в  $R^2$  для уравнения Гельмгольца // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т.31, № 1. С. 3-18.
- [30] Бенерджи П., Баттерфилд Р., Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984.
- [31] Krutitskii P. A., Kwak D. Y., Hyon Y. K., Numerical treatment of a skew-derivative problem for the Laplace equation in the exterior of an open arc // Journal of Engineering Mathematics. 2007. Vol. 59. P. 25 — 60.
- [32] Крутицкий П.А., Колыбасова В.В., Численный метод решения интегральных уравнений в задаче с наклонной производной для уравнения Лапласа вне разомкнутых кривых // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, No. 9. С. 1262 — 1276.
- [33] Krutitskii P.A., The skew derivative problem in the exterior of open curves in a plane., // Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen. 1997. Vol. 16, No. 3. P. 739 — 747.
- [34] Krutitskii P.A., The 2-dimensional Dirichlet problem in an external domain with cuts // Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen. 1998. Vol. 17, No. 2. P. 361 — 378.
- [35] Krutitskii P.A., The Neumann problem in a 2-D exterior domain with cuts and singularities at the tips // Journal of differential equations. 2001. Vol. 176, No. 1. P. 269 — 289.
- [36] Krutitskii P.A., The mixed harmonic problem in an exterior cracked domain with Dirichlet condition on cracks // Computers and Mathematics with Applications. 2005. Vol. 50. P. 769 — 782.
- [37] Krutitskii P.A., The Dirichlet problem for the two-dimensional Laplace equation in a multiply connected domain with cuts // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. 2000. Vol. 43, No. 2. P. 325 — 341.
- [38] Крутицкий П.А., Смешанная задача для уравнения Лапласа вне разрезов на плоскости // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33, No. 9. С. 1181 — 1190.

- [39] Krutitskii P.A., The Dirichlet problem for the dissipative Helmholtz equation in a plane domain bounded by closed and open curves // Hiroshima Mathematical Journal. 1998. Vol. 28, No. 1. P. 149 — 168.
- [40] Krutitskii P.A., The Neumann problem for the 2-D Helmholtz equation in a domain, bounded by closed and open curves // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 1998. Vol. 21, No. 2. P. 209 — 216.
- [41] Krutitskii P.A., The oblique derivative problem for the Helmholtz equation and scattering tidal waves // Proceedings of the Royal Society of London, ser. A. 2001. Vol. 457. P. 1735 — 1755.
- [42] Krutitskii P.A., The Helmholtz equation in the exterior of slits in a plane with different impedance boundary conditions on opposite sides of the slits. // Quarterly of applied mathematics. 2009. Vol. 67, No. 1. P. 73 — 92.
- [43] Krutitskii P.A., Wave propagation in a 2-D external domain with cuts., // Applicable Analysis. 1996. Vol. 62, No. 3-4. P. 297— 309.
- [44] Ершов Н.Е., Илларионова Л.В. Численное решение трехмерной стационарной задачи дифракции упругих волн // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50, № 3. С. 464-480.
- [45] Крутицкий П.А. О потенциале Стокса для давления // Успехи математических наук. 2007. Т.62, № 2(374). С. 177-178. DOI: 10.1070/RM2007v062n02ABEH004403.
- [46] Keaveny E.E. , Shelley M.J. Applying a second-kind boundary integral equation for surface tractions in Stokes flow // Journal of Computational Physics. 2011. Vol. 230, No.5. P. 2141-2159. DOI: 10.1016/j.jcp.2010.12.010.
- [47] Крутицкий П.А. Задача Дирихле для уравнений Стокса вне разомкнутых кривых на плоскости // Дифференциальные уравнения. 2008. Т.44, № 9. С. 1161-1174.
- [48] Белоцерковский С.М., Лифанов И.К., Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985.
- [49] Лифанов И.К., Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО Янус, 1995.
- [50] Сетуха А.В., Численные методы в интегральных уравнениях и их приложения. М.: Аргатак-медиа, 2016.

- [51] Shilpa Khatri, Arnold Kim, Ricardo Cortez, Camille Carvalho. Close evaluation of layer potentials in three dimensions // Journal of Computational Physics. 2020. Vol. 423, № 109798.
- [52] J. Helsing, R. Ojala, On the evaluation of layer potentials close to their sources, Journal of Computational Physics. 2008. Vol. 227, № 5. P. 2899 - 2921.
- [53] Lv, J., Miao, Y., Zhu, H. The distance sinh transformation for the numerical evaluation of nearly singular integrals over curved surface elements // Computational Mechanics. 2014. Vol. 53. P. 359 - 367.
- [54] Guizhong Xie, Ke Li, Yudong Zhong, Hao Li, Bing Hao, Wenliao Du, Chunya Sun, Haoqi Wang, Xiaoyu Wen, Liangwen Wang, A systematic derived sinh based method for singular and nearly singular boundary integrals // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2021. Vol. 123. P. 147-153.
- [55] Zhang Y., Gong Y., Gao X. Calculation of 2D nearly singular integrals over high-order geometry elements using the sinh transformation // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2015. No. 60. P. 144 - 153. DOI: 10.1016/j.enganabound.2014.12.006.
- [56] Xie G., Zhang J., Qin X., Li G. New variable transformations for evaluating nearly singular integrals in 2D boundary element method // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2011. Vol. 35, No.6. P. 811 - 817. DOI: 10.1016/j.enganabound.2011.01.009.
- [57] Иванов Д.Ю., О равномерной сходимости аппроксимаций потенциала двойного слоя вблизи границы двумерной области // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т.32, № 1. С. 26 - 43. DOI: <https://doi.org/10.35634/vm220103>.
- [58] Zhang YM., Gu Y., Chen JT. Stress analysis for multilayered coating systems using semi-analytical BEM with geometric non-linearities // Computational Mechanics. 2011. Vol. 47. P. 493 - 504.
- [59] Zhang Y.-M., Gu Y., Chen J.-T. Boundary element analysis of 2D thin walled structures with high order geometry elements using transformation // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2011. Vol.35. No. 3. P. 581 - 586. DOI: 10.1016/j.enganabound.2010.07.008.
- [60] Cheng Ch., Pan D., Han Zh., Wu M., Niu Zh. A state space boundary element method with analytical formulas for nearly singular integrals // Acta Mechanica Solida Sinica. 2018. Vol.31. No.4. P. 433 - 444. DOI: 10.1007/s10338-018-0040-8.

- [61] Gong Y., Dong Ch., Qin F., Hattori G., Trevelyan J. Hybrid nearly singular integration for isogeometric boundary element analysis of coatings and other thin 2D structures // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2020. Vol. 367, № 113099. DOI: 10.1016/j.cma.2020.113099.
- [62] Gu Y., Zhang Ch. Fracture analysis of ultra-thin coating/substrate structures with interface cracks // *International Journal of Solids and Structures*. 2021. Vol. 225, № 111074. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2021.111074.
- [63] W. B. Barnett A.H., V. S. S. A. Q. for Evaluation of Layer Potentials Close to the Boundary for the 2D Stokes, and D. . Laplace Equations // *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2015. Vol. 37, No.4. P. B519-B542.
- [64] Gao X. W., Davies T. G. *Boundary element programming in mechanics*. Cambridge University Press. 2002.
- [65] Araujo F.C., Gray L.J. Analysis of thin-walled structural elements via 3D standard BEM with generic substructuring // *Computational Mechanics*. 2008. Vol. 41. P. 633-645.
- [66] Zhang YM, Gu Y, Chen JT. Boundary layer effect in BEM with high order geometry elements using transformation // *Computer Modeling in Engineering & Sciences*. 2009. Vol. 45, № 3. P. 227-247.
- [67] Xiao-Wei Gao, Jin-Bo Zhang, Bao-Jing Zheng, Ch. Zhang, Element-subdivision method for evaluation of singular integrals over narrow strip boundary elements of super thin and slender structures // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2016. Vol. 66. P. 145-154.
- [68] X.W. Gao, K. Yang, J. Wang, An adaptive element subdivision technique for evaluation of various 2D singular boundary integrals // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2008. Vol. 32, Issue 8. P. 692-696.
- [69] Xie G., Zhang J., Dong Y., Huang Ch., Li G. An improved exponential transformation for nearly singular boundary element integrals in elasticity problems // *International Journal of Solids and Structures*. 2014. Vol. 51. No. 6. P. 1322-1329. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.12.020.
- [70] Gong Y.P., Dong C.Y., Bai Y. Evaluation of nearly singular integrals in isogeometric boundary element method // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2017. Vol. 75. P. 21-35. DOI: 10.1016/j.engabound.2016.11.005.



- [71] Gu Y., Chen W., Zhang B., Qu W. Two general algorithms for nearly singular integrals in two dimensional anisotropic boundary element method // *Computational Mechanics*. 2014. Vol. 53, No. 6. P.1223-1234. DOI: 10.1007/s00466-013-0965-1.
- [72] Klockner A., Barnett A., Greengard L., O’Neil M., Quadrature by expansion: a new method for the evaluation of layer potentials // *Journal of Computational Physics*. 2013. Vol. 252. P. 332 – 349.
- [73] C. L. Epstein, L. Greengard, A. Klockner, On the convergence of local expansions of layer potentials // *SIAM Journal of Numerical Analysis*. 2013. Vol. 51, No. 5. P. 2660 - 2679.
- [74] M. Rachh, A. Klockner, M. O’Neil, Fast algorithms for quadrature by expansion: Globally valid expansions, *Journal of Computational Physics*. 2017. Vol. 345. P. 706 - 731.
- [75] C. Carvalho, S. Khatri, A. D. Kim, Asymptotic analysis for close evaluation of layer potentials // *Journal of Computational Physics*. 2018. Vol. 355. P. 327 - 341.
- [76] A. H. Barnett, “Evaluation of layer potentials close to the boundary for laplace and helmholtz problems on analytic planar domains,” *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 36, no. 2, pp. A427–A451, 2014.
- [77] Ludvig af Klinteberg, Chiara Sorgentone, Anna-Karin Tornberg, Quadrature error estimates for layer potentials evaluated near curved surfaces in three dimensions // *Computers and Mathematics with Applications*. 2022. Vol. 111. P. 1-19.
- [78] Yuesheng Xu. Yunhe Zhao. Quadratures for Boundary Integral Equations of the First Kind with Logarithmic Kernels // *J. Integral Equations Applications*. 1996. Vol. 8, No. 2. P. 239 - 268. DOI: 10.1216/jiea/1181075938.
- [79] Y. Yan, I.H. Sloan, On integral equations of the first kind with logarithmic kernels, *Journal of Integral Equations and Applications* // *J. Integral Equations Applications*. 1988. Vol. 1, No. 4. P. 549-580.
- [80] Каширин А. А., Смагин С. И., О численном решении задач Дирихле для уравнения Гельмгольца методом потенциалов // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2012. Т.52, № 8. С. 1492-1505.

- [81] Ягола А.Г., Ван Янфей, Степанов И.Э., Титаренко В.Н. Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике, М.:БИНОМ. Лабораторные знания, 2014.
- [82] Carvalho, C. Modified Representations for the Close Evaluation Problem // Math. Comput. Appl. 2021. Vol. 26(4), № 69. DOI: 10.3390/mca26040069.
- [83] Schwab C., Wendland W. On the extraction technique in boundary integral equations. Math. Comput. 1999. Vol. 68. P. 91-122.
- [84] Э. Г. Халилов, Обоснование метода коллокации для одного класса поверхностных интегральных уравнений // Математические заметки. 2020. Т. 107, № 4. С. 604-622.
- [85] Э. Г. Халилов, Некоторые свойства оператора, порожденного производной акустического потенциала двойного слоя // Сиб. матем. журн. 2014. Т. 55, № 3. С. 690-700.
- [86] Иванов Д.Ю. Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы области в случае двумерных задач нестационарной теплопроводности с граничными условиями второго и третьего рода // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 57. С. 5-25. DOI: 10.17223/19988621/57/1.
- [87] Иванов Д.Ю. Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы двумерной области с помощью полуаналитической аппроксимации теплового потенциала двойного слоя // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 65. С. 30-52. DOI: 10.17223/19988621/65/3.
- [88] Крутицкий П.А., Федотова А.Д., Колыбасова В.В., Квадратурная формула для потенциала простого слоя // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, No. 9. С. 1269 — 1284.
- [89] Резниченко И. О., Крутицкий П. А. О вычислении одного интеграла с квадратичной иррациональностью // Современные проблемы физико-математических наук. Материалы IV Международной научно-практической конференции, 4-5 декабря 2020 года. ОГУ Орел. 2020. С. 92-99.
- [90] Крутицкий П.А., Смешанная задача для уравнения Лапласа в трехмерной многосвязной области. // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, No. 9. С. 1179 — 1186.

- [91] Крутицкий П.А., Федотова А.Д., Колыбасова В.В., О квадратурной формуле для потенциала простого слоя в трехмерном случае // Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 2019, N 112., 26 с.
- [92] Ильин В.А., Позняк Э.Г., Основы математического анализа. Часть 1 и 2. М.: Физматлит, 1973.
- [93] Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А., Математический анализ в вопросах и задачах. М.: Физматлит, 2000.
- [94] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И., Интегралы и ряды. М.: Физматлит, 1981.
- [95] Градштейн И.С., Рыжик И.М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963.
- [96] Цыпкин А.Г., Цыпкин Г.Г., Математические формулы. М.: Физматлит, 1985.
- [97] Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001.
- [98] Гутников В.А., Лифанов И.К., Сетуха А.В., О моделировании аэродинамики зданий и сооружений методом замкнутых вихревых рамок // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. Т. 2006, No. 4. С. 78 — 93.
- [99] Van Oosterom A., Strackee J., The Solid Angle of a Plane Triangle // IEEE Transactions on Biomedical Engineering. 1983. Vol. 30. P. 125-126.
- [100] Casey J., A Treatise on Spherical Trigonometry. Hodges, Figgis & Co., Dublin, 1889.