

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Промыслов Валентин Валерьевич
ГРАФЫ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел
и дискретная математика (01.01.06 — математическая логика, алгебра и
теория чисел)

диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:

доктор физико-математических наук,
профессор Михалёв Александр Васильевич;

кандидат физико-математических наук,
доцент Маркова Ольга Викторовна

Москва 2023

Введение	3
1 История задачи: тотальный и регулярный графы кольца матриц	21
1.1 Обозначения	21
1.2 Автоморфизмы тотального графа и пучковые условия	23
1.2.1 Условия на отображения матричной алгебры	24
1.2.2 Автоморфизмы тотального графа	28
1.3 Кликовое и хроматическое числа регулярного графа	29
2 Пучковое условие для вырожденности	36
2.1 Основные результаты	36
2.2 Сбалансированные по степени многочлены	38
2.3 Структура доказательства вспомогательной теоремы	45
2.4 Доказательство основных результатов	52
2.4.1 Доказательство теоремы 2.1.4.	54
2.4.2 Доказательство теоремы 2.1.5.	55
2.4.3 Доказательство теоремы 2.1.6.	56
3 Автоморфизмы тотального графа	58
3.1 Пары отображений, сохраняющие условие на вырожденность	59

3.2 Автоморфизмы ориентированного тотального графа кольца матриц над полем	66
4 Тотальный и регулярный графы многочлена	74
4.1 Связность	74
4.1.1 Связность $\Gamma_n(\mathbb{F})$	74
4.1.2 Связность $T_p(\mathbb{F}^n)$ и $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$	76
4.2 Кликовое число графов многочлена	82
4.3 Графы кривых второго порядка	87
4.3.1 Граф окружности $x^2 + y^2 = 1$	87
4.3.2 Граф параболы $y = x^2$	90
4.3.3 Граф гиперболы $xy = 1$	93
5 Регулярный и тотальный графы множеств	96
5.1 Регулярные графы трёхточечных множеств на прямой	96
5.2 Регулярные и тотальные графы трёхточечных множеств в \mathbb{F}^n	107

Работа подготовлена на кафедре высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. В работе исследуются

- отображения матричной алгебры, сохраняющие условия на определитель пучка матриц;
- тотальный граф кольца матриц и его автоморфизмы;
- тотальный и регулярный графы многочлена.

Актуальность темы исследования

Алгебраическая комбинаторика, как область, связывающая две дисциплины, показывает каждую из них в новом свете и по новому раскрывает их красоту. Применение теории графов к алгебраическим конструкциям позволяет иначе взглянуть на некоторые их свойства, а также получить более короткие и гармоничные формулировки некоторых утверждений.

Мы применим теорию графов, пожалуй, к одному из основных инструментов линейной алгебры — матрице. На кольце матриц над произвольным полем есть две операции: сложение и умножение. Если матрицы являются квадратными, то относительно операции умножения появляются обратимые элементы. Остальные матрицы, как известно, называются необратимыми или вырожденными и являются делителями нуля. Тем самым, вырожденность и операция умножения связаны следующим образом: $A \cdot B$ вырождена в точности тогда, когда хотя бы одна из матриц A или B вырождена. Однако совсем не так легко устроена связь вырожденности с другой операцией — операцией сложения.

Один из подходов состоит в том, чтобы ввести граф, множеством вершин которого являются все матрицы, а ребрами соединены в точности те матрицы, сумма

которых вырождена. Такой граф называется тотальным графом кольца матриц. Подграф тотального графа, порожденный множеством невырожденных матриц, называется регулярным графом кольца матриц. Изначально понятия тотального и регулярного графов были введены Андерсоном и Бадави [2] для коммутативного кольца с единицей. В 2014 году Акбари рассмотрел [3] аналогичные графы и над некоммутативными кольцами. Тотальный и регулярный графы кольца матриц над полем станут одними из основных объектов исследования в этой работе.

Начнем исследование структуры тотального графа с его автоморфизмов. По определению автоморфизмом графа является биективное отображение его вершин в себя, сохраняющее множество ребер. Пусть \mathbb{F} — поле, $M_n(\mathbb{F})$ — кольцо матриц $n \times n$ над этим полем. В случае тотального графа автоморфизмом будет являться такое биективное отображение $T: M_n(\mathbb{F}) \rightarrow M_n(\mathbb{F})$, что для любых различных матриц $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ выполнено:

$$\det(A + B) = 0 \Leftrightarrow \det(T(A) + T(B)) = 0. \quad (1)$$

Это наблюдение показывает тесную связь задачи описания автоморфизмов тотального графа с широким классом задач описания отображений матричной алгебры, сохраняющим различные соотношения. История здесь восходит еще к классическому результату Фробениуса об описании линейных отображений кольца матриц над полем комплексных чисел $T: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$, сохраняющих определитель. Оказывается, что все такие отображения могут быть получены как композиция транспонирования и умножения на матрицу с единичным определителем справа или слева:

$$T(A) = PAQ \quad \text{для всех } A \in M_n(\mathbb{C})$$

или

$$T(A) = PA^tQ \quad \text{для всех } A \in M_n(\mathbb{C}),$$

где P, Q такие невырожденные матрицы, что $\det(PQ) = 1$. Как оказалось, довольно широкий класс отображений имеет похожий вид, поэтому далее мы будем называть его T -отображением. Китайские математики Джоу, Вонг и Ма показали [9], что в случае матриц размера 2×2 над конечным полем \mathbb{F}_q с $\text{char}(\mathbb{F}_q) \neq 2$

автоморфизмы σ тотального графа имеют вид, очень схожий со стандартным, а именно:

$$\sigma \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = P \begin{pmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(d) \end{pmatrix} Q$$

или

$$\sigma \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = P \begin{pmatrix} f(a) & f(c) \\ f(b) & f(d) \end{pmatrix} Q,$$

где P, Q — невырожденные матрицы над \mathbb{F}_q , а f — автоморфизм поля \mathbb{F}_q .

Этот результат наводит сразу на два предположения. Первое состоит в том, что и для произвольного n автоморфизмы тотального графа будут иметь такой вид. Недавно эта гипотеза была подтверждена в статье [34]. В этой работе данная гипотеза будет доказана.

Учитывая схожий со стандартным вид автоморфизмов, второе предположение заключается в том, что подходом к доказательству гипотезы может служить изучение обобщений теоремы Фробениуса. Эта область сейчас довольно популярна, в ней получено довольно много интересных результатов (см., например, [22, 24, 23, 28, 32]). Некоторые результаты из этой области мы приведем ниже.

В 1949 Дъёдонне доказал, что если отображение линейно, биективно и сохраняет вырожденность, то оно тоже будет иметь стандартный вид, за исключением условия $\det(PQ) = 1$. Кроме того, Дъёдонне доказал свой результат над произвольным полем и требовал только сохранения вырожденности, но не определителя. Однако стоит отметить, что от отображения все еще требуется такое сильное условие, как линейность, в то время, как автоморфизмы тотального графа могут не являться линейными отображениями. Тем не менее, оказалось, что и от этого условия можно избавиться.

В 2002 году Долинар и Шемрл [12] рассмотрели условие, которое далее мы будем называть :

$$\det(A + \lambda B) = \det(T(A) + \lambda T(B)) \quad \text{для всех } A, B \in M_n(\mathbb{C}) \text{ и любого } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Оказалось, что если сюръективное отображение $T: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ удовлетворяет условию выше, то оно также является линейным и, как следует из теоремы

Фробениуса, имеет стандартный вид. До этого результата также рассматривались аддитивные отображения [26, 29], однако то, что условие на линейность можно убрать, определенно удивительно.

Впоследствии этот результат тоже был обобщен на произвольное поле и усилен Таном и Вангом [13]. Кроме того, они показали, что достаточно требовать выполнения пучкового условия только для двух значений λ .

Следующее продвижение по пучковому условию на определитель было сделано в 2019 году Костарой [14]. Он исследовал сразу пару отображений T_1 и T_2 , хотя бы одно из которых сюръективно, и показал, что при выполнении условия

$$\det(T_1(A) + T_2(B)) = \det(A + B) \quad \text{для всех } A, B \in M_n(\mathbb{F})$$

отображения T_1 и T_2 будут равны и стандартны. В качестве следствия Костара получил, что в теореме Долиара и Шемрла достаточно требовать выполнения пучкового условия только для одного значения параметра λ . Более того, уже через год Костара получил результат, пожалуй, наиболее близкий к вопросу описания автоморфизмов тотального графа. Он рассмотрел отображения матриц над полем комплексных чисел, сохраняющие условие, которое мы будем называть

:

$$\det(A + \lambda B) = 0 \iff \det(T_1(A) + \lambda T_2(B)) = 0 \quad \text{для всех } A, B \in M_n(\mathbb{C}) \text{ и } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Костара показал, что если хотя бы одно из отображений непрерывно или сюръективно, а также удовлетворяет пучковому условию на вырожденность, то $T_1 = T_2$ и оба отображения стандартны.

Одна из задач, которой посвящена эта работа, — обобщить описанные выше результаты в сторону условия на автоморфизм тотального графа.

Еще одним подходом к этой теме может быть изучение структуры и числовых характеристик тотального и регулярного графов. В 2009 году математики Акбари, Джамаали и Факхари показали, что кликовое число регулярного графа конечно вне зависимости от поля (за исключением полей характеристики два). Естественным развитием этой темы будет вопрос о конечности хроматического числа регулярного графа. В 2015 году Томон дал отрицательный ответ на этот во-

прос, показав что над алгебраически замкнутым полем конечной характеристики хроматическое число регулярного графа является конечным. Тем не менее, пока не известно, является ли конечным хроматическое число регулярного графа кольца матриц над полем рациональных, вещественных или комплексных чисел. Для исследования этого вопроса в статье [36] были введены понятия тотального и регулярного графов множества. В зависимости от структуры множества эти графы обладают разными свойствами. Отдельный интерес представляют множества, являющиеся нулями некоторого многочлена — в этом случае соответствующие графы для краткости будем называть тотальными или регулярными графами многочлена. Как тотальный, так и регулярный графы многочлена обладают рядом интересных свойств. Например, кликовое число регулярного графа многочлена конечно вне зависимости от поля (за исключением полей характеристики два), а в случае, если множество нулей многочлена не содержит прямых, при некоторых ограничениях на поле конечно будет и множество нулей тотального графа. Более того, оказалось, что вопрос о бесконечности хроматического числа регулярного графа кольца матриц можно свести к аналогичному вопросу для регулярного графа обычной окружности на евклидовой плоскости. В работе эти факты будут доказаны.

Исследование тотального и регулярного графов для произвольного множества является несколько более сложной задачей. Отчасти это иллюстрирует тот факт, что уже при рассмотрении трехточечного множества на вещественной прямой изоморфные графы можно получить, переставляя континуальное количество компонент связности. Потому даже минимальный нетривиальный случай трехточечного множества уже представляет интерес для исследования. Над полями нулевой характеристики в этой работе будет получена полная классификация регулярных и тотальных графов трехточечных множеств с точностью до изоморфизма.

В диссертации представлены доказательства результатов по всем перечисленным выше темам. В частности, получено описание отображений кольца матриц над алгебраически замкнутым полем, удовлетворяющих обобщению пучкового условия на вырожденность. Доказана гипотеза о виде автоморфизмов тотального графа кольца матриц над полем, в котором есть хотя бы три элемента. Доказана связность тотального и регулярного графов многочлена в указанных выше

случаях. Получена полная классификация тотальных и регулярных графов трехточечных множеств над полем нулевой характеристики.

Цели и задачи работы

В работе решаются следующие задачи:

- исследуются и классифицируются отображения матричной алгебры, сохраняющие вырожденность пучка матриц;
- классифицируются автоморфизмы тотального графа кольца матриц над полями, в которых есть хотя бы три элемента;
- описываются свойства тотального и регулярного графов многочлена;
- с точностью до изоморфизма классифицируются регулярные и тотальные графы трёхточечных множеств.

Объект и предмет исследования

Объект исследования — кольцо квадратных матриц над произвольным полем, тотальный граф кольца квадратных матриц, тотальный и регулярный графы множества и многочлена.

Предмет исследования — кликовое и хроматическое числа тотального и регулярного графов многочлена, отображения кольца матриц, автоморфизмы тотального графа кольца матриц.

Методы исследования

В работе применяются как классические методы линейной и общей алгебры, комбинаторики и теории графов, так и некоторые новые методы доказательства, использующие технику оперирования многочленами над областью целостности и их дискриминантами. Для доказательства теорем о виде отображений матричной алгебры, сохраняющих пучковые условия, используется теорема Фробениуса. Для описания автоморфизмов тотального графа используется теорема Хуа.

Теоретическая и практическая значимость

Данная научная работа носит теоретический характер. Полученные результаты относятся к теории графов и теории отображений, сохраняющих матричные инварианты, и могут быть использованы в задачах линейной и общей алгебры, комбинаторики.

Степень достоверности и апробация результатов

Результаты опубликованы в статьях:

- С. Costara, А.Е. Guterman, А.М. Maksaev, V.V. Promyslov.
Automorphisms of the total digraph for the ring of square matrices over a field,
Linear Algebra Appl., **666**, 129-143 (2023).
(В.В. Промысловым доказана теорема 3.8.)
- А.Е. Guterman, А.М. Maksaev, V.V. Promyslov.
Pairs of maps preserving singularity on subsets of matrix algebras,
Linear Algebra Appl., **644**, 1-27 (2022).
(В.В. Промысловым доказаны теоремы 2.4, 2.5 и следствие 2.8.)
- А.М. Максаев, В.В. Промыслов.
О тотальном и регулярном графах многочлена,
Math. Notes, **23(4)**, 113–142 (2021).
(В.В. Промысловым доказаны теоремы 3.6, 4.7 и 4.8. Результаты раздела 2,
а также теорема 4.8 получены совместно с А.М. Максаевым.)
English transl.: On Total and Regular Graphs of a Polynomial, *J. Math. Sc.*,
269, 523-543 (2023).
- В.В. Промыслов.
Классификация тотальных и регулярных графов трёхточечных множеств,
Math. Notes, **514**, 167-192 (2022);

English transl.: Classification of the Total and Regular Graphs of Three-Point Sets, *J. Math. Sc.*, **272**, 592-607 (2023).

- В.В. Промыслов

Классификация регулярных графов трёхточечных множеств,

Известия Академии наук Республики Беларусь. Серия «Математика», том 25, № 4, с. 205-208 (2021).

и представлены на конференциях:

- XXVII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2020», Москва, Россия, 2020 (устный доклад в формате онлайн);
- 8th European Congress of Mathematics, Порторож, Словения, 2021 (устный доклад в формате онлайн);
- XIII Белорусская математическая конференция, г. Минск, Беларусь, 2021 (устный доклад в формате онлайн);
- XII Международная научная конференция «Интеллектуальные системы и компьютерные науки», г. Москва, Россия, 2021 (устный доклад в формате онлайн);

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на параграфы, заключения, списка литературы и списка публикаций автора. Общий объем работы: 127 страниц. Список литературы включает 40 наименований.

Введение содержит информацию об актуальности рассматриваемой темы, краткую историю вопроса, изложение цели работы, методов и основных результатов.

Глава 1. В этой главе более подробно описываются история задачи исследования тотального и регулярного графов кольца матриц, вводятся необходимые обозначения и определения, формулируются некоторые известные на момент написания работы результаты.

В разделе 1.1 вводятся основные определения и обозначения, используемые на протяжении всего текста.

В разделе 1.2 рассматривается задача описания автоморфизмов тотального графа. Показывается связь этой задачи и задачи описания отображений матричной алгебры, сохраняющих различные условия. Приводится обзор известных результатов: классический результат Фробениуса, теоремы Дъёдонне, Долинара, Шемрла, Тана, Ванга и Костары.

В разделе 1.3 представлен другой подход к изучению структуры тотального и регулярного графов — нахождение их числовых параметров. Приводятся результаты Акбари о конечности кликового числа регулярного графа и Томона о бесконечности хроматического числа регулярного графа над алгебраически замкнутым полем конечной характеристики. Ставится вопрос о бесконечности хроматического числа регулярного графа над полями нулевой характеристики. Вводятся определения тотального и регулярного графов, а также формулируются основные свойства этих объектов.

Определение (1.3.3). Пусть n — натуральное число, $A \subseteq \mathbb{F}^n$.

- графом множества A называется граф $T_A(\mathbb{F}^n)$ с множеством вершин \mathbb{F}^n такой, что две произвольные различные точки $x, y \in \mathbb{F}^n$ соединены ребром, если и только если $\frac{x+y}{2} \in A$.
- графом множества A называется граф $\Gamma_A(\mathbb{F}^n)$ с множеством вершин $\mathbb{F}^n \setminus A$ такой, что две произвольные различные точки $x, y \in \mathbb{F}^n \setminus A$ соединены ребром, если и только если $\frac{x+y}{2} \in A$.

Обозначим через $V(p)$ множество нулей многочлена

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n],$$

т. е. множество $\{x \in \mathbb{F}^n \mid p(x) = 0\}$.

Определение (1.3.4). Пусть $p(x) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

$p(x)$ будем называть графы $T_{V(p)}(\mathbb{F}^n)$ и $\Gamma_{V(p)}(\mathbb{F}^n)$ соответственно. Для краткости далее мы будем обозначать их соответственно через $T_p(\mathbb{F}^n)$ и $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$.

Глава 2. Эта глава посвящена описанию отображений матричной алгебры, сохраняющих пучковое условие на вырожденность.

Основным результатом главы является доказательство того, что отображения кольца матриц над алгебраическим полем в себя, сохраняющие пучковое условие на вырожденность, имеют стандартный вид.

Кроме того, при некоторых дополнительных условиях для того, чтобы отображение имело стандартный вид, будет достаточно требовать только выполнения одностороннего пучкового условия на вырожденность.

В разделе 2.1 вводятся определения и формулируются основные результаты.

Определение (2.1.1). Пусть \mathbb{F} некоторое поле, $\mathcal{Y} \subseteq M_n$. Будем говорить, что отображения $T_1, T_2: \mathcal{Y} \rightarrow M_n$ удовлетворяют на множестве \mathcal{Y} , если для любых двух матриц $A, B \in \mathcal{Y}$ и любого ненулевого $\lambda \in \mathbb{F}^*$, выполнено:

$$A + \lambda B \text{ вырождена} \iff T_1(A) + \lambda T_2(B) \text{ вырождена.}$$

Определение (2.1.2). Пусть \mathbb{F} некоторое поле, $\mathcal{Y} \subseteq M_n$. Будем говорить, что отображения $T_1, T_2: \mathcal{Y} \rightarrow M_n$ удовлетворяют

на множестве \mathcal{Y} , если для любых двух матриц $A, B \in \mathcal{Y}$ и любого ненулевого $\lambda \in \mathbb{F}^*$, выполнено:

$$A + \lambda B \text{ вырождена} \implies T_1(A) + \lambda T_2(B) \text{ вырождена.}$$

В разделе 2.2 описывается ключевая для доказательства основных результатов техника, позволяющая находить базис матричной алгебры с некоторыми заданными свойствами. Эта техника основана на работе с определенным классом многочленов, которые мы назовем сбалансированными по степени.

Пусть K — область целостности (т. е. коммутативное кольцо с единицей и без

делителей нуля). Рассмотрим кольцо многочленов $K[\lambda]$. Через $R(f(\lambda), g(\lambda))$ обозначим результат многочленов $f(\lambda), g(\lambda) \in K[\lambda]$. Для многочлена

$$f(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} \dots + a_1 \lambda + a_0 \in K[\lambda], \quad a_n \neq 0$$

при $n > 1$ дискриминант $\Delta_\lambda(f) \in K$ (однозначно) определим равенством

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n \cdot \Delta_\lambda(f) = R(f(\lambda), f'(\lambda)),$$

где $f'(\lambda) = n a_n \lambda^{n-1} + (n-1) a_{n-1} \lambda^{n-2} + \dots + a_1$ — формальная производная многочлена $f(\lambda)$.

$$\text{Если } f(\lambda) = a_1 \lambda + a_0, \text{ положим } \Delta_\lambda(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } a_1 = a_0 = 0; \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определение (2.2.7). Пусть $F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda]$. Назовем F сбалансированным по степени, если для цепочки многочленов

$$F^{\{k\}}(x_1, \dots, x_k, \lambda) = F(x_1, \dots, x_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k}, \lambda) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_k, \lambda], \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

выполнены следующие условия:

- $\deg_\lambda F^{\{k-1\}} = \deg_\lambda F^{\{k\}}$ или $\deg_\lambda F^{\{k-1\}} = \deg_\lambda F^{\{k\}} - 1$ при $k = 2, \dots, n$;
- $\Delta_\lambda(F^{\{1\}}) \neq 0$ (здесь дискриминант рассматривается для $F^{\{1\}}$ как многочлена от λ , т.е. $\Delta(F^{\{1\}}) \in \mathbb{F}[x_1]$)

Основным инструментом для получения искомых базисов матричной алгебры будет служить следующая лемма.

Лемма (2.2.9). Пусть

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda), F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda), \dots, F_N(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda]$$

— набор сбалансированных по степени многочленов,

$$G_1(x_1, x_2, \dots, x_n), G_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, G_M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

— набор не тождественно нулевых многочленов. Тогда существуют $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \in \mathbb{F}$ такие, что каждый из многочленов $F_\ell(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$ не имеет кратных корней (в частности, не является тождественным нулем) при $\ell = 1, 2, \dots, N$ и $G_r(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \neq 0$ при $r = 1, 2, \dots, M$.

Раздел 2.3 посвящен схеме доказательства вспомогательной теоремы. Поскольку эта теорема получена Максаевым и подробно описана в его диссертации, мы приведем лишь эскиз доказательства этой теоремы, но подробно покажем, как используется техника сбалансированных по степени многочленов.

Теорема (2.3.1). Предположим, что существует $D \in GL_n$ такая, что $T_2(D) \in GL_n$. Тогда T_1 и T_2 имеют стандартный вид (4) на GL_n .

В разделе 2.4 приводится доказательство основных результатов.

Теорема (2.1.4). Пусть поле \mathbb{F} алгебраически замкнуто, $GL_n \subseteq \mathcal{Y} \subseteq M_n$, а отображения $T_1, T_2: \mathcal{Y} \rightarrow M_n$ удовлетворяют одностороннему пучковому условию (8) для вырожденности на множестве \mathcal{Y} . Предположим, что найдется такая матрица $D \in GL_n$, что $T_2(D) \in GL_n$. Тогда $T_1|_{\mathcal{Y} \setminus \{O\}} = T_2|_{\mathcal{Y} \setminus \{O\}}$ и эти отображения имеют стандартный вид (4) на $\mathcal{Y} \setminus \{O\}$.

Следующие две теоремы фактически являются следствиями теоремы 2.1.4.

Теорема (2.1.5). Пусть \mathbb{F} алгебраически замкнуто, $GL_n \subseteq \mathcal{Y} \subseteq M_n$, и определены отображения $T_1, T_2: \mathcal{Y} \rightarrow M_n$. Тогда T_1, T_2 удовлетворяют пучковому условию (7) для вырожденности на \mathcal{Y} тогда и только тогда, когда $T_1 = T_2$ и эти отображения имеют стандартный вид (4) на \mathcal{Y} .

Теорема (2.1.6). Пусть поле \mathbb{F} алгебраически замкнуто, а биективные отображения

$$T_1, T_2: M_n \rightarrow M_n$$

таковы, что для любых двух матриц $A, B \in M_n$ и любого $\lambda \in \mathbb{F}^*$ выполнено:

$$A + \lambda B \in GL_n \implies T_1(A) + \lambda T_2(B) \in GL_n.$$

Тогда $T_1 = T_2$ и эти отображения имеют стандартный вид (4) на M_n .

В доказательстве этих теорем используются леммы, которые представляют интерес сами по себе.

Лемма (2.4.1). Пусть $|\mathbb{F}| > n \geq 1$ и $X, Y \in M_n$ таковы, что для всех $Z \in GL_n$, выполнены следующие условия

$$X + Z \in \Omega_n \implies Y + Z \in \Omega_n.$$

Тогда либо $X = O$, либо $X = Y$.

Лемма (2.4.2). Пусть \mathbb{F} алгебраически замкнутое поле. Предположим, что отображения $T_1, T_2: GL_n \rightarrow M_n$ удовлетворяют пучковому условию (7) для вырожденности на GL_n , тогда для всех $A \in GL_n$, мы имеем $T_1(A), T_2(A) \in GL_n$.

Глава 3. Данная глава посвящена описанию автоморфизмов тотального графа кольца матриц над полем, в котором есть хотя бы три элемента. Будет доказано, что автоморфизмы тотального графа имеют вид, схожий с приведенным в фундаментальной теореме Хуа. Решение этой задачи будет разбито на две части:

1. описание пар отображений, сохраняющих вырожденность необязательно различных пар матриц;
2. усиление этого результата на различные пары матриц и доказательство теоремы о виде автоморфизмов тотального графа.

В разделе 3.1 будут классифицированы пары отображений, сохраняющие вырожденность пар матриц. Для этого будут исследованы множества соседей произвольной матрицы $Y \in M_n$ в тотальном графе $T_n(\mathbb{F})$

$$\mathcal{N}(Y) = \{S \in M_n \mid \det(S + Y) = 0\}.$$

Общих соседей непустого множества $\mathcal{Y} \subseteq M_n$ обозначим через

$$\mathcal{N}(\mathcal{Y}) = \bigcap_{Y \in \mathcal{Y}} \mathcal{N}(Y).$$

Для различных $A, B \in M_n$, через $\ell(A, B)$ обозначим прямую в M_n , проходящую через A и B , т. е.,

$$\ell(A, B) = \{A + \mu(B - A) \mid \mu \in \mathbb{F}\}.$$

Доказательство основного результата данного раздела будет основано на теореме Хуа и следующей лемме.

Лемма (3.1.7). Пусть $A, B \in M_n$ различны. Тогда

$$\mathcal{N}(\mathcal{N}(\{A, B\})) = \begin{cases} \{A, B\}, & \text{если } \text{rk}(A - B) \geq 2; \\ \ell(A, B), & \text{если } \text{rk}(A - B) = 1. \end{cases}$$

Эта лемма по сути позволит свести условие сохранения вырожденности пар матриц к сохранению когерентности, а основную задачу к теореме Хуа. Основной результат раздела заключается в следующей теореме.

Теорема (3.1.10). Пусть $\varphi_1, \varphi_2: M_n \rightarrow M_n$ такие сюръективные отображения, что для любых матриц $A, B \in M_n$ выполнено условие (12). Тогда найдутся $R \in M_n$ и невырожденные $P, Q \in M_n$ такие, что

$$\varphi_1(A) = PA^TQ + R, \quad \varphi_2(A) = PA^TQ - R \quad (A \in M_n),$$

или

$$\varphi_1(A) = P(A^\tau)^tQ + R, \quad \varphi_2(A) = P(A^\tau)^tQ - R \quad (A \in M_n),$$

для некоторого автоморфизма τ поля \mathbb{F} . (Напомним, что $A^\tau = [a_{ij}]^\tau = [\tau(a_{ij})]$ — матрица, полученная поэлементным применением автоморфизма τ к A .)

В разделе 3.2 будет доказана гипотеза о структуре автоморфизмов тотального графа кольца матриц. Более того, поскольку в предыдущем разделе получена классификация сразу пары отображений, будет получен даже несколько более общий результат — характеристика автоморфизмов ориентированного тотального графа.

Определение (3.2.1). Фиксируем $\lambda_0 \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Ориентированным тотальным графом кольца M_n называется ориентированный граф $\mathcal{T}_n(\mathbb{F}, \lambda_0)$ с множеством вершин M_n и множеством ребер $\{(A, B) \mid A + \lambda_0 B \text{ вырождена}\}$. Отметим, что петли

в этом графе запрещены. Если $\lambda_0 = 1$, ориентированный граф $\mathcal{T}_n(\mathbb{F}, \lambda_0)$ можно рассматривать как обычный неориентированный тотальный граф $\mathcal{T}_n(\mathbb{F})$.

Для доказательства основного результата будет необходимо показать, что если условие на сохранение вырожденности суммы выполнено только для различных пар матриц, то оно также выполнено и для одинаковых матриц.

Основной результат раздела заключается в следующей теореме.

Теорема (3.2.8). Пусть \mathbb{F} произвольное поле с условием $|\mathbb{F}| \geq 3$. Тогда T является автоморфизмом графа $\mathcal{T}_n(\mathbb{F}, \lambda_0)$ в точности тогда, когда найдутся такие $P, Q \in GL_n$, $R \in M_n$ и автоморфизм τ поля \mathbb{F} , что

- если $\lambda_0 \neq -1$, то либо

$$T(A) = PA^\tau Q \quad \text{для всех } A \in M_n$$

либо

$$T(A) = P(A^t)^\tau Q \quad \text{для всех } A \in M_n;$$

- если $\lambda_0 = -1$, то либо

$$T(A) = PA^\tau Q + R \quad \text{для всех } A \in M_n$$

либо

$$T(A) = P(A^t)^\tau Q + R \quad \text{для всех } A \in M_n.$$

Глава 4. Данная глава посвящена свойствам тотального и регулярного графов многочлена.

В разделе 4.1 доказывается связность регулярного графа кольца матриц, а также формулируется критерий связности тотального и регулярного графов многочлена.

Предложение (4.1.1). Если $n \neq 1$, то $\Gamma_n(\mathbb{F})$ связан. Более того, $\text{diam}(\Gamma_n(\mathbb{F})) = 2$.

Теорема (4.1.7). Пусть $p(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ — однородный многочлен.

1. $T_p(\mathbb{F}^n)$ связан $\iff \dim\langle V(p) \rangle = n$. Более того, в этом случае выполняется неравенство $\text{diam}(T_p(\mathbb{F}^n)) \leq n$.

2. Пусть дополнительно $|\mathbb{F}| > 2 \deg p$ (в частности, \mathbb{F} может быть бесконечным). Тогда $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$ связан $\iff \dim\langle V(p) \rangle = n$. Более того, в этом случае $\text{diam}(\Gamma_p(\mathbb{F}^n)) \leq 2n$.

В разделе 4.2 исследуется вопрос о конечности кликового числа тотального графа многочлена от двух переменных.

В разделе 4.3 показывается связь хроматического числа регулярного графа кольца матриц и хроматического числа регулярных графов кривых второго порядка. Исходя из этой связи, исследуются свойства регулярных графов кривых второго порядка.

Глава 5. В этой главе классифицируются регулярный и тотальный графы для наименьшего нетривиального множества — трехточечного. Доказывается теорема о полной классификации таких графов с точностью до автоморфизма.

Определение. Пусть n — натуральное число, $A \subseteq \mathbb{F}^n$.

- графом множества A называется граф $T_A(\mathbb{F}^n)$ с множеством вершин \mathbb{F}^n такой, что две произвольные различные точки $x, y \in \mathbb{F}^n$ соединены ребром, если и только если $\frac{x+y}{2} \in A$.
- графом множества A называется граф $\Gamma_A(\mathbb{F}^n)$ с множеством вершин $\mathbb{F}^n \setminus A$ такой, что две произвольные различные точки $x, y \in \mathbb{F}^n \setminus A$ соединены ребром, если и только если $\frac{x+y}{2} \in A$.

Поскольку далее мы будем работать с графами трехточечного множества $A = \{a, b, c\}$, для удобства введем следующие обозначения

$$T_A(\mathbb{F}^n) = T^n(a, b, c), \quad \Gamma_A(\mathbb{F}^n) = \Gamma^n(a, b, c).$$

В разделе 5.1 классифицируются графы множества, лежащего в одномерном пространстве, или, что то же, на аффинной прямой.

Теорема (5.1.9). Пусть \mathbb{F} — поле нулевой характеристики, $a, b, c \in \mathbb{F}$ различны. Тогда граф $T^1(a, b, c)$ изоморфен одному из следующих неизоморфных друг другу типов графов:

- $T^1(0, 1, f)$ для некоторого $f \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{Q}$, причем все графы такого типа изоморфны;
- $T^1(0, 1, q)$ для некоторого $q \in \mathbb{Q}, q > 1$, причем при различных q все графы такого типа попарно неизоморфны.

Граф $\Gamma^1(a, b, c)$, в свою очередь, изоморфен одному из следующих неизоморфных друг другу типов графов:

- $\Gamma^1(0, 1, f)$ для некоторого $f \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{Q}$, причем все графы такого типа изоморфны;
- $\Gamma^1(0, 1, q)$ для некоторого $q \in \mathbb{Q}, q > 1$, причем при различных q все графы такого типа попарно неизоморфны.

В разделе 5.2 фокус переносится на пространство произвольной размерности.

Теорема (5.2.10). Пусть $a, b, c \in \mathbb{F}^n$ различны. Тогда граф $T^n(a, b, c)$ изоморфен одному из следующих неизоморфных друг другу типов графов:

- $T^1(0, 1, f)$ для некоторого $f \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{Q}$, причем все графы такого типа изоморфны;
- $T^1(0, 1, q)$ для некоторого $q \in \mathbb{Q}, q > 1$, причем при различных q все графы такого типа попарно неизоморфны.
- $T^2((0, 0), (1, 0), (0, 1))$ только в случае, если $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, а векторы $b - a$ и $c - a$ линейно независимы.

Граф $\Gamma^n(a, b, c)$, в свою очередь, изоморфен одному из неизоморфных друг другу типов графов:

- $\Gamma^1(0, 1, f)$ для некоторого $f \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{Q}$, причем все графы такого типа изоморфны;
- $\Gamma^1(0, 1, q)$ для некоторого $q \in \mathbb{Q}, q > 1$, причем при различных q все графы такого типа попарно неизоморфны.
- $\Gamma^2((0, 0), (1, 0), (0, 1))$ только в случае, если $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, а векторы $b - a$ и $c - a$ линейно независимы.

Благодарность

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям: доктору физико-математических наук, профессору Михалёву Александру Васильевичу и кандидату физико-математических наук, доценту Марковой Ольге Викторовне за постоянное внимание к работе, постановку некоторых задач, ценные советы и замечания; доктору физико-математических наук, профессору Гутерману Александру Эмилевичу и Максаеву Артёму Максимовичу за помощь, многолетнюю совместную работу, интересное и плодотворное сотрудничество; Валерии Алексеевне Промысловой за внимательное чтение текста, исправление опечаток и поддержку.

Цель главы — ввести необходимые определения, сформулировать уже известные результаты о тотальном и регулярном графах кольца матриц и обозначить мотивацию исследуемых в работе задач.

1.1

В этой работе мы будем рассматривать конечные и бесконечные графы без петель и кратных ребер. Пусть Γ — некоторый граф без петель и кратных ребер. Множество вершин и множество ребер графа будем обозначать через $V = V(\Gamma)$ и $E = E(\Gamma)$ соответственно. Мощность множества вершин V будем называть $|V|$ графа Γ . Пусть $v \in V(\Gamma)$ некоторая вершина графа Γ . Через $\deg_{\Gamma} v$ мы обозначим $\deg v$ в Γ . Также введем обозначения:

$$\Delta(\Gamma) = \max_{v \in V(\Gamma)} \deg_{\Gamma} v, \quad \delta(\Gamma) = \min_{v \in V(\Gamma)} \deg_{\Gamma} v.$$

Если $u, v \in V(\Gamma)$, то обозначим через $d(u, v)$ $d(u, v)$ от u до v , то есть минимальную длину конечного пути (в ребрах), соединяющего u и v , если такой путь существует. Будем называть граф Γ Γ , если для любых двух его вершин u, v существует конечный соединяющий их путь. Γ связного графа Γ — это $\text{diam}(\Gamma) = \max_{u, v \in V(\Gamma)} d(u, v)$ (диаметр может быть бесконечным).

Граф H , множество вершин и ребер которого содержится в соответствующих множествах графа Γ , будем называть H графа Γ . Будем говорить, что подграф H графа Γ H множеством вершин $S \subseteq V(\Gamma)$, если

$$V(H) = S \quad \text{и} \quad E(H) = E(\Gamma) \cap \{\{u, v\} \mid u, v \in S\}.$$

называется граф, множество ребер которого максимально (т.е. в котором каждая пара различных вершин смежна). Полный граф на n вершинах будем обозначать через K_n . Если подграф является полным, то он называется K_n -полным. Через $\omega(\Gamma)$ обозначим $\omega(\Gamma)$ графа Γ , т.е. максимальную мощность клики в Γ . Запись $\omega(\Gamma) < \infty$ будет означать, что Γ содержит подграф K_n для некоторого натурального n , но не содержит полных подграфов большего порядка.

Правильной раскраской графа назовем такую вершинную раскраску, что любые две соседние по ребру вершины раскрашены в разные цвета. Минимальное число цветов, необходимое для правильной раскраски графа, называется $\chi(\Gamma)$ и обозначается через $\chi(\Gamma)$.

Везде далее, если не оговорено иное, \mathbb{F} — произвольное поле. Кольцо квадратных матриц $n \times n$ над полем \mathbb{F} мы будем обозначать через $M_n(\mathbb{F})$ или просто M_n , если это не приводит к двусмысленности. Множество невырожденных и вырожденных матриц мы будем обозначать через GL_n и Ω_n соответственно.

Единичную матрицу будем обозначать через E , нулевую O , диагональную матрицу с элементами a_1, a_2, \dots, a_n на диагонали обозначим через $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, матричную единицу с 1 на пересечении i -ой строки и j -го столбца и нулями на всех остальных местах обозначим через $E_{i,j}$.

Для произвольной матрицы $X = (x_{ij})$ обозначим через $c_i(X)$ и $r_j(X)$ её i -ый столбец и j -ую строку соответственно, через $\text{spes}(X)$ спектр матрицы X , т.е. множество всех её собственных значений, а через ν_X вектор-столбец элементов X , упорядоченных по строкам:

$$\nu_X = (r_1(A), r_2(A), \dots, r_n(A))^t = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{nn})^t \in \mathbb{F}^{n^2}.$$

Понятия регулярного и тотального графов коммутативного кольца с единицей впервые были введены в 2008 году в работе Андерсона и Бадави [2]. В 2014 году в статье [3] аналогичные графы были рассмотрены и над некоммутативными кольцами. Нам понадобятся лишь определения этих графов для кольца квадратных матриц над полем.

Определение 1.1.1.

$$T_n(\mathbb{F}) \quad n \times n \quad \mathbb{F} \quad M_n(\mathbb{F})$$

$$A, B \quad , \quad \det(A + B) = 0.$$

Определение 1.1.2. $n \times n$ \mathbb{F} -
 $\Gamma_n(\mathbb{F}),$ $T_n(\mathbb{F}),$ -
 $GL_n(\mathbb{F}).$

Оказалось, что эти графы обладают рядом интересных свойств. В частности, автоморфизмы тотального графа имеют весьма естественный вид, кликовое число регулярного графа конечно (если только характеристика поля не равна двум), а вопрос о конечности хроматического числа был поставлен на 22-ой Британской конференции по комбинаторике [4, задача 525, стр. 1082-1083].

Подробнее эти результаты мы сформулируем в следующих разделах.

1.2

Напомним, что автоморфизмом графа называется отображение множества вершин на себя, сохраняющее смежность. Рассмотрим задачу описания автоморфизмов тотального графа кольца матриц. Поскольку множеством вершин этого графа являются матрицы, а смежны в точности те матрицы, сумма которых вырождена, мы получим, что описание автоморфизмов равносильно следующей задаче.

Задача 1.2.1. $T: M_n(\mathbb{F}) \rightarrow M_n(\mathbb{F})$ -
 $A, B \in M_n(\mathbb{F})$:

$$\det(A + B) = 0 \Leftrightarrow \det(T(A) + T(B)) = 0. \quad (2)$$

В таких терминах описание автоморфизмов можно включить в широкий класс задач описания отображений матричной алгебры, сохраняющих различные условия. Оказалось, что теория в этой области подошла уже достаточно близко к тому, чтобы покрыть и условие (2), однако описание автоморфизмов еще не было получено. Учитывая это, мы решили более детально изучить результаты в этой области и, по возможности, обобщить их на условие (2), чтобы решить задачу 1.2.1. Ниже

мы приведем наиболее актуальные для решения нашей задачи результаты в хронологическом порядке.

1.2.1 Условия на отображения матричной алгебры

История изучения отображений матричной алгебры, сохраняющих различные условия, восходит к естественной задаче, которую решил Фробениус: какой вид имеют линейные отображения кольца квадратных матриц в себя, которые сохраняют определитель? В своей работе [10] Фробениус получил следующий классический результат.

Теорема 1.2.2 (Фробениус, 1897). $T: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$

$$\det(T(A)) = \det(A) \quad A \in M_n(\mathbb{C}).$$

$$T(A) = PAQ \quad A \in M_n(\mathbb{C})$$

(3)

$$T(A) = PA^tQ \quad A \in M_n(\mathbb{C}),$$

$$P, Q \in GL_n(\mathbb{C}) \quad \det(PQ) = 1.$$

Как оказалось, довольно широкий класс отображений имеет форму, подобную (3). По этой причине мы введем следующее определение.

Определение 1.2.3. \mathbb{F} , $M_n(\mathbb{F})$, $\mathcal{Y} \subseteq M_n(\mathbb{F})$, $M_n(\mathbb{F})$.

$$T: M_n(\mathbb{F}) \rightarrow M_n(\mathbb{F}) \quad \mathcal{Y},$$

$$P, Q \in GL_n(\mathbb{F})$$

$$T(A) = PAQ \quad A \in \mathcal{Y}$$

(4)

$$T(A) = PA^tQ \quad A \in \mathcal{Y},$$

Замечание 1.2.4. В теореме 1.2.2 условие биективности отображения может быть опущено.

Результат Фробениуса в 1949 был обобщен Дьёдонне [11]. Он доказал, что если отображение линейно, биективно и сохраняет вырожденность, то оно тоже будет иметь стандартный вид (4), за исключением условия $\det(PQ) = 1$. Отметим, что результат Дьёдонне был доказан над произвольным полем и требовал только сохранения вырожденности, но не определителя.

Теорема 1.2.5 (Дьёдонне, 1949). $T: M_n(\mathbb{F}) \rightarrow M_n(\mathbb{F})$

T

$$\det(A) = 0 \implies \det(T(A)) = 0.$$

T

Обобщение результата Фробениуса на произвольное поле выглядит естественно, принимая во внимание, например, принцип переноса алгебраического результата, доказанного над комплексными числами, на произвольное алгебраически замкнутое поле ([15]). Тем удивительнее кажется то, что и условие линейности не обязательно для того, чтобы отображение имело стандартный вид (4). В 2002 году Долинар и Шемрл [12] рассмотрели следующее условие на отображение T :

$$\det(A + \lambda B) = \det(T(A) + \lambda T(B)) \quad \text{для всех } A, B \in M_n(\mathbb{C}) \text{ и любого } \lambda \in \mathbb{C}. \quad (5)$$

Это условие далее мы будем называть

Следующая теорема показывает, что в теореме Фробениуса можно отказаться от линейности, заменив условие на сохранение определителя более сильным условием (1.2.6).

Теорема 1.2.6 (Долинар – Шемрл, 2002). $T: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$

$$\det(A + \lambda B) = \det(T(A) + \lambda T(B)) \quad A, B \in M_n(\mathbb{C}) \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

$$T \quad , \quad , \quad , \quad \det(PQ) = 1.$$

Этот результат, как и результат Фробениуса, тоже был обобщен на произвольное поле и усилен в 2003 году Таном и Вангом [13].

Теорема 1.2.7 (Тан – Ванг, 2003). $|\mathbb{F}| > n$ $T: M_n(\mathbb{F}) \rightarrow M_n(\mathbb{F})$ -

$$\det(A + \lambda B) = \det(T(A) + \lambda T(B)) \quad A, B \in M_n(\mathbb{F}) \quad \lambda \in \mathbb{F}.$$

$$T \quad , \quad \det(PQ) = 1.$$

Более того, оказалось, что если отображение сюръективно, то достаточно требовать выполнения пучкового условия на определитель(1.2.6) только для двух значений параметра λ .

Теорема 1.2.8 (Тан – Ванг, 2003). $|\mathbb{F}| > n$ $T: M_n(\mathbb{F}) \rightarrow M_n(\mathbb{F})$ -

$$\det(A + \lambda_i B) = \det(T(A) + \lambda_i T(B)) \quad A, B \in M_n(\mathbb{F}) \quad i = 1, 2$$

$$\lambda_i \in \mathbb{F}^* \quad (\lambda_1/\lambda_2)^k \neq 1 \quad 1 \leq k \leq n - 2. \quad T \quad ,$$

$$\det(PQ) = 1.$$

Тем не менее, и этот результат в последствии был обобщен в 2019 году Костарой [14]. Основным результатом работы [14] была теорема о классификации пары отображений.

Теорема 1.2.9 (Костара, 2019). $|\mathbb{F}| \geq n^2 + 1$ $T_1, T_2: M_n(\mathbb{F}) \rightarrow M_n(\mathbb{F})$

$$\det(T_1(A) + T_2(B)) = \det(A + B) \quad A, B \in M_n(\mathbb{F}).$$

$$T_1, T_2 \quad , \quad A_0 \in M_n(\mathbb{F})$$

$$P, Q \in M_n(\mathbb{F}), \det(PQ) = 1, \quad ,$$

$$T_1(A) = P(A + A_0)Q \quad T_2(A) = P(A - A_0)Q \quad \forall A \in M_n(\mathbb{F})$$

$$T_1(A) = P(A + A_0)^t Q \quad T_2(A) = P(A - A_0)^t Q \quad \forall A \in M_n(\mathbb{F}).$$

В качестве следствия из этой теоремы Костарой было получено, что в результате Долинера и Шемрла достаточно требовать выполнения условия (5) только для одного значения параметра λ .

Теорема 1.2.10 (Костара, 2019).

$$|\mathbb{F}| \geq n^2 + 1 \quad \lambda_0 \in \mathbb{F}^*.$$

$$T : M_n(\mathbb{F}) \rightarrow M_n(\mathbb{F})$$

$$\det(T(A) + \lambda_0 T(B)) = \det(A + \lambda_0 B) \quad A, B \in M_n(\mathbb{F}).$$

$$\bullet \quad \lambda_0 = -1, \quad A_0 \in M_n(\mathbb{F}) \quad P, Q \in M_n(\mathbb{F}), \det(PQ) = 1,$$

$$T(A) = P(A + A_0) Q \quad \forall A \in M_n(\mathbb{F})$$

$$T(A) = P(A + A_0)^t Q \quad \forall A \in M_n(\mathbb{F}).$$

$$\bullet \quad \lambda_0 \neq -1, \quad T$$

Через некоторое время Костара получил, что в теореме 1.2.7 можно еще больше ослабить условие, требуя не точного сохранения определителя пучка матриц, а только лишь вырожденности.

Теорема 1.2.11 (Костара, 2020).

$$n \geq 1 \quad T_1, T_2: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$$

$$\det(A + \lambda B) = 0 \iff \det(T_1(A) + \lambda T_2(B)) = 0 \quad \forall A, B \in M_n(\mathbb{C}) \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (6)$$

$$T_1 = T_2,$$

Пожалуй, условие 6 наиболее близко к условию на сохранение вырожденности суммы матриц, и, тем самым, к задаче описания автоморфизмов тотального графа. Действительно, если в условии (6) требовать его истинности только для $\lambda = 1$, одного биективного отображения $T = T_1 = T_2$ и различных матриц A, B , то оно превратится в условие на автоморфизм тотального графа (2). Поэтому мы решили поставить целью дальнейшее обобщение результатов выше, с прицелом на возможное их применение к задаче 1.2.1. Это будет сделано в главе 2: мы ослабим условие (6) на отображение T , а также обобщим теорему 1.2.11 на произвольное алгебраически замкнутое поле.

1.2.2 Автоморфизмы тотального графа

Вернемся к задаче описания автоморфизмов тотального графа.

Оказывается, что в случае $n = 2$ и автоморфизмы графа $T_2(\mathbb{F})$ имеют вид, аналогичный (4). Джоу, Вонг и Ма в работе [9] доказали следующий результат.

Теорема 1.2.12. [9, 1.2] $\sigma : T_2(\mathbb{F}_q)$
 $\mathbb{F}_q \quad \text{char}(\mathbb{F}_q) \neq 2$

$$\sigma \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = P \begin{pmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(d) \end{pmatrix} Q$$

$$\sigma \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = P \begin{pmatrix} f(a) & f(c) \\ f(b) & f(d) \end{pmatrix} Q,$$

P, Q

$\mathbb{F}_{q'}, f$

$\mathbb{F}_q.$

На тот момент, когда мы приступили к задаче описания автоморфизмов тотального графа, теорема выше была единственным продвижением в этом вопросе. Иными словами, вопрос о виде автоморфизмов тотального графа для $n > 2$ или бесконечного поля был открыт. В процессе решения этой задачи в статье [35] была сформулирована следующая гипотеза.

Гипотеза 1.2.13. $\text{char } \mathbb{F} \neq 2,$ T $T_n(\mathbb{F})$
 $:$
 $T(A) = PA^fQ$ $A \in M_n(\mathbb{F})$
 $T(A) = P(A^t)^fQ$ $A \in M_n(\mathbb{F}),$
 $P, Q \in M_n(\mathbb{F})$ f
 $\mathbb{F} (A^f$ f
 $A).$

Теорема 1.2.12 устанавливает справедливость этой гипотезы при $n = 2$ для конечного поля \mathbb{F}_q . Эта гипотеза являлась основным стимулом для большинства полученных в этой работе результатов. Например, в качестве одного из подходов к доказательству этой гипотезы была предпринята попытка рассмотреть результаты, обобщающие теорему Фробениуса: характеристика отображений, не являющихся линейными, но удовлетворяющим более строгим условиям чем сохранение определителя. Эти условия, как было написано выше, мы называли пучковыми условиями на вырожденность. Отображения, сохраняющие пучковые условия на вырожденность описаны в главе 2.

Также были классифицированы пары отображений, сохраняющие вырожденность суммы матриц. Из этого описания получилось вывести доказательство гипотезы 1.2.13 даже в несколько более общем виде — для ориентированных графов. Этот результат опубликован в совместной статье [34] с Гутерманом, Костарой и Максаевым. Классификация пар отображений и доказательство гипотезы 1.2.13 расположены в главе 3.

1.3

Заметим, что кликовое число тотального графа $T_n(\mathbb{F})$ над бесконечным полем при $n > 1$ бесконечно: действительно, достаточно рассмотреть матрицы, у которых, например, первая строка нулевая. Тогда все эти матрицы будут смежны.

Тем не менее, в то время как бесконечность кликового числа тотального графа тривиальна, вопрос о конечности кликового числа регулярного графа имеет изящное решение. Заметим, что если характеристика поля \mathbb{F} равна двум, то кликовое число снова не будет конечным. В этот раз достаточно рассмотреть матрицы вида

$$\begin{pmatrix} f & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

где f — любой ненулевой элемент поля \mathbb{F} . В таком случае опять сумма любых двух матриц такого вида всегда будет вырождена. Однако во всех остальных случаях кликовое число будет конечно — это было установлено в 2009 году математиками Акбари, Джамаали и Факхари.

Теорема 1.3.1 (Акбари – Джамаали – Факхари, 2009). \mathbb{F} — поле, $\omega(\Gamma_n(\mathbb{F}))$ — кликовое число графа $\Gamma_n(\mathbb{F})$.

$$\omega(\Gamma_n(\mathbb{F})) \leq \sum_{k=0}^n k! \binom{n}{k}^2 - n! + 1.$$

Таким образом, размеры полных подграфов в $\Gamma_n(\mathbb{F})$ ограничены — в частности, $\Gamma_n(\mathbb{F})$ не содержит бесконечных полных подграфов.

В связи с этим, тот же коллектив авторов поставил вопрос (см. [4, задача 525, стр. 1082-1083]) о том, является ли конечным хроматическое число графа $\Gamma_n(\mathbb{F})$. Некоторые результаты были получены в работах [5, 6]. В частности, в 2015 году Томон дал отрицательный ответ на поставленный вопрос (см. [6, теорема 2.4]), доказав следующую теорему.

Теорема 1.3.2 (Томон, 2015). $n \geq 2$, $p \geq 3$ — простое число.

$$\chi(\Gamma_n(\overline{\mathbb{F}_p})) = \infty,$$

$\overline{\mathbb{F}_p}$ — алгебраическое замыкание поля \mathbb{F}_p с p элементами.

Однако этот вопрос остается открытым для полей характеристики ноль, в частности, для \mathbb{Q} , \mathbb{R} и \mathbb{C} .

Для исследования этого вопроса в статье [36] было введено понятие регулярного графа для произвольного подмножества векторного пространства \mathbb{F}^n . Везде далее в этом разделе \mathbb{F} — поле с характеристикой, отличной от 2.

Определение 1.3.3. n , $A \subseteq \mathbb{F}^n$.

- $\Gamma_n(\mathbb{F}, A)$, $T_A(\mathbb{F}^n)$, $x, y \in \mathbb{F}^n$, $\frac{x+y}{2} \in A$.
- $\Gamma_n(\mathbb{F}, A^c)$, $\Gamma_A(\mathbb{F}^n)$, $x, y \in \mathbb{F}^n \setminus A$, $\frac{x+y}{2} \in A$.

Заметим, что регулярный граф $\Gamma_n(\mathbb{F})$ кольца квадратных матриц порядка n над полем \mathbb{F} является частным случаем графа множества. Действительно, пусть

- X — квадратная матрица, состоящая из n^2 формальных переменных;
- $\det(X)$ — многочлен, соответствующий определителю матрицы X ;
- $V(\det(X))$ — множество нулей этого многочлена.

Тогда $\Gamma_n(\mathbb{F}) = \Gamma_{V(\det(X))}(\mathbb{F}^{n^2})$.

Этот факт позволяет установить связь между свойствами графов кольца матриц и множества. Например, в случае, если хроматическое число регулярного графа окружности на евклидовой плоскости бесконечно, то таковым будет и хроматическое число регулярного графа кольца матриц порядка выше двух. Данный результат будет подробнее описан в параграфе 4.3.

Еще больше свойств у этого объекта появляется, если множество A является множеством нулей некоторого многочлена.

Пусть $p(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Обозначим через $V(p)$ множество нулей многочлена $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$, т. е. множество $\{x \in \mathbb{F}^n \mid p(x) = 0\}$.

Определение 1.3.4. $p(x) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

$$p(x) \quad T_{V(p)}(\mathbb{F}^n) \quad \Gamma_{V(p)}(\mathbb{F}^n) \quad -$$

$$T_p(\mathbb{F}^n) \quad \Gamma_p(\mathbb{F}^n).$$

Внимательный читатель мог отметить, что в отличии от определений 1.1.2 и 1.1.1, в определении 1.3.4 тотального и регулярного графов многочлена рассматривается не сумма, а полусумма векторов. На это есть следующие причины.

- Среднее арифметическое двух точек не зависит от выбора начала координат, поскольку является серединой соединяющего эти точки отрезка. Напротив, вершины параллелограмма, заданной суммой векторов, зависит от начала координат.
- При определении через сумму векторов в графе может появиться бесконечная клика. Для примера достаточно рассмотреть линейный многочлен $p(x, y) = ax + by + c$ от 2 переменных, задающий прямую, не проходящую через 0. Тогда точки параллельной ей прямой $ax + by + c/2 = 0$, проходящей вдвое ближе к нулю, образуют бесконечную клику.
- Для однородных многочленов $p(x) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ эти два подхода эквивалентны, поскольку $p(\frac{x+y}{2}) = 0 \Leftrightarrow p(x+y) = 0$.

Как говорилось выше, одной из ключевых задач этой работы было описание автоморфизмов тотального графа кольца матриц: задача 1.2.1 и гипотеза 1.2.13. В главе 5 мы подойдем к этому вопросу с другой стороны, а именно классифицируем графы некоторых множеств с точностью до изоморфизма и изучим их структуру.

На вопрос о том, какими могут быть изоморфные тотальные и регулярные графы множеств, частично отвечает следующее утверждение, доказанное в [36]. В нем доказано, что широким классом изоморфизмов являются аффинные преобразования.

Утверждение 1.3.5. а) $\tilde{A} \quad A \quad -$
 $\mathbb{F}^n,$

$$\tilde{A} = \{Ca + b \mid a \in A\} \quad C \quad n$$

$$b \in \mathbb{F}^n. \quad T_A(\mathbb{F}^n) \cong T_{\tilde{A}}(\mathbb{F}^n) \quad \Gamma_A(\mathbb{F}^n) \cong \Gamma_{\tilde{A}}(\mathbb{F}^n).$$

б)

$$p(x) = \tilde{p}(Cx + b) \quad p(x_1, x_2, \dots, x_n), \tilde{p}(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n] \quad C \quad n$$

$$b \in \mathbb{F}^n. \quad T_p(\mathbb{F}^n) \cong T_{\tilde{p}}(\mathbb{F}^n) \quad \Gamma_p(\mathbb{F}^n) \cong \Gamma_{\tilde{p}}(\mathbb{F}^n).$$

Искомый изоморфизмом является отображение $x \mapsto Cx + b$. \square

Однако далеко не все изоморфизмы имеют такой вид. То, что изоморфные тотальные и регулярные графы множества устроены гораздо сложнее, показывает следующий пример.

Пример 1.3.6. Обратное неверно: существуют такие множества A и B (и даже многочлены $p(x), q(x)$ с множествами нулей $V(p) = A, V(q) = B$), что $\Gamma_A(\mathbb{R}) \cong \Gamma_B(\mathbb{R})$, но $A \neq \{Cb + d \mid b \in B\}$ для любых $C, d \in \mathbb{R}$.

Пусть $A = \{0, 1, \sqrt{2}\}, B = \{0, 1, \sqrt{3}\}$ (соответствующие им многочлены имеют вид $p(x) = x(x-1)(x-\sqrt{2}), q(x) = x(x-1)(x-\sqrt{3})$). Нетрудно заметить, что A и B не являются аффинно эквивалентными, поскольку аффинное преобразование прямой \mathbb{R} задается образами двух точек.

Выберем два базиса Гамеля \mathbb{R} как векторного пространства над \mathbb{Q} :

$$G_1 = \{r_0 = 1, r_1 = \sqrt{2}\} \cup \{r_\alpha \mid \alpha \in I\}, \quad G_2 = \{s_0 = 1, s_1 = \sqrt{3}\} \cup \{s_\alpha \mid \alpha \in I\},$$

здесь I — континуальное множество.

Для каждого $x = k_0 + k_1\sqrt{2} + k_{\alpha_1}r_{\alpha_1} + \dots + k_{\alpha_n}r_{\alpha_n}$ ($k_i \in \mathbb{Q}$) определим

$$f(x) = k_0 + k_1\sqrt{3} + k_{\alpha_1}s_{\alpha_1} + \dots + k_{\alpha_n}s_{\alpha_n}.$$

Поскольку $f(x)$ биективно (т. е. сохраняют множество вершин $\Gamma_A(\mathbb{R})$) и аддитивно (т. е. сохраняют множество ребер), $f: \Gamma_A(\mathbb{R}) \rightarrow \Gamma_B(\mathbb{R})$ является изоморфизмом графов $\Gamma_A(\mathbb{R})$ и $\Gamma_B(\mathbb{R})$. Таким образом, $\Gamma_A(\mathbb{R}) \cong \Gamma_B(\mathbb{R})$, но, при этом, A и B не являются аффинно эквивалентными.

Тот факт, что уже для множества из трех элементов обратное к утверждению 1.3.5 неверно, наводит на вопрос о том, какова в целом структура тотальных и регулярных графов в этом минимальном нетривиальном случае. Поэтому далее мы займемся классификацией регулярных и тотальных графов множества, состоящего из трёх точек. Введем следующее определение.

Определение 1.3.7. \mathbb{F} . $T^n(a_1, a_2, \dots, a_n)$
 $\Gamma^n(a_1, a_2, \dots, a_n)$ $T_A(\mathbb{F}^n)$ $\Gamma_A(\mathbb{F}^n)$, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Цель главы 5 — получить полную классификацию тотальных и регулярных графов трёхточечных множеств над полем нулевой характеристики. Эта классификация будет получена в теореме 5.2.10.

В общем случае тотальный и регулярный графы множеств и, в частности, многочленов обладают массой свойств. Следующие свойства подробно описаны в статье [36] и диссертации Максаева, поэтому мы приведем только их формулировки без доказательства.

Утверждение 1.3.8. $p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 +$
 $+ \dots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1}$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{F}$
 $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$: $\omega(\Gamma_p(\mathbb{F}^n)) = \chi(\Gamma_p(\mathbb{F}^n)) = 2$.

Утверждение 1.3.9. $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{F}^n$. $\chi(\Gamma_{A_1 \cup A_2}(\mathbb{F}^n)) \leq \chi(\Gamma_{A_1}(\mathbb{F}^n)) \cdot$
 $\chi(\Gamma_{A_2}(\mathbb{F}^n))$ $\chi(T_{A_1 \cup A_2}(\mathbb{F}^n)) \leq \chi(T_{A_1}(\mathbb{F}^n)) \cdot \chi(T_{A_2}(\mathbb{F}^n))$.

Поскольку множеством нулей произведения многочленов $p_1(x) \cdot p_2(x)$ является $V(p_1) \cup V(p_2)$, то аналогичная оценка верна и для графов многочлена.

Следствие 1.3.10. $p_1(x_1, x_2, \dots, x_n), p_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$

$$\chi(\Gamma_{p_1 \cdot p_2}(\mathbb{F}^n)) \leq \chi(\Gamma_{p_1}(\mathbb{F}^n)) \cdot \chi(\Gamma_{p_2}(\mathbb{F}^n)) \quad \chi(T_{p_1 \cdot p_2}(\mathbb{F}^n)) \leq \chi(T_{p_1}(\mathbb{F}^n)) \cdot \chi(T_{p_2}(\mathbb{F}^n)).$$

Несмотря на то, что получены некоторые оценки на хроматическое число регулярного и тотального графов многочлена, неизвестен ответ на вопрос о его конечности в общем случае.

Вопрос 1.3.11. Конечны или бесконечны числа $\chi(T_p(\mathbb{F}^n))$, $\chi(\Gamma_p(\mathbb{F}^n))$ в зависимости от многочлена $p(x) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ и поля \mathbb{F} ?

Вопрос 1.3.12. Пусть $\text{char}(\mathbb{F}) = 0$. Существует ли многочлен $p(x) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ такой, что $\chi(\Gamma_p(\mathbb{F}^n)) = \infty$?

Вопрос о конечности чисел $\chi(T_p(\mathbb{F}^n))$, $\chi(\Gamma_p(\mathbb{F}^n))$ для данного многочлена и поля оказывается сложным даже в случае конкретных многочленов второй степени — например, автору неизвестен ответ для многочлена $x^2 + y^2 - 1$, задающего окружность на евклидовой плоскости (подробнее см. раздел 4.3, где рассматриваются тотальные и регулярные графы кривых второго порядка).

Тем не менее, получилось свести вопрос о бесконечности числа регулярного графа кольца матриц к аналогичному вопросу регулярных графов для конкретных многочленов второй степени. Подробнее об этом, а также о некоторых свойствах тотального и регулярного графов матриц и многочленов, в главе 4.

Результаты этой главы опубликованы в работе [35].

Основная цель этой главы — ослабить условие (6) на отображение T , а также обобщить теорему 1.2.11 на произвольное алгебраически замкнутое поле.

2.1

Как говорилось в разделе 1.2.1, нашей задачей будет ослабить условия (1.2.6) и (6), поэтому сразу введем следующие определения.

Определение 2.1.1. Пусть \mathbb{F} — поле, $\mathcal{Y} \subseteq M_n$ — непустое подмножество M_n . Пусть $T_1, T_2: \mathcal{Y} \rightarrow M_n$ — отображения, $\lambda \in \mathbb{F}^*$, $A, B \in \mathcal{Y}$. Тогда пара (T_1, T_2) называется **пучковым условием** (7), если для любых $A, B \in \mathcal{Y}$ и $\lambda \in \mathbb{F}^*$ выполняется равенство

$$A + \lambda B \in \mathcal{Y} \iff T_1(A) + \lambda T_2(B) \in \mathcal{Y}. \quad (7)$$

Определение 2.1.2. Пусть \mathbb{F} — поле, $\mathcal{Y} \subseteq M_n$ — непустое подмножество M_n . Пусть $T_1, T_2: \mathcal{Y} \rightarrow M_n$ — отображения, $\lambda \in \mathbb{F}^*$, $A, B \in \mathcal{Y}$. Тогда пара (T_1, T_2) называется **односторонним пучковым условием** (8), если для любых $A, B \in \mathcal{Y}$ и $\lambda \in \mathbb{F}^*$ выполняется равенство

$$A + \lambda B \in \mathcal{Y} \implies T_1(A) + \lambda T_2(B) \in \mathcal{Y}. \quad (8)$$

Замечание 2.1.3. Отметим, что условия выше симметричны относительно T_1 и T_2 . Действительно, если пара (T_1, T_2) удовлетворяет пучковому условию (7) или одностороннему пучковому условию (8), то пара (T_2, T_1) тоже удовлетворяет (7) или (8), соответственно, поскольку достаточно разделить эти соотношения

на ненулевое значение λ .

В этой главе мы докажем две следующие теоремы, которые усиливают результат Костары (теорему 1.2.11). Через $T|_{\mathcal{X}}$ обозначим ограничение отображения T на подмножество \mathcal{X} всей алгебры матриц.

Теорема 2.1.4. \mathbb{F} , $GL_n \subseteq \mathcal{Y} \subseteq M_n$, -

$$(8) \quad T_1, T_2: \mathcal{Y} \rightarrow M_n$$

\mathcal{Y} .

$$(4) \quad D \in GL_n, \quad T_2(D) \in GL_n. \quad T_1|_{\mathcal{Y} \setminus \{O\}} = T_2|_{\mathcal{Y} \setminus \{O\}}$$

$\mathcal{Y} \setminus \{O\}$.

Следующие две теоремы, фактически, являются следствиями теоремы 2.1.4.

Теорема 2.1.5. \mathbb{F} , $GL_n \subseteq \mathcal{Y} \subseteq M_n$, -

$$(7) \quad T_1, T_2: \mathcal{Y} \rightarrow M_n. \quad T_1, T_2$$

\mathcal{Y} , $T_1 = T_2$ -

$$(4) \quad \mathcal{Y}$$

Теорема 2.1.6. \mathbb{F} , -

$$T_1, T_2: M_n \rightarrow M_n$$

$A, B \in M_n$ $\lambda \in \mathbb{F}^*$:

$$A + \lambda B \in GL_n \implies T_1(A) + \lambda T_2(B) \in GL_n. \quad (9)$$

$$T_1 = T_2 \quad (4) \quad M_n.$$

Приведем несколько замечаний, обосновывающих и подкрепляющих условия указанных выше теорем.

Замечание 2.1.7. а) Пусть $n \geq 2$ и $T_1, T_2: M_n \rightarrow M_n$ определены следующим образом: $T_1(A) = T_2(A) = E_{11}$ для всех $A \in M_n$. Поскольку $T_1(A) + \lambda T_2(A)$ вырождена для всех $\lambda \in \mathbb{F}^*$, мы получаем, что T_1, T_2 удовлетворяют одностороннему пучковому условию (8) для вырожденности на M_n , но T_1 и T_2 не имеют стандартный вид (4) на M_n . Это означает, что в теореме 2.1.4 мы не можем опустить условие на существование такой $D \in GL_n$, что $T_2(D) \in GL_n$.

б) Более того, можно построить и инъективный контрпример. Пусть $n > 2m$ и оба отображения T_1, T_2 переводят любую матрицу в произвольную матрицу, ранга не выше m . Тогда $T_1(A) + \lambda T_2(A)$ всегда вырождена, однако T_1 и T_2 отнюдь не стандартного вида на M_n . Для бесконечного поля это позволяет построить инъективные отображения T_1, T_2 , которые удовлетворяют одностороннему пучковому условию (8) для вырожденности на M_n , но не имеют стандартный вид на M_n .

с) В условиях теоремы 2.1.4 допустимо, что $T_1(O) \neq O$ и $T_2(O) \neq O$. Действительно, пусть $n \geq 2$, $\mathcal{Y} = GL_n \cup \{O\}$. Рассмотрим отображения $T_1, T_2: \mathcal{Y} \rightarrow M_n$, которые тождественны на GL_n , но принимают произвольное вырожденное значение в нуле $T_1(O) = T_2(O)$. Тогда условия теоремы 2.1.4 выполняются.

2.2

Пусть K — область целостности (т. е. коммутативное кольцо с единицей и без делителей нуля). Рассмотрим кольцо многочленов $K[\lambda]$.

Определение 2.2.1.

$$f(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0, \quad g(\lambda) = b_m \lambda^m + b_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + b_0 \in K[\lambda], \quad n, m \geq 1$$

$$\begin{array}{ccc} a_n, & b_m & \\ & & f(\lambda) \quad g(\lambda) \\ & & \vdots \end{array}$$

$$R(f(\lambda), g(\lambda)) = \underbrace{\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \dots & b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_1 & b_0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_1 & b_0 \end{pmatrix}}_{m+n}.$$

Определение 2.2.2.

$$f(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \in K[\lambda], \quad a_n \neq 0.$$

$n > 1$

$$\Delta_\lambda(f) \in K \quad)$$

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n \cdot \Delta_\lambda(f) = R(f(\lambda), f'(\lambda)),$$

$$f'(\lambda) = na_n \lambda^{n-1} + (n-1)a_{n-1} \lambda^{n-2} + \dots + a_1$$
$$f(\lambda).$$

$$f(\lambda) = a_1 \lambda + a_0, \quad \Delta_\lambda(f) = \begin{cases} 0, & a_1 = a_0 = 0; \\ 1, & . \end{cases}$$

Замечание 2.2.3. Мы бы хотели отметить следующие широко известные и важные свойства результата и дискриминанта (см. также [27, глава IV, §8]). Пусть $n = \deg_\lambda f > 1$.

1. Пусть $n > 1$. Несмотря на то, что $n \cdot a_n$ может равняться нулю, порядок матрицы, соответствующей $R(f(\lambda), f'(\lambda))$, всегда будет равен $2n - 1$, поскольку в определении дискриминанта мы рассматриваем формальную производную.
2. Кроме того, при $n > 1$ первый столбец матрицы, соответствующей $R(f(\lambda), f'(\lambda))$, будет делиться на a_n , а значит, $R(f(\lambda), f'(\lambda))$ делится на a_n , что обосновывает корректность определения 2.2.2.
3. Пусть $n > 1$ и x_1, x_2, \dots, x_n — все корни многочлена $f(x)$, лежащие в некотором расширении поля частных K . Тогда $\Delta_\lambda(f) = a_n^{2n-2} \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2$.
4. Как следствие, $\Delta_\lambda(f) = 0 \iff f$ имеет кратные корни в некотором расширении поля частных K (или $f \equiv 0$).
5. Рассмотрим $K = \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_l]$ и многочлен

$$f(x_1, x_2, \dots, x_l, \lambda) = a_n(x_1, x_2, \dots, x_l) \lambda^n + a_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_l) \lambda^{n-1} + \dots$$
$$+ a_0(x_1, x_2, \dots, x_l) \in K[\lambda].$$

Обозначим через $\Delta_\lambda(f) = d(x_1, x_2, \dots, x_l)$ дискриминант многочлена $f(x_1, x_2, \dots, x_l, \lambda)$ над K . Пусть $x_1^*, x_2^*, \dots, x_l^* \in \mathbb{F}$ — такие элементы поля, что $a_n(x_1^*, x_2^*, \dots, x_l^*) \neq 0$, и пусть $g(\lambda) = f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_l^*, \lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$, а $\Delta_\lambda(g)$

— дискриминант многочлена $g(\lambda)$ над \mathbb{F} . Тогда $\deg_\lambda f = \deg_\lambda g$ и, в соответствии с определением 2.2.2,

$$\Delta_\lambda(f)|_{x_1=x_1^*, x_2=x_2^*, \dots, x_l=x_l^*} = d(x_1^*, x_2^*, \dots, x_l^*) = \Delta_\lambda(g).$$

Предложение 2.2.4. $f(x, \lambda) \in \mathbb{F}[x, \lambda]$, $f(x, \lambda) = a_0(x) + a_1(x)\lambda + a_2(x)\lambda^2 + \dots + a_m(x)\lambda^m$, $m > 1$, $a_m(x) \neq 0$. $\Delta_\lambda(f) \in \mathbb{F}[x]$ —
 $f(x, \lambda)$, λ .

$x_0 \in \mathbb{F}$.

) $a_m(x_0) \neq 0$, $\Delta_\lambda(f)|_{x=x_0} = \Delta_\lambda(f|_{x=x_0})$.

) $a_m(x_0) = 0$ $a_{m-1}(x_0) \neq 0$, $\Delta_\lambda(f)|_{x=x_0} = a_{m-1}^2(x_0) \cdot \Delta_\lambda(f|_{x=x_0})$.

. Пункт а) следует из пункта 5 замечания выше.

Докажем пункт б). Пусть $a_m(x_0) = 0$. Тогда по определению 2.2.2:

$$\begin{aligned} (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \Delta_\lambda(f)|_{x=x_0} &= \begin{vmatrix} 1 & a_{m-1}(x_0) & a_{m-2}(x_0) & \dots & a_0(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{m-1}(x_0) & a_{m-2}(x_0) & \dots & a_0(x_0) & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{m-1}(x_0) & a_{m-2}(x_0) & \dots & a_0(x_0) \\ m & (m-1)a_{m-1}(x_0) & (m-2)a_{m-2}(x_0) & \dots & a_1(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & (m-1)a_{m-1}(x_0) & (m-2)a_{m-2}(x_0) & \dots & a_1(x_0) & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & (m-1)a_{m-1}(x_0) & (m-2)a_{m-2}(x_0) & \dots & a_1(x_0) \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{m-2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a_{m-1}(x_0) \\ m & (m-1)a_{m-1}(x_0) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{m-1}(x_0) & a_{m-2}(x_0) & \dots & a_0(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{m-1}(x_0) & a_{m-2}(x_0) & \dots & a_0(x_0) & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{m-1}(x_0) & a_{m-2}(x_0) & \dots & a_0(x_0) \\ (m-1)a_{m-1}(x_0) & (m-2)a_{m-2}(x_0) & \dots & a_1(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (m-1)a_{m-1}(x_0) & (m-2)a_{m-2}(x_0) & \dots & a_1(x_0) & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & (m-1)a_{m-1}(x_0) & (m-2)a_{m-2}(x_0) & \dots & a_1(x_0) \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{m-1} \cdot a_{m-1}^2(x_0) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a_{m-2}(x_0) & \dots & a_0(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{m-1}(x_0) & a_{m-2}(x_0) & \dots & a_0(x_0) & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{m-1}(x_0) & a_{m-2}(x_0) & \dots & a_0(x_0) \\ m-1 & (m-2)a_{m-2}(x_0) & \dots & a_1(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (m-1)a_{m-1}(x_0) & (m-2)a_{m-2}(x_0) & \dots & a_1(x_0) & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & (m-1)a_{m-1}(x_0) & (m-2)a_{m-2}(x_0) & \dots & a_1(x_0) \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{\frac{(m-1)(m-2)}{2} + m-1} \cdot a_{m-1}^2(x_0) \cdot \Delta_\lambda(f|_{x=x_0}) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \cdot a_{m-1}^2(x_0) \cdot \Delta_\lambda(f|_{x=x_0}). \end{aligned}$$

Следовательно, $\Delta_\lambda(f)|_{x=x_0} = a_{m-1}^2(x_0) \cdot \Delta_\lambda(f|_{x=x_0})$.

□

Следующее предложение широко известно как теорема Безу.

Предложение 2.2.5. [25, . 59, 4.13] K -
 $f \in K[x]$ $n.$ f n
 $K.$

Из теоремы 2.2.5 Безу (над областью целостности) легко вытекает следующее

Утверждение 2.2.6. $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$,
 ($n \geq 1$).

$$\{x_1^* \mid P(x_1^*, x_2, \dots, x_n) \equiv 0\}$$

$$(\deg_{x_1} P).$$

Определение 2.2.7. $F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda].$ F

$$F^{\{k\}}(x_1, \dots, x_k, \lambda) = F(x_1, \dots, x_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k}, \lambda) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_k, \lambda], \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

:

$$\bullet \deg_{\lambda} F^{\{k-1\}} = \deg_{\lambda} F^{\{k\}} \quad \deg_{\lambda} F^{\{k-1\}} = \deg_{\lambda} F^{\{k\}} - 1 \quad k = 2, \dots, n;$$

$$\bullet \Delta_{\lambda}(F^{\{1\}}) \neq 0 \quad (F^{\{1\}} - \\ \lambda, \dots \Delta_{\lambda}(F^{\{1\}}) \in \mathbb{F}[x_1].)$$

Пример 2.2.8. Рассмотрим несколько примеров.

1. Не все многочлены, у которых при некоторых значениях x_1, x_2, \dots, x_n нет кратных корней, являются сбалансированными по степени. Например, многочлен $F_1 = (\lambda - x_1)(\lambda - x_2) \dots (\lambda - x_n)$ не сбалансирован по степени при $n \geq 3$, поскольку $F_1^{\{1\}} = (\lambda - x_1)\lambda^{n-1}$ имеет кратный корень (тем самым, $\Delta_{\lambda}(F_1^{\{1\}}) \equiv 0$).

2. Порядок переменных может влиять на сбалансированность по степени. Рассмотрим два многочлена:

$$F_2 = (1 + \lambda x_1 x_2)(1 + \lambda x_1), \quad F_3 = (1 + \lambda x_1 x_2)(1 + \lambda x_2).$$

F_2 сбалансирован по степени, а F_3 нет, поскольку $\deg_\lambda F_3^{\{1\}} = 0$, но $\deg_\lambda F_3^{\{2\}} = 2$.

3. Приведем важный пример сбалансированного по степени многочлена, который будет использоваться в дальнейшем. Пусть $d_1, d_2, \dots, d_n \in \mathbb{F}^*$ и k_1, k_2, \dots, k_n — неотрицательные целые числа. Тогда многочлен

$$F_4 = (d_1 + \lambda x_1)^{k_1} (d_2 + \lambda x_2)^{k_2} \dots (d_n + \lambda x_n)^{k_n}$$

сбалансирован по степени, если и только если $k_i = 0$ или 1 при всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Лемма 2.2.9.

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda), F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda), \dots, F_N(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda]$$

$$G_1(x_1, x_2, \dots, x_n), G_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, G_M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

$$\begin{array}{l} x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \in \mathbb{F} \quad , \quad F_\ell(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \lambda) \in \mathbb{F}[\lambda] \\ \ell = 1, 2, \dots, N \quad G_r(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \neq 0 \quad r = 1, 2, \dots, M. \end{array}$$

. Будем придерживаться обозначений, данных в определении 2.2.7:

$$F_\ell^{\{k\}}(x_1, \dots, x_k, \lambda) = F_\ell(x_1, \dots, x_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k}, \lambda) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_k, \lambda],$$

$$k = 1, 2, \dots, n, \quad \ell = 1, 2, \dots, N.$$

Обозначим через $\Delta_\lambda(F_\ell^{\{k\}}) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_k]$ дискриминант многочлена $F_\ell^{\{k\}}(x_1, \dots, x_k, \lambda)$, рассматриваемого как многочлен от λ . Также для не тождественно нулевого многочлена $P(y_1, y_2, \dots, y_s, \lambda) \in \mathbb{F}[y_1, y_2, \dots, y_s, \lambda]$ обозначим через $LC_\lambda(P) \in \mathbb{F}[y_1, y_2, \dots, y_s]$ коэффициент при старшей степени λ (если рассматривать P как многочлен от λ). По определению, $LC_\lambda(P) \neq 0$.

Индукцией по $k = 1, 2, \dots, n$ докажем существование таких $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^* \in \mathbb{F}$, что выполнены следующие условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_\lambda(F_\ell^{\{k\}})(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) \neq 0, \ell = 1, 2, \dots, N; \\ \deg_\lambda F_\ell^{\{t\}}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*, x_{k+1}, \dots, x_t, \lambda) = \\ \quad = \deg_\lambda F_\ell^{\{t\}}(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_t, \lambda), \\ \quad \quad \quad t = k, k+1, \dots, n, \ell = 1, 2, \dots, N; \\ G_r(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*, x_{k+1}, \dots, x_n) \neq 0, r = 1, 2, \dots, M. \end{array} \right. \quad (*)$$

. $k = 1$. Рассмотрим конечный набор многочленов:

$$\begin{aligned} \Delta_\lambda(F_\ell^{\{1\}}) &\in \mathbb{F}[x_1] \quad (\ell = 1, 2, \dots, N), \\ LC_\lambda(F_\ell^{\{t\}}) &\in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_t] \quad (\ell = 1, 2, \dots, N, t = 1, 2, \dots, n), \\ G_r(x_1, x_2, \dots, x_n) &\quad (r = 1, 2, \dots, M). \end{aligned}$$

Согласно условиям леммы, каждый из них не является тождественно нулевым. Поэтому, ввиду бесконечности поля \mathbb{F} , утверждение 2.2.6 гарантирует существование $x_1^* \in \mathbb{F}$ такого, что после подстановки $x_1 = x_1^*$ в каждый многочлен набора получается не тождественный нуль. Это в точности означает выполнение (*) при $k = 1$.

. Пусть для $k < n$ найдены значения $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^* \in \mathbb{F}$ такие, что выполнены условия (*). Покажем, что набор этих значений можно расширить числом x_{k+1}^* , чтобы (*) выполнялись для $k+1$.

Пусть $1 \leq \ell \leq N$. Рассмотрим многочлен $\Delta_\lambda(F_\ell^{\{k+1\}})(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*, x_{k+1}) \in \mathbb{F}[x_{k+1}]$ и докажем, что он не может быть тождественным нулем. Пусть

$$p(x_{k+1}, \lambda) = F_\ell^{\{k+1\}}(x_1^*, \dots, x_k^*, x_{k+1}, \lambda) = a_0(x_{k+1}) + a_1(x_{k+1})\lambda + \dots + a_m(x_{k+1})\lambda^m,$$

где $m = \deg_{\lambda} F_{\ell}^{\{k+1\}}$ (в соответствии с индукционным предположением). Поэтому

$$\Delta_{\lambda}(F_{\ell}^{\{k+1\}})(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*, x_{k+1}) = \Delta_{\lambda}(p(x_{k+1}, \lambda))(x_{k+1}).$$

Многочлен $F_{\ell}^{\{k+1\}}$ является ненулевым, так как $\deg F_{\ell}^{\{k+1\}} \geq \deg F_{\ell}^{\{1\}} \geq 0$. Таким образом, если $m = 0$ или $m = 1$, то $\Delta_{\lambda}(F_{\ell}^{\{k+1\}})(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*, x_{k+1}) = \Delta_{\lambda}(F_{\ell}^{\{k+1\}}) \equiv 1$, поскольку $F_{\ell}^{\{k+1\}} \not\equiv 0$.

Пусть теперь $m > 1$. Заметим, что

$$a_0(0) + a_1(0)\lambda + \dots + a_m(0)\lambda^m = p(0, \lambda) = F_{\ell}^{\{k+1\}}(x_1^*, \dots, x_k^*, 0, \lambda) = F_{\ell}^{\{k\}}(x_1^*, \dots, x_k^*, \lambda).$$

По предположению индукции, $\deg_{\lambda} p(0, \lambda) = \deg_{\lambda} F_{\ell}^{\{k\}}$, что равно m или $m - 1$ по условию леммы. Это означает, что если $a_m(0) = 0$, то $a_{m-1}(0) \neq 0$. Тогда из предложения 2.2.4 следует, что

$$\Delta_{\lambda}(p(x_{k+1}, \lambda))|_{x_{k+1}=0} = \begin{cases} \Delta_{\lambda}(p(0, \lambda)), & \text{если } a_m(0) \neq 0; \\ a_{m-1}^2(0) \cdot \Delta_{\lambda}(p(0, \lambda)), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Во втором случае, как пояснялось выше, $a_{m-1}(0) \neq 0$, и в обоих случаях

$$LC_{\lambda}(p(0, \lambda)) = LC_{\lambda}(F_{\ell}^{\{k\}})(x_1^*, \dots, x_k^*) \neq 0$$

по предположению индукции, поэтому $\Delta_{\lambda}(p(0, \lambda)) = \Delta_{\lambda}(F_{\ell}^{\{k\}})(x_1^*, \dots, x_k^*)$, что опять-таки не равно нулю по предположению индукции.

Тем самым, показано, что $\Delta_{\lambda}(F_{\ell}^{\{k+1\}})(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*, x_{k+1})$ не тождественный нуль.

Рассмотрим конечный набор многочленов, каждый из которых не является тождественно нулевым:

$$\begin{aligned}
\Delta_\lambda(F_\ell^{\{k+1\}})(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*, x_{k+1}) &\in \mathbb{F}[x_{k+1}] \quad (\ell = 1, 2, \dots, N), \\
LC_\lambda(F_\ell^{\{t\}})(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*, x_{k+1}, \dots, x_t) &\in \mathbb{F}[x_{k+1}, \dots, x_t] \\
&(\ell = 1, 2, \dots, N, t = k + 1, k + 2, \dots, n), \\
G_r(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*, x_{k+1}, \dots, x_n) &\in \mathbb{F}[x_{k+1}, \dots, x_n] \quad (r = 1, 2, \dots, M).
\end{aligned}$$

Ввиду бесконечности поля \mathbb{F} , утверждение 2.2.6 гарантирует существование $x_{k+1}^* \in \mathbb{F}$ такого, что после подстановки $x_{k+1} = x_{k+1}^*$ в каждый многочлен набора получается не тождественный нуль. Это в точности означает выполнение (*) при $k + 1$.

Таким образом, найден набор $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \in \mathbb{F}$, для которого выполнены условия (*) при $k = n$. Пусть $1 \leq \ell \leq N$. Отметим, что $LC_\lambda(F_\ell)(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \neq 0$ согласно условиям (*), поэтому

$$\Delta_\lambda(F_\ell(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \lambda)) = \Delta_\lambda(F_\ell)(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \neq 0 \quad (\text{вновь по условиям } (*)),$$

а следовательно, многочлен $F_\ell(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \lambda)$ не имеет кратных корней. \square

2.3

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема, доказанная Максаевым в работе [35].

Теорема 2.3.1. $T_1, T_2 \in GL_n, D \in GL_n$,
 $T_2(D) \in GL_n.$ $T_1 \quad T_2 \quad (4) \quad GL_n.$

Поскольку доказательство этого результата подробно изложено в статье [35] и в диссертации Максаева, мы приведем только общую схему доказательства и несколько утверждений, помогающих доказать теорему 2.3.1.

Основная идея доказательства состоит в том, чтобы доказать, что отображение T_1 линейно и сохраняет определитель, а далее воспользоваться результатами

Фробениуса и Дьёдонне.

Ключевыми для доказательства сохранения определителя являются следующие две леммы.

Лемма 2.3.2. $A \in GL_n$ $B \in GL_n$, $\det(B + \lambda A)$
 λ n $|\text{spec}(B)| = n$.

Если воспользовавшись этой леммой рассмотреть $\det(A + \lambda B)$ и $\det(T_1(A) + \lambda T_2(B))$ как многочлены от λ , то из выполнения пучкового условия ((7) или (8)) мы получим, что многочлены

$$\det(A + \lambda B) = \det A + \dots + \lambda^n \det B$$

и

$$\det(T_1(A) + \lambda T_2(B)) = \det T_1(A) + \dots + \lambda^n \det T_2(B)$$

имеют одинаковые наборы корней и, следовательно, совпадают с точностью до множителя. Эти соображения использует следующая лемма.

Лемма 2.3.3. $T_2(E) = E$. $\det A = \det T_1(A) = \det T_2(A)$
 $A \in GL_n$.

Тем самым, сохранение определителя следует из леммы выше и того, что путем одновременного домножения отображений на невырожденные матрицы, можно считать, что $T_2(E) = E$.

Доказательство линейности состоит из последовательного доказательства того, что отображение аддитивно на множестве невырожденных матриц, а затем продолжения этого отображения на все матрицы.

Аддитивность следует из приведенного ниже предложения.

Предложение 2.3.4. $\det X = \det T_2(X)$. T_1 -
 (U, V) , $B_1, B_2, \dots, B_{n^2} \in GL_n(\mathbb{F})$,
 $:$

$$\bullet B_1^{-1}, B_2^{-1}, \dots, B_{n^2}^{-1} \quad M_n(\mathbb{F});$$

- $S = U, V, U + V$ $\det(S + \lambda B_i),$
 $\lambda, \quad n \quad ;$
- $A_1, A_2, \dots, A_{n^2} \in GL_n(\mathbb{F}), \quad M_n(\mathbb{F}),$
 $, \quad i, j \quad \det(A_j + \lambda B_i) \quad n \quad .$

Отдельно распишем, почему требуется, чтобы у многочленов вида $\det(S + \lambda B_i)$ и $\det(A_j + \lambda B_i)$ было n различных корней. Дело в том, что в основе доказательства линейности отображения лежит метод, основанный на следующем утверждении (здесь \widehat{A} обозначает матрицу, составленную из алгебраических дополнений матрицы A).

Утверждение 2.3.5. $A, B, C, D \in M_n$, $\det(A + \lambda B) = \det(C + \lambda D)$ $\lambda \in \mathbb{F}^*$.

$$(\nu_{\widehat{B}})^t \cdot \nu_A = (\nu_{\widehat{D}})^t \cdot \nu_C.$$

Аналогичный метод использовался Таном и Вангом в статье [13] для доказательства теоремы 1.2.7. Однако метод Тана и Ванга существенно опирался на то, что для отображения выполнено условие

$$\det(A + \lambda B) = \det(T(A) + \lambda T(B)) \quad \text{для всех } A, B \in M_n(\mathbb{F}) \text{ и всех } \lambda \in \mathbb{F}.$$

В нашем случае есть только более слабое условие (8)

$$\det(A + \lambda B) = 0 \implies \det(T_1(A) + \lambda T_2(B)) = 0 \quad \text{для всех } A, B \in M_n(\mathbb{F}) \text{ и } \lambda \in \mathbb{F}.$$

Тем не менее, если $\det X = \det T_2(X)$ для всех $X \in GL_n$ и $A, B \in GL_n$ таковы, что многочлен $\det(A + \lambda B)$ имеет n различных корней, то $\det(A + \lambda B) = \det(T_1(A) + \lambda T_2(B))$ для всех $\lambda \in \mathbb{F}$.

Действительно, тогда, согласно пучковому условию (8) многочлен $\det(T_1(A) + \lambda T_2(B))$ имеет те же корни и ту же степень, что и $\det(A + \lambda B)$. Старшие коэффициенты этих многочленов есть $\det T_2(B)$ и $\det B$ — они равны. Это означает равенство многочленов: $\det(A + \lambda B) = \det(T_1(A) + \lambda T_2(B))$.

Тем самым, для доказательства аддитивности осталось показать, что для всякой пары невырожденных матриц (U, V) найдутся $B_1, B_2, \dots, B_{n^2} \in GL_n(\mathbb{F})$, удовлетворяющие условию предложения 2.3.4.

Для доказательства этого факта как раз и необходима техника, приведенная в параграфе 2.2. Поэтому следующее утверждение мы приведем с доказательством.

Определение 2.3.6. $A, B \in GL_n(\mathbb{F})$, $\det(A + \lambda B) \in \mathbb{F}[\lambda]$ n
 B - \mathbb{F} .

Лемма 2.3.7. $U, V \in GL_n$, $U + V \in GL_n$.
 $B_1, B_2, \dots, B_{n^2} \in GL_n$,

- $B_1^{-1}, B_2^{-1}, \dots, B_{n^2}^{-1} \in M_n(\mathbb{F})$;
- $U, V, U + V \in B_i$ $i = 1, 2, \dots, n^2$;
- $A_1, A_2, \dots, A_{n^2} \in GL_n(\mathbb{F})$,
 $M_n(\mathbb{F})$, $A_j \in B_i$ $i, j = 1, 2, \dots, n^2$.

. Пусть $1 \leq i, j \leq n$ и $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0, 1, n\}$ — фиксированный элемент.

Определим матрицу

$$A_{ij} = \begin{cases} E + E_{ij}, & \text{если } i \neq j; \\ E - \alpha E_{ii}, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Тогда семейство невырожденных матриц $\{A_{ij}\}_{i,j=1}^n$ образует базис M_n . Добавим к рассмотрению матрицы $U, V, U + V$. Для удобства обозначим это семейство матриц через D_r . Нетрудно заметить, что каждая из $n^2 + 3 = N$ рассматриваемых матриц D_r невырожденная и верхнетреугольная или нижнетреугольная.

Введем следующее обозначение: для различных натуральных i, j таких, что $1 \leq i, j \leq n$ и параметров $x_1^*, x_2^*, \dots, x_{n+1}^*$, обозначим через $B_{ij}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{n+1}^*)$ следующую матрицу

$$B_{ij}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{n+1}^*) = \sum_{s=1}^n x_s^* E_{ss} + x_{n+1}^* E_{ij} \in M_n.$$

Шаг 1. Докажем, что существуют $x_1^*, x_2^*, \dots, x_{n+1}^* \in \mathbb{F}^*$ такие, что для всех $r = 1, 2, \dots, n^2 + 3$, $\det(D_r - \lambda B_{ij}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{n+1}^*))$ имеет n различных корней.

Не умаляя общности, будем считать $i > j$. Пусть $r \in \{1, 2, \dots, N\}$. Рассмотрим кольцо многочленов $\mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, \lambda]$ от $n + 2$ переменных и многочлен

$$\begin{aligned} F_r(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, \lambda) &= \det(D_r + \lambda B_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})) = \\ &= \det\left(D_r + \sum_{s=1}^n \lambda x_s E_{ss} + \lambda x_{n+1} E_{ij}\right) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, \lambda]. \end{aligned}$$

Докажем, что F_r сбалансирован по степени (см. определение 2.2.7).

Напомним, что все матрицы D_r либо нижнетреугольные, либо верхнетреугольные. Рассмотрим два случая.

1.1. Если

$$D_r = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ * & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ * & * & \dots & d_n \end{pmatrix} \text{ — нижнетреугольная матрица,}$$

то, в частности, $F_r(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, \lambda) = (d_1 + \lambda x_1)(d_2 + \lambda x_2) \dots (d_n + \lambda x_n)$ и ни один из d_1, d_2, \dots, d_n не равен 0. Таким образом, $F_r(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, \lambda)$ — сбалансирован по степени (см. пример 2.2.8, пункт 3).

1.2. Пусть теперь

$$D_r = \begin{pmatrix} d_1 & * & \dots & * \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \text{ — верхнетреугольная матрица.}$$

Тогда

$$D_r + \sum_{s=1}^n \lambda x_s E_{ss} + \lambda x_{n+1} E_{ij} = \begin{matrix} & & & & j \\ i & \begin{pmatrix} d_1 + \lambda x_1 & \dots & * & \dots & * \\ 0 & d_2 + \lambda x_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & \lambda x_{n+1} & \ddots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & d_n + \lambda x_n \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} F_r^{\{n\}}(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) &= F_r(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \lambda) = \\ &= (d_1 + \lambda x_1)(d_2 + \lambda x_2) \dots (d_n + \lambda x_n) - \text{сбалансированный по степени многочлен.} \end{aligned}$$

Поэтому достаточно доказать, что $\deg_\lambda F_r = \deg_\lambda F_r^{\{n\}}$. Легко видеть, что обе степени равны n , поскольку старший моном (по λ) многочлена F_r равен $x_1 x_2 \dots x_n \cdot \lambda^n$.

Таким образом, многочлен F_r сбалансирован по степени для каждого $r = 1, 2, \dots, N$. Применим лемму 2.2.9 для набора сбалансированных по степени многочленов F_1, F_2, \dots, F_N и ненулевого многочлена $G(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = x_1 x_2 \dots x_{n+1}$.

Тогда получим набор ненулевых $x_1^*, x_2^*, \dots, x_{n+1}^* \in \mathbb{F}$ таких, что D_r является $B_{ij}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{n+1}^*)$ -диагонализуемой при $r = 1, 2, \dots, n^2 + 3$, что и требовалось.

Шаг 2. Найдем диагональные матрицы $B_1, B_2, \dots, B_n \in GL_n$ такие, что $B_1^{-1}, B_2^{-1}, \dots, B_n^{-1}$ образуют базис пространства $n \times n$ диагональных матриц над \mathbb{F} и многочлен $\det(D_r - \lambda B_t)$ имеет n различных корней для всех $r = 1, 2, \dots, n^2 + 3$, $t = 1, 2, \dots, n$.

Рассмотрим кольцо многочленов от $n^2 + 1$ переменной $\mathbb{F}[x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{n,n}, \lambda]$. Порядок переменных будем считать естественным:

$$x_1 = x_{1,1}, x_2 = x_{1,2}, \dots, x_{n(i-1)+j} = x_{i,j}, \dots, x_{n^2} = x_{n,n}.$$

Требуемые матрицы будем искать в виде $B_t = \text{diag}(x_{t,1}, x_{t,2}, \dots, x_{t,n})$, $t =$

$= 1, 2, \dots, n$.

Пусть для $r \in \{1, 2, \dots, N\}$

$$D_r = \begin{pmatrix} d_{r,1} & * & \dots & * \\ 0 & d_{r,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & d_{r,n} \end{pmatrix}, \text{ либо } D_r = \begin{pmatrix} d_{r,1} & 0 & \dots & 0 \\ * & d_{r,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ * & * & \dots & d_{r,n} \end{pmatrix}.$$

Матрицы B_k , $k = 1, 2, \dots, n$, будем искать в виде: $B_k = \text{diag}(x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n})$.

Заметим, что для каждого $r = 1, 2, \dots, N$ и $k = 1, 2, \dots, n$ многочлен

$$F_{r,k} = \det(D_r + \lambda B_k) = (d_{r,1} + \lambda x_{k,1})(d_{r,2} + \lambda x_{k,2}) \dots (d_{r,n} + \lambda x_{k,n}) \in \mathbb{F}[x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{n,n}, \lambda]$$

является сбалансированным по степени. Действительно, при $t = 2, 3, \dots, n^2$,

$$\deg_{\lambda} F_{r,k}^{\{t-1\}} = \begin{cases} \deg_{\lambda} F_{r,k}^{\{t\}} - 1, & \text{если } t \in [n(k-1) + 1; nk], \\ \deg_{\lambda} F_{r,k}^{\{t\}}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$F_{r,k}^{\{1\}}(x_{1,1}, \lambda) = \begin{cases} (d_{r,1} + \lambda x_{1,1}) \cdot d_{r,2} \cdot \dots \cdot d_{r,n}, & \text{если } k = 1, \\ d_{r,1} \cdot d_{r,2} \cdot \dots \cdot d_{r,n}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

т. е. во всех случаях $\Delta_{\lambda}(F_{r,k}^{\{1\}}) = 1$.

Добавим в рассмотрение не тождественно нулевые многочлены

$$G_1, G_2 \in \mathbb{F}[x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{n,n}]$$

определенные следующим образом:

$$G_1 = \prod_{i,j=1}^n x_{i,j}, \quad G_2 = G_1 \cdot \begin{vmatrix} x_{1,1}^{-1} & x_{1,2}^{-1} & \dots & x_{1,n}^{-1} \\ x_{2,1}^{-1} & x_{2,2}^{-1} & \dots & x_{2,n}^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1}^{-1} & x_{n,2}^{-1} & \dots & x_{n,n}^{-1} \end{vmatrix}.$$

Отметим, что G_2 действительно является (однородным) многочленом от пере-

менных $x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{n,n}$, ведь каждое слагаемое определителя при умножении на G_1 является мономом степени $n^2 - n$.

Наконец, применив лемму 2.2.9 для набора $N \cdot n$ сбалансированных по степени многочленов $F_{1,1}, F_{1,2}, \dots, F_{N,n}$ и ненулевых многочленов G_1, G_2 , получим набор ненулевых $x_{1,1}^*, x_{1,2}^*, \dots, x_{n,n}^* \in \mathbb{F}$ таких, что D_r является B_k -диагонализируемой при $r = 1, 2, \dots, N$, $k = 1, 2, \dots, n$. Кроме того, обратные к матрицам B_1, B_2, \dots, B_n существуют, поскольку $G_1(x_{1,1}^*, x_{1,2}^*, \dots, x_{n,n}^*) \neq 0$, и образуют базис пространства диагональных матриц, поскольку $G_2(x_{1,1}^*, x_{1,2}^*, \dots, x_{n,n}^*) \neq 0$.

Шаг 3. В результате **шага 1** и **шага 2** мы получили набор невырожденных матриц $B_{ij} = \sum_{s=1}^n x_s^{(ij)} E_{ss} + x_{n+1}^{(ij)} E_{ij}$ (при $i \neq j$) и набор невырожденных диагональных матриц B_1, B_2, \dots, B_n таких, что $B_1^{-1}, B_2^{-1}, \dots, B_n^{-1}$ образуют базис пространства диагональных матриц. Покажем, что полученные n^2 матриц — искомые.

Заметим, что $B_{ij}^{-1} = \sum_{s=1}^n \frac{1}{x_s^{(ij)}} E_{ss} - \frac{x_{n+1}^{(ij)}}{x_i^{(ij)} x_j^{(ij)}} E_{ij}$, поэтому (учитывая тот факт, что $x_{n+1}^{(ij)} \neq 0$) любая внедиагональная матричная единица E_{ij} может быть линейно выражена через B_{ij}^{-1} и $B_1^{-1}, B_2^{-1}, \dots, B_n^{-1}$.

Это означает, что набор матриц $\{B_{ij}^{-1} \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\} \cup \{B_1^{-1}, B_2^{-1}, \dots, B_n^{-1}\}$ образует базис $M_n(\mathbb{F})$, что и требовалось доказать. \square

2.4

В этом параграфе мы докажем теоремы 2.1.4, 2.1.5, 2.1.6, используя теорему 2.3.1. Сначала докажем следующую лемму, представляющую самостоятельный интерес.

Лемма 2.4.1. $|\mathbb{F}| > n \geq 1 \quad X, Y \in M_n \quad , \quad Z \in GL_n,$

$$X + Z \in \Omega_n \implies Y + Z \in \Omega_n. \quad (11)$$

$$X = O, \quad X = Y.$$

. Случай $n = 1$ очевиден. Далее будем считать, что $n > 1$. Обозначим нулевой вектор $(0, 0, \dots, 0)^t \in \mathbb{F}^n$ через $\mathbf{0}$ и i -тый столбец матрицы $A \in M_n$

через $c_i(A)$.

Шаг 1. Сначала покажем, что если $c_i(X) \neq \mathbf{0}$, то $c_i(X) = c_i(Y)$.

Предположим противное, тогда $c_i(X) \neq c_i(Y)$. Рассмотрим два случая. В каждом случае нашей целью будет выбрать матрицу $Z \in GL_n$ такую, что $X + Z \in \Omega_n$, $Y + Z \in GL_n$.

1.1: $c_i(X)$ и $c_i(Y)$ коллинеарны. В этом случае дополним $e_i = c_i(X)$ до базиса \mathbb{F}^n следующими вектор-столбцами $e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n$.

1.2: $c_i(X)$ и $c_i(Y)$ не коллинеарны. Рассмотрим произвольное число $j \neq i$ и дополним $e_i = c_i(X)$, $e_j = c_i(Y)$ до базиса \mathbb{F}^n вектор-столбцами $e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_n$.

В обоих случаях возьмем $Z(\lambda) = (\lambda e_1 \ \lambda e_2 \ \dots \ \lambda e_{i-1} \ (-c_i(X)) \ \lambda e_{i+1} \ \dots \ \lambda e_n) \in M_n$, где $\lambda \in \mathbb{F}$. Отметим, что $Z(\lambda) \in GL_n$, если $\lambda \neq 0$, поскольку столбцы $Z(\lambda)$ образуют базис \mathbb{F}^n . С другой стороны, $X + Z(\lambda) \in \Omega_n$ для всех $\lambda \in \mathbb{F}$, поскольку $c_i(X + Z(\lambda)) = c_i(X) - c_i(X) = \mathbf{0}$.

Теперь найдем такое $\lambda_0 \neq 0$, что $Y + Z(\lambda_0) \in GL_n$. Рассмотрим многочлен $\det(Y + Z(\lambda)) \in \mathbb{F}[\lambda]$. Его степень не превосходит $n - 1$, а коэффициент при λ^{n-1} равен

$$\det(e_1 \ e_2 \ \dots \ e_{i-1} \ (c_i(Y) - c_i(X)) \ e_{i+1} \ \dots \ e_n) \neq 0,$$

согласно выбору e_1, e_2, \dots, e_n . Таким образом $\det(Y + Z(\lambda))$ не является тождественно нулевым. Учитывая, что $|\mathbb{F}| > n$, мы получаем, что найдется такое $\lambda_0 \neq 0$, что $\det(Y + Z(\lambda_0)) \neq 0$.

Возьмем $Z = Z(\lambda_0)$. Тогда $Z \in GL_n$, $X + Z \in \Omega_n$, $Y + Z \in GL_n$, что противоречит (11). Таким образом, $c_i(X) = c_i(Y)$.

Шаг 2. Теперь покажем, что условие (11) инвариантно относительно элементарных преобразований строк. Иными словами, для любой матрицы $P \in GL_n$ условие (11) выполнено и для матриц XP, YP .

Действительно, пусть $XP + Z \in \Omega_n$, где $Z \in GL_n$. Рассмотрим $Z' = ZP^{-1} \in GL_n$. Имеем $XP + Z = (X + Z')P \in \Omega_n$, следовательно $X + Z' \in \Omega_n$ и, согласно (11), $Y + Z' \in \Omega_n$. Таким образом, $YP + Z = (Y + Z')P \in \Omega_n$.

Шаг 3. Согласно шагу 1 достаточно доказать, что из $c_i(X) = \mathbf{0}$ следует $c_i(Y) = \mathbf{0}$. Пусть $c_i(X) = \mathbf{0}$. Если $X = O$, то доказывать нечего. Иначе найдется

такое $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, что $c_j(X) \neq \mathbf{0}$. Согласно **шагу 1**, $c_j(X) = c_j(Y)$.

Рассмотрим такую матрицу элементарного преобразования P , что

$$XP = (c_1(X) \ c_2(X) \ \dots \ c_{i-1}(X) \ (c_i(X) + c_j(X)) \ c_{i+1}(X) \ \dots \ c_n(X)).$$

Согласно **шагу 2** условие (11) выполнено для XP, YP . Заметим, что $c_i(XP) = c_i(X) + c_j(X) = c_j(X) \neq \mathbf{0}$. Тогда, согласно **шагу 1**, $c_i(XP) = c_i(YP) = c_i(Y) + c_j(Y)$. Получаем, что $c_j(X) = c_i(Y) + c_j(Y)$. Таким образом, $c_i(Y) = \mathbf{0}$, что завершает доказательство. \square

2.4.1 Доказательство теоремы 2.1.4.

Пусть T_1, T_2 удовлетворяют условию (8) на \mathcal{Y} и существует такая матрица $D \in GL_n$, что $T_2(D) \in GL_n$. Согласно теореме 2.3.1, отображения $T_1|_{GL_n}, T_2|_{GL_n}$ стандартны (4) на GL_n . Тогда существуют такие невырожденные матрицы $P, Q \in GL_n$, что

$$T_2(A) = PAQ, \quad \text{для всех } A \in GL_n,$$

или

$$T_2(A) = PA^tQ, \quad \text{для всех } A \in GL_n.$$

Рассмотрим отображения $T'_1, T'_2: \mathcal{Y} \rightarrow M_n$, которые определены следующим образом:

$$T'_1(A) = P^{-1}T_1(A)Q^{-1}, \quad T'_2(A) = P^{-1}T_2(A)Q^{-1}, \quad \text{для всех } A \in \mathcal{Y},$$

или, соответственно,

$$T'_1(A) = P^{-1}T_1(A)^tQ^{-1}, \quad T'_2(A) = P^{-1}T_2(A)^tQ^{-1}, \quad \text{для всех } A \in \mathcal{Y}.$$

Заметим, что T'_2 тождественно на GL_n . Таким образом $T'_2(Z) = Z$ для всех $Z \in GL_n$. Пусть $X \in \mathcal{Y} \setminus \{O\}$, $Y = T'_1(X)$. Поскольку T'_1, T'_2 удовлетворяют условию (8) на \mathcal{Y} , мы получаем, что $X + Z \in \Omega_n$ влечет $T'_1(X) + T'_2(Z) = Y + Z \in \Omega_n$ для всех $Z \in GL_n$. Другими словами, X, Y удовлетворяют условию леммы 2.4.1. Поэтому мы имеем $T'_1(X) = X$ для всех ненулевых матриц $X \in \mathcal{Y}$.

Рассуждая аналогичным образом, получим, что матрицы $X \in \mathcal{Y} \setminus \{O\}$ и $Y = T_2'(X)$ тоже удовлетворяют условию леммы 2.4.1. Таким образом, мы получаем, что $T_2'(X) = X = T_1'(X)$ для всех ненулевых матриц $X \in \mathcal{Y}$, что влечет необходимое описание отображений T_1, T_2 . \square

2.4.2 Доказательство теоремы 2.1.5.

Сначала докажем, что в условиях теоремы 2.1.5, образ невырожденной матрицы невырожден.

Лемма 2.4.2. \mathbb{F}

$$\begin{array}{ccc} T_1, T_2: GL_n \rightarrow M_n & & (7) \\ GL_n, & A \in GL_n, & T_1(A), T_2(A) \in GL_n. \end{array}$$

Предположим противоположное. Пусть матрица $A \in GL_n$ такова, что $T_2(A) \notin GL_n$. Согласно лемме 2.3.2, найдется такая матрица $B \in GL_n$, что многочлен $p(\lambda) = \det(B + \lambda A)$ имеет n различных корней. Поскольку отображения $T_1, T_2: \mathcal{Y} \rightarrow M_n$ удовлетворяют условию (7) на \mathcal{Y} , мы имеем $\det(B + \lambda A) = 0$ тогда и только тогда, когда $\det(T_1(B) + \lambda T_2(A)) = 0$, для всех $\lambda \in \mathbb{F}^*$. Однако,

$$\deg_\lambda(\det(T_1(B) + \lambda T_2(A))) \leq n - 1,$$

что невозможно, поскольку корни многочлена $p(\lambda) = \det(B + \lambda A)$ в частности являются корнями $\det(T_1(B) + \lambda T_2(A))$. Полученное противоречие доказывает, что $T_2(A)$ невырождена для всех $A \in GL_n$. Поскольку пучковое условие (7) симметрично для T_1, T_2 , то же верно и для T_1 . Это завершает доказательство леммы. \square

По лемме 2.4.2, $T_2(E) \in GL_n$. Поэтому, согласно теореме 2.1.4, $T_1|_{\mathcal{Y} \setminus \{O\}} = T_2|_{\mathcal{Y} \setminus \{O\}}$ и эти отображения стандартны (4) на $\mathcal{Y} \setminus \{O\}$. Следовательно, теорема 2.1.5 доказана для \mathcal{Y} такого, что $O \notin \mathcal{Y}$.

Рассмотрим случай $O \in \mathcal{Y}$. Как говорилось выше, согласно теореме 2.1.4 существуют обратимые матрицы $P, Q \in GL_n$ такие, что $T_1(A) = T_2(A) = PAQ$ для всех матриц $A \in \mathcal{Y} \setminus \{O\}$ или $T_1(A) = T_2(A) = PA^tQ$ для всех матриц $A \in \mathcal{Y} \setminus \{O\}$.

Рассмотрим отображения $T'_1, T'_2: \mathcal{Y} \rightarrow M_n$, определенные следующим образом:

$$T'_1(A) = P^{-1}T_1(A)Q^{-1}, \quad T'_2(X) = P^{-1}T_2(A)Q^{-1}, \quad \text{для всех } A \in \mathcal{Y},$$

или, соответственно,

$$T'_1(A) = P^{-1}T_1(A)^tQ^{-1}, \quad T'_2(X) = P^{-1}T_2(A)^tQ^{-1}, \quad \text{для всех } A \in \mathcal{Y}.$$

Согласно рассуждениям выше, T'_1 и T'_2 тождественны на $\mathcal{Y} \setminus \{O\}$ и удовлетворяют пучковому условию (7) на \mathcal{Y} . Поэтому матрицы $X = T'_1(O)$ и $Y = O$ удовлетворяют условиям леммы 2.4.1 и, следовательно, $T'_1(O) = O$. Аналогично, $T'_2(O) = O$. Тогда $T_1(O) = T_2(O) = O$. Это завершает доказательство теоремы 2.1.5. \square

2.4.3 Доказательство теоремы 2.1.6.

Пусть $B = T_2^{-1}(E)$. Утверждается, что $B \in GL_n$. Предположим противное: пусть B вырождена. Рассмотрим попарно различные $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{F}^*$. Определим $A' = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $A = T_1^{-1}(A')$. Тогда каждая матрица вида $A' - a_i E = T_1(A) - a_i T_2(B)$ вырождена для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Согласно (9), $A - a_i B$ также вырождена для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда многочлен $\det(A + \lambda B) \in \mathbb{F}[\lambda]$ имеет n различных корней в \mathbb{F} . Однако, его степень $\deg_\lambda(\det(A + \lambda B)) < n$, поскольку $\det(B) = 0$. Получено противоречие.

Таким образом, B невырождена. Тогда образ некоторой невырожденной матрицы под действием T_2 невырожден. Также заметим, что T_1^{-1}, T_2^{-1} удовлетворяют условию (8) для $\mathcal{Y} = M_n$. Поэтому, согласно теореме 2.1.4, $T_1^{-1}|_{M_n \setminus \{O\}} = T_2^{-1}|_{M_n \setminus \{O\}}$ и эти отображения стандартны (4) на $M_n \setminus \{O\}$.

Рассмотрим отображения $T'_1, T'_2: \mathcal{Y} \rightarrow M_n$, определенные следующим образом:

$$T'_1(A) = P^{-1}T_1^{-1}(A)Q^{-1}, \quad T'_2(X) = P^{-1}T_2^{-1}(A)Q^{-1}, \quad \text{для всех } A \in M_n,$$

или, соответственно,

$$T'_1(A) = P^{-1}T_1^{-1}(A)^tQ^{-1}, \quad T'_2(X) = P^{-1}T_2^{-1}(A)^tQ^{-1}, \quad \text{для всех } A \in M_n.$$

Согласно доказанному выше, T'_1 и T'_2 тождественны на $M_n \setminus \{O\}$ и удовле-

творяют пучковому условию (7) на M_n . Поэтому матрицы $X = T'_1(O)$ и $Y = O$ удовлетворяют условиям леммы 2.4.1 и, следовательно, $T'_1(O) = O$. Аналогично, $T'_2(O) = O$. Тогда $T_1(O) = T_2(O) = O$. Это завершает доказательство теоремы 2.1.6. □

Результаты этой главы опубликованы в статье [34].

Эта глава посвящена описанию автоморфизмов тотального графа кольца квадратных матриц. Как было указано в разделе 1.2, автоморфизмы тотального графа — это биективные отображения множества матриц в себя, удовлетворяющие условию (2):

$$\forall A \neq B \in M_n \quad \det(A + B) = 0 \iff \det(T(A) + T(B)) = 0.$$

Мы разобьем решение этой задачи на две части:

1. в разделе 3.1 мы опишем отображения, удовлетворяющие условию выше, но уже для всех пар матриц, а не только различных;
2. затем в разделе 3.2 мы покажем, что если условие (2) выполнено для различных матриц, то оно также выполнено и для равных матриц.

Более того, у нас получится описать сразу пары отображений, что позволит получить решение даже более общей задачи, чем 1.2.1 — мы охарактеризуем автоморфизмы ориентированного тотального графа кольца матриц.

Пусть в поле \mathbb{F} есть хотя бы три элемента, а $\varphi_1, \varphi_2: M_n \rightarrow M_n$ такие сюръективные отображения, что выполнено условие

$$\forall A, B \in M_n \det(A + B) = 0 \iff \det(\varphi_1(A) + \varphi_2(B)) = 0. \quad (12)$$

Основной результат раздела 3.1 будет состоять в том, что такие отображения имеют вид

$$\varphi_1(A) = PA^TQ + R, \quad \varphi_2(A) = PA^TQ - R \quad (A \in M_n),$$

или

$$\varphi_1(A) = P(A^T)^tQ + R, \quad \varphi_2(A) = P(A^T)^tQ - R \quad (A \in M_n),$$

для некоторых матриц $R \in M_n$ и $P, Q \in GL_n$ и некоторого автоморфизма τ поля \mathbb{F} (здесь $A^\tau = [a_{ij}]^\tau = [\tau(a_{ij})]$ — матрица, полученная поэлементным применением автоморфизма τ к A .)

Этот результат позволит показать, что и в случае ориентированного графа автоморфизмы будут иметь вид, указанный в гипотезе 1.2.13. Доказательство этого факта и гипотезы 1.2.13 будет приведено в разделе 3.2

3.1

В этой главе мы будем полагать, что \mathbb{F} — произвольное поле, содержащее хотя бы 3 элемента, а также, что $n \geq 2$. Для произвольной матрицы $U \in M_n$, через $U + GL_n$ и $U + \Omega_n$ мы обозначим множества $\{U + X \mid X \in GL_n\}$ и $\{U + Y \mid Y \in \Omega_n\}$ соответственно.

Следующий результат позволяет охарактеризовать линейные отображения, переводящие пару линейно независимых векторов в пару линейно зависимых. Изначально он был получен Хавличеком и Шемрлом в статье [16, лемма 2.1], однако нам он понадобится в эквивалентной формулировке, которую мы приведем и докажем ниже. Для линейного оператора (или матрицы) \mathcal{A} , через $\ker \mathcal{A}$ и $\text{Im } \mathcal{A}$ мы обозначим его ядро и образ соответственно.

Предложение 3.1.1 ([16, Лемма 2.1]). V \mathbb{F} ,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}, \mathcal{B}: V &\rightarrow V \\ \{x, y\} \subseteq V & \quad \{Ax, By\}. \quad \mathcal{A} = 0, \quad \mathcal{B} = 0, \\ \text{Im } \mathcal{A} = \text{Im } \mathcal{B} & \end{aligned}$$

Если $\dim V \leq 1$, или $\mathcal{A} = 0$, или $\mathcal{B} = 0$, то условия леммы выполнены автоматически. Пусть $\dim V \geq 2$, и $\mathcal{A}, \mathcal{B} \neq 0$. Покажем, что $\text{Im } \mathcal{B} \subseteq \text{Im } \mathcal{A}$.

Пусть $x \in V \setminus \ker \mathcal{A}$. Взяв произвольный $y \in V \setminus \langle x \rangle$, мы получим $By \in \langle Ax \rangle$ (здесь $\langle x \rangle$ означает линейную оболочку вектора x). Действительно, т.к. Ax и By линейно зависимы и $Ax \neq 0$, найдется такое $\alpha \in \mathbb{F}$, что $By = \alpha Ax$. Покажем

также, что $\mathcal{B}x \in \langle \mathcal{A}x \rangle$. Заметим, что найдутся такие $y_1, y_2 \in V \setminus \langle x \rangle$, что $x = y_1 + y_2$. Тогда $\mathcal{B}x = \mathcal{B}y_1 + \mathcal{B}y_2 \in \langle \mathcal{A}x \rangle + \langle \mathcal{A}x \rangle = \langle \mathcal{A}x \rangle$.

Таким образом, $\text{Im } \mathcal{B} \subseteq \langle \mathcal{A}x \rangle \subseteq \text{Im } \mathcal{A}$, и $\dim(\text{Im } \mathcal{B}) = 1$. Поскольку условие симметрично относительно \mathcal{A} и \mathcal{B} , аналогичным образом получаем $\text{Im } \mathcal{A} \subseteq \text{Im } \mathcal{B}$. Отсюда следует, что $\text{Im } \mathcal{A} = \text{Im } \mathcal{B}$ и является подпространством размерности один. \square

Также нам понадобится следующее наблюдение.

Предложение 3.1.2. $A, B \in M_n$, $\text{Im } A = \text{Im } B$, $\text{Im } A^t = \text{Im } B^t$, $A = \mu B$, $\mu \in \mathbb{F}$.

. Поскольку $\text{Im } A = \text{Im } B$ и оба подпространства имеют размерность 1, матрицы можно представить в виде $A = vu^t$ и $B = vw^t$, где $v, u, w \in \mathbb{F}^n$ некоторые ненулевые вектор-столбцы. Тогда $A^t = uv^t$ и $B^t = wv^t$, и, поскольку их образы также совпадают, u, w также линейно зависимы. Отсюда $u = \mu w$ для некоторого ненулевого $\mu \in \mathbb{F}$, и, следовательно, $A = \mu B$. \square

Для $Y \in M_n$ рассмотрим множество

$$\mathcal{N}(Y) = \{S \in M_n \mid \det(S + Y) = 0\}.$$

В терминах тотального графа это множество соседей вершины Y в тотальном графе $T_n(\mathbb{F})$. Используя эту терминологию, общих соседей непустого множества $\mathcal{Y} \subseteq M_n$ обозначим через

$$\mathcal{N}(\mathcal{Y}) = \bigcap_{Y \in \mathcal{Y}} \mathcal{N}(Y).$$

Для различных $A, B \in M_n$, через $\ell(A, B)$ обозначим прямую в M_n , проходящую через A и B , т. е.,

$$\ell(A, B) = \{A + \mu(B - A) \mid \mu \in \mathbb{F}\}.$$

Лемма 3.1.3. $A, B \in M_n$,

$$X \in \mathcal{N}(\mathcal{N}(\{A, B\})).$$

$$x, y \in \mathbb{F}^n, \quad (A - X)x = (B - X)y \quad \mathbb{F}^n.$$

. Пусть $X \in \mathcal{N}(\mathcal{N}(\{A, B\}))$. По определению это означает, что

$$\det(S + X) = 0 \text{ для } S \in M_n \text{ таких, что } \det(S + A) = \det(S + B) = 0. \quad (13)$$

Предположим противное, пусть для некоторых линейно независимых векторов $x, y \in \mathbb{F}^n$ векторы $(A - X)x$ и $(B - X)y$ оказались линейно независимы. Тогда найдутся такие $z_1, \dots, z_{n-2} \in \mathbb{F}^n$ и $w_1, \dots, w_{n-2} \in \mathbb{F}^n$, что оба набора $\{x, y, z_1, \dots, z_{n-2}\}$ и $\{(A - X)x, (B - X)y, w_1, \dots, w_{n-2}\}$ являются базисами \mathbb{F}^n . Зададим матрицу $S \in M_n$ значениями на базисных векторах следующим образом: S переводит вектор x в $-Ax$, вектор y в $-By$, и z_j в $w_j - Xz_j$ для всех $j = 1, \dots, n - 2$. По построению, $\det(S + A) = \det(S + B) = 0$, что, учитывая условие (13), влечет $\det(S + X) = 0$. Теперь заметим, что матрица $S + X$ переводит x в $(X - A)x$, вектор y в $(X - B)y$, и z_j в w_j для всех $j = 1, \dots, n - 2$. Таким образом $S + X$ переводит базис \mathbb{F}^n в базис \mathbb{F}^n , что противоречит условию леммы. \square

Следствие 3.1.4.

$$A, B \in M_n, \quad X \in \mathcal{N}(\mathcal{N}(\{A, B\})) \setminus \{A, B\}, \quad \text{Im}(A - X) = \text{Im}(B - X) \quad \dim(\text{Im}(A - X)) = 1.$$

. Согласно лемме 3.1.3, если $\{x, y\} \subseteq \mathbb{F}^n$ линейно независимы, то $\{(A - X)x, (B - X)y\}$ линейно зависимы. Тогда мы можем применить предложение 3.1.1 к векторам $A - X$ и $B - X$. Поскольку $X \notin \{A, B\}$, мы получаем, что $\text{Im}(A - X) = \text{Im}(B - X)$ и имеет размерность 1. \square

Будем говорить, что матрицы $A, B \in M_n$, если $\text{rk}(A - B) = 1$. Отображение $\phi: M_n \rightarrow M_n$ сохраняет когерентность в обе стороны, если $\text{rk}(A - B) = 1 \iff \text{rk}(\phi(A) - \phi(B)) = 1$. Ниже мы приводим формулировку теоремы Хуа (см. также [30, 33, 31]) для прямоугольных матриц над полем, которая, вместе с леммой 3.1.7 является ключевой для доказательства основного результата этой секции.

Теорема 3.1.5 (Хуа, [17]).

$$n \geq 2 \quad \phi: M_n \rightarrow M_n,$$

$$P, Q \in M_n,$$

$$R \in M_n,$$

$$\tau \in \mathbb{F},$$

$$\phi(A) = PA^\tau Q + R, \quad A \in M_n,$$

$$\phi(A) = P(A^\tau)^t Q + R, \quad A \in M_n.$$

Для двух различных матриц A и B можно точно вычислить множество вторых соседей $\mathcal{N}(\mathcal{N}(\{A, B\}))$. Это будет сделано в лемме 3.1.7, которая является небольшим уточнением [16, предложения 2.2]. Следующие леммы составляют часть доказательства этого факта.

Лемма 3.1.6. $A, B \in M_n$, $\mathcal{N}(\mathcal{N}(\{A, B\})) \supseteq \ell(A, B)$.

. Нам необходимо доказать, что $\det(S + A + \mu(B - A)) = 0$ для всех $\mu \in \mathbb{F}$, и $S \in M_n$ таких, что $\det(S + A) = \det(S + B) = 0$. Представим $B - A$ в виде $B - A = UDV \in M_n$, где U и V — некоторые невырожденные матрицы, а $D \in M_n$ матрица с 1 в ячейке $(1, 1)$ и нулями во всех остальных ячейках. Пусть $S \in M_n$ такова, что $\det(S + A) = \det(S + B) = 0$. Тогда

$$\det(U^{-1}(S + A)V^{-1}) = \det(U^{-1}(S + A)V^{-1} + D) = 0. \quad (14)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \det(U^{-1}(S + A)V^{-1} + \mu D) &= \\ &= \det(U^{-1}(S + A)V^{-1}) + \mu C_{11}(U^{-1}(S + A)V^{-1}) \quad (\mu \in \mathbb{F}), \end{aligned} \quad (15)$$

где $C_{11}(W) \in \mathbb{F}$ обозначает алгебраическое дополнение элемента $(1, 1)$ матрицы $W \in M_n$. Подставив значение $\mu = 1$ в равенство (15) и используя (14), мы получим, что $C_{11}(U^{-1}(S + A)V^{-1}) = 0$. Отсюда, согласно (15) мы получаем, что $\det(U^{-1}(S + A)V^{-1} + \mu D) = 0$ для каждого $\mu \in \mathbb{F}$. Следовательно, $\det(S + A + \mu(B - A)) = 0$ для любого $\mu \in \mathbb{F}$. \square

Лемма 3.1.7. $A, B \in M_n$.

$$\mathcal{N}(\mathcal{N}(\{A, B\})) = \begin{cases} \{A, B\}, & \text{rk}(A - B) \geq 2; \\ \ell(A, B), & \text{rk}(A - B) = 1. \end{cases}$$

. Согласно определению $A, B \in \mathcal{N}(\mathcal{N}(\{A, B\}))$. Возьмем $X \in \mathcal{N}(\mathcal{N}(\{A, B\}))$, при этом $X \neq A$ и $X \neq B$. Тогда, согласно следствию 3.1.4 мы получаем, что $\text{Im}(A - X) = \text{Im}(B - X)$ и имеет размерность 1.

Сначала предположим, что $\text{rk}(A - B) \geq 2$. Согласно написанному выше, матрицы $A - X$ и $B - X$ имеют совпадающие образы размерности 1. Тогда образ их разности $A - B$ имеет размерность, не превосходящую 1. Иными словами, $\text{rk}(A - B) \leq 1$, что противоречит предположению выше. Таким образом, в этом случае $\mathcal{N}(\mathcal{N}(\{A, B\})) = \{A, B\}$.

Теперь предположим, что $\text{rk}(A - B) = 1$. Заметим, что если

$$X \in \mathcal{N}(\mathcal{N}(\{A, B\})) \setminus \{A, B\},$$

то

$$X^t \in \mathcal{N}(\mathcal{N}(\{A^t, B^t\})) \setminus \{A^t, B^t\}.$$

Тогда согласно следствию 3.1.4 мы получаем, что $\text{Im}(A^t - X^t) = \text{Im}(B^t - X^t)$ и имеет размерность 1, как и $\text{Im}(A - X) = \text{Im}(B - X)$. Применив предложение 3.1.2 к матрицам $A - X$ и $B - X$, мы получим, что $A - X = \mu(B - X)$ для некоторого $\mu \in \mathbb{F}$. Это означает, что A, B и X лежат на одной прямой. Действительно, поскольку $A \neq B$, то $\mu \neq 1$, и тогда $X = A + \mu(B - A)/(\mu - 1)$. Поэтому $X \in \ell(A, B)$. Отсюда $\mathcal{N}(\mathcal{N}(\{A, B\})) \subseteq \ell(A, B)$. Обратное включение следует из леммы 3.1.6, что завершает доказательство. \square

Также нам понадобится следующая лемма, к которой мы, для полноты картины, приведем доказательство.

Лемма 3.1.8 ([18, Лемма 1]). $X, Y \in M_n$, $A \in M_n$

$$X + A \in \Omega_n \iff Y + A \in \Omega_n \iff X = Y.$$

. Заметим, что, уменьшив каждую матрицу A на X , мы получим, что условие

$$\forall A \in M_n \text{ выполнено } X + A \in \Omega_n \implies Y + A \in \Omega_n$$

равносильно условию

$$\forall A \in M_n \text{ выполнено } A \in \Omega_n \implies Y - X + A \in \Omega_n.$$

Поэтому докажем эквивалентное утверждение: если $\forall A \in M_n$ выполнено $A \in \Omega_n \implies Z + A \in \Omega_n$, то $Z = O$.

Для любой матрицы Z найдутся такие невырожденные матрицы U и V , что UZV диагональна с единицами и нулями на диагонали. Поскольку UAV согласованно с A пробегает множество всех вырожденных и невырожденных матриц, можно считать, что

$$Z = \text{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{\text{rk } Z}, 0, 0, \dots, 0).$$

Пусть $Z \neq O$. Если Z вырождена, то достаточно рассмотреть матрицу

$$A = \text{diag}(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{\text{rk } Z}, 1, 1, \dots, 1).$$

Тогда $A \in \Omega_n$, но $Z + A \notin \Omega_n$, что противоречит условию леммы.

Если же Z невырождена, то в качестве A возьмем матричную единицу $E_{1,n}$. Тогда снова $A \in \Omega_n$, но $Z + A \notin \Omega_n$, что завершает доказательство леммы. \square

Следующий результат показывает, что если пара отображений φ_1 и φ_2 удовлетворяет условию (12), то они оба автоматически являются инъективными.

Предложение 3.1.9. $\varphi_1, \varphi_2: M_n \rightarrow M_n$, $A, B \in M_n$
(12). $\varphi_1 \quad \varphi_2$.

. Докажем, что φ_1 инъективно — доказательство для φ_2 будет аналогичным. Предположим противное, пусть существуют такие $X, Y \in M_n$, что $X \neq Y$, но $\varphi_1(X) = \varphi_1(Y)$. Для каждого $A \in M_n$ выполнено

$$\begin{aligned} \det(X + A) = 0 &\iff \det(\varphi_1(X) + \varphi_2(A)) = 0 \iff \\ &\iff \det(\varphi_1(Y) + \varphi_2(A)) = 0 \iff \det(Y + A) = 0. \end{aligned}$$

Это условие эквивалентно

$$X + A \in GL_n \iff Y + A \in GL_n.$$

Применив лемму 3.1.8 к матрицам X, Y и A , получаем $X = Y$. Это противоречие

завершает доказательство. \square

Теперь мы имеем все необходимое для доказательства основного результата. При $m = n$ он обобщает [16, теорему 1.1] с одного отображения на два φ_1 и φ_2 .

Теорема 3.1.10. $\varphi_1, \varphi_2: M_n \rightarrow M_n$,
 $A, B \in M_n$ (12).
 $R \in M_n$ $P, Q \in M_n$,

$$\varphi_1(A) = PA^TQ + R, \quad \varphi_2(A) = PA^TQ - R \quad (A \in M_n),$$

$$\varphi_1(A) = P(A^\tau)^tQ + R, \quad \varphi_2(A) = P(A^\tau)^tQ - R \quad (A \in M_n),$$

$$\tau \quad \mathbb{F}. \quad (\quad , \quad A^\tau = [a_{ij}]^\tau = [\tau(a_{ij})] \quad \tau \quad A.)$$

. Из предложения 3.1.9 следует, что φ_1 и φ_2 инъективны и, следовательно, биективны.

Пусть $A, B \in M_n$ таковы, что $\text{rk}(A - B) = 1$. Рассмотрим $X \in \mathcal{N}(\mathcal{N}(\{A, B\}))$. Мы докажем, что $\varphi_1(X) \in \mathcal{N}(\mathcal{N}(\{\varphi_1(A), \varphi_1(B)\}))$.

Пусть $S \in \mathcal{N}(\{\varphi_1(A), \varphi_1(B)\})$. Возьмем такое $U \in M_n$, что $\varphi_2(U) = S$ (это можно сделать, поскольку φ_2 сюръективно). Тогда выполнена следующая цепочка импликаций:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \det(\varphi_1(A) + S) = 0 \\ \det(\varphi_1(B) + S) = 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} \det(A + U) = 0 \\ \det(B + U) = 0 \end{cases} \implies \det(X + U) = 0 \implies \\ &\implies \det(\varphi_1(X) + S) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая условие (13), мы получаем $\varphi_1(X) \in \mathcal{N}(\mathcal{N}(\{\varphi_1(A), \varphi_1(B)\}))$.

Поскольку φ_1 инъективно, утверждение выше означает, что

$$|\mathcal{N}(\mathcal{N}(\{\varphi_1(A), \varphi_1(B)\}))| \geq |\mathcal{N}(\mathcal{N}(\{A, B\}))|.$$

Согласно лемме 3.1.7 мы получаем, что $|\mathcal{N}(\mathcal{N}(\{A, B\}))| = |\ell(A, B)| > 2$, поскольку

ку в \mathbb{F} есть хотя бы 3 элемента. Следовательно, $|\mathcal{N}(\mathcal{N}(\{\varphi_1(A), \varphi_1(B)\}))| > 2$. Снова применяя лемму 3.1.7, мы получаем $\text{rk}(\varphi_1(A) - \varphi_1(B)) = 1$.

Применив те же рассуждения к φ_1^{-1} и φ_2^{-1} , мы получаем

$$\text{rk}(A - B) = 1 \iff \text{rk}(\varphi_1(A) - \varphi_1(B)) = 1 \quad (A, B \in M_n).$$

Тем самым мы видим, что для φ_1 выполнено условие теоремы Хуа 3.1.5. Это означает, что φ_1 имеет искомый вид. Вычитая R из φ_1 , прибавляя его к φ_2 , домножая оба отображения на P^{-1} и Q^{-1} , транспонируя при необходимости и применяя τ^{-1} , мы получаем, что φ_1 является тождественным отображением. Тогда для всех $A, B \in M_n$ выполнено условие

$$A + B \text{ вырождена} \iff A + \varphi_2(B) \text{ вырождена.} \quad (16)$$

Применяя лемму 3.1.8 к $X = B$ и $Y = \varphi_2(B)$ и учитывая условие (16), мы получаем, что φ_2 также тождественно на M_n , что завершает доказательство. \square

3.2

Определение 3.2.1.

$$\begin{array}{ccc} M_n & \lambda_0 \in \mathbb{F} \setminus \{0\}. & \mathcal{T}_n(\mathbb{F}, \lambda_0) \\ M_n & \{(A, B) \mid A + \lambda_0 B & \} \\ & \lambda_0 = 1, & \mathcal{T}_n(\mathbb{F}, \lambda_0) \\ & & \mathcal{T}_n(\mathbb{F}). \end{array}$$

Эта секция посвящена описанию автоморфизмов ориентированного тотального графа $\mathcal{T}_n(\mathbb{F}, \lambda_0)$, где $\lambda_0 \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ фиксированы и $|\mathbb{F}| \geq 3$. В этой секции через T мы будем обозначать автоморфизм графа $\mathcal{T}_n(\mathbb{F}, \lambda_0)$, т. е., биективное отображение M_n в себя такое, что

$$\det(A + \lambda_0 B) = 0 \iff \det(T(A) + \lambda_0 T(B)) = 0 \quad \forall A, B \in M_n, A \neq B. \quad (17)$$

Отметим, что любой автоморфизм $\mathcal{T}_n(\mathbb{F}, 1)$ также является автоморфизмом $\mathcal{T}_n(\mathbb{F})$ и наоборот.

Утверждение 3.2.2. $T(O) = O, \quad T(\Omega_n) = \Omega_n.$

. Пусть $A \in M_n$ некоторая ненулевая матрица. Заметим, что

$$\begin{aligned} A \in \Omega_n &\Leftrightarrow 0 = \det A = \det(A + \lambda_0 \cdot O) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 = \det(T(A) + \lambda_0 \cdot T(O)) = \det T(A) \Leftrightarrow T(A) \in \Omega_n. \end{aligned}$$

Поскольку T сюръективно, мы получаем $T(\Omega_n) = \Omega_n$. □

Наша следующая задача — доказать, что если $\lambda_0 \neq -1$, то T биективно на множестве вырожденных и, соответственно, невырожденных матриц (см. следствие 3.2.7). Доказательства этого факта для случая конечного поля и бесконечного будут различны.

Начнем мы с конечного поля. В следующем предложении мы вычислим исходящие степени вершин графа $\mathcal{T}_n(\mathbb{F}, \lambda_0)$ для конечного поля \mathbb{F} и $\lambda_0 \neq -1$.

Предложение 3.2.3. $\mathbb{F}, \lambda_0 \neq -1, A \in M_n.$

$$\deg_+ A = \begin{cases} |\Omega_n|, & A \in GL_n, \\ |\Omega_n| - 1, & A \in \Omega_n. \end{cases} \quad (18)$$

$$\deg_+ A \quad A \quad \mathcal{T}_n(\mathbb{F}, \lambda_0).$$

. Ребра из вершины A графа $\mathcal{T}_n(\mathbb{F}, \lambda_0)$ ведут в точности в множество $(-A/\lambda_0 + \Omega_n) \setminus \{A\}$. Очевидно, что $|-A/\lambda_0 + \Omega_n| = |\Omega_n|$ и

$$A \in (-A/\lambda_0 + \Omega_n) \iff (\lambda_0 + 1)A \in \Omega_n \iff A \in \Omega_n.$$

Это доказывает формулу (18). □

Теперь перейдем к рассмотрению как конечного, так и бесконечного поля. Определим \mathcal{W} в $\mathcal{T}_n(\mathbb{F}, \lambda_0)$ как подмножество \mathcal{W} множества M_n , для любых двух элементов $A, B \in \mathcal{W}$ которого хоть одна из пар (A, B)

или (B, A) является ребром графа $\mathcal{T}_n(\mathbb{F}, \lambda_0)$. Следующий результат навеян [1, теоремой 1], и обобщает её на ориентированные графы. Его доказательство опирается на ту же идею.

Теорема 3.2.4.

$$\mathcal{T}_n(\mathbb{F}, \lambda_0), \quad \lambda_0 \neq -1, \quad \mathcal{W} \subseteq GL_n, \quad \mathcal{W}$$

. Пусть $X = (x_{ij})$ матрица размера n , состоящая из n^2 переменных x_{ij} . Для матрицы $A \in M_n$ обозначим через $p_A(X) = \det((A + \lambda_0 X)(\lambda_0 A + X))$, многочлен от n^2 переменных над полем \mathbb{F} , степень которого не превосходит $2n$.

Для каждой неориентированной клики \mathcal{W} в $\mathcal{T}_n(\mathbb{F}, \lambda_0)$ состоящей из невырожденных матриц $\mathcal{W} \subseteq GL_n$ мы покажем, что многочлены из множества $\mathcal{P}_{\mathcal{W}} = \{p_A(X) \mid A \in \mathcal{W}\}$ линейно независимы над \mathbb{F} . Действительно, предположим противное, т. е. что для некоторого натурального m ,

$$0 = \mu_1 p_{A_1}(X) + \mu_2 p_{A_2}(X) + \dots + \mu_m p_{A_m}(X),$$

где $A_i \in \mathcal{W}$ попарно различны $\mu_i \in \mathbb{F}$. Подставив $X = A_i$ в это равенство, мы получаем $0 = \mu_i (\lambda_0 + 1)^{2n} (\det A_i)^2$, откуда $\mu_i = 0$ для $i = 1, 2, \dots, m$.

Следовательно $\mathcal{P}_{\mathcal{W}}$ является линейно независимым множеством в конечномерном пространстве многочленов от n^2 переменных над полем \mathbb{F} , степени не превосходящей $2n$. Отсюда следует, что \mathcal{W} конечно. \square

Замечание 3.2.5. Для бесконечных полей и $\lambda_0 = -1$ теорема 3.2.4 неверна. Действительно, достаточно рассмотреть пример предложенный в [1, замечании 1], где авторы рассмотрели верхнетреугольные матрицы размера n с единицами на диагонали.

Предложение 3.2.6.

$$\mathbb{F}, \quad \mathcal{T}_n(\mathbb{F}, \lambda_0), \quad \lambda_0 \neq -1.$$

$$(I) \quad \mathcal{W} \in \mathcal{T}_n(\mathbb{F}, \lambda_0), \quad \mathcal{F}_{\mathcal{W}} \subseteq \mathcal{W}, \quad (O, W) \quad (W, O) \\ \mathcal{T}_n(\mathbb{F}, \lambda_0) \quad W \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{F}_{\mathcal{W}}.$$

$$(II) \quad \begin{array}{l} O \neq A \in M_n \\ \mathcal{W} \in \mathcal{T}_n(\mathbb{F}, \lambda_0), \\ (A, W) \quad \mathcal{T}_n(\mathbb{F}, \lambda_0). \end{array} \quad W \in \mathcal{W} \quad (W, A),$$

(I) Заметим, что, поскольку петли не разрешены, (O, W) или (W, O) могут являться ребром $\mathcal{T}_n(\mathbb{F}, \lambda_0)$ только тогда, когда W является вырожденной ненулевой матрицей. Поэтому утверждение следует из теоремы 3.2.4, если взять $\mathcal{F}_W = \mathcal{W} \cap GL_n$.

(II) Пусть $\text{rk } A = k > 0$. Тогда найдутся такие $P, Q \in GL_n$, что $A = P(E_{11} + E_{22} + \dots + E_{kk})Q$, где через E_{ij} мы обозначаем (i, j) -ую матричную единицу. Для $\mu \in \mathbb{F}$ положим

$$B_\mu = P(E_{k+1,k+1} + \dots + E_{nn} + \mu E_{1n})Q.$$

Можно непосредственно убедиться, что $\mathcal{W} = \{B_\mu \mid \mu \in \mathbb{F} \setminus \{0\}\}$ является подходящей под условие предложения клики.

□

Следствие 3.2.7. $\lambda_0 \neq -1, \quad T(GL_n) = GL_n \quad T(\Omega_n) = \Omega_n.$

. Мы разберем два случая: конечного и бесконечного поля.

1. Поле \mathbb{F} конечно. Автоморфизм T графа $\mathcal{T}_n(\mathbb{F}, \lambda_0)$ сохраняет все исходящие степени вершин, поэтому предложение 3.2.3 влечет $T(GL_n) \subseteq GL_n$ и $T(\Omega_n) \subseteq \Omega_n$. Поскольку T сюръективно, мы получаем, что $T(GL_n) = GL_n$ и $T(\Omega_n) = \Omega_n$.

2. Поле \mathbb{F} бесконечно. Учитывая предложение 3.2.2 достаточно доказать, что $T(O) = O$. Чтобы доказать это, мы используем предложение 3.2.6. Согласно пункту (II) предложения 3.2.6, если $T(O) = A \neq O$, то найдётся такая бесконечная неориентированная клика \mathcal{W} графа $\mathcal{T}_n(\mathbb{F}, \lambda_0)$, что A не имеет ни входящих, ни исходящих рёбер из множества \mathcal{W} . Тогда $T^{-1}(\mathcal{W})$ также является бесконечной неориентированной кликой графа $\mathcal{T}_n(\mathbb{F}, \lambda_0)$ с аналогичным свойством для O вместо A . Это противоречит пункту (I) предложения 3.2.6. □

Следующая теорема является основным результатом этой главы. Она полностью описывает автоморфизмы тотального графа $\mathcal{T}_n(\mathbb{F}, \lambda_0)$ над любым полем \mathbb{F} , имеющим хотя бы 3 элемента. В частности, она описывает все автоморфизмы тотального графа $\mathcal{T}_n(\mathbb{F})$. Однако предложенный метод не работает для поля $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$. Поэтому, возможно, для этого поля необходимо отдельное доказательство.

Теорема 3.2.8. \mathbb{F} $|\mathbb{F}| \geq 3$ T -

$$P, Q \in GL_n, R \in M_n \quad \mathcal{T}_n(\mathbb{F}, \lambda_0) \quad \tau \quad \mathbb{F},$$

- $\lambda_0 \neq -1,$

$$T(A) = PA^\tau Q \quad A \in M_n$$

$$T(A) = P(A^t)^\tau Q \quad A \in M_n;$$

- $\lambda_0 = -1,$

$$T(A) = PA^\tau Q + R \quad A \in M_n$$

$$T(A) = P(A^t)^\tau Q + R \quad A \in M_n.$$

. Необходимость очевидна, докажем достаточность. Пусть T биективно и удовлетворяет условию (17). Рассмотрим отображения $\varphi_1(A) = T(A)$ для $A \in M_n$ и $\varphi_2(B) = \lambda_0 T(B/\lambda_0)$ для $B \in M_n$. Тогда для всех таких A, B , что $A \neq B/\lambda_0$ выполнено

$$\begin{aligned} A + B \in \Omega_n &\iff A + \lambda_0(B/\lambda_0) \in \Omega_n \iff \\ &\iff T(A) + \lambda_0 T(B/\lambda_0) \in \Omega_n \iff \varphi_1(A) + \varphi_2(B) \in \Omega_n. \end{aligned}$$

Пусть теперь $A = B/\lambda_0$. Тогда $A+B = (1+\lambda_0)A$ и $\varphi_1(A)+\varphi_2(B) = (1+\lambda_0)T(A)$. Если же $\lambda_0 = -1$, то условие (12) очевидно выполнено для отображений φ_1 и φ_2 . Если $\lambda_0 \neq -1$, то $(1 + \lambda_0)A \in \Omega_n$ и $(1 + \lambda_0)T(A) \in \Omega_n$ эквивалентны $A \in \Omega_n$

и $T(A) \in \Omega_n$ соответственно. Согласно следствию 3.2.7, мы имеем $T(\Omega_n) = \Omega_n$. Таким образом в обоих случаях φ_1 и φ_2 биективны и удовлетворяют условию (12).

Применяя теорему 3.1.10 к φ_1 и φ_2 мы получаем, что существует такая матрица $R \in M_n$ и невырожденные матрицы $P, Q \in M_n$, что либо

$$\varphi_1(A) = PA^TQ + R, \quad \varphi_2(A) = PA^TQ - R \quad (A \in M_n),$$

либо

$$\varphi_1(A) = P(A^\tau)^tQ + R, \quad \varphi_2(A) = P(A^\tau)^tQ - R \quad (A \in M_n),$$

для некоторого автоморфизма τ поля \mathbb{F} .

Если $\lambda_0 = -1$, то $\varphi_1(A) = T(A) = PA^TQ + R$ или $P(A^\tau)^tQ + R$, что доказывает необходимое описание для T .

Теперь предположим, что $\lambda_0 \neq -1$. Поскольку $T(O) = \varphi_1(O) = R$ и $\lambda_0 T(O) = \varphi_2(O) = -R$, мы получаем, что $\lambda_0 R = -R$. Отсюда $R = O$, что завершает доказательство. \square

Ниже мы приводим некоторые примеры, подчеркивающие необходимость условий теоремы. Мы укажем эндоморфизмы $\mathcal{T}_n(\mathbb{F}, \lambda_0)$, которые не являются автоморфизмами и не удовлетворяют описанию, указанному в теореме 3.2.8.

Следующий пример показывает, что есть небиективные отображения, которые удовлетворяют только импликации слева направо в условии (17), и, соответственно, не имеют вид, указанный в теореме 3.2.8.

Пример 3.2.9. Пусть $\lambda_0 = 1$ и \mathbb{F} имеет характеристику, отличную от 2. Определим отображение \mathfrak{T}_1 на M_n следующим образом:

$$\mathfrak{T}_1(A) = \begin{cases} O, & \text{если } 1 \notin \text{spec}(A) \text{ и } A \neq -E; \\ E_{11}, & \text{если } 1 \in \text{spec}(A); \\ -E, & \text{если } A = -E. \end{cases}$$

Тогда $\det(A + B) = 0$ влечет $\det(\mathfrak{T}_1(A) + \mathfrak{T}_1(B)) = 0$, но \mathfrak{T}_1 не является биекцией и не удовлетворяет условию (17).

Следующий пример показывает, что существуют несюръективные отображения, удовлетворяющие условию (17). Это означает, что нельзя рассчитывать на автоматическую сюръективность отображения T , которое удовлетворяет условию (17).

Пример 3.2.10. Пусть $\lambda_0 = 1$ и $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Тогда можно выделить собственное подполе K поля \mathbb{C} , изоморфное \mathbb{C} , (см, например, [19, секция 6]). Пусть $\rho: \mathbb{C} \rightarrow K$ является этим изоморфизмом. Тогда отображение $\mathfrak{T}_2: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$, определенное равенством $\mathfrak{T}_2(A) = A^\rho$, удовлетворяет условию (17), но не является сюръективным.

В последних замечаниях мы отметим разницу теоремы выше и результатов, полученных в работах Хавлечика–Шемрла [16], Лима–Тана [20] и Хуанга [21].

Замечание 3.2.11. В [21, теореме 3.1], Хуанг охарактеризовал отображения φ из M_n в себя (и даже для прямоугольных матриц над телом), удовлетворяющие

$$\text{rk}(A - B) \leq k \iff \text{rk}(\varphi(A) - \varphi(B)) \leq k \quad \forall A, B \in M_n \text{ и фиксированных } k < n.$$

Его рассуждения опирались на рассмотрение графа отношения когерентности, вершинами которого являются все матрицы M_n , а ребрами соединены в точности те матрицы A, B , для которых $\text{rk}(A - B) = 1$. Впоследствии к этому графу применялась [21, теорема 2.1]. Отметим, что $\text{rk}(A - B)$ равняется расстоянию между A и B в этом графе, поэтому [21, теорема 2.1] применима.

Однако аргументы Хуанга не применимы в нашем случае. Действительно, чтобы применить методы Хуанга для описания автоморфизмов тотального графа кольца матриц, нам необходимо рассмотреть граф, множеством вершин которого является M_n , а ребрами соединены в точности те матрицы A, B , для которых $\text{rk}(A + B) = 1$. Но в этом случае $\text{rk}(A + B)$ не является расстоянием между A и B , что необходимо для применения [21, теоремы 2.1]. Поэтому задача 1.2.1 и теорема 3.2.8 не являются тривиальным следствием результатов Хуанга.

Замечание 3.2.12. Отметим, что в основных результатах статей [16, 21, 20] условия на отображения выполнены для всех пар матриц A, B , в частности для $A = B$. Однако в условии (17) необходимо требовать, чтобы A, B были различны, по-

сколько в графе $\mathcal{T}_n(\mathbb{F}, \lambda_0)$ нет петель. Поэтому случай $A = B$ требует отдельного и нетривиального рассмотрения, которому и была, по сути, посвящена эта секция.

Результаты этой главы опубликованы в работе [36].

Данная глава посвящена изучению свойств тотального и регулярного графов многочлена, которые были введены для исследования вопроса о конечности хроматического числа регулярного графа кольца матриц над полями нулевой характеристики. Поскольку тотальный и регулярный графы кольца матриц являются частным случаем соответствующих графов многочлена, многие свойства переносятся и на случай матриц. В разделе 4.1 будет исследован вопрос связности как графов матриц, так и многочленов. В разделе 4.2 будет исследовано кликовое число графов многочлена. Как говорилось в разделе 1.3, в случае бесконечности хроматического числа некоторых кривых второго порядка, бесконечным окажется и хроматическое число регулярного графа кольца матриц. Этот вопрос и другие свойства графов кривых второго порядка исследуются в разделе 4.3.

4.1

4.1.1 Связность $\Gamma_n(\mathbb{F})$

Пусть $\mathbb{F} \neq \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$. Тогда легко заметить, что $\Gamma_1(\mathbb{F})$ не связан. Действительно, две вершины $a, b \in \mathbb{F}$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $a + b = 0$, т. е. $a = -b$.

Тем не менее, для $n \neq 1$ ситуация противоположная.

Предложение 4.1.1. $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2, \quad n \neq 1, \quad \Gamma_n(\mathbb{F})$
 $\text{diam}(\Gamma_n(\mathbb{F})) = 2.$

. Пусть A и B — две различные вершины $\Gamma_n(\mathbb{F})$:

$$A = (A_1, A_2, \dots, A_n), \quad B = (B_1, B_2, \dots, B_n),$$

где $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{F}^n$ и $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathbb{F}^n$ — столбцы матриц A и B соответственно.

Если $n \geq 3$, то найдется $i \neq 1$ такое, что A_1 и B_i неколлинеарны. Поскольку A_1 и B_i линейно независимы, можно дополнить их до базиса \mathbb{F}^n векторами $C_2, \dots, C_{i-1}, C_{i+1}, \dots, C_n$ из \mathbb{F}^n . Определим матрицу

$$C = (-A_1, C_2, \dots, C_{i-1}, -B_i, C_{i+1}, \dots, C_n).$$

Тогда C невырождена и является общим соседом для A и B .

В случае $n = 2$ для $A, B \in GL_2(\mathbb{F})$ можно выбрать общего соседа из матриц

$$D = (-A_1, -B_2), \quad F = (-A_1, B_1 - B_2 - A_1),$$

поскольку матрицы $D+A, D+B, F+A, F+B$ вырождены и по крайней мере одна из матриц D, F невырождена (в противном случае, B была бы вырождена). \square

связного графа Γ называется следующая величина:

$$r(\Gamma) = \min_{v \in V} \max_{u \in V} d(v, u).$$

Утверждение 4.1.2. $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2, \quad n \neq 1, \quad r(\Gamma_n(\mathbb{F})) = 2.$

. Для произвольного связного графа Γ с $\text{diam}(\Gamma) < \infty$ выполняются следующие оценки на радиус:

$$r(\Gamma) \leq \text{diam}(\Gamma) \leq 2r(\Gamma).$$

Таким образом, по предложению 4.1.1 нам достаточно доказать, что не существует матрицы $A \in GL_n(\mathbb{F})$, смежной в $\Gamma_n(\mathbb{F})$ со всеми остальными невырожденными матрицами.

Предположим противное: пусть $A \in GL_n(\mathbb{F})$ такова, что $\det(A + X) = 0$ для любой матрицы $X \in GL_n(\mathbb{F})$. Тогда для любой невырожденной матрицы B имеем

$$0 = \det(A + X) = \det(A + X) \det(A^{-1}B) = \det(AA^{-1}B + XA^{-1}B) = \det(B + X'),$$

где матрица X' , как и матрица X , пробегает все $GL_n(\mathbb{F})$, то есть B тоже смежна со всеми остальными невырожденными матрицами.

Тем самым, любые две вершины графа $\Gamma_n(\mathbb{F})$ смежны между собой, то есть граф $\Gamma_n(\mathbb{F})$ — полный. Однако это, конечно, не так: поскольку $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$, любые две верхние унитреугольные матрицы (то есть верхнетреугольные с единицами на главной диагонали) не смежны. □

Замечание 4.1.3. Предложение 4.1.1 и утверждение 4.1.2 остаются верными и в случае $\text{char}(\mathbb{F}) = 2$. В частности, в доказательстве утверждения 4.1.2 примером несмежных матриц могут служить

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

а также составленные из этих блоков матрицы для размерностей $n > 3$.

4.1.2 Связность $T_p(\mathbb{F}^n)$ и $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$

Этот раздел посвящен установлению критерия связности тотального и регулярного графов однородного многочлена p .

Утверждение 4.1.4. $p(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$

1. $T_p(\mathbb{F}^n)$, $\dim\langle V(p) \rangle = n$.
2. $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$ $|\mathbb{F}| > 3$, $\dim\langle V(p) \rangle = n$.

1,2. Докажем утверждения от противного. Допустим, что $\dim\langle V(p) \rangle < n$. Отсюда следует, что $V(p) \subseteq L$ для некоторого линейного подпространства $L \subset \mathbb{F}^n$ размерности $m < n$. Согласно утверждению 1.3.5 **б)**, без ограничения общности можно считать, что

$$L = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n \mid x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 0\}.$$

Заметим, что смежность (как в $T_p(\mathbb{F}^n)$, так и в $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$) двух вершин $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ влечет равенство $x_i = -y_i$ для всех $i = m+1, m+2, \dots, n$. Следовательно, если $(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n) \neq \pm(y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_n)$, то x и y не связаны. Такие x и y всегда найдутся в графе $T_p(\mathbb{F}^n)$, ведь в поле \mathbb{F} не менее трех элементов.

В случае графа $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$ дополнительно необходимо, чтобы x и y не попали в $V(p)$. Для этого достаточно условия $|\mathbb{F}| > 3$. \square

Пример 4.1.5. Отметим, что граф $\Gamma_{x_1}(\mathbb{F}_3^n)$ связан (здесь \mathbb{F}_3 — поле из трех элементов).

Из доказательства утверждения 4.1.4 непосредственно вытекает

Следствие 4.1.6. $p(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ —
 \mathbb{F} . $\dim\langle V(p) \rangle < n$,

$T_p(\mathbb{F}^n)$ $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$.

Теорема 4.1.7. $p(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ —

1. $T_p(\mathbb{F}^n)$ $\iff \dim\langle V(p) \rangle = n$.
 $\text{diam}(T_p(\mathbb{F}^n)) \leq n$.

2. $|\mathbb{F}| > 2 \deg p$ (, \mathbb{F} —
 $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$ $\iff \dim\langle V(p) \rangle = n$,
 $\text{diam}(\Gamma_p(\mathbb{F}^n)) \leq 2n$.

1. Импликация « \implies » следует из утверждения 4.1.4. Докажем импликацию « \impliedby ». Поскольку $\dim\langle V(p) \rangle = n$, найдется n линейно независимых векторов $v_1, v_2, \dots, v_n \in V(p)$. Без ограничения общности можно считать, что

$$v_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), v_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, v_n = (0, 0, \dots, 1).$$

Иначе можно сделать линейную однородную замену координат: многочлен p при этом останется однородным, а граф — изоморфным исходному вследствие утверждения 1.3.5 б).

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n) \in \mathbb{F}^n$. Рассмотрим последовательность вершин:

$$\begin{aligned} w_0 &= (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = x, \\ w_1 &= ((-1)^{n-1}y_1, -x_2, -x_3, \dots, -x_{n-1}, -x_n), \\ w_2 &= ((-1)^{n-2}y_1, (-1)^{n-2}y_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n), \\ &\dots \\ w_{n-1} &= (-y_1, -y_2, -y_3, \dots, -y_{n-1}, (-1)^{n-1}x_n), \\ w_n &= (y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}, y_n) = y. \end{aligned}$$

Тогда последовательность $w_0, w_1, w_2, \dots, w_n$ задает путь от x до y длины n . Действительно, каждые две соседние вершины в этой последовательности соединены ребром: для произвольного натурального $k \leq n$ вершина w_k получена из вершины w_{k-1} домножением ее координат на -1 и заменой ее k -ой координаты на $(-1)^{n-k}y_k$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{w_k + w_{k-1}}{2} &= \frac{1}{2} \cdot \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{k-1}, (-1)^{n-k}y_k + (-1)^{k-1}x_k, 0, \dots, 0, 0) = \\ &= \frac{(-1)^{n-k}y_k + (-1)^{k-1}x_k}{2} v_k \in V(p), \end{aligned}$$

поскольку многочлен p однородный. Тем самым, $T_p^n(\mathbb{F})$ связан и $\text{diam}(T_p^n(\mathbb{F})) \leq n$.

2. Импликация « \implies » следует из утверждения 4.1.4. Докажем импликацию « \impliedby ». Поскольку $\dim\langle V(p) \rangle = n$, найдется n линейно независимых векторов $v_1, v_2, \dots, v_n \in V(p)$. Аналогично пункту **1**, без ограничения общности можно считать, что

$$v_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), v_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, v_n = (0, 0, \dots, 1).$$

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n) \in \mathbb{F}^n \setminus V(p)$ — две произвольные вершины графа $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$. Докажем, что существует набор векторов $w_0^x, w_0^y, w_1^x, w_1^y, \dots, w_n^x, w_n^y$, являющихся вершинами графа $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$ (т.е. не лежащих

в $V(p)$) и определенных при $k = 0, 1, \dots, n$ следующим образом:

$$w_k^x = (-1)^k(z_1, z_2, \dots, z_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n),$$

$$w_k^y = (-1)^k(z_1, z_2, \dots, z_k, y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_n)$$

для некоторых чисел $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n \in \mathbb{F}$. Построим этот набор индукцией по k .

База индукции: при $k = 0$ положим $w_0^x = x$, $w_0^y = y \notin V(p)$.

Индукционный переход: пусть теперь для некоторого $k \geq 0$ уже найдены z_1, \dots, z_k и $w_0^x, w_0^y, \dots, w_k^x, w_k^y \notin V(p)$. Покажем, что найдется z_{k+1} , для которого w_{k+1}^x и w_{k+1}^y не лежат в $V(p)$.

Рассмотрим прямые

$$l_x = \{(-1)^{k+1}(z_1, \dots, z_k, t, x_{k+2}, \dots, x_n) \mid t \in \mathbb{F}\},$$

$$l_y = \{(-1)^{k+1}(z_1, \dots, z_k, t, y_{k+2}, \dots, y_n) \mid t \in \mathbb{F}\}.$$

По теореме Безу, каждая из прямых l_x и l_y имеет не более чем $\deg p$ общих точек с $V(p)$. Действительно, $l_x, l_y \not\subseteq V(p)$, так как $(-w_k^x) \in l_x \setminus V(p)$, $(-w_k^y) \in l_y \setminus V(p)$ по предположению индукции и ввиду однородности p . Следовательно, поскольку $|\mathbb{F}| > 2 \deg p$, найдется такое t_0 , что

$$(-1)^{k+1}(z_1, \dots, z_k, t_0, x_{k+2}, \dots, x_n), (-1)^{k+1}(z_1, \dots, z_k, t_0, y_{k+2}, \dots, y_n) \notin V(p).$$

Возьмем $z_{k+1} = t_0$. Тогда векторы

$$w_{k+1}^x = (-1)^{k+1}(z_1, z_2, \dots, z_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n),$$

$$w_{k+1}^y = (-1)^{k+1}(z_1, z_2, \dots, z_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_n)$$

не лежат в $V(p)$, что завершает индукционный переход.

Заметим, что последовательность вершин $x = w_0^x, w_1^x, w_2^x, \dots, w_n^x$ задает путь от вершины $w_0^x = x$ до w_n^x , поскольку для любого $k = 0, 1, \dots, n-1$ вершины w_k^x

и w_{k+1}^x соединены ребром в $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$. Действительно, полусумма вершин равняется

$$\frac{w_k^x + w_{k+1}^x}{2} = \frac{(-1)^k}{2} \cdot \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_k, x_{k+1} - z_{k+1}, 0, \dots, 0) = \frac{(-1)^k (x_{k+1} - z_{k+1})}{2} v_{k+1} \in V(p).$$

Аналогично, последовательность вершин $y = w_0^y, w_1^y, w_2^y, \dots, w_n^y$ задает путь от вершины $w_0^y = y$ до w_n^y . Тогда путь от x до y задается последовательностью из $2n + 1$ вершин: $x = w_0^x, w_1^x, \dots, w_n^x = w_n^y, w_{n-1}^y, \dots, w_1^y, w_0^y = y$, — что доказывает связность и оценку на диаметр. \square

Следствие 4.1.8. $p(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ -
 $V(p) \neq \{0\}$. :

1. $T_p(\mathbb{F}^n)$
 $\dim\langle V(p) \rangle + 1$.
2. $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$
 $2 \dim\langle V(p) \rangle$. $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$ -
 $\dim\langle V(p) \rangle + 1$.

. Пусть $\dim\langle V(p) \rangle = m > 0$. Согласно утверждению 1.3.5 б), с точностью до замены координат можно считать, что

$$v_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), v_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, v_m = (0, 0, \dots, 0, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m}) \in V(p).$$

Тогда

$$\langle V(p) \rangle = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n \mid x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 0\}.$$

Из доказательства утверждения 4.1.4 следует, что две вершины $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ могут быть связаны (как в $T_p(\mathbb{F}^n)$, так и в $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$), только если

$$(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n) = \pm(y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_n).$$

Покажем, что в этом случае они связаны.

Если $(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0) = (y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_n)$, то x, y лежат в $\langle V(p) \rangle$. Тогда задача сводится к рассмотрению одного из графов $T_{p'}(\mathbb{F}^m)$ или

$\Gamma_{p'}(\mathbb{F}^m)$, где

$$p'(x_1, x_2, \dots, x_m) = p(x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0),$$

и оценка для этой компоненты связности следует из теоремы 4.1.7.

Пусть теперь

$$(0, 0, \dots, 0) \neq (x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n) = (-1)^t (y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_n), \text{ где } t = 0 \text{ или } 1.$$

Рассмотрим последовательность

$$w_0 = (x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = x,$$

$$w_1 = ((-1)^{t+1} y_1, -x_2, -x_3, \dots, -x_{m-1}, -x_m, -x_{m+1}, \dots, -x_n),$$

$$w_2 = ((-1)^{t+2} y_1, (-1)^{t+2} y_2, x_3, \dots, x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n),$$

...

$$w_{m-1} = ((-1)^{t+m-1} y_1, (-1)^{t+m-1} y_2, \dots, (-1)^{t+m-1} y_{m-1}, (-1)^{m-1} x_m, (-1)^{m-1} x_{m+1}, \dots, (-1)^{m-1} x_n),$$

$$w_m = ((-1)^{t+m} y_1, (-1)^{t+m} y_2, \dots, (-1)^{t+m} y_m, (-1)^m x_{m+1}, \dots, (-1)^m x_n) = (-1)^{t+m} y.$$

Все члены последовательности являются вершинами как графа $T_p(\mathbb{F}^n)$, так и $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$, поскольку

$$(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n) \neq (0, 0, \dots, 0).$$

Кроме того, каждые две подряд идущие вершины этой последовательности являются соседними в графах $T_p(\mathbb{F}^n)$ и $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$ (аналогично пункту **1** теоремы 4.1.7). Тем самым, эта последовательность задает путь от вершины x до вершины $(-1)^{m+t} y$ длины m . В комбинации с тем, что y и $-y$ соединены ребром (т.к. многочлен p — однородный), этот факт доказывает, что x и y соединены путем длины не превосходящей $m + 1$. А значит, диаметр компоненты связности вершины x в этом случае не превосходит $m + 1$ как в $T_p(\mathbb{F}^n)$, так и в $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$. □

Пример 4.1.9. Пусть $q(x) = q(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$. Тогда оценка теоремы 4.1.7 для диаметра тотального графа $T_p(\mathbb{R}^n)$ достигается на многочлене

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = (q(x) - x_1^2) \cdot (q(x) - x_2^2) \cdot \dots \cdot (q(x) - x_n^2),$$

задающем координатные прямые в \mathbb{R}^n .

. Докажем, что расстояние в графе $T_p(\mathbb{R}^n)$ от точки $(0, 0, \dots, 0)$ до точки $(1, 1, \dots, 1)$ не меньше n . Действительно, поскольку многочлен $p(x)$ задает координатные прямые, соседними в графе $T_p(\mathbb{R}^n)$ могут быть только те точки, у которых количество нулевых координат отличается не более чем на одну. Но тогда все соседи точки $(0, 0, \dots, 0)$ имеют не более одной ненулевой координаты, их соседи имеют не более двух ненулевых координат и т.д. Таким образом, точка, находящаяся на расстоянии m от $(0, 0, \dots, 0)$ (в графе $T_p(\mathbb{R}^n)$), имеет не более m ненулевых координат. Следовательно, расстояние от $(0, 0, \dots, 0)$ до $(1, 1, \dots, 1)$ не меньше n . Значит, $\text{diam}(T_p(\mathbb{R}^n)) = n$. \square

4.2

В этом разделе мы исследуем свойства кликовых чисел тотального и регулярного графов многочлена. Заметим, что кликовое число регулярного графа произвольного множества может быть бесконечным. Действительно, достаточно рассмотреть внутренность единичного круга в \mathbb{R}^2 : $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Тогда кликой в графе $\Gamma_A(\mathbb{R}^2)$ будет единичная окружность $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Однако оказывается, что кликовое число регулярного графа многочлена всегда конечно — этот факт доказан Максаевым в работе [36, теорема 4.2.], поэтому мы приведем только его формулировку.

Теорема 4.2.1. $p(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ -
 $k \geq 0. \quad \omega(\Gamma_p(\mathbb{F}^n))$
 $\omega(\Gamma_p(\mathbb{F}^n)) \leq \binom{n+k}{k}.$

Отметим, что для тотального графа утверждение теоремы 4.2.1 неверно: клику может образовывать подмножество $V(p)$ (см. пример 4.2.6). В связи с этим, введем следующее обозначение.

Определение 4.2.2. $p(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$.
 $N_p(\mathbb{F}^n) \quad T_p(\mathbb{F}^n), \quad V(p).$

Утверждение 4.2.3. $p(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

$$\omega(T_p(\mathbb{F}^n)) < \infty \iff \omega(N_p(\mathbb{F}^n)) < \infty,$$

$$\omega(T_p(\mathbb{F}^n)) \leq \omega(\Gamma_p(\mathbb{F}^n)) + \omega(N_p(\mathbb{F}^n)).$$

. Необходимость очевидна: кликовое число подграфа не превосходит кликового числа всего графа. Докажем достаточность.

Пусть K — вершины произвольной клики в $T_p(\mathbb{F}^n)$. Тогда $K = K_\Gamma \cup K_N$, где $K_\Gamma \subseteq \mathbb{F}^n \setminus V(p)$, $K_N \subseteq V(p)$. По теореме 4.2.1, $|K_\Gamma| \leq \omega(\Gamma_p(\mathbb{F}^n)) < \infty$, $|K_N| \leq \omega(N_p(\mathbb{F}^n)) < \infty$, отсюда вытекает требуемое. \square

Таким образом, для исследования конечности кликового числа графа $T_p(\mathbb{F}^n)$ необходимо задаться аналогичным вопросом для $N_p(\mathbb{F}^n)$. Далее мы ответим на этот вопрос для многочленов от двух переменных.

Определение 4.2.4. Пусть $p(x, y) \in \mathbb{F}[x, y]$ и $l(x, y) \in \mathbb{F}[x, y]$ — многочлены первой степени, $V(p)$ и $V(l)$ — прямые в \mathbb{F}^2 .

Замечание 4.2.5. Если $l(x, y) \in \mathbb{F}[x, y]$ — многочлен первой степени и $|\mathbb{F}| = \infty$ (и даже если $|\mathbb{F}| > \deg p$), то условие делимости $p(x, y)$ на $l(x, y)$ (т. е. условие того, что $V(p)$ содержит прямую) эквивалентно тому, что $V(p) \subseteq V(l)$.

Пример 4.2.6. Если $V(p)$ содержит прямую $l(x, y) = 0$, то над бесконечным полем \mathbb{F} выполнено $\omega(T_p(\mathbb{F}^2)) = \omega(N_p(\mathbb{F}^2)) = \infty$, поскольку клику образует произвольное подмножество этой прямой.

Широко известна теорема Безу о числе пересечения точек двух алгебраических кривых (см. например, [7], [8]). Нам потребуется эта теорема в следующей форме:

Теорема 4.2.7. Пусть $p(x, y), q(x, y) \in \mathbb{F}[x, y]$ — многочлены m -й и n -й степени, $V(p)$ и $V(q)$ — не совпадающие прямые в \mathbb{F}^2 . Тогда $|V(p) \cap V(q)| \leq mn$.

Рассмотрим преобразование $H_k^C: \mathbb{F}[x, y] \rightarrow \mathbb{F}[x, y]$, где $C = (c_x, c_y) \in \mathbb{F}^2$ и $k \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, определенное для произвольного многочлена $p(x, y)$ следующим образом:

$$H_k^C(p)(x, y) = p(k(x - c_x) + c_x, k(y - c_y) + c_y). \quad (*)$$

Замечание 4.2.8. 1. Формула (*) означает, что $V(p)$ есть образ $V(H_k^C(p))$ при гомотетии с центром в точке C и коэффициентом k .

2. $\deg p = \deg H_k^C(p)$.

3. $H_k^C \circ H_{1/k}^C = id$. Таким образом, H_k^C биективно.

4. Если $p(x, y)$ — неприводимый над \mathbb{F} многочлен, то многочлен $H_k^C(p)$ также неприводим над \mathbb{F} .

Теорема 4.2.9. $p(x, y) \in \mathbb{F}[x, y]$, $V(p) \neq \emptyset$, \mathbb{F} — поле, $\text{char}(\mathbb{F}) = 0$ или $\text{char}(\mathbb{F}) > \deg p$.
 $\omega(N_p(\mathbb{F}^2)) \leq (\deg p)^2$.

Учитывая, что для многочлена $p(x, y)$ с $V(p) = \emptyset$ утверждение теоремы верно, далее будем считать, что $V(p) \neq \emptyset$.

Пусть $p(x, y) = q_1^{\alpha_1}(x, y) \cdot q_2^{\alpha_2}(x, y) \cdot \dots \cdot q_k^{\alpha_k}(x, y)$ — разложение многочлена $p(x, y)$ на неприводимые множители. Не умаляя общности, можно считать, что $V(q_i) \neq \emptyset$ для каждого i , иначе можно рассмотреть многочлен $p'(x, y) = \frac{p(x, y)}{q_i^{\alpha_i}(x, y)}$ меньшей степени, однако $V(p) = V(p')$. Более того, по аналогичным соображениям можно считать, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 1$.

Докажем теорему от противного: предположим, что в графе $N_p(\mathbb{F}^2)$ существует (конечная) клика A мощности $|A| = N > (\deg p)^2$. Будем считать, что $A = \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$. Для каждой точки $A_i = (x_i, y_i) \in A$ определим многочлен

$$p_{A_i}(x, y) = H_2^{A_i}(p)(x, y) = p(2x - x_i, 2y - y_i).$$

Согласно замечанию выше, $V(p_{A_i})$ есть образ множества $V(p)$ при гомотетии с центром A_i и коэффициентом $1/2$. Следовательно, середина каждого из отрезков $[A_i, A_j]$ принадлежит множеству $V(p_{A_i})$ для всех $j = 1, 2, \dots, N$. Значит, $|V(p_{A_i}) \cap V(p)| \geq N > (\deg p)^2$. По теореме 4.2.7, многочлены p и p_{A_i} имеют общий неприводимый множитель, скажем, q_{r_i} , где $r_i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Так как $r_i \in \{1, 2, \dots, k\}$ для всех $i = 1, 2, \dots, N$, по принципу Дирихле мы заключаем, что по крайней мере N/k из чисел r_1, r_2, \dots, r_N одинаковы. Тем самым, существует неприводимый делитель $q(x, y)$ многочлена $p(x, y)$ такой, что $q = q_{r_i}$ для хотя бы N/k различных значений i . Поскольку q — неприводимый делитель p_{A_i} , применяя преобразование $H_{1/2}^{A_i}$, получаем: $H_{1/2}^{A_i}(q)$ — неприводимый делитель $H_{1/2}^{A_i}(p_{A_i}) = p$. Ясно, что $N/k > (\deg p)^2/k \geq k$. Тогда, вновь по принципу Дирихле,

существуют две различные точки $A_s, A_t \in A$ такие, что $H_{1/2}^{A_s}(q) = H_{1/2}^{A_t}(q)$ (равенство выполнено с учетом того, что старшие члены в лексикографическом порядке и коэффициенты при них у этих многочленов равны). Значит, $H_2^{A_t}(H_{1/2}^{A_s}(q)) = q$.

Нетрудно убедиться в том, что

$$H_2^{A_t}(H_{1/2}^{A_s}(q))(x, y) = q\left(x + \frac{x_s - x_t}{2}, y + \frac{y_s - y_t}{2}\right).$$

Таким образом, $q(x, y) = q(x + \frac{1}{2}(x_s - x_t), y + \frac{1}{2}(y_s - y_t))$.

Рассмотрим произвольную точку $R \in V(q)$ (напомним, что $V(q) \neq \emptyset$) и обозначим $v = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_t A_s} = \frac{1}{2}(x_s - x_t, y_s - y_t)$. Поскольку $\text{char}(\mathbb{F}) = 0$ или $\text{char}(\mathbb{F}) > \deg p$, точки $R, R + v, R + 2v, \dots, R + \deg(p) \cdot v$ — попарно различные точки множества $V(q)$. Следовательно, $V(q)$ пересекает прямую $\{R + t \cdot v \mid t \in \mathbb{F}\}$ по меньшей мере в $\deg p + 1$ различных точках. Вновь применяя теорему 4.2.7, получаем, что q делится на некоторый линейный многочлен (и даже равен ему, поскольку q неприводим), но тогда $V(p)$ содержит прямую. Противоречие. Значит, $\omega(N_p(\mathbb{F}^2)) \leq (\deg p)^2$. \square

Следствие 4.2.10.

$$\omega(T_p(\mathbb{F}^2)) \leq \begin{cases} p(x, y) \in \mathbb{F}[x, y] & , & V(p) \\ \mathbb{F} & , & \text{char}(\mathbb{F}) = 0 \\ & , & \text{char}(\mathbb{F}) > \deg p. \end{cases}$$

$$\omega(T_p(\mathbb{F}^2)) \leq \frac{3(\deg p)^2 + 3 \deg p + 2}{2}.$$

. Действительно, из теорем 4.2.1, 4.2.9 и утверждения 4.2.3 немедленно вытекает, что

$$\begin{aligned} \omega(T_p(\mathbb{F}^2)) &\leq \omega(N_p(\mathbb{F}^2)) + \omega(\Gamma_p(\mathbb{F}^2)) \leq \\ &\leq (\deg p)^2 + \frac{(\deg p + 1)(\deg p + 2)}{2} = \frac{3(\deg p)^2 + 3 \deg p + 2}{2}. \end{aligned}$$

\square

Если $p(x, y)$ — неприводимый многочлен, то оказывается, что степень каждой вершины графа $N_p(\mathbb{F}^2)$ ограничена сверху числом $(\deg p)^2$, и в этом случае мы

получаем более сильное, чем теорема 4.2.9, утверждение.

Утверждение 4.2.11. $p(x, y) \in \mathbb{F}[x, y]$ -
 $\deg p > 1 \quad \text{char}(\mathbb{F}) = 0. \quad \Delta(N_p(\mathbb{F}^2)) \leq (\deg p)^2.$

. Предположим противное: пусть некоторая точка $C_0 = (x_0, y_0) \in V(p)$ смежна в $N_p(\mathbb{F}^2)$ с точками C_1, C_2, \dots, C_N , где $N > (\deg p)^2$. Рассмотрим многочлен

$$q(x, y) = H_2^{C_0}(p)(x, y) = p(2x - x_0, 2y - y_0).$$

Согласно замечанию выше, $V(q)$ есть образ множества $V(p)$ при гомотетии с центром C_0 и коэффициентом $1/2$, а также q неприводим, ввиду неприводимости p . Следовательно, середина каждого из отрезков $[C_0, C_j]$ принадлежит множеству $V(q)$ для всех $j = 1, 2, \dots, N$. Значит, $|V(q) \cap V(p)| \geq N > (\deg p)^2$. По теореме 4.2.7, неприводимые многочлены p и q имеют общий неприводимый множитель. Тогда $p(x, y) = \alpha q(x, y)$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Таким образом,

$$p(x, y) = \alpha \cdot p(2x - x_0, 2y - y_0). \quad (**)$$

Пусть $C_1 = (x_1, y_1) \in V(p)$. Докажем по индукции, что точки

$$D_k = (x_0 + 2^k(x_1 - x_0), y_0 + 2^k(y_1 - y_0)) \in V(p)$$

при любом целом $k \geq 0$. Ясно, что $D_0 = C_1$, поэтому база индукции верна. Пусть $D_k \in V(p)$. Подставив D_k в равенство (**), получаем:

$$0 = p(x_0 + 2^k(x_1 - x_0), y_0 + 2^k(y_1 - y_0)) = \alpha \cdot p(x_0 + 2^{k+1}(x_1 - x_0), y_0 + 2^{k+1}(y_1 - y_0)),$$

откуда $D_{k+1} \in V(p)$, что и требовалось.

Следовательно, прямая $\{(x_0 + t(x_1 - x_0), y_0 + t(y_1 - y_0)) \mid t \in \mathbb{F}\}$ пересекается с $V(p)$ в бесконечном числе точек. Вновь применяя теорему 4.2.7, получаем, что $p(x, y)$ делится на многочлен первой степени, что невозможно, поскольку $p(x, y)$ неприводим и $\deg p > 1$. Противоречие. \square

4.3

Хроматическое число регулярного графа многочлена первой степени всегда конечно, как показывает утверждение 1.3.8. Однако вопрос 1.3.11 оказывается сложным даже для многочленов второй степени от двух переменных — кривых второго порядка. Как известно, вещественное уравнение каждой из невырожденных непустых кривых второго порядка аффинно эквивалентно уравнению окружности ($x^2 + y^2 = 1$), параболы ($y = x^2$) или гиперболы ($xy = 1$). Поэтому, согласно утверждению 1.3.5 б), имеет смысл рассмотреть соответствующие регулярные графы.

Рассмотрение регулярных графов кривых второго порядка также мотивировано изучением регулярного графа вещественного конуса $x^2 + y^2 = z^2$: конечно или бесконечно его хроматическое число? Чтобы пролить свет на этот вопрос, мы рассмотрим конические сечения: окружность, параболу и гиперболу. Если хроматическое число хотя бы одного из этих графов бесконечно, то бесконечно и хроматическое число регулярного графа конуса. Оказывается, что это повлечет и бесконечность хроматического числа регулярного графа кольца квадратных матриц (см. предложения 4.3.1, 4.3.4, 4.3.9).

4.3.1 Граф окружности $x^2 + y^2 = 1$

Предложение 4.3.1. $\chi(\Gamma_{x^2+y^2-1}(\mathbb{F}^2)) = \chi(\Gamma_n(\mathbb{F}))$, $n \geq 3$.

. Рассмотрим матрицу $M(x, y) \in M_n(\mathbb{F})$, где $n \geq 3$:

$$M(x, y) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & x & 1 & O \\ y & 1 & x & O \\ 1 & y & 0 & O \\ \hline O & & & E_{n-3} \end{array} \right),$$

здесь O — матрица из одних нулей, а E_{n-3} — единичная матрица (их размеры восстанавливаются из контекста). Тогда $\det M(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

Тем самым, функция $(x, y) \mapsto M(x, y)$ инъективно отображает вершины графа $\Gamma_{x^2+y^2-1}(\mathbb{F}^2)$ в вершины графа $\Gamma_n(\mathbb{F})$. Предложение будет доказано, если мы покажем, что это отображение — гомоморфизм графов (сохраняет смежность вершин). Действительно, пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — смежные вершины в $\Gamma_{x^2+y^2-1}(\mathbb{F}^2)$, т. е. $(\frac{x_1+x_2}{2})^2 + (\frac{y_1+y_2}{2})^2 = 1$. Но тогда

$$\begin{aligned} \det(M(x_1, y_1) + M(x_2, y_2)) &= 2^{n-3} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & x_1 + x_2 & 2 \\ y_1 + y_2 & 2 & x_1 + x_2 \\ 2 & y_1 + y_2 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= 2^{n-3} \cdot (2(x_1 + x_2)^2 + 2(y_1 + y_2)^2 - 8) = 0, \end{aligned}$$

а значит, $M(x_1, y_1)$ и $M(x_2, y_2)$ смежны в $\Gamma_n(\mathbb{F})$. □

Обозначим через G_0 граф $\Gamma_{x^2+y^2-1}(\mathbb{R}^2)$ и через ω — единичную окружность $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$.

Утверждение 4.3.2. G_0 :

1. $\Delta(G_0) = \delta(G_0) = \infty$;
2. G_0 , $K_{2,3}$;
3. $\omega(G_0) = 4$;
4. G_0 ;
5. $\text{diam}(G_0) = \infty$ (, $\text{diam}(G_0) > k$ - k);
6. T G_0 .

. 1. Соседями произвольной вершины $a \in V(G_0)$ являются точки окружности, гомотетичной ω относительно точки a с коэффициентом 2 (не принадлежащие ω). Будем обозначать ее через ω_a (ее центр расположен в точке $-a$, а радиус равен 2).

2. Докажем утверждение от противного. Пусть $K_{2,3} \subset G_0$ и его вершины разбиваются на две доли: $V(K_{2,3}) = \{a_1, a_2\} \cup \{b_1, b_2, b_3\}$. Согласно пункту 1, множествами соседей точек a_1, a_2 являются две окружности ω_{a_1} и ω_{a_2} радиуса 2 (быть может, за исключением одной или двух точек). Причем, поскольку вершины b_1, b_2, b_3 являются соседями каждой из точек a_1, a_2 , окружности ω_{a_1} и ω_{a_2} пересекаются не менее чем в трех точках. Это означает, что они совпадают. Но тогда совпадают и точки a_1, a_2 , противоречие.

3. Ясно, что $\omega(G_0) < 5$ по пункту 2, т. к. K_5 содержит $K_{2,3}$ в качестве подграфа. Однако есть бесконечно много клик из 4 элементов: для любых трех точек окружности ω кликой будет являться треугольник, середины сторон которого — данные точки, и его ортоцентр (тогда ω будет его окружностью Эйлера). Например, подойдет множество

$$\{(1.6, 1.8), (-1.6, 0.2), (0.4, -1.8), (-0.4, -0.2)\}.$$

4. Рассмотрим вершину a графа G_0 такую, что $\|a\|_2 > 5$ (здесь и ниже мы обозначаем через $\|a\|_2$ евклидово расстояние от точки a до начала координат). Как отмечено в пункте 1, соседями точки a являются точки окружности ω_a радиуса 2. Тогда соседями всех точек на окружности ω_a являются элементы множества $\omega'_a = \{b \in \mathbb{R}^2 \setminus \omega \mid b \in \omega_c \text{ для некоторого } c \in \omega_a\}$. Нетрудно понять, что ω'_a — замкнутый круг радиуса 4 с центром в точке a , т. к. для любого $c \in \omega_a$ выполнено $\omega_c \cap \omega = \emptyset$. Следовательно, все точки в круге радиуса 4 с центром в точке a связаны с a (и, значит, друг с другом). Тем самым, точки в пересекающихся кругах такого вида тоже связаны. Поскольку кругами радиуса 4 с центрами на расстоянии не менее 5 от нуля можно покрыть всю плоскость (за исключением точек внутри ω), все точки вне окружности ω связаны. А поскольку любая точка внутри ω имеет соседа вне ω , то связан и весь граф G_0 .

5. Заметим, что для произвольной вершины a расстояние (на евклидовой плоскости) от точки 0 до соседей точки a ограничено: $\sup \{\|x\|_2 \mid x \in \omega_a\} \leq \|a\|_2 + 2$. Поэтому расстояние (в графе G_0) от точки $(0, 0)$ до точки $(2n, 2n)$ не меньше n .

6. Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что если произвольный конечный граф H является подграфом G_0 и $h \in V(H)$, то к вер-

шине h можно добавить висячую вершину так, чтобы полученный граф H' остался подграфом G_0 . Действительно, количество общих точек у ω_h и множества $V(H) \cup \{\omega_a \mid a \in V(H - h)\} \cup \omega$ конечно. Следовательно, на ω_h найдется точка, не являющаяся вершиной H и не смежная в G_0 ни одной из вершин H , кроме h , что и требовалось. \square

Гипотеза 4.3.3.

$$\chi(G_0) \quad .$$

4.3.2 Граф параболы $y = x^2$

Предложение 4.3.4.

$$\chi(\Gamma_{x^2-y}(\mathbb{F}^2)) \quad , \quad \chi(\Gamma_n(\mathbb{F}))$$

$$n \geq 2.$$

. Рассмотрим матрицу $M(x, y) \in M_n(\mathbb{F})$, где $n \geq 2$:

$$M(x, y) = \left(\begin{array}{cc|c} x & 1 & \\ y & x & O \\ \hline O & & E_{n-2} \end{array} \right),$$

здесь O — матрица из одних нулей, а E_{n-2} — единичная матрица (их размеры восстанавливаются из контекста). Тогда $\det M(x, y) = x^2 - y$.

Тем самым, функция $(x, y) \mapsto M(x, y)$ инъективно отображает вершины графа $\Gamma_{x^2-y}(\mathbb{F}^2)$ в вершины графа $\Gamma_n(\mathbb{F})$. Покажем, что это отображение — гомоморфизм графов (сохраняет смежность вершин). Действительно, пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — смежные вершины в $\Gamma_{x^2-y}(\mathbb{F}^2)$, т. е. $(\frac{x_1+x_2}{2})^2 = \frac{y_1+y_2}{2}$. Но тогда

$$\begin{aligned} \det(M(x_1, y_1) + M(x_2, y_2)) &= 2^{n-2} \cdot \det \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & 2 \\ y_1 + y_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \\ &= 2^{n-2} \cdot ((x_1 + x_2)^2 - 2(y_1 + y_2)) = 0, \end{aligned}$$

а значит, $M(x_1, y_1)$ и $M(x_2, y_2)$ смежны в $\Gamma_n(\mathbb{F})$. \square

Предложение 4.3.5.

$$N_{x^2-y}(\mathbb{F}) \quad (\quad . \quad 4.2.2)$$

. Пусть две вершины графа $N_{x^2-y}(\mathbb{F})$ с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) связаны. Тогда выполнено следующее

$$\frac{(x_1 + x_2)^2}{4} = \frac{y_1 + y_2}{2} \implies (x_1 - x_2)^2 = 0 \text{ (т.к. } x_1^2 = y_1, x_2^2 = y_2\text{)}.$$

Но это возможно только когда $x_1 = x_2$, что означает совпадение исходных вершин. □

Следствие 4.3.6. $\chi(T_{x^2-y}(\mathbb{F}^2)) = \chi(\Gamma_n(\mathbb{F}))$
 $n \geq 2.$

. Нетрудно заметить, что если $\chi(\Gamma_{x^2-y}(\mathbb{F}^2))$ конечно, то

$$\chi(\Gamma_{x^2-y}(\mathbb{F}^2)) \leq \chi(T_{x^2-y}(\mathbb{F}^2)) \leq \chi(\Gamma_{x^2-y}(\mathbb{F}^2)) + 1.$$

Действительно, если дана правильная раскраска графа $\Gamma_{x^2-y}(\mathbb{F}^2)$, то, покрасив все вершины графа $N_{x^2-y}(\mathbb{F}^2)$ в дополнительный цвет, мы получим правильную раскраску тотального графа $T_{x^2-y}(\mathbb{F}^2)$. Тогда если $\chi(T_{x^2-y}(\mathbb{F}^2))$ бесконечно, то таково и $\chi(\Gamma_{x^2-y}(\mathbb{F}^2))$, а значит, по предложению 4.3.4, $\chi(\Gamma_n(\mathbb{F}))$ бесконечно. □

Обозначим через G_1 граф $T_{x^2-y}(\mathbb{R}^2)$ и через P — стандартную параболу $\{(x, y) \mid x^2 = y\} \subset \mathbb{R}^2$.

Утверждение 4.3.7. G_1 :

1. $\Delta(G_1) = \delta(G_1) = \infty$;

2. G_1 C_4 4 ;

3. $\omega(G_1) = 3$;

4. $u, v \in V(G_1)$, $u \neq v$
 G_1 (. . $d(u, v) \leq 2$);

5. G_1 $\text{diam}(G_1) = 3$;

6. T G_1 .

1. Соседями произвольной вершины $a = (a_x, a_y) \in V(G_1)$ являются все точки параболы (за исключением самой точки a , если $a \in P$), гомотетичной P относительно точки a с коэффициентом 2. Будем обозначать ее через P_a (ее вершина расположена в точке $-a$, и ее уравнение таково: $\frac{(x+a_x)^2}{2} = y + a_y$).

2. Предположим противное: пусть цикл C_4 содержится в графе G_1 и

$$V(C_4) = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}, \quad E(C_4) = \{\{c_1, c_2\}, \{c_2, c_3\}, \{c_3, c_4\}, \{c_4, c_1\}\}.$$

Согласно пункту 1, множествами соседей точек c_1 и c_3 являются параболы P_{c_1} и P_{c_3} , гомотетичные P с коэффициентом 2. Причем эти параболы должны пересекаться в точках c_2 и c_4 , поскольку эти вершины соединены с c_1 и c_3 . Но из указанного в пункте 1 вида уравнений, задающих P_{c_1} и P_{c_3} , видно, что эти параболы пересекаются хотя бы в двух различных точках только тогда, когда совпадают. А значит, совпадают и точки c_1 и c_3 , что влечет противоречие.

3. Ясно, что $\omega(G_1) < 4$ по пункту 2, т. к. K_4 содержит C_4 в качестве подграфа. Однако есть бесконечно много клик из 3 элементов: для любых двух смежных вершин $a, b \in V(G_1)$ с разными абсциссами рассмотрим точку c — пересечение парабол P_a и P_b (из уравнения в пункте 1 ясно, что точка c существует и единственна). Тогда, если $c \notin P$, точки a, b, c будут образовывать клику. Например, подойдет множество $\{(0, 1), (2, 1), (-1, -0.5)\}$.

4. Как уже было отмечено, для произвольных вершин $u = (u_x, u_y), v = (v_x, v_y)$ с $u_x \neq v_x$ параболы P_u и P_v пересекаются (быть может, в точке u или v). Это означает, что эти вершины смежны или у них имеется общий сосед.

5. Рассмотрим $u, v \in V(G_1)$, не соединенные ребром. Согласно пункту 4, если их абсциссы различны, то они имеют общего соседа, то есть $d(u, v) = 2$.

Если же их абсциссы совпали, то $P_u \cap P_v = \emptyset$, что означает $d(u, v) > 2$. Тем не менее, всегда можно выбрать такую точку $w \in P_u$, что её абсцисса будет отличаться от абсциссы v . По пункту 4, v и w имеют общего соседа, поэтому $d(u, v) = 3$.

6. Аналогично пункту 6 утверждения 4.3.2, достаточно показать, что если произвольный конечный граф H является подграфом G_1 и $h \in V(H)$, то к вершине h можно добавить висячую вершину так, чтобы полученный граф H' остался подграфом G_1 . Действительно, количество общих точек у P_h и множества

$V(H) \cup \{P_a \mid a \in V(H - h)\}$ конечно. Следовательно, на P_h найдется точка, не являющаяся вершиной H и не смежная в G_1 ни с одной из вершин H , кроме h , что и требовалось. \square

Гипотеза 4.3.8.

$$\chi(G_1)$$

4.3.3 Граф гиперболы $xy = 1$

Предложение 4.3.9.

$$\chi(\Gamma_{xy-1}(\mathbb{F}^2))$$

$$\chi(\Gamma_n(\mathbb{F}))$$

$$n \geq 2.$$

. Рассмотрим матрицу $M(x, y) \in M_n(\mathbb{F})$, где $n \geq 2$:

$$M(x, y) = \left(\begin{array}{cc|c} x & 1 & \\ 1 & y & O \\ \hline O & & E_{n-2} \end{array} \right),$$

здесь O — матрица из одних нулей, а E_{n-2} — единичная матрица (их размеры восстанавливаются из контекста). Тогда $\det M(x, y) = xy - 1$.

Тем самым, функция $(x, y) \mapsto M(x, y)$ инъективно отображает вершины графа $\Gamma_{xy-1}(\mathbb{F}^2)$ в вершины графа $\Gamma_n(\mathbb{F})$. Покажем, что это отображение — гомоморфизм графов (сохраняет смежность вершин). Действительно, пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — смежные вершины в $\Gamma_{xy-1}(\mathbb{F}^2)$, т. е. $(\frac{x_1+x_2}{2}) \cdot (\frac{y_1+y_2}{2}) = 1$. Но тогда

$$\begin{aligned} \det(M(x_1, y_1) + M(x_2, y_2)) &= 2^{n-2} \cdot \det \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & 2 \\ 2 & y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \\ &= 2^{n-2} \cdot ((x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - 4) = 0, \end{aligned}$$

а значит, $M(x_1, y_1)$ и $M(x_2, y_2)$ смежны в $\Gamma_n(\mathbb{F})$. \square

Предложение 4.3.10.

$$N_{xy-1}(\mathbb{F})$$

$$(4.2.2)$$

. Рассмотрим 2 произвольные вершины графа $N_{xy-1}(\mathbb{F})$ с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Тогда $x_1y_1 = 1, x_2y_2 = 1$. Если эти вершины смежны, то

$$\frac{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)}{4} = 1 \implies x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 = 4 \implies x_1y_2 + x_2y_1 = 2 \implies x_1x_1x_2y_2 + x_2x_2x_1y_1 = 2x_1x_2 \text{ (получено домножением на } x_1x_2) \implies (x_1 - x_2)^2 = 0.$$

Это означает, что вершины (x_1, y_1) и (x_2, y_2) совпадают. □

Следствие 4.3.11. $\chi(T_{xy-1}(\mathbb{F}^2)) = \chi(\Gamma_n(\mathbb{F}))$, $n \geq 2$.

. Аналогично доказательству следствия 4.3.6, если $\chi(\Gamma_{xy-1}(\mathbb{F}^2))$ конечно, получаем оценку $\chi(\Gamma_{xy-1}(\mathbb{F}^2)) \leq \chi(T_{xy-1}(\mathbb{F}^2)) \leq \chi(\Gamma_{xy-1}(\mathbb{F}^2)) + 1$. □

Обозначим через G_2 граф $T_{xy-1}(\mathbb{R}^2)$ и через \mathcal{G} — стандартную гиперболу $\{(x, y) \mid xy = 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

Утверждение 4.3.12. G_2 :

1. $\Delta(G_2) = \delta(G_2) = \infty$;
2. G_2 , $K_{2,3}$;
3. $\omega(G_2) = 4$;
4. $v, w \in V(G_2)$, $u \sim v$ - G_2 (. . $d(u, v) \leq 2$);
5. G_2 $\text{diam}(G_2) = 3$;
6. T G_2 .

. 1. Соседями произвольной вершины $a = (a_x, a_y) \in V(G_1)$ являются все точки гиперболы (за исключением самой точки a , если $a \in \mathcal{G}$), гомотетичной \mathcal{G} относительно точки a с коэффициентом 2. Будем обозначать ее через \mathcal{G}_a (ее центр расположен в точке $-a$, и ее уравнение таково: $(x + a_x)(y + a_y) = 4$).

2. Докажем утверждение от противного. Пусть $K_{2,3} \subset G_2$ и его вершины разбиваются на две доли: $V(K_{2,3}) = \{a_1, a_2\} \cup \{b_1, b_2, b_3\}$. Согласно пункту 1, множествами соседей точек a_1, a_2 являются две гиперболы \mathcal{G}_{a_1} и \mathcal{G}_{a_2} (быть может, за исключением точек a_1, a_2 , соответственно). Причем, поскольку вершины b_1, b_2, b_3 являются соседями каждой из точек a_1, a_2 , гиперболы \mathcal{G}_{a_1} и \mathcal{G}_{a_2} пересекаются не менее чем в трех точках. Это означает, что они совпадают (с учетом того, что они задаются уравнением вида $(x+a_x)(y+a_y) = 4$). Но тогда совпадают и точки a_1, a_2 , противоречие.

3. Ясно, что $\omega(G_2) < 5$ по пункту 2, т.к. K_5 содержит $K_{2,3}$ в качестве подграфа. Однако есть бесконечно много клик из 4 элементов. Например, подойдет множество

$$\{(-0.5, 2.5), (2.5, -0.5), (1.5, 1.5), (-3.5, -3.5)\}.$$

4. Согласно уравнению из пункта 1, для произвольных вершин $u = (u_x, u_y)$, $v = (v_x, v_y)$ с $u_x \neq v_x$ и $u_y \neq v_y$ гиперболы \mathcal{G}_u и \mathcal{G}_v пересекаются (быть может, в точке u или v). Это означает, что эти вершины смежны или у них имеется общий сосед.

5. Рассмотрим $u, v \in V(G_2)$, не соединенные ребром. Согласно пункту 4, если их ординаты и абсциссы различны, то они имеют общего соседа, то есть $d(u, v) = 2$.

Если же их ординаты или абсциссы совпали, то $\mathcal{G}_u \cap \mathcal{G}_v = \emptyset$, что означает $d(u, v) > 2$. Тем не менее, всегда можно выбрать такую точку $w \in \mathcal{G}_u$, что и ее ордината, и ее абсцисса будут отличаться от ординаты и абсциссы точки v соответственно. По пункту 4, v и w имеют общего соседа, поэтому $d(u, v) = 3$.

6. Доказательство аналогично пункту 6 утверждения 4.3.7. □

Гипотеза 4.3.13.

$$\chi(G_2)$$

Результаты этой главы опубликованы в статьях [37, 38].

Эта глава посвящена описанию тотальных и регулярных графов множеств с точностью до изоморфизма в минимальном нетривиальном случае — для множеств, состоящих из трех элементов.

Для доказательства основных результатов нам будет полезно следующее предложение, позволяющее параллельно классифицировать как тотальные, так и регулярные графы.

Предложение 5.0.1.

$$\begin{array}{l} n, m \in \mathbb{N} \\ \{a_1, b_1, c_1\} \subset \mathbb{F}^n, \{a_2, b_2, c_2\} \subset \mathbb{F}^m \quad T^n(a_1, b_1, c_1) \quad T^m(a_2, b_2, c_2) \\ \Gamma^n(a_1, b_1, c_1) \quad \Gamma^m(a_2, b_2, c_2). \end{array} .$$

. Заметим, что всеми вершинами степени два в графе $T^n(a_1, b_1, c_1)$ являются в точности a_1, b_1, c_1 . Все остальные вершины имеют степень три. То же верно и для графа $T^m(a_2, b_2, c_2)$. Поэтому при изоморфизме графов вершины a_1, b_1, c_1 перейдут в a_2, b_2, c_2 . Осталось заметить, что регулярный граф $\Gamma^n(a_1, b_1, c_1)$ является подграфом тотального и, соответственно, переходит в $\Gamma^m(a_2, b_2, c_2)$ при изоморфизме. \square

5.1

В этой секции мы классифицируем графы $\Gamma^1(a, b, c)$ с точностью до изоморфизма. Везде далее \mathbb{F} обозначает поле нулевой характеристики. В поле нулевой характеристики всегда можно выделить подкольцо целых чисел, которое мы отождествим с \mathbb{Z} , и подполе рациональных чисел, которое мы отождествим с \mathbb{Q} .

Лемма 5.1.1. $a, b, c \in \mathbb{F}$. $T^1(a, b, c) \simeq T^1(0, 1, f)$,
 $\Gamma^1(a, b, c) \simeq \Gamma^1(0, 1, f)$ $f \in \mathbb{F}$.

. Рассмотрим аффинное отображение $x \rightarrow (x - a)(b - a)^{-1}$. Тогда $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow 1$, а $c \rightarrow (c - a)(b - a)^{-1} = f$. Согласно утверждению 1.3.5, получаем $T^1(a, b, c) \simeq T^1(0, 1, f)$ и $\Gamma^1(a, b, c) \simeq \Gamma^1(0, 1, f)$. \square

Нам понадобится следующая широко известная лемма.

Лемма 5.1.2. V , S
 S
 V .

Лемма 5.1.3. $f_1, f_2 \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{Q}$ $T^1(0, 1, f_1)$ $T^1(0, 1, f_2)$.

. По лемме 5.1.2 мы можем выбрать два базиса Гамеля \mathbb{F} как векторного пространства над \mathbb{Q} :

$$G_1 = \{u_0 = 1, u_1 = f_1\} \cup \{u_\alpha \mid \alpha \in I\}, \quad G_2 = \{v_0 = 1, v_1 = f_2\} \cup \{v_\alpha \mid \alpha \in I\},$$

здесь I может быть несчетным.

Для каждого $x = k_0 + k_1 f_1 + k_{\alpha_1} u_{\alpha_1} + \dots + k_{\alpha_n} u_{\alpha_n}$ ($k_i \in \mathbb{Q}$) определим

$$\psi(x) = k_0 + k_1 f_2 + k_{\alpha_1} v_{\alpha_1} + \dots + k_{\alpha_n} v_{\alpha_n}.$$

Заметим, что $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = 1$, $\psi(f_1) = f_2$. Получаем, что $\psi(x)$ биективно отображает \mathbb{F} на \mathbb{F} (т. е. переводит множество вершин $T^1(0, 1, f_1)$ в множество вершин $T^1(0, 1, f_2)$) и аддитивно (т. е. сохраняет множество ребер), а, следовательно, отображение

$$f: T^1(0, 1, f_1) \rightarrow T^1(0, 1, f_2)$$

является изоморфизмом графов $T^1(0, 1, f_1)$ и $T^1(0, 1, f_2)$. Таким образом, $T^1(0, 1, f_1) \simeq T^1(0, 1, f_2)$. \square

Замечание 5.1.4. Заметим, что множества $\{0, 1, \sqrt{2}\}$ и $\{0, 1, \sqrt{3}\}$ не являются аффинно эквивалентными. Это, учитывая лемму 5.1.3, обосновывает пример 1.3.6.

Учитывая наличие порядка на множестве рациональных чисел, мы можем считать, что при $q \in \mathbb{Q}$ граф $T^1(0, 1, q)$ изоморфен графу $T^1(0, 1, q')$, а граф $\Gamma^1(0, 1, q)$ изоморфен графу $\Gamma^1(0, 1, q')$ для некоторого $q' \in \mathbb{Q}, q > 1$.

Утверждение 5.1.5. $\Gamma^1(0, 1, q)$ $q \in \mathbb{Q}, q > 1$.

Перед доказательством этого утверждения, рассмотрим подробнее граф $\Gamma^1(0, 1, q)$.

Пусть $q = \frac{p_1}{q_1}$, где $p_1, q_1 \in \mathbb{N}$. Тогда, применив аффинное преобразование $x \rightarrow q_1 \cdot x - q_1$ и, быть может, $x \rightarrow -x$, получим, что $\Gamma^1(0, 1, q) \cong \Gamma^1(-m, 0, n)$ для некоторых натуральных и взаимно простых $m \leq n$. Учитывая этот факт, достаточно показать, что графы $\Gamma^1(-m, 0, n)$ не изоморфны при различных m, n .

Рассмотрим структуру графа $\Gamma^1(-m, 0, n)$, где $m \leq n$ и m взаимно просто с n . Если две произвольные вершины x, y в графе $\Gamma^1(-m, 0, n)$ соединены ребром, то возможен только один из трех случаев:

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x + y = 2n, \\ x + y = -2m. \end{cases}$$

Таким образом, справедливо следующее предложение.

Предложение 5.1.6. $x \in \Gamma^1(-m, 0, n)$ -
 $N_1(x) = \{-x, 2n - x, -2m - x\} \setminus \{-m, 0, n\}$.

Несложно заметить, что за исключением случая $n = m = 1$ единственную клику размера три в этом графе образуют вершины $K_{m,n} = \{n - m, n + m, -n - m\}$. А в случае $n = m = 1$ в графе $\Gamma^1(-1, 0, 1)$ нет ни одной клики размера 3. Поэтому граф $\Gamma^1(-1, 0, 1)$ можно считать уникальным и не изоморфным ни одному из графов $\Gamma^1(-m, 0, n)$ при $n > 1$.

Пусть теперь $n > 1$. Отдельно рассмотрим случай $\Gamma^1(-1, 0, 2)$. В этом графе присутствует единственная вершина степени один: $\{1\}$. Поскольку при остальных значениях m, n в графе $\Gamma^1(-m, 0, n)$ нет вершин степени один, случай $m = 1, n = 2$ тоже уникален.

Отметим, что, за исключением случая $n = 2, m = 1$, в графе $\Gamma^1(-m, 0, n)$ ровно шесть вершин имеют степень два: $T_{m,n} = \{-n, m, -2m, 2n, -n - 2m, 2n + m\}$. Все остальные вершины имеют степень три.

Можно заметить, что при достаточно больших x граф $\Gamma^1(-m, 0, n)$ имеет в окрестности вершины x структуру, указанную на рисунке 1.

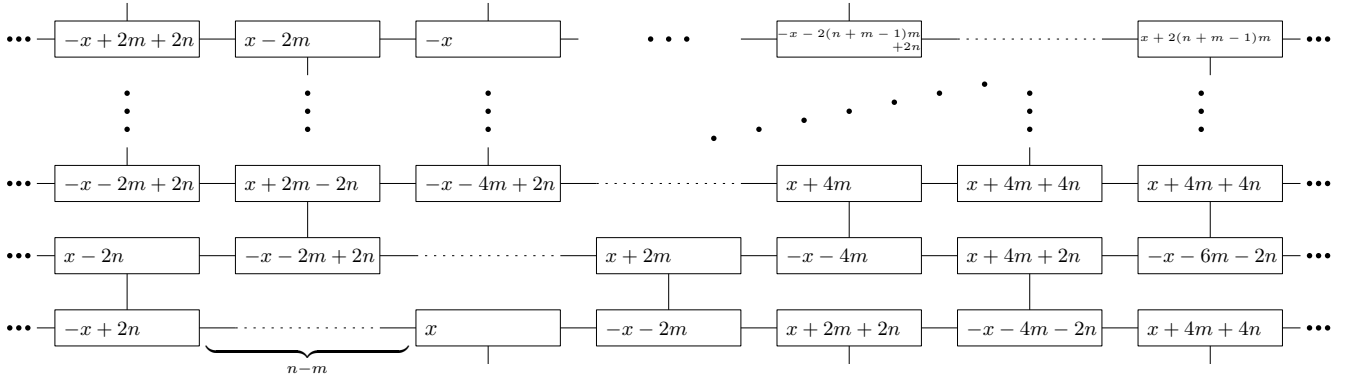


Рис. 1: Структура графа $\Gamma^1(-m, 0, n)$ вдали от клики и вершин степени два.

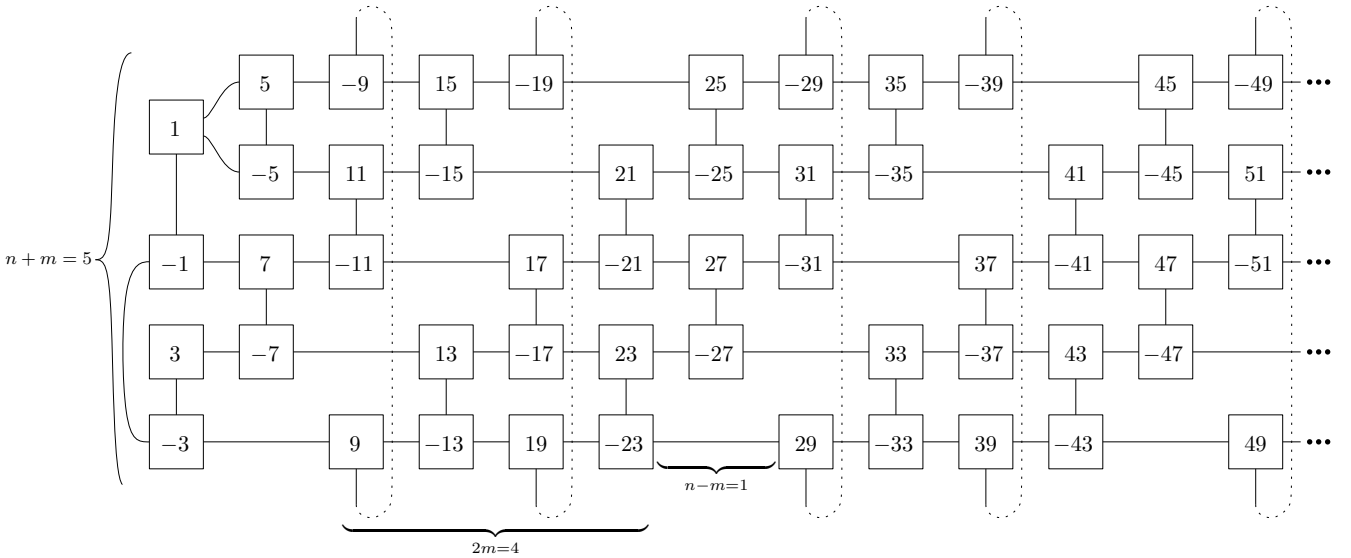


Рис. 2: Компонента графа $\Gamma^1(-2, 0, 3)$, содержащая клику.

Пусть натуральное $k \geq 0$. Рассмотрим множество

$$D_k = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -\lceil k/2 \rceil \leq x \leq \lceil k/2 \rceil, -\lceil k/2 \rceil \leq y \leq \lceil k/2 \rceil, -\lceil k/2 \rceil \leq x+y \leq \lceil k/2 \rceil\}.$$

Заметим, что D_k содержит все целочисленные точки своей выпуклой оболочки, поскольку является пересечением выпуклых множеств и целочисленной решетки.

Множество D_k имеет тесную связь со структурой графа $\Gamma^1(-m, 0, n)$. Эта связь будет указана сразу после изучения некоторых свойств D_k .

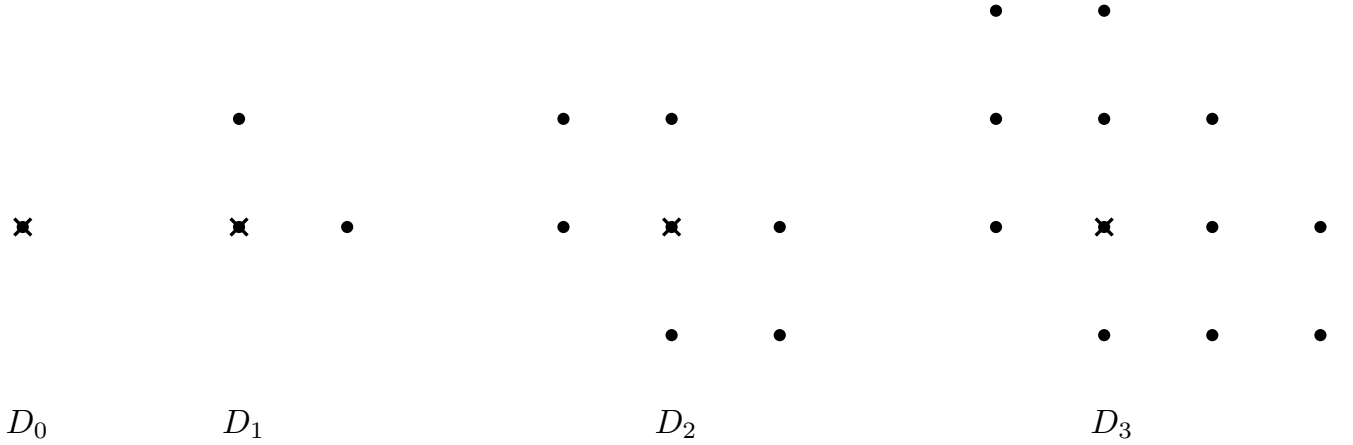


Рис. 3: Множества D_k для $k = 0, 1, 2, 3$.

Лемма 5.1.7. D_k :

1. $(a, b) \in D_k \implies |a| + |b| \leq k$.
2. $D_{k+1} = (-D_k) \cup (-D_k + (1, 0)) \cup (-D_k + (0, 1))$.
3. $D_k \quad k \in \mathbb{N}_0$

$$|D_{k+2}| = |D_k| + 3(k+2). \quad (19)$$

$$4. |D_k| = \frac{3}{4} \left(k^2 + 2k + \frac{7}{6} + (-1)^k \frac{1}{6} \right).$$

$$5. \quad k = p + q, 0 < p < q. \\ A, B \in D_K, \quad \overrightarrow{AB} = (p, q), \quad p + 1.$$

1. Поскольку $(a, b) \in D_k$, для a, b выполнена система неравенств

$$\begin{cases} -[k/2] \leq a \leq \lceil k/2 \rceil, \\ -[k/2] \leq b \leq \lceil k/2 \rceil, \\ -[k/2] \leq a + b \leq \lceil k/2 \rceil. \end{cases}$$

Если a и b одного знака, то в силу третьего неравенства системы для абсолютных значений a и b справедливо неравенство $|a| + |b| \leq \lceil k/2 \rceil \leq k$. Пусть a и b разных знаков. Без ограничения общности будем считать, что $a \leq 0 \leq b$. В таком случае для абсолютных значений a и b справедливы неравенства $|a| \leq \lceil k/2 \rceil, |b| \leq \lceil k/2 \rceil$. Отсюда $|a| + |b| \leq \lceil k/2 \rceil + \lceil k/2 \rceil = k$.

2. Множество $(-D_k) \cup (-D_k + (1, 0)) \cup (-D_k + (0, 1))$ является объединением образов D_k при отражении относительно $(0, 0)$ и композиции этого отражения со сдвигами на единичный вектор по каждой из осей. Само D_k является пересечением трех полос

$$\begin{aligned} L_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -\lceil k/2 \rceil \leq x \leq \lceil k/2 \rceil\}, \\ L_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -\lceil k/2 \rceil \leq y \leq \lceil k/2 \rceil\}, \\ L_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -\lceil k/2 \rceil \leq x + y \leq \lceil k/2 \rceil\}. \end{aligned}$$

Поэтому достаточно рассмотреть образы этих полос при соответствующих отображениях. Легко убедиться, что

$$\begin{aligned} -L_1 &= -L_1 + (0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -\lceil k/2 \rceil \leq x \leq \lceil k/2 \rceil\}, \\ -L_1 + (1, 0) &= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -\lceil k/2 \rceil + 1 \leq x \leq \lceil k/2 \rceil + 1\}, \\ -L_2 &= -L_2 + (1, 0) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -\lceil k/2 \rceil \leq y \leq \lceil k/2 \rceil\}, \\ -L_2 + (0, 1) &= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -\lceil k/2 \rceil + 1 \leq y \leq \lceil k/2 \rceil + 1\}, \\ -L_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -\lceil k/2 \rceil \leq x + y \leq \lceil k/2 \rceil\}, \\ -L_3 + (1, 0) &= -L_3 + (0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -\lceil k/2 \rceil + 1 \leq x + y \leq \lceil k/2 \rceil + 1\}. \end{aligned}$$

Заметим, что равенства $\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1 = \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$, $\lceil \frac{k}{2} \rceil = \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$ выполнены для любого k . Учитывая эти равенства, получаем

$$\begin{aligned}
-L_1 &= -L_1 + (0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor \leq x \leq \lfloor k/2 \rfloor\}, \\
-L_1 + (1, 0) &= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor \leq x \leq \lceil \frac{k+1}{2} \rceil\}, \\
-L_2 &= -L_2 + (1, 0) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor \leq y \leq \lfloor k/2 \rfloor\}, \\
-L_2 + (0, 1) &= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + 1 \leq y \leq \lceil \frac{k+1}{2} \rceil\}, \\
-L_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor \leq x + y \leq \lfloor k/2 \rfloor\}, \\
-L_3 + (1, 0) &= -L_3 + (0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + 1 \leq x + y \leq \lceil \frac{k+1}{2} \rceil\}.
\end{aligned}$$

Объединив эти неравенства мы получим, что точки множества

$$\begin{aligned}
(-D_k) \cup (-D_k + (1, 0)) \cup (-D_k + (0, 1)) &= ((-L_1) \cup (-L_1 + (1, 0)) \cup (-L_1 + (0, 1))) \cap \\
&\cap ((-L_2) \cup (-L_2 + (1, 0)) \cup (-L_2 + (0, 1))) \cap \\
&\cap ((-L_3) \cup (-L_3 + (1, 0)) \cup (-L_3 + (0, 1)))
\end{aligned}$$

удовлетворяют системе

$$\begin{cases}
-\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor \leq x \leq \lceil \frac{k+1}{2} \rceil, \\
-\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor \leq y \leq \lceil \frac{k+1}{2} \rceil, \\
-\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor \leq x + y \leq \lceil \frac{k+1}{2} \rceil.
\end{cases}$$

Осталось заметить, что в точности эта система задает D_{k+1} .

3. Точки $(x, y) \in D_k$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases}
-\lfloor k/2 \rfloor \leq x \leq \lceil k/2 \rceil, \\
-\lfloor k/2 \rfloor \leq y \leq \lceil k/2 \rceil, \\
-\lfloor k/2 \rfloor \leq x + y \leq \lceil k/2 \rceil.
\end{cases}$$

Заметим, что $\lfloor (k+2)/2 \rfloor = \lfloor k/2 \rfloor + 1$, $\lceil (k+1)/2 \rceil = \lceil k/2 \rceil + 1$. Учитывая эти равенства получим, что для точек множества D_{k+2} , в свою очередь, выполнена

система

$$\begin{cases} -[k/2] - 1 \leq x \leq [k/2] + 1, \\ -[k/2] - 1 \leq y \leq [k/2] + 1, \\ -[k/2] - 1 \leq x + y \leq [k/2] + 1. \end{cases}$$

Рассмотрим множество $D_{k+2} \setminus D_k$. Поскольку это множество содержит только точки (x, y) с целыми координатами, из вида систем, задающих D_k и D_{k+2} , следует, что $D_{k+2} \setminus D_k$ — это в точности точки на границе D_{k+2} . Граница множества D_{k+2} состоит из отрезков шести прямых. Нетрудно заметить, что суммарное количество точек множества D_{k+2} на прямых $-[k/2] - 1 = x$, $x = [k/2] + 1$ равняется $k + 4$. Столько же точек лежит суммарно на парах прямых $-[k/2] - 1 = y$, $y = [k/2] + 1$ и $-[k/2] - 1 = x + y$, $x + y = [k/2] + 1$. Учитывая, что эти шесть отрезков прямых образуют шестиугольник и его вершины учтены дважды, получаем, что $|D_{k+2} \setminus D_k| = |D_{k+2}| - |D_k| = 3(k + 4) - 6 = 3(k - 2)$. Это равенство завершает доказательство.

4. Рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного k . Для четного k , используя рекуррентное соотношение (19) и равенство $|D_0| = 1$, получаем

$$|D_k| = 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + \dots + 3 \cdot k = 1 + 3 \frac{(k + 2)k}{4}.$$

При нечетном k наименьший индекс имеет $|D_1| = 3$, поэтому рекуррентное соотношение (19) дает равенство

$$|D_k| = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \dots + 3 \cdot k = 3 \frac{(k + 1)^2}{4}.$$

Совмещая эти равенства при четном и нечетном k , получаем доказываемую формулу.

5. Пусть, как определено выше,

$$L_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -[k/2] \leq x + y \leq [k/2]\}.$$

Предположим, что пара точек (x_1, y_1) , $(x_2, y_2) = (x_1, y_1) + (p, q)$, где $p + q = k$, лежит внутри полосы L_3 . Это возможно только тогда, когда (x_1, y_1) лежит

на прямой $x + y = -[k/2]$, а (x_2, y_2) на прямой $x + y = [k/2]$.

Таким образом, если пара точек (x_1, y_1) , $(x_2, y_2) = (x_1, y_1) + (p, q)$ лежит внутри D_k , то, поскольку $D_k \subset L_3$, $x_1 + y_1 = -[k/2]$. Рассмотрим точки

$$(0, -[k/2]), (-1, -[k/2] + 1), \dots, (-p, -[k/2] + p)$$

на прямой $x + y = -[k/2]$, а (x_2, y_2) и соответствующие им точки

$$(p, q - [k/2]), (p - 1, q - [k/2] + 1), \dots, (0, q - [k/2] + p) = (0, [k/2])$$

на прямой $x + y = [k/2]$. Это все пары точек которые лежат в D_k и отличаются на вектор (p, q) . Действительно, точки на прямой $x + y = -[k/2]$ с координатой $y < -[k/2]$ уже не будут лежать в области D_k , как и точки прямой $x + y = [k/2]$ с координатой $y > [k/2]$. Для завершения доказательства осталось заметить, что указанных выше пар точек ровно $p + 1$. \square

Следующая лемма устанавливает связь между множествами D_k и соседями произвольной вершины в графе $\Gamma^1(-m, 0, n)$.

Лемма 5.1.8.

$$z \in \Gamma^1(-m, 0, n), \quad N_l(z) \cap T_{m,n} = \emptyset$$

$$l \in \{0, 1, \dots, k\},$$

$$N_k(z) = \{2an - 2bm + (-1)^k z \mid (a, b) \in D_k\}. \quad (20)$$

. Докажем это утверждение индукцией по параметру k .

. При $k = 0$ множество D_0 состоит из одной точки $(0, 0)$, как и множество $N_0(z) = \{z\}$, что полностью соответствует доказываемому утверждению.

. Пусть для некоторого числа k верно, что $N_k(z) = \{-2an + 2bm + (-1)^k z \mid (a, b) \in D_k\}$. Докажем, что и для $k + 1$ это тоже верно. Согласно предложению 5.1.6, и учитывая, что $m, 0, -n \notin N_k(z)$, соседями вершины $2an - 2bm + (-1)^k z$ будут три точки:

$$-2an + 2bm + (-1)^{k+1} z, \quad 2(-a+1)n + 2bm + (-1)^{k+1} z, \quad -2an - 2(-b+1)m + (-1)^{k+1} z.$$

Заметим, что для вершины $-2an + 2bm + (-1)^k z$ пара коэффициентов (a, b) при числах $2n$ и $-2m$ у соседей принимает одно из трех значений: $(-a, -b)$, $(-a + 1, -b)$, $(-a, -b + 1)$. Это в точности соответствует отражению точки (a, b) относительно точки $(0, 0)$ в комбинации со сдвигом на нулевой вектор, вектор $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Тем самым, требуемое утверждение следует из пункта 2 леммы 5.1.7. \square

Перейдем к доказательству утверждения 5.1.5.

. Доказательство утверждения 5.1.5 напрямую следует из леммы 5.1.7. Действительно, пусть для некоторых взаимно простых n_1, m_1 и n_2, m_2 есть изоморфизм

$$\psi: \Gamma^1(-m_1, 0, n_1) \rightarrow \Gamma^1(-m_2, 0, n_2).$$

Поскольку существует лишь конечное множество вершин z , для которых выполнено неравенство $|z| \leq 8 \max(n_1 m_1, n_2 m_2)$, найдутся две вершины $z_1 \in \Gamma^1(-m_1, 0, n_1)$ и $z_2 \in \Gamma^1(-m_2, 0, n_2)$ графа $\Gamma^1(-m, 0, n)$ такие, что $\psi(z_1) = z_2$ и

$$|z_1|, |z_2| > 8 \max(n_1 m_1, n_2 m_2).$$

Из леммы 5.1.8 следует, что соседи вершин z_1 и z_2 имеют вид

$$\begin{aligned} N_k(z_1) &= \{2an_1 - 2bm_1 + (-1)^k z_1 \mid (a, b) \in D_k\}, \\ N_k(z_2) &= \{2an_2 - 2bm_2 + (-1)^k z_2 \mid (a, b) \in D_k\}. \end{aligned}$$

Пусть для некоторых $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{Z}^2$, $|a_1| + |b_1|, |a_2| + |b_2| \leq \max(n_1 + m_1, n_2 + m_2)$ и $s, t \in \mathbb{N}_0$ оказалось, что

$$2a_1 n_1 - 2b_1 m_1 + (-1)^s z_1 = 2a_2 n_1 - 2b_2 m_1 + (-1)^t z_1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |(-1)^s z_1 - (-1)^t z_1| &= |2(a_2 - a_1)n_1 - 2(b_2 - b_1)m_1| \leq 2(|a_2| + |a_1|)n_1 + 2(|b_2| + |b_1|)m_1 < \\ < 2(|a_2| + |a_1|)n_1 + 2(|b_2| + |b_1|)n_1 &= 2(|a_1| + |b_1| + |a_2| + |b_2|)n_1 \leq 4 \max(n_1 + m_1, n_2 + m_2)n_1 < z_1. \end{aligned}$$

Тогда, поскольку $|(-1)^s z_1 - (-1)^t z_1|$ равняется либо 0, либо $2z_1$, из неравенства выше следует, что s и t одной четности и $2(a_2 - a_1)n_1 = 2(b_2 - b_1)m_1$. Поскольку

n_1 и m_1 взаимно простые, имеем, что $(a_1, b_1) = (a_2, b_2) + r \cdot (m_1, n_1)$, где $r \in \mathbb{N}$.

Таким образом, если $k < n_1 + m_1$, то $|D_k| = |N_k(z_1)|$. Если же $k = n_1 + m_1$, то $|N_k(z_1)| = |D_k| - m_1$ по пункту 5 леммы 5.1.7. Аналогичное верно и для графа $\Gamma^1(-m_2, 0, n_2)$:

$$\begin{aligned} &\text{если } k < n_2 + m_2, \text{ то } |D_k| = |N_k(z_2)|; \\ &\text{если } k = n_2 + m_2, \text{ то } |N_k(z_2)| = |D_k| - m_2. \end{aligned}$$

Поскольку вершина z_2 является образом z_1 при изоморфизме, $|N_k(z_1)| = |N_k(z_2)|$ для всех k . Учитывая последние равенства, это означает справедливость системы

$$\begin{cases} n_1 + m_1 = n_2 + m_2, \\ m_1 = m_2. \end{cases}$$

Это возможно только если $n_1 = n_2, m_1 = m_2$, что и требовалось доказать. \square

Теорема 5.1.9. \mathbb{F} , $a, b, c \in \mathbb{F}$.

$$T^1(a, b, c)$$

:

- $T^1(0, 1, f)$ $f \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{Q}$ -
- $T^1(0, 1, q)$ $q \in \mathbb{Q}, q > 1$ q

$$\Gamma^1(a, b, c),$$

:

- $\Gamma^1(0, 1, f)$ $f \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{Q}$ -
- $\Gamma^1(0, 1, q)$ $q \in \mathbb{Q}, q > 1$ q

. Из леммы 5.1.1 следует, что $T^1(a, b, c)$ изоморфен $T^1(0, 1, f)$ для некоторого $f \in \mathbb{F}$. Если $f \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{Q}$, то, согласно лемме 5.1.3, все такие графы изоморфны. Тогда, как следует из предложения 5.0.1, изоморфны и графы $\Gamma^1(a, b, c)$ и $\Gamma^1(0, 1, f)$.

Если же $f = q \in \mathbb{Q}$, то можно считать, что $q > 1$ и, согласно утверждению 5.1.5, при разных q неизоморфны графы $\Gamma^1(0, 1, q)$. Отсюда, снова по предложению 5.0.1, следует, что не могут быть изоморфны и графы $\Gamma^1(0, 1, q)$ при разных $q > 1$.

Учитывая предложение 5.0.1, осталось доказать, что графы $\Gamma^1(0, 1, f)$ при $f \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{Q}$ и $\Gamma^1(0, 1, q)$ при $q \in \mathbb{Q}$ не изоморфны друг другу. Действительно, как было показано выше, граф $\Gamma^1(0, 1, q)$ изоморфен $\Gamma^1(-m, 0, n)$ для некоторых взаимно простых $m < n \in \mathbb{N}$. В графе $\Gamma^1(-m, 0, n)$ единственную клику размера 3 образуют вершины $K_{m,n} = \{n - m, n + m, -n - m\}$. Кроме того, в нем ровно шесть вершин степени два: $T_{m,n} = \{-n, m, -2m, 2n, -n - 2m, 2n + m\}$. Также несложно заметить, что вершины степени два лежат в двух компонентах связности, причем в одной из них лежит клика.

Если же мы рассматриваем граф $\Gamma^1(0, 1, f)$ при $f \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{Q}$, то в нем клику размера три образуют вершины $K_f = \{f + 1, -f + 1, f - 1\}$, а вершины степени два выглядят следующим образом:

$$T_f = \{-f, -f + 2, -1, 2f - 1, 2, 2f\}.$$

Можно заметить, что вершины степени два в этом графе содержатся в трех, но не в двух компонентах связности. Кроме того, клика не лежит ни в одной из этих трех компонент. Это замечание завершает доказательство. \square

5.2

\mathbb{F}^n

В этой секции мы переместим фокус на случай произвольной размерности. Рассмотрим графы $\Gamma^n(a, b, c)$ и $T^n(a, b, c)$, где $a, b, c \in \mathbb{F}^n$. Как окажется далее, граф $T^n(a, b, c)$ изоморфен графу $T^1(a', b', c')$ для некоторых $a', b', c' \in \mathbb{F}$ — доказательству именно этого факта посвящена секция 5.2. Поскольку $\Gamma^n(a, b, c)$ явля-

ется подграфом $T^n(a, b, c)$, то, согласно предложению 5.0.1, $\Gamma^n(a, b, c) \simeq \Gamma^1(a', b', c')$ для тех же $a', b', c' \in \mathbb{F}$. Тем самым, учитывая теорему 5.1.9, для описания графов $\Gamma^n(a, b, c)$ и $T^n(a, b, c)$ нам достаточно исследовать только свойства графа $T^n(a, b, c)$, что и будет сделано ниже.

Замечание 5.2.1. Согласно определению, соседними в графе $T^n(a, b, c)$ будут являться вершины, полусумма которых как векторов в \mathbb{F}^n принадлежит множеству $A = \{a, b, c\}$. Иначе этот факт можно сформулировать так: вершины x и y соединены ребром в графе $T^n(a, b, c)$, если точка y получена отражением точки x относительно одной из точек a, b, c .

- Предложение 5.2.2.** $T^n(a, b, c)$:
1. a, b, c $2(b - a) = 2(c - b) =$
 $= (c - a),$ $T^n(a, b, c)$.
 2. $1,$ $T^n(a, b, c)$ -
 $\{-a + b + c, a - b +$
 $+ c, a + b - c\}.$
 3. $T^n(a, b, c)$ 2
 $\{a, b, c\}.$
 4. $\{a, b, c\}$ $T^n(a, b, c)$ $3.$

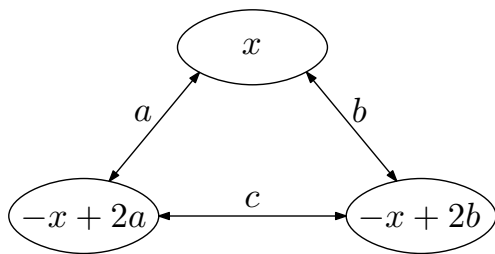


Рис. 4: Клика в графе $T^n(a, b, c)$.

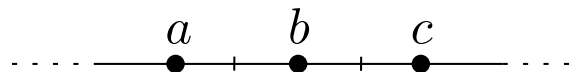


Рис. 5: Расположение a, b, c при отсутствии клики.

1, 2. Если в графе есть клика размера три, то найдется такая вершина x , при отражении которой относительно точек a и b получатся симметричные относительно c точки (см. рисунок 4). Таким образом, будет выполнено следующее

равенство

$$-x + 2b = x - 2a + 2c \iff x = +2b = a + b - c.$$

Отсюда находим:

$$\begin{cases} x = a + b - c, \\ -x + 2a = a - b + c, \\ -x + 2b = -a + b + c. \end{cases}$$

Клики размера три нет только в том случае, если некоторые из этих точек совпадают. Это происходит в точности тогда, когда выполняются соотношения $2(b - a) = 2(c - b) = (c - a)$ или одно из двух других, которое можно получить перестановкой точек a, b, c (см. рисунок 5).

3,4. Действительно, как было отмечено в замечании 5.2.1, каждый сосед получается отражением относительно одной из точек a, b, c . В случае, если отражаемая вершина не совпадает ни с одной из точек a, b, c , после отражения получится три различные точки. Если же вершина совпадает с одной из a, b, c , то отразить получится только относительно двух оставшихся. \square

Лемма 5.2.3.

$$C_x = \{(-1)^{k+l+m}x + 2ka + 2lb + 2mc \mid k, l, m \in \mathbb{Z}, k + l + m = 0 \text{ или } k + l + m = 1\}.$$

. Действительно, смежными по ребру с вершиной x являются $\{-x + 2a, -x + 2b, -x + 2c\}$, которые содержатся в C_x . Заметим, что если для некоторой вершины $y = (-1)^{k+l+m}x + 2ka + 2lb + 2mc$ было выполнено свойство $k + l + m = 0$ или $k + l + m = 1$, то и для смежных с y вершин будет выполнено соответствующее свойство, т.е. они также будут содержаться в множестве C_x . Верно и обратное включение: любую точку $y = (-1)^{k+l+m}x + 2ka + 2lb + 2mc$ множества C_x можно получить применив к точке x в некотором порядке k отражений относительно a , l отражений относительно b и m отражений относительно c . Согласно замечанию 5.2.1, после отражений получатся вершины, достижимые из x . \square

Пусть G — группа с порождающим множеством $S \subset G$. Обозначим через $\text{Cay}(G, S)$ граф Кэли группы G относительно порождающего множества S , вер-

пинами которого является множество G , а ребрами множество $\{\{g, h\} \mid g, h \in G, g^{-1}h \in S\}$.

Лемма 5.2.4. $b - a, c - a \in \mathbb{F}^n$ $\mathbb{Q} \subset \mathbb{F}$.
 $T^n(a, b, c)$,
 $\text{Cay}(G, S)$ G $S = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$
 $a, b, c:$

$$G = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \mid \mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2 = (\mathbf{abc})^2 = e \rangle.$$

. Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ — симметрии относительно точек a, b, c соответственно. Поскольку $b - a, c - a \in \mathbb{F}^n$ линейно независимы над \mathbb{Q} , группа симметрий, порожденная $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, совпадает с группой симметрий плоскости относительно трёх точек общего положения. Общеизвестен факт, что такая группа задается соотношениями

$$G = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \mid \mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2 = (\mathbf{abc})^2 = e \rangle.$$

Согласно лемме 5.2.3 компонента связности вершины x совпадает с множеством $C_x = \{(-1)^{k+l+m}x + 2ka + 2lb + 2mc \mid k, l, m \in \mathbb{Z}, k+l+m = 0 \text{ или } k+l+m = 1\}$. Определим отображение $\psi: G \rightarrow C_x$, сопоставив каждому элементу группы G , определенной выше, точку множества C_x , полученную из вершины x в результате соответствующей последовательности отражений относительно точек a, b, c . Заметим, что корректность определения ψ следует из того, что G является группой отражений плоскости относительно трех точек a, b, c , а множество C_x , в свою очередь, всеми возможными точками, которые можно получить из x путем отражений относительно a, b, c (см. также замечание 5.2.1), т.е. орбитой элемента x под действием G . Отсюда также следует, что ψ является сюръекцией.

Докажем, что ψ — инъекция. Достаточно показать, что если для элемента g группы G выполнено $\psi(g) = x$, то $g = e$. Сократим в записи g все вхождения $\mathbf{a}^2, \mathbf{b}^2, \mathbf{c}^2, (\mathbf{abc})^2$. Тем самым, учитывая $a^{-1} = a, b^{-1} = b, c^{-1} = c$, элемент g можно считать словом из букв a, b, c , где каждые соседние буквы различны. Пусть в результате последовательности отражений g из вершины x получается вершина $(-1)^{k+l+m}x + 2ka + 2lb + 2mc$, где $k + l + m = 0$ или $k + l + m = 1$.

Если $k+l+m = 1$, то $x = -x + 2ka + 2lb + 2mc$, откуда $x = ka + lb + mc$. Заметим,

что если k, l и m нечётны, то x лежит в компоненте связности клики. Если же одно из k, l или m нечетно, а остальные четны, то x лежит в одной из компонент связности вершин степени два. Другие варианты невозможны, поскольку $k + l + m = 1$.

Если же $k + l + m = 0$, то $x = x + 2ka + 2lb + 2mc$, откуда $0 = ka + lb + mc$. Поскольку $k + l + m = 0$, получаем

$$0 = ka + lb + mc = (-l - m)a + lb + mc = l(b - a) + m(c - a).$$

В силу линейной независимости $b - a$ и $c - a$ над \mathbb{Q} получаем $l = m = k = 0$. Заметим, что, например, каждое вхождение буквы a на нечетной позиции в слове g увеличивает l на единицу, и, наоборот, вхождение a на четной позиции в слове g уменьшает l на единицу. Тогда равенства $l = m = k = 0$ возможны только в случае, если вхождений каждого из отражений $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ на четных и нечетных позициях в записи g поровну. Осталось заметить, что $hqh = q^{-1}$ для любого несобственного (являющегося композицией нечетного числа симметрий) движения $h \in G$ и собственного $q \in G$, что следует из соотношений $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2 = (\mathbf{abc})^2 = e$. Такое преобразование позволяет сократить число вхождений каждого из отражений $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ в записи g , сохраняя соотношение $k + l + m = 0$. Таким образом, применяя это преобразование необходимое число раз, мы сократим все буквы и получим, что g тождественно.

Получаем, что ψ — биекция множества вершин, сохраняющая ребра, а значит и изоморфизм соответствующих графов. \square

Лемма 5.2.4 означает, что в случае линейной независимости a, b, c над \mathbb{Q} , все компоненты графа $T^n(a, b, c)$, которые не содержат максимальной клики и вершин степени 2, имеют вид $\text{Cay}(G, S)$, т.е. гексагональной сетки (см. рисунок 6), и, следовательно, изоморфны.

Лемма 5.2.5. $b - a, c - a \in \mathbb{F}^n$ $\mathbb{Q} \subset \mathbb{F}$.

$$a', b', c' \in \mathbb{F},$$

$$T^n(a, b, c)$$

$$T^1(a', b', c').$$

$$T^n(a, b, c),$$

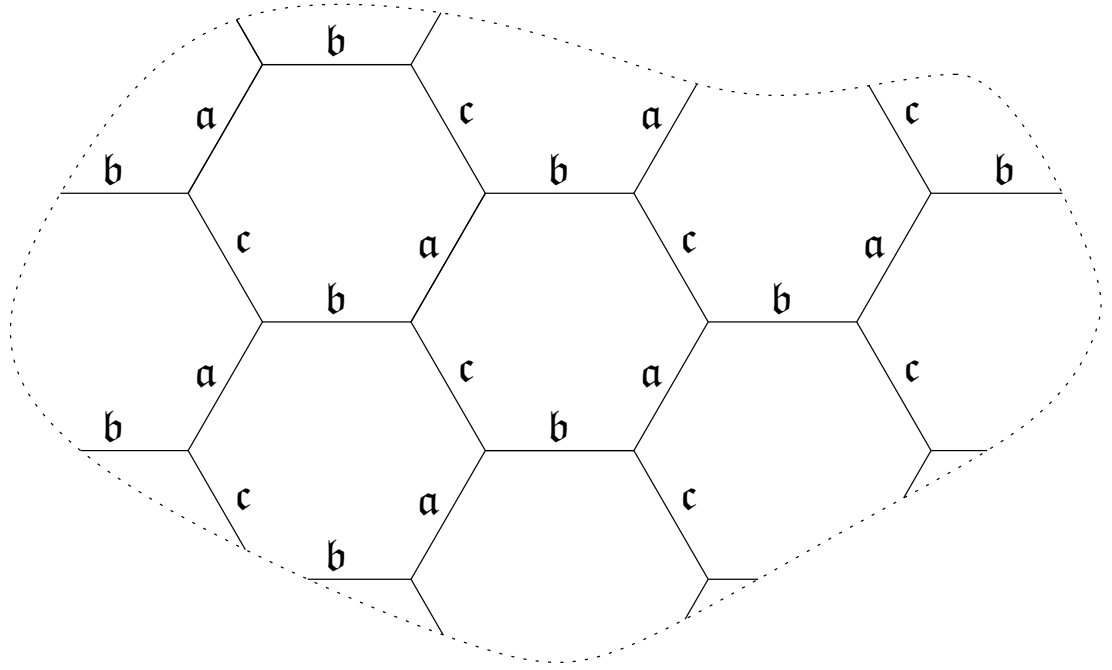


Рис. 6: Граф Кэли $\text{Cay}(G, S)$, имеющий структуру гексагональной сетки.

$T^1(a', b', c')$.

Рассмотрим параллельный перенос \mathbb{F}^n на вектор $-a$. Согласно утверждению 1.3.5, полученный при таком преобразовании граф $T^n(0, b-a, c-a)$ будет изоморфен исходному. Из линейной зависимости $b-a$ и $c-a$ над \mathbb{Q} следует, что $\lambda_1(b-a) + \lambda_2(c-a) = 0$ для некоторых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$. Поскольку векторы $(b-a)$ и $(c-a)$ коллинеарны, поворотом и растяжением можно добиться того, что $(b-a)$ и $(c-a)$ перейдут в векторы $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$ и $\frac{-\lambda_1}{\lambda_2}e_1$. Поскольку эти преобразования являются аффинными, по лемме 1.3.5 получаем, что графы $T^n(0, b-a, c-a)$ и $T^n(0, e_1, \frac{-\lambda_1}{\lambda_2}e_1)$ изоморфны. Более того, поскольку $\frac{-\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{Q}$, применив подходящее аффинное преобразование мы можем перевести векторы $(e_1, \frac{-\lambda_1}{\lambda_2}e_1)$ в $(-m \cdot e_1, n \cdot e_1)$ для некоторых взаимно простых $m, n \in \mathbb{N}$ таких, что $m \leq n$. Тогда $T^n(0, b-a, c-a) \simeq T^n(0, e_1, \frac{-\lambda_1}{\lambda_2}e_1) \simeq T^n(-m \cdot e_1, 0, n \cdot e_1)$. Далее мы покажем, что компоненты связности графа $T^n(-m \cdot e_1, 0, n \cdot e_1)$ изоморфны соответствующим компонентам $T^1(-m, 0, n)$.

Шаг 1. Сначала докажем, что изоморфны компоненты, содержащие клику или вершины степени два. Заметим, что, согласно предложению 5.2.2, клика размера три, как и вершины степени два, содержится в линейной оболочке $\langle e_1 \rangle$. Поэтому

построим линейное отображение $\varphi: \langle e_1 \rangle \rightarrow \mathbb{Q}$ так, чтобы $\varphi(e_1) = 1$. Тогда $\varphi(-m \cdot e_1) = -m$, $\varphi(n \cdot e_1) = n$ и полученное отображение будет является изоморфизмом компонент графов $T^n(-m \cdot e_1, 0, n \cdot e_1)$ и $T^1(-m, 0, n)$, содержащихся в $\langle e_1 \rangle$ и \mathbb{Q} соответственно, т. е., в частности, компонент с кликой размера три или вершинами степени два.

Шаг 2. Докажем, что изоморфны и те компоненты, которые не содержат клику размера три или вершины степени два. По лемме 5.2.3, компонента связности вершины x в графе $T^n(-m \cdot e_1, 0, n \cdot e_1)$ имеет вид

$$C_x = \{(-1)^{r+s+t}x - 2rm \cdot e_1 + 2tn \cdot e_1 \mid r, s, t \in \mathbb{Z}, r + s + t = 0 \text{ или } r + s + t = 1\}.$$

Рассмотрим произвольную вершину x' графа $T^1(-m, 0, n)$, которая не содержится в компоненте вершин степени два или клики размера три. Определим отображение φ следующим образом

$$\varphi((-1)^{r+s+t}x - 2rm \cdot e_1 + 2tn \cdot e_1) = (-1)^{r+s+t}x' - 2rm + 2tn.$$

Такое определение отображения φ корректно. Действительно, пусть для некоторых r_1, s_1, t_1 и r_2, s_2, t_2 оказалось, что

$$(-1)^{r_1+s_1+t_1}x - 2r_1m \cdot e_1 + 2t_1n \cdot e_1 = (-1)^{r_2+s_2+t_2}x - 2r_2m \cdot e_1 + 2t_2n \cdot e_1,$$

но

$$(-1)^{r_1+s_1+t_1}x' - 2r_1m + 2t_1n \neq (-1)^{r_2+s_2+t_2}x' - 2r_2m + 2t_2n.$$

Тогда, если $r_1 + s_1 + t_1 \neq r_2 + s_2 + t_2$, то из равенства

$$(-1)^{r_1+s_1+t_1}x - 2r_1m \cdot e_1 + 2t_1n \cdot e_1 = (-1)^{r_2+s_2+t_2}x - 2r_2m \cdot e_1 + 2t_2n \cdot e_1$$

следует $x = \pm((r_1 - r_2)m + (t_2 - t_1)n)$. Учитывая предложение 5.2.2 и лемму 5.2.3, это означает, что x лежит в компоненте связности клики размера три или вершин степени два, что невозможно.

Если же $r_1 + s_1 + t_1 = r_2 + s_2 + t_2$, то равенство

$$(-1)^{r_1+s_1+t_1}x - 2r_1m \cdot e_1 + 2t_1n \cdot e_1 = (-1)^{r_2+s_2+t_2}x - 2r_2m \cdot e_1 + 2t_2n \cdot e_1$$

влечет $-2r_1m \cdot e_1 + 2t_1n \cdot e_1 = -2r_2m \cdot e_1 + 2t_2n \cdot e_1$. Из этого следует равенство

$$(-1)^{r_1+s_1+t_1}x' - 2r_1m + 2t_1n = (-1)^{r_2+s_2+t_2}x' - 2r_2m + 2t_2n,$$

что приводит к противоречию с

$$(-1)^{r_1+s_1+t_1}x' - 2r_1m + 2t_1n \neq (-1)^{r_2+s_2+t_2}x' - 2r_2m + 2t_2n.$$

Тем самым, определение φ корректно. Заметим, что рассуждение выше также доказывает сюръективность φ . Переменной мест $(-1)^{r+s+t}x - 2rm \cdot e_1 + 2tn \cdot e_1$ и $(-1)^{r+s+t}x' - 2rm + 2tn$ из рассуждений выше получается доказательство инъективности φ . Заметим также, что φ сохраняет ребра в компонентах связности. Таким образом, φ является искомым изоморфизмом. \square

Замечание 5.2.6. Лемма 5.2.5 означает, что в случае линейной независимости $b - a, c - a$ структура компонент связности графа $T^n(a, b, c)$ не зависит от размерности n .

Этот факт наводит на мысль о том, что, раз некоторые компоненты связности устроены одинаково в разных размерностях, то и сами графы могут быть изоморфны некоторым одномерным аналогам. Следующие утверждения покажут, что это действительно так.

Теорема 5.2.7. $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{F} = \infty \quad a, b, c \in \mathbb{F}^n \quad . \quad T^n(a, b, c)$
 $T^1(0, 1, f) \quad f \in \mathbb{F}.$

. Рассмотрим параллельный перенос \mathbb{F}^n на вектор $-a$. Согласно утверждению 1.3.5, полученный при таком преобразовании граф $T^n(0, b - a, c - a)$ будет изоморфен исходному. Теперь в два шага найдем такой f , что $T^n(0, b - a, c - a) \simeq T^1(0, 1, f)$, и построим этот изоморфизм.

Шаг 1: построение отображения $\psi: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}$ и нахождение подходящего f .

1. Пусть векторы $b - a$ и $c - a$ линейно независимы над \mathbb{Q} . Возьмем $f \in \mathbb{F}$ такой, что векторы 1 и f линейно независимы над \mathbb{Q} в \mathbb{F} . Согласно лемме 5.1.2, мы можем дополнить системы $\{b - a, c - a\}$ и $\{1, f\}$ до базиса Гамеля \mathbb{F}^n и \mathbb{F} над \mathbb{Q} соответственно:

$$G_1 = \{u_0 = b - a, u_1 = c - a\} \cup \{u_\alpha \mid \alpha \in I_1\}, \quad G_2 = \{v_0 = 1, v_1 = f\} \cup \{v_\alpha \mid \alpha \in I_2\}.$$

Заметим, что множества I_1 и I_2 имеют одинаковую мощность. Это позволяет определить отображение $\psi(x)$ на элементе $x = k_0(b - a) + k_1(c - a) + k_{\alpha_1}u_{\alpha_1} + \dots + k_{\alpha_n}u_{\alpha_n}$ ($k_i \in \mathbb{Q}$) следующим образом

$$\psi(x) = k_0 + k_1f + k_{\alpha_1}v_{\alpha_1} + \dots + k_{\alpha_n}v_{\alpha_n}.$$

2. Пусть векторы $b - a$ и $c - a$ линейно зависимы над \mathbb{Q} . Тогда как и в первом случае, по лемме 5.1.2 дополним системы $\{b - a\}$ и $\{1\}$ до базиса Гамеля \mathbb{F}^n и \mathbb{F} над \mathbb{Q} соответственно:

$$G_1 = \{u_0 = b - a\} \cup \{u_\alpha \mid \alpha \in I_1\}, \quad G_2 = \{v_0 = 1\} \cup \{v_\alpha \mid \alpha \in I_2\}.$$

Как и выше, множества I_1 и I_2 имеют одинаковую мощность. Тогда для каждого $x = k_0(b - a) + k_{\alpha_1}u_{\alpha_1} + \dots + k_{\alpha_n}u_{\alpha_n}$ ($k_i \in \mathbb{Q}$) определим

$$\psi(x) = k_0 + k_{\alpha_1}v_{\alpha_1} + \dots + k_{\alpha_n}v_{\alpha_n}.$$

В этом случае возьмем $f = \psi(c - a)$.

Шаг 2: завершение доказательства.

Заметим, что как в первом, так и во втором случае, $\psi(0) = 0$, $\psi(b - a) = 1$, $\psi(c - a) = f$. Получаем, что, как и в доказательстве леммы 5.1.3, $\psi(x)$ биективно отображает \mathbb{F} на \mathbb{F}^n (т. е. сохраняет множество вершин) и аддитивно (т. е. сохраняет множество ребер). Следовательно, отображение $\psi: T^n(0, b - a, c - a) \rightarrow T^1(0, 1, f)$ является изоморфизмом графов $T^n(0, b - a, c - a)$ и $T^n(0, 1, f)$. Таким образом, $T^n(a, b, c) \simeq T^n(0, b - a, c - a) \simeq T^1(0, 1, f)$. \square

Лемма 5.2.8. $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{F} < \infty, \quad a, b, c \in \mathbb{F}^n, \quad ,$

$$T^1(0, 1, f) \quad \begin{matrix} b - a & c - a \\ & \mathbb{Q}. \end{matrix} \quad T^n(a, b, c) \quad f \in \mathbb{F}.$$

. Поскольку векторы $b - a$ и $c - a$ линейно зависимы, согласно лемме 5.2.5 найдутся такие $a', b', c' \in \mathbb{F}$, что компоненты связности графа $T^n(a, b, c)$ изоморфны компонентам связности $T^1(a', b', c')$. Тогда осталось заметить, что множества компонент связности каждого типа (содержащие клику размера три, вершины степени два, или отличные от первых двух) имеют равные мощности в графах $T^n(0, b - a, c - a)$ и $T^1(0, 1, f)$, а именно: компонента, содержащая клику размера три, одна; компонент, содержащих вершины степени два, от двух до трех в зависимости от взаимного расположения точек, но, как следует из доказательства леммы 5.2.5, одинаковое количество в графах $T^n(a, b, c)$ и $T^1(a', b', c')$; компонент, не содержащих ни клику, ни вершины степени два, счетно. Отсюда автоматически следует существование покомпонентного изоморфизма между соответствующими графами.

Завершая доказательство, отметим, что набор точек (a', b', c') путем аффинного преобразования можно перевести в $(0, 1, f)$ для некоторого $f \in \mathbb{F}$. Принимая во внимание предложение 1.3.5, получаем $T^n(a, b, c) \simeq T^1(a', b', c') \simeq T^1(0, 1, f)$. \square

Теорема 5.2.9. $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{F} < \infty, \quad a, b, c \in \mathbb{F}^n, \quad b - a \quad c - a \quad \mathbb{Q}.$

- $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{F} > 1, \quad T^n(a, b, c) \quad T^1(0, 1, f) \quad f \in \mathbb{F},$
- $\mathbb{F} = \mathbb{Q}, \quad T^n(a, b, c) \quad T^2((0, 0), (1, 0), (0, 1)).$

. Параллельным переносом \mathbb{F}^n на вектор $-a$ добьемся, чтобы $T^n(a, b, c) \simeq T^n(0, b - a, c - a)$. Компоненты связности графов $T^n(0, b - a, c - a)$ и $T^1(0, 1, f)$ (как и графа $T^2((0, 0), (1, 0), (0, 1))$) разбиваются на несколько типов: содержащие клику, содержащие вершины степени два и не содержащие ни того, ни другого. Оказывается, что в каждом случае структура этих компонент не зависит от размерности n — этот факт позволит построить изоморфизм ψ покомпонентно. Докажем этот факт последовательно для каждого типа компоненты связности.

Шаг 1. Сначала определим ψ на компонентах, содержащих клику или вершины степени два. Заметим, что, согласно предложению 5.2.2, клика размера три, как и вершины степени два, содержится в линейной оболочке $\langle b - a, c - a \rangle$ векторов $b - a$ и $c - a$ над \mathbb{Q} .

1. Если $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{F} > 1$, возьмем $f \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{Q}$ и определим линейное отображение φ следующим образом: $\langle b - a, c - a \rangle \rightarrow \langle 1, f \rangle$ так, чтобы $\varphi(b - a) = 1$, $\varphi(c - a) = f$. Тогда полученное отображение биективно и, по определению, линейно, а значит является изоморфизмом компонент графов $T^n(0, b - a, c - a)$ и $T^1(0, 1, f)$, содержащихся в $\langle b - a, c - a \rangle$ и $\langle 1, f \rangle$ соответственно. Теперь определим $\psi(x) = \varphi(x)$ в точности для тех вершин, которые лежат в компонентах, содержащих клику размера три или вершины степени два.

2. Если $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, то определим линейное отображение $\varphi: \langle b - a, c - a \rangle \rightarrow \mathbb{Q}^2$ так, чтобы $\varphi(b - a) = (1, 0)$, $\varphi(c - a) = (0, 1)$. Тогда, как и в случае 1, полученное отображение будет являться изоморфизмом компонент графа $T^n(0, b - a, c - a)$, содержащихся в $\langle b - a, c - a \rangle$, и $T^2((0, 0), (1, 0), (0, 1))$. В этом случае также определим $\psi(x) = \varphi(x)$ в точности для тех вершин, которые лежат в компонентах, содержащих клику размера три или вершины степени два.

Шаг 2. Теперь перейдем к компонентам, не содержащим клику размера три и вершины степени два. Обозначим множество таких компонент через \mathcal{H}_1 . Прежде всего заметим, что согласно лемме 5.2.4 все эти компоненты изоморфны графу Кэли группы, порожденной тремя отражениями плоскости, т.е. графу, имеющему структуру гексагональной сетки (см. рисунок 6).

Такую же структуру имеют компоненты графа $T^1(0, 1, f)$ в случае 1 (и графа $T^2((0, 0), (1, 0), (0, 1))$ в случае 2), не содержащие клику размера три и вершины степени два — множество таких компонент обозначим через \mathcal{H}_2 . Это означает наличие изоморфизма между произвольной компонентой $H_1 \in \mathcal{H}_1$ в графе $T^n(0, b - a, c - a)$ и произвольной компонентой $H_2 \in \mathcal{H}_2$ в графе $T^1(0, 1, f)$ (соответственно, $T^2((0, 0), (1, 0), (0, 1))$). Можно заметить, что множество \mathcal{H}_1 счетно, как и множество \mathcal{H}_2 (это, например, следует из счетности \mathbb{F} , \mathbb{F}^n и вида компонент связности, описанного в лемме 5.2.3). Это означает, что можно построить покомпонентный изоморфизм ψ подграфов, образованных множествами \mathcal{H}_1 и \mathcal{H}_2 .

Доопределив ψ на компоненты с кликой или вершинами степени два так, как

было описано в шаге 1, получим покомпонентный изоморфизм графов $T^n(0, b - a, c - a)$ и $T^1(0, 1, f)$ (или $T^2((0, 0), (1, 0), (0, 1))$, соответственно). \square

Теорема 5.2.10. $a, b, c \in \mathbb{F}^n$ $T^n(a, b, c)$

• $T^1(0, 1, f)$ $f \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{Q}$ -
;

• $T^1(0, 1, q)$ $q \in \mathbb{Q}, q > 1,$ q

• $T^n(a, b, c)$ $\mathbb{F} = \mathbb{Q},$ $b - a$ $c - a$,
 $T^2((0, 0), (1, 0), (0, 1)).$
 $\Gamma^n(a, b, c),$,
;

• $\Gamma^1(0, 1, f)$ $f \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{Q},$ -
;

• $\Gamma^1(0, 1, q)$ $q \in \mathbb{Q}, q > 1,$ q

• $\Gamma^n(a, b, c)$ $\mathbb{F} = \mathbb{Q},$ $b - a$ $c - a$,
 $\Gamma^2((0, 0), (1, 0), (0, 1)).$

Учитывая предложение 5.0.1, все утверждения, за исключением случая $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, следуют из теорем 5.1.9, 5.2.7, 5.2.9 и леммы 5.2.8.

Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$. Согласно лемме 5.2.8 и теореме 5.2.9, осталось доказать только лишь то, что графы $\Gamma^2((0, 0), (1, 0), (0, 1))$ и $\Gamma^1(0, 1, q)$ при $q \in \mathbb{Q}$ неизоморфны. Из этого, по предложению 5.0.1, будет следовать, что также неизоморфны и графы $T^2((0, 0), (1, 0), (0, 1))$ и $T^1(0, 1, q)$.

Докажем, что графы $\Gamma^2((0, 0), (1, 0), (0, 1))$ и $\Gamma^1(0, 1, q)$ неизоморфны. Действительно, в графе $\Gamma^1(0, 1, q)$ при $q \in \mathbb{Q}$, как было показано в доказательстве теоремы 5.1.9, все вершины степени два содержатся в двух компонентах связности, одна из

которых содержит клику. Напротив, в графе $\Gamma^2((0, 0), (1, 0), (0, 1))$ вершины степени два лежат в трех компонентах связности, причем размера три не лежит ни в одной из них. Это завершает доказательство теоремы. \square

Одним из ключевых объектов исследования в этой диссертации была гипотеза о виде автоморфизмов тотального графа. Эта гипотеза стала отправной точкой для ряда исследуемых в этой работе вопросов. Гипотезу удалось доказать даже в более общем случае: для ориентированных тотальных графов.

Задача описания автоморфизмов входит в класс задач об описании отображений, сохраняющих матричные отношения. Благодаря этой связи, в работе также были охарактеризованы пары отображений, сохраняющие пучковые условия на вырожденность. Этот результат обобщает некоторые полученные ранее в этой области результаты. Он не является вспомогательным для описания автоморфизмов и, тем самым, представляет самостоятельный интерес. Также были описаны пары отображений, сохраняющие вырожденность суммы матриц. Именно на этот результат опиралось доказательство теоремы об описании автоморфизмов тотального графа. В частности, тот факт, что теорему удалось доказать сразу для пары отображений, позволил осуществить описание автоморфизмов не только тотального графа, но и ориентированного тотального графа.

Еще одним аспектом работы является исследование свойств тотального и регулярного графов — их связности, диаметра, хроматического числа. В работе была доказана связность регулярного графа кольца матриц, установлен критерий связности регулярного и тотального графов многочлена, найдены оценки на радиус и диаметр, в отдельных случаях найдены их точные значения. Также над полем нулевой характеристики (или характеристики, превышающей степень многочлена) найдена оценка на кликовое число тотального графа многочлена от двух переменных, множество нулей которого не содержит прямых. С точностью до изоморфизма классифицированы тотальные и регулярные графы трехэлементных множеств над полями нулевой характеристики.

Однако в этой теме осталось еще много открытых и интересных вопросов. В частности, до сих пор неизвестно, является ли бесконечным хроматическое число регулярного графа над полями нулевой характеристики. Есть вероятность, что в продвижении по этому вопросу поможет предложенное в диссертации вложение регулярного графа окружности в граф кольца матриц. Также продвижения

по задаче описания автоморфизмов тотального графа позволяют в перспективе надеяться на доказательство обобщения теоремы Хуа для конечных полей, где условие сохранения когерентности заменяется на условие

$$\text{rk}(A - B) = k \iff \text{rk}(T(A) - T(B)) = k.$$

- [1] S. Akbari, M. Jamaali, S.A. Seyed Fakhari. The clique numbers of regular graphs of matrix algebras are finite, *Linear Algebra and its Applications*, 431 (2009) 1715-1718.
- [2] D.F. Anderson, A. Badawi. The total graph of a commutative ring, *J. Algebra*, 320 (2008) 2706-2719.
- [3] S. Akbari, F. Heydari. The regular graph of a noncommutative ring, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 89(1) (2014) 132-140.
- [4] P.J. Cameron. Research problems from the BCC22, *Discrete Math*, 311 (2011) 1074-1083.
- [5] S. Akbari, M. Aryapoor, M. Jamaali. Chromatic number and clique number of subgraphs of regular graph of matrix algebras, *Linear Algebra Appl.*, 436 (2012) 2419-2424.
- [6] I. Tomon. On the chromatic number of regular graphs of matrix algebras, *Linear Algebra Appl.*, 475 (2015) 154-162.
- [7] У. Фултон. Теория пересечений, , 1989.
- [8] И.Р. Шафаревич. Основы алгебраической геометрии, .: , 589, 2007.
- [9] J. Zhou, D. Wong, X. Ma, Automorphism group of the total graph over a matrix ring, *Linear & Multilinear Algebra* 65(3) (2017), 572-581.

- [10] G. Frobenius, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen, Sitzungsber. Deutsch. Akad. Wiss. (1897), pp. 994-1015.
- [11] D. J. Dieudonné, Sur une généralisation du groupe orthogonal á quatre variables, Arch. Math. 1 (1949), pp. 282-287.
- [12] G. Dolinar, P. Šemrl, Determinant preserving maps on matrix algebras, Linear Algebra Appl. 348 (2002), pp. 189-192.
- [13] V. Tan, F. Wang, On determinant preserver problems, Linear Algebra Appl., 369 (2003), pp. 311-317.
- [14] C. Costara, Nonlinear determinant preserving maps on matrix algebras, Linear Algebra Appl., 583 (2019), pp. 165-170.
- [15] Alexander Guterman, Chi-Kwong Li, Peter Šemrl, Some general techniques on linear preserver problems, Linear Algebra Appl., 315 (2000), pp. 61-81.
- [16] H. Havlicek, P. Šemrl, From geometry to invertibility preservers, Studia Math., 174 (2006), pp. 99–109.
- [17] L.K. Hua, A theorem on matrices over a sfield and its applications, J. Chinese Math. Soc. (N.S) 1 (1951), pp. 110–163.
- [18] C. Costara, Nonlinear invertibility preserving maps on matrix algebras, Linear Algebra Appl., 602 (2020), pp. 216–222.

- [19] P.B. Yale, Automorphisms of the complex numbers, *Math. Mag.* 39 (1966), pp. 135–141.
- [20] M.H. Lim, J.J.H. Tan, Preservers of matrix pairs with bounded distance, *Linear Algebra Appl.*, 422 (2007), pp. 517–525.
- [21] W.-l. Huang, Bounded distance preserving surjections in the geometry of matrices, *Linear Algebra Appl.*, 433 (2010), pp. 1973–1987.
- [22] S. Pierce and others, A survey of linear preserver problems, *Linear & Multilinear Algebra*, 33 (1992), pp. 1–119.
- [23] L. Wang, X. Fang, F. Tian, Automorphisms of the total graph over upper triangular matrices, *J. Algebra Apps.*, 19:8 (2020), 2050161.
- [24] L. Molnar, Selected Preserver Problems on Algebraic Structures of Linear Operators and on Function Spaces, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1895, 2007.
- [25] K. Spindler, *Abstract Algebra with Applications: Rings and Fields*, 1st edition, CRC Press, Boca Raton (1994).
- [26] Cao, C., Zhang, X., Additive Surjections Preserving Rank One and Applications, *Georgian Mathematical Journal*, 11(2) (2004), pp. 209-217.
- [27] S. Lang. *Algebra*, 3rd edition, Springer-Verlag, New York (2002).

- [28] C.-K. Li, N.-K. Tsing, Linear preserver problems: a brief introduction and some special techniques, *Linear Algebra Appl.* 162(164) (1992), pp. 217–235.
- [29] A. Fošner, P. Šemrl, Additive Maps on Matrix Algebras Preserving Invertibility or Singularity, *Acta Math Sinica* 21 (2005), 681–684.
- [30] P. Šemrl, Hua’s fundamental theorems of the geometry of matrices and related results, *Linear Algebra Appl.*, 361 (2003), pp. 161–179.
- [31] C. Lautemann, Linear transformations on matrices: rank preservers and determinant preservers (Note), *Linear & Multilinear Algebra*, 10 (1981), pp. 343–345.
- [32] H. Huang, C.-N. Liu, P. Szokol, M.-C. Tsai, J. Zhang. Trace and determinant preserving maps of matrices. *Linear Algebra Appl.* 507 (2016), pp. 373–388.
- [33] Z.X. Wan. *Geometry of Matrices: In Memory of Professor L. K. Hua (1910–1985)*. Singapore: World Scientific, 1996.

**Статьи в рецензируемых научных изданиях,
рекомендованных для защиты в диссертационном совете
МГУ по специальности**

- [34] C. Costara, A.E. Guterman, A.M. Maksaev, V.V. Promyslov. Automorphisms of the total digraph for the ring of square matrices over a field, *Linear Algebra Appl.*, **666**, 129–143 (2023). В.В. Промысловым доказана теорема 3.8.

DOI: 10.1016/j.laa.2023.03.007

Журнал индексируется в **WoS, Scopus**. IF: WoS 1.307, SJR 0.851.

- [35] А.Е. Guterman, А.М. Maksaev, V.V. Promyslov. Pairs of maps preserving singularity on subsets of matrix algebras, *Linear Algebra Appl.*, **644**, 1-27 (2022).
В.В. Промысловым доказаны теоремы 2.4, 2.5 и следствие 2.8.

DOI: 10.1016/j.laa.2022.02.035

Журнал индексируется в **WoS, Scopus**. IF: WoS 1.307, SJR 0.851.

- [36] А.М. Максаев, В.В. Промыслов. О тотальном и регулярном графах многочлена, *Известия Академии наук Республики Татарстан*, **23(4)**, 113–142 (2021).
В.В. Промысловым доказаны теоремы 3.6, 4.7 и 4.8. Результаты раздела 2, а также теорема 4.8 получены совместно с А.М. Максаевым.

English transl.: On Total and Regular Graphs of a Polynomial, *J. Math. Sc.*, **269**, 523-543 (2023).

DOI: 10.1007/s10958-023-06298-0

Журнал индексируется в **Scopus, RSCI**. IF: SJR 0.357.

- [37] В.В. Промыслов. Классификация тотальных и регулярных графов трёхточечных множеств, *Известия Академии наук Республики Татарстан*, **514**, 167-192 (2022);

English transl.: Classification of the Total and Regular Graphs of Three-Point Sets, *J. Math. Sc.*, **272**, 592-607 (2023).

DOI: 10.1007/s10958-023-06452-8

Журнал индексируется в **Scopus, RSCI**. IF: SJR 0.357.

- [38] В.В. Промыслов. Классификация регулярных графов трёхточечных множеств, *Известия Академии наук Республики Татарстан*, том 25, № 4, с. 205-208 (2021).

<http://intsysjournal.org/pdfs/25-4/Promyslov.pdf>

Журнал индексируется в **РИНЦ**.

- [39] Максаев А.М., Промыслов В.В. Отображения матричной алгебры, сохраняющие пучковое условие на вырожденность, *XIII -*
Сборник научных трудов по итогам конференции, 22–25 *2021*, Белорусская наука
(Минск), том 1, с. 111-113.

<https://mmf.bsu.by/wp-content/uploads/2021/11/tom1-A4.pdf>

- [40] Kanunnikov A.L., Promyslov V.V., Vassilieva E.A. A labelled variant of the matchings-Jack and hypermap-Jack conjectures, *Proceedings of the 30th Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (Hanover)*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire, 80B.45 (2018), 12 pp.

<https://www.mat.univie.ac.at/slc/wpapers/FPSAC2018/>