

О Т З Ы В официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук Гаражи Александры Андреевны
на тему: «Инварианты Жордана–Кронекера пары элементов алгебры Ли»,
по специальности 1.1.5 — «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика»

Диссертация Гаражи Александры Андреевны посвящена исследованиям в классической области алгебры и теории интегрируемых систем — теории вполне интегрируемых бигамильтоновых систем на классических простых алгебрах Ли. Одной из важных проблем гамильтоновой механики является поиск вполне интегрируемых гамильтоновых систем или, что то же самое, полных систем функций в инволюции. Эта проблема имеет и квантовый аналог — поиск полных коммутирующих наборов некоммутативных гамильтонианов — и активно исследуется в теории деформационного квантования. Таким образом, представленная А.А. Гаражей диссертация относится к важному разделу алгебры и теории интегрируемых систем и посвящена актуальному направлению исследований.

С конца 70-х годов 20-го века, после работ Магри, Гельфанда и Дорфмана, обнаружилось, что интегрируемость гамильтоновых систем тесно связана с их бигамильтоновостью, что означает, что функции находятся в инволюции относительно не просто одной скобки Пуассона, а относительно целого пучка скобок. Бигамильтоновы структуры удалось с тех пор обнаружить в большинстве известных интегрируемых гамильтоновых систем. Несмотря на это, вопрос построения биинтегрируемых систем по заданной паре согласованных скобок Пуассона до сих пор открыт. Диссертация Гаражи Александры Андреевны является вкладом в решение этого вопроса.

Точнее, исследования Александры Андреевны являются продолжением алгебраического подхода, описанного в работе Болсинова и Чжан 2016 года, который, в свою очередь, является обобщением метода сдвига аргумента Мищенко-Фоменко. В 1978 году Мищенко и Фоменко предложили такой универсальный способ построения интегрируемых систем на алгебрах Ли, являющийся обобщением конструкции Манакова. Впоследствии разными авторами (Браилов, Болсинов, Зуев, Винберг, Шува-лов) было предложено несколько подходов к обобщению метода сдвига аргумента. В частности, возникла гипотеза о том, что для любого элемента $A \in g^*$ можно построить полную систему функций в биинволюции относительно двух скобок Пуассона, одна из которых — стандартная скобка Ли-Пуассона на пространстве g^* , а вторая строится некоторым образом по элементу A .

В рамках подхода Болсинова-Чжана эти скобки Пуассона рассматриваются как кососимметрические билинейные формы на пространстве $g \otimes \mathbb{C}(g)$. Далее, чтобы получить полное семейство функций в биинволюции на g^* , достаточно найти базис билагранжева подпространства и «проинтегрировать» его. Для этого используется классическая теорема Жордана-Кронекера о каноническом виде пары кососимметрических билинейных форм. Эта теорема говорит о том, что для любой пары кососимметрических билинейных форм можно найти каноническим базис, в котором пара форм приводится к

блочно-диагональному виду с блоками двух типов: жордановыми и кронекеровыми. Из явного вида блоков следует, что вторые половины базисов каждого блока составляют базис билагранжева подпространства. Искомый базис распадается на две части: жорданову и кронекерову. Для того, чтобы найти кронекерову часть канонического базиса, используется классический метод Кронекера. Таким образом, задача поиска полной системы функций в биинволюции сводится к задаче поиска канонического базиса. Если применить этот подход в случае редуکتивной алгебры Ли и регулярного элемента, то получается метод сдвига аргумента.

Диссертация А.А. Гаражи описанный подход применяется в случае простых алгебр Ли и в том числе сингулярных элементов в них. Известные результаты, касающиеся вышеописанной гипотезы и подхода к ней, принадлежат Ворушилову (2021), а также Молеву и Якимовой (2015- 2019 годы, Якимова является одним из научных руководителей Гаражи). Диссертантке удалось продвинуться в проверке гипотезы для разных классических простых алгебр Ли и элементов в них, хотя и не удалось сделать это для всех элементов и всех простых алгебр. Эта задача оставлена на будущее.

Кроме этой гипотезы, в диссертации изучается взаимосвязь индексов Кронекера скобок Пуассона с пластами алгебры Ли g (максимальными неприводимыми G -орбитами фиксированной размерности), а также доказывается, что для полупростых элементов построенные полные системы функций в биинволюции свободно порождают некоторые предельные подалгебры Мищенко-Фоменко (такие подалгебры изучались ранее в работах Винберга и Шувалова).

Диссертация содержит 70 страниц и состоит из введения, 4 глав и заключения. Список литературы содержит 30 работ, из которых три принадлежат Гараже А.А., а также 2 тезиса докладов Гаражи А.А..

Перейдем к рассмотрению содержания диссертации.

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, рассмотрена история вопроса, приведены основные работы по теме, сформулированы цели и задачи диссертационного исследования, приведены основные положения, выносимые на защиту, рассмотрена структура диссертации, а также подробно изложено содержание работы, обоснована научная новизна и приведены сведения об апробации диссертации.

В Главе 1 приводятся основные понятия и конструкции, используемые в диссертации: полные системы функций в биинволюции, алгебраический подход к построению полных систем функций в биинволюции, метод Кронекера нахождения канонического базиса для кронекеровых блоков, метод сдвига аргумента Мищенко-Фоменко.

В Главе 2 дается описание кронекеровой части полной системы функций в биинволюции на алгебре Ли $gl_n(\mathbb{C})$ с помощью метода Кронекера. Основным результатом здесь является теорема 2.1, в которой строится кронекерова часть полной системы функций в биинволюции относительно двух скобок Пуассона, одна из которых определяется по произвольному элементу алгебры.

В Главе 3 дается описание кронекеровой части полной системы функций в биинволюции на классических простых алгебрах Ли. А именно, для алгебр Ли $sl_n(\mathbb{C})$ и $sp_n(\mathbb{C})$ эти части строятся для

скобок Пуассона, одна из которых определяется по произвольному элементу алгебры, а для алгебр $so_n(\mathbb{C})$ – только для скобок, одна из которых определяется по "хорошим" или "исправимым" элементам (они определяются там же). В этой же главе исследуются индексы Кронекера внутри слоев (максимальных неприводимых G -орбит фиксированной размерности) этих простых алгебр Ли.

Глава 4 содержит наиболее важные результаты работы: в ней строится полная система функций в бинволюции относительно двух скобок Пуассона, одна из которых определяется по произвольному элементу алгебры в случае алгебр $sl_n(\mathbb{C})$ и $sp_n(\mathbb{C})$, а для алгебр $so_n(\mathbb{C})$ – только для скобок, одна из которых определяется по "хорошим" полупростым элементам. Кроме того, в этой главе исследуется связь построенных полных систем функций и предельных подалгебр Мищенко-Фоменко.

В заключении, помимо краткого описания полученных результатов, представлены дальнейшие перспективы исследований.

Автореферат соответствует содержанию диссертации, точно отражая все основные положения и полученные результаты.

Результаты диссертационной работы, выносимые на защиту, получены автором лично, являются новыми, строго доказаны и опубликованы со всеми нужными подробностями в ведущих рецензируемых научных журналах, удовлетворяющих положению о присуждении учёных степеней в МГУ.

Конструкции и доказательства диссертационной работы показывают хороший уровень подготовленности диссертанта в этой области современной математики, а также общий уровень математической культуры. Диссертация изложена ясным языком и достаточно объемно и иллюстративно оформлена.

В качестве замечаний отметим следующее:

1) Хотелось бы более подробно осветить связь и отличие полученных автором результатов с ранее полученными результатами Ворушилова, Молева и Якимовой, упомянутых выше.

2) Можно было бы упомянуть и сравнить аналогичные результаты и обобщения метода сдвига аргумента с точки зрения квантования коммутативных алгебр, полученные в работах Рыбникова, Шарыгина и др.

3) В тексте диссертации имеется незначительное количество опечаток.

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.5. «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова. Таким образом, соискатель Гаража Александра Андреевна заслуживает

присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5. «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика».

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,
профессор кафедры дифференциальной геометрии и приложений
механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

Контактные данные:

тел. 7(495)939-39-40, e-mail: alexander.zheglov@math.msu.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена диссертация: 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Адрес места работы:

119991, г. Москва, Ленинские горы, д.1, МГУ им. М.В. Ломоносова,
механико-математический факультет

А. Б. Жеглов

Подпись А.Б. Жеглова удостоверяю: