МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИСТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Высоцкий Алексей Олегович

Нелинейные методы наблюдения для динамических систем с неопределенностью

1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2024

Диссертация подготовлена на кафедре нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель: **Фомичев Василий Владимирович**
доктор физико-математических наук

Официальные оппоненты: **Магарил-Ильяев Георгий Георгиевич**
доктор физико-математических наук, профессор, МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра общих проблем управления, профессор

Уткин Антон Викторович
доктор технических наук, ИПУ РАН, лаборатория 37, ведущий научный сотрудник

Канатников Анатолий Николаевич
доктор физико-математических наук, доцент, МГТУ им. Н.Э. Баумана, кафедра математического моделирования, профессор

Защита диссертации состоится "6" ноября 2024 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета МГУ.011.8 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: Россия, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, главное здание МГУ, ауд. 16-10.

E-mail: ast.diffiety@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале:
https://dissovet.msu.ru/dissertation/3114

Автореферат разослан "27" сентября 2024 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.8,
д.ф.-м.н., профессор Чечкин Григорий Александрович

Актуальность темы исследования. Диссертация является исследованием в области математической теории управления. В ней рассматриваются вопросы синтеза наблюдателей состояния для динамических систем. С математической точки зрения все динамические системы можно представить как некое отображение из множества входных сигналов в множество выходных. В рамках работы рассматриваются системы, для которых это отображения задается с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнения выхода.

При этом, для решения задач управления чаще всего бывает необходимо иметь информацию обо всем состоянии объекта управления, а не только об измеряемом выходном сигнале системы. При этом не всегда на практике известны значения всех входных сигналов объекта управления. Решение задач управления при наличии такого рода неопределенности является одним из наиболее актуальных разделов современной теории управления. Задача наблюдения для динамической системы заключается в том, чтобы по имеющейся имеющейся информации о системе получить оценку всего неизвестного вектора состояния системы.

На основании предложенных С.В. Емельяновым и С.К. Коровиным[1] алгоритмов скольжения высших порядков, автором разработан новый метод решения задачи наблюдения для линейных стационарных систем управления с неопределенностью. Системы такого вида используются для описания многих объектов управления, в том числе нелинейных, с помощью метода линеаризации приводимых к рассматриваемой форме. В связи с этим, исследование таких систем является актуальным и интересным с практической точки зрения.

Отметим, что наблюдатели могут использоваться при решении других задач управления, если подход к решению предполагает полноту

[1] *Емельянов С. В., Коровин С. К.* Новые типы обратной связи: Управление при неопределенности. М. : Наука, 1997. С. 352.

информации о состоянии системы. К таким задачам могут быть отнесены задачи стабилизации[2,3,4] , обращения[5,6,7] и слежения[8,9,10] .

Степень разработанности темы. В простейшем случае, для линейных стационарных систем с известными входными воздействиями, задача может быть решена с использованием только линейных обратных связей[11]. Однако добавление в систему управления даже ограниченного внешнего возмущения значительно сокращает применимость линейных обратных связей в построении наблюдателей.

Для систем с неопределенностью предлагались разные методы построения наблюдателей. Простейшие подходы к решению задачи наблюдения для неопределенных систем основываются на использовании только линейных обратных связей. Так например некоторых работах

[2] *Li Z.*, *Wen C.*, *Soh Y.* Observer-based stabilization of switching linear systems // Automatica. 2003. Vol. 39, no. 3. P. 517–524.

[3] *Caravani P.*, *De Santis E.* Observer-based stabilization of linear switching systems // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2009. Vol. 19, no. 14. P. 1541–1563.

[4] *Sun L.*, *Zheng Z.* Disturbance-Observer-Based Robust Backstepping Attitude Stabilization of Spacecraft Under Input Saturation and Measurement Uncertainty // IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2017. Vol. 64, no. 10. P. 7994–8002.

[5] *Ильин А. В.*, *Коровин С. К.*, *Фомичев В. В.* Алгоритмы обращения линейных скалярных динамических систем: метод управляемой модели // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33, № 3. С. 329—339.

[6] *Ильин А. В.*, *Коровин С. К.*, *Фомичев В. В.* Алгоритмы обращения управляемых линейных систем // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34, № 6. С. 744—750.

[7] *Ильин А. В.*, *Коровин С. К.*, *Фомичев В. В.* Робастное обращение векторных линейных систем // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34, № 11. С. 1478—1486.

[8] *Liu C.-S.*, *Peng H.* Disturbance Observer Based Tracking Control // Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. 1997. May. Vol. 122, no. 2. P. 332–335.

[9] Disturbance Observer-Based Adaptive Tracking Control With Actuator Saturation and Its Application / H. Pan [et al.] // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. 2016. Vol. 13, no. 2. P. 868–875.

[10] Distributed finite-time tracking control for multi-agent systems: An observer-based approach / Y. Zhao [et al.] // Systems & Control Letters. 2013. Vol. 62, no. 1. P. 22–28.

[11] *Luenberger D.* An introduction to observers // IEEE Transactions on Automatic Control. 1972. Vol. 16. P. 596–602.

работах[12,13] исследовалась возможность применения наблюдателей с классической структурой наблюдателей Люенбергера. Такой подход в построении наблюдателей накладывает существенные ранговые ограничения на исходную систему и в общем случае неприменим. Существует и другой подход к построению наблюдателей, использующий только линейные обратный связи. Так, в нескольких работах[14,15] предлагались наблюдатели, основанные на использовании глубоких обратных связей, то есть, линейных обратных связей с большими коэффициентами усиления. Однако использование таких обратных связей на практике затруднительно, и позволяют получать оценки только заданной точности, но не асимптотически точные.

Другая группа методов построения наблюдателей для систем с неопределенностью, называемая обычно методами H_∞, основывается, как правило, на использовании пропорционально-интегральных (ПИ) обратных связей. В работах[16,17] , где разрабатывается методология построения таких наблюдателей, с помощью методов теории линейных матричных неравенств, решается задача наблюдения в следующей постановке: необходимо построить такие оценки, которые были бы асимптотически точными в отсутствие внешних возмущений, и при этом норма $||T(s)||_\infty$ передаточной функции $T(s)$ от неизвестного входного сигнала к ошибке

[12] *Darouach M.*, *Zasadzinski M.*, *Xu S.* Full-order observers for linear systems with unknown inputs // IEEE Transactions on Automatic Control. 1994. Vol. 39. P. 606–609.

[13] *Darouach M.*, *Zasadzinski M.*, *Hayar M.* Reduced-order Observer Design for Descriptor Systems with Unknown Inputs // IEEE Transactions on Automatic Control. 1996. Vol. 41. P. 1068–1072.

[14] *Ильин А. В.*, *Коровин С. К.*, *Фомичев В. В.* Алгоритмы обращения управляемых линейных систем // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34, № 6. С. 744—750.

[15] *Goncharov O.*, *Fomichev V.* Observer for multivariable systems of arbitrary relative order // Computational Mathematics and Modeling. 2013. Vol. 24, no. 2. P. 182–202.

[16] *Marx B.*, *Koenig D.*, *Georges D.* Robust fault diagnosis for linear descriptor systems using proportional integral observers // Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control. 2004. Vol. 1. P. 457–462.

[17] New unified H_∞ dynamic observer design for linear systems with unknown inputs. / N. Gao [et al.] // Automatica. 2016. Vol. 65. P. 43–52.

оценивания была бы минимальной для рассматриваемого класса обратных связей. Недостатком таких методов является то, что в случае наличия в системе неопределенностей, они могут не давать асимптотически точных оценок фазового вектора системы.

Еще одним часто используемым[18,19] подходом для решения поставленной задачи являются алгоритмы наблюдения, основанные на использовании скользящих режимов высоких порядков. При этом даже для случая малых относительных порядков существующие условия, обеспечивающие точность получаемых оценок, не являются исчерпывающими. Для систем, обладающих большим относительным порядком показано, что наблюдатели предлагаемой структуры при должном выборе параметров дают асимптотически точные оценки вектора состояния. Однако в общем случае не существует алгоритмов выбора параметров наблюдателей, гарантирующих асимптотическую точность полученных оценок.

Цель диссертационной работы. Цель работы состоит в разработке новых методов построения наблюдателей для динамических систем с неопределенностью. Для достижения этой цели были поставлены следующие задачи:

1. Получить необходимые и достаточные условия устойчивости нулевого решения для базовой системы управления второго порядка, замкнутой с помощью алгоритма скольжения второго порядка (алгоритма “super-twisting”). Далее эту замкнутую систему управления будем называть ST системой.

2. Исследовать свойства динамики ST системы при вариации пара-

[18] *Levant A.* Sliding Order and Sliding Accuracy in Sliding Mode Control // International Journal of Control. 1993. Vol. 58. P. 1247–1263.

[19] *Levant A.* Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control // International Journal of Control. 2003. Vol. 76. P. 924–941.

метра нелинейности.

3. Исследовать свойства динамики ST системы при наличии погрешности измерения выходного сигнала системы.

4. Исследовать свойства динамики ST системы при наличии неидеальностей в релейных элементах системы.

5. Обобщить метод построения наблюдателей для систем со вторым относительным порядком на случай произвольного относительного порядка. Получить достаточные условия асимптотической точности получаемых оценок фазового вектора системы.

Методы исследования. Основные результаты получены с использованием методов теории дифференциальных уравнений, математического анализа, матричных методов линейной алгебры и дифференциальной геометрии.

Степень достоверности результатов. Достоверность полученных результатов обеспечивается строгими математическими доказательствами сформулированных утверждений и подтверждается результатами численных экспериментов.

Научная новизна. Разработан новый метод построения наблюдателя состояния (далее называемого каскадным) для динамических систем с неопределенностью и изучены его свойства, в частности в диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. Получено решение для ST системы с “наихудшим” возмущением. На основании решения получено новое доказательство критерия устойчивости системы, в том числе при вариации параметра нелинейности.

2. Получены оценки области притяжения нулевого решения для ST

системы при неклассических значения параметра нелинейности алгоритма.

3. Получены точные оценки области, в которую сходятся траектории ST системы при наличии погрешности измерений.

4. Получены оценки области, в которую гарантированно сходятся решения ST системы при наличии типичных неидеальностей релейных элементов.

5. Разработан алгоритм построения и получены достаточные условия асимптотической точности оценок для каскадного наблюдателя состояния для систем с неопределенностью.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретический характер. Разработанные автором методы построения наблюдателей могут быть использованы для решения практических задач, в которых требуется построение оценок состояния динамических систем с неопределенностью, в том числе при условии неидеальности элементов переключения и при наличии погрешности измерения выхода систем.

Положения, выносимые на защиту:

1. Необходимые и достаточные условия устойчивости и оценки для траекторий ST системы, в том числе при вариации параметра нелинейности.

2. Оценки области притяжения нулевого решения для ST системы при вариации степени нелинейного слагаемого.

3. Точные оценки области, в которую сходятся траектории ST системы при наличии погрешности измерения выхода.

4. Оценки области, в которую гарантированно сходятся решения ST системы при условии неидеальности релейных элементов элементов системы.

5. Метод построения каскадного наблюдателя состояния для систем с неопределенностью и достаточные условия точности получаемых с его помощью оценок.

Апробация работы. Представленные в работе результаты были неоднократно представлены на семинаре на кафедре НДСиПУ факультета ВМК МГУ, а также на следующих российских и международных конференциях:

- научной конференции «Всероссийское совещание по проблемам управления» (Москва, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова, 17–20 июня 2019 г.).

- научной конференции «Ломоносовские чтения 2020» (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 20 откября – 02 ноября 2020 г.);

- научной конференции «Ломоносовские чтения 2021» (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 20–29 апреля 2021 г.);

- научной конференции «Ломоносовские чтения 2022» (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 14–22 апреля 2021 г.);

- научной конференции «Тихоновские Чтения 2022» (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 24–29 октября 2022 г.);

- международной научной конференции “Modern aspects of applied mathematics” (Shenzhen, MSU-BIT University, 6–7 декабря 2022)

- научной конференции «Тихоновские Чтения 2023» (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 30 октября – 03 ноября 2023 г.);

- научной конференции «Всероссийское совещание по проблемам управления» (Москва, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова, 17-20 июня 2024 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 6 статьях в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ, в том числе в 6 работах в изданиях, индексируемых в базе ядра РИНЦ ''eLibrary Science Index'', при этом переводные версии 5 статей опубликованы в журналах, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus.

Личный вклад автора. Все приводимые в работе результаты сформулированы и доказаны автором лично. Результаты других авторов, упомянутые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 97 страниц текста, 6 иллюстраций. Список литературы содержит 51 наименование.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость предложенных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе приводится постановка задачи наблюдения для линейных стационарных динамических систем с возмущениями. Для решения указанной задачи система приводится к особой форме. Для простейшего случая первого относительного порядка системы приводится решение задачи.

Рассматривается система, заданная уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B'u(t) + B\eta(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{1.1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – неизвестный вектор состояния динамической системы, $u(t) \in \mathbb{R}$ – известное входное воздействие (управление) системы, $\eta(t) \in \mathbb{R}$ – неизвестное входное воздействие (возмущение) системы, $y(t) \in \mathbb{R}$ – измеряемый выходной сигнал. Матрицы A, B', B, C постоянные, их размеры согласованы с указанными размерами входов, выхода и состояния, то есть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B' \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$. Система рассматривается при $t \geq 0$, начальное состояние системы неизвестно.

Основной задачей, решаемой в работе, является построение оценки $\bar{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ вектора состояния $x(t)$ системы (1.1) по известной информации о системе: матрицах A, B', B, C, входном воздействии $u(t)$ и выходном сигнале $y(t)$. Требуется асимптотическая точность получаемой оценки, т.е. чтобы $||\bar{x}(t) - x(t)|| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Дополнительно делаются следующие предположения относительно системы:

Предположение 1.1. Управление системы $u(t)$ является непрерывной функцией времени.

Предположение 1.2. Возмущение системы $\eta(t)$ является измеримой и ограниченной функцией времени, причем известна ее мажоранта, т.е. число $\eta_0 \in \mathbb{R}$, такое что $|\eta(t)| \leq \eta_0$ для $\forall t \in [0; +\infty)$.

Предположение 1.3. Пара матриц $\{A, B\}$ управляема, а пара матриц $\{C, A\}$ наблюдаема.

Предположение 1.4. Все инвариантные нули системы (1.1) лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости:

В силу Предположения 1.3, система (1.1) невырожденным преобразованием координат и выхода приводится к канонической форме с выделением нулевой динамики:

$$\begin{cases} \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 + b'_1 u, \\ \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{n-r-1} = \tilde{x}_{n-r} + b'_{n-r-1} u, \\ \dot{\tilde{x}}_{n-r} = -\tilde{C}_1 \tilde{x}_1 - \tilde{C}_2 \tilde{x}_2 - \cdots - \tilde{C}_{n-r} \tilde{x}_{n-r} + b'_{n-r} u + y, \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 + b''_1 u, \\ \vdots \\ \dot{y}_{r-1} = y_r + b''_{r-1} u, \\ \dot{y}_r = -\sum\limits_{i=1}^{n-r} \alpha_i \tilde{x}_i - \sum\limits_{j=1}^{r} \beta_j y_j + b''_r u + \eta, \end{cases} \\ y = y_1. \end{cases} \tag{1.2}$$

В матричной форме система может быть записана как

$$\begin{cases} \dot{x}' = A_1 x' + b' u + b_y y, \\ \dot{y}' = A_2 y' + A_{12} x' + b'' u + b_\eta \eta, \end{cases}$$

где $b_y = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n-r}$, $b_\eta = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^r$.

В силу Предположения 1.4 для части x' вектора состояния системы, находящейся в канонической форме (1.2), может быть построена асимптотически точная оценка $\bar{x}'$ с помощью наблюдателя вида:

$$\dot{\bar{x}}' = A_1 \bar{x}' + b' u + b_y y. \tag{1.3}$$

Задача наблюдения для системы (1.1) свелась таким образом к задаче построения оценки для части y' вектора состояния системы (1.2).

В случае, когда относительный порядок системы (1.1) $r = 1$, задача тривиальна, поскольку единственный компонент y_1 подсистемы, которую требуется оценить, является измеряемым выходом.

Подсистема для части y' вектора состояния может, в свою очередь, невырожденным преобразованием координат быть приведена к виду

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}}_1 = -\beta_r \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + b_1^u u, \\ \dot{\tilde{y}}_2 = -\beta_{r-1} \tilde{y}_1 + \tilde{y}_3 + b_2^u u, \\ \vdots \\ \dot{\tilde{y}}_{r-1} = -\beta_2 \tilde{y}_1 + \tilde{y}_r + b_{r-1}^u u, \\ \dot{\tilde{y}}_r = -\beta_1 \tilde{y}_1 - \sum\limits_{i=1}^{n-r} \alpha_i \tilde{x}_i + b_r^u u + \eta, \\ y = \tilde{y}_1, \end{cases} \tag{1.4}$$

где коэффициенты α_i и β_j те же, что в канонической форме с выделенной нулевой динамикой (1.2).

Основные результаты главы опубликованы в работе [1].

Во второй главе рассматривается базовый случай второго относительного порядка системы (1.1), то есть решается задача наблюдения для системы (1.4) в случае, когда $r = 2$.

В этой главе используется следующие обозначения:

- Для вещественного числа x

$$\lceil x \rfloor^\alpha = \mathrm{sign}(x)|x|^\alpha.$$

Конкретизируем рассматриваемую во второй главе задачу. Рассматривается следующая система управления:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}}_1 = -\beta_2 \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + b_{u,1} u, \\ \dot{\tilde{y}}_2 = -\beta_1 \tilde{y}_1 - \sum\limits_{i=1}^{n-2} \alpha_i \tilde{x}_i + b_{u,2} u + \eta, \end{cases}$$

$$y = \tilde{y}_1.$$

Требуется по известной информации о системе построить асимптотически точную оценку компонента $\tilde{y}_2$.

Для решения поставленной задачи в работе предлагается использовать систему наблюдателя следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{\bar{y}}_1 = -\beta_2 y + \bar{y}_2 + b_1^u u + k\lceil e_1 \rfloor^{\alpha}, \\ \dot{\bar{y}}_2 = -\beta_1 y - \sum\limits_{i=1}^{n-2} \alpha_i \bar{x}_i' + b_2^u u + \mu \lceil e_1 \rfloor^{0}, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $e_1 = \tilde{y}_1 - \bar{y}_1 = y - \bar{y}_1$, $\bar{x}_i'$ – оценки $\tilde{x}_i$, полученные с помощью наблюдателя (1.3). $k > 0$, $\mu > 0$, $0 < \alpha < 1$ – числовые параметры наблюдателя.

Система в отклонениях для такого наблюдателя будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - k\lceil e_1 \rfloor^{\alpha}, \\ \dot{e}_2 = -\mu \lceil e_1 \rfloor^{0} + \xi(t), \end{cases} \tag{2.2}$$

где $e = \tilde{y} - \bar{y}$, а новый неизвестный входной сигнал $\xi(t)$ определяется соотношением

$$\xi(t) = \eta(t) - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i (\tilde{x}_i - \bar{x}_i') = \eta(t) - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i e_{x,i}.$$

В силу асимптотической точности оценок $\bar{x}_i'$, можно считать, что входной сигнал $\xi(t)$ в системе (2.2) всюду ограничен, т.е.

$$|\xi(t)| \leq \xi_0,$$

и его мажоранта ξ_0 известна.

Рассматриваемая в этом разделе задача наблюдения сводится таким образом к выбору параметров k, μ и α наблюдателя, таких чтобы система (2.2) была бы устойчивой при любом измеримом ограниченном внешнем возмущении $\xi(t)$.

Начинается рассмотрение этой задачи с наиболее исследованного в литературе случая, когда параметр $\alpha = 1/2$:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - k\lceil e_1 \rfloor^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{e}_2 = -\mu \lceil e_1 \rfloor^{0} + \xi(t). \end{cases}$$

Алгоритм управления, используемый в этой системе известен[20,21,22] как алгоритм ‘‘super-twisting’’ — часто используемый в задачах теории управления для систем с неопределенностью алгоритм, порождающий скользящий режим второго порядка.

В работе показано, что траектории системы

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - k\lceil e_1 \rfloor^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{e}_2 = -\mu\lceil e_1 \rfloor^{0} + \xi^*(t), \end{cases} \tag{2.3}$$

где

$$\xi^*(t) = \xi_0 \mathrm{sign}\dot{e}_1(t) = \xi_0 \mathrm{sign}(e_2(t) - k\lceil e_1(t) \rfloor^{\frac{1}{2}}),$$

будут ограничивать область, в которой будут находиться траектории системы (2.2) с любым $\xi(t)$ из рассматриваемого класса и теми же начальными условиями. Это означает, для доказательства устойчивости системы (2.2) необходимо и достаточно доказать устойчивость системы (2.3) с ‘‘наихудшим’’ возмущением $\xi^*(t)$.

Для системы (2.3) в работе было получено полное аналитическое решение, и, с его помощью, точные оценки траекторий системы и новый вид критерия устойчивости системы (2.2):

Теорема 2.1. *Нулевое решение системы* (2.2) *с параметром* $\alpha = 1/2$ *глобально асимптотически устойчиво при любом ограниченном измеримом входным сигнале* $|\xi(t)| \leq \xi_0$ *тогда и только тогда, когда*

$$\nu(\mu, \xi_0, k) < 1,$$

[20]*Емельянов С. В., Коровин С. К., Левантовский Л. В.* Скользящие режимы высших порядков в бинарных системах управления // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287, № 6. С. 1338—1342.

[21]*Levant A.* Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control // International Journal of Control. 2003. Vol. 76. P. 924–941.

[22]Sliding Mode Control and Observation / L. Fridman [et al.]. Springer, 2014. 320 p.

где

$$\nu = \begin{cases} \nu_1, & 0 < k < \sqrt{8(\mu - \xi_0)}, \\ \nu_2, & \sqrt{8(\mu - \xi_0)} \le k < \sqrt{8(\mu + \xi_0)}, \\ 0, & k \ge \sqrt{8(\mu + \xi_0)}, \end{cases}$$

где

$$\nu_1(\mu, \xi_0, k) = \sqrt{\frac{\mu + \xi_0}{\mu - \xi_0}} \exp\left\{ \frac{-k\pi + k \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{8(\mu+\xi_0)-k^2}}{k}}{\sqrt{8(\mu + \xi_0) - k^2}} - \frac{k \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{8(\mu-\xi_0)-k^2}}{k}}{\sqrt{8(\mu - \xi_0) - k^2}} \right\},$$

$$\nu_2(\mu, \xi_0, k) = \sqrt{\frac{2p_1(\mu + \xi_0)}{kp_1 + (\mu - \xi_0)}} \left(\frac{p_2(kp_1 + (\mu - \xi_0))}{p_1(kp_2 + (\mu - \xi_0))} \right)^{M_2}$$
$$\exp\left\{ \frac{-k\pi + k \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{8(\mu+\xi_0)-k^2}}{k}}{\sqrt{8(\mu + \xi_0) - k^2}} \right\},$$

где $p_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 8(\mu - \xi_0)}}{4}$, $M_2 = \frac{-p_2}{p_1 - p_2}$.

Кроме того, показано, что для любых ξ_0, μ существует единственное $k_0(\mu, \xi_0)$, такое, что $\nu(\mu, \xi_0, k_0) = 1$. Системы с $k < k_0$ будут в этом случае неустойчивы, системы с $k = k_0$ будут устойчивы, но не асимптотически, а системы с $k > k_0$ будут глобально асимптотически устойчивы.

На основании полученных для случая $\alpha = 1/2$ результатов, были получены критерии устойчивости для системы (2.2) с произвольным значением параметра α из интервала $0 < \alpha < 1$. Были доказаны следующие утверждения:

Теорема 2.2. *Нулевое решение системы* (2.2) *с* $0 < \alpha < 1/2$, $\mu > \xi_0$ *и* $k > 0$ *является локально асимптотически устойчивым. При этом ни при каком выборе параметров* μ *и* k *оно не будет являться глобально устойчивым. Область устойчивости системы содержит множество, ограниченное траекторией системы*

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - k_0 \lceil e_1 \rfloor^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{e}_2 = \xi^* - \mu \lceil e_1 \rfloor^{0}, \end{cases}$$

где $k_0 = k_0(\mu, \xi_0)$, *с начальным условием* $(0, e_2^0)$, *удовлетворяющим неравенству*

$$\begin{cases} |e_2^0| < \sqrt{2v}\exp\left\{\frac{k_0}{\sqrt{8v-k_0^2}}(\operatorname{arctg}\frac{k_0}{\sqrt{8v-k_0^2}} + \operatorname{arctg}\frac{4v-k_0^2}{k_0\sqrt{8v-k_0^2}})\right\}\sqrt{e_{1,max}}, & k_0^2 < 8v, \\ |e_2^0| < \frac{v+k_0p_1}{p_1}\left(\frac{p_1(v+k_0p_2)}{p_2(v+k_0p_1)}\right)^{M_2}\sqrt{e_{1,max}}, & k_0^2 \geq 8v, \end{cases}$$

где $v = \mu - \xi_0$, $e_{1,max} = \left(\frac{k}{k^*}\right)^{\frac{2}{1-2\alpha}}$

Теорема 2.3. *Нулевое решение системы* (2.2) *с* $1/2 < \alpha < 1$, *не является устойчивым ни для каких* $\mu > \xi_0$ *и* $k > 0$. *При этом, траектории системы сходятся при любых значениях параметров* $\mu > \xi_0$ *и* $k > 0$ *в некую ограниченную область, содержащую область, ограниченную траекториями системы*

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - k_0\lceil e_1\rfloor^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{e}_2 = \xi^* - \mu\lceil e_1\rfloor^0, \end{cases}$$

где $k_0 = k_0(\mu, \xi_0)$, *с начальными условиями* $(0, e_2^0)$, *удовлетворяющими неравенству*

$$\begin{cases} |e_2^0| < \sqrt{2b}\exp\left\{\frac{k_0}{\sqrt{8v-k_0^2}}(\operatorname{arctg}\frac{k_0}{\sqrt{8v-k_0^2}} + \operatorname{arctg}\frac{4v-k_0^2}{k_0\sqrt{8v-k_0^2}})\right\}\sqrt{e_{1,min}}, & k_0^2 < 8v, \\ |e_2^0| < \frac{v+k_0p_1}{p_1}\left(\frac{p_1(v+k_0p_2)}{p_2(v+k_0p_1)}\right)^{M_2}\sqrt{e_{1,min}}, & k_0^2 \geq 8v, \end{cases}$$

где $e_{1,min} = \left(\frac{k_*}{k}\right)^{\frac{2}{2\alpha-1}}$

В следующем разделе главы были исследованы свойства наблюдателя (2.1) при наличии погрешности измерения выходного сигнала системы, то есть при использовании такого наблюдателя для системы вида

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}}_1 = -\beta_2\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + b_{u,1}u, \\ \dot{\tilde{y}}_2 = -\beta_1\tilde{y}_1 - \sum\limits_{i=1}^{n-2}\alpha_i\tilde{x}_i + b_{u,2}u + \eta, \end{cases}$$

$$y = \tilde{y}_1 + \delta,$$

где $\delta = \delta(t)$ – измеримая ограниченная функция, причем известна ее мажоранта $|\delta(t)| \leq \Delta$.

Ошибка оценивания $e = \tilde{y} - \bar{y}$ в этом случае будет удовлетворять уравнениям

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - k\lceil e_1 + \delta \rfloor^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{e}_2 = \xi - \mu\lceil e_1 + \delta \rfloor^{0}, \end{cases} \tag{2.4}$$

Было доказано следующее утверждение

Теорема 2.4. *Система (2.4) с ограниченной погрешностью $|\delta(t)| \leq \Delta$, и такими $\mu > \xi_0$, $k > 0$, что $\nu(\mu, \xi_0, k) < 1$, сходится в область*

$$|e_2| \leq \sqrt{2\Delta(\mu + \xi_0)\frac{2}{1-\nu^2}} = |e_2'|,$$
$$|e_1| \leq \Delta + \bar{e}_{1,max},$$

где

$$\bar{e}_{1,max} = \begin{cases} \frac{(e_2')^2}{2v} \exp\left\{\frac{-2k}{\sqrt{8v-k^2}}\left(\operatorname{arctg}\frac{k}{\sqrt{8v-k^2}} + \operatorname{arctg}\frac{4v-k^2}{k\sqrt{8v-k^2}}\right)\right\}, & k^2 < 8v, \\ \left(\frac{-e_2' p_1}{-v-kp_1}\right)^2 \left(\frac{p_2(v+kp_1)}{p_1(v+kp_2)}\right)^{2M_2}, & k^2 \geq 8v. \end{cases}$$

Завершает вторую главу исследование характеристик предложенного наблюдателя в случае, когда элементы переключения в системе наблюдателя неидеальны. Были рассмотрены три типичных вида неидеальности элементов реле: зона нечувствительности, гистерезис, и задержка.

Были получены оценки для областей сходимости ошибок оценивания в этих случаях. Так, если в системе наблюдателя (2.1) вместо идеальных реле имеются реле с неидеальностью типа зона нечувствительности:

$$\mathrm{sign}_{ins}(x) = \begin{cases} 1, & x > \Delta_{ins}, \\ -1, & x < -\Delta_{ins}, \\ 0, & |x| \leq \Delta_{ins}, \end{cases}$$

где $\Delta_{ins} > 0$ — константа, определяющая величину зоны нечувствительности, то доказано, что траектории системы в отклонениях $e = \tilde{y} - \bar{y}$ будут сходиться в область, размеры которой удовлетворяют неравенствам, приведенным в Теореме 2.4 с $\Delta = \Delta_{ins}$:

$$|e_2| \leq \sqrt{2\Delta_{ins}(\mu + \xi_0)\frac{2}{1-\nu^2}},$$
$$|e_1| \leq \Delta_{ins} + \bar{e}_{1,max},$$

Для систем с реле с неидеальностью типа гистерезис:

$$\mathrm{sign}_h(x(t)) = \begin{cases} 1, & x > \Delta_h, \\ -1, & x < -\Delta_h, \\ \mathrm{sign}(x(\tau(t))), & |x| \leq \Delta_h, \end{cases}$$

где $\tau(t) = \sup\{\tau < t : |x(\tau)| = 1\}$, $\Delta_h > 0$ — действительная константа, было доказано аналогичное неравенство для области сходимости ошибки наблюдения:

$$|e_2| \leq \sqrt{2\Delta_h(\mu + \xi_0)\frac{2}{1-\nu^2}},$$
$$|e_1| \leq \Delta_h + \bar{e}_{1,max}.$$

Наконец, для систем с задержкой в элементах переключения:

$$\mathrm{sign}_\tau(x(t)) = \mathrm{sign}(x(t-\tau))$$

было доказано, что при $t \to \infty$ координаты пересечения оси $e_1 = 0$ траекторией системы в отклонениях не могут быть меньше

$$e_2^* = \frac{\tau\nu(\mu - \xi)}{1 - \nu}.$$

Основные результаты главы опубликованы в работах [3-6].

В третьей главе автором был предложен метод построения оценок вектора состояния системы (1.4) произвольного порядка $r > 2$.

Перед построением асимптотической оценки вектора состояния системы, строится вспомогательный наблюдатель:

$$\begin{cases} \dot{\bar{y}}_1 = -\beta_r y + l_1(y - \bar{y}_1) + \bar{y}_2 + b_1^u u \\ \dot{\bar{y}}_2 = -\beta_{r-1} y + l_2(y - \bar{y}_1) + \bar{y}_3 + b_2^u u \\ \vdots \\ \dot{\bar{y}}_{r-1} = -\beta_2 y + l_{r-1}(y - \bar{y}_1) + \bar{y}_r + b_{r-1}^u u \\ \dot{\bar{y}}_r = -\beta_1 y + l_r(y - \bar{y}_1) - \sum\limits_{i=1}^{n-r} \alpha_i \bar{x}_i' + b_r^u u, \end{cases} \tag{3.1}$$

Ошибка оценивания $\varepsilon = \tilde{y} - \bar{y}$ при использовании такого наблюдателя будет удовлетворять уравнениям:

$$\dot{\varepsilon} = A_l \varepsilon + b\xi(t), \tag{3.2}$$

где

$$\xi(t) = \eta(t) - \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i(\tilde{x}_i - \bar{x}_i') = \eta(t) - \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i e_{x,i}.$$

Не нарушая общности, можно считать, что входной сигнал $\xi(t)$ в системе (3.2) всюду ограничен, т.е.

$$|\xi(t)| \le \xi_0.$$

Коэффициенты l_i выбираются таким образом, что матрица A_l гурвицева. Из этого следует, что с некоторого момента времени будет справедлива оценка

$$|\varepsilon(t)| < \varepsilon_0.$$

Таким образом, задача оценивания фазового вектора $\tilde{y}$ сводится к оцениванию вектора состояния $\varepsilon(t)$ системы (3.2), причем известна оценка для нормы этого вектора и первый компонент $\varepsilon_1 = y - \bar{y}_1$.

Для получения оценки вектора состояния системы (3.2) предлагается использовать каскадный наблюдатель

$$\begin{cases} \begin{cases} \dot{\tilde{\varepsilon}}_1 = -l_1 y_\varepsilon + \bar{\varepsilon}_2 + k_1 \lceil y_\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_1 \rfloor^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{\bar{\varepsilon}}_2 = -l_2 y_\varepsilon + \mu_1 \lceil y_\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_1 \rfloor^0, \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{\tilde{\varepsilon}}_2 = -l_2 y_\varepsilon + \bar{\varepsilon}_3 + k_2 \lceil \bar{\varepsilon}_2 - \tilde{\varepsilon}_2 \rfloor^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{\bar{\varepsilon}}_3 = -l_3 y_\varepsilon + \mu_2 \lceil \bar{\varepsilon}_2 - \tilde{\varepsilon}_2 \rfloor^0, \end{cases} \\ \dots \\ \begin{cases} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{r-1} = -l_{r-1} y_\varepsilon + \bar{\varepsilon}_r + k_{r-1} \lceil \bar{\varepsilon}_{r-1} - \tilde{\varepsilon}_{r-1} \rfloor^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{\bar{\varepsilon}}_r = -l_r y_\varepsilon + \mu_{r-1} \lceil \bar{\varepsilon}_{r-1} - \tilde{\varepsilon}_{r-1} \rfloor^0. \end{cases} \end{cases} \tag{3.3}$$

Доказано, что при соответствующем выбора параметров наблюдателя k_i и μ_i компоненты $\bar{\varepsilon}_i$ будут являться асимптотически точными оценками компонент ε_i системы (3.2). Таким образом, решена поставленная исходно задача построения оценки состояния системы (1.1):

Теорема 3.1. *Пусть для системы* (1.1) *выполнены Предположения 1.1, 1.2, 1.3 и 1.4. Тогда для неизвестного вектора состояния x (с точностью до невырожденных преобразований) системы* (1.1) *может быть построена асимптотически точная оценка с помощью наблюдателей вида* (1.3), (3.1) *и* (3.3). *Параметры l_i наблюдателя* (3.1) *должны быть выбраны таким образом, что матрица A_l – гурвицева. Параметры μ_i и k_i каскадного наблюдателя* (3.3) *должны быть выбраны таким образом, что*

$$\begin{cases} \nu(\mu_i, \varepsilon_0, k_i) < 1, \quad 1 \le i \le r-2, \\ \nu(\mu_{r-1}, \xi_0, k_{r-1}) < 1, \end{cases}$$

В завершении главы была рассмотрена возможность понижения общей размерности каскадного наблюдателя для системы (3.2) за счет использования в каскаде систем порядков 3 и 4.

Основные результаты главы опубликованы в работах [1,2].

В заключении подводятся итоги выполненного исследования и приводятся основные результаты.

Заключение

Основные результаты работы автора заключаются в следующем.

1. Приведен алгоритм сведения задачи наблюдения для линейных систем с неопределенностью общего вида к задаче наблюдения для систем максимального относительного порядка особой структуры.

2. Для случая второго относительного порядка предложен метод построения наблюдателя систем с неопределенностью, сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия асимптотической точности получаемых с помощью такого наблюдателя оценок. Для случаев, когда система уравнения для ошибки наблюдения не является глобально асимптотически устойчивой, получены оценки области локальной устойчивости системы.

3. Для двумерного случая получены точные оценки ошибки оценивания в случае наличия в системе погрешности измерения выходного сигнала.

4. Получены оценки области, в которую сходятся траектории двумерной системы при наличии в системе некоторых типов неидеальности элементов переключения: гистерезиса, зоны нечувствительности, и задержки.

5. На основании результатов для двумерного случая, для случая произвольного относительного порядка предложен метод построения каскадного наблюдателя. Получены достаточные условия асимптотической точности получаемых оценок.

6. Предложен алгоритм построения каскадного наблюдателя, состоящего из систем более высоких размерностей.

Результаты диссертационной работы могут быть интересны специалистам по дифференциальным уравнения, теории управления, скользящим режимам высших порядков.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю — доктору физико-математических наук Василию Владимировичу Фомичеву — за постановку задач и всестороннюю поддержку на всех этапах работы.

Автор также выражает благодарность коллективу кафедры Нелинейных динамических систем и процессов управления факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова за поддержку и предоставленные ему благоприятные условия для работы.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ:

1. Фомичев В. В., Высоцкий А. О. Каскадный метод построения наблюдателей для систем с неопределенностью // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 11. — С. 1533–1539. — (RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0.855). Перевод:
   Fomichev V. V., Vysotskii A. O. Cascade observer design method for systems with uncertainty // Differential Equations. — 2018. — Vol. 54, no. 11. — P. 1509–1516. — (RSCI, Web of Science, Scopus, Five Year Impact Factor 2022 — 0.6, SJR — 0.57).
   А.О. Высоцкому принадлежат все теоремы.

2. Фомичев В. В., Высоцкий А. О. Алгоритм построения каскадного асимптотического наблюдателя для системы с максимальным относительным порядком // Дифференциальные уравнения. — 2019. — Т. 55, № 4. — С. 567–573. — (RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0.855). Перевод:
   Fomichev V. V., Vysotskii A. O. Algorithm for designing a cascade asymptotic observer for a system of maximal relative order // Differential Equations. — 2019. — Vol. 55, no. 4. — P. 553–560. (RSCI, Web of Science, Scopus, Five Year Impact Factor 2022 — 0.6, SJR — 0.57).
   А.О. Высоцкому принадлежат все теоремы.

3. Высоцкий А.О. Наблюдатели для динамических систем с неопределенностью при условии неидеальности реле // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. — 2022 — № 1. — С. 3-8. — (RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0.245).

4. Фомичев В. В., Высоцкий А. О. Точная оценка ошибки наблюдения

для алгоритма «супер-скручивания» при наличии погрешности измерений // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т. 58, № 12. — С. 1716–1718. — (RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0.855) Перевод:
Fomichev V. V., Vysotskii A.O. Sharp Observation Error Estimate for the "Super-Twisting" Algorithm in the Presence of Measurement Error // Differential Equations. – 2022. – Vol. 58, No. 12. – P. 1704-1707. — (RSCI, Web of Science, Scopus, Five Year Impact Factor 2022 — 0.6, SJR — 0.57).
А.О. Высоцкому принадлежат все теоремы.

5. Фомичев В. В., Высоцкий А. О. Критерий устойчивости и точные оценки для алгоритма «супер-скручивания» // Дифференциальные уравнения. — 2023. — Т. 59, № 2. — С. 252–256. — (RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0.855). Перевод:
Fomichev V. V., Vysotskii A. O. Stability criterion and sharp estimates for the "super-twisting" algorithm // Differential Equations. — 2023. — Vol. 59, no. 2. — P. 260–264. — (RSCI, Web of Science, Scopus, Five Year Impact Factor 2022 — 0.6, SJR — 0.57).
А.О. Высоцкому принадлежат все теоремы.

6. Фомичев В. В., Высоцкий А. О. О вариации параметра нелинейности в алгоритме "super-twisting" // Дифференциальные уравнения. — 2023. — Т. 59, № 11. — С. 1571–1574. — (RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0.855). Перевод:
Fomichev V. V., Vysotskii A. O. On the variation of the nonlinearity parameter in the "super-twisting" algorithm // Differential Equations. — 2023. — Vol. 59, no. 11. — P. 1579–1582. — (RSCI, Web of Science, Scopus, Five Year Impact Factor 2022 — 0.6, SJR — 0.57).
А.О. Высоцкому принадлежат все теоремы.

Научное издание

Высоцкий Алексей Олегович

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук на тему:

Нелинейные методы наблюдения для динамических систем с неопределенностью