

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

*На правах рукописи*

Соляев Юрий Олегович

**Неклассические масштабные эффекты  
в прикладных моделях градиентной теории  
упругости и электроупругости**

Специальность 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Москва – 2022

Работа выполнена в лаборатории "Неклассические модели механики композиционных материалов и конструкций" в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт прикладной механики Российской академии наук.

Научный консультант: Лурье Сергей Альбертович,  
доктор технических наук, профессор

Официальные оппоненты: Гуткин Михаил Юрьевич,  
доктор физико-математических наук,  
ФГБУН Институт проблем машиноведения  
Российской академии наук,  
главный научный сотрудник.

Ерофеев Владимир Иванович,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
ФГБУН Институт проблем машиностроения  
Российской академии наук – филиал  
ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр  
Институт прикладной физики  
Российской академии наук», директор.

Никабадзе Михаил Ушангиевич  
доктор физико-математических наук, доцент,  
Московский государственный университет  
имени М.В. Ломоносова, профессор.

Защита состоится 16 декабря 2022 года в 15:00 на заседании диссертационного совета МГУ.011.6 (МГУ.01.14) Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119192, Москва, Мичуринский проспект, д. 1, к. 240.

E-mail: [chist206@yandex.ru](mailto:chist206@yandex.ru)

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский проспект, д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»: <https://istina.msu.ru/dissertations/498461777>

Автореферат разослан «\_\_\_» октября 2022 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
МГУ.011.6 (МГУ.01.14),  
кандидат физико-  
математических наук

П.В. Чистяков

## Общая характеристика работы

В отличие от классических моделей механики деформируемого твердого тела, в градиентной теории упругости (ГТУ) предполагается, что энергия деформаций среды зависит не только от самих деформаций, но и от их пространственных производных. Это приводит к тому, что в определяющих соотношениях ГТУ возникают константы различной размерности и, как следствие, появляется возможность описания масштабных эффектов. Уравнения равновесия ГТУ, получаемые на основе вариационного подхода, обладают повышенным четвертым порядком, а формулировка начально-краевых задач содержит расширенный набор граничных условий.

С одной стороны, возникновение дополнительных материальных констант и повышение порядка уравнений приводит к усложнению теории. Однако, с другой стороны, ГТУ предоставляет возможность более аккуратного описания явлений и процессов, в которых градиенты деформаций оказываются достаточно велики на масштабном уровне характерных размеров рассматриваемых объектов. В частности, ГТУ предоставляет возможность корректного описания эффектов пространственной дисперсии высокочастотных упругих волн. В ГТУ возникает возможность учета влияния размера включений на эффективные свойства композитов. ГТУ обеспечивает регуляризацию решений для классических сингулярных задач о трещинах, дислокациях и сингулярных точках. Численные решения ГТУ обладают сеточной сходимостью при рассмотрении задач с негладкой геометрией и разрывными граничными условиями. Определяющие соотношения ГТУ позволяют описывать механическое поведение материалов с учетом особенностей их микроструктуры. Решения для элементов конструкций в ГТУ предоставляют возможность уточненного описания условий их закрепления за счет наличия расширенного спектра граничных условий.

Формулировка общей изотропной ГТУ впервые была предложена в работах Р. Тупина и Р. Миндлина. В 1960-х годах многими, в том числе российскими, авторами рассматривался частный случай ГТУ – моментная теория упругости, в которой учитывается вклад в энергию деформаций градиентов от ротатора перемещений. Позднее, в 70-90-х годах XX века, фундаментальные результаты в градиентных теориях были получены в работах П. Жермена, Н. Эшела, И.А. Кунина, Ж. Можена, К. Ру и Э. Айфантиса, Д. Хатчинсона и Н. Флека, М.Ю. Гуткина и Э. Айфантиса, Д. Лама и др.. С начала 2000-х годов в этой области проводятся активные исследования. Обзор наиболее значимых работ зарубежных авторов представлен в диссертации. В России градиентной теории упругости были посвящены работы С.А. Лурье и П.А. Белова, В.В. Васильева

и С.А. Лурье, Д.Б. Волкова-Богородского и С.А. Лурье, Е.В. Ломакина, С.А. Лурье и Л.Н. Рабинского, В.И. Ерофеева. Задачи и приложения моментной теории упругости (псевдоконтинуум Коссера, модель Койтера) рассматривались в работах В.И. Ерофеева, М.А. Кулеш, В.П. Матвеевко и И.Н. Шардакова, Д.В. Тарлаковского, П.В. Трусова и П.С. Волегова, и других авторов.

В диссертации также рассматриваются задачи и проблемы градиентной теории электроупругих сред, которая впервые была сформулирована в работе *Kalpakides, Agiasofitou, Journal of Elasticity (2002)*, как обобщение теории пьезоэлектрических сред, градиентной теории упругости и теории диэлектриков с естественной оптической активностью.

### **Актуальность темы исследования**

Градиентные теории обеспечивают получение уточненных решений для задач с высокой концентрацией напряжений, которая может реализовываться вблизи дефектов, дислокаций или включений, в малоразмерных структурах (микрорантелиферах, пленках, наночастицах), в неоднородных средах, а также в условиях высокочастотных динамических процессов. Соответственно, построение таких уточненных решений может быть полезным при разработке новых микро/нано- механических устройств, при моделировании и прогнозе свойств наноструктурированных материалов, при исследовании процессов распространения высокочастотных волн в упругих средах. Важнейшей задачей также является разработка численных методов в рамках физически обоснованных градиентных теорий для создания конечно-элементных решателей, в которых не возникает проблемы сеточной расходимости решений в моделях с негладкой геометрией и разрывными граничными условиями.

Развитие методов градиентной теории электроупругости (ГТЭ) является важной задачей с точки зрения описания масштабных эффектов в пьезоэлектриках. В современной компонентной базе пьезоэлектрические материалы применяются в различных преобразователях, резонаторах, сенсорах, в частотных фильтрах, при этом тенденцией является уменьшение размеров применяемых устройств и повышение их рабочих частот, что требует привлечения адекватных расчетных моделей.

Таким образом, рассматриваемые в данной диссертации проблемы, связанные с построением корректных прикладных моделей в рамках ГТУ и ГТЭ, определением классов явлений, для которых возможно и необходимо применять эти градиентные теории, разработкой методов построения аналитических и численных решений, являются **актуальными задачами**. Более того, решение рассматриваемых проблем направлено и на разработку достоверных ме-

тодов идентификации дополнительных материальных констант градиентных теорий, что является принципиально важным с точки зрения их практического применения.

### **Цели и задачи**

Целью диссертации является развитие аналитических и численных моделей и методов построения решений в градиентной теории упругости и электроупругости для достоверного и корректного описания масштабных эффектов, возникающих в упругих и пьезоэлектрических материалах и в элементах конструкций. Целью также является развитие методов идентификации дополнительных параметров градиентных теорий.

В задачи диссертации входит построение и анализ корректности градиентных балочных теорий, в том числе, на основе модифицированного вариационного подхода и тестовых полуобратных решений. Решаются задачи о включениях и рассматриваются проблемы реализации различных методов осреднения в градиентных теориях в приложении к задачам прогноза эффективных свойств композитов с учетом размера включений. Строятся новые численные и аналитические решения задач с концентрацией напряжений, которые, в том числе используются для описания известных экспериментальных данных в отношении масштабного эффекта прочности в хрупких и квази-хрупких материалах. Решается задача построения корректной динамической градиентной теории электро-упругости. Развиваются методы построения решений в перемещениях в градиентных теориях на основе предложенного упрощенного аналитического представления решения в форме Папковича-Нейбера для ГТУ, а также в рамках смешанного метода конечных элементов и метода Треффца.

### **Научная новизна**

Все включенные в диссертацию результаты являются новыми. Предложены новые аналитические и численные методы построения решений в ГТУ и ГТЭ. Построены новые масштабозависимые решения для задач о сферических и цилиндрических включениях. Впервые получено доказательство эквивалентности прямых и энергетических методов осреднения в рассматриваемых теориях. Продемонстрирована возможность описания масштабного эффекта прочности хрупких и квази-хрупких материалов на основе численного моделирования и концепции концентрации напряжений в ГТУ. Предложен модифицированный критерий прочности для оценки разрушающих нагрузок на основе ГТУ в условиях смешанной I/II моды в зонах с концентраторами напряжений. Проведена идентификация масштабных параметров градиентных теорий на основе экс-

периментальных данных для широкого класса материалов. Впервые в рамках ГТУ решена обобщенная задача Фламана, на основе которой определен класс градиентных теорий, в которых возможна регуляризация решений вблизи нагруженных острых кромок. Предложена новая формулировка динамической ГТЭ, позволяющей корректно описывать эффекты пространственной дисперсии.

### **Теоретическая и практическая значимость работы**

Теоретическая значимость работы определяется построенными новыми аналитическими решениями, которые могут быть использованы как для тестирования прикладных моделей (градиентных балочных теорий, численных решателей), так и для упрощенной и быстрой обработки экспериментальных данных. Предложено новое упрощенное представление общего решения уравнений равновесия ГТУ, использование которого является удобным при построении аналитических решений широкого класса задач.

Практическая значимость работы определяется развитием методов численного моделирования в рамках градиентных теорий, которые могут быть использованы для построения сходящихся решений, не зависящих от размера сетки, в задачах с линейно упругими телами с негладкой геометрией или с разрывными граничными условиями. Практическая значимость также определяется развитием и реализацией методов идентификации масштабных параметров градиентных теорий, в том числе на основе численной обработки результатов испытаний образцов с различными концентраторами.

### **Методология и методы исследования**

Формулировка рассматриваемых градиентных теорий основана на использовании вариационного подхода. Все решения построены в предположении линейных физических соотношений и малых деформаций.

В задачах осреднения рассматриваются и сравниваются прямые и энергетические методы, реализованные в рамках ГТУ и ГТЭ для композитов со сферическими и цилиндрическими включениями.

Аналитические решения для задач изгиба в ГТУ и ГТЭ строятся с использованием модифицированного варианта полуобратного метода Сен-Венана с заданием граничных условий относительно результирующих. Градиентные балочные теории, рассматриваемые в диссертации, построены на основе гипотез Бернулли-Эйлера. Трехмерные аналитические и численные решения используются для проверки корректности известных вариантов балочных теорий в ГТУ и ГТЭ.

Решение задач о включениях и решение обобщенной задачи Фламана строятся в перемещениях с использованием представления Папковича-Нейбера, для неклассических потенциалов которого получены универсальные и упрощенные представления, основанные на известной структуре решения векторного уравнения Гельмгольца в криволинейных системах координат.

Замкнутые аналитические решения для антиплоских задач осреднения в ГТЭ получены с использованием метода замены переменных, позволяющего использовать известные решения для задач упругости и электростатики в несвязанной постановке.

Идентификация масштабных параметров градиентных теорий реализована на основе сопоставления расчетных и известных экспериментальных данных по зависимости эффективных свойств неоднородных сред от размера включений и по зависимости разрушающей нагрузки от размеров концентратора в различных типах образцов хрупких и квази-хрупких материалов.

Численное моделирование реализовано на основе смешанного метода конечных элементов с введением дополнительной аппроксимации для вторых производных от перемещений. Сходимость реализованного МКЭ проверена сопоставлением с аналитическими решениями при увеличении плотности сетки, а также с альтернативными численными решениями, построенными методом Треффца.

Корректная динамическая ГТЭ построена с учетом вклада градиентных инерционных эффектов в плотность кинетической энергии среды. Примеры решений построены для объемных и поверхностных гармонических волн сдвига в электростатическом приближении.

Все примеры численных расчетов реализованы в Comsol (смешанный метод конечных элементов для пользовательских моделей) и в Wolfram Mathematica.

### **Положения, выносимые на защиту**

1. Общее решение в перемещениях для уравнений равновесия ГТУ может быть представлено в виде аддитивного разложения на классическую часть, представляемую в стандартной форме Папковича-Нейбера, и градиентную часть, для которого используется модифицированное разложение Гельмгольца. Предлагаемое представление позволяет свести решение задачи ГТУ к отысканию скалярных потенциалов, которые удовлетворяют уравнению Лапласа и модифицированному уравнению Гельмгольца.
2. Построенные аналитические и численные решения для задач о включениях и реализованные методы осреднения в ГТУ и в ГТЭ позволяют описывать повышение эффективных механических и электромеханических характеристик композиционных материалов при уменьшении разме-

ра включений и при отсутствии их агломерации. Причиной возникающего масштабного эффекта является дополнительное условие непрерывности нормальных градиентов перемещений (и потенциала поля) на границе контакта фаз.

3. Показано, что прямые и энергетические подходы к определению эффективных свойств неоднородных сред в ГТУ и ГТЭ эквивалентны, что позволяет использовать численное моделирование и замкнутые решения прямых методов для достоверного прогноза эффективных свойств композитов с учетом размера включений. Отличие в прогнозах прямых методов возникает при осреднении тензоров концентрации по объему включений, что приводит к погрешностям при больших объемных содержаниях малоразмерных включений.
4. Предложенный полубратный метод для решения задач изгиба в градиентных теориях позволяет построить замкнутые трехмерные решения и проверить корректность одномерных градиентных балочных теорий. Построенные полубратные решения и предложенный модифицированный вариационный подход позволили сформулировать новую градиентную теорию пьезоэлектрических балок.
5. Реализованный смешанный метод конечных элементов позволяет получать достоверные сходящиеся решения для задач ГТУ и ГТЭ, содержащих области с угловыми точками, трещинами и сосредоточенными нагрузками.
6. На основе численного моделирования в ГТУ показана возможность описания размерных эффектов в отношении зависимости номинальной прочности хрупких и квази-хрупких материалов от длины и ориентации трещин. Обработка данных по испытаниям образцов с различными типами трещин позволяет идентифицировать дополнительные масштабные параметры ГТУ. Для прогноза разрушающих нагрузок в условиях смешанной I/II моды в рамках ГТУ необходимо привлекать обобщенный критерий, учитывающий триаксиальность напряженного состояния.
7. На основе построенных асимптотических решений для обобщенной задачи Фламана установлен класс градиентных теорий, которые обеспечивают регуляризацию поля перемещений, деформаций и напряжений, и, как следствие, отсутствие сеточной зависимости решений в задачах для тел с нагруженными острыми кромками.
8. Предложенная формулировка динамической ГТЭ, учитывающая градиентные инерционные эффекты, позволяет корректно описывать нормаль-



ную пространственную дисперсию высокочастотных объемных и поверхностных электроакустических волн.

### **Степень достоверности и апробация результатов**

Достоверность полученных результатов определяется применяемыми строгими методами механики деформируемого твердого тела, привлечением вариационных принципов для формулировки моделей, использованием апробированных подходов микромеханики композиционных материалов, методов теории дифференциальных уравнений и векторного анализа. Проводится сопоставление решений, получаемых на основе различных аналитических и численных методов, для оценки корректности последних. Для подтверждения результатов расчетов и идентификации дополнительных параметров моделей, проводится сопоставление результатов моделирования с известными экспериментальными данными.

Результаты диссертационной работы докладывались на российских и международных конференциях, семинарах и симпозиумах: 16th European Mechanics of Materials Conference (2018 г., Нант, Франция), 10th European Solid Mechanics Conference (2018 г., Болонья, Италия), международная конференция "Advanced Problems in Mechanics" (2015, 2019 гг., Санкт-Петербург), XI и XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механике (2015, Казань; 2019, Уфа), конференция Mechanics of Composites, Mechcomp 3 (Болонья, Италия, 2017), конференциях "Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред" (2017, 2018, 2019, 2020, 2021, Москва, ИПРИМ РАН), международный симпозиум "IUTAM Symposium – Generalized continua emerging from microstructures" (2021, Париж, Франция), международный семинар Advances in ELAstoDYNamic, NonLinear mechanics and Stability of architected materials and structures (2021, Париж, Франция, CNRS).

### **Публикации по теме диссертации**

Основные результаты диссертационной работы изложены в 22 печатных работах, из которых 21 опубликованы в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах Web of Science, Scopus и RSCI, и 1 статья опубликована в сборнике трудов конференции, индексируемом в Scopus.

### **Личный вклад автора**

Результаты, представленные в диссертации, получены автором лично. Во всех опубликованных работах вклад автора является определяющим. Автор принимал активное участие в постановке научных задач, разработке теоретических моделей и построении аналитических решений, проведении численного

моделирования, анализе полученных результатов и предоставлении их в печати. Непосредственное построение решений для задач о включениях, задач об изгибе балок и задачи Фламана, реализация численных решателей в виде программного кода в Wolfram Mathematica и в виде пользовательских моделей в Comsol, обработка экспериментальных данных были выполнены автором лично. Постановка задач о чистом изгибе балки и анализ построенных решений для задач с концентрацией напряжений в ГТУ – были выполнены совместно с С.А. Лурье, Е.В. Ломакиным, Л.Н. Рабинским [2, 4, 7, 9, 16]. Анализ масштабных эффектов в решениях ГТУ и ГТЭ – совместно с С.А. Лурье, В.А. Короленко, А.Д. Устенко [1, 3, 5, 6, 8, 10, 13, 18, 19]. Формулировка концепции концентрации напряжений для численных решателей в задачах механики разрушения – совместно с В.В. Васильевым и С.А. Лурье [17]. Анализ вариационной постановки и граничных условий в различных формулировках ГТУ – совместно с С.А. Лурье, А.Л. Каламкаровым, Н. Altebach, F. dell’Isola [20, 21].

### **Объем и структура диссертации**

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Текст диссертации составляет 295 страниц, включая 90 рисунков и 2 таблицы. Список цитируемой литературы содержит 388 наименований.

### **Содержание работы**

**В первой главе** диссертации представлен аналитический обзор литературы, посвященной масштабным эффектам в механике материалов и конструкций. Изложены основные известные экспериментальные данные в области рассматриваемых в диссертации проблем и известные ранее методы их теоретического описания. В частности, указано место градиентных теорий среди известных подходов к описанию влияния размера включений на свойства композиционных материалов. Представлено описание известных экспериментальных данных относительно размерозависимых характеристик микро-кантиливеров и тонких пленок. Указано, что в настоящее время существуют различные подходы для моделирования и трактовки указанных явлений, основанные как на учете градиентных эффектов, так и, например, на учете поверхностных свойств материалов в рамках моделей типа Гуртина-Мердока или учета межфазных слоев (для композитов) на основе моделей многослойных включений.

Представлено обсуждение известного размерного эффекта прочности в хрупких и квази-хрупких материалах, содержащих трещины и дефекты. Дано описание известных альтернативных подходов, которые применяются в нелинейной

механики разрушения, в частности, в рамках теории З. Базанта и когезионных моделей типа Баренблатта-Дагдейла, в теории критических расстояний и др. Указано, что в таких моделях, как и в классической линейно упругой механике разрушения, присутствуют масштабные параметры, определяющие размер зоны предразрушения (или критический размер трещины), корреляция которых с масштабными параметрами ГТУ в том числе, обсуждается в диссертации.

Изложены известные теоретические и экспериментальные данные относительно дисперсионных соотношений и эффектов пространственной дисперсии для волн высокочастотных диапазонов в упругих и пьезоэлектрических средах. Перечислены основные известные результаты в области обобщенных континуумов, которые получены ранее при описании эффектов пространственной дисперсии в упругих средах. Определены требования к формулировке корректных динамических градиентных теорий, на основе которых в работе формулируется динамическая ГТЭ.

В первой главе также изложены основные особенности математической формулировки градиентных теорий, которые позволяют их применять к моделированию указанных классов масштабных эффектов. Показано, что с точки зрения теории размерности, при включении в определение функции состояния среды градиентов от основных переменных модели, в определяющих соотношениях всегда можно ввести дополнительные масштабные параметры, которые определяют пропорциональность стандартных и дополнительных (градиентных) материальных констант, отличающихся по размерности на квадрат длины. По своему физическому смыслу эти масштабные параметры определяют прогнозируемую протяженность неклассических эффектов, реализующихся в распределении полей деформаций, напряжений и т.д. в решениях конкретных задач. Показано, что большинство известных подходов к идентификации дополнительных масштабных параметров градиентных теорий основаны на моделировании различных классов размерных эффектов.

**Во второй главе** представлены формулировки рассматриваемых в диссертации градиентной теории упругости изотропных сред в форме Миндлина-Тупина и градиентной теории электро-упругости.

Для изотропного линейно упругого тела, занимающего область  $\Omega$  с границей  $\partial\Omega$ , содержащей ребра  $\partial\partial\Omega$ , плотность энергии деформаций в общей теории Миндлина-Тупина записывается в следующем виде:

$$u(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta} \dot{ : } \mathbf{A} \dot{ : } \boldsymbol{\eta} \quad (1)$$

где  $\mathbf{C}$  – это классический тензор модулей упругости,  $\mathbf{A}$  – тензор шестого ранга, содержащий дополнительные материальные константы градиентной теории;

$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$  – тензор бесконечно малых деформаций;  $\boldsymbol{\eta} = \nabla \boldsymbol{\varepsilon}$  – тензор третьего ранга градиентов деформаций;  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  – вектор перемещений в точке  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ ;  $\nabla$  – оператор набла; точками обозначены свертки между тензорными величинами.

Определяющие соотношения ГТУ для классических напряжений Коши  $\boldsymbol{\tau}$  и для градиентных напряжений  $\boldsymbol{\mu}$  (double stress) имеют вид:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\eta} \quad (2)$$

Физический смысл градиентных напряжений  $\boldsymbol{\mu}$  – это реакция среды на возникновение неоднородного поля деформаций. Структура тензоров материальные констант  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{A}$  в компонентном представлении имеет вид:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} A_{ijklmn} &= A_{jiklmn} = A_{ijkmln} = A_{lmnijk} \\ &= a_1 (\delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + \delta_{in} \delta_{jk} \delta_{lm} + \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{lm}) \\ &+ a_2 \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} \\ &+ a_3 (\delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} + \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{ln} + \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{ln} + \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{mn}) \\ &+ a_4 (\delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{kn}) \\ &+ a_5 (\delta_{il} \delta_{jn} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kl}) \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\lambda, \mu$  [Н/м<sup>2</sup>] – это классические параметры Ламе, и  $a_i$  ( $i = 1...5$ ) [Н] – дополнительные градиентные модули.

В диссертации рассматриваются различные варианты градиентных теорий, отличающихся предположением о значениях градиентных модулей  $a_i$ . В том числе рассматривается так называемая упрощенная ГТУ, в которой вводится один масштабный параметр  $\ell$  на основе соотношений:

$$\begin{aligned} a_1 = a_3 = a_5 = 0, \quad a_2 = \lambda \ell^2, \quad a_4 = \mu \ell^2 &\implies A_{ijklmn} = \ell^2 \delta_{kn} C_{ijlm} \\ \implies \mu_{ijk} = \ell^2 (\lambda \delta_{ij} \varepsilon_{u,k} + 2\mu \varepsilon_{ij,k}) &= \ell^2 \tau_{ij,k} \quad \text{то есть} \quad \boldsymbol{\mu} = \ell^2 \nabla \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad (5)$$

Постановка краевой задачи ГТУ следует из вариационного принципа мини-

мума полной потенциальной энергии и в отсутствии объемных сил имеет вид:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}}, \quad \text{или} \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, & \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ \mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}} \quad \text{или} \quad \partial_n \mathbf{u} = \bar{\mathbf{g}}, & \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ \mathbf{t}_e = \bar{\mathbf{t}}_e \quad \text{или} \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}_e, & \mathbf{x} \in \partial\partial\Omega \end{cases} \quad (6)$$

где с чертой обозначены величины, которые могут быть заданы в качестве граничных условий; уравнения равновесия формулируются относительно полных напряжений  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - \nabla \cdot \boldsymbol{\mu}$ ; кинематические граничные условия могут быть поставлены на поверхности и на ребрах тела относительно перемещений; дополнительные кинематические граничные условия на поверхности ставятся относительно нормальных градиентов от перемещений ( $\partial_n \mathbf{u}$ ); статические граничные условия могут быть поставлены на поверхности тела относительно вектора напряжений  $\mathbf{t}$  и вектора градиентных напряжений  $\mathbf{m}$ , а на ребрах тела - относительно вектора внутренних погонных усилий  $\mathbf{t}_e$ , определяемых в ГТУ следующим образом:

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \nabla_S \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}) - 2H\mathbf{m}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{nn} : \boldsymbol{\mu}, \quad \mathbf{t}_e = [\boldsymbol{\nu}\mathbf{n} : \boldsymbol{\mu}] \quad (7)$$

где  $\mathbf{n}$  - внешняя единичная нормаль к поверхности;  $\nabla_S = \nabla - \mathbf{n}\partial_n$  - поверхностный градиент;  $H = -\frac{1}{2}\nabla_S \mathbf{n}$  - средняя кривизна поверхности тела;  $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{n} \times \mathbf{v}$  - ко-нормаль к ребру на поверхности тела; квадратные скобки [...] обозначают необходимость вычисления разности заключенных в них величин с двух сторон от одного и того же ребра.

Классическая теория упругости является частным случаем ГТУ, в предположении  $\mathbf{A} \equiv 0 \implies \boldsymbol{\mu} \equiv 0 \implies \boldsymbol{\sigma} \equiv \boldsymbol{\tau}$ . Запись уравнений ГТУ в терминах ковариантных производных, необходимая для решения задач в криволинейных координатах, представлена в диссертации.

В задачах ГТЭ рассматриваются трансверсально изотропные пьезоэлектрические материалы. В частности, все примеры вычислений представлены для керамики ЦТС (PZT-7а, гексагональная сингония, класс 6mm). Плотность электрической энтальпии в рассматриваемом варианте ГТЭ имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{E}, \nabla \mathbf{E}) &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{e} : \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E} \\ &+ \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta} \dot{ : } \mathbf{A} \dot{ : } \boldsymbol{\eta} - \frac{1}{2} \nabla \mathbf{E} : \boldsymbol{\alpha} : \nabla \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (8)$$

где ряд связанных эффектов исключается в предположении их малости (и для

упрощения анализа градиентных эффектов);  $\mathbf{e}$  – это тензор 3-го ранга пьезоэлектрических констант,  $\boldsymbol{\epsilon}$  – это тензор 2-го ранга диэлектрических проницаемостей;  $\boldsymbol{\alpha}$  – тензор 4-го ранга, содержащий дополнительные градиентные характеристики диэлектрической проницаемости среды;  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  – вектор напряженности электрического поля;  $\phi(\mathbf{x})$  – потенциал электрического поля.

Определяющие соотношения теории для напряжений  $\boldsymbol{\tau}$ , градиентных напряжений  $\boldsymbol{\mu}$ , вектора электрической индукции  $\mathbf{D}$  и тензора электрических квадрупольных моментов  $\mathbf{Q}$  имеют вид:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}, & \boldsymbol{\mu} &= \frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \mathbf{A} : \boldsymbol{\eta} \\ \mathbf{D} &= -\frac{\partial h}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{e} : \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}, & \mathbf{Q} &= -\frac{\partial h}{\partial (\nabla \mathbf{E})} = \boldsymbol{\alpha} : \nabla \mathbf{E}\end{aligned}$$

В диссертации, рассматриваются различные варианты определяющих соотношений ГТЭ и, в частности, упрощенная теория, в которой принимаются гипотезы для структуры тензоров дополнительных материальных констант  $\mathbf{A}$  и  $\boldsymbol{\alpha}$  следующего вида:

$$\begin{aligned}A_{ijklmn} = \ell^2 \delta_{kn} C_{ijlm} &\implies \mu_{ijk} = \ell^2 \tau_{ij,k}, \quad \text{то есть } \boldsymbol{\mu} = \ell^2 \nabla \boldsymbol{\tau} \\ \alpha_{ijkl} = \ell^2 \delta_{ji} \epsilon_{ik} &\implies Q_{ij} = \ell^2 D_{i,j} \quad \text{то есть } \mathbf{Q} = \ell^2 \nabla \mathbf{D}\end{aligned}$$

Формулировка краевой задачи ГТЭ следует из принципа минимума полной потенциальной энергии и в отсутствие объемных сил и зарядов имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, & \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}}, \quad \text{или} \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, & & \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ q = \bar{q}, \quad \text{или} \quad \phi = \bar{\phi}, & & \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ \mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}} \quad \text{или} \quad \partial_n \mathbf{u} = \bar{\mathbf{g}}, & & \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ m = \bar{m} \quad \text{или} \quad \partial_n \phi = \bar{E}, & & \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ \mathbf{t}_e = \bar{\mathbf{t}}_e \quad \text{или} \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}_e, & & \mathbf{x} \in \partial\partial\Omega \\ q_e = \bar{q}_e \quad \text{или} \quad \phi = \bar{\phi}_e, & & \mathbf{x} \in \partial\partial\Omega \end{array} \right. \quad (9)$$

где обобщенный закон Гаусса формулируется с учетом вклада квадрупольных моментов в определении полной индукции  $\mathbf{D} = \mathbf{D} - \nabla \cdot \mathbf{Q}$ ; и поверхностная и линейная плотность заряда  $q$ ,  $q_e$  и плотность квадрупольных моментов  $m$

определяются выражениями:

$$\begin{aligned} q &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} - \nabla_S \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}) - 2H \mathbf{nn} : \mathbf{Q}, \\ m &= \mathbf{nn} : \mathbf{Q} \\ q_e &= [\boldsymbol{\nu} \mathbf{n} : \mathbf{Q}] \end{aligned}$$

**В третьей главе** представлено описание основных, в том числе предложенных впервые, аналитических и численных методов, которые применяются в диссертации.

В работе широко применяется метод представления общего решения в форме Папковича-Нейбера для уравнений равновесия ГТУ, которые в отсутствие объемных сил имеют следующий вид:

$$(\lambda + 2\mu)(1 - \ell_1^2 \nabla^2) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \mu(1 - \ell_2^2 \nabla^2) \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = 0 \quad (10)$$

где масштабные параметры  $\ell_1, \ell_2$  по-разному определяются в различных вариантах ГТУ, в частности, в упрощенной ГТУ (5):  $\ell_1 = \ell_2 = \ell$ .

Предложенная упрощенная форма общего решения основана на известных ранее вариантах представления Папковича-Нейбера (предложенных в ГТУ в работах Р. Миндлина, С.А. Лурье, Д.Б. Волкова-Богородского). Показано, что поле перемещений в ГТУ может быть представлено в следующем виде [21]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_{clas} + \mathbf{u}_{grad}, \\ \mathbf{u}_{clas} &= \boldsymbol{\Phi} - \kappa \nabla(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Phi}), \\ \mathbf{u}_{grad} &= \boldsymbol{\Psi} + \ell_1^2 \nabla \psi_1 \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\kappa = \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)}$ ; и  $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r})$ ,  $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r})$ ,  $\psi_1(\mathbf{r})$  – это векторные и скалярный потенциалы, удовлетворяющие уравнениям Лапласа и Гельмгольца:

$$\nabla^2 \boldsymbol{\Phi} = 0, \quad \psi_1 - \ell_1^2 \nabla^2 \psi_1 = 0, \quad \boldsymbol{\Psi} - \ell_2^2 \nabla^2 \boldsymbol{\Psi} = 0,$$

причем потенциал  $\boldsymbol{\Psi}$  определяет соленоидальное поле, то есть  $\nabla \cdot \boldsymbol{\Psi} = 0$ .

Таким образом, для классической части поля перемещений  $\mathbf{u}_{clas}$  используется стандартное представление Папковича-Нейбера, а для градиентной части  $\mathbf{u}_{grad}$  – модифицированное разложение Гельмгольца (с двумя различными параметрами  $\ell_1, \ell_2$ ). Справедливость записанного представления решения (11) проверяется прямой подстановкой в уравнения равновесия (10). В сферической системе координат  $(r, \theta, \phi)$  векторный потенциал  $\boldsymbol{\Psi}$  может быть выражен через

два скалярных потенциала  $\psi_2, \psi_3$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Psi} &= \mathbf{N} + \mathbf{M}, & \mathbf{N} &= \ell_2 \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r} \psi_2), & \mathbf{M} &= \nabla \times (\mathbf{r} \psi_3), \\ \psi_s - \ell_2^2 \nabla^2 \psi_s &= 0, & (s &= 2, 3), \end{aligned}$$

Тогда градиентная часть поля перемещений выражается через три скалярных потенциала ( $\psi_s, s = 1..3$ ), удовлетворяющих уравнениям Гельмгольца, для определения которых можно использовать известное разложение по полной системе сферических гармоник вида:

$$\psi_s = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (A_{nm}^{(s)} i_n(\bar{r}) + B_{nm}^{(s)} k_n(\bar{r})) Y_{n,m}(\theta, \phi) \quad (12)$$

где  $i_n, k_n$  – это модифицированные сферические функции Бесселя 1-го и 2-го рода;  $\bar{r}$  – это радиальная координата, нормированная на соответствующее значение масштабного параметра ( $\ell_1$  или  $\ell_2$ ), входящего в уравнение Гельмгольца для данного потенциала.

Для плоских задач ГТУ векторный потенциал  $\mathbf{\Psi} = \{\Psi_r, \Psi_\theta, 0\}$  может быть представлен через единственный скалярный потенциал:

$$\mathbf{\Psi} = \ell_2^2 \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r} \psi_2), \quad \psi_2 - \ell_2^2 \nabla^2 \psi_2 = 0, \quad (13)$$

и градиентная часть поля перемещений выражается через два скалярных потенциала ( $\psi_1, \psi_2$ ), для которых в цилиндрической системе координат ( $r, \theta, z$ ) может быть использовано полное представление следующего вида:

$$\psi_s = \sum_{n=0}^{\infty} \left( K_n(\bar{r}) \left( a_{1n}^{(s)} \cos n\theta + a_{2n}^{(s)} \sin n\theta \right) + I_n(\bar{r}) \left( a_{3n}^{(s)} \cos n\theta + a_{4n}^{(s)} \sin n\theta \right) \right) \quad (14)$$

где  $I_n, K_n$  – это модифицированные функции Бесселя 1-го и 2-го рода.

Вариант представления решения для антиплоских задач в эллиптической цилиндрической системе координат, записанный через функции Матрё, также используется и представлен в диссертации.

Для решения трехмерных и плоских задач чистого изгиба в ГТУ и ГТЭ в диссертации предложено использовать обобщение полуобратного метода Сен-Венана, в котором предполагается использовать следующий вид решения для перемещений [4, 5]:

$$u_1 = C_1 xz, \quad u_2 = C_2 yz, \quad u_3 = -\frac{1}{2} C_1 x^2 - \frac{1}{2} C_2 y^2 + w(z) \quad (15)$$

где  $C_1, C_2$  – неизвестные константы, которые определяются из граничных условий относительно результирующих усилий и моментов,  $w(z)$  – неизвестная функ-



ция, которая определяется из решения уравнений равновесия в направлении толщины балки совместно с граничными условиями на ее нижней и верхней поверхностях. В отличие от классического решения, в ГТУ и ГТЭ функция  $w(z)$  содержит не только полиномиальные, но и экспоненциальные составляющие (в соответствии со структурой общего решения (11)), а константы  $C_1, C_2$  вычисляются с учетом масштабных параметров.

В задачах о вычислении эффективных характеристик композитов для реализации энергетических методов осреднения в диссертации используются формулы Эшелби, которые получены в общей формулировке ГТУ и ГТЭ. В ГТУ Миндлина-Тупина эти формулы имеют вид [14]:

$$U = U_0 + U_{int}$$

$$U_{int} = \pm \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{u} - \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}_0) ds \pm \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\mathbf{m}_0 \cdot \partial_n \mathbf{u} - \mathbf{m} \cdot \partial_n \mathbf{u}_0) ds \quad (16)$$

где  $U$  – это энергия деформаций среды, содержащей включение,  $U_0$  – энергия деформаций однородной среды при тех же нагрузках;  $U_{int}$  – это энергия взаимодействия; с индексом 0 (без индекса) обозначены величины, которые реализуются в однородной (неоднородной) среде; интегрирование проводится по поверхности  $\Sigma$ , внутри которой расположено включение, и выбор знаков "±" определяется заданием статических или кинематических граничных условий, соответственно.

С использованием полученных соотношений (16) проведено сопоставление прямых и энергетических методов осреднения в градиентных теориях [22]. В общем случае показано, что использование стандартных соотношений прямых методов для эффективных податливостей  $\mathbf{S}^*$  эквивалентно использованию энергетического условия следующего вида:

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{S}^{(2)} + c(\mathbf{S}^{(1)} - \mathbf{S}^{(2)}) : \mathbf{B}^{(1)} \implies U = U_0 + \frac{1}{2}U_{int} + \frac{1}{2}U'_{int} \quad (17)$$

где  $\mathbf{S}^{(i)}$  – это тензоры податливостей фаз,  $c$  (здесь и далее) – объемное содержание включений,  $\mathbf{B}^{(1)}$  – тензор концентрации напряжений во включениях; дополнительная часть энергии взаимодействия, учитывающая вклад градиентов деформаций, определяется выражением:

$$U'_{int} = \int_{\Omega_1} (\boldsymbol{\mu} : \boldsymbol{\eta}_0 - \boldsymbol{\mu}_0 : \boldsymbol{\eta}) dv$$

В случае задания однородных граничных условий на поверхности тела выполняется  $U'_{int} \equiv 0$ , и, следовательно, соотношения (17) и (16) совпадают, что

означает эквивалентность прямых и энергетических подходов в ГТУ. Эквивалентность не реализуется ( $U'_{int} \neq 0$ ) только при задании неоднородных граничных условий, которые используются в некоторых методах осреднения второго порядка при вычислении эффективных градиентных модулей.

Численное моделирование в диссертации реализовано с использованием смешанного метода конечных элементов (МКЭ), в соответствии с подходом, предложенным для ГТУ в работе *J. C. Reiher, и др., Journal of Engineering Mechanics (2017)*. В этом подходе используется расширенная форма записи плотности энергии деформаций:

$$u(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \nabla \boldsymbol{\kappa} : \mathbf{A} : \nabla \boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\Lambda} : (\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\varepsilon})$$

где  $\boldsymbol{\kappa}$  – тензор промежуточных переменных (деформации), для которых вводится отдельная аппроксимация, и имеют место соотношения  $\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\varepsilon}$ , вводимые на множителях Лагранжа  $\boldsymbol{\Lambda}$ . Для аппроксимации  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\kappa}$ ,  $\boldsymbol{\Lambda}$  используются полиномы Эрмита третьего порядка. Кинематические граничные условия вводятся на отдельных множителях Лагранжа, для которых используется аппроксимация второго порядка. Реализация смешанного МКЭ выполнена в интерфейсах Weak Form PDE и General Form PDE Comsol.

Тестирование сходимости и точности решений, получаемых с использованием смешанного МКЭ проверено в сопоставлении с большим количеством аналитических решений, а также в сопоставлении с другим численным подходом, который в явной форме позволяет контролировать выполнение специфических граничных условий ГТУ на поверхности и на ребрах области – методом Треффца [15]. Реализация последнего построена на основе представления решения в виде ряда, члены которого получены с использованием представления Папковича-Нейбера (11) и поэтому автоматически удовлетворяют уравнениям равновесия ГТУ. Граничные условия выполняются в приближении метода коллокаций. Для плоских задач с областями, содержащими угловые точки, показано, что смешанный МКЭ и метод Треффца дают согласованные результаты и учитывают специфику граничных условий на ребрах.

**В четвертой главе** диссертации представлены основные результаты, полученные для задач ГТУ. Рассмотрены задачи балочной теории, задачи о включениях, задачи о трещинах и концентраторах и обобщенная задача Фламана.

Балочные теории рассмотрены в разделе 4.1. Для построения модели балки Бернулли-Эйлера (и в целом, всех типов моделей балок, пластин и оболочек) в ГТУ известны два подхода, которые приводят к принципиально различным результатам. Детальное обсуждение этих подходов приведено в работах [4, 9]

и в диссертации. Отличие подходов, в частности, заключается в получаемом виде уравнения изогнутой оси балки, которое в ГТУ имеет повышенный 6-ой порядок и в отсутствии погонной нагрузки имеет вид:

$$Dw^{IV} - \ell^2 D_0 w^{VI} = 0 \quad (18)$$

где изгибная жесткость балки в первом подходе имеет классическое значение  $D = D_0 = EI$ , а во втором оказывается масштабо-зависимой и определяется выражением  $D = EI(1 + 3\ell^2/h^2)$  для балки с прямоугольным сечением толщиной  $2h$ , материал которой имеет значение масштабного параметра  $\ell$ .

Для анализа корректности указанных балочных теорий было построено по-лоубратное решение задачи чистого изгиба с использованием представления (15). В полученном решении прогибы балки определяются выражением [4]:

$$u_3 = -\frac{1}{2} \frac{M_0}{D_0} J x^2 - \frac{1}{2} \frac{M_0 \nu}{D_0} J y^2 - \frac{M_0}{D_0} \left( \frac{\bar{\ell}^2 - \ell^2}{\cosh(h/\ell)} \left( 1 - \cosh\left(\frac{z}{\ell}\right) \right) - \frac{z^2}{2} \right)$$

$$J = \frac{2\nu(1+\nu)N - \frac{\nu^2}{1-2\nu} + \frac{h^3}{3(\bar{\ell}^2 - \ell^2)(h - \ell \tanh(h/l))}}{4\nu N - \frac{2\nu^2}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{h^3}{3(\bar{\ell}^2 - \ell^2)(h - \ell \tanh(h/l))}}$$

где  $M_0$  – это заданный изгибающий момент;  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала балки;  $z$  – координата в направлении толщины балки; масштабные параметры  $\bar{\ell}$ ,  $\ell$  и коэффициент  $N$  по-разному определяются через отношения классических и градиентных модулей в различных вариантах определяющих соотношений ГТУ.

Построенное решение справедливо вдали от торцов балки, где заданы изгибающие моменты и где возникает специфическая концентрация напряжений, связанная с влиянием граничных условий на ребрах. Вводя гипотезы балочной теории, то есть рассматривая прогибы нейтральной оси балки ( $y = z = 0$ ) при нулевом коэффициенте Пуассона ( $\nu = 0 \implies J = 0$ ), из полученного решения следует, что прогибы балки определяются классической изгибной жесткостью  $u_3(x, 0, 0) = -\frac{1}{2} \frac{M_0}{D_0} x^2$ , что означает справедливость только одной из известных в ГТУ балочных теорий, в которой нет аномальной зависимости жесткости балки от ее толщины, но сохраняются размерные эффекты, связанные с условиями закрепления и длиной микро-размерных балок. Для построения такой теории предложен новый формально строгий вариационный подход [9], основанный на использовании гипотез балочной теории ( $u_1 = -z w'(x)$ ,  $u_2 = 0$ ,  $u_3 = w(x)$ ) в определении энергии деформаций балки (1). Вариация полной энергии деформаций балки с прямоугольным поперечным сечением  $2h \times b$  и длиной  $L$  в этом

случае принимает вид:

$$\delta U = \frac{b}{2} \int_0^L \int_{-h}^h (\tau_{11} \delta u_{1,1} + \mu_{111} \delta u_{1,11} + \mu_{113} \delta u_{1,13}) dz dx$$

Далее проводится интегрирование по частям слагаемого  $\mu_{113} \delta u_{1,13}$  в направлении толщины балки:

$$\begin{aligned} \delta U = & -b \int_0^L \int_{-h}^h \left( \tau_{11,1} - \mu_{111,11} - \underline{\mu_{113,13}} \right) \delta u_1 dz dx \\ & + b \int_{-h}^h \left( (\tau_{11} - \mu_{111,1} - \underline{\mu_{113,3}}) \delta u_1 + \mu_{111} \delta u_{1,1} \right) \Big|_{x=0}^{x=L} dz \\ & - b \int_0^L \left( \underline{\mu_{113,1} \delta u_1} \Big|_{z=-h}^{z=h} dx + \left( \underline{(\mu_{113} \delta u_1)} \Big|_{x=0}^{x=L} \right) \Big|_{z=-h}^{z=h} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

и подчеркнутые одной линией слагаемые обнуляются вследствие введенных гипотез для перемещений, а слагаемые, подчеркнутые двумя линиями, должны обнуляться вследствие отсутствия заданных касательных нагрузок на поверхностях балки и погонных нагрузок на ее ребрах. В результате, из общего вариационного подхода следует градиентная балочная теория с классической изгибной жесткостью. В этой теории все неклассические масштабные эффекты связаны с влиянием концентрации напряжений в зонах закрепления и приложения нагрузки, и гиперболического роста жесткости тонких балок не возникает [4, 7].

В разделе 4.2 диссертации рассмотрена проблема определения концентрации напряжений и эффективных свойств в композитах со сферическими и цилиндрическими включениями. В рамках ГТУ такие решения позволяют учитывать влияния размера и агломерации включений. Эквивалентная однородная среда предполагается классической и для нее определяются классические эффективные модули упругости. В рамках модели сферического включения построены решения для задач объемных деформаций и чистого сдвига с использованием представления вида (11), в котором использованы классическая часть решения для перемещений, известная в микромеханике, и градиентная часть поля перемещений, построенная с использованием потенциалов вида (12). Для центрально симметричной задачи поле перемещений потенциально, и оно определяется членом ряда  $m = n = 0$  (12):

$$\psi_1 = A_{00}^{(1)} i_0(r/\ell_1) + B_{00}^{(1)} k_0(r/\ell_1), \quad \psi_2 = \psi_3 = 0 \quad (20)$$

Для задачи чистого сдвига используются только члены  $m = n = 2$ :

$$\psi_s = \left( A_{22}^{(s)} i_2(r/\ell_k) + B_{22}^{(s)} k_2(r/\ell_k) \right) e^{2i\phi} \sin^2 \theta \quad (s = 1, 2), \quad \psi_3 = 0 \quad (21)$$

Решение строится в рамках метода трех фаз (обобщенного самосогласованного метода). Общее решение для перемещений в фазах композита и в эффективной матрице получается подстановкой записанных потенциалов (20), (21) в представление решения (11) [8]. На бесконечности задаются однородные граничные условия, а система контактных условий на границах раздела фаз дает систему алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов общего решения. Замыкающим уравнением, необходимым для определения эффективных свойств, является формула Эшелби (16).

Полученные решения позволяют моделировать повышение эффективных упругих характеристик при уменьшении размеров включений (положительный масштабный эффект, рис. 1). В решении ГТУ возникают "межфазные" зоны, которые представляют собой области сниженных деформаций матрицы, локализованные вблизи жестких включений (рис. 2а). Эти зоны возникают вследствие дополнительных требований по непрерывности производных от перемещений на границах раздела фаз. При уменьшении размера включений, то есть при уменьшении отношения радиуса включений  $R_1$  к масштабному параметру материала, относительная доля областей со стесненными деформациями увеличивается, и происходит рост эффективных упругих характеристик.

Полученное решение сопоставлено с численным моделированием, реализованным на трехмерных периодических фрагментах (рис. 1а, 2), а также с известным ранее в ГТУ решением, построенным на основе метода Мори-Танака. Последний использует классическое соотношение для эффективных свойств (вида (17)) и предполагает необходимость осреднения тензора концентрации по объему включения, так как в решении ГТУ поле перемещений внутри включения становится неоднородным (см. рис. 2б). Показано, что метод трех фаз в ГТУ позволяет получать более точные решения, приближенные к численному моделированию, по сравнению с методом Мори-Танака, который прогнозирует заниженные значения эффективных характеристик, особенно при больших объемных содержаниях включений малого размера (рис. 1а). Пример описания известных экспериментальных данных для модуля Юнга наполненного композита представлен на рис. 1б.

Аналогичные положительные масштабные эффекты установлены в рамках антиплоской задачи для модели цилиндрического включения, которая используется при определении эффективного модуля сдвига  $G^*$  волокнистого композита в направлении вдоль волокон [3]. Для этой задачи удастся получить простые

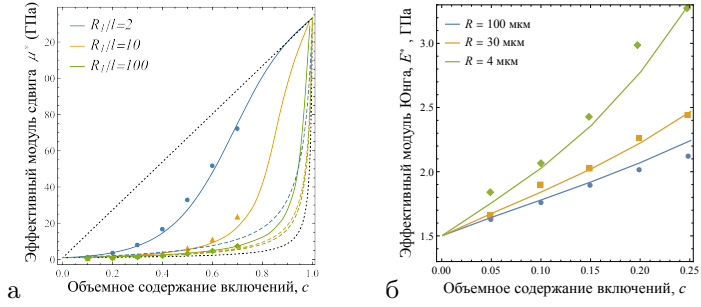


Рис. 1: Зависимость эффективных упругих свойств от объемного содержания и размера включений, а: сравнение метода трех фаз (сплошные линии), метода Мори-Танакы (штриховые) и КЭ моделирования (точки); б: пример описания экспериментальных данных для полипропилена со стеклянными микросферами ( $\ell = 1.2$  мкм).

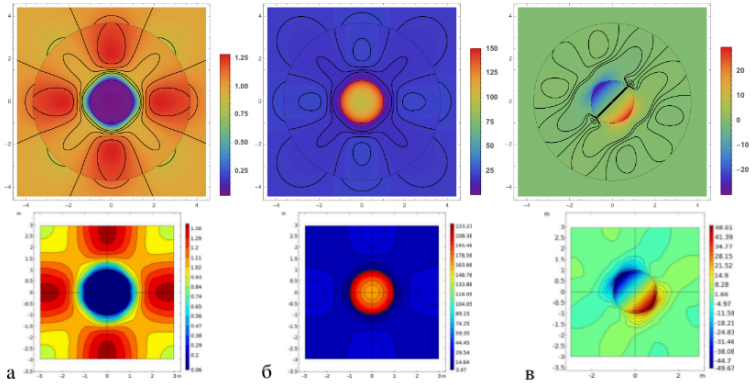


Рис. 2: Аналитическое решение в методе трех фаз (вверху) и численное решение на кубическом фрагменте (внизу) для задачи чистого сдвига. Объемное содержание  $c = 0.02$ , размер включений  $R_1/\ell = 2$ . а:  $\varepsilon_{12}$  [%], б:  $\tau_{12}$  [МПа], в:  $\mu_{121}$  [МПа·мкм].

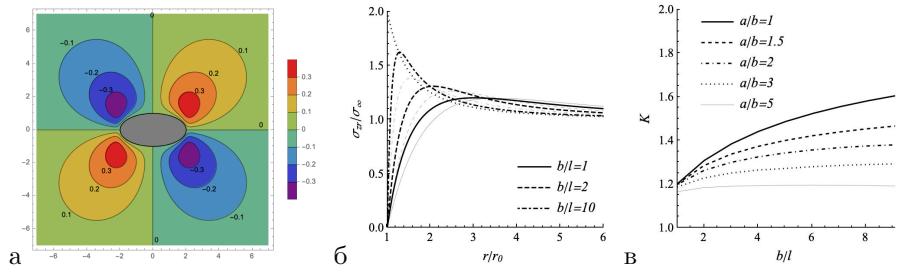


Рис. 3: Концентрация напряжений и деформаций вблизи волокна с эллиптическим поперечным сечением в решении ГТУ, а: Распределение деформаций сдвига  $\varepsilon_{31}$  [%] вблизи жесткого волокна, б: Изменение характера концентрации напряжений сдвига при различной толщине волокон ( $r$  – расстояние от волокна), в: Влияние эллиптичности поперечного сечения волокна на максимальную концентрацию напряжений.

замкнутые решения, как в методе Мори-Танака:

$$G^* = \frac{G_1(1 - c) + G_2c\langle T \rangle}{1 - c + c\langle T \rangle} \quad (22)$$

где средняя концентрация деформаций сдвига во включении  $\langle T \rangle$  определяется через свойства фаз и радиус волокон, так и в методе трех фаз:

$$G^* = G_1 \frac{a_2 \ell \tilde{R} - b_2 / (\ell \tilde{R})}{\ell \tilde{R} - c_2 (\tilde{R} I_0(\tilde{R}) + I_1(\tilde{R})) + d_2 (\tilde{R} K_0(\tilde{R}) + K_1(\tilde{R}))} \quad (23)$$

где  $\tilde{R} = R/(\ell\sqrt{c})$ , а коэффициенты  $a_2, b_2, c_2, d_2$  определяются аналитически из условий непрерывности решения на границе раздела фаз, которые рассматриваются совместно с замыкающей формулой Эшелби.

Обобщение решения антиплоской задачи реализовано для жесткого цилиндрического включения с эллиптическим поперечным сечением (рис. 3а). Численно-аналитическое решение этой задачи построено путем представления решения в виде ряда по функциям Матё [16]. Показано, что при уменьшении диаметра волокон до порядков, соответствующих масштабному параметру матрицы, происходит снижение концентрации напряжений и, как следствие, прогнозируется повышение прочности композита на сдвиг (рис. 3б). Эллиптическая (площадная) форма волокна позволяет дополнительно снизить концентрацию напряжений, однако этот эффект оказывается незначителен в случае очень тонких волокон (рис. 3в).

На основе модели изолированного включения и дифференциального метода осреднения в диссертации получены новые замкнутые решения для прогноза свойств композитов с несжимаемой матрицей и жесткими включениями [13]. С учетом математической аналогии между ГТУ и градиентной гидродинамикой (в приближении модели ползущего течения) эти решения использованы для моделирования эффективной вязкости суспензий с учетом размера включений. Получены соотношения для эффективного модуля сдвига (эффективной динамической вязкости) среды, содержащей сферические ( $s$ ) или хаотично ориентированные цилиндрические ( $c$ ) включения, в рамках модели изолированного включения:

$$\mu_s = \mu_0 \left( 1 + \frac{5}{2\Phi(\bar{d})} \phi \right), \quad \mu_c = \mu_0 \left( 1 + \frac{4}{\Gamma(\bar{d})} \phi \right) \quad (24)$$

и в рамках дифференциального метода:

$$\mu_s = \frac{\mu_0}{(1 - \phi)^{\frac{5}{2\Phi(\bar{d})}}}, \quad \mu_c = \frac{\mu_0}{(1 - \phi)^{\frac{4}{\Gamma(\bar{d})}}} \quad (25)$$

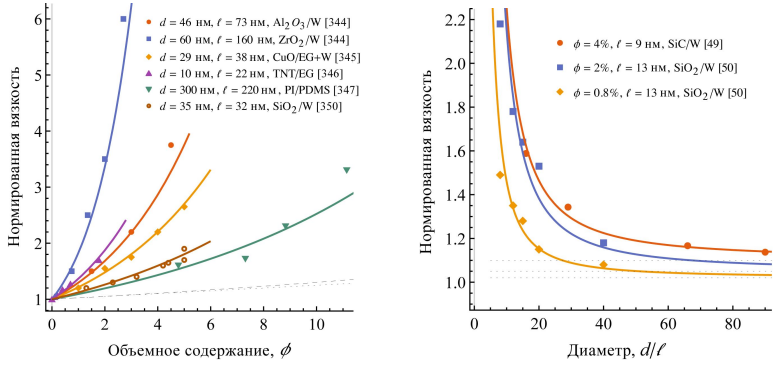


Рис. 4: Сопоставление решения (25) и известных экспериментальных данных по влиянию объемного содержания и размера различных наполнителей на динамическую вязкость нано-жидкостей на водной основе. Пунктир – классические решения.

где  $\bar{d} = d/\ell$ ;  $d$  – диаметр частиц или волокон; и размеро-зависимые функции  $\Phi(\bar{d}) = 1 + \frac{3}{\bar{d}^3} \left( 4 - \bar{d}^2 - (2 + \bar{d})^2 e^{-\bar{d}} \right)$  и  $\Gamma(\bar{d}) = 1 - 2K_1\left(\frac{\bar{d}}{2}\right)I_1\left(\frac{\bar{d}}{2}\right)$ .

Полученные решения (24), (25) совпадают с известными решениями Эйнштейна и Бринкмана при больших размерах включений ( $d \gg \ell$ ) и прогнозируют повышение эффективных характеристик при уменьшении размеров наполнителей. На основе этих соотношений и известных экспериментальных данных были идентифицированы масштабные параметры для различных нано-жидкостей – суспензий с наночастицами (рис. 4).

В разделе диссертации 4.3 представлены результаты, связанные с применением ГТУ в задачах механики разрушения. К настоящему времени хорошо известно, что в решениях ГТУ для задач с трещинами реализуется конечный уровень напряжений и деформаций (обеспечивается регуляризация классических сингулярных задач). В вершине трещины возникает концентрация напряжений, уровень которой определяется геометрией задачи и масштабными параметрами материала. Поэтому прогноз разрушающих нагрузок в ГТУ для элементов конструкций с трещинами может быть сведен к использованию критериев прочности (см. работы В.В. Васильева, С.А. Лурье, Н. Askes). В диссертации на основе численного моделирования со строгим выполнением всех граничных условий показано, что ГТУ позволяет описать известный масштабный эффект прочности, при котором номинальная прочность образцов с длинными трещинами определяется асимптотикой классической механики разрушения и пропорциональна  $\sim (d/\ell)^{-0.5}$  ( $d$  – длина трещины), а для коротких трещин – определяется пределом прочности материала (рис. 5). Такой масштабный эффект в терминологии Z. Vazant называется "энергетическим". Характер масштабного эффекта



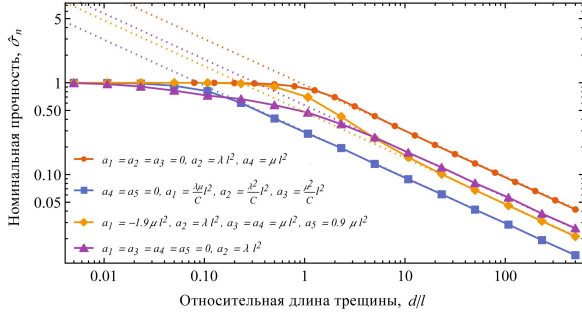


Рис. 5: Зависимость номинальной прочности пластины с трещиной от длины трещины для различных вариантов определяющих соотношений ГТУ. Пунктиром показаны асимптотики  $\sim (d/\ell)^{-0.5}$

Таблица 1: Механические свойства и идентифицированные значения масштабного параметра упрощенной ГТУ для различных материалов.

Материал	$\sigma_u$ , МПа	$K_{Ic}$ , МПа·м <sup>1/2</sup>	$d_{cr}$ , мкм	$\ell$ , мкм
Стекло	85	1	46	45
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	288	4.7	85	75
SiO <sub>2</sub>	45	0.7	77	63
Бетон С35	3	0.5	$8.84 \cdot 10^3$	$6.5 \cdot 10^3$

определяется дополнительными материальными константами ГТУ, которые таким образом, могут быть идентифицированы [17].

Примеры значений масштабных параметров, найденные по результатам обработки известных в литературе экспериментальных данных по зависимости разрушающей нагрузки от длины трещин в образцах различных материалов, испытываемых по схеме трехточечного изгиба с надрезом, представлены в Таблице 1. Эти результаты получены в рамках упрощенной ГТУ (5). Примечательным является тот факт, что найденные значения масштабного параметра по своему порядку соответствуют характерному диаметру зоны предразрушения  $d_{cr} = K_{Ic}^2 / (\pi \sigma_u^2)$  ( $\sigma_u$  – предел прочности,  $K_{Ic}$  – критический коэффициент интенсивности напряжений).

В диссертации показана сходимость решений смешанного МКЭ к известным точным аналитическим решениям для задач о трещинах. Показано, что микрогеометрия вершины трещины (элементы геометрии модели, меньшие масштабного параметра материала) оказывается не существенной с точки зрения уровня концентрации напряжений в ГТУ. Проведена обработка экспериментальных

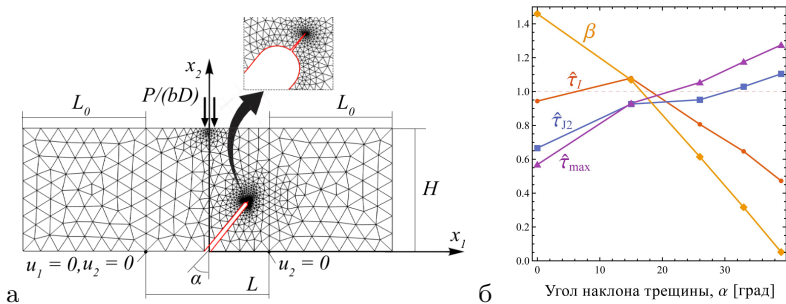


Рис. 6: Модель образцов с наклонными трещинами (а) и результаты обработки экспериментальных данных по зависимости разрушающих нагрузок от угла наклона трещины (б). На рисунке б показаны вычисленные значения критериев, реализовавшихся в момент разрушения материала

данных по испытаниям образцов с наклонными трещинами, в которых реализуется смешанная I/II мода нагружения (рис. 6). Показано, что в условиях, близких к чистой моде II (сдвиг), критерий максимальных главных напряжений  $\hat{\tau}_I$ , который ранее преимущественно рассматривался в ГТУ, оказывается неприменим. Для описания таких экспериментов предложено использовать модифицированный критерий прочности, который учитывает уровень триаксиальности напряженного состояния в вершине трещины [17]. При больших значениях коэффициента триаксиальности  $\beta$  (отношение первого ко второму инварианту тензора напряжений) используется критерий  $\hat{\tau}_I$ , а при малых значениях триаксиальности предложено использовать критерий относительного второго инварианта тензора напряжений  $\tau_{J2}$ . Показано, что такой критерий удовлетворительно описывает известные экспериментальные данные с образцами оргстекла (рис. 6б), при этом смена механизмов разрушения происходила при  $\beta \approx 1$ , а идентифицированное значение масштабного параметра составило  $\ell = 0.33$  мм.

В заключительной части четвертой главы представлено решение обобщенной задачи Фламана – задачи о клине с заданной в вершине нагрузкой [21]. В этой задаче непосредственно проявляется специфика дополнительных граничных условий ГТУ, задаваемых на ребрах. В работе на основе представления Папковича-Нейбера (11), (13), (14) построено новое асимптотическое решение для случая задания в вершине клина смещения и закрепления на бесконечности (рис. 7а). Полученное решение содержит классические полиномиальные функции и дополнительную градиентную часть, выражаемую через функции Бесселя (14). Показано, что в общей ГТУ возможно получение регулярных решений для рассматриваемой задачи, при этом перемещения вблизи вершины

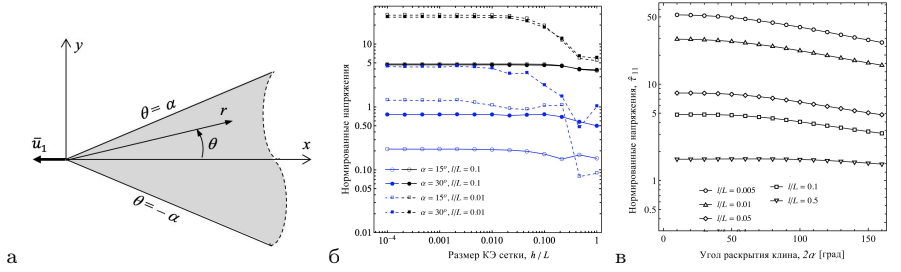


Рис. 7: К обобщенной задаче Фламана, а: схема нагружения клина, рассмотренная в аналитическом решении, б: сходимость численных решений ГТУ для напряжений в вершине клина при уменьшении размера сетки, в: зависимость уровня концентрации напряжений от угла раскрытия и размеров клина в численном решении.

имеют асимптотики:

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow 0} u_r &\sim \left( (c_{50}(1 - \kappa) + \frac{l_2 d_{11} + l_1 b_{11}}{2}) \ln r \right. \\
 &\quad \left. + ((1 + \kappa)c_{22} - l_1^2(b_{11}l_1 + b_1) + l_2^2(d_{11}l_2 + b_2))r^{-2} + O(1) \right) \cos \theta \\
 \lim_{r \rightarrow 0} u_\theta &\sim \left( - (c_{50}(1 - \kappa) + \frac{l_2 d_{11} + l_1 b_{11}}{2}) \ln r \right. \\
 &\quad \left. + ((1 + \kappa)c_{22} - l_1^2(b_{11}l_1 + b_1) + l_2^2(d_{11}l_2 + b_2))r^{-2} + O(1) \right) \sin \theta
 \end{aligned} \tag{26}$$

где  $l_1, l_2$  – это масштабные параметры, которые входят в уравнения равновесия ГТУ (10);  $c_{50}, c_{22}, b_{11}, d_{11}, b_1, b_2$  – это неизвестные константы общего решения, которыми удастся распорядиться таким образом, чтобы обеспечить одновременную регуляризацию перемещений, функции дилатации и вектора малых поворотов в вершине клина, а также удовлетворить граничным условиям на свободных гранях клина ( $\theta = \pm\alpha$ ).

Показано, что регуляризация поля дилатации и вектора поворотов в решении ГТУ является необходимым условием для регуляризации поля напряжений и деформаций в вершине клина. Из этого результата следует, в частности, что граничные условия на ребрах тела могут быть задаваться только в таких вариантах ГТУ, которые содержат ненулевые значения двух масштабных параметров в уравнениях равновесия (10). В этом случае обеспечивается существование конечной работы внешних сил, заданных на ребрах. Такому требованию не отвечает, например, моментная теория упругости и дилатационная ГТУ и, как следствие, необходимо рассматривать модифицированные варианты вариационной формулировки таких теорий, что обсуждалось в работе [20]. Полученный результат подтвержден на основе численного моделирования для клиновидных областей конечных размеров. Показано, что при уменьшении размера

сетки ГТУ (при  $l_1 \neq 0$ ,  $l_2 \neq 0$ ) обеспечивает сходящиеся численные решения при заданных усилиях или смещениях в вершине клина (рис. 7б). Исследована зависимость концентрации напряжений от угла раскрытия и размеров клина (рис. 7в).

**В пятой главе** диссертации представлены основные результаты, полученные для градиентной теории электро-упругости (ГТЭ). Результаты, представленные в этой главе, во многом, являются обобщением результатов главы 4 на случай анизотропии и связанных электро-механических эффектов. В разделе 5.1 в постановке плоской деформации построено полуобратное решение для задачи чистого изгиба пьезоэлектрического слоя, поляризованного в направлении толщины [10]. Использована обобщенная форма полуобратного метода с двумя неизвестными функциями – для прогибов и потенциала электрического поля:

$$u_1 = Kx_1x_3, \quad u_3 = -\frac{1}{2}Kx_1^2 + w(x_3), \quad \phi = \varphi(x_3),$$

которые найдены из решения задачи в следующем виде:

$$\varphi(x_3) = K \frac{(C_{33}e_{31} - C_{13}e_{33})}{2(C_{33}e_{33} + e_{33}^2)} x_3^2 + A_{01} + \sum_{i=1}^2 A_i \cosh \frac{\lambda_i x_3}{\ell},$$

$$w(x_3) = -K \frac{(e_{33}e_{31} + C_{13}e_{33})}{2(C_{33}e_{33} + e_{33}^2)} x_3^2 + A_{02} + \frac{e_{33}}{e_{33}} \sum_{i=1}^2 A_i (1 - \lambda_i^2) \cosh \frac{\lambda_i x_3}{\ell},$$

где константы  $A_i$ ,  $\lambda_i$  определяются из условия равновесия в направлении толщины балки ( $h$ ), рассматриваемого совместно с законом Гаусса, а константа  $K$  определяется заданными граничными условиями на торцах слоя:

$$K = \frac{M_0}{DJ}, \quad J = 1 + Z \frac{\ell^2}{h^2} \sum_{i=1}^2 (1 + k_{33}^2 - 2\lambda_i^2) \left(1 - \frac{\tanh \bar{h}_i}{\bar{h}_i}\right)$$

Показано, что как и в ГТУ, прогибы слоя при чистом изгибе в ГТЭ определяются классической изгибной жесткостью:

$$\lim_{h/l \rightarrow 0} u_3(x_1, 0) = -\frac{M}{2E_1 I} x_1^2,$$

что подтверждается численным моделированием и накладывает соответствующие требования на формулировку моделей тонкостенных конструкций. Предложен корректный вариант градиентной теории пьезоэлектрических балок Бернулли-Эйлера в рамках модифицированного вариационного подхода (19), обобщенного на случай пьезоэлектрического эффекта. Построенная теория позволяет описывать специфику механического отклика малоразмерных пьезоэлектриче-

ских балок вблизи зон закрепления и приложения нагрузки, а также возможное возникновение неклассических размерных эффектов в отношении продольной компоненты поляризации балки [11].

В разделе 5.2 рассмотрены задачи определения эффективных характеристик композитов с пьезоэлектрическими фазами в ГТЭ. Для антиплоской задачи в модели цилиндрического включения построены замкнутые решения в рамках метода Мири-Танака и метода трех фаз. Эти решения построены с использованием метода замены переменных, который основан на одновременной диагонализации матриц материальных констант фаз, входящих в определяющие соотношения модели [6]. В связанной постановке антиплоской задачи в эти матрицы входит модуль сдвига, пьезоэлектрическая константа и диэлектрическая константа:

$$\mathbf{L}_r = \begin{bmatrix} C_{44}^{(r)} & e_{15}^{(r)} \\ e_{15}^{(r)} & -\epsilon_{11}^{(r)} \end{bmatrix}, \quad (r = 1, 2)$$

На основе теоремы линейной алгебры две симметричные матрицы  $\mathbf{L}_r \in \mathbb{R}$  могут быть одновременно диагонализированы:

$$\tilde{\mathbf{L}}_r = \mathbf{W} \mathbf{L}_r \mathbf{W}^T, \quad \tilde{\mathbf{L}}_r = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{44}^{(r)} & 0 \\ 0 & -\tilde{\epsilon}_{11}^{(r)} \end{bmatrix}, \quad r = 1, 2$$

причем матрица преобразования  $\mathbf{W}$  образована собственными векторами матрицы вида  $(\mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{L}_2)$ . Матрица  $\mathbf{W}$  используется для введения новых переменных (перемещений, потенциала, их производных ...), что обеспечивает переход от решения связанной задачи ГТЭ к решению двух несвязанных задач ГТУ и электростатики. Последняя в градиентной постановке полностью аналогична ГТУ с точностью до обозначений. В итоге, известные решения ГТУ для эффективного модуля сдвига (22), (23) используются для определения эффективных свойств  $\tilde{C}_{44}^*$ ,  $\tilde{\epsilon}_{11}^*$  в пространстве новых переменных. Затем делается обратное преобразование матрицы эффективных констант для определения эффективных свойств композиционного материала с пьезоэлектрическими фазами. На основе полученного таким образом решения показано, что различия прогнозов между рассматриваемыми методами осреднения может быть еще более значительным для пьезоэлектрических сред, чем в обычных упругих материалах. В частности, прогнозируемые значения эффективных пьезоэлектрических констант могут отличаться на порядки, особенно в случае малоразмерных включений (рис. 8).

Аналогичного аналитического решения для задачи сферического включения построить не удастся из-за более сложной структуры определяющих соотношений в трехмерной формулировке ГТЭ. Поэтому задача о сферическом

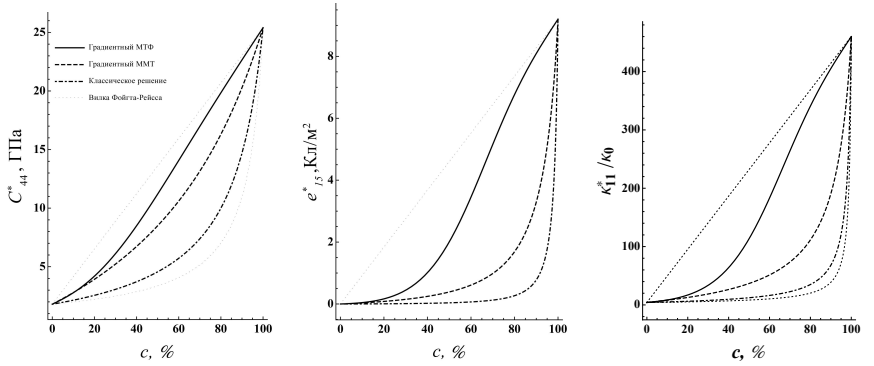


Рис. 8: Зависимость эффективных электромеханических свойств композита на основе эпоксидной матрицы от объемного содержания волокон из керамики PZT-7a. Радиус волокон  $R/\ell = 1$ .

включении и прогноз свойств наполненных композитов в ГТЭ рассматривались в рамках численного моделирования с фрагментами, содержащими одно или несколько включений. Было показано, что в решениях ГТЭ реализуются не только характерные эффекты "межфазных" зон в распределении поля деформаций (рис. 9а), но и аналогичные зоны сниженной поляризации матрицы вокруг включений (рис. 9б). Представлен пример описания известных экспериментальных данных по зависимости эффективного пьезомодуля цементной смеси с наполнителем из керамики PZT от объемного содержания и размеров наполнителя (рис. 9в). Идентифицированное значение масштабного параметра для этого материала составило  $\ell = 90$  нм. Показано, что для нано-дисперсных наполнителей модель прогнозирует эффективный модуль выше экспериментального, что объясняется эффектами агломерации, которые могут быть учтены в численных моделях ГТЭ при рассмотрении фрагментов с несколькими включениями [1].

В заключительном разделе диссертации представлена формулировка корректной динамической ГТЭ, полученная на основе принципа наименьшего действия, в котором помимо расширенной записи электрической энтальпии со вкладом градиентов деформаций и электрического поля (8), использована расширенная запись плотности кинетической энергии, учитывающей градиентные инерционные эффекты:

$$T(\dot{\mathbf{u}}, \nabla \dot{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \nabla \dot{\mathbf{u}} : \boldsymbol{\kappa} : \nabla \dot{\mathbf{u}},$$

где  $\rho$  [кг/м<sup>3</sup>] – массовая плотность,  $\boldsymbol{\kappa}$  [кг/м] – тензор 4-го ранга коэффициентов

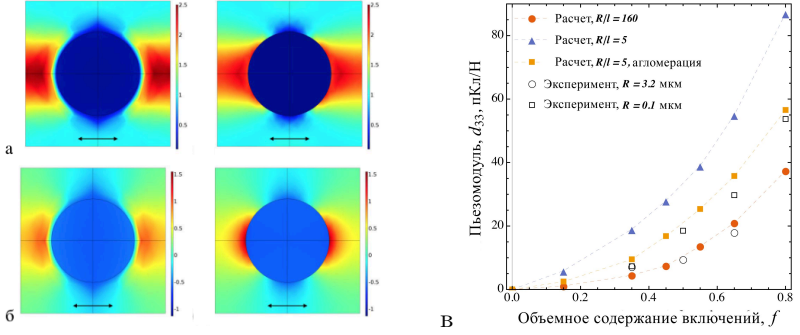


Рис. 9: Распределение деформаций  $\varepsilon_{33}$  (%), а) и напряженности электрического поля  $E_3$  ( $10^{-4}$  В/м, б) в поперечном сечении представительного фрагмента при заданных условиях одноосной деформации в ГТЭ (слева,  $R/\ell = 10$ ) и в классической теории пьезоэлектрических сред (справа); в: пример обработки экспериментальных данных по зависимости эффективного пьезомодуля наполненной цементной смеси от содержания частиц керамики PZT.

микро-инерции.

Без учета микро-инерции ГТУ и ГТЭ не могут применяться для описания известных явлений нормальной пространственной дисперсии в кристаллических материалах, при которых происходит снижение фазовой скорости высокочастотных упругих волн. Для ГТЭ важность учета эффектов микро-инерции впервые показана в диссертации и в работе [18]. В качестве примеров рассмотрены задачи распространения объемных и поверхностных волн сдвига, для которых уравнения движения ГТЭ и закон Гаусса приводятся к виду (в квазиэлектростатическом приближении):

$$\begin{aligned} C_{44}(1 - \ell_1^2 \Delta) \Delta w + e_{15} \Delta \phi &= \rho(1 - \ell_0^2 \Delta) \ddot{w}, \\ e_{15} \Delta w - \epsilon_{11}(1 - \ell_2^2 \Delta) \Delta \phi &= 0, \end{aligned}$$

где присутствуют три масштабных параметра, определяющих эффекты микро-инерции ( $\ell_0$ ), градиентные эффекты в поле деформаций ( $\ell_1$ ) и градиентные эффекты поляризации ( $\ell_2$ ).

Фазовая скорость объемных гармонических волн в ГТЭ определяется соотношением:

$$c_{sg} = \sqrt{\frac{e_{15}^2 + \epsilon_{11} C_{44} (1 + \ell_1^2 k^2) (1 + \ell_2^2 k^2)}{\epsilon_{11} \rho (1 + \ell_0^2 k^2) (1 + \ell_2^2 k^2)}} \quad (27)$$

где  $\omega$  – круговая частота,  $k$  – волновое число.

При малых значениях волнового числа в среде реализуется классическая скорость электро-упругих волн  $c_s = \sqrt{(e_{15}^2 + \epsilon_{11} C_{44}) / (\epsilon_{11} \rho)}$ . Значительные неklas-

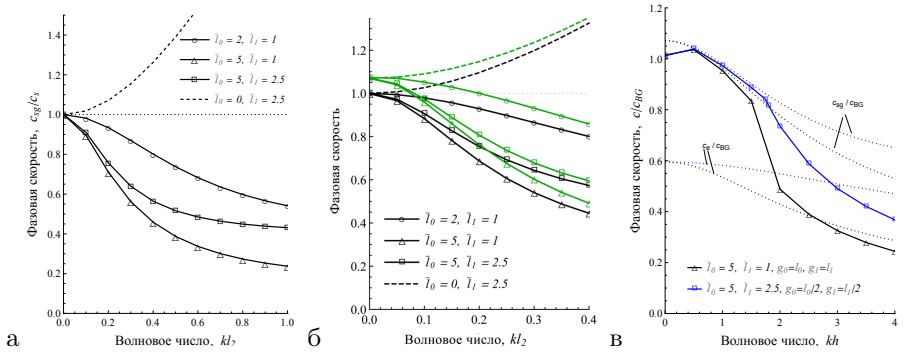


Рис. 10: Дисперсионные соотношения ГТЭ для объемных волн сдвига (а), волн Блустейна-Гуляева (б, заземленная/свободная поверхность) и волн Лява (в).

сические эффекты возникают при  $k > 0.1\ell_i$ , при этом для реализации нормальной пространственной дисперсии необходимо, чтобы выполнялось  $\ell_0 > \ell_1$ ,  $\ell_0 > \ell_2$  (рис. 10а). В диссертации на основе численно-аналитических методов также построены и исследованы особенности дисперсионных соотношений для поверхностных волн сдвига (волн Блустейна-Гуляева, рис. 10б), а также для волн Лява в структуре пьезоэлектрическое полупространство/упругий слой (рис. 10в). Для последних показано, что фазовая скорость высокочастотных волн ограничена сверху значением скорости объемных волн сдвига в подложке, которая должна определяться с учетом градиентных эффектов на основе соотношения (27).

## Основные результаты и выводы

1. Предложен и реализован полуобратный метод для задач изгиба в ГТУ и ГТЭ. Полученные решения использованы для проверки корректности известных градиентных балочных теорий. Дано обоснование корректного вариационного подхода к построению градиентных балочных теорий с выполнением граничных условий на верхней и нижней поверхностях балки. На основе этого подхода построена новая градиентная балочная теория пьезоэлектрических балок.
2. Интегральные формулы Эшелби получены в рамках общей ГТУ Миндлина-Тупина и в градиентной ГТЭ. На основе этих соотношений доказана эквивалентность прямых и энергетических подходов к оценке эффективных характеристик неоднородных сред в градиентных теориях.
3. Предложен новый вариант представления решения уравнений равновесия



ГТУ Миндлина - Тупина, основанный на использовании представления Папковича-Нейбера для классической части поля перемещений и на разложении Гельмгольца для градиентной части.

4. Построены новые аналитические решения для задач о сферическом и цилиндрическом включении в ГТУ и ГТЭ с использованием предложенных вариантов представления решения. Исследовано влияние размера включений на характер концентрации напряжений и деформаций в упругих средах, а также эффектов поляризации в пьезоэлектрических композитах. Проведено сопоставление различных методов осреднения в задачах микромеханики в ГТУ и ГТЭ. Показано, что прямые методы определения эффективных свойств, в которых проводится осреднение тензора концентрации (или связанного с ним тензора Эшелби) по объему включений, приводят к заниженным оценкам эффективных характеристик, особенно, в случае больших объемных содержаний включений малого размера.
5. Разработан и реализован вариант метода Треффца для плоских задач ГТУ на основе систем полиномиальных и экспоненциальных тестовых функций, удовлетворяющих уравнениям равновесия ГТУ и позволяющих получать сходящиеся численные решения с учетом выполнения всех неклассических граничных условий на поверхности и на гранях тела в приближении метода коллокаций.
6. Реализовано численное моделирование на основе смешанного метода конечных элементов в ГТУ и ГТЭ. Сходимость полученных численных решений протестирована в сопоставлении с точными аналитическими решениями. На основе численного моделирования в ГТУ показана возможность описания размерных эффектов в отношении зависимости номинальной прочности хрупких и квази-хрупких материалов от длины и ориентации трещины. Показано, что характер размерного эффекта определяется значениями дополнительных масштабных параметров ГТУ. Предложен новый вариант комбинированного критерия, позволяющий прогнозировать разрушающие нагрузки в рамках ГТУ при нагружении образцов по смешанной I/II моде, и учитывающий влияние триаксильности напряженного состояния.
7. Проведена идентификация дополнительных масштабных параметров ГТУ и ГТЭ на основе сопоставления полученных аналитических и численных решений с экспериментальными данными по зависимости эффективных свойств композитов от размера включений и по зависимости разрушающей нагрузки от размера дефектов (в рамках реализации метода

Васильева-Лурье для образцов с трещинами).

8. Показана возможность получения регулярных решений в задачах ГТУ с заданными сосредоточенными нагрузками на острых кромках тел. Показано, что такая регуляризация допустима в упрощенных линейных градиентных теориях, обеспечивающих регуляризацию, как функции дилатации, так и вектора малых поворотов.
9. Предложена динамическая формулировка ГТЭ, которая обеспечивает корректное описание эффектов пространственной дисперсии объемных и поверхностных электроакустических волн. Построены новые решения для поперечных объемных волн, для поверхностных волн Блюстейна - Гуляева и для волн Лява. Показано, что верхняя граница фазовой скорости волн Лява должна определяться в ГТЭ с учетом эффектов пространственной дисперсии на основе соответствующего решения для объемных волн.

### Список публикаций

По результатам работы опубликованы в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах Web of Science, Scopus и RSCI, следующие статьи:

1. **Y. Solyaev**, S. Lurie. Numerical predictions for the effective size-dependent properties of piezoelectric composites with spherical inclusions // Composite Structures (IF 6.603). – 2018. – Т. 202. – С. 1099-1108.
2. Е.В. Ломакин, С.А. Лурье, Л.Н. Рабинский, **Ю.О. Соляев**. Полуобратное решение задачи чистого изгиба балки в градиентной теории упругости: отсутствие масштабных эффектов // Доклады Академии наук. Физика, технические науки (IF 0.474). – 2018. – Т. 479. – №. 4. – С. 390-394.
3. S. Lurie, **Y. Solyaev**, K. Shramko. Comparison between the Mori-Tanaka and generalized self-consistent methods in the framework of anti-plane strain inclusion problem in strain gradient elasticity // Mechanics of Materials (IF 3.266). – 2018. – Т. 122. – С. 133-144.
4. S. Lurie, **Y. Solyaev**. Revisiting bending theories of elastic gradient beams // International Journal of Engineering Science (IF 7.155). – 2018. – Т. 126. – С. 1-21.
5. S. Lurie, **Y. Solyaev**, A. Volkov, D. Volkov-Bogorodskiy. Bending problems in the theory of elastic materials with voids and surface effects // Mathematics and Mechanics of Solids (IF 2.719). – 2018. – Т. 23. – №. 5. – С. 787-804.
6. S. Lurie, **Y. Solyaev**. Anti-plane inclusion problem in the second gradient electro-elasticity theory // International Journal of Engineering Science (IF 7.155). – 2019. – Т. 144. – С. 103129.

7. Е.В. Ломакин, С.А. Лурье, Л.Н. Рабинский, **Ю.О. Соляев**. Об уточнении напряжённого состояния в прикладных задачах упругости за счёт градиентных эффектов // Доклады Академии наук. Физика, технические науки (IF 0.474). – 2019. – Т. 489. – №. 6. – С. 585-591.
8. **Y. Solyaev**, S. Lurie, V. Korolenko. Three-phase model of particulate composites in second gradient elasticity // European Journal of Mechanics-A/Solids (IF 4.873). – 2019. – Т. 78. – С. 103853.
9. S. Lurie, **Y. Solyaev**. On the formulation of elastic and electroelastic gradient beam theories // Continuum Mechanics and Thermodynamics (IF 3.285). – 2019. – Т. 31. – №. 6. – С. 1601-1613.
10. **Y. Solyaev**, S. Lurie. Pure bending of a piezoelectric layer in second gradient electroelasticity theory // Acta Mechanica (IF 2.645). – 2019. – Т. 230. – №. 12. – С. 4197-4211.
11. **Y. Solyaev**, A. Ustenko, E. Lykosova. Refined analysis of piezoelectric microcantilevers in gradient electroelasticity theory // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Т. 41. – №. 10. – С. 2076-2082.
12. **Y. Solyaev**, S. Lurie, E. Barchiesi, L. Placidi. On the dependence of standard and gradient elastic material constants on a field of defects // Mathematics and Mechanics of Solids (IF 2.719). – 2020. – Т. 25. – №. 1. – С. 35-45.
13. **Y. Solyaev**, S. Lurie, N. Semenov. Generalized Einstein's and Brinkman's solutions for the effective viscosity of nanofluids // Journal of Applied Physics (IF 2.546). – 2020. – Т. 128. – №. 3. – С. 035102.
14. **Y. Solyaev**, S.A. Lurie. Eshelby integral formulas in second gradient elasticity // Nanoscience and Technology: An International Journal. – 2020. – Т. 11. – №. 2. – С. 99-107.
15. **Y. Solyaev**, S. Lurie. Trefftz collocation method for two-dimensional strain gradient elasticity // International Journal for Numerical Methods in Engineering (IF 3.021). – 2021. – Т. 122. – №. 3. – С. 823-839.
16. Е.В. Ломакин, С.А. Лурье, Л.Н. Рабинский, **Ю.О. Соляев**. Концентрация напряжений вблизи жестких цилиндрических включений в условиях анти-плоского сдвига // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки (IF 0.474). – 2020. – Т. 495. – №. 1. – С. 50-56.
17. V. Vasiliev, S. Lurie, **Y. Solyaev**. New approach to failure of pre-cracked brittle materials based on regularized solutions of strain gradient elasticity // Engineering Fracture Mechanics (IF 4.898). – 2021. – Т. 258. – С. 108080.
18. **Y. Solyaev**, Lurie S. Electric field, strain and inertia gradient effects on the anti-plane waves propagation in piezoelectric materials // Journal of Sound and Vibration (IF 4.761). – 2021. – Т. 494. – С. 115898.
19. **Y. Solyaev**, A. Ustenko. On the dispersion relations for the anti-plane surface wave in the second gradient electroelasticity // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – Т. 42. – №. 8. – С. 1935-1943.

20. S. Lurie, A. Kalamkarov, **Y. Solyaev**, A. Volkov. Dilatation gradient elasticity theory // *European Journal of Mechanics-A/Solids* (IF 4.873). – 2021. – Т. 88. – С. 104258.
21. **Y. Solyaev**, S. Lurie, H. Altenbach, F. Dell'Isola. On the elastic wedge problem within simplified and incomplete strain gradient elasticity theories // *International Journal of Solids and Structures* (IF 3.667). – 2022. – Т. 239. – С. 111433.

Также опубликована статья в сборнике трудов международной конференции, включенном в международную базу Scopus:

22. **Y. Solyaev**, S. Lurie, A. Ustenko. On the relations between direct and energy based homogenization approaches in second gradient elasticity // в сборнике трудов *Developments and Novel Approaches in Biomechanics and Metamaterials*. – Springer, 2020. – С. 443-457.