

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Селиванов Иван Алексеевич

**Аэроупругие колебания ортотропной прямоугольной пластинки
со смешанными граничными условиями**

Специальность 1.1.8 Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2023

Работа выполнена на кафедре теории упругости механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова

Научные руководители — *Георгиевский Дмитрий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор РАН*

Алгазин Сергей Дмитриевич, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник

Официальные оппоненты — *Жуков Виктор Тимофеевич, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН, главный научный сотрудник*

Лавит Игорь Михайлович, доктор физико-математических наук, доцент, Тульский государственный университет, профессор

Парышев Сергей Эмильевич, кандидат технических наук, Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н. Е. Жуковского, начальник отделения

Защита состоится 1 декабря 2023 года в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.6 Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова по адресу: 119192, Москва, Мичуринский проспект, д. 1, НИИ механики МГУ, к. 240.

E-mail: pvchist@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский проспект, д. 27) и на портале: <https://dissovet.msu.ru/dissertation/011.6/2739>

Автореферат разослан « » октября 2023 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета МГУ.011.6,
кандидат физико-математических наук

П. В. Чистяков

Общая характеристика работы

Актуальность темы

При проектировании летательных аппаратов особое внимание всегда уделяется флаттеру, как одному из основных явлений аэроупругости — раздела механики сплошной среды, включающего в себя, но не ограничивающегося, теориями упругости и вязкоупругости, гидродинамикой и аэродинамикой. Изначально, когда разработка самолетов и ракет дошла до того, что скорости полета стали превышать некоторые критические значения, значительная часть проблем была связана именно с задачей взаимодействия конструкции и набегающего потока газа, которая была недостаточно изучена в то время. Необходимость максимально облегчить вес летательного аппарата и при этом обеспечить жесткость конструкции привела к использованию концепций монококов — состоящих из тонкостенных элементов оболочек, в которых нагрузки частично распределяются при помощи армирующих конструкций, таких как лонжероны и шпангоуты, а сами оболочки служат внешней обшивкой. Такое решение применялось, например, в конструкции ступени S-IVB ракеты-носителя Сатурн 5 (Saturn V) [NASA/Marshall Space Flight Center. Third Stage Fact Sheet // Saturn V News Reference. 1968]. Взаимодействие элементов конструкции с аэродинамическими силами приводит к колебаниям этих элементов. При скоростях потока, меньше некоторой величины, колебания элементов малы и практически не влияют на аэродинамические и прочностные характеристики летательного аппарата. Когда скорость потока достигает некоторого критического значения, взаимодействие обтекаемого элемента с потоком приводит или к резкому возрастанию деформации элемента, или к возникновению самовозбуждающихся колебаний. Эти явления называются дивергенцией в первом случае и флаттером — во втором, а критическое значение скорости — критической скоростью флаттера. Панельным флаттером называют задачи анализа устойчивости таких элементов как пластинки. Их еще часто называют

флаттером пластинок. Так, распад ракет Фау-2 (V-2, или А-4) во время Второй мировой войны в середине полета был вызван не проблемами с навигацией, как первоначально предполагалось, а из-за флаттера панелей [Garrick I. E., Reed W. H. Historical Development of Aircraft Flutter // Journal of Aircraft. 1981. V. 18. I. 11. P. 897–912]. Решение проблем, связанных с флаттером панелей, стало наиболее актуальным в 1960-х годах при разработке ракет Атлас–Центавр (Atlas–Centaur) [Lall T. R. Interstage Adapter Panel Flutter on Atlas-Centaur AC-2, AC-3, and AC-4 Vehicles // NASA TM-X-1179. 1965] и Сатурн 5 [Nichols J. J. Saturn V, S-IVB Panel Flutter Qualification Test // NASA TN-D-5439. 1969]. Все большему аналитическому, численному и экспериментальному изучению флаттера пластинок способствовали многие случаи разрушения летательных аппаратов, описанные в работах [Garrick I. E., Reed W. H. Historical Development of Aircraft Flutter // Journal of Aircraft. 1981. V. 18. I. 11. P. 897–912, Dowell E. H. Panel flutter // NASA Aeroelasticity Handbook. 2006. V. 2: Design Guides. P. 19.1–19.23].

Флаттеру прямоугольных пластинок были посвящены работы [Мовчан А. А. Поведение комплексных собственных значений в задаче о флаттере панели // Инж. сб. 1960. Вып. 27. С. 70–76, Мовчан А. А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 2. С. 231–243]. Считаясь классическими, эти результаты основаны на законе плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей, сформулированном А. А. Ильюшиным в 1947 г. [Ильюшин А. А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 6. С. 733–755], и его следствии — локальной формулы поршневой теории для избыточного давления газа на колеблющуюся пластинку, что сводит задачу к проблеме собственных значений несамосопряженного оператора [Алгазин С. Д., Кийко И. А. Флаттер пластин и оболочек. М.: ЛЕНАНД, 2017. 264 с].

А. А. Мовчан также ввел понятие параболы устойчивости, которое получило широкое применение при решении подобных задач. Им же был представлен метод точного решения задач о колебаниях прямоугольных пластинок, у которых два края, направленные вдоль набегающего потока, имеют

граничные условия шарнирного опирания, а два других края имеют произвольные граничные условия [Мовчан А. А. Устойчивость лопатки движущейся в газе // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 5. С. 700–706, Мовчан А. А. Об устойчивости панели, движущейся в газе // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 2. С. 231–243].

В настоящее время численному исследованию флаттера пластинок посвящаются как отечественные, так и зарубежные работы и диссертации. Так, большой объем работ по флаттеру пластинок принадлежит В. В. Веденееву [Веденеев В. В. Связанный флаттер упругой пластины в потоке газа с пограничным слоем // Труды МИАН. 2013. Т. 281. С. 149–161, Веденеев В. В. Исследование одномодового флаттера прямоугольной пластины в случае переменного усиления собственной моды вдоль пластины // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 4. С. 163–174.].

Флаттеру защемленной ортотропной пластины посвящена работа С. О. Папкова [Папков С. О. Флаттер защемленной ортотропной прямоугольной пластины // Вычислительная механика сплошных сред. 2017. Т. 10. Вып. 4. С. 361–374], сравнение с результатами которой проводится в настоящей работе. Для давления аэродинамического воздействия набегающего потока с пластинкой применяется формула поршневой теории. Для решения задачи применяется метод Бубнова–Галеркина.

Стоит также отметить работы М. В. Белубекяна, например, [Белубекян М. В., Мартиросян С. Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на ее свободный край // Известия национальной академии наук Армении. 2014. Т. 67. Вып. 2. С. 14–44], в которой рассматривается пластинка, имеющая один свободный край, на которой набегающий поток, а оставшиеся края шарнирно закреплены. В работе применяется формула поршневой теории для давления со стороны обтекающей пластинку потока газа. Постановка задачи сводится к задаче на собственные значения несамосопряженного оператора.

А также диссертацию М. Adler [Adler M. Einfluss turbulenter Grenzschichten auf die aeroelastische Stabilität dünnwandiger Schalen : zur Erlangung der Würde eines

Doktor-Ingenieure (Dr.-Ing.) genehmigte Dissertation / Adler Marko; Hamburg, 2020. 190 p], в которой рассматривается вопрос о влиянии турбулентных пограничных слоев на аэроупругие свойства тонкостенных оболочек при больших дозвуковых и малых сверхзвуковых скоростях.

В части этих работ зачастую рассматриваются классические постановки задач при направлении потока параллельным одной из осей, например, [Eisenberger M., Deutsch A. Solution of thin rectangular plate vibrations for all combinations of boundary conditions // Journal of Sound and Vibration. 2019. V. 452. P. 1–12.]. Теоретические основы флаттера, практические вопросы, а также вопросы моделирования флаттера подробно описаны в работе [Аэроупругость // под ред. П. Г. Карклэ. М.: Инновационное машиностроение, 2019. 652 с.]. При этом большой интерес также представляют собой постановки задач флаттера, которые позволяли бы учитывать направление набегающего потока в плоскости пластинки. Рассмотрению таких задач посвящены, например, работы [Bohon H.L., Flutter of flat rectangular orthotropic panels with biaxial loading and arbitrary flow direction // NASA TN D-1949, 1963. 34 pp., Shyprykevich P. Experimental investigation of orthotropic panel flutter at arbitrary yaw angles, and comparison with theory // NASA CR-2265. 1973. 36 pp., Abdukhakimov F. A., Vedeneev V. V., Effect of yaw angle on flutter of rectangular plates at low supersonic speeds // AIAA Journal. 2022. V. 60. № 7. 11 pp.], в некоторых из которых также рассматриваются ортотропные пластинки.

Довольно часто, особенно в ранние годы исследований, для решения задач панельного флаттера применяется метод Бубнова–Галеркина. Однако, для сложных граничных условий довольно проблематично подобрать систему координатных функций. В последнее время широко распространенным методом можно назвать метод конечных элементов, который требует значительных мощностей вычислительных устройств, однако хорошо зарекомендовавшего себя при решении задач [Бочкарёв С. А. Исследование панельного флаттера многослойных оболочек вращения методом конечных элементов // Численные методы механики сплошной Среды. Тезисы докладов III Всесоюзной Школы

молодых учёных. Красноярск. 1989. С. 115–116]. Такой подход приводит к алгоритму с насыщением [Бабенко К. И. Основы численного анализа. Москва–Ижевск: РХД, 2002. 847 с.], что снижает его эффективность. При этом необходимо отметить, что постановка задачи панельного флаттера с учетом формулы поршневой теории, учитывающая направление вектора скорости потока в плоскости пластинки, сводится к несамосопряженной задаче на собственные значения.

Вместе с этим следует заметить, что большинство этих задач описывается уравнениями эллиптического типа, которые имеют гладкие решения. Поэтому для таких задач представляется целесообразным использовать алгоритмы, которые учитывали бы эту гладкость [Алгазин С. Д. Численное исследование свободных колебаний упругого тела вращения // Известия Тульского гос. ун-та. 2013. № 1. С. 56–66]. В отличие от классических разностных методов и метода конечных элементов, где зависимость скорости сходимости от шага сетки степенная, для алгоритмов, учитывающих гладкость, имеем экспоненциальное убывание погрешности на аналитических решениях [Алгазин С. Д., Кийко И. А. Флаттер пластин и оболочек. М.: ЛЕНАНД, 2017. 264 с]. Такие алгоритмы получили название численных алгоритмов без насыщения [Бабенко К. И. Основы численного анализа. Москва-Ижевск: РХД, 2002. 847 с]. Особенность применения таких алгоритмов заключается в том, что они дают возможность производить решение на сетках с малым числом узлов, поскольку такие алгоритмы автоматически реагируют на гладкость решения рассматриваемой задачи и *a priori* ее знать не нужно [Алгазин С. Д., Кийко И. А. Численное исследование флаттера прямоугольной пластины // ПМТФ. 2003. Т. 44. Вып. 4. С. 35–42].

Таким образом, учитывая все вышесказанное, представляется **актуальным** разработать численный алгоритм без насыщения для решения задач о флаттере ортотропных пластинок в постановке, позволяющей учитывать направление вектора скорости набегающего потока в плоскости пластинки, на что и нацелена настоящая работа. При этом не малый научный и практический интерес представляет собой параметрическое исследование критической скорости

флаттера при изменении направления потока от различных параметров задачи, которое можно провести, воспользовавшись эффективностью численного метода без насыщения. Такое исследование позволило бы определить характерные зависимости, которые могли бы быть крайне полезны при проектировании летательных аппаратов.

Степень разработанности

Решение задач об аэроупругих колебаниях пластинок в потоке газа уже многие десятилетия является актуальной и исследуемой темой. Были предложены различные постановки задач и методы их аналитического и численного решения. Однако не всегда постановки позволяют учитывать направление вектора потока в плоскости пластинки или ортотропию материала пластинки, а решение задач для определенных типов граничных условий является слабо изученной проблемой. Кроме того, часто применяемый метод конечных элементов для численного решения спектральных задач теряет свое основное преимущество (квадратичную сходимость) для несамосопряженных операторов.

Методология и методы исследования

В работе рассматривается постановка задачи панельного флаттера А. А. Ильюшина И. А. Кийко, основанная на теории тонких пластинок Кирхгофа, поршневой теории Ильюшина для давления аэродинамического взаимодействия потока с колеблющейся пластинкой и учитывающая направление вектора скорости набегающего потока в плоскости пластинки [Алгазин С. Д., Кийко И. А. Флаттер пластин и оболочек. М.: ЛЕНАНД, 2017. 264 с]. Такая постановка сводится к несамосопряженной задаче на собственные значения для эллиптического уравнения в частных производных, а внутри рассматриваемой области решение гладкое исходя из традиционной теории дифференциальных уравнений [Алгазин С. Д., Кийко И. А. Флаттер пластин и оболочек. М.: ЛЕНАНД, 2017. 264 с]. При этом, разностные методы, применяемые для численного решения задач и дающие для самосопряженных операторов степенное убывание погрешности с уменьшением шага сетки, для несамосопряженных операторов теряют свое основное преимущество — квадратичная зависимость

$\|u_i^h - u_i\|_S^2$ в оценке собственных значений $0 \leq \lambda_i^h - \lambda_i \leq c_i \|u_i^h - u_i\|_S^2$ (где u_i^h — приближенная собственная функция, λ_i^h — приближенное собственное значение, $\|\cdot\|_S$ — норма в пространстве Соболева W_2^S) нарушается [Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977]. Поэтому для рассматриваемой задачи целесообразно разработать численный алгоритм без насыщения (по К. И. Бабенко [Бабенко К. И. Основы численного анализа. Москва-Ижевск: РХД, 2002. 847 с]), для которого *a priori* не требовалось бы знать гладкость задачи, потому что такой метод автоматически под нее подстраивается и имеет экспоненциальное убывание погрешности на аналитических решениях. При этом решение строится на неравномерной сетке, узлы которой сгущаются к особенностям в углах области. Такой алгоритм позволяет получать достоверные результаты на сетке с малым числом узлов с высокой точностью и скоростью вычислений.

Цель работы

Целью работы является разработка численного алгоритма без насыщения для решения задач о флаттере прямоугольных пластинок в постановках, позволяющих учитывать направление вектора скорости набегающего потока в плоскости пластинки и проведение параметрического исследования критической скорости флаттера при изменении направления вектора скорости потока от параметров соотношения сторон пластинки и жесткостей пластинки вдоль направлений.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Провести апробацию численного алгоритма при помощи решения задач о собственных колебаниях прямоугольных пластинок: ортотропной и изотропной пластинок с граничными условиями защемления, а также смешанными граничными условиями. Провести сравнение результатов с известными результатами других авторов.

2. Разработать численный алгоритм без насыщения для решения задачи о колебаниях ортотропной защемленной пластинки в постановке, учитывающей направление вектора скорости потока в плоскости пластинки. Провести исследование зависимости критической скорости флаттера при изменении направления вектора скорости потока от направления с большей жесткостью к направлению с меньшей жесткостью пластинки. Провести исследование изменения зависимости критической скорости флаттера от направления вектора скорости потока при изменении длины пластинки вдоль направления с меньшей жесткостью. Провести сравнение получаемых разработанным алгоритмом результатов с результатами других авторов.

3. Разработать эффективный численный алгоритм без насыщения для решения задачи о колебаниях прямоугольной изотропной пластинки со смешанными граничными условиями.

4. Разработать эффективный численный алгоритм без насыщения для решения задачи о колебаниях прямоугольной ортотропной пластинки со смешанными граничными условиями.

5. Для изотропной пластинки со смешанными граничными условиями в постановке, учитывающей направление вектора скорости потока в плоскости пластинки, провести исследование зависимости критической скорости флаттера при изменении направления вектора скорости потока от стороны со свободным опиранием до защемленной стороны.

6. Для ортотропной пластинки со смешанными граничными условиями в постановке, учитывающей направление вектора скорости потока в плоскости пластинки, провести исследование зависимости критической скорости флаттера при изменении направления потока от направления с большей жесткостью пластинки к направлению с меньшей жесткостью пластинки и исследование изменения зависимости критической скорости флаттера от направления вектора скорости потока при изменении длины пластинки вдоль направления с меньшей жесткостью.

Научная новизна работы

1. Получены решения задач о флаттере прямоугольных пластинок в постановке, позволяющей учитывать направление вектора скорости набегающего потока в плоскости пластинки при помощи построенного эффективного численного алгоритма без насыщения: колебания изотропной заземленной пластинки, колебания изотропной и ортотропной пластинок со смешанными граничными условиями. Эффективный численный алгоритм без насыщения автоматически подстраивается под гладкость рассматриваемой задачи и позволяет получить достоверные результаты на сетке с малым числом узлов с высокой точностью и скоростью вычислений.

2. Проведено исследование зависимости критической скорости флаттера при изменении направления вектора скорости потока от параметров соотношения сторон пластинки и жесткостей пластинки вдоль направлений и на основании полученных результатов выявлены характерные зависимости.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие новые результаты, полученные в диссертации:

1. Разработанный численный алгоритм без насыщения дает возможность рассчитывать критическую скорость флаттера прямоугольных изотропной и ортотропной пластинок с учетом направления вектора скорости потока в плоскости пластинки со смешанными граничными условиями (тип SCSC) и граничными условиями заземления (тип CCCC) с высокой точностью. Эффективный численный алгоритм позволил провести многопараметрический анализ зависимости критической скорости флаттера при изменении направления вектора скорости потока от параметров соотношения сторон пластинки и жесткостей пластинки вдоль направлений.

2. Проведенный многопараметрический анализ позволил выявить, что для квадратных ортотропных пластинок со смешанными граничными условиями (тип SCSC) характер зависимости критической скорости флаттера от направления вектора потока (при повороте вектора скорости потока от стороны со свободным

опиранием и большей жесткостью до заземленной стороны с меньшей жесткостью) отличается от характера зависимости для изотропных пластинок — рост критической скорости флаттера в области до 45 градусов отсутствует, критическая скорость флаттера убывает нелинейно.

3. Проведенный анализ для удлиненных изотропных и ортотропных пластинок со смешанными граничными условиями (тип SCSC) дает основание сделать вывод о небольшом росте критической скорости флаттера, который сопровождается переходом номера собственного значения, на котором она достигается, от первого к более высоким.

Практическая значимость

Представленный метод позволяет вычислять критическую скорость флаттера для пластинок, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа с учетом направления потока в плоскости пластинки. Представленные решения задач дают возможность проводить расчеты, результаты которых позволяют оценить возможность возникновения неустойчивых колебаний в рассматриваемой системе, а также их влияние на прочность и управляемость летательных аппаратов и других конструкций, в которых применяются пластинки. В результате многопараметрического анализа получены зависимости критической скорости флаттера от различных параметров задачи: направления вектора скорости потока, размеров пластинки и жесткостей ортотропной пластинки. Данные результаты могут найти эффективное применение в научно-исследовательских организациях и конструкторских бюро, специализирующихся на проектировании и расчетах конструкций летательных аппаратов.

Достоверность результатов

Достоверность полученных результатов обусловлена использованием классических методов механики сплошных сред и корректностью используемых методов исследования. При проведении численных расчетов проверена сходимость на разных сетках и установлена согласованность решений тестовых задач с решениями других исследователей.

Апробация работы

Результаты исследования были доложены на Международных конференциях: «Авиация и космонавтика» 2021 г. Москва, «Моделирование нелинейных процессов и систем (MNPS — 2020)» 2020 г. Москва. Кроме того, полученные результаты обсуждались на ежегодных аспирантских и научно-исследовательских семинарах имени А. А. Ильюшина кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством доктора физико-математических наук, профессора, профессора РАН Д. В. Георгиевского (2018 — 2022 гг.).

Публикации

Основные результаты диссертации изложены в 7 публикациях, в том числе в 3 статьях из журналов, индексируемых в базах Web of Science, Scopus, RSCI.

Личный вклад автора

В диссертации приведены результаты, полученные лично автором. Во всех опубликованных работах вклад автора является определяющим. Автор принимал активное участие в выборе граничных условий для рассматриваемых задач, разработке метода численного решения задачи, проведении численных исследований, планировании и обсуждении результатов численных исследований. Дискретизация, применяемая для численного решения задачи о колебаниях пластины со смешанными граничными условиями, разработана лично автором. Численный алгоритм был реализован в программном коде лично автором. Все результаты и их анализ, графики, таблицы, представленные в диссертации, автор выполнил лично. При этом необходимо отметить следующее. Диссертация подготовлена автором на основе работ, опубликованных совместно с С. Д. Алгазиным, который предложил разработать для решения задачи численный алгоритм без насыщения, участвовал в обсуждении разработанного алгоритма, выбора граничных условий, характеристик рассматриваемых пластин и результатов численных исследований. Положения, выносимые на защиту, получены лично автором.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и заключения. Объем работы — **105** страниц, включая **32** рисунка и **26** таблиц. Список литературы содержит **110** наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность работы, формируется цель, ставятся задачи диссертационной работы, излагается научная новизна и практическая значимость полученных результатов, достоверность результатов, апробация работы и публикации автора.

В **первой главе** решаются задачи о собственных колебаниях прямоугольных пластинок. Проведение исследования обусловлено необходимостью апробации частей алгоритма и разработки основы программного комплекса, которые будут применяться для решения задач о флаттере пластин во второй и третьей главах.

Приводится решение задачи о собственных колебаниях ортотропной защемленной прямоугольной пластинки. Рассматривается постановка задачи, основанная на уравнении Софи Жермен–Лагранжа [Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1947. 355 с.]. Для решения задачи применяется интерполяционная формула, автоматически удовлетворяющая граничным условиям, узлы сетки располагаются в нулях, получаемых из нулей многочленов Чебышева линейным преобразованием. Аналогичная интерполяционная формула будет использоваться в задаче о флаттере защемленной прямоугольной пластинки во второй главе. Для получения матрицы дискретного бигармонического оператора оператор применяется к интерполяционной формуле. Программная реализация решения задачи была выполнена на языке Fortran. Представлены результаты вычислительных экспериментов и показано, что полученные результаты удовлетворительно совпадают с результатами, полученными методом конечных элементов другими авторами с погрешностью не более 6%.

Далее в работе приводится решение задачи о собственных колебаниях изотропной прямоугольной пластинки со смешанными граничными условиями, жестко закрепленной по противоположным краям и шарнирно опертой по двум другим. Аналогичная пластинка будет рассмотрена в третьей главе работы.

Решение ищется в виде ряда, удовлетворяющего граничным условиям. Описывается процедура применения метода Бубнова–Галеркина. Задача сводится к определению собственных значений системы линейных алгебраических уравнений. Представлено построение приближенного первого собственного значения и приведено сравнение результата с точным расчетом из работы другого автора, погрешность вычисления при этом составляет не более 0.7%. Приводятся результаты расчета собственных значений на сетках 13x13 и 25x25 и сравнение этих результатов с работой другого автора, которые показывают сходимость решения и удовлетворительную точность.

Представленные результаты позволили создать основу для дальнейшего решения задач о флаттере прямоугольных пластинок.

Во **второй** главе рассматривается задача о колебаниях защемленной по контуру ортотропной пластинки в постановке, учитывающей направление набегающего потока в плоскости пластинки, с использованием формулы поршневой теории для давления аэродинамического взаимодействия потока с колеблющейся пластинкой [Алгазин С. Д., Кийко И. А. Флаттер пластин и оболочек. М.: ЛЕНАНД, 2017. 264 с]. Постановка задачи выглядит следующим образом:

$$L'w + \frac{kp_0}{c_0} \vec{V}' \text{grad} w + \frac{kp_0}{c_0} \frac{\partial w}{\partial t} + \rho' h' \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$L'\varphi = D'_x \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2D'_{xy} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + D'_y \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4},$$

$$D'_x = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}, \quad D'_y = \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}, \quad D'_{xy} = D'_x \nu_y + 2 \frac{G_{xy}}{12} h^3.$$

Здесь p_0 , c_0 — давление и скорость звука в невозмущенном потоке, k — показатель политропы газа, E_x , E_y — модули Юнга по осям x и y , ν_x , ν_y — коэффициенты Пуассона, G_{xy} — модуль сдвига, h' — толщина пластинки, \vec{V}' — вектор набегающего потока, ρ' — плотность материала пластинки. Для получения задачи на собственные значения задаются следующие величины: цилиндрическая жесткость $w = \varphi' \exp(\omega't)$ и собственное число λ' в виде $\rho'h'\omega'^2 + \omega'kp_0/c_0 + \lambda' = 0$. Уравнение колебаний (1) дополняется граничными условиями защемления. За характерный размер принимается половина длины в направлении x , то есть $a = a'/2$, $b = b'/a$. За характерные параметры — p_0 , c_0 . Получается задача на собственные значения в области $S: \{-1 \leq x \leq 1, -b \leq y \leq b\}$ [Ильюшин А. А., Кийко И. А. Новая постановка задачи о флаттере полой оболочке // Прикл. матем. и механ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 167–171]:

$$\begin{aligned} L\varphi + k\vec{V}'\text{grad}\varphi &= \lambda\varphi, \\ \rho h\omega^2 + k\omega + \lambda &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\varphi(x, y)\Big|_{|x|=1} = 0, \quad \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x}\Big|_{|x|=1} = 0, \quad \varphi(x, y)\Big|_{|y|=b} = 0, \quad \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y}\Big|_{|y|=b} = 0, \quad (3)$$

$$\vec{V}' = (V_x, V_y), \quad L\varphi = D_x \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + 2D_{xy} \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} + D_y \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4},$$

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12(1-\nu_x\nu_y)p_0}, \quad D_y = \frac{E_y h^3}{12(1-\nu_x\nu_y)p_0}, \quad D_{xy} = D_x\nu_y + 2\frac{G_{xy}}{12p_0}h^3.$$

Здесь h — толщина пластинки, отнесенная к a , $\omega = \omega'a/c_0$ — безразмерная частота, $\lambda = \lambda'a/p_0$ — безразмерное собственное значение, $\varphi = \varphi(x, y) = \varphi'/a$ — безразмерное амплитудное значение прогиба.

Собственное число λ связано с частотой колебаний соотношением

$$\lambda = -\rho h\omega^2 - k\omega,$$

где ρ — безразмерная плотность материала пластинки, отнесенная к параметру ρ_0/c_0^2 .

Постановка такова, что решение ищется в виде комплексной функции $\varphi e^{\omega t}$. Колебания пластинки будут устойчивыми или нет в зависимости от того, будет ли действительная часть ω больше нуля, то есть $\text{Re } \omega < 0$, или меньше нуля, то есть $\text{Re } \omega > 0$. При $\text{Re } \omega > 0$ получаются быстро растущие решения, то есть имеет место неустойчивость. Если $\lambda_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$ — наименьшее по модулю собственное значение, то выписанным неравенствам соответствуют $F(\alpha_1, \beta_1) > 0$ или $F(\alpha_1, \beta_1) < 0$, где $F(\alpha_1, \beta_1) = \alpha_1 k^2 - \rho h \beta_1^2$. Уравнение $F(\alpha_1, \beta_1) = 0$ определяет нейтральную кривую, называемую параболой устойчивости, и соответствующую ей критическую скорость флаттера. Речь идет, следовательно, о нахождении нулей функции $F(\alpha_1(V), \beta_1 = \beta_1(V))$ при заданном направлении вектора скорости потока. Колебания пластины будут устойчивыми или нет в зависимости от того, находятся ли собственные значения λ рассматриваемой спектральной задачи внутри параболы $y^2 = \frac{k^2}{\rho h} x$ или нет.

Представлена дискретизация, автоматически удовлетворяющая граничным условиям защемления (3).

$$\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m M_{i0}(z) L_{j0}(x) \varphi(x_j, y_i), \quad (4)$$

$$y = bz, \quad z \in [-1, 1], \quad x \in [-1, 1],$$

$$L_{j0}(x) = \frac{l(x)}{l'(x_j)(x - x_j)}, \quad l(x) = (x^2 - 1)^2 T_n(x), \quad T_n(x) = \cos(n \arccos x),$$

$$x_j = \cos \vartheta_j, \quad \vartheta_j = \frac{(2j-1)\pi}{2n}, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$M_{i0}(z) = \frac{M(z)}{M'(z_i)(z - z_i)}, \quad M(z) = (z^2 - 1)^2 T_m(z),$$

$$z_i = \cos \vartheta_i, \quad \vartheta_i = \frac{(2i-1)\pi}{2m}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где $T_n(z) = \cos(n \arccos z)$ — многочлены Чебышева.

Для получения матрицы дискретного оператора L требуется применить этот оператор к интерполяционной формуле. В результате получается матрица H размера $N \times N$, $N = mn$. Узлы нумеруются в прямоугольнике (x_j, y_i) сначала по y , потом по x , в результате получается, что $L\varphi$ приближенно заменяется соотношением $H\varphi$, где φ — вектор значений функции $\varphi = \varphi(x, y)$ в узлах сетки. Интерполяционную формулу (4) необходимо подставить в уравнение (2), а x и y взять в узлах сетки как указано выше. Тогда исходное уравнение преобразуется в алгебраическую задачу на собственные значения. Из решения полученной задачи определяются значения критической скорости флаттера.

Далее проводятся вычислительные эксперименты для ортотропной прямоугольной пластинки при изменении направления потока от 0 до $\pi/2$. При этом рассматривались пластинки с различным $|y|$, от $|y| \leq 1$, то есть квадратная пластинка, до $|y| \leq 2$. Показано, что при изменении сетки результаты отличаются незначительно, что свидетельствует об устойчивости решения.

Из представленных результатов (рисунок 1) для ортотропной заземленной квадратной и удлиненной пластинок делается следующий вывод: критическая скорость флаттера при повороте вектора скорости потока от направления с большей жесткостью пластинки к направлению с меньшей жесткостью нелинейно убывает, а для удлиненной пластинки, при соотношении сторон более 1.5, зависимость становится немонотонной, при изменении направления потока в области до 10 градусов ($|\alpha| \leq 10\pi/180$), наблюдается небольшой рост критической скорости флаттера, сопровождающийся переходом номера собственного значения, на котором она достигается, от первого к более высоким. При дальнейшем изменении угла поворота критическая скорость флаттера падает.

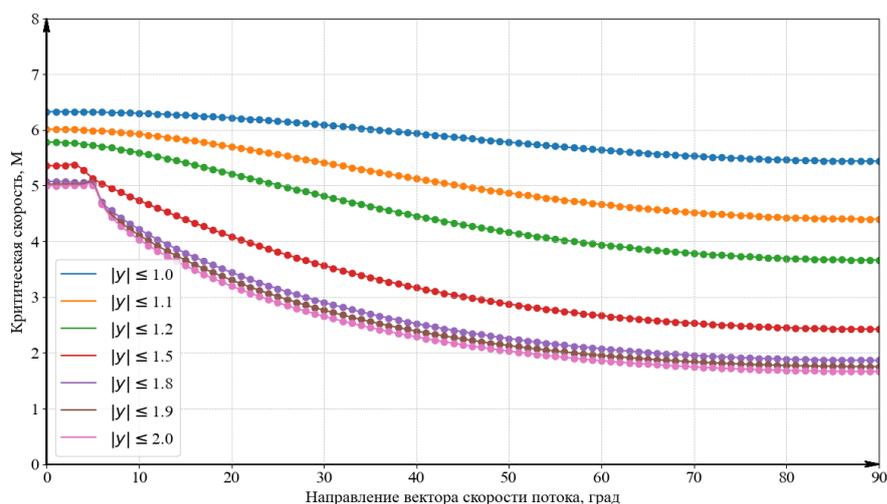


Рисунок 1 — Графики критической скорости от направления потока при различных $|y|$ для ортотропной СССС пластинки

Рост критической скорости флаттера в области до 10 градусов угла поворота вектора потока был также замечен в случае изотропной пластинки с граничными условиями шарнирного опирания как для поршневой теории, так и для линейризованной потенциальной теории сверхзвукового обтекания в работе [Лунев А.В. Колебания и устойчивость упругой пластины в рамках линейризованной теории сверхзвукового обтекания // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2010. № 2. С. 101–103].

Для верификации разработанного алгоритма проводится сравнение значений критического динамического давления для квадратной изотропной полностью защемленной по контуру пластинки с известными результатами (таблица 1). Результаты показывают, что получаемые по представленному в работе алгоритму на сетке 21x21 узел удовлетворительно совпадают с данными по методу Релея–Ритца [Durvasula S. Flutter of clamped skew panels with mid-plane forsec in supersonic flow // Journal of the Indian institute of science. 1970. V.52, №4. P. 192–208] с погрешностью не более 2.4% (для $\alpha = 45^\circ$), методу конечных элементов [Sander, G., Bon, C., & Geradin, M. Finite element analysis of Supersonic panel flutter. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1973. 7(3). P. 379–394. doi:10.1002/nme.1620070313] с погрешностью не более 4% (для $\alpha = 45^\circ$) и Бубнова–Галеркина [Папков С. О. Флаттер защемленной

ортотропной прямоугольной пластины // Вычислительная механика сплошных сред. 2017. Т. 10. Вып. 4. С. 361–374.] с погрешностью 6% (для $\alpha = 0^\circ$).

Таблица 1 — Сравнение значений критического динамического давления для пластины CCCC

α°	Durvasula	Kornechi	Sander	Папков	Автор
0	838	616	859	883	830
15	852		865		835
30	843		882		847
45	875		890		854
60			882		847
75			865		835
90			859		830

Полученные результаты в совокупности со сравнением с известными расчетами создают основу для построения решения задачи о колебаниях ортотропной прямоугольной пластинки со смешанными граничными условиями.

В **третьей главе** представлены решения задач о колебаниях изотропной и ортотропной пластинок со смешанными граничными условиями, когда два противоположных края пластинки свободно оперты, а два других — жестко заземлены (случай SCSC, рисунок 2). Постановка задачи аналогична второй главе с учетом новых граничных условий:

$$\varphi(x, y)|_{|x|=1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \Big|_{|x|=1} = 0, \quad \varphi(x, y)|_{|y|=b} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial^2 y} \Big|_{|y|=b} = 0.$$

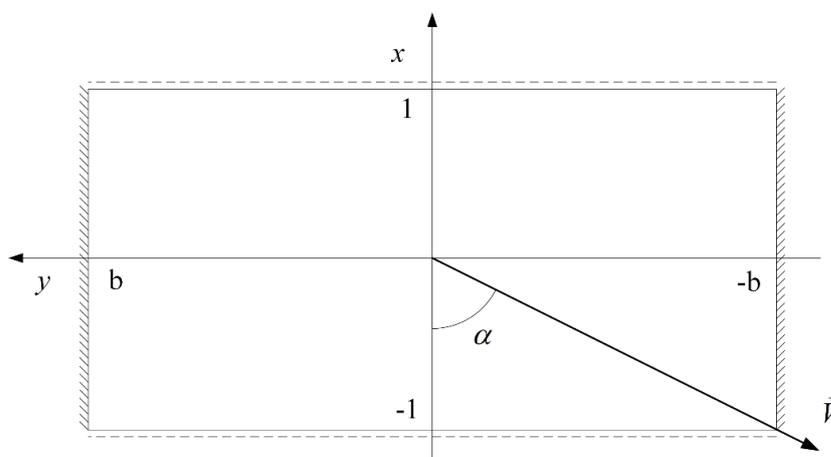


Рисунок 2 — Общий вид пластинки SCSC

Построение решения совпадает с главой 2. Для рассматриваемой задачи вводится новая дискретизация:

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (M_{i0}(z) + l_1 \cdot y \cdot M(z) + l_2 \cdot M(z)) L_{j0}(x) \varphi(x_j, y_i)$$

$$bz_2 = y, z \in [-1, 1], \quad x \in [-1, 1],$$

где

$$L_{j0}(x) = \frac{l(x)}{l'(x_j)(x - x_j)}, \quad l(x) = (x^2 - 1)^2 T_n(x), \quad T_n(x) = \cos(n \arccos x),$$

$$x_j = \cos \theta_j, \quad \theta_j = (2j - 1)\pi / (2n), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$M_{i0}(z) = \frac{M(z)}{M'(z_i)(z - z_i)}, \quad M(z) = (z^2 - 1)^2 T_m(z), \quad T_m(z) = \cos(m \arccos z),$$

$$z_i = \cos \theta_i, \quad \theta_i = (2i - 1)\pi / (2m), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где $T_n(z) = \cos(n \arccos z)$ — многочлены Чебышева.

Коэффициенты l_1 и l_2 определяются исходя из граничных условий задачи.

Граничные условия на заземленном крае удовлетворяются автоматически.

На основании представленного решения проводились вычислительные эксперименты. Рассматривались изотропная и ортотропная пластинки, проводился расчет критической скорости флаттера при изменении направления потока от 0 до $\pi/2$, с различным $|y|$, от $|y| \leq 1$, то есть квадратная пластинка, до $|y| \leq 2$. Показано, что результаты удовлетворительно совпадают на различных сетках. Приведены результаты многопараметрического анализа зависимости критической скорости флаттера при изменении направления вектора потока в плоскости пластинки при изменении соотношений сторон и жесткостей пластинки. На рисунке 3 представлены результаты расчета критической скорости флаттера для ортотропной пластинки.

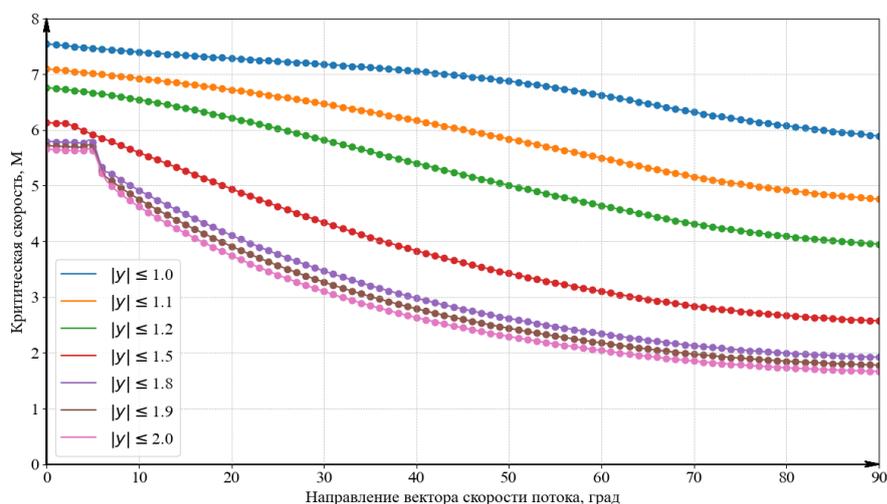


Рисунок 3 — Графики критической скорости от направления потока при различных $|y|$ для ортотропных пластинок SCSC

На основании представленных результатов делаются следующие выводы:

- для квадратной изотропной пластинки со смешанными граничными условиями при повороте вектора скорости потока от стороны со свободным опиранием до заземленной стороны критическая скорость флаттера немонотонно убывает — сначала возрастает, при угле до 45 градусов, а затем убывает до значения, меньшего изначального;

- для квадратной ортотропной пластинки со смешанными граничными условиями критическая скорость флаттера при повороте вектора скорости потока от стороны со свободным опиранием и большей жесткостью до заземленной стороны с меньшей жесткостью нелинейно убывает;

- для удлиненной изотропной и ортотропных пластинок со смешанными граничными условиями (тип SCSC), при соотношении сторон более 1.5, при изменении направления потока в области до 10 градусов ($|\alpha| \leq 10\pi / 180$) наблюдается небольшой рост критической скорости флаттера, сопровождающийся переходом номера собственного значения, на котором она достигается, от первого к более высоким. При дальнейшем изменении угла поворота критическая скорость флаттера падает.

Образование особенности из последнего вывода представлено на рисунке 4 для ортотропной пластинки.

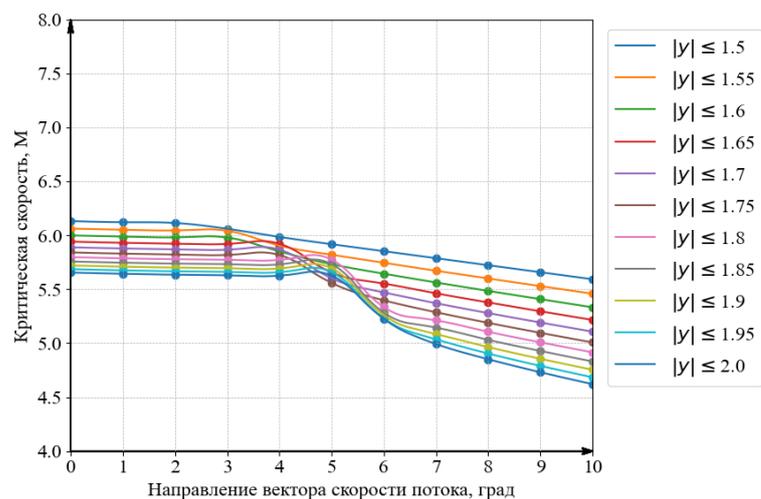


Рисунок 4 — Графики критической скорости от направления потока при различных $|y|$ для ортотропной пластинки SCSC

В работе также представлены результаты расчета критической скорости флаттера при изменении толщины пластинки. Полученные результаты показывают, что критическая скорость флаттера возрастает с увеличением толщины пластинки.

Программный комплекс разработан на языках Fortran и Python. Он позволяет рассчитывать критическую скорость флаттера и строить соответствующие ей собственные формы потери динамической устойчивости.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые состоят в следующем:

1. Проанализировано современное состояние проблемы флаттера пластинок.
2. Сформулирована постановка задачи об аэроупругих колебаниях прямоугольной ортотропной пластинки, учитывающая направление вектора скорости набегающего потока в плоскости пластинки, со смешанными граничными условиями, когда два противоположных края пластинки защемлены, а два других края свободно оперты. Также рассмотрены защемленная по контуру и изотропная пластинки.
3. Математическая модель флаттера пластинки основана на теории тонких пластинок Кирхгофа, поршневой теории Ильюшина для давления

аэродинамического воздействия потока с колеблющейся пластинкой в постановке задачи А. А. Ильюшина, И. А. Кийко, учитывающей направление вектора скорости набегающего потока в плоскости пластинки. Критическая скорость флаттера определяется из решения несамосопряженной задачи на собственные значения. Решение ищется в виде комплексной функции.

4. Решение задачи на собственные значения получается путем применения дискретизации с подбором коэффициентов, удовлетворяющих рассматриваемым граничным условиям, на неравномерной сетке по узлам Чебышева.

7. Разработан численный алгоритм без насыщения для решения задачи о колебаниях ортотропной заземленной пластинки в постановке, учитывающей направление вектора скорости потока в плоскости пластинки.

8. Проведено численное исследование зависимости критической скорости флаттера при изменении направления потока от направления с большей жесткостью пластинки к направлению с меньшей жесткостью пластинки и исследование изменения зависимости критической скорости флаттера от направления вектора скорости потока при изменении длины пластинки вдоль направления с меньшей жесткостью для заземленной ортотропной пластинки. Проведено сравнение получаемых результатов по представленному алгоритму с результатами других авторов для квадратной изотропной заземленной пластинки и показано, что результаты удовлетворительно совпадают.

9. Разработан численный алгоритм без насыщения для решения задачи о колебаниях изотропной и ортотропной пластинок со смешанными граничными условиями (типа SCSC) в постановке, учитывающей направление вектора скорости потока в плоскости пластинки.

10. Проведено исследование зависимости критической скорости флаттера при изменении направления вектора скорости потока от стороны со свободным опиранием до заземленной стороны при изменении длины пластинки вдоль направления со свободным опиранием и установлено, что:

— для квадратной изотропной пластинки со смешанными граничными условиями при повороте вектора скорости потока от стороны со свободным опиранием до заземленной стороны критическая скорость флаттера немонотонно убывает — сначала возрастает, при угле до 45 градусов, а затем убывает до значения, меньшего изначального;

— для квадратной ортотропной пластинки со смешанными граничными условиями критическая скорость флаттера при повороте вектора скорости потока от стороны со свободным опиранием и большей жесткостью до заземленной стороны с меньшей жесткостью нелинейно убывает;

— для удлиненной изотропной и ортотропных пластинок со смешанными граничными условиями (тип SCSC), при соотношении сторон более 1.5, при изменении направления потока в области до 10 градусов ($|\alpha| \leq 10\pi/180$) наблюдается небольшой рост критической скорости флаттера, сопровождающийся переходом номера собственного значения, на котором она достигается, от первого к более высоким. При дальнейшем изменении угла поворота критическая скорость флаттера падает.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI

1. Алгазин С. Д., Селиванов И. А. Задача о собственных колебаниях прямоугольной пластины со смешанными краевыми условиями // Прикладная механика и техническая физика. 2021. Т. 62. Вып. 2(366). С. 70–76. ИФ WoS 2021: 0.561.

2. Алгазин С. Д., Селиванов И. А. Свободные колебания ортотропной конической оболочки. М.: Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 2022. № 5. С. 39–44. EDN MCUIKR. ИФ РИНЦ 2021: 0.467

3. Алгазин С. Д., Селиванов И. А. Задача о флаттере пластины при смешанных граничных условиях // Прикладная механика и техническая физика. 2022. Т. 63. № 5(375). С. 160–167. DOI 10.15372/PMTF20220516. ИФ WoS 2021: 0.561.

В журналах, входящих в перечень ВАК

4. Алгазин С. Д., Селиванов И. А. Колебания ортотропной защемленной прямоугольной пластины. М.: Научный вестник ГосНИИ ГА, 2020. Т. 32. С. 140–148. ИФ РИНЦ 2018: 0.525.

В сборниках трудов конференций

5. Селиванов И. А., Алгазин С. Д. Флаттер пластины со смешанными граничными условиями / Авиация и космонавтика: Тезисы 20-ой Международной конференции. 22–26 ноября 2021. М.: Издательство Перо, 2021. С. 460–461.

Препринты

6. Алгазин С. Д., Селиванов И. А. Собственные колебания прямоугольной пластины со смешанными краевыми условиями (SCSC). 2020. 20 с. (Препринт / ИПРИМ РАН; Серия: Численные алгоритмы классической матфизики; № 1187). ISBN: 978-5-91741-251-1.

7. Алгазин С. Д., Селиванов И. А. Численное исследование флаттера пластины в сверхзвуковом потоке газа. 2021. 28 с. (Препринт / ИПРИМ РАН; Серия: Численные алгоритмы классической матфизики; № 1194). ISBN: 978-5-91741-272-6.

Селиванов Иван Алексеевич

Аэроупругие колебания ортотропной прямоугольной пластинки со смешанными граничными
условиями

Автореф. дисс. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать __.10.2023. Заказ № _____

Тираж 60 экз.

Типография _____