

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

На правах рукописи



Мосолова Юлия Михайловна

**Стабилизация переключаемых систем в
условиях неопределённости**

1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
Фурсов Андрей Серафимович

Москва – 2024

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Цифровая квадратичная стабилизация переключаемой интервальной линейной системы	17
1.1. Синтез цифрового стабилизатора по выходу для переключаемой интервальной линейной системы	17
1.1.1. Основные определения и обозначения	17
1.1.2. Постановка задачи	22
1.1.3. Переход к дискретной модели	25
1.1.4. Построение цифрового регулятора	31
1.1.5. Квадратичная стабилизация на основе общей функции Ляпунова	35
1.1.6. Квадратичная стабилизация на основе множественной функции Ляпунова	43
1.2. Достаточное условие существования динамического регулятора .	47
1.3. Выводы к первой главе	56
Глава 2. Цифровая сверхстабилизация переключаемой интервальной линейной системы	57
2.1. Метод построения цифрового сверхстабилизатора по состоянию для переключаемой интервальной линейной системы	57
2.1.1. Задача стабилизации статическим регулятором по состоянию	57
2.1.2. Переход к дискретной модели	60
2.1.3. Синтез цифрового сверхстабилизатора	61
2.2. Численная реализация алгоритма поиска сверхстабилизатора для переключаемых интервальных систем	68

2.2.1.	Основные шаги алгоритма поиска регулятора	69
2.2.2.	Поиск стабилизирующего регулятора с использованием программного модуля SFMCS	70
2.3.	Выводы ко второй главе	72
Глава 3. Построение систем стабилизации для переключаемых интервальных объектов с режимами различных порядков		
3.1.	Основные определения и постановка задачи	74
3.2.	Приведение к единому динамическому порядку	78
3.3.	Достаточное условие стабилизируемости	82
3.4.	Методы построения стабилизирующего регулятора	86
3.4.1.	Случай точечных векторов b_i	87
3.4.2.	Общий случай	89
3.5.	Выводы к третьей главе	95
Глава 4. Стабилизация переключаемой системы регулятором пе- ременной структуры		
4.1.	Теоретические аспекты построения нейрорегулятора для пере- ключаемых линейных систем	96
4.1.1.	Постановка задачи	96
4.1.2.	Подход к решению	100
4.1.3.	Выбор режимов переключаемого регулятора	102
4.1.4.	Квантование времени работы наблюдателя переключаю- щего сигнала	103
4.1.5.	Оценка нормы решения для замкнутой системы	109
4.1.6.	Формирование обучающей выборки	110
4.2.	Некоторые теоретические аспекты нейросетевого подхода к ста- билизации переключаемых интервальных систем	111
4.2.1.	Постановка задачи	111
4.2.2.	Выбор режимов переключаемого регулятора	114

4.2.3.	Построение неидеального наблюдателя режимов замкнутой переключаемой системы	117
4.2.4.	Квантование времени работы наблюдателя переключающего сигнала	119
4.3.	Выводы к четвёртой главе	122
Заключение		124
Список литературы		126
Приложение А. Верификация достаточного условия устойчивости линейной переключаемой системы.		141
A.1.	Случай линейных переключаемых систем без параметрической неопределённости.	141
A.2.	Случай линейных интервальных переключаемых систем.	148
Приложение Б. Программный модуль SFMCS (Stabilizing Feedback and Modeling Closed System)		158

Введение

Актуальность темы исследования и степень её разработанности.

Диссертация является исследованием в одном из активно развивающихся направлений современной теории автоматического управления — теории переключаемых систем. Под переключаемой системой понимают многорежимную динамическую систему, определяемую семейством непрерывных или дискретных по времени подсистем и правилами, задающими переключения между ними. Математическими моделями таких систем являются системы дифференциальных или разностных уравнений с "скачкообразно" изменяющимися правыми частями. Отметим, что подобные системы являются центральным объектом исследований одной из фундаментальных теорий, посвященных проблеме стабилизации динамических систем в условиях неопределенности, теории систем с переменной структурой (см., например, С. В. Емельянов [1; 2]).

Системы с переключениями привлекали внимание исследователей начиная с 50-х годов прошлого столетия. Прообразом таких систем явились обычные релейные системы и системы с изменениями параметров. История развития математической модели непрерывно–дискретных систем насчитывает не одно десятилетие: в 50-х годах уже формулируются основные проблемы и делается попытка построить методы исследования таких систем Я. З. Цыпкиным [3] и А. И. Лурье [4], в 1964 году Н. П. Бусленко [5] предложил агрегативную систему, а в 1973 год В. М. Глушков вводит понятие «непрерывно–дискретная система» [6]. В начале 1990-х годов достижения в области символьных вычислений и теории реактивных систем создали предпосылки к возникновению уже современной теории гибридных систем (ГС), разработанной исследователями D. Harel [7] и A. Pnueli [8]. Также фундаментальный вклад в становление и развитие этой теории внесли E. A. Lee, H. Zhenq, J. Esposito, V. Kumar, G.J. Pappas [9–11], и отечественные исследователи Ю. Г. Карпов, Ю. Б. Сениченков, Ю. Б. Колесов, Ю. В. Шорников, Е. А. Новиков [12–20].

Приложения переключаемых систем достаточно разнообразны. Например, переключаемые системы используют для моделирования реальных управляемых технических объектов или процессов, которые либо по своей специфике являются многорежимными, либо работают в условиях действующих параметрических возмущений (см. D. Liberzon [21], M. S. Mahmoud [22], О. А. Шпилевая и К. Ю. Котов [23], С. Н. Васильев и А. И. Маликов [24]). Также с помощью переключаемых линейных систем можно аппроксимировать поведение нелинейных систем дифференциальных уравнений в заданных областях пространства состояний (см. M. Rewienski и J. White [25], M. Johansson [26]). Переключаемые системы находят также применение и при моделировании нечетких систем управления (см., например, Z. Sun и S. S. Ge [27]). Особый класс переключаемых систем представляют переключаемые системы с режимами различных динамических порядков и импульсными эффектами (см., например, работы [28–38]). Некоторые управляемые физические процессы могут демонстрировать в процессе своего функционирования скачкообразное изменение не только параметров системы, но и структуры (размерности вектора состояния). В связи с чем, актуальной задачей является стабилизация переключаемых систем, для которых режимы могут иметь различные динамические порядки. Эти системы характеризуются разрывными траекториями в пространстве состояний и удобны при описании реальных процессов, при которых может происходить либо упрощение, либо усложнение математической модели. Отметим, что в известной нам литературе рассматривается только случай конечного числа переключений, при которых меняется динамический порядок подсистем переключаемой системы.

В связи с тем, что при построении математических моделей реальных процессов или технических устройств практически неизбежны ошибки в расчетах параметров этих моделей, то при построении регулятора, решающего какую-либо задачу управления для реального динамического объекта, необходимо обеспечить робастность такого регулятора, то есть его работоспособность при возможных вариациях параметров соответствующей математической модели,

причем эти вариации не обязательно малые. Для того чтобы учесть указанный аспект, целесообразно рассматривать математические модели объектов с параметрической неопределенностью, в частности, с интервальной неопределенностью (см., например, Л. Т. Ащепков, Д. В. Давыдов [39]).

Одной из важнейших проблем теории переключаемых систем является проблема устойчивости и стабилизации движения таких систем. Указанной тематике посвящено достаточно много публикаций российских и иностранных исследователей. Например, в работах W. P. M. H. Heemels, B. Schutter, J. Lunze, M. Lazar [40], J. P. Hespanha [41] и монографиях [21; 22; 26–28] представлены весьма обширные библиографические списки публикаций по проблемам устойчивости и стабилизации переключаемых систем [42–61]. При этом стоит заметить, что предлагаемые в этих работах алгоритмы стабилизации, как правило, основаны на методе функций Ляпунова и решении линейных матричных неравенств (см., например, Д. В. Баландин и М. М. Коган [62]).

Можно выделить два основных подхода к решению задачи стабилизации переключаемой системы. Первый подход состоит в построении универсального регулятора, одновременно стабилизирующего (см., например, работы [63–74]) конечное семейство режимов такой системы, то есть обеспечивающего асимптотическую устойчивость каждого замкнутого режима стабилизируемой переключаемой системы. Однако, одной лишь устойчивости замкнутых режимов еще недостаточно, чтобы гарантировать равномерную асимптотическую устойчивость соответствующей переключаемой системы. Этот факт связан с наличием у асимптотически устойчивых линейных систем так называемого "начального всплеска" нормы решения, проявляющегося в ее резком возрастании на некотором начальном промежутке времени. И если моменты переключения устойчивых подсистем будут совпадать с точками возрастания норм решений отдельных подсистем, то, в результате, можно получить неограниченную траекторию [21]. В связи с этим, необходимо наложить дополнительные условия на устойчивые режимы или на множество переключающих сигналов, которые обеспечили

бы устойчивость переключаемой системы. Что касается условия на множество переключающих сигналов, то оно основано, главным образом, на том факте [21], что для переключаемой линейной системы с устойчивыми режимами всегда существует такое положительное число τ (*время задержки*), что данная система будет равномерно асимптотически устойчивой, если для любого переключающего сигнала минимальное время между переключениями не меньше τ . Таким образом, если универсальный регулятор обеспечивает асимптотическую устойчивость каждого режима замкнутой системы, то для гарантированной стабилизируемости переключаемой системы достаточно каким-либо способом оценить для нее соответствующее время задержки. При этом заметим, что в настоящее время можно предложить несколько подходов к решению данной задачи (см. Б. Т. Поляк, М. В. Хлебников, Л. Б. Рапопорт [75] и Б. П. Демидович [76]), однако не существует какого-либо единого метода получения наилучшей оценки времени задержки для произвольной переключаемой системы с устойчивыми режимами.

Второй подход к стабилизации заключается в построении переключаемого регулятора (регулятора переменной структуры), моменты переключения которого синхронизированы с переключениями стабилизируемой системы. Построение такого регулятора предполагает решение следующих задач: построение стабилизирующего регулятора для каждого режима исходной системы в отдельности (что существенно проще, чем поиск универсального регулятора в рамках первого подхода), обеспечение за счет выбора регуляторов одного из достаточных условий устойчивости переключаемой системы с устойчивыми режимами либо оценка надлежащего времени задержки (последняя подзадача значительно проще первой) и, наконец, обеспечение синхронности переключений регулятора и стабилизируемой системы. Последняя задача является достаточно простой в случае, когда значение переключающего сигнала известно в каждый момент времени. Однако, её сложность резко возрастает, когда переключающий сигнал ненаблюдаемый, что является достаточно частым предположением при

решении задачи стабилизации таких систем. Но тогда возникает вопрос, как настроить переключения регулятора переменной структуры? В этой ситуации необходимо построение наблюдателя активных режимов, который по известной информации о системе (вектор состояния, выход и др.) формировал бы номер активного режима. В качестве такого наблюдателя может выступать, например, искусственная нейронная сеть.

Отметим, что в настоящее время в связи с бурным развитием вычислительной техники, в частности повышения её производительности и быстродействия, в подавляющем большинстве современных автоматических системах управления используются в качестве регуляторов вычислительные устройства (микроконтроллеры). В связи с этим, в представленной работе весьма актуальной является задача разработки конструктивных алгоритмов построения цифровых (дискретных) регуляторов (см. К. Ю. Поляков [77]) для переключаемых систем. К сожалению, такие исследования практически не отражены в современной научной литературе по теории автоматического управления.

Диссертационное исследование опирается на цикл работ [78–83], посвящённых проблеме построения стабилизирующих регуляторов для переключаемых линейных систем при различных предположениях относительно этих переключаемых систем и регуляторов. В работе А. С. Фурсова и Э. Ф. Хусаинова [78] для скалярной переключаемой линейной системы рассмотрены общие постановки задач о стабилизации по состоянию и по выходу в предположении о ненаблюдаемости переключающего сигнала. Для стабилизации по состоянию предложен алгоритм, предполагающий построение такого стабилизирующего регулятора, который обеспечивает устойчивость замкнутой переключаемой системы при произвольных переключающих сигналах. Для стабилизации по выходу предложен алгоритм, предполагающий описание режимов переключаемой системы через передаточные функции с последующим построением такой стабилизирующей динамической обратной связи по выходу, которая обеспечивает устойчивость каждого режима в отдельности. Поскольку при этом, в общем

случае, не гарантируется устойчивость замкнутой переключаемой системы, то в работе А. С. Фурсова и Э. Ф. Хусаинова [78] предложен алгоритм расчёта времени задержки для режимов переключаемой системы, при которой построенный регулятор будет обеспечивать устойчивость замкнутой системы. В работе А. С. Фурсова и И. В. Капалина [79] приводится алгоритм построения стабилизирующего регулятора переменной структуры, обеспечивающего возникновение в замкнутой системе асимптотически устойчивого скользящего движения вдоль некоторой гиперповерхности в пространстве состояний, инвариантного относительно параметрической и координатной неопределённостей. В статье А. С. Фурсова, С. И. Миняева и Э. А. Исхакова [80] исследуется задача о построении цифрового стабилизатора по выходу для скалярной переключаемой линейной системы. В работе А. С. Фурсова, И. В. Капалина и Х. Хоншан [81] рассматривается задача о стабилизации по состоянию векторной по входу переключаемой линейной системы, а в публикации А. С. Фурсова, С. И. Миняева и В. С. Гусевой [82] предлагается метод для решения задачи о цифровой стабилизации по выходу скалярной переключаемой линейной системы с запаздыванием в управлении. В работе А. С. Фурсова, С. В. Емельянова, И. В. Капалина и Е. С. Сагадиновой [83] рассмотрена задача о стабилизации векторных по входу переключаемых линейных систем с режимами различных динамических порядков.

Цели и задачи диссертационной работы. Целью диссертационной работы является разработка алгоритмов построения стабилизаторов, в том числе цифровых, для переключаемых систем, функционирующих в условиях параметрической неопределённости.

В диссертации автором решены следующие задачи:

1. Построение цифрового (дискретного) регулятора по выходу, стабилизирующего непрерывную переключаемую систему, режимы функционирования которой являются интервальными линейными системами.
2. Построение цифрового (дискретного) регулятора по состоянию, сверх-

стабилизирующего непрерывную переключаемую систему, режимы функционирования которой являются интервальными линейными системами.

3. Стабилизация по состоянию скалярных по входу переключаемых интервальных линейных систем, режимы функционирования которых имеют различные динамические порядки с возможным бесконечным числом их переключений.

4. Разработка метода построения стабилизирующего регулятора переменной структуры в условиях ненаблюдаемых переключающих сигналов.

Научная новизна. Все результаты диссертационной работы автора являются новыми и состоят в следующем.

1. Впервые предложен метод построения цифрового (дискретного) регулятора по выходу, стабилизирующего непрерывную переключаемую систему, режимы функционирования которой являются интервальными линейными системами. Предлагаемый подход к стабилизации включает в себя построение непрерывно-дискретной замкнутой системы с цифровым регулятором, переход к ее дискретной модели и построение одновременно стабилизирующего регулятора для конечного семейства интервальных дискретных систем (режимов дискретной модели).

2. Предложен новый метод построения цифрового (дискретного) регулятора по состоянию, сверхстабилизирующего непрерывную переключаемую систему, режимы функционирования которой являются интервальными линейными системами. Предлагаемый подход к стабилизации включает в себя построение непрерывно-дискретной замкнутой системы с цифровым регулятором, переход к ее дискретной модели и построение одновременно сверхстабилизирующего регулятора для конечного семейства интервальных дискретных систем (режимов дискретной модели).

3. Предложен новый метод стабилизации по состоянию скалярных по входу переключаемых интервальных линейных систем, режимы функционирования которых могут иметь различные динамические порядки с возможным бесконеч-

ным числом их переключений. Для решения этой задачи предлагается подход к построению стабилизирующего регулятора, основанный на методе расширения динамического порядка [74] и решении систем линейных матричных неравенств.

4. Впервые предложен метод построения регулятора переменной структуры на основе данных неидеального наблюдателя.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа имеет преимущественно теоретический характер. Представленные результаты могут быть использованы при решении прикладных задач управления переключаемыми системами в условиях, когда параметры этих систем (коэффициенты дифференциальных уравнений, описывающих режимы переключаемой системы) известны лишь приближенно. В этом случае, приближенно известные коэффициенты режимов переключаемой системы можно заменить интервальными числами и, таким образом, перейти к переключаемой интервальной системе.

Методология и методы исследования. Для решения поставленных задач предполагается использовать метод дискретизации непрерывных систем, методы теории одновременной стабилизации, метод линейных матричных неравенств, метод сверхстабилизации, методы робастного управления, которые доказали свою применимость и эффективность для переключаемых систем.

Положения, выносимые на защиту.

1. Метод построения цифрового (дискретного) регулятора по выходу для переключаемой линейной интервальной системы.
2. Метод построения цифрового (дискретного) сверхстабилизатора по состоянию для переключаемой линейной интервальной системы.
3. Метод решения задачи стабилизации переключаемой линейной интервальной системы с режимами различных динамических порядков.
4. Достаточное условие существования стабилизирующего регулятора в форме статической обратной связи по состоянию для переключаемой линейной интервальной системы.
5. Достаточное условие существования стабилизирующего регулятора в

форме динамической обратной связи по выходу для переключаемой линейной интервальной системы.

6. Метод построения регулятора переменной структуры для стабилизации переключаемых линейных интервальных систем в случае ненаблюдаемых переключающих сигналов.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность результатов диссертационного исследования гарантируется следующими фактами: все результаты диссертации имеют законченный характер и снабжены строгими математическими доказательствами; все результаты диссертации являются новыми, а результаты других авторов, упомянутые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками; результаты диссертации являются достоверными и прошли апробацию на научных семинарах и конференциях; основные результаты диссертации опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.2. — «Дифференциальные уравнения и математическая физика» (физико-математические науки).

Основные результаты диссертации и отдельные её части докладывались и обсуждались на следующих международных и всероссийских **конференциях**:

1. Международная конференция «Ломоносовские чтения - 2023» (Москва, МГУ, 4-14 апреля 2023г.);

2. Международная конференция «Теория оптимального управления и приложения (ОСТА 2022)» (Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 27 июня - 1 июля 2022г.);

3. Международная конференция «Ломоносовские чтения - 2022» (Москва, МГУ, 14-22 апреля 2022г.);

4. XII Международная научная конференция «Интеллектуальные системы и компьютерные науки» (Москва, МГУ, 29 ноября - 3 декабря 2021г.);

5. Международная конференция «Ломоносовские чтения - 2021» (Москва, МГУ, 20-29 апреля 2021г.);

6. Всероссийская научная конференция «Тихоновские чтения 2020» (Москва, МГУ, 26-31 октября 2020г.);

7. XV Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого)(Москва, ИПУ РАН, 3-5 июня 2020г.);

8. Международная конференция «Ломоносовские чтения - 2019» (Москва, МГУ, 15-25 апреля 2019г.).

Результаты диссертации также докладывались и обсуждались на всероссийском **семинаре**:

1. Научно-исследовательский семинар «Нелинейная динамика и управление» факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М. В. Ломоносова (руководитель профессор В.В. Фомичев) (Москва, МГУ, 20 мая 2024г.).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 16 печатных работах, из них 7 статей в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ, индексируемых в базе ядра РИНЦ “eLibrary Science Index”, при этом переводные версии 6 статей опубликованы в журналах, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus.

Личный вклад автора. Основные положения диссертации, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Основные результаты, представленные в диссертации, получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, списка литературы, 2 приложений. Общий объем диссертации составляет 170 страниц текста, включая 5 иллюстраций. Список литературы содержит 113 наименований.

В **первой главе** решается задача построения цифрового регулятора по выходу, стабилизирующего непрерывную переключаемую систему, режимы функционирования которой являются интервальными линейными системами. Пред-

ложен алгоритм сведения задачи цифровой стабилизации по выходу переключаемой интервальной системы к задаче стабилизации дискретной переключаемой интервальной системы. Сформулировано и доказано конструктивное достаточное условие устойчивости непрерывной переключаемой интервальной системы, замкнутой цифровым регулятором. Сформулировано и доказано достаточное условие существования стабилизирующего регулятора в форме динамической обратной связи по выходу для переключаемой интервальной системы в терминах разрешимости системы нелинейных матричных неравенств.

Во **второй главе** предложен алгоритм цифровой сверхстабилизации по состоянию переключаемой интервальной системы. Предлагаемый подход к стабилизации включает в себя построение непрерывно-дискретной замкнутой системы с цифровым регулятором, переход к ее дискретной модели и построение одновременно сверхстабилизирующего регулятора для конечного семейства интервальных дискретных систем (режимов дискретной модели). Представлен программный модуль алгоритма построения регулятора для переключаемой линейной системы, позволяющий эффективно оценивать переходные процессы в стабилизируемой системе с использованием сверхстабилизирующего регулятора, в том числе и такую важную для исследования характеристику, как время регулирования.

В **третьей главе** решается задача стабилизации по состоянию скалярных по входу переключаемых интервальных линейных систем, режимы функционирования которых могут иметь различные динамические порядки. Предложен алгоритм сведения задачи стабилизации переключаемой интервальной системы с режимами различных динамических порядков к задаче стабилизации переключаемой интервальной системы с режимами одинакового порядка. Сформулировано и доказано достаточное условие существования стабилизирующего регулятора в форме статической обратной связи по состоянию для переключаемой интервальной системы в терминах разрешимости системы линейных матричных неравенств.

В **четвёртой главе** решается задача стабилизации переключаемой интервальной линейной системы с медленными переключениями, недоступными для наблюдения. Решение предлагается искать в классе регуляторов переменной структуры. Для обеспечения работоспособности такого регулятора необходимо построение неидеального наблюдателя переключающего сигнала.

В **заключении** приводятся основные результаты и обозначаются возможные направления дальнейших исследований.

Цифровая квадратичная стабилизация переключаемой интервальной линейной системы

Данная глава посвящена задаче цифровой стабилизации по выходу нулевого положения равновесия переключаемой линейной системы, функционирующей в условиях параметрической неопределенности. При этом предполагается интервальный тип параметрической неопределенности.

В настоящей главе представлен подход к построению динамического цифрового регулятора по выходу, стабилизирующего переключаемую интервальную линейную систему (1.1). Точная постановка задачи цифровой стабилизации для переключаемой линейной системы (1.1) приводится ниже, в разделе 1.1.2. Раздел 1.1.3 содержит общую схему перехода от замкнутой непрерывно-дискретной переключаемой интервальной системы к ее дискретной модели. Вопросы построения цифрового стабилизатора с различными предположениями относительно переключающих сигналов рассмотрены в разделе 1.1.4.

1.1. Синтез цифрового стабилизатора по выходу для переключаемой интервальной линейной системы

1.1.1. Основные определения и обозначения

Итак, рассматривается непрерывная скалярная переключаемая интервальная линейная система

$$\begin{cases} \dot{x} = [A_\sigma]x + [b_\sigma]u, \\ y = [c_\sigma]x, \end{cases} \quad \sigma \in P, \quad \sigma(\cdot) \in I, \quad (1.1)$$

где $\sigma : \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow I = \{1, \dots, m\}$ — кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал) с конечным числом разрывов (переключений) на любом конечном про-

межутке; $\overline{\mathbb{R}}_+$ — множество неотрицательных действительных чисел; P — некоторое множество переключающих сигналов σ (P может быть различным в зависимости от постановок задач управления); $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $y \in \mathbb{R}$ — измеряемый скалярный выход, $u \in \mathbb{R}$ — управляющий вход; $[A_\sigma] = [A] \circ \sigma$ — композиция отображения $[A] : I \rightarrow \{[A_1], \dots, [A_m]\}$ и переключающего сигнала σ ; $[b_\sigma] = [b] \circ \sigma$ и $[c_\sigma] = [c] \circ \sigma$ — аналогичные композиции для отображений $[b] : I \rightarrow \{[b_1], \dots, [b_m]\}$, $[c] : I \rightarrow \{[c_1], \dots, [c_m]\}$. Здесь $[A_i]$ ($i = 1, \dots, m$) — интервальные матрицы, коэффициенты которых являются интервальными числами $[a_{ij}^{(i)}] = [\overline{a}_{ij}^{(i)}; \underline{a}_{ij}^{(i)}]$, а $[c_i]$, $[b_i]$ ($i = 1, \dots, m$) — интервальные векторы с коэффициентами $[c_j^{(i)}] = [\overline{c}_j^{(i)}; \underline{c}_j^{(i)}]$ и $[b_l^{(i)}] = [\overline{b}_l^{(i)}; \underline{b}_l^{(i)}]$ соответственно.

Будем считать, что система (1.1) рассматривается при медленных переключениях если существует расстояние между двумя соседними точками разрыва функции σ ограничена снизу некоторой величиной $\tau > 0$ (при этом, τ называют временем задержки). Если же множество P состоит из всех возможных переключающих сигналов, то говорят, что система (1.1) рассматривается при произвольных переключениях.

Значение функции σ в каждый момент времени определяет интервальный активный режим $([c_i], [A_i], [b_i])$ переключаемой системы (1.1), описываемый линейной интервальной системой

$$\begin{cases} \dot{x} = [A_i]x + [b_i]u, \\ y = [c_i]x. \end{cases} \quad (1.2)$$

Интервальную неопределенность будем понимать следующим образом: для каждого i -го интервального режима активности (1.2) движение системы (1.1) задает некоторая линейная стационарная система вида

$$\begin{cases} \dot{x} = A_i x + b_i u, \\ y = c_i x, \end{cases} \quad (1.3)$$

с фиксированными, но неизвестными коэффициентами, принадлежащими соот-

ветствующим промежуткам, т.е.

$$a_{lj}^{(i)} \in [\bar{a}_{lj}^{(i)}; \underline{a}_{lj}^{(i)}], \quad c_j^{(i)} \in [\bar{c}_j^{(i)}; \underline{c}_j^{(i)}], \quad b_l^{(i)} \in [\bar{b}_l^{(i)}; \underline{b}_l^{(i)}] \quad (1.4)$$

или, кратко,

$$A_i \in [A_i], \quad b_i \in [b_i], \quad c_i \in [c_i].$$

Под элементом интервального семейства (1.1) будем понимать переключаемую систему

$$\begin{cases} \dot{x} = A_\sigma x + b_\sigma u, \\ y = c_\sigma x, \quad \sigma \in P, \quad \sigma(\cdot) \in I \end{cases} \quad (1.5)$$

задаваемую конечным множеством режимов (c_i, A_i, b_i) , т.е. множеством линейных систем

$$\dot{x} = A_i x + b_i u, \quad y = c_i x.$$

Переключаемую интервальную систему (1.1) будем понимать как бесконечное семейство обычных переключаемых систем вида:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} A_1 x(t) + b_1 u, & \text{при } \sigma(t) = 1, \\ A_2 x(t) + b_2 u, & \text{при } \sigma(t) = 2, \\ \dots\dots\dots \\ A_m x(t) + b_m u, & \text{при } \sigma(t) = m \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} c_1 x(t), & \text{при } \sigma(t) = 1, \\ c_2 x(t), & \text{при } \sigma(t) = 2, \\ \dots\dots\dots \\ c_m x(t), & \text{при } \sigma(t) = m, \end{cases}$$

где $A_i \in [A_i]$, $b_i \in [b_i]$, $c_i \in [c_i]$ (здесь под включением понимается принадлежность каждого элемента матриц A_i , b_i или c_i соответствующему промежутку — элементу интервальных матриц $[A_i]$, $[b_i]$ либо $[c_i]$) $i = 1, \dots, m$, $\sigma \in P$. При

этом, если $t_0, t_1, \dots, t_n, \dots$ представляет собой последовательность моментов переключения, то $t_j - t_i \geq \tau$ для всех $j > i$.

В силу кусочной непрерывности функции $\sigma(t)$, переходы между интервальными режимами осуществляются "скачкообразно", а движение переключаемой системы в каждый момент времени определяется активным режимом (1.3). При этом считаем, что начальное условие для каждого следующего режима (при смене режимов) определяется значением вектора состояния предыдущего режима в момент переключения.

Далее, как и в работах [78–83], будем предполагать, что переключающий сигнал в процессе функционирования системы (1.1) не доступен для наблюдения. Таким образом, в каждый момент времени неизвестно какой из интервальных режимов системы является активным.

Определение 1.1. [84] Решением уравнения состояния системы (1.1) при фиксированных режимах (c_i, A_i, b_i) ($c_i \in [c_i], A_i \in [A_i], b_i \in [b_i], i = 1, \dots, m$), заданном управлении $u = u_0 \in PC(\mathbb{R}_+)$ (класс кусочно-непрерывных функций), переключающем сигнале $\sigma \in P$ и начальном условии $x(0) = x_0$ будем называть абсолютно непрерывную функцию $x(t)$, являющуюся решением линейной нестационарной системы

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x + b_{\sigma(t)}u_0, \quad x(0) = x_0. \quad (1.6)$$

Переключаемую интервальную линейную систему (1.1) можем также понимать как обычную переключаемую систему вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{\sigma}x + b_{\sigma}u, & \sigma \in P, \quad \sigma(\cdot) \in I, \\ y = c_{\sigma}x, \end{cases} \quad (1.7)$$

где

1) I — компактное множество индексов, принадлежащее пространству \mathbb{R}^{n^2+2n} и представляющее собой объединение m параллелотопов p_i размерности $n^2 + 2n$ (каждый параллелотоп p_i соответствует тройке $([A_i], [b_i], [c_i])$);

2) $\sigma : \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow I$, причём для каждого $\sigma \in P$ определён набор $D = \{d_1, \dots, d_m : d_i \in p_i\}$ такой, что множество значений $E(\sigma)$ переключающего сигнала σ совпадает с множеством D , т.е. $E(\sigma) = D$. Заметим, что каждый элемент d_i набора D определяет тройку (A_i, b_i, c_i) , где $A_i \in [A_i]$, $b_i \in [b_i]$, $c_i \in [c_i]$ ($i = 1, \dots, m$).

По аналогии с определением 1.1. решением уравнения состояния системы (1.7) при заданном управлении u , переключающем сигнале $\sigma \in P$ и начальном условии $x(0) = x_0$ будем называть вектор-функцию $x(t)$, являющуюся кусочно-дифференцируемым решением соответствующей линейной нестационарной системы (1.6).

Указанное представление системы (1.1) удобно тем, что позволяет использовать для переключаемых интервальных систем все определения и утверждения верные для обычных переключаемых систем с компактным множеством индексов.

Для определения устойчивости переключаемой линейной системы (1.7) будем использовать известное понятие KL -функции [85]. Напомним, KL -функцией называют функцию двух переменных $\beta(r, s)$ такую, что при любом фиксированном s_0 функция $\beta(r, s_0)$ положительна и монотонно возрастает, а при любом фиксированном r_0 функция $\beta(r_0, s)$ монотонно убывает к нулю

$$\beta(r_0, s) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty.$$

Определение 1.2. [21] Переключаемая линейная система (1.7) *равномерно асимптотически устойчива по состоянию* (РАУ), если при $u \equiv 0$ существуют константа $\delta > 0$ и KL -функция $\beta(r, s)$ такие, что для любого переключающего сигнала $\sigma \in P$, начального условия $x(0)$ такого, что $\|x(0)\| < \delta$, соответствующее решение уравнения состояния системы (1.7) удовлетворяет следующему неравенству

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(0)\|, t) \quad t \geq 0. \quad (1.8)$$

Если KL -функцию в определении 1.2 можно выбрать в виде $\beta(r, s) =$

$cre^{-\lambda s}$, $c, \lambda > 0$, то приведённое выше неравенство принимает вид

$$\|x(t)\| \leq c(\|x(0)\|)e^{-\lambda t} \quad t \geq 0, \quad (1.9)$$

а систему (1.7) называют *равномерно экспоненциально устойчивой* (РЭУ).

Здесь для векторов используем обычную евклидову норму.

Определение 1.3. Если неравенство (1.8) (неравенство (1.9)) выполняется для любых начальных условий $x(0) \in \mathbb{R}^n$ ($\delta = \infty$), то система (1.7) *глобально равномерно асимптотически устойчива* (ГРАУ)(*глобально равномерно экспоненциально устойчива* (ГРЭУ)).

Известно [21], что для переключаемых линейных систем равномерная асимптотическая устойчивость эквивалентна глобальной равномерной асимптотической устойчивости, которая в свою очередь эквивалентна тому, что для любого переключающего сигнала $\sigma \in P$ и любого начального условия $x(0) = x_0$ норма соответствующего решения системы (1.7) стремится к нулю, т.е.:

$$\|x(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Замечание 1.1.[21] Для переключаемой линейной системы (1.7) глобальная равномерная асимптотическая устойчивость эквивалентна глобальной равномерной экспоненциальной устойчивости.

Замечание 1.2. В силу эквивалентности представлений (1.1) и (1.7) переключаемой линейной интервальной системы, все приведённые определения и утверждения относительно системы (1.7) верны для системы (1.1).

1.1.2. Постановка задачи

Рассмотрим переключаемую линейную систему (1.1), для которой множество $P = S_{\tau, \gamma}$

$$\begin{cases} \dot{x} = [A_\sigma]x + [b_\sigma]u, \\ y = [c_\sigma]x, \end{cases} \quad \sigma \in S_{\tau, \gamma}, \quad \sigma(\cdot) \in I, \quad (1.10)$$

где $S_{\tau,\gamma}$ — множество переключающих сигналов σ , точки разрыва которых принадлежат множеству $\{l\gamma\}$, где γ — некоторое положительное число, а $l = 0, 1, 2, \dots$. При этом, расстояние между двумя соседними промежутками не превосходит τ , где $\tau = \mu\gamma$, $\mu \in \mathbb{N}$. Считаем, что переключающие сигналы σ являются ненаблюдаемыми, т.е. в каждый момент времени t недоступна информация о номере активного режима.

В настоящем разделе формулируется задача стабилизации по выходу системы (1.10) цифровым динамическим регулятором.

При замыкании переключаемой линейной системы (1.10) цифровым стабилизатором получаем непрерывно-дискретную замкнутую систему, которая описывается с помощью дифференциально-разностных уравнений. Приведем эти уравнения.

Как известно [77], линейный цифровой регулятор можно задать: периодом квантования по времени $T > 0$, дискретным регулятором вида

$$\begin{cases} v[(l+1)T] = Qv[lT] + qy[lT] \\ u[lT] = Hv[lT] + hy[lT], \quad v[0] = v_0 \end{cases} \quad (1.11)$$

и формирующим элементом (в форме фиксатора нулевого порядка)

$$u(t) = \sum_{j=0}^{\infty} u[jT]S(t-jT), \quad S(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, T), \\ 0, & t \notin [0, T). \end{cases} \quad (1.12)$$

Здесь $Q \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $q \in \mathbb{R}^{r \times 1}$, $H \in \mathbb{R}^{1 \times r}$, $h \in \mathbb{R}$ (r — порядок регулятора), $u[\cdot]$, $y[\cdot]$, $v[\cdot]$ — дискретные функции, определенные на последовательности $\{lT\}_{l=0}^{\infty}$ ($l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$). При этом $y[lT]$ — входной, а $u[lT]$ — выходной сигналы регулятора. Далее считаем, что $\gamma = \rho T$, $\rho \in \mathbb{N}$ (отсюда, в частности, следует, что $T < \tau$).

Замыкая систему (1.10) регулятором (1.11)-(1.12), получаем замкнутую интервальную непрерывно-дискретную (дифференциально-разностную) систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A_{\sigma}]x(t) + [b_{\sigma}] \sum_{j=0}^{\infty} (Hv[jT] + h[c_{\sigma}]x(jT)) S(t-jT), \\ v[(l+1)T] = Qv[lT] + q[c_{\sigma}]x(lT), \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma}, \sigma(\cdot) \in I. \end{cases} \quad (1.13)$$

Заметим, что для системы (1.13) выполнено следующее условие согласования непрерывного и дискретного времени

$$lT \leq t < (l+1)T, \quad (1.14)$$

в силу которого, символ ∞ в этой системе может быть заменён на l

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A_\sigma]x(t) + [b_\sigma] \sum_{j=0}^l (Hv[jT] + h[c_\sigma]x(jT)) S(t-jT), \\ v[(l+1)T] = Qv[lT] + q[c_\sigma]x(lT), \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma}, \sigma(\cdot) \in I. \end{cases} \quad (1.15)$$

Решением системы (1.15) при заданных начальных условиях $x(0) \in \mathbb{R}^n$, $v[0] \in \mathbb{R}^r$ и заданном переключающем сигнале $\sigma \in S_{\tau,\gamma}$ считаем непрерывно-дискретную вектор-функцию $(x(t), v[lT])^\top$, $t \in [lT; (l+1)T]$, $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Замкнутую переключаемую интервальную непрерывно-дискретную систему (1.15) будем называть *равномерно асимптотически устойчивой* (РАУ), а регулятор (1.11)-(1.12) *стабилизирующим*, если существуют KL -функции $\beta_1(r, s)$, $\beta_2(r, s)$ и $\delta > 0$ такие, что для любого переключающего сигнала $\sigma \in S_{\tau,\gamma}$, любого набора режимов (c_i, A_i, b_i) ($c_i \in [c_i]$, $A_i \in [A_i]$, $b_i \in [b_i]$, $i = 1, \dots, m$) и для любых начальных условий $x(0) \in \mathbb{R}^n$, $v[0] \in \mathbb{R}^r$ таких, что $\| \begin{pmatrix} x(0) \\ v[0] \end{pmatrix} \| < \delta$ выполняется следующее неравенство:

$$\left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ v[lT] \end{pmatrix} \right\| \leq \beta_1(x(0), t) + \beta_2(v[0], lT) \quad t \in [lT, (l+1)T]. \quad (1.16)$$

Если $\delta = \infty$, то замкнутую переключаемую интервальную непрерывно-дискретную систему (1.15) будем называть *глобально равномерно асимптотически устойчивой* (ГРАУ).

Заметим, что глобальная равномерная асимптотическая устойчивость эквивалентна тому, что для любого переключающего сигнала $\sigma \in S_{\tau,\gamma}$ и для любых $x(0), v[0]$ для соответствующего решения системы (1.15) выполняется условие

$$\left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ v[lT] \end{pmatrix} \right\| \rightarrow 0, \quad l, t \rightarrow \infty, \quad t \in [lT, (l+1)T].$$

Задача 1.1 Для переключаемой интервальной линейной системы (1.10) необходимо построить цифровой регулятор вида (1.11)-(1.12), обеспечивающий ГРАУ замкнутой непрерывно-дискретной системы (1.15).

1.1.3. Переход к дискретной модели

Для решения задачи цифровой стабилизации, для переключаемой линейной системы без параметрической неопределенности

$$\begin{cases} \dot{x} = A_\sigma x + b_\sigma u, \\ y = c_\sigma x, \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma}, \quad \sigma(\cdot) \in I, \end{cases} \quad (1.17)$$

в работе [80] был применен стандартный подход, заключающийся в переходе от исходной непрерывной переключаемой системы к ее дискретной модели с помощью метода точной дискретизации [77, с. 80] и последующем поиске стабилизирующего дискретного регулятора для полученной дискретной системы.

Используем указанный подход для решения задачи 1.1 поиска цифрового регулятора (1.11)-(1.12), стабилизирующего переключаемую интервальную систему (1.10). Заметим, что если $\sigma(t) \in S_{\tau,\gamma}$, то на решения системы (1.15) влияют значения переключающей функции только в моменты $t = lT$ ($l = 0, 1, \dots$). Поэтому в дальнейшем для дискретной модели переключаемой системы (1.10) в качестве переключающих сигналов целесообразно рассматривать соответствующие решетчатые функции $\sigma[lT]$ ($T > 0, l = 0, 1, \dots$).

Известно [77; 80, с. 80], что если на входе системы (1.17) используется формирующий элемент в виде фиксатора нулевого порядка (в этом случае управляющий сигнал принимает постоянные значения на каждом промежутке между моментами квантования, т.е. $u(t) \equiv u[lT]$ при $t \in [lT, (l+1)T)$), то дискретная модель системы (1.17) с режимами (c_i, A_i, b_i) ($i \in I$), учитывая, что $\sigma \in S_{\tau,\gamma}$, имеет вид

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = A_\sigma^* x[lT] + b_\sigma^* u[lT] \\ y[lT] = c_\sigma x[lT], \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma}, \quad \sigma(\cdot) \in I, \end{cases} \quad (1.18)$$

где

$$A_i^* = e^{A_i T}, \quad b_i^* = \int_0^T e^{A_i \xi} d\xi b_i. \quad (1.19)$$

При этом выполнено условие точной дискретизации

$$x(t)|_{t=lT} = x[lT], \quad l = 0, 1, \dots, \quad (1.20)$$

где $x(t)$ — решение уравнения состояния системы (1.17) при заданных $\sigma \in S_{\tau, \gamma}$, $x(0) \in \mathbb{R}^n$ и фиксированном кусочно-постоянном управлении $u(t) \equiv u[lT]$ при $t \in [lT, (l+1)T)$, а $x[lT]$ — решение уравнения состояния соответствующей дискретной системы (1.18) при тех же $\sigma \in S_{\tau, \gamma}$, $u[lT]$ и начальном условии $x[0] = x(0)$.

Опираясь на вышеприведенный алгоритм точной дискретизации для переключаемой системы с фиксированными режимами активности, далее приведем метод построения дискретной переключаемой интервальной системы, представляющей точную (в некотором, определенном ниже, смысле) дискретизацию исходной непрерывной переключаемой интервальной системы (1.10) при использовании управления вида (1.11)-(1.12).

По аналогии с (1.18) и (1.19) рассмотрим теперь для системы (1.10), на входе которой используется фиксатор нулевого порядка (1.12), дискретную переключаемую параметрически неопределённую систему следующего вида

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = \{A_\sigma^*\}x[lT] + \{b_\sigma^*\}u[lT] \\ y[lT] = [c_\sigma]x[lT], \quad \sigma \in S_{\tau, \gamma}, \sigma(\cdot) \in I, \end{cases} \quad (1.21)$$

где

$$\{A_i^*\} = \{e^{A_i T} \mid A_i \in [A_i]\}, \quad \{b_i^*\} = \left\{ \int_0^T e^{A_i \xi} d\xi b_i : A_i \in [A_i], b_i \in [b_i] \right\}, \quad (1.22)$$

Использование фиксатора нулевого порядка (1.12) фактически означает, что на вход непрерывной системы (1.10) подаётся кусочно-постоянное управление $u(t) = u[lT]$ при $t \in [lT; (l+1)T)$, ($l = 0, 1, \dots$).

Замечание 1.3. Если каждому решению $x(t)$ уравнения состояния системы (1.10) с заданными начальными условиями $x(0) = x_0$, фиксированном набором режимов (c_i, A_i, b_i) ($c_i \in [c_i]$, $A_i \in [A_i]$, $b_i \in [b_i]$, $i = 1, \dots, m$), переключающем сигнале $\sigma^0 \in S_{\tau, \gamma}$ при фиксированном управлении u^0 вида (1.11)-(1.12) поставить в соответствие решение $x[lT]$ системы (1.21) с начальным условием $x[0] = x_0$, $S_{\tau, \gamma}$, соответствующим набором режимов (c_i, A_i^*, b_i^*) ($A_i^* = e^{A_i T}$, $b_i^* = \int_0^T e^{A_i \xi} d\xi b_i$) и управлении u^0 вида (1.11), то указанное соответствие будет взаимно однозначным, а для соответствующих решений будет выполняться условие точной дискретизации (1.20).

Сформулируем следующее очевидное утверждение.

Теорема 1.1. Для любого решения $x(t)$ уравнения состояния системы (1.10) при фиксированном управлении u^0 вида (1.11)-(1.12) и соответствующего ему решения $x[lT]$ системы (1.21) с управлением (1.11) выполнено условие точной дискретизации (1.20).

Доказательство следует из алгоритма построения системы (1.21).

Определение 1.4. Дискретную переключаемую параметрически неопределённую систему (1.21) будем называть *точной дискретной моделью* системы (1.10) при условии, что на её входе будет использоваться фиксатор нулевого порядка (1.12).

Определение 1.5. Дискретную переключаемую параметрически неопределённую систему (1.21), замкнутую регулятором (1.11)

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = (\{A_\sigma^*\} + \{b_\sigma^*\}h[c_\sigma])x[lT] + \{b_\sigma^*\}Hv[lT], \\ v[(l+1)T] = q[c_\sigma]x[lT] + Qv[lT], \quad \sigma \in S_{\tau, \gamma}, \sigma(\cdot) \in I. \end{cases} \quad (1.23)$$

будем называть *точной дискретной моделью* системы (1.15).

Замечание 1.4. Здесь мы используем следующее определение для арифметических операций над матричными множествами

$$\{M\} * \{N\} = \{M * N \mid M \in \{M\}, N \in \{N\}\},$$

где $*$ $\in \{+, -, \cdot\}$, а $\{M\}$ и $\{N\}$ — некоторые множества матриц соответствующих размеров.

Замкнутую дискретную переключаемую систему (1.23) будем называть *равномерно асимптотически устойчивой* (РАУ), если существует KL -функция $\beta(r, s)$ и $\delta > 0$ такие, что для любого переключающего сигнала $\sigma \in S_{\tau, \gamma}$ и любого набора режимов (c_i, A_i^*, b_i^*) ($c_i \in [c_i]$, $A_i \in \{A_i^*\}$, $b_i \in \{b_i^*\}$, $i = 1, \dots, m$), для любых начальных условий $x[0] \in \mathbb{R}^n$, $v[0] \in \mathbb{R}^r$ таких, что $\| \begin{pmatrix} x[0] \\ v[0] \end{pmatrix} \| < \delta$ выполняется следующее неравенство:

$$\| \begin{pmatrix} x[lT] \\ v[lT] \end{pmatrix} \| \leq \beta(\| \begin{pmatrix} x[0] \\ v[0] \end{pmatrix} \|, lT) \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (1.24)$$

Если $\delta = \infty$, то замкнутую переключаемую интервальную дискретную систему (1.23) будем называть *глобально равномерно асимптотически устойчивой* (ГРАУ).

Известно [27], что для системы (1.23) глобальная равномерная асимптотическая устойчивость эквивалентна тому, что для любого переключающего сигнала $\sigma \in S_{\tau, \gamma}$, для любого решения соответствующей системы (1.23) выполняется условие

$$\| \begin{pmatrix} x[lT] \\ v[lT] \end{pmatrix} \| \rightarrow 0, \quad l \rightarrow \infty.$$

Далее рассмотрим вопрос о согласованности свойства устойчивости систем (1.15) и (1.23). Верна следующая теорема.

Теорема 1.2. *Непрерывно-дискретная переключаемая интервальная система (1.15) ГРАУ тогда и только тогда, когда ГРАУ дискретная переключаемая система (1.23).*

Докажем сначала необходимость условия теоремы. Пусть система (1.15) является ГРАУ. В силу Теоремы 1.1, Замечания 1.1. и того, что уравнения состояния относительно вектора v систем (1.23) и (1.15) совпадают, для любого решения $(\bar{x}[lT], \bar{v}[lT])^\top$ системы (1.23) найдется решение $(\hat{x}(t), \hat{v}[lT])^\top$ системы

(1.15) такое, что

$$\hat{x}(t)|_{t=lT} = \bar{x}[lT], \quad \hat{v}[lT] = \bar{v}[lT] \quad l = 0, 1, \dots \quad (1.25)$$

В силу глобальной равномерной асимптотической устойчивости системы (1.15)

$$\left\| \begin{pmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{v}[lT] \end{pmatrix} \right\| \rightarrow 0 \quad \text{при } l \rightarrow +\infty, \quad t \in [lT, (l+1)T).$$

Но тогда, в силу условия согласованности (1.25) получаем

$$\left\| \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{v}[lT] \end{pmatrix} \right\| \rightarrow 0 \quad \text{при } l \rightarrow +\infty, \quad t \in [lT, (l+1)T).$$

Таким образом, необходимость условия теоремы доказана.

Докажем теперь, что условие теоремы является и достаточным. Действительно, пусть система (1.23) ГРАУ. Тогда для любых фиксированных начальных условий $\bar{x}[0], \bar{v}[0]$, режимов $(\bar{c}_i, \bar{A}_i, \bar{b}_i)$ ($c_i \in [c_i]$, $\bar{A}_i \in \{A_i^*\}$, $\bar{b}_i \in \{b_i^*\}$, $i = 1, \dots, m$) и переключающего сигнала $\bar{\sigma} \in S_{\tau, \gamma}$ имеем

$$\|\bar{x}[lT]\| \rightarrow 0, \quad \|\bar{v}[lT]\| \rightarrow 0 \quad \text{при } l \rightarrow \infty.$$

А поскольку $u[lT] = H\bar{v}[lT] + hc_{\bar{\sigma}}\bar{x}[lT]$, то и $\|u[lT]\| \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. Для данного решения рассмотрим теперь соответствующее решение $(\hat{x}(t), \hat{v}[lT])^T$ системы (1.15). Заметим, что это решение можно получить при тех же начальных условиях $\hat{x}(0) = \bar{x}[0], \hat{v}(0) = \bar{v}[0]$, режимах $(\hat{c}_i, \hat{A}_i, \hat{b}_i)$ ($\bar{c}_i = \hat{c}_i$, $\bar{A}_i = e^{\hat{A}_i T}$, $\bar{b}_i = \int_0^T e^{\hat{A}_i \xi} d\xi \hat{b}_i$) и переключающем сигнале $\hat{\sigma} \in S_{\tau, \gamma}$ таком, что $\hat{\sigma}(lT) = \bar{\sigma}[lT]$ для всех $l = 0, 1, \dots$. Вектор $\hat{x}(t)$ при $lT \leq t \leq (l+1)T$ имеет вид [10, с. 81]

$$\hat{x}(t) = e^{A_{\hat{\sigma}}(t-lT)} \bar{x}[lT] + \int_{lT}^t e^{A_{\hat{\sigma}}(t-\xi)} d\xi b_{\hat{\sigma}} u[lT].$$

Отсюда, для всех $t \in [lT; (l+1)T]$, следует оценка

$$\|\hat{x}(t)\| \leq \|e^{A_{\hat{\sigma}}(t-lT)}\| \cdot \|\bar{x}[lT]\| + \int_{lT}^t \|e^{A_{\hat{\sigma}}(t-\xi)}\| d\xi \|b_{\hat{\sigma}}\| \cdot \|u[lT]\|. \quad (1.26)$$

Здесь под нормой вектора понимается евклидова норма, а под нормой матрицы — спектральная норма. Обозначим

$$\eta_i = \max_{\lambda_k \in \text{Spec}(\hat{A}_i)} \text{Re}(\lambda_k), \quad \nu_i = \|\hat{b}_i\|.$$

Пусть $\eta > \max_{i=1, \dots, m} \{\eta_i\}$. Тогда для некоторого $\mu > 0$ имеем следующую оценку для матричной экспоненты

$$\|e^{A_{\hat{\sigma}}(t-lT)}\| \leq \mu e^{\eta(t-lT)}, \quad t \in [lT; (l+1)T], \quad l = 0, 1, \dots$$

Учитывая, что $t - lT \leq T$ при $t \in [lT; (l+1)T]$, получаем

$$\|e^{A_{\hat{\sigma}}(t-lT)}\| \leq \mu e^{\eta T}$$

для любых $t \in [lT; (l+1)T]$, $l = 0, 1, \dots$. А тогда, обозначая $\gamma = \mu e^{\eta T}$ и выбирая $\nu > \max_{i=1, \dots, m} \{\nu_i\}$, из (1.26) получаем

$$\|\hat{x}(t)\| \leq \gamma \|\bar{x}[lT]\| + \gamma T \nu \cdot \|u[lT]\|, \quad t \in [lT; (l+1)T], \quad l = 0, 1, \dots$$

Поскольку $\|\bar{x}[lT]\| \rightarrow 0$, $\|u[lT]\| \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow \infty$, то окончательно получаем, что $\|\hat{x}(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Отсюда и в силу произвольности выбора решения $(\bar{x}[lT], \bar{v}[lT])^T$, взаимной однозначности соответствия между решениями систем (1.15) и (1.23) и того, что $\hat{v}[lT] = \bar{v}[lT]$ для соответствующих решений (1.15) и (1.23) окончательно получаем:

$$\left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ v[lT] \end{pmatrix} \right\| \rightarrow 0 \quad \text{при } l, t \rightarrow +\infty, \quad t \in [lT, (l+1)T).$$

Из чего следует, что непрерывно-дискретная система (1.15) является ГРАУ. Теорема 1.2 доказана.

Таким образом, поставленная задача 1.1, в соответствии с теоремой 1.2, может быть сведена к задаче стабилизации по выходу дискретной переключаемой параметрически неопределённой системы (1.21) дискретным регулятором (1.11).

1.1.4. Построение цифрового регулятора

Для того чтобы искать дискретный стабилизатор для системы (1.21) необходимо сначала найти параметры этой системы, то есть множества $\{A_i^*\}$ и $\{b_i^*\}$, $(i = 1, \dots, m)$. Проблема, которая при этом возникает, состоит в том, что не известны методы точного нахождения интервальных матричных экспонент $e^{[A]t}$ и, как следствие, оказывается невозможным определить семейства матриц $\{A_i^*\}$, $\{b_i^*\}$ для системы (1.21).

Для решения возникшей проблемы предлагается следующий подход: вместо задачи стабилизации системы (1.21) будем решать задачу стабилизации другой системы, являющейся ее интервальным расширением.

Определение 1.6. Дискретную переключаемую интервальную систему вида

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = [\Lambda_\sigma^*]x[lT] + [\mu_\sigma^*]u[lT] \\ y[lT] = [\rho_\sigma]x[lT], \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma}, \sigma(\cdot) \in I \end{cases} \quad (1.27)$$

будем называть *интервальным расширением* системы (1.21), если для неё выполнены условия

$$\{A_i^*\} \subseteq [\Lambda_i^*], \quad \{b_i^*\} \subseteq [\mu_i^*], \quad [c_i] \subseteq [\rho_i] \quad \text{при каждом } i \in \{1, \dots, m\}. \quad (1.28)$$

При этом, дискретную интервальную переключаемую замкнутую систему

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = ([\Lambda_\sigma^*] + [\mu_\sigma^*]h[\rho_\sigma])x[lT] + [\mu_\sigma^*]Hv[lT], \\ v[(l+1)T] = q[\rho_\sigma]x[lT] + Qv[lT], \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma}. \end{cases} \quad (1.29)$$

будем называть *интервальным расширением* системы (1.23).

Замечание 1.5. Арифметические операции над интервальными матрицами будем понимать в следующем смысле [86]

$$1) [M] \pm [N] = [P], \quad [p_{ij}] = [m_{ij}] \pm [n_{ij}];$$

$$2) [M] \cdot [N] = [L], \quad [l_{ij}] = \sum_{k=1}^r [m_{ik}] \cdot [n_{kj}],$$

где операции $[m_{ij}] \pm [n_{ij}]$, $[m_{ik}] \cdot [n_{kj}]$ понимаются как обычные операции над интервальными числами; $[m_{ij}]$, $[n_{ij}]$, $[p_{ij}]$, $[l_{ij}]$ — соответствующие коэффициенты интервальных матриц $[M]$, $[N]$, $[P]$, $[L]$; r — количество строк (столбцов) матрицы $[N]$ ($[M]$).

Прежде чем перейти к построению интервального расширения, дадим обоснование предложенному подходу.

Теорема 1.3. Пусть дискретная переключаемая замкнутая система (1.29) является интервальным расширением системы (1.23) и при этом является ГРАУ. Тогда глобально равномерно асимптотически устойчива и дискретная переключаемая система (1.23).

Действительно, очевидно, что множество всех решений системы (1.23) вложено во множество всех решений системы (1.29). А тогда, из стремления нормы любого решения системы (1.29) к нулю следует, что норма любого решения системы (1.23) также стремится к нулю при $l \rightarrow \infty$. Теорема 1.3 доказана.

Из теорем 1.2 и 1.3 следует важный вывод о том, что если регулятор (1.11) стабилизирует какое-либо интервальное расширение системы (1.21), то он решает и задачу цифровой стабилизации системы (1.10). Перейдем теперь к вопросу о построении интервального расширения системы (1.21).

Используя результаты монографии [39], для любых $t \geq 0$, $i \in \{1, \dots, m\}$ и произвольной матрицы $\Omega \in [A_i]$ ($[A_i] = ([a_{kj}^{(i)}, \bar{a}_{kj}^{(i)}])_{k,j=\overline{1,n}}$) и произвольного вектора $\varkappa \in [b_i]$ ($[b_i] = ([b_k^{(i)}, \bar{b}_k^{(i)}])_{k=\overline{1,n}}$) можно выписать следующую оценку для матричной экспоненты $e^{\Omega t}$

$$|e^{\Omega t} - e^{A_i^0 t}| \leq e^{(|A_i^0| + \Delta A_i)t} - e^{|A_i^0|t}, \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t e^{\Omega(t-\xi)} \varkappa d\xi - \int_0^t e^{A_i^0(t-\xi)} b_i^0 d\xi \right| \leq \\ & \leq \int_0^t \left((e^{(|A_i^0| + \Delta A_i)(t-\xi)} - e^{|A_i^0|(t-\xi)}) (|b_i^0| + \Delta b_i) + |e^{A_i^0(t-\xi)}| \Delta b_i \right) d\xi, \quad (1.31) \end{aligned}$$

где

$$A_i^0 = \left(\frac{a_{kj}^{(i)} + \bar{a}_{kj}^{(i)}}{2} \right)_{k,j=\overline{1,n}}, \quad (1.32)$$

$$\Delta A_i = \left(\frac{\bar{a}_{kj}^{(i)} - a_{kj}^{(i)}}{2} \right)_{k,j=\overline{1,n}}, \quad (1.33)$$

$$b_i^0 = \left(\frac{b_k^{(i)} + \bar{b}_k^{(i)}}{2} \right)_{k=\overline{1,n}}, \quad (1.34)$$

$$\Delta b_i = \left(\frac{\bar{b}_k^{(i)} - b_k^{(i)}}{2} \right)_{k=\overline{1,n}}. \quad (1.35)$$

Знаки модуля и неравенства для матриц в (1.30) и далее, понимаются как поэлементные.

Перепишем (1.30) в виде двойного неравенства

$$e^{A_i^0 t} - e^{(|A_i^0| + \Delta A_i)t} + e^{|A_i^0|t} \leq e^{\Omega t} \leq e^{A_i^0 t} + e^{(|A_i^0| + \Delta A_i)t} - e^{|A_i^0|t}. \quad (1.36)$$

Введем обозначения

$$\underline{\Lambda}_i = e^{A_i^0 T} - e^{(|A_i^0| + \Delta A_i)T} + e^{|A_i^0|T}, \quad \bar{\Lambda}_i = e^{A_i^0 T} + e^{(|A_i^0| + \Delta A_i)T} - e^{|A_i^0|T}. \quad (1.37)$$

Тогда, учитывая неравенство (1.36), получаем

$$\underline{\Lambda}_i \leq e^{\Omega T} \leq \bar{\Lambda}_i \quad \forall \Omega \in [A_i]. \quad (1.38)$$

Аналогично, вводя обозначения

$$\underline{\mu}_i = \int_0^T (e^{A_i^0(T-\xi)} b_i^0 - (e^{(|A_i^0| + \Delta A_i)(T-\xi)} - e^{|A_i^0|(T-\xi)}) (|b_i^0| + \Delta b_i) - |e^{A_i^0(T-\xi)}| \Delta b_i) d\xi, \quad (1.39)$$

$$\bar{\mu}_i = \int_0^T (e^{A_i^0(T-\xi)} b_i^0 + (e^{(|A_i^0| + \Delta A_i)(T-\xi)} - e^{|A_i^0|(T-\xi)}) (|b_i^0| + \Delta b_i) + |e^{A_i^0(T-\xi)}| \Delta b_i) d\xi, \quad (1.40)$$

из (1.31) получаем

$$\underline{\mu}_i \leq \int_0^T e^{\Omega(T-\xi)} \varkappa d\xi \leq \bar{\mu}_i \quad \forall \Omega \in [A_i], \quad \forall \varkappa \in [b_i]. \quad (1.41)$$

Осуществляя замену $T - \xi = \rho$ под интегралом в формуле (1.41), окончательно имеем

$$\underline{\mu}_i \leq \int_0^T e^{\Omega \rho} \varkappa d\rho \leq \bar{\mu}_i \quad \forall \Omega \in [A_i], \quad \forall \varkappa \in [b_i]. \quad (1.42)$$

Далее, используя обозначения

$$\underline{\Lambda}_i = (\underline{\lambda}_{kj}^{(i)})_{k,j=\overline{1,n}}, \quad \bar{\Lambda}_i = (\bar{\lambda}_{kj}^{(i)})_{k,j=\overline{1,n}}, \quad \underline{\mu}_i = (\underline{\mu}_k^{(i)})_{k=\overline{1,n}}, \quad \bar{\mu}_i = (\bar{\mu}_k^{(i)})_{k=\overline{1,n}}, \quad (1.43)$$

построим следующие интервальные матрицы и векторы

$$[\Lambda_i^*] = ([\underline{\lambda}_{kj}^{(i)}(t), \bar{\lambda}_{kj}^{(i)}(t)])_{k,j=\overline{1,n}}, \quad [\mu_i^*] = ([\underline{\mu}_k^{(i)}, \bar{\mu}_k^{(i)}])_{l=\overline{1,n}} \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.44)$$

Нетрудно заметить, что выполняются следующие включения

$$\{A_i^*\} \subseteq [\Lambda_i^*], \quad \{b_i^*\} \subseteq [\mu_i^*] \quad (1.45)$$

Из (1.45) получаем, что дискретная переключаемая интервальная система

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = [\Lambda_\sigma^*]x[lT] + [\mu_\sigma^*]u[lT] \\ y[lT] = [c_\sigma]x[lT], \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma} \end{cases} \quad (1.46)$$

является интервальным расширением дискретной системы (1.21) и, следовательно, система

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = ([\Lambda_\sigma^*] + [\mu_\sigma^*]h[c_\sigma])x[lT] + [\mu_\sigma^*]Hv[lT], \\ v[(l+1)T] = q[c_\sigma]x[lT] + Qv[lT], \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma}. \end{cases} \quad (1.47)$$

представляет интервальное расширение системы (1.23). В соответствии с теоремой 1.3, задачу стабилизации системы (1.21) регулятором вида (1.11) можно свести теперь к решению задачи стабилизации этим же регулятором дискретной переключаемой интервальной линейной системы (1.46).

1.1.5. Квадратичная стабилизация на основе общей функции Ляпунова

Итак, будем рассматривать далее задачу стабилизации дискретной переключаемой системы (1.46) дискретным регулятором вида (1.11). Соответствующая замкнутая система имеет вид (1.47). Как известно, регулятор, стабилизирующий переключаемую систему, должен стабилизировать каждый режим этой системы в отдельности. В силу того, что рассматриваемая задача стабилизации переключаемой системы (1.10) предполагает ненаблюдаемость переключающего сигнала $\sigma(t)$, то синтез соответствующего цифрового регулятора можно свести к задаче об одновременной стабилизации [74] конечного семейства дискретных интервальных объектов

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = [\Lambda_i^*]x[lT] + [\mu_i^*]u[lT] \\ y[lT] = [c_i]x[lT], \quad i = 1, \dots, m \end{cases} \quad (1.48)$$

единым регулятором вида (1.11).

Регулятор (1.11) называем *одновременно стабилизирующим* для семейства объектов (1.48), если он обеспечивает робастную устойчивость каждой замкнутой интервальной системы из семейства

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = ([\Lambda_i^*] + [\mu_i^*]h[c_i])x[lT] + [\mu_i^*]Hv[lT], \\ v[(l+1)T] = q[c_i]x[lT] + Qv[lT], \quad i = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (1.49)$$

где $\tilde{x} = (x, v)^\top$. Для удобства дальнейших рассуждений перепишем системы (1.49) в виде

$$\tilde{x}[(l+1)T] = [\tilde{\Lambda}_i]\tilde{x}[lT], \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.50)$$

Робастная устойчивость системы $\tilde{x}[(l+1)T] = [\tilde{\Lambda}_i]\tilde{x}[lT]$ означает, что для любой матрицы $\Psi \in [\tilde{\Lambda}_i]$ и любого начального условия $x[0]$ для соответствующего решения дискретной системы

$$x[(l+1)T] = \Psi x[lT]$$

выполнено условие $\|x[lT]\| \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$.

К сожалению, в общем случае, задача одновременной стабилизации конечного семейства дискретных переключаемых интервальных объектов в настоящее время не имеет конструктивного аналитического решения. Но, тем не менее, можно предложить численные процедуры поиска такого регулятора, основанные на применении конструктивных достаточных условий дискретной робастной устойчивости замкнутых систем.

Очевидно, что интервальная система

$$\tilde{x}[(l+1)T] = [\tilde{\Lambda}_i] \tilde{x}[lT]$$

является *робастно устойчивой*, если любая матрица $\Psi \in [\tilde{\Lambda}_i]$ является *шуровской* (*дискретно устойчивой*), т.е. ее спектр принадлежит открытому единичному кругу с центром в нуле на комплексной плоскости. В этом случае матрицу $[\tilde{\Lambda}_i]$ будем называть *интервальной шуровской матрицей* (или *интервальной дискретно устойчивой матрицей*).

Перейдем теперь к вопросу об исследовании интервальной матрицы на дискретную устойчивость. Рассмотрим произвольную интервальную матрицу порядка n

$$[A] = \begin{pmatrix} [\underline{a}_{11}, \bar{a}_{11}] & \cdots & [\underline{a}_{1n}, \bar{a}_{1n}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{a}_{n1}, \bar{a}_{n1}] & \cdots & [\underline{a}_{nn}, \bar{a}_{nn}] \end{pmatrix}.$$

Пусть $P([A]) = \prod_{k,j=\overline{1,n}} [\underline{a}_{kj}, \bar{a}_{kj}]$ — параллелепипед в пространстве \mathbb{R}^{n^2} . Здесь

$\prod_{k,j=\overline{1,n}} [\underline{a}_{kj}, \bar{a}_{kj}]$ обозначает декартово произведение соответствующих промежу-

тков. Каждой точке $q = (q_1, \dots, q_{n^2}) \in P([A])$ поставим в соответствие матрицу

$$A(q) = \begin{pmatrix} q_1 & \cdots & q_n \\ q_{n+1} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n(n-1)+1} & \cdots & q_{n^2} \end{pmatrix}.$$

Тогда $[A] = \{A(q) : q \in P([A])\}$. Пусть $G([A]) = \{q_{[A]}^{(\nu)}\}_{\nu=1, \dots, 2^{n^2}}$ — множество всех вершин параллелотопа $P([A])$, откуда следует, что $P([A]) = \text{Conv}\{q_{[A]}^{(\nu)}\}_{\nu=1, \dots, 2^{n^2}}$, а значит и $[A] = \text{Conv}\{A(q_{[A]}^{(\nu)})\}_{\nu=1, \dots, 2^{n^2}}$. Матрицы $A(q_{[A]}^{(\nu)})$ называют вершинными матрицами для интервальной матрицы $[A]$. Отсюда получаем, что для любого $q \in P$

$$A(q) = \sum_{\nu=1}^{2^{n^2}} \lambda_{\nu} A(q_{[A]}^{(\nu)}), \quad \lambda_{\nu} \geq 0, \quad \sum_{\nu=1}^{2^{n^2}} \lambda_{\nu} = 1. \quad (1.51)$$

Известно [87], что достаточным условием робастной асимптотической устойчивости переключаемой интервальной системы $\dot{x} = [A]x$ является наличие общей функции Ляпунова $V(x) = x^{\top} Lx$, $L \succ 0$ для семейства линейных однородных систем

$$\dot{x} = A(q_{[A]}^{(\nu)})x, \quad q_{[A]}^{(\nu)} \in G([A]),$$

что эквивалентно разрешимости системы матричных неравенств

$$A^{\top}(q_{[A]}^{(\nu)})L + LA(q_{[A]}^{(\nu)}) \prec 0, \quad L \succ 0, \quad q_{[A]}^{(\nu)} \in G([A]).$$

Таким образом, разрешимость данной системы матричных неравенств является достаточным условием гурвицевости интервальной матрицы $[A]$.

Аналогичное условие можно получить для проверки того, является ли заданная матрица $[A]$ интервальной шуровской матрицей.

Напомним [88], что положительно определённая функция $V(x[lT])$ является функцией Ляпунова для дискретной системы

$$x[(l+1)T] = f(x[lT]), \quad f(0) = 0, \quad (1.52)$$

если первая разность функции $V(x[lT])$ в силу системы (1.52) является знакопостоянной. При этом, первой разностью функции $V(x[lT])$ в силу системы (1.52) называется функция

$$\Delta V(x[lT]) = V(x[(l+1)T]) - V(x[lT]) = V(f(x[lT])) - V(x[lT]).$$

Известно [88], что если $\Delta V(x[lT])$ является отрицательно определённой, т.е. $\Delta V(x[lT]) < 0$ при всех $x[lT] \neq 0$ ($\Delta V(0) = 0$), то нулевое решение системы (1.52) асимптотически устойчиво.

Рассмотрим для линейной дискретной системы

$$x[(l+1)T] = Ax[lT] \quad (1.53)$$

положительно определённую функцию $V(x[lT]) = x^T Lx$, $L > 0$. Тогда первая разность $\Delta V(x[lT])$ в силу системы (1.53) имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta V(x[lT]) &= x^T[(l+1)T]Lx[(l+1)T] - x^T[lT]Lx[lT] = \\ &= x^T[lT]A^T L A x[lT] - x^T[lT]Lx[lT] = x^T[lT](A^T L A - L)x[lT]. \end{aligned}$$

Тогда отрицательная определённость $\Delta V(x[lT])$ эквивалентна отрицательной определённости матрицы $A^T L A - L$. Таким образом, асимптотическая устойчивость системы (1.53) эквивалентна существованию решения системы матричных неравенств

$$\begin{cases} L > 0 \\ A^T L A - L < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь для интервальной дискретной системы

$$x[(l+1)T] = [A]x[lT] \quad (1.54)$$

произвольную матрицу $A(q) \in [A]$. Учитывая (1.51), имеем

$$\begin{aligned} A^\top(q)LA(q) - L &= \left(\sum_{\nu} \lambda_{\nu} A(q_{[A]}^{(\nu)}) \right)^\top L \left(\sum_{\nu} \lambda_{\nu} A(q_{[A]}^{(\nu)}) \right) - L = \\ &= \left(\sum_{\nu} \lambda_{\nu} A^\top(q_{[A]}^{(\nu)}) \right) L \left(\sum_{\nu} \lambda_{\nu} A(q_{[A]}^{(\nu)}) \right) - L = \\ &= \sum_{\nu} \lambda_{\nu}^2 A^\top(q_{[A]}^{(\nu)})LA(q_{[A]}^{(\nu)}) + \sum_{\nu \neq \eta} \lambda^{\nu} \lambda^{\eta} A^\top(q_{[A]}^{(\nu)})LA(q_{[A]}^{(\eta)}) - \left(\sum_{\nu} \lambda_{\nu} \right)^2 L = \\ &= \sum_{\nu} \lambda_{\nu}^2 (A^\top(q_{[A]}^{(\nu)})LA(q_{[A]}^{(\nu)}) - L) + \\ &+ \sum_{\nu < \eta} \lambda^{\nu} \lambda^{\eta} (A^\top(q_{[A]}^{(\nu)})LA(q_{[A]}^{(\eta)}) + A^\top(q_{[A]}^{(\eta)})LA(q_{[A]}^{(\nu)}) - 2L) < 0. \quad (1.55) \end{aligned}$$

Пусть матрица L^* является решением системы матричных неравенств

$$\begin{cases} L \succ 0, \\ A^\top(q_{[A]}^{(\nu)})LA(q_{[A]}^{(\nu)}) - L \prec 0, \\ A^\top(q_{[A]}^{(\nu)})LA(q_{[A]}^{(\eta)}) + A^\top(q_{[A]}^{(\eta)})LA(q_{[A]}^{(\nu)}) - 2L \prec 0, \quad q_{[A]}^{(\nu)} \in G([A]). \end{cases} \quad (1.56)$$

Тогда, учитывая (1.55) имеем $A^\top(q)L^*A(q) - L^* \prec 0$ и, следовательно интервальная система $x[(l+1)T] = [A]x[lT]$ является робастно асимптотически устойчивой, а матрица $[A]$ шуровской. Таким образом, достаточное условие дискретной устойчивости интервальной матрицы формулируется следующим образом.

Теорема 1.4. *Пусть для интервальной матрицы $[A]$ совместна система матричных неравенств (1.56). Тогда матрица $[A]$ является интервальной шуровской матрицей.*

Заметим также, что если матрица L^* — решение системы (1.56), то квадратичная функция $V(x[lT]) = x^\top L^* x$ является также общей функцией Ляпунова для интервального семейства дискретных линейных систем

$$x[(l+1)T] = Ax[lT], \quad A \in [A].$$

На основании теорем 1.2, 1.3 и 1.4 можно сформулировать конструктивное достаточное условие стабилизации переключаемой интервальной системы (1.10) цифровым регулятором (1.11)-(1.12) при переключениях $\sigma \in S_{\tau,\gamma}$.

Теорема 1.5. *Пусть*

$$\tilde{x}[(l+1)T] = \{\tilde{A}_\sigma^*\} \tilde{x}[lT], \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma} \quad (1.57)$$

— точная дискретная модель вида (1.23) системы (1.10), замкнутой некоторым регулятором R^* вида (1.11)-(1.12). Далее, пусть

$$\tilde{x}[(l+1)T] = [\tilde{\Lambda}_\sigma] \tilde{x}[lT], \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma} \quad (1.58)$$

— некоторое интервальное расширение системы (1.57).

Тогда, если система матричных неравенств

$$\begin{cases} L \succ 0, \\ \tilde{\Lambda}_i^\top(q_{[\tilde{\Lambda}_i]}^{(\nu)})L\tilde{\Lambda}_i(q_{[\tilde{\Lambda}_i]}^{(\nu)}) - L \prec 0, \\ \tilde{\Lambda}_i^\top(q_{[\tilde{\Lambda}_i]}^{(\nu)})L\tilde{\Lambda}_i(q_{[\tilde{\Lambda}_i]}^{(\eta)}) + \tilde{\Lambda}_i^\top(q_{[\tilde{\Lambda}_i]}^{(\eta)})L\tilde{\Lambda}_i(q_{[\tilde{\Lambda}_i]}^{(\nu)}) - 2L \prec 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad q_{[\tilde{\Lambda}_i]}^{(\nu)} \in G([\tilde{\Lambda}_i]). \end{cases} \quad (1.59)$$

совместна, то регулятор R^* стабилизирует переключаемую интервальную линейную систему (1.10) при переключениях $\sigma \in S_{\tau, \gamma}$.

Пусть система (1.59) совместна. Пусть положительно определённая матрица L^* — решение этой системы. Докажем в этом случае, что система (1.58) является глобально равномерно асимптотически устойчивой.

Пусть переключаемая система

$$\tilde{x}[(l+1)T] = \Lambda_\sigma \tilde{x}[lT], \quad \Lambda_i \in [\tilde{\Lambda}_i], \quad i = 1, \dots, m, \quad \sigma \in S_{\tau, \gamma} \quad (1.60)$$

является некоторым элементом интервального семейства (1.58). Рассмотрим первую разность

$$\Delta V(\tilde{x}[lT]) = \tilde{x}^T[lT](\Lambda_i^T L^* \Lambda_i - L^*)\tilde{x}[lT]$$

функции $V(\tilde{x}[lT]) = \tilde{x}^T L^* \tilde{x}$ в силу i -го режима

$$\tilde{x}[(l+1)T] = \Lambda_i \tilde{x}[lT] \quad (1.61)$$

системы (1.60).

Заметим, что $\Lambda_i = \sum \alpha_k Q_k^{(i)}$, где $\alpha_k \geq 0$, $\sum \alpha_k = 1$, $Q_k^{(i)}$ — вершинные матрицы для интервальной матрицы $[\tilde{\Lambda}_i^k]$. Тогда, учитывая (1.55), получаем

$$\begin{aligned} \Delta V(\tilde{x}[lT]) &= \tilde{x}^T[lT] \left(\left(\sum \alpha_\nu (Q_\nu^{(i)})^T \right) L^* \left(\sum \alpha_\nu Q_\nu^{(i)} \right) L^* \right) \tilde{x}[lT] = \\ &= \sum \alpha_\nu^2 \tilde{x}^T[lT] \left((Q_\nu^{(i)})^T L^* Q_\nu^{(i)} - L^* \right) \tilde{x}[lT] + \sum_{\nu < \eta} \alpha_\nu \alpha_\eta \tilde{x}^T \left((Q_\nu^{(i)})^T L^* Q_\eta^{(i)} - L^* \right) + \\ &+ \left((Q_\eta^{(i)})^T L^* Q_\nu^{(i)} - 2L^* \right) \tilde{x}[lT] \leq \sum \alpha_\nu^2 \lambda_\nu^{(i)} \|\tilde{x}[lT]\|^2 + \sum_{\nu < \eta} \alpha_\nu \alpha_\eta \lambda_{\nu\eta}^{(i)} \|\tilde{x}[lT]\|^2 = \\ &= \left(\sum \alpha_\nu^2 \alpha_\nu^{(i)} + \sum_{\nu < \eta} \alpha_\nu \alpha_\eta \lambda_{\nu\eta}^{(i)} \right) \|\tilde{x}[lT]\|^2, \quad (1.62) \end{aligned}$$

где $\lambda_\nu^{(i)}$ - максимальное собственное значение матрицы $((Q_\nu^{(i)})^T L^* Q_\nu^{(i)} - L^*)$, $\lambda_{\nu\eta}^{(i)}$ - максимальное собственное значение матрицы $((Q_\nu^{(i)})^T L^* Q_\eta^{(i)} - L^*) + (Q_\eta^{(i)})^T L^* Q_\nu^{(i)} - 2L^*$.

Пусть $-\lambda_i = \max_{\nu, \eta} \{\lambda_\nu^{(i)}, \lambda_{\nu\eta}^{(i)}\}$. В силу отрицательной определённости матриц $((Q_\nu^{(i)})^T L^* Q_\nu^{(i)} - L^*), ((Q_\nu^{(i)})^T L^* Q_\eta^{(i)} - L^*) + (Q_\eta^{(i)})^T L^* Q_\nu^{(i)} - 2L^*$

$$-\lambda_i < 0.$$

Пусть $-2\lambda = \max\{-\lambda_1, \dots, -\lambda_m\}$. Очевидно, что $-2\lambda < 0$. Тогда, для любого $i \in I$ и любого $\tilde{x}[lT] \neq 0$ получим следующую оценку для первой разности в силу i -го режима системы (1.60)

$$\begin{aligned} \Delta V(\tilde{x}[lT]) &\leq (\sum (\alpha_\nu^2 \lambda_\nu^{(i)}) + \sum (\alpha_\nu \alpha_\eta \lambda_{\nu\eta}^{(i)})) \|\tilde{x}[lT]\|^2 \leq \\ &\leq -2\lambda \|\tilde{x}[lT]\|^2 (\sum \alpha_\nu^2 + \sum_{\nu < \eta} \alpha_\nu \alpha_\eta) \leq -2\lambda \|\tilde{x}[lT]\|^2 (\frac{1}{2} \sum \alpha_\nu^2 + \sum_{\nu < \eta} \alpha_\nu \alpha_\eta) = \\ &= -2\lambda \|\tilde{x}[lT]\|^2 \frac{1}{2} (\sum \alpha_\nu)^2 = -\lambda \|\tilde{x}[lT]\|^2 < 0. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Предположим, что при выполнении условий теоремы 1.5 соответствующая система (1.58) не является ГРАУ. Тогда найдётся такой элемент (1.60) интервального семейства (1.58), для которого существует некоторый переключающий сигнал $\hat{\sigma} \in S_{\tau, \gamma}$, начальное условие $\hat{x}[0]$, что соответствующее решение $\|\hat{x}[lT]\| \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. Тогда, в силу условия (1.59) должно существовать $\mu > 0$ такое, что для любого $l^*T > 0$ решение $\hat{x}[lT] \notin \omega_\mu = \{x : V(x) < \mu\}$ при $0 \leq l \leq l^*$ (это следует из справедливости неравенства (1.63) для системы (1.60)).

Пусть для некоторого $r > 0$ шар $B(0; r) \subset \omega_\mu$. Зафиксируем произвольное $l^*T > 0$. Тогда $\|\hat{x}[lT]\| > r$ при всех $0 \leq l \leq l^*$.

Обозначим через l_1T, l_2T, \dots, l_pT все моменты переключения системы (1.60) на промежутке $[0; l^*T]$, обусловленные переключающим сигналом $\hat{\sigma}(t)$. Пусть

$$0 < l_1T < l_2T < \dots < l_pT < l^*T.$$

Тогда, с учётом (1.58) имеем

$$\begin{aligned} V(\hat{x}[l^*T]) &= V(\hat{x}[0]) + (V(\hat{x}[l_1T]) - V(\hat{x}[0])) + (V(\hat{x}[l_2T]) - V(\hat{x}[l_1T])) + \\ &+ (V(\hat{x}[l_3T]) - V(\hat{x}[l_2T])) + \dots + (V(\hat{x}[l^*T]) - V(\hat{x}[l_pT])) = V(\hat{x}[0]) + \sum_{j=0}^{l_1-1} \Delta V(\hat{x}[jT]) + \\ &+ \sum_{j=l_1}^{l_2-1} \Delta V(\hat{x}[jT]) + \dots + \sum_{j=l_p}^{l_{p+1}-1} \Delta V(\hat{x}[jT]) \leq V(\hat{x}[0]) + \sum_{j=0}^{l_1-1} (-\lambda r^2) + \dots + \\ &+ \sum_{j=l_p}^{l_{p+1}-1} (-\lambda r^2) = V(\hat{x}[0]) + l_1(-\lambda r^2) + (l_2 - l_1)(-\lambda r^2) + \dots + (l^* - l_p)(-\lambda r^2) = \\ &= V(\hat{x}[0]) + l^*(-\lambda r^2) = V(\hat{x}[0]) - \lambda r^2 \cdot l^*. \end{aligned}$$

Получаем оценку

$$V(\hat{x}[l^*T]) \leq V(\hat{x}[0]) - \lambda r^2 \cdot l^*.$$

Учитывая, что λ, r не зависят от l^* , то при достаточно больших l^* получим $V(\hat{x}[l^*T]) < 0$. Но $V(x[lT])$ — положительно определённая. Полученное противоречие доказывает теорему.

Заметим, что систему матричных неравенств (1.59) можно свести к решению системы линейных матричных неравенств, совместность которой можно установить, например, с помощью пакета LMI Control Toolbox системы компьютерной математики MatLab.

Поиск регулятора R^* , обеспечивающего стабилизацию системы (1.10) при переключениях $\sigma \in S_{\tau, \gamma}$, можно осуществлять, например, с помощью численной процедуры на основе сеточного метода, отождествляя с узлами сетки наборы параметров регулятора заданного порядка. При этом проверку робастной устойчивости замкнутой дискретной системы (1.58) можно проводить на основе теоремы 1.5, выясняя разрешимость системы матричных неравенств (1.59). Учитывая большую вычислительную сложность сеточного метода, можно предложить также и другие процедуры поиска стабилизирующего регулятора. Например, можно зафиксировав некоторое конечное число переключаемых систем-элементов исходного интервального семейства, найти регулятор, одновременно стабилизирующий эти системы, с дальнейшей проверкой его стабилизирующих свойств для исходной системы.

Регулятор, удовлетворяющий теореме 1.5, фактически предполагает су-

существование общей квадратичной функции Ляпунова для всех элементов семейства (1.57). При этом, требование разрешимости системы матричных неравенств (1.59) является весьма жестким. Достаточное условие, задаваемое теоремой 1.5, можно ослабить, допустив стабилизацию дискретной системы (1.57) регуляторами, предполагающими существование лишь множественной функции Ляпунова для отдельных режимов рассматриваемой переключаемой системы.

По данному результату проведено моделирование, которое представлено в приложении А.

1.1.6. Квадратичная стабилизация на основе множественной функции Ляпунова

Под множественной функцией Ляпунова V_{mult} для дискретной переключаемой линейной интервальной системы

$$x[(l+1)T] = [A_\sigma]x[lT], \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma}, \quad l \in \{1, \dots, m\} \quad (1.64)$$

будем понимать множество функций $\{V_1, \dots, V_m\}$, $V_i(x) = x^T L_i x$ ($L_i > 0$) таких, что для любого $i \in I$ функция $V(x)$ является общей квадратической функцией Ляпунова для i -го интервального режима $x[(l+1)T] = [A_i]x[lT]$ системы (1.64).

Рассмотрим дискретную интервальную линейную систему

$$x[(l+1)T] = [A]x[lT], \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.65)$$

Пусть матрица L^* удовлетворяет системе матричных неравенств (1.56). Введем обозначения

$$\begin{aligned} -R_{[A]}^{(\nu)} &= A^\top(q_{[A]}^{(\nu)})L^*A(q_{[A]}^{(\nu)}) - L^*, \\ -R_{[A]}^{(\nu,\eta)} &= A^\top(q_{[A]}^{(\nu)})L^*A(q_{[A]}^{(\eta)}) + A^\top(q_{[A]}^{(\eta)})L^*A(q_{[A]}^{(\nu)}) - 2L^*, \quad q_{[A]}^{(\nu)}, q_{[A]}^{(\eta)} \in G([A]). \end{aligned}$$

Легко видеть, что $R_{[A]}^{(\nu)} \succ 0$, $R_{[A]}^{(\nu,\eta)} \succ 0$ и $R_{[A]}^{(\nu,\eta)} = R_{[A]}^{(\eta,\nu)}$. Обозначим через $r_A^{(\nu)}$ и $r_A^{(\nu,\eta)}$ минимальные собственные значения матриц $R_{[A]}^{(\nu)}$ и $R_{[A]}^{(\nu,\eta)}$ соответственно.

Тогда для произвольной матрицы $A(q) \in [A]$ имеем

$$A^\top(q)L^*A(q) - L^* = \sum_{\nu} \lambda_{\nu}^2(-R_{[A]}^{(\nu)}) + \sum_{\nu < \eta} \lambda^{\nu} \lambda^{\eta}(-R_{[A]}^{(\nu, \eta)}).$$

Пусть $x_q[lT]$ — произвольное решение системы

$$x[(l+1)T] = A(q)x[lT]. \quad (1.66)$$

Очевидно, что квадратичная функция $V(x) = x^\top L^* x$ является функцией Ляпунова для системы (1.66). Пусть $\rho_{[A]} = \min\{r_{[A]}^{(\nu)}, \frac{r_{[A]}^{(\nu, \eta)}}{2}\}$, а m_{L^*} и M_{L^*} — минимальное и максимальное собственные значения матрицы L^* . Обозначая $V_l = V(x_q[lT])$, имеем

$$\begin{aligned} V_{l+1} - V_l &= x_q^\top[lT](A^\top(q)L^*A(q) - L^*)x_q[lT] = \\ &= x_q^\top[lT]\left(\sum_{\nu} \lambda_{\nu}^2(-R_{[A]}^{(\nu)}) + \sum_{\nu < \eta} \lambda^{\nu} \lambda^{\eta}(-R_{[A]}^{(\nu, \eta)})\right)x_q[lT] \leq \\ &\leq -\sum_{\nu} \lambda_{\nu}^2 x_q^\top[lT] R_{[A]}^{(\nu)} x_q[lT] - \sum_{\nu < \eta} \lambda^{\nu} \lambda^{\eta} x_q^\top[lT] R_{[A]}^{(\nu, \eta)} x_q[lT] \leq \\ &\leq -\sum_{\nu} \lambda_{\nu}^2 \frac{r_{[A]}^{(\nu)}}{M_{L^*}} V_l - \sum_{\nu < \eta} \lambda^{\nu} \lambda^{\eta} \frac{r_{[A]}^{(\nu, \eta)}}{M_{L^*}} V_l \leq -\sum_{\nu} \lambda_{\nu}^2 \frac{\rho_{[A]}}{M_{L^*}} V_l - 2 \sum_{\nu < \eta} \lambda^{\nu} \lambda^{\eta} \frac{\rho_{[A]}}{M_{L^*}} V_l = \\ &= -\left(\sum_{\nu} \lambda_{\nu}^2 + 2 \sum_{\nu < \eta} \lambda^{\nu} \lambda^{\eta}\right) \frac{\rho_{[A]}}{M_{L^*}} V_l = -\left(\sum_{\nu} \lambda_{\nu}\right)^2 \frac{\rho_{[A]}}{M_{L^*}} V_l = -\frac{\rho_{[A]}}{M_{L^*}} V_l. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Таким образом из (1.67) следует, что для произвольного решения системы (1.66) при всех $l \geq 0$ выполняется неравенство

$$V_{l+1} \leq \left(1 - \frac{\rho_{[A]}}{M_{L^*}}\right) V_l.$$

А тогда, в соответствии с [89, с. 64] имеем оценку

$$\|x_q[lT]\| \leq C_{L^*} \|x_q[0]\| \zeta_{[A], L^*}^l \quad (1.68)$$

где

$$C_{L^*} = \sqrt{\frac{M_{L^*}}{m_{L^*}}}, \quad \zeta_{[A], L^*} = \sqrt{1 - \frac{\rho_{[A]}}{M_{L^*}}} \quad (0 < \zeta_{[A], L^*} < 1).$$

На основании приведенных выкладок можно сформулировать теорему.

Теорема 1.6. Пусть для дискретной линейной интервальной системы (1.65) матрица L^* удовлетворяет системе матричных неравенств (1.56). Тогда для произвольного $q \in P([A])$ любое решение $x_q[lT]$ дискретной системы (1.66) удовлетворяет оценке (1.68).

В работе [80] было сформулировано и доказано достаточное условие устойчивости дискретной переключаемой линейной системы, замкнутой цифровым регулятором (1.11).

Теорема 1.7. [80] Пусть регулятор (1.11) является стабилизирующим для семейства дискретных объектов

$$x[(l+1)T] = A_i x[lT] + b_i u[lT], \quad y[lT] = c_i x[lT], \quad i = 1, \dots, m, \\ A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad b_i, c_i \in \mathbb{R}^n \quad (1.69)$$

т.е. обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутых систем

$$x[(l+1)T] = (A_i + b_i h c_i) x[lT] + b_i H v[lT], \quad v[(l+1)T] = q c_i x[lT] + Q v[lT],$$

которые представим в виде

$$\tilde{x}[(l+1)T] = \tilde{A}_i \tilde{x}[lT], \quad i = 1, \dots, m,$$

где $\tilde{x} = (x, v)^T$.

Пусть R_i — некоторые положительно определённые $n \times n$ матрицы ($i = \overline{1, m}$), а P_i — соответствующие положительно определённые решения матричных уравнений Ляпунова

$$\tilde{A}_i P_i \tilde{A}_i^T - P_i = -R_i.$$

Обозначим $C_* = \max\{C_1, \dots, C_m\}$ ($C_* \geq 1$), $\zeta_* = \max\{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$ ($0 < \zeta_* < 1$), где $C_i = \sqrt{\frac{M_i}{m_i}}$, $\zeta_i = \sqrt{\frac{1-r_i}{M_i}}$, а m_i и M_i — минимальное и максимальное собственные значения матрицы P_i соответственно, r_i — минимальное собствен-

ное значение матрицы R_i . Тогда регулятор (1.11) является стабилизирующим для дискретной переключаемой линейной системы

$$x[(l+1)T] = A_\sigma x[lT] + b_\sigma u[lT], \quad y[lT] = c_\sigma x[lT], \quad \sigma \in S_{\tau,T},$$

где $A_\sigma \in \{A_1, \dots, A_m\}$, $b_\sigma \in \{b_1, \dots, b_m\}$, $c_\sigma \in \{c_1, \dots, c_m\}$, для которой

$$\tau \geq ([\log_{\zeta_*} C_*^{-2}] + 1)T$$

(здесь $[\cdot]$ — целая часть числа).

Теперь на основе теорем 1.6 и 1.7. можно сформулировать достаточное условие стабилизации переключаемой линейной интервальной системы (1.10) цифровым стабилизатором (1.11)-(1.12).

Теорема 1.8. Пусть

$$\tilde{x}[(l+1)T] = \{\tilde{A}_\sigma^*\} \tilde{x}[lT], \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma} \quad (1.70)$$

— точная дискретизация вида (1.23) системы (1.10), замкнутой некоторым регулятором R^* вида (1.11)-(1.12) и

$$\tilde{x}[(l+1)T] = [\tilde{\Lambda}_\sigma] \tilde{x}[lT], \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma} \quad (1.71)$$

— некоторое интервальное расширение системы (1.70).

Пусть для каждого $i = 1, \dots, t$ матрица L_i является решением соответствующей системы матричных неравенств

$$\begin{cases} L_i \succ 0, \\ \tilde{\Lambda}_i^\top(q_{[\tilde{\Lambda}_i]}^{(\nu)}) L_i \tilde{\Lambda}_i(q_{[\tilde{\Lambda}_i]}^{(\nu)}) - L \prec 0, \\ \tilde{\Lambda}_i^\top(q_{[\tilde{\Lambda}_i]}^{(\nu)}) L_i \tilde{\Lambda}_i(q_{[\tilde{\Lambda}_i]}^{(\eta)}) + \tilde{\Lambda}_i^\top(q_{[\tilde{\Lambda}_i]}^{(\eta)}) L_i \tilde{\Lambda}_i(q_{[\tilde{\Lambda}_i]}^{(\nu)}) - 2L \prec 0, \quad q_{[\tilde{\Lambda}_i]}^{(\nu)} \in G([\tilde{\Lambda}_i]), \end{cases} \quad (1.72)$$

т.е. для системы (1.71) существует множественная функция Ляпунова V_{mult} .

Тогда регулятор R^* стабилизирует переключаемую интервальную линейную систему (1.10) при любом $\tau = l_0 T$, где

$$l_0 \geq \left[\log_{\zeta_*} \frac{1}{(C_*)^2} \right] + 1. \quad (1.73)$$

Здесь $[\cdot]$ — целая часть числа,

$$C_* = \max \{C_{L_1}, \dots, C_{L_m}\} \quad (C_* \geq 1), \quad \zeta_* = \max \{\zeta_{[\tilde{\Lambda}_1], L_1}, \dots, \zeta_{[\tilde{\Lambda}_m], L_m}\} \quad (0 < \zeta_* < 1).$$

Заметим, что условие разрешимости m систем матричных неравенств (1.72) является менее жестким условием, чем условие разрешимости системы (1.59).

Поиск регулятора R^* , обеспечивающего стабилизацию системы (1.10) на основе теоремы 1.8 можно также (как и в п.1.1.5) осуществлять с помощью численной процедуры на основе сеточного метода, отождествляя с узлами сетки наборы параметров регулятора заданного порядка. При этом проверку робастной устойчивости замкнутых дискретных систем (1.58) можно проводить, решая системы матричных неравенств (1.72), например, с помощью пакета LMI Control Toolbox системы компьютерной математики MatLab.

1.2. Достаточное условие существования динамического регулятора

В предыдущем разделе была рассмотрена задача цифровой стабилизации переключаемой интервальной системы вида (1.10).

При этом поиск цифрового стабилизатора осуществлялся в классе дискретных динамических обратных связей вида

$$\begin{cases} v[(l+1)T] = Qv[lT] + qy[lT] \\ u[lT] = Hv[lT] + hy[lT], \quad v \in \mathbb{R}^r \end{cases} \quad (1.74)$$

где T —заданный период квантования по времени. При этом предполагалось, что переключающие сигналы σ системы (1.10) принадлежат множеству $S_{\tau, \gamma}$.

В разделе 1.1 был предложен алгоритм сведения указанной задачи стабилизации системы (1.10) к задаче стабилизации специальным образом построенной дискретной переключаемой интервальной системы (интервального расширения

точной дискретизации системы (1.10))

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = [\Lambda_\sigma^*]x[lT] + [\mu_\sigma^*]u[lT] \\ y[lT] = [c_\sigma]x[lT], \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma} \end{cases} \quad (1.75)$$

дискретным регулятором (1.74). Было сформулировано достаточное условие глобальной равномерной асимптотической устойчивости системы (1.75).

При этом открытым остался вопрос об условиях существования стабилизирующего регулятора вида (1.74), обеспечивающего глобальную равномерную асимптотическую устойчивость системы (1.47).

В текущем разделе на основе изложенного выше подхода и результатов раздела 1.1, сформулировано достаточное условие существования стабилизирующего регулятора для системы (1.75) (а, следовательно и для системы (1.10)) в случае, когда вектор c_σ “точечный”, т.е. $[c_i] = c_i$ для всех $i = \overline{1, m}$. Данное условие сформулировано на языке матричных неравенств.

Рассмотрим вначале задачу стабилизации по выходу дискретной интервальной системы

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = [A]x[lT] + [b]u[lT] \\ y[lT] = cx[lT], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u, y \in \mathbb{R}^1 \end{cases} \quad (1.76)$$

с помощью динамического регулятора

$$\begin{cases} v[(l+1)T] = Qv[lT] + qy[lT] \\ u[lT] = Hv[lT] + hy[lT], \quad v \in \mathbb{R}^r, \end{cases} \quad (1.77)$$

т.е. задачу поиска матрицы

$$\Theta = \begin{pmatrix} Q & q \\ H & h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(r+1) \times (r+1)},$$

обеспечивающую устойчивость параметрически неопределенной системы

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = ([A] + [b]hc)x[lT] + [b]Hv[lT] \\ v[(l+1)T] = qcx[lT] + Qv[lT]. \end{cases} \quad (1.78)$$

Указанную задачу можно переформулировать следующим образом: найти матрицу $Q = \{q_{ij}\}_{i,j=1}^r$, векторы $q = (q_1 \dots q_r)^T$, $H = (h_1 \dots h_r)^T$ и константу h такие, что для любого вектора параметров $w^T = (g \ s)$, где $g^T = (g_1 \dots g_{n^2})$, $s^T = (s_1 \dots s_n)$, $g_1 \in [\underline{a}_{11}, \bar{a}_{11}]$, \dots , $g_n \in [\underline{a}_{1n}, \bar{a}_{1n}]$, $g_{n+1} \in [\underline{a}_{21}, \bar{a}_{21}]$, \dots , $g_{2n} \in [\underline{a}_{2n}, \bar{a}_{2n}]$, \dots , $g_{n^2-n} \in [\underline{a}_{n1}, \bar{a}_{n1}]$, \dots , $g_{n^2} \in [\underline{a}_{nn}, \bar{a}_{nn}]$, $g_{n^2} \in [\underline{a}_{nn}, \bar{a}_{nn}]$, $s_1 \in [\underline{b}^1, \bar{b}^1]$, \dots , $s_n \in [\underline{b}^n, \bar{b}^n]$ матрица

$$\Psi(w, \Theta) = \begin{pmatrix} g_1 + s_1 h c_1 & \dots & g_n + s_1 h c_n & s_1 h_1 & \dots & s_1 h_r \\ g_{n+1} + s_2 h c_1 & \dots & g_{2n} + s_2 h c_n & s_2 h_1 & \dots & s_2 h_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n^2-n} + s_n h c_1 & \dots & g_{n^2} + s_n h c_n & s_n h_1 & \dots & s_n h_r \\ q_1 c_1 & \dots & q_1 c_n & q_{11} & \dots & q_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_r c_1 & \dots & q_r c_n & q_{r1} & \dots & q_{rr} \end{pmatrix}$$

является шуровской матрицей или, что то же самое, дискретная система

$$\begin{pmatrix} x[(l+1)T] \\ v[(l+1)T] \end{pmatrix} = \Psi(w, \Theta) \begin{pmatrix} x[lT] \\ v[lT] \end{pmatrix}$$

асимптотически устойчива.

Заметим, что множество матриц $\Psi(w, \Theta)$ при каждой фиксированной матрице

$$\begin{pmatrix} Q & q \\ H & h \end{pmatrix}$$

образует выпуклое множество в пространстве матриц $\mathbb{R}^{(n+r) \times (n+r)}$.

Действительно, сопоставим матрице

$$\Psi(w, \Theta) = (\psi_{ij}(w, \Theta))_{i,j=1}^{n+r}$$

вектор

$$\Psi(w, \Theta) = (\psi_{11}(w, \Theta) \dots \psi_{1,n+r}(w, \Theta) \psi_{21}(w, \Theta) \dots \psi_{2,n+r}(w, \Theta) \dots$$

$$\dots \psi_{n+r,1}(w, \Theta) \dots \psi_{n+r,n+r}(w, \Theta),$$

который является “развёрткой” матрицы $\Psi(w, \Theta)$ по строкам. Далее заметим, что вектор $\Psi(w, \Theta)$ можно представить следующим образом

$$\Psi(w, \Theta) = \Gamma(\Theta)w^*, \quad (1.79)$$

где

$$w^* = (g_1 \dots g_{n^2} \quad s_1 \dots s_n \quad \overbrace{1 \dots 1}^{rn} \quad \overbrace{1 \dots 1}^{r^2}),$$

т.е. w^* — это вектор параметров w , дополненный $rn + r^2$ единицами, а матрица $\Gamma(\Theta) \in \mathbb{R}^{(n+r^2) \times (n^2+n+nr+r^2)}$ имеет следующий вид

$$\Gamma(\Theta) = (\Delta_1(\Theta) \quad \Delta_2(\Theta)),$$

где

$$\Delta_1(\Theta) = \begin{pmatrix} I_n & O_n & \dots & O_n & hc & \bar{o}_n & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & \bar{o}_n \\ O_{r \times n} & O_{r \times n} & \dots & O_{r \times n} & H & \bar{o}_r & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & \bar{o}_r \\ O_n & I_n & \dots & O_n & \bar{o}_n & hc & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & \bar{o}_n \\ O_{r \times n} & O_{r \times n} & \dots & O_{r \times n} & \bar{o}_r & H & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & \bar{o}_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O_n & O_n & \dots & I_n & \bar{o}_n & \bar{o}_n & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & hc \\ O_{r \times n} & O_{r \times n} & \dots & O_{r \times n} & \bar{o}_r & \bar{o}_r & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & H \\ O_n & O_n & \dots & O_n & \bar{o}_n & \bar{o}_n & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & \bar{o}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O_n & O_n & \dots & O_n & \bar{o}_n & \bar{o}_n & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & \bar{o}_n \\ O_{r \times n} & O_{r \times n} & \dots & O_{r \times n} & \bar{o}_r & \bar{o}_r & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & \bar{o}_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O_{r \times n} & O_{r \times n} & \dots & O_{r \times n} & \bar{o}_r & \bar{o}_r & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & \bar{o}_r \end{pmatrix}$$

$$\Delta_2(\Theta) = \begin{pmatrix} \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n \\ \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r \\ \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n \\ \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n \\ \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r & \bar{o}_r & \dots & \bar{o}_r \\ q_1 c_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & q_1 c_n & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & q_{11} & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & q_1 r & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & q_r c_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & q_r c_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 & q_{r1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & q_{rr} \end{pmatrix},$$

$$\Delta_1(\Theta) \in \mathbb{R}^{(n+r^2) \times (n^2+n)}, \quad \Delta_2(\Theta) \in \mathbb{R}^{(n+r^2) \times (nr+r^2)}.$$

Введём теперь следующие обозначения: $(l_i^*)^T = (0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0)$ — единичный вектор размерности $n + r$, i -я компонента которого равна 1; $L_i^* =$

$$\begin{pmatrix} O_{n+r} \\ \vdots \\ O_{n+r} \\ I_{n+r} \\ O_{n+r} \\ \vdots \\ O_{n+r} \end{pmatrix}$$
 — единичный блочный вектор-столбец, i -ый блок которого —

единичная матрица порядка $n + r$.

Используя (1.79) и введённые обозначения, представим матрицу $\Psi(w, \Theta)$ следующим образом

$$\Psi(w, \Theta) = \sum_{j=1}^{n+r} l_j^*(w^*)^T \Gamma^T(\Theta) L_j^* \quad (1.80)$$

Теперь заметим, что множество D^* допустимых наборов параметров w^* образует в пространстве $\mathbb{R}^{n^2+n+nr+r^2}$ вырожденный параллелотоп размерности $n^2 + n$. При этом

$$D^* = \text{Conv}\{p_i^*, i = \overline{1, 2^{n^2+n}}\},$$

где вершины p_i^* представляются векторами, содержащими в качестве изменяющихся компонент всевозможные сочетания нижних и верхних границ соответствующих интервалов $[a_{ij}; \bar{a}_{ij}]$, $[b^i; \bar{b}^i]$.

Тогда любой вектор $w^* \in D^*$ представляется в виде линейной комбинации

$$w^* = \sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i p_i^*, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum \lambda_i = 1 \quad (1.81)$$

Из (1.80) и (1.81) получаем

$$\Psi(w, \Theta) = \sum_{j=1}^{n+r} l_j^* \left(\sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i p_i^* \right)^T \Gamma^T(\Theta) L_j^* = \sum_{j=1}^{n+r} \left(\sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i l_j^*(p_i^*)^T \Gamma^T(\Theta) L_j^* \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \left(\sum_{j=1}^{n+r} \lambda_i l_j^*(p_i^*)^T \Gamma^T(\Theta) L_j^* \right) = \sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n+r} l_j^*(p_i^*)^T \Gamma^T(\Theta) L_j^* \right)$$

Обозначим

$$\Psi_i(\Theta) = \sum_{j=1}^{n+r} l_j^*(p_i^*)^T \Gamma^T(\Theta) L_j^*.$$

Таким образом получаем, что для любого $w^* \in D^*$

$$\Psi(w, \Theta) = \text{Conv}\{\Psi_i(\Theta), i = \overline{1, 2^{n^2+n}}\} \quad (1.82)$$

Заметим теперь, что каждую матрицу $\Psi_i(\Theta)$ можно представить [62] в виде

$$\Psi_i(\Theta) = A_0^{(i)} + B_0^{(i)} \Theta C_0,$$

где

$$A_0^{(i)} = \begin{pmatrix} A^{(i)} & O_{n \times r} \\ O_{r \times n} & O_{r \times r} \end{pmatrix}, \quad B_0^{(i)} = \begin{pmatrix} O_{n \times r} & b^{(i)} \\ I_{r \times r} & \bar{o}_r \end{pmatrix}, \quad C_0 = \begin{pmatrix} O_{r \times n} & I_{r \times r} \\ c^T & (\bar{o}_r)^T \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты матриц $A^{(i)}$ и векторов $b^{(i)}$ зависят от компонент соответствующих вершин p_i^* .

Сформулируем теперь достаточное условие существования стабилизирующей обратной связи (1.77) для системы (1.76).

Теорема 1.9. Пусть система матричных неравенств

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} G^{-1} & A_0^{(i)} + B_0^{(i)} \Theta C_0 \\ (A_0^{(i)})^T + (C_0)^T (\Theta)^T (B_0^{(i)})^T & G \end{pmatrix} > 0, \\ G > 0, \quad i = \overline{1, 2^{n^2+n}} \end{cases} \quad (1.83)$$

имеет решение (G_0, Θ_0) . Тогда регулятор

$$\begin{cases} z[(l+1)T] = Q_0 z[lT] + q_0 y[lT] \\ u[lT] = H_0 z[lT] + h_0 y[lT], \end{cases} \quad (1.84)$$

где $\begin{pmatrix} Q_0 & q_0 \\ H_0 & h_0 \end{pmatrix} = \Theta_0$, стабилизирует систему (1.76).

Доказательство. Действительно, пусть система (1.83) имеет решение (G_0, Θ_0) . Тогда в силу леммы Шура [62, с. 19], выполняется неравенство

$$G_0 - \Psi_i^T(\Theta_0)G_0\Psi_i(\Theta_0) > 0,$$

из которого следует, что матрица $\Psi_i(\Theta_0)$ является шуровской. А отсюда следует, что дискретная система

$$\begin{pmatrix} x[(l+1)T] \\ v[(l+1)T] \end{pmatrix} = \Psi_i(\Theta_0) \begin{pmatrix} x[lT] \\ v[lT] \end{pmatrix}$$

асимптотически устойчива.

Рассмотрим теперь для произвольного $w^* \in D^*$ матрицу $\Psi(w, \Theta_0)$. В силу (1.82)

$$\Psi_i(w, \Theta_0) = \sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i \Psi_i(\Theta_0), \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum \lambda_i = 1.$$

Но тогда, используя результаты раздела 1.1, получаем

$$G_0 - \Psi^T(w, \Theta_0)G_0\Psi(w, \Theta_0) > 0,$$

и, следовательно, система

$$\begin{pmatrix} x[(l+1)T] \\ v[(l+1)T] \end{pmatrix} = \Psi(w, \Theta_0) \begin{pmatrix} x[lT] \\ v[lT] \end{pmatrix} \quad (1.85)$$

асимптотически устойчива. Теорема 1.9 доказана.

Рассмотрим теперь переключаемую интервальную систему (1.10) с "точечным" вектором c_σ

$$\begin{cases} \dot{x} = [A_\sigma]x + [b_\sigma]u \\ y = c_\sigma x, \quad \sigma \in S_{\tau, \gamma}. \end{cases} \quad (1.86)$$

Пусть переключаемая интервальная система

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = [\Lambda_\sigma^*]x[lT] + [\mu_\sigma^*]u[lT] \\ y[lT] = c_\sigma x[lT], \quad \sigma \in S_{\tau, \gamma} \end{cases} \quad (1.87)$$

является интервальным расширением точной дискретизацией (см. раздел 1.1) системы (1.86) и пусть

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = [\Lambda_i^*]x[lT] + [\mu_i^*]u[lT] \\ y[lT] = c_i x[lT], \quad i = 1, \dots, m \end{cases} \quad (1.88)$$

различные режимы системы (1.87).

Замкнем теперь каждый i -й режим (1.88) регулятором (1.74)

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = ([\Lambda_i^*] + [\mu_i^*]hc_i)x[lT] + [\mu_i^*]Hv[lT] \\ v[(l+1)T] = qc_i x[lT] + Qv[lT]. \end{cases} \quad (1.89)$$

По аналогии с системой (1.78), построим для каждой i -й системы (1.89) матрицу $\Psi_i(w^{(i)}, \Theta)$, где Θ — матрица параметров регулятора (1.74), а $w^{(i)}$ — вектор параметров, определяемый интервальными коэффициентами матрицы $[\Lambda_i]$ и вектора $[\mu_i]$. Далее, используя вышеприведенные рассуждения, построим для каждого $i = 1, \dots, m$ множество матриц $\Psi_l^{(i)}(\Theta)$ ($l = 1, \dots, n^2 + n$), выпуклая оболочка которых содержит матрицы $\Psi_i(w^{(i)}, \Theta)$ для любого допустимого набора параметров $w^{(i)}$. Теперь заметим, что матрицы $\Psi_l^{(i)}(\Theta)$ могут быть представлены в виде

$$\Psi_l^{(i)}(\Theta) = A_{0,i}^{(l)} + B_{0,i}^{(l)}\Theta C_{0,i},$$

где

$$A_{0,i}^{(l)} = \begin{pmatrix} A_i^{(l)} & O_{n \times r} \\ O_{r \times n} & O_{r \times r} \end{pmatrix}, \quad B_{0,i}^{(l)} = \begin{pmatrix} O_{n \times r} & b_i^{(l)} \\ I_{r \times r} & \bar{o}_r \end{pmatrix}, \quad C_{0,i} = \begin{pmatrix} O_{r \times n} & I_{r \times r} \\ c_i^T & (\bar{o}_r)^T \end{pmatrix}.$$

Из теоремы 1.9 и результатов раздела 1.1 вытекает следующее достаточное условие существования стабилизирующей обратной связи (1.74) для переключаемой интервальной системы (1.86).

Теорема 1.10. Пусть для системы (1.87) система матричных неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{cc} G^{-1} & A_{0,i}^{(l)} + B_{0,i}^{(l)} \Theta C_{0,i} \\ (A_{0,i}^{(l)})^T + C_{0,i}^T (\Theta)^T (B_{0,i}^{(l)})^T & G \end{array} \right) > 0 \\ G > 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, 2^{n^2+n}} \end{array} \right. \quad (1.90)$$

имеет решение (G_0, Θ_0) . Тогда регулятор (1.84) стабилизирует систему (1.86).

1.3. Выводы к первой главе

В рамках задачи построения цифрового регулятора по выходу, стабилизирующего непрерывную переключаемую интервальную систему, предложен метод сведения задачи цифровой стабилизации по выходу переключаемой интервальной системы к задаче стабилизации дискретной переключаемой интервальной системы. Предложенный подход к стабилизации включает в себя построение непрерывно-дискретной замкнутой системы с цифровым регулятором, переход к ее дискретной модели и построение стабилизирующего регулятора. Сформулировано и доказано конструктивное достаточное условие устойчивости непрерывной переключаемой интервальной системы, замкнутой цифровым регулятором. Сформулировано и доказано достаточное условие существования стабилизирующего регулятора в форме динамической обратной связи по выходу для переключаемой интервальной системы в терминах разрешимости системы нелинейных матричных неравенств.

Цифровая сверхстабилизация переключаемой интервальной линейной системы

Рассматривается задача цифровой сверхстабилизации нулевого положения равновесия переключаемой линейной системы, функционирующей в условиях параметрической неопределенности. При этом предполагается интервальный тип параметрической неопределенности.

2.1. Метод построения цифрового сверхстабилизатора по состоянию для переключаемой интервальной линейной системы

2.1.1. Задача стабилизации статическим регулятором по состоянию

Рассматривается непрерывная скалярная переключаемая интервальная линейная система

$$\dot{x} = [A_\sigma]x + [b_\sigma]u \quad \sigma \in S_{\tau, \gamma}, \quad \sigma(\cdot) \in I, \quad (2.1)$$

где $\sigma : \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow I = \{1, \dots, m\}$ — кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал) с конечным числом разрывов (переключений) на любом конечном промежутке; $\overline{\mathbb{R}}_+$ — множество неотрицательных действительных чисел; $S_{\tau, \gamma}$ — множество переключающих сигналов σ , точки разрыва которых принадлежат множеству $\{l\gamma\}$, где γ — некоторое положительное число, а $l = 0, 1, 2, \dots$. При этом, расстояние между двумя соседними промежутками не превосходит τ , где $\tau = \mu\gamma$, $\mu \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u \in \mathbb{R}$ — управляющий вход; $[A_\sigma] = [A] \circ \sigma$ — композиция отображения $[A] : I \rightarrow \{[A_1], \dots, [A_m]\}$ и переключающего сигнала σ , $[b_\sigma] = [b] \circ \sigma$ — композиция для отображений $[b] : I \rightarrow \{[b_1], \dots, [b_m]\}$. Здесь $[A_i]$ ($i = 1, \dots, m$) — интервальные матрицы,

коэффициенты которых являются интервальными числами $[a_{lj}^{(i)}] = [\bar{a}_{lj}^{(i)}; \underline{a}_{lj}^{(i)}]$, а $[b_i]$ ($i = 1, \dots, m$) — интервальные векторы с коэффициентами $[b_l^{(i)}] = [\bar{b}_l^{(i)}; \underline{b}_l^{(i)}]$. Считаем, что переключающие сигналы σ являются ненаблюдаемыми, т.е. в каждый момент времени t недоступна информация о номере активного режима.

Значение функции σ в каждый момент времени определяет интервальный активный режим $([A_i], [b_i])$ переключаемой системы (2.1), описываемый линейной интервальной системой

$$\dot{x} = [A_i]x + [b_i]u. \quad (2.2)$$

Аналогично разделу 1.1. главы 1 интервальную систему (2.1) будем понимать как интервальное семейство обычных переключаемых линейных систем. При этом, под элементом интервального семейства (2.1) будем понимать переключаемую систему

$$\dot{x} = A_\sigma x + b_\sigma u. \quad (2.3)$$

задаваемую конечным множеством режимов (A_i, b_i) :

$$\dot{x} = A_i x + b_i u. \quad (2.4)$$

где $b_i \in [b_i]$, $A_i \in [A_i]$ ($i = 1, \dots, m$).

Реализацию управления u для системы (2.1) будем далее понимать как реализацию этого управления для каждого элемента интервального семейства (2.1).

Решением уравнения состояния фиксированного элемента (2.3) интервального семейства (2.1) при заданном управлении u , переключающем сигнале $\sigma \in S_{\tau, \gamma}$ и начальном условии $x(0) = x_0$ называем вектор-функцию $x(t)$, являющуюся непрерывным кусочно-дифференцируемым решением линейной нестационарной системы

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x + b_{\sigma(t)}u, \quad x(0) = x_0. \quad (2.5)$$

При этом любое решение системы (2.1) однозначно задается фиксированным

элементом семейства (2.1), заданным управлением u , переключающим сигналом $\sigma \in S_{\tau, \gamma}$ и начальным условием $x(0) = x_0$.

В настоящем разделе формулируется задача стабилизации по состоянию системы (2.1) цифровым статическим регулятором.

При замыкании по состоянию переключаемой линейной системы (2.1) цифровым регулятором получаем непрерывно-дискретную замкнутую систему, которая описывается с помощью дифференциально-разностных уравнений. Приведем эти уравнения.

Аналогично разделу 1.1, линейный цифровой регулятор в форме статической обратной связи по состоянию зададим: периодом квантования по времени $T > 0$, дискретным регулятором вида

$$u[lT] = -k^T x[lT] \quad (2.6)$$

и формирующим элементом (в форме фиксатора нулевого порядка)

$$u(t) = \sum_{j=0}^{\infty} u[jT] S(t - jT), \quad S(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, T], \\ 0, & t \notin [0, T]. \end{cases} \quad (2.7)$$

Здесь $u[\cdot]$ — дискретная функция, определенная на последовательности $\{lT\}_{l=0}^{\infty}$ ($l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$). При этом $u[lT]$ — выходной сигнал регулятора.

Замыкая систему (2.1) регулятором (2.6)-(2.7), получаем замкнутую интервальную непрерывно-дискретную (дифференциально-разностную) систему

$$\dot{x}(t) = [A_{\sigma}]x(t) + [b_{\sigma}] \sum_{j=0}^{\infty} (-k^T x(jT)) S(t - jT), \quad \sigma \in S_{\tau, \gamma}, \quad \sigma(\cdot) \in I. \quad (2.8)$$

Систему (2.8) можно переписать в более удобном виде

$$\dot{x}(t) = [A_{\sigma}]x(t) + [b_{\sigma}](-k^T x[lT]), \quad \sigma \in S_{\tau, \gamma}, \quad \sigma(\cdot) \in I \quad (2.9)$$

при условии, что моменты времени t и lT согласованы, т.е.

$$lT \leq t < (l+1)T.$$

В силу данного условия, символ ∞ в системе (2.8) может быть заменён на l

$$\dot{x}(t) = [A_\sigma]x(t) + [b_\sigma] \sum_{j=0}^{\infty} (-k^T x(jT)) S(t - jT), \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma}, \quad \sigma(\cdot) \in I. \quad (2.10)$$

Решением системы (2.8) при заданном начальном условии $x(0) \in \mathbb{R}^n$ и заданном переключающем сигнале $\sigma \in S_{\tau,\gamma}$ считаем непрерывно-дискретную функцию $x(t)$, $t \in [lT; (l+1)T]$, $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Уточним теперь задачу цифровой стабилизации.

Задача 2.1 Для переключаемой интервальной линейной системы (2.1) необходимо построить цифровой регулятор вида (2.6)-(2.7), обеспечивающий глобальную равномерную асимптотическую устойчивость (см. главу 1) замкнутой непрерывно-дискретной системы (2.10).

2.1.2. Переход к дискретной модели

Сформулированную задачу стабилизации будем решать, используя подход, представленный в разделе 1.1 главы 1, заключающийся в переходе от исходной непрерывной переключаемой системы к ее дискретной модели и последующем поиске стабилизирующего дискретного регулятора в виде статической обратной связи по состоянию для полученной дискретной системы.

Используем указанный подход для решения задачи 2.1 поиска цифрового регулятора (2.6)-(2.7), стабилизирующего переключаемую интервальную систему (2.1).

По аналогии с разделом 1.1 главы 1 рассмотрим теперь для системы (2.1), на входе которой используется фиксатор нулевого порядка (2.7), дискретную переключаемую параметрически неопределённую систему следующего вида

$$x[(l+1)T] = \{A_\sigma^*\}x[lT] + \{b_\sigma^*\}u[lT], \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma}, \quad (2.11)$$

где

$$\{A_i^*\} = \{e^{A_i T} \mid A_i \in [A_i]\}, \quad \{b_i^*\} = \left\{ \int_0^T e^{A_i \xi} d\xi b_i : A_i \in [A_i], b_i \in [b_i] \right\}. \quad (2.12)$$

Определение 2.1. Дискретную переключаемую параметрически неопределённую систему (2.11), замкнутую регулятором (2.6)

$$x[(l+1)T] = (\{A_\sigma\} - \{b_\sigma\}k^T)x[lT], \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma} \quad (2.13)$$

будем называть *точной дискретной моделью* системы (2.8).

Далее рассмотрим вопрос о согласованности свойства устойчивости систем (2.9) и (2.13). Используя результаты главы 1, можно утверждать справедливость следующей теоремы.

Теорема 2.1. *Непрерывно-дискретная переключаемая интервальная система (2.9), замкнутая регулятором (2.6), ГРАУ тогда и только тогда, когда глобально равномерно асимптотически устойчива и дискретная переключаемая интервальная система (2.13).*

Доказательство теоремы 2.1 аналогично доказательству теоремы 1.2 главы 1.

Таким образом, поставленная задача 2.1, в соответствии с теоремой 2.1, может быть сведена к задаче стабилизации по состоянию дискретной переключаемой параметрически неопределённой системы (2.11) дискретным регулятором (2.6).

2.1.3. Синтез цифрового сверхстабилизатора

Для того чтобы искать дискретный стабилизатор (2.6) для системы (2.11) необходимо сначала найти параметры этой системы, то есть множества $\{A_i^*\}$ и $\{b_i^*\}$. Как уже отмечалось в разделе 1.1. главы 1, данная задача достаточно сложна и поэтому был предложен следующий подход: вместо задачи стабилизации системы (2.11) будем решать задачу стабилизации другой системы, являющейся ее интервальным расширением.

Определение 2.2. Дискретную переключаемую интервальную систему вида

$$x[(l+1)T] = [\Lambda_\sigma^*]x[lT] + [\mu_\sigma^*]u[lT], \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma}, \sigma(\cdot) \in I \quad (2.14)$$

будем называть *интервальным расширением* системы (2.11), если для неё выполнены условия

$$\{A_i^*\} \subseteq [\Lambda_i], \quad \{b_i^*\} \subseteq [\mu_i] \quad \text{при каждом } i \in \{1, \dots, m\}. \quad (2.15)$$

При этом, дискретную переключаемую замкнутую систему

$$x[(l+1)T] = ([\Lambda_\sigma^*] - [\mu_\sigma^*]k^T)x[lT], \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma}. \quad (2.16)$$

будем называть *интервальным расширением* системы (2.13).

Обоснованием предложенного подхода является следующая теорема, доказательство которой следует из результатов раздела 1.1 главы 1.

Теорема 2.2. *Пусть дискретная переключаемая интервальная система (2.16) является интервальным расширением системы (2.13) и при этом является ГРАУ. Тогда глобально равномерно асимптотически устойчива и дискретная переключаемая система (2.13).*

Из теорем 2.1 и 2.2 следует важный вывод о том, что если регулятор (2.6) стабилизирует какое-либо интервальное расширение системы (2.11), то он решает и задачу цифровой стабилизации системы (2.1). Метод построения интервального расширения системы (2.11) аналогично представлен в разделе 1.1. Дискретную переключаемую интервальную систему, полученную указанным методом, будем обозначать следующим образом

$$x[(l+1)T] = [\Lambda_\sigma^*]x[lT] + [\mu_\sigma^*]u[lT], \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma}. \quad (2.17)$$

Тогда

$$x[(l+1)T] = ([\Lambda_\sigma^*] - [\mu_\sigma^*]k^T)x[lT], \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma} \quad (2.18)$$

— соответствующая замкнутая система, представляющая интервальное расширение системы (2.13).

В соответствии с теоремой 2.2, задачу стабилизации системы (2.11) регулятором вида (2.6) можно свести теперь к решению задачи стабилизации этим же регулятором дискретной переключаемой интервальной линейной системы (2.18).

Итак, будем рассматривать далее задачу стабилизации замкнутой дискретной переключаемой системы (2.18).

Как известно, регулятор, стабилизирующий переключаемую систему, должен стабилизировать каждый режим этой системы в отдельности. В силу того, что рассматриваемая задача стабилизации переключаемой системы (2.1) предполагает ненаблюдаемость переключающего сигнала $\sigma(t)$ (т.е. в каждый момент времени t неизвестно, какой из режимов переключаемой системы является активным), то синтез соответствующего цифрового регулятора целесообразно свести к задаче об одновременной стабилизации [1; 21; 41; 63] конечного семейства дискретных интервальных объектов

$$x[(l+1)T] = [\Lambda_i^*]x[lT] + [\mu_i^*]u[lT], \quad i = 1, \dots, m \quad (2.19)$$

единым регулятором вида (2.6).

Регулятор (2.6) будем называть *одновременно стабилизирующим* для семейства объектов (2.19), если он обеспечивает робастную устойчивость [87, с. 197] каждой замкнутой интервальной системы из семейства

$$x[(l+1)T] = ([\Lambda_i^*] - [\mu_i^*]k^T)x[lT], \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.20)$$

Основная сложность, связанная с использованием одновременно стабилизирующих регуляторов для стабилизации переключаемых систем, заключается в том, что устойчивость каждого режима переключаемой системы является лишь необходимым, но не достаточным условием ее устойчивости [90]. Но в случае, если одновременно стабилизирующий регулятор обеспечивает монотонность переходных процессов замкнутых этим регулятором систем, то тогда он

обеспечивает и устойчивость переключаемой системы при произвольных переключениях [90]. Известно, что таким свойством обладает регулятор, обеспечивающий сверхустойчивость замкнутых им систем [65; 87, с. 105].

Говорят, что дискретная система

$$x[(l+1)T] = Ax[(l+1)T]$$

является сверхустойчивой, если ее матрица удовлетворяет следующему условию

$$\|A\|_1 < 1.$$

Здесь $\|A\|_1 = \max_{p=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{pj}|$ (такие матрицы также называют дискретно сверхустойчивыми). Известно, что для любого решения сверхустойчивой системы выполняется неравенство [87, с. 105]

$$\|x[lT]\| \leq \theta^l \|x[0]\|,$$

где $\theta = \|A\|_1$. Из приведенной оценки следует, что норма любого решения дискретной сверхустойчивой системы монотонно стремится к нулю при $l \rightarrow \infty$.

Будем называть дискретные интервальные системы (2.20) *робастно сверхустойчивыми*, если любая матрица

$$M \in ([\Lambda_i^*] - [\mu_i^*]k^T), \quad i = 1 \dots, m$$

является сверхустойчивой.

На основании вышесказанного можно сформулировать следующую теорему, сводящую задачу одновременной сверхстабилизации дискретной переключаемой интервальной линейной системы (2.17) регулятором (2.6) к задаче одновременной сверхстабилизации семейства дискретных интервальных объектов (2.19) регулятором того же типа.

Теорема 2.3. Пусть регулятор (2.6) обеспечивает робастную сверхустойчивость дискретных интервальных объектов (2.20), т.е. решает задачу одновременной сверхстабилизации для семейства (2.19). Тогда этот регулятор обеспечивает ГРАУ дискретной переключаемой интервальной системы (2.18).

Перейдем теперь к изложению метода построения одновременно сверхстабилизирующего регулятора вида (2.6) для семейства объектов (2.19).

Далее будем использовать следующие представления для замкнутых интервальных систем семейства (2.20)

$$x[(l+1)T] = [M_i](k)x[lT], \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.21)$$

где $[M_i](k) = [\Lambda_i^*] - [\mu_i^*]k^T$; $[M_i](k) = ([m_{pj}^{(i)}](k))$, $[\Lambda_i^*] = ([\lambda_{pj}^{(i)}])$, $[\mu_i^*] = ([\mu_p^{(i)}])$, $p, j = 1, \dots, n$.

Для удобства, вместо обозначений

$$[m_{pj}^{(i)}](k) = [\underline{m}_{pj}^{(i)}(k), \overline{m}_{pj}^{(i)}(k)], \quad [\lambda_{pj}^{(i)}] = [\underline{\lambda}_{pj}^{(i)}, \overline{\lambda}_{pj}^{(i)}], \quad [\mu_p^{(i)}] = [\underline{\mu}_p^{(i)}, \overline{\mu}_p^{(i)}] \quad (2.22)$$

будем использовать следующие:

$$[m_{pj}^{(i)}](k) = [m_{pj,0}^{(i)}(k), m_{pj,1}^{(i)}(k)], \quad [\lambda_{pj}^{(i)}] = [\lambda_{pj,0}^{(i)}, \lambda_{pj,1}^{(i)}], \quad [\mu_p^{(i)}] = [\mu_{p,0}^{(i)}, \mu_{p,1}^{(i)}], \quad (2.23)$$

где

$$m_{pj,0}^{(i)}(k) = \min\{\lambda_{pj,0}^{(i)} - \mu_{p,0}^{(i)}k_j, \lambda_{pj,0}^{(i)} - \mu_{p,1}^{(i)}k_j\}, \quad (2.24)$$

$$m_{pj,1}^{(i)}(k) = \max\{\lambda_{pj,1}^{(i)} - \mu_{p,0}^{(i)}k_j, \lambda_{pj,1}^{(i)} - \mu_{p,1}^{(i)}k_j\}. \quad (2.25)$$

Для того чтобы выписать условие робастной сверхустойчивости семейства интервальных матриц $[M_i](k)$ ($i = 1, \dots, m$), введем вспомогательное множество $\Gamma = \{\gamma^{(\nu)}\}_{\nu=1, \dots, 2^n}$, где $\gamma^{(\nu)} = (\gamma_1^{(\nu)}, \dots, \gamma_n^{(\nu)})$ — всевозможные упорядоченные наборы длины n из нулей и единиц, т.е. $\gamma_j^{(\nu)} \in \{0; 1\}$.

Тогда условие робастной сверхустойчивости семейства интервальных матриц $[M_i](k)$ ($i = 1, \dots, m$) можно записать следующим образом

$$\max_{i=1, \dots, m} \max_{p \in \{1, \dots, n\}} \max_{\gamma^{(\nu)} \in \Gamma} \left\{ \sum_{j=1}^n |m_{pj, \gamma_j^{(\nu)}}^{(i)}(k)| \right\} < 1. \quad (2.26)$$

Представим коэффициенты $m_{pj,0}^{(i)}(k)$ и $m_{pj,1}^{(i)}(k)$ в следующем виде

$$m_{pj,0}^{(i)}(k) = \lambda_{pj,0}^{(i)} - \frac{(\mu_{p,0}^{(i)} + \mu_{p,1}^{(i)})k_j}{2} - \frac{|\mu_{p,1}^{(i)}k_j - \mu_{p,0}^{(i)}k_j|}{2},$$

$$m_{pj,1}^{(i)}(k) = \lambda_{pj,1}^{(i)} - \frac{(\mu_{p,0}^{(i)} + \mu_{p,1}^{(i)})k_j}{2} + \frac{|\mu_{p,1}^{(i)}k_j - \mu_{p,0}^{(i)}k_j|}{2}; \quad j = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Вводя вспомогательные переменные ρ , $r_{pj,0}^{(i)}$, $r_{pj,1}^{(i)}$ ($j = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, m}$), условие сверхустойчивости (2.26) можно переписать так

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho < 1, \\ \sum_{j=1}^n r_{pj, \gamma_j^{(\nu)}}^{(i)} \leq \rho, \\ m_{pj,0}^{(i)}(k) \leq r_{pj,0}^{(i)}, \\ m_{pj,0}^{(i)}(k) \geq -r_{pj,0}^{(i)}, \\ m_{pj,1}^{(i)}(k) \leq r_{pj,1}^{(i)}, \\ m_{pj,1}^{(i)}(k) \geq -r_{pj,1}^{(i)}, \\ j = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m}, \quad \nu = \overline{1, 2^n}. \end{array} \right. \quad (2.27)$$

Заметим, что левая часть полученной системы неравенств все еще содержит модули. Вводя дополнительные переменные $l_{pj}^{(i)}$ ($j = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, m}$), получаем систему линейных неравенств относительно переменных ρ , $r_{pj,0}^{(i)}$, $r_{pj,1}^{(i)}$, k_j ($j = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, m}$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho < 1, \\ \sum_{j=1}^n r_{pj, \gamma_j^{(\nu)}}^{(i)} \leq \rho, \\ \lambda_{pj,0}^{(i)} - \frac{(\mu_{p,0}^{(i)} + \mu_{p,1}^{(i)})k_j}{2} - \frac{l_{pj}^{(i)}}{2} \leq r_{pj,0}^{(i)}, \\ \lambda_{pj,0}^{(i)} - \frac{(\mu_{p,0}^{(i)} + \mu_{p,1}^{(i)})k_j}{2} - \frac{l_{pj}^{(i)}}{2} \geq -r_{pj,0}^{(i)}, \\ \lambda_{pj,1}^{(i)} - \frac{(\mu_{p,0}^{(i)} + \mu_{p,1}^{(i)})k_j}{2} + \frac{l_{pj}^{(i)}}{2} \leq r_{pj,1}^{(i)}, \\ \lambda_{pj,1}^{(i)} - \frac{(\mu_{p,0}^{(i)} + \mu_{p,1}^{(i)})k_j}{2} + \frac{l_{pj}^{(i)}}{2} \geq -r_{pj,1}^{(i)}, \\ \mu_{p,1}^{(i)}k_j - \mu_{p,0}^{(i)}k_j \leq l_{pj}^{(i)}, \\ \mu_{p,1}^{(i)}k_j - \mu_{p,0}^{(i)}k_j \geq -l_{pj}^{(i)}, \\ j = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m}, \quad \nu = \overline{1, 2^n}. \end{array} \right. \quad (2.28)$$

Если система (2.28) имеет решение, то все интервальные матрицы $[M_i](k)$ ($i = 1, \dots, m$) робастно сверхустойчивы. Вопрос о существовании решения системы линейных неравенств (2.28) можно свести к решению задачи линейного

программирования

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \rho, \\ \sum_{j=1}^n r_{pj,\gamma_j^{(\nu)}}^{(i)} \leq \rho, \\ \lambda_{pj,0}^{(i)} - \frac{(\mu_{p,0}^{(i)} + \mu_{p,1}^{(i)})k_j}{2} - \frac{l_{pj}^{(i)}}{2} \leq r_{pj,0}^{(i)}, \\ \lambda_{pj,0}^{(i)} - \frac{(\mu_{p,0}^{(i)} + \mu_{p,1}^{(i)})k_j}{2} - \frac{l_{pj}^{(i)}}{2} \geq -r_{pj,0}^{(i)}, \\ \lambda_{pj,1}^{(i)} - \frac{(\mu_{p,0}^{(i)} + \mu_{p,1}^{(i)})k_j}{2} + \frac{l_{pj}^{(i)}}{2} \leq r_{pj,1}^{(i)}, \\ \lambda_{pj,1}^{(i)} - \frac{(\mu_{p,0}^{(i)} + \mu_{p,1}^{(i)})k_j}{2} + \frac{l_{pj}^{(i)}}{2} \geq -r_{pj,1}^{(i)}, \\ \mu_{p,1}^{(i)}k_j - \mu_{p,0}^{(i)}k_j \leq l_{pj}^{(i)}, \\ \mu_{p,1}^{(i)}k_j - \mu_{p,0}^{(i)}k_j \geq -l_{pj}^{(i)}, \\ j = \overline{1, n}, p = \overline{1, n}, i = \overline{1, m}, \nu = \overline{1, 2^n}. \end{array} \right. \quad (2.29)$$

Представим задачу линейного программирования (2.29) в матрично-векторном виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \min fX \\ \tilde{A}X \leq h \end{array} \right. \quad (2.30)$$

$$f = (\underbrace{0 \dots 0}_n \underbrace{0 \dots 0}_{3n^2 \cdot m} 1);$$

$$X = (k_1 \dots k_n X^{(1)} \dots X^{(m)} \sigma)^\top;$$

$$X^{(i)} = (r_{11}^{(i)} \dots r_{1n}^{(i)} \dots r_{n1}^{(i)} \dots r_{nn}^{(i)} l_{11}^{(i)} \dots l_{1n}^{(i)} \dots l_{n1}^{(i)} \dots l_{nn}^{(i)}), \quad r_{pj}^{(i)} = (r_{pj,0}^{(i)} r_{pj,1}^{(i)});$$

$$h = (h^{(1)} \dots h^{(m)})^\top;$$

$$h^{(i)} = (\underbrace{0 \dots 0}_{2^n} \underbrace{h_{11}^{(i)} \dots h_{1n}^{(i)} \dots h_{n1}^{(i)} \dots h_{nn}^{(i)}}_{4n^2} \underbrace{0 \dots 0}_{2n^2}),$$

$$h_{pj}^{(i)} = (-\lambda_{pj,0}^{(i)} \lambda_{pj,0}^{(i)} - \lambda_{pj,1}^{(i)} \lambda_{pj,1}^{(i)});$$

$$\tilde{A} \in \mathbb{R}^{(6n^2 + 2^n n)m \times (n+1+3m \cdot n^2)}.$$

Используя вышеприведенные рассуждения, мы можем сформулировать достаточное условие одновременной сверхстабилизации семейства интервальных объектов (2.19).

Теорема 2.4. Пусть задача линейного программирования (2.30) имеет решение $X = (k \ X^{(m)} \ \rho)^\top$, причем $\rho < 1$. Тогда регулятор $u = -k^T x[lT]$ обеспечивает робастную сверхустойчивость каждого объекта из семейства (2.20).

Теперь, основываясь на теоремах 2.1 – 2.4, можно сформулировать основную теорему, содержащую конструктивное достаточное условие существования дискретного регулятора (2.6), обеспечивающего ГРАУ непрерывно-дискретной переключаемой интервальной системы (2.9).

Теорема 2.5. Пусть задача линейного программирования (2.30) имеет решение $X = (k \ X^{(m)} \ \rho)^\top$, причем $\rho < 1$. Тогда регулятор $u = -k^T x[lT]$ обеспечивает ГРАУ непрерывно-дискретной переключаемой интервальной системы (2.9).

2.2. Численная реализация алгоритма поиска сверхстабилизатора для переключаемых интервальных систем

В предыдущем разделе были изложены теоретические основы решения данной задачи, которые предполагают использование методов линейного программирования. В связи с этим, для численной реализации указанного подхода необходимо привлечение пакетов прикладной математики [91].

В данном разделе предлагается описание реализации алгоритма построения регулятора для переключаемой интервальной системы в пакете Matlab, который является наиболее универсальным продуктом для данного исследования. Данный программный пакет предназначен для аналитического и численного решения различных математических задач, в том числе динамических систем, включая дискретные, непрерывные и гибридные модели. Главная его особенность – хорошая проработанность и отлаженность всех средств и методов программирования. Следует отметить, что пакет MATLAB ориентирован

в первую очередь на обработку массивов данных (матриц, векторов и т.п.). В настоящем исследовании это позволяет существенно повысить эффективность процедур, работающих с указанными типами данных, по сравнению с языками программирования “общего назначения” (Pascal, C и т.п.), и существенно отличает MATLAB от других систем, таких, как MAPLE, MathCAD, Mathematica.

2.2.1. Основные шаги алгоритма поиска регулятора

При численной реализации метода поиска сверхстабилизирующего регулятора для переключаемой системы (2.1) можно выделить следующие основные шаги.

1. *Переход от переключаемой интервальной непрерывно-дискретной системы (2.8) к интервальному расширению переключаемой интервальной дискретной системы (2.13).* Указанное интервальное расширение, подробно рассмотренное в разделе 2.1,

$$x[(l+1)T] = [M_i](k)x[lT], \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.31)$$

строится согласно формулам (2.21), (1.37), (1.39)-(1.40), (1.43)-(1.44), (1.32)-(1.35), (2.22)-(2.23), (2.24)-(2.25):

2. *Поиск векторов параметра k цифрового сверхстабилизатора для системы (2.31).* В предыдущем разделе показано, что задачу поиска цифрового сверхстабилизатора $u = -k^T x$ для системы (2.31) можно свести к решению задачи линейного программирования (2.29) относительно переменных ρ , $r_{pj,0}^{(i)}$, $r_{pj,1}^{(i)}$, k_j , $j = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, m}$, $l_{pj}^{(i)}$, $j = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, m}$.

Задача линейного программирования (2.29) решается в матрично-векторном виде (2.30) с использованием соответствующих численных процедур пакета Matlab.

Разработанный программный модуль SFMCS (Stabilizing Feedback and Modeling Closed System) для расчета стабилизирующей линейной статической обратной связи для переключаемых интервальных системы второго порядка ($n = 2$)

с двумя режимами ($m = 2$) описан в приложении Б. Данный программный модуль включает в себя две основные процедуры: расчёт стабилизирующей обратной связи (шаги 1 и 2 данного раздела) и моделирование замкнутой системы с рассчитанным вектором обратной связи.

Результатами работы процедуры SF (Stabilizing Feedback) и MCS (Modeling Closed System), представленной в приложении Б, являются:

- 1) полученные коэффициенты вектора обратной связи $k^T = (k_1, k_2)$;
- 2) график нормы решения замкнутой переключающей системы;
- 3) график переключающего сигнала.

2.2.2. Поиск стабилизирующего регулятора с использованием программного модуля SFMCS

В качестве примера рассматривается построение обратной связи для системы второго порядка ($n = 2$) с двумя режимами ($\sigma = 2$) со следующими интервальными матрицами:

$$[A_1] = \begin{pmatrix} [-1; 2] & [-1; 1] \\ [0; 2] & [1; 2] \end{pmatrix}, \quad [b_1] = \begin{pmatrix} [1; 2] \\ [1; 2] \end{pmatrix},$$

$$[A_2] = \begin{pmatrix} [-1; 0] & [-1; 0] \\ [0; 3] & [-1; 3] \end{pmatrix}, \quad [b_2] = \begin{pmatrix} [-2; -1] \\ [-2; -1] \end{pmatrix}.$$

В результате работы процедуры SF найдены интервальные матрицы

$$[\Lambda_1] = \begin{pmatrix} [-4.09; 7.38] & [-0.71; 2.71] \\ [-1.95; 7.38] & [1.57; 7.38] \end{pmatrix},$$

$$[\Lambda_2] = \begin{pmatrix} [-0.46; 1.67] & [-0.46; 1.67] \\ [-11.12; 20.08] & [-14.64; 20.08] \end{pmatrix},$$

$$[\mu_1] = \begin{pmatrix} [-2.93; 9.82] \\ [-0.65; 12.77] \end{pmatrix}, \quad [\mu_2] = \begin{pmatrix} [-4.83; 0.10] \\ [-25.44; 13.32] \end{pmatrix},$$

$$[M_1] = \begin{pmatrix} [-2.46; -1.15] & [-7.10; 2.21] \\ [-5.38; -1.29] & [-5.38; 2.23] \end{pmatrix},$$

$$[M_2] = \begin{pmatrix} [-0.46; 1.67] & [-0.46; 1.67] \\ [-11.12; 20.08] & [-14.64; 20.08] \end{pmatrix}.$$

В результате решения задачи линейного программирования получен следующий результат:

$$r_{11,0}^{(1)} = 4.09, r_{11,1}^{(1)} = 7.38, r_{12,0}^{(1)} = 32.78, r_{12,1}^{(1)} = 0.71,$$

$$r_{21,0}^{(1)} = 2.71, r_{21,1}^{(1)} = 7.38, r_{22,0}^{(1)} = 32.78, r_{22,1}^{(1)} = 7.38,$$

$$l_{11}^{(1)} = 0.30, l_{12}^{(1)} = 0.22, l_{21}^{(1)} = 0.11, l_{22}^{(1)} = 0.07,$$

$$r_{11,0}^{(2)} = 0.46, r_{11,1}^{(2)} = 1.67, r_{12,0}^{(2)} = 38.49, r_{12,1}^{(2)} = 0.46,$$

$$r_{21,0}^{(2)} = 11.12, r_{21,1}^{(2)} = 20.08, r_{22,0}^{(2)} = 20.08, r_{22,1}^{(2)} = 20.08,$$

$$l_{11}^{(2)} = 0.16, l_{12}^{(2)} = 0.12, l_{21}^{(2)} = 0.11, l_{22}^{(2)} = 0.07,$$

максимальное значение целевой функции $\rho = 0.9771 < 1$, при этом параметры искомого регулятора $k^T = (1.3828, 0.9744)^\top$.

С использованием процедуры MCS получены коэффициенты режимов случайно выбранного элемента интервального семейства переключаемой системы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1.27 & -0.21 \\ 1.48 & 1.65 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1.04 \\ 1.09 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -0.82 & -0.96 \\ 2.11 & 0.10 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1.17 \\ -1.30 \end{pmatrix},$$

а также построены графики переключающего сигнала σ (см. рис. 2.1) и поведения нормы соответствующего решения замкнутой системы при начальных условиях $x_1(0) = 0, x_2(0) = 1$ (см. рис. 2.2).

Из графика на рисунке 2.2 видно, что норма произвольного решения замкнутой системы при найденной обратной связи k , стремится к нулю и при том,

монотонно, что указывает на свойство сверхустойчивости замкнутой переключаемой системы.

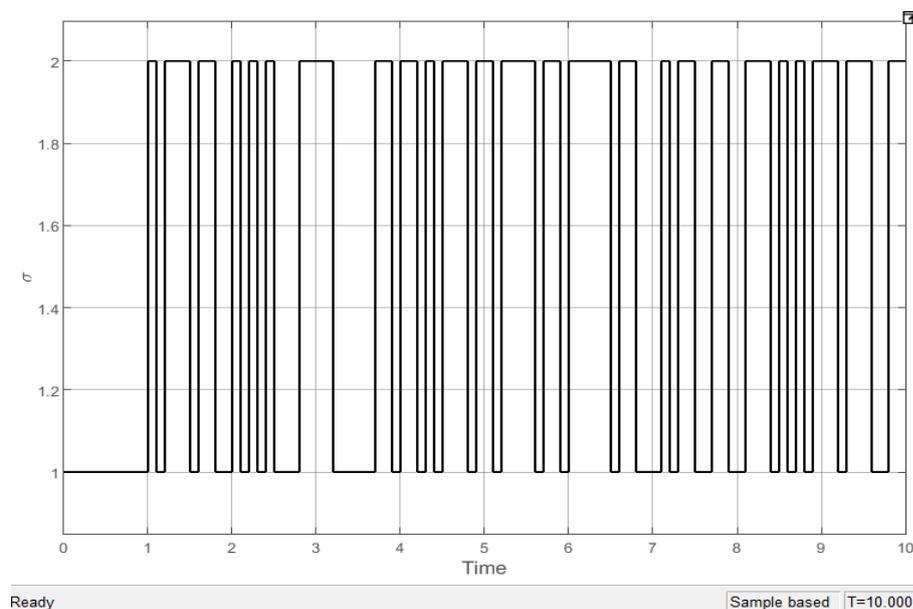


Рисунок 2.1. Переключающий сигнал.

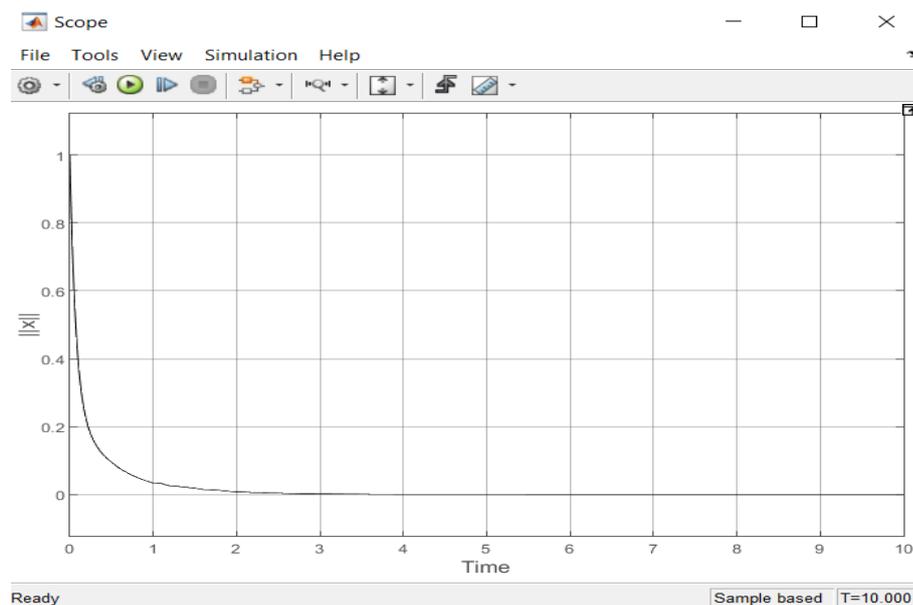


Рисунок 2.2. Поведение нормы решения замкнутой системы.

2.3. Выводы ко второй главе

В заключение отметим, что предложенный в настоящей главе метод сверхстабилизации переключаемой интервальной системы имеет важное преимуще-

ство, заключающееся в его конструктивности, т.е. в возможности рассчитать в явном виде стабилизирующую обратную связь и обеспечить монотонность переходных процессов в замкнутой системе.

Представленный в данной главе программный модуль SFMCS позволяет эффективно оценивать переходные процессы в замкнутой системе с использованием сверхстабилизирующего регулятора, в том числе и такую важную для исследования характеристику, как время регулирования. Также можно отметить простоту работы программной реализации, включая ввод данных, предполагающий возможность исследования стабилизируемости произвольной переключаемой системы второго порядка. Однако, модулю SFMCS можно придать еще большую гибкость, например, предусмотреть возможность устанавливать различное число режимов переключаемой системы. Такая задача может стать предметом дальнейшей работы в данном направлении.

Построение систем стабилизации для переключаемых интервальных объектов с режимами различных порядков

В данной главе рассматривается задача стабилизации по состоянию скалярных по входу переключаемых интервальных линейных систем, режимы функционирования которых могут иметь различные динамические порядки. Фактически, данная глава является продолжением исследований по стабилизации параметрически неопределенных переключаемых систем, развиваемых в главе 1 и главе 2. Предлагаемые в настоящей главе подходы к решению указанной задачи основываются на методе расширения динамического порядка [74, с. 205] и существенно опираются на результаты главы 1 и работы [92]. Отметим, что в [92] введена необходимая терминология и достаточно подробно описана процедура применения метода расширения динамического порядка для построения алгоритма стабилизации по состоянию для переключаемых линейных систем с режимами различных динамических порядков.

3.1. Основные определения и постановка задачи

Итак, в соответствии с терминологией работы [92], рассматривается переключаемая интервальная линейная система, скалярная относительно входа, и заданная следующим уравнением состояния

$$\dot{x}^{(\sigma)} = [A_\sigma]x^{(\sigma)} + [b_\sigma]u, \quad \sigma \in S(\Omega), \quad Z(\Omega) = \{Z_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j} : (ij) \in \Omega\}, \quad (3.1)$$

где $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow I = \{1, \dots, m\}$ — кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал) с конечным числом разрывов (переключений) на любом конечном промежутке, I — множество индексов, нумерующих режимы функционирования си-

системы (3.1); $[A_\sigma] = [A] \circ \sigma$ — композиция отображения $[A] : I \rightarrow \{[A_1], \dots, [A_m]\}$ ($[A_i] \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$) и переключающего сигнала σ , $[b_\sigma] = [b] \circ \sigma$ — аналогичная композиция для отображения $[b] : I \rightarrow \{[b_1], \dots, [b_m]\}$ ($[b_i] \in \mathbb{R}^{n_i}$); пары матриц $([A_i], [b_i])$, $i = 1, \dots, m$, определяют режимы функционирования системы (3.1); $u \in \mathbb{R}^1$ — управляющий скалярный вход; $\Omega \subseteq I \times I$ — множество, определяющее допустимые переключения между режимами, т.е. если пара индексов (ij) принадлежит множеству Ω , то возможно переключение с j -го на i -й режим функционирования; $S(\Omega)$ — множество всех допустимых переключающих сигналов σ , т.е. если $\sigma \in S(\Omega)$, то для любой его точки разрыва \tilde{t} такой, что

$$\lim_{t \rightarrow \tilde{t}-0} \sigma(t) = j, \quad \lim_{t \rightarrow \tilde{t}+0} \sigma(t) = i,$$

выполняется условие $(ij) \in \Omega$.

Под i -м режимом функционирования системы (3.1) понимается динамическая система

$$\dot{x}^{(i)} = [A_i]x^{(i)} + [b_i]u. \quad (3.2)$$

При этом предполагается, что, в общем случае, режимы имеют различные динамические порядки, определяемые векторами состояния

$$x^{(i)} = (x_{j_1}, \dots, x_{j_{n_i}}) \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad j_1 < \dots < j_{n_i}, \quad \{j_1, \dots, j_{n_i}\} \subseteq \{1, \dots, n\},$$

где $n = \max\{j_{n_1}, \dots, j_{n_m}\}$. Таким образом, $\mathbb{R}^{n_i} \subseteq \mathbb{R}^n$ для каждого $i = 1, \dots, m$. Обозначим упорядоченный набор индексов $\{j_1, \dots, j_{n_i}\}$ через Γ_i , а множество $\{1, \dots, n\}$ через Γ . Далее будем обозначать через $\tilde{x}^{(i)}$ вектор из \mathbb{R}^n , все компоненты которого с индексами из множества $\Gamma \setminus \Gamma_i$ равны нулю. Заметим, что если для различных режимов (i -го и j -го) совпадают наборы переменных состояния, то в этом случае $\Gamma_i = \Gamma_j$.

В силу кусочной непрерывности функции $\sigma(t)$, переходы между режимами осуществляются скачкообразно, а движение переключаемой системы в каждый момент времени определяется активным режимом. Поскольку различные режимы могут отличаться динамическими порядками и набором переменных

состояний, то необходимо обеспечить преемственность [28, с. 18] между каждой парой соседних режимов. Условия преемственности задает множество $Z(\Omega)$, являющееся множеством матриц преемственности $Z_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$, $(ij) \in \Omega$. Каждая такая матрица Z_{ij} определяет линейное преобразование конечного состояния предыдущего j -го режима $x^{(j)}(t_{ij})$ в начальное состояние текущего i -го режима $x^{(i)}(t_{ij})$ (t_{ij} — момент переключения между j -м и i -м режимами), т.е.

$$x^{(i)}(t_{ij}) = Z_{ij}x^{(j)}(t_{ij}).$$

Более точно

$$x^{(i)}(t_{ij}) = \lim_{t \rightarrow t_{ij}+0} x^{(i)}(t), \quad x^{(j)}(t_{ij}) = \lim_{t \rightarrow t_{ij}-0} x^{(j)}(t).$$

Заметим, что систему (3.1) также можно интерпретировать как интервальное семейство переключаемых линейных систем

$$\dot{x}^{(\sigma)} = A_{\sigma}x^{(\sigma)} + b_{\sigma}u \quad (3.3)$$

с режимами (A_i, b_i)

$$\dot{x}^{(i)} = A_i x^{(i)} + b_i u \quad (3.4)$$

где $A_i \in [A_i]$, $b_i \in [b_i]$. Далее каждую такую систему (3.3) будем называть элементом интервального семейства (3.1).

Определение 3.1. Решением системы (3.1) при фиксированных режимах (A_i, b_i) ($A_i \in [A_i]$, $b_i \in [b_i]$, $i = 1, \dots, m$), заданном управлении u , переключающем сигнале $\sigma \in S(\Omega)$ и начальном условии $x^{(\sigma(0))}(0) \in \mathbb{R}^{n_{\sigma(0)}}$ будем называть кусочно-дифференцируемую [93, с. 477] вектор-функцию $x(t) \in \mathbb{R}^n$, теряющую дифференцируемость и непрерывности разве что в моменты переключения режимов и совпадающую на каждом промежутке активности i -го режима ($i \in I$) с вектор-функцией $\tilde{x}^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^n$. При этом вектор-функция $\tilde{x}^{(i)}(t)$ порождается решением линейной системы (3.4) на соответствующем промежутке активности i -го режима $[t_{ij}, t_{li}]$ с начальными условиями

$$x^{(i)}(t_{ij}) = Z_{ij}x^{(j)}(t_{ij}),$$

где $x^{(j)}(t_{ij})$ — конечное значение j -го режима на предыдущем промежутке времени.

При замыкании системы (3.1) регулятором в форме статической обратной связи $u = u(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$), его действие на каждый режим определяется следующими системами

$$\dot{x}^{(i)} = [A_i]x^{(i)} + [b_i]u(\tilde{x}^{(i)}), \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.5)$$

Определение 3.2. Будем говорить, что система (3.1), замкнутая регулятором в форме статической обратной связи $u = u(x)$ ($u(0) = 0$) *глобально равномерно асимптотически устойчива*, если для любого переключающего сигнала $\sigma \in S(\Omega)$ и произвольного начального условия $x^{(\sigma(0))}(0) \in \mathbb{R}^{n_{\sigma(0)}}$ для соответствующего решения $x(t) \in \mathbb{R}^n$ выполнено:

$$\|x(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Замечание 3.1. Систему (3.1) будем называть ГРАУ, если она глобально равномерно асимптотически устойчива в соответствии с определением 3.2 при $u(0) \equiv 0$.

Задача 3.1. Для переключаемой интервальной линейной системы вида (3.1) требуется построить регулятор в форме статической обратной связи по состоянию $u = u(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n, u(0) = 0$), обеспечивающий ГРАУ соответствующей замкнутой системы.

В настоящем разделе стабилизирующий регулятор, решающий сформулированную задачу, будем искать в виде линейной стационарной обратной связи

$$u(x) = -k^T x, \quad (3.6)$$

где $k \in \mathbb{R}^n$ — постоянный вектор параметров обратной связи. В связи с этим, далее под замкнутой переключаемой системой будем подразумевать систему с реализованным управлением вида (3.6).

3.2. Приведение к единому динамическому порядку

В соответствии с методом расширения динамического порядка [74, с. 205], аналогично работе [92], сопоставим системе (3.1) переключаемую интервальную линейную систему порядка n

$$\dot{x} = [\tilde{A}_\sigma]x + [\tilde{b}_\sigma]u, \quad \sigma \in S(\Omega), \quad \tilde{Z}(\Omega) = \{\tilde{Z}_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n} : (ij) \in \Omega\}, x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.7)$$

для которой режимы функционирования задаются уравнениями

$$\dot{x} = [\tilde{A}_i]x + [\tilde{b}_i]u, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.8)$$

где $[\tilde{A}_\sigma] = [\tilde{A}] \circ \sigma$ — композиция отображения $[\tilde{A}] : I \rightarrow \{[\tilde{A}_1], \dots, [\tilde{A}_m]\}$ ($[\tilde{A}_i] \in \mathbb{R}^{n \times n}$) и переключающего сигнала σ , $[\tilde{b}_\sigma] = [\tilde{b}] \circ \sigma$ — аналогичная композиция для отображения $[\tilde{b}] : I \rightarrow \{[\tilde{b}_1], \dots, [\tilde{b}_m]\}$ ($[\tilde{b}_i] \in \mathbb{R}^n$);

$$[\tilde{A}_i] = T_i[A_i]T_i^\top + \hat{T}_i\hat{A}_i\hat{T}_i^\top, \quad [\tilde{b}_i] = T_i[b_i]. \quad (3.9)$$

Здесь \hat{A}_i — некоторые фиксированные устойчивые матрицы порядка $n - n_i$, $T_i \in \mathbb{R}^{n \times n_i}$ — матрица, содержащая $n - n_i$ нулевых строк и n_i строк с одной единицей, при этом единицы расположены только в позициях (j_k, k) , $k = 1, \dots, n_i$, $j_k \in \Gamma_{n_i}$, $\hat{T}_i \in \mathbb{R}^{n \times (n - n_i)}$ — матрица, содержащая n_i нулевых строк и $n - n_i$ строк с одной единицей, при этом единицы расположены только в позициях (j_k, k) , $k = 1, \dots, n_i$, $j_k \in \Gamma \setminus \Gamma_i$.

Замечание 3.2. Здесь и далее мы используем определение для арифметических операций над интервальными матрицами в соответствии с замечанием 1.4 главы 1 [86; 94, с. 46].

Множество матриц преемственности $\tilde{Z}(\Omega)$ для системы (3.7) формируется на основе соответствующего множества $Z(\Omega)$ системы (3.1) следующим образом

$$\tilde{Z}_{ij} = T_i Z_{ij} T_j^\top \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.10)$$

для всех $(ij) \in \Omega$. Множество $\tilde{Z}(\Omega)$ обеспечивает для системы (3.7) преемственность между каждой парой соседних режимов аналогично тому, как это было определено выше для системы (3.1).

Заметим, что для любой матрицы $Z_{ij} \in Z(\Omega)$ и соответствующей ей матрицы $\tilde{Z}_{ij} \in \tilde{Z}(\Omega)$ также выполняется равенство

$$Z_{ij} = T_i^\top \tilde{Z}_{ij} T_j. \quad (3.11)$$

Переключаемую систему (3.7) будем называть *динамическим расширением* системы (3.1). Рассмотрим теперь систему (3.7), замкнутую обратной связью $u = -k^T x$

$$\dot{x} = ([\tilde{A}_\sigma] - [\tilde{b}_\sigma]k^T)x, \quad \sigma \in S(\Omega), \quad \tilde{Z}(\Omega) = \{\tilde{Z}_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n} : (ij) \in \Omega\}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.12)$$

Определение 3.3. Решением системы (3.12) при фиксированных режимах $(\tilde{A}_i, \tilde{b}_i)$ ($\tilde{A}_i \in [\tilde{A}_i], \tilde{b}_i \in [\tilde{b}_i], i = 1, \dots, m$), переключающем сигнале $\sigma \in S(\Omega)$ и начальном условии $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть кусочно-дифференцируемое решение $x(t)$ линейной нестационарной системы

$$\dot{x} = (\tilde{A}_{\sigma(t)} - \tilde{b}_{\sigma(t)}k^T)x, \quad x(0) = x_0. \quad (3.13)$$

На основании соотношений (3.9) и леммы 1 работы [92] можно сформулировать следующее утверждение.

Лемма 3.1. Для любых фиксированных режимов (A_i, b_i) ($A_i \in [A_i], b_i \in [b_i], i = 1, \dots, m$), заданного управления $u = -k^T x$, переключающего сигнала $\sigma \in S(\Omega)$ и произвольного вектора $x_0 \in \mathbb{R}^n$, решение $x(t)$ системы (3.1) с начальным условием $x^{(\sigma(0))}(0) = T_{\sigma(0)}^\top x_0$ совпадает с решением соответствующей системы (3.12) для режимов

$$\tilde{A}_i = T_i A_i T_i^\top + \hat{T}_i \hat{A}_i \hat{T}_i^\top, \quad \tilde{b}_i = T_i b_i \quad (3.14)$$

с начальным условием $x(0) = T_{\sigma(0)} T_{\sigma(0)}^\top x_0$ при произвольных устойчивых матрицах $\hat{A}_i \in \mathbb{R}^{(n_i - n_i) \times (n - n_i)}$.

Доказательство. При замыкании системы (3.1) обратной связью $u(x) = -k^T x$ ($x \in \mathbb{R}^n$), получаем замкнутую систему следующего вида

$$\dot{x}^{(\sigma)} = [A_\sigma]x^{(\sigma)} + [b_\sigma](-k^T T_\sigma x^{(\sigma)}), \quad \sigma \in S(\Omega), \quad Z(\Omega) = \{Z_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}\}$$

или

$$\dot{x}^{(\sigma)} = ([A_\sigma] - [b_\sigma]k^T T_\sigma)x^{(\sigma)}, \quad \sigma \in S(\Omega), \quad Z(\Omega) = \{Z_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}\}. \quad (3.15)$$

Зафиксируем переключающий сигнал $\sigma \in S(\Omega)$, векторы $k, x_0 \in \mathbb{R}^n$, режимы (A_i, b_i) ($A_i \in [A_i], b_i \in [b_i]$) и устойчивые матрицы \hat{A}_i ($i = 1, \dots, m$). Теперь сравним решение системы

$$\dot{x}^{(\sigma)} = (A_\sigma - b_\sigma k^T T_\sigma)x^{(\sigma)} \quad (3.16)$$

при начальном условии $x^{\sigma(0)} = T_{\sigma(0)}^T x_0$ с решением системы

$$\dot{x} = (\tilde{A}_\sigma - \tilde{b}_\sigma k^T)x. \quad (3.17)$$

при начальном условии $x(0) = T_{\sigma(0)} T_{\sigma(0)}^T x_0$. Обозначим соответствующее решение системы (3.16) через $x^*(t) \in \mathbb{R}^n$, а решение системы (3.17) через $x^{**}(t) \in \mathbb{R}^n$. Покажем, что решение $x^*(t)$ тождественно совпадает с решением $x^{**}(t)$.

Пусть $\{t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$ — моменты переключения, обусловленные сигналом σ .

Представим систему (3.17) в виде двух независимых подсистем

$$\begin{cases} \dot{x}^{(\sigma)} = (A_\sigma - b_\sigma k^T T_\sigma)x^{(\sigma)} \\ \dot{\hat{x}}^{(\sigma)} = \hat{A}_\sigma \hat{x}^{(\sigma)} \\ x^{(\sigma)}(0) = T_{\sigma(0)}^T x_0 \\ \hat{x}^{(\sigma)}(0) = T_{\sigma(0)} T_{\sigma(0)}^T x_0, \end{cases} \quad (3.18)$$

здесь вектор $\{x^{**}\} = \{x^\sigma, \hat{x}^\sigma\}$ (фигурные скобки обозначают множество компонент вектора $x^{**}(t)$). Очевидно, что решение первой подсистемы $\dot{x}^{(\sigma)} = (A_\sigma - b_\sigma k^T T_\sigma)x^{(\sigma)}$ совпадает с решением системы (3.16) на промежутке $[0, t_1)$, а решение второй подсистемы $\dot{\hat{x}} = \hat{A}_\sigma \hat{x}$ тождественно равно нулю на этом промежутке. Следовательно, $\{x^{**}(t)\} = \{x^{(\sigma)}(t), 0\}$ и $\{x^*(t)\} = \{x^{(\sigma)}(t), 0\}$, то есть $x^{**}(t) = x^*(t)$ при $t \in [0, t_1)$. Далее, $\{x^{**}(t_1^-)\} = \{x^{(\sigma)}(t_1), 0\}$ и $\{x^*(t_1^-)\} = \{x^{(\sigma)}(t_1), 0\}$.

Здесь

$$\{x^{**}(t_1^-)\} = \lim_{t \rightarrow t_1^-} x^{**}(t), \quad \{x^*(t_1^-)\} = \lim_{t \rightarrow t_1^-} x^*(t).$$

Пусть $\sigma(0) = p, \sigma(t_1) = q$. Тогда начальным условием для системы (3.16) на промежутке $[t_1, t_2)$ будет $x^*(t_1) = T_q^T x^{(q)}(t_1)$, где $x^{(q)}(t_1) = Z_{qp} x^{(p)}(t_1)$. А для системы (3.17) начальным условием на промежутке $[t_1, t_2)$ будет $x^{**}(t_1) = \tilde{Z}_{qp} x^{**}(t_1^-)$, где $\tilde{Z}_{qp} = T_q Z_{qp} T_p^T$. Таким образом, начальное условие будет $x^{**}(t_1) = T_q Z_{qp} T_p^T x^{**}(t_1^-)$. Поскольку $T_p^T x^{**}(t_1^-) = x^{(p)}(t_1)$ и, следовательно $Z_{qp} T_p^T x^{**}(t_1^-) = x^{(q)}(t_1)$, то $\{x^{**}(t_1)\} = \{x^{(q)}(t_1), 0\}$. Тогда получаем $x^{**}(t_1) = x^*(t_1)$.

Рассмотрим теперь решения систем (3.16) и (3.17) на промежутке $[t_1; t_2)$. Систему (3.17) на данном промежутке можно представить в следующем виде

$$\begin{cases} \dot{x}^{(q)} = (A_q - b_q k^T T_q) x^{(q)} \\ \dot{\hat{x}}^{(q)} = \hat{A}_q \hat{x}^{(q)} \\ x^{(q)}(t_1) = T_q^T x^{**}(t_1) \\ \hat{x}^{(q)}(t_1) = T_q T_q^T x^{**}(t_1), \end{cases} \quad (3.19)$$

а систему (3.16) как

$$\begin{cases} \dot{x}^{(q)} = (A_q - b_q k^T T_q) x^{(q)} \\ x^{(q)}(t_1) = T_q^T x^*(t_1). \end{cases} \quad (3.20)$$

Заметим, что система (3.20) совпадает с первой подсистемой из (3.19) и её начальными условиями, при этом $\hat{x}^{(q)}(t_1) = 0$. Следовательно, решение первой подсистемы системы (3.19) на промежутке $[t_1, t_2)$ совпадает с решением системы (3.16), а решение второй подсистемы системы (3.19) тождественно равно нулю на промежутке $[t_1, t_2)$.

Таким образом, $\{x^{**}(t_2^-)\} = \{x^{(q)}(t_1^-), 0\}$ и $\{x^*(t_2^-)\} = \{x^{(q)}(t_1^-), 0\}$ и, следовательно $x^{**}(t_2) = x^*(t_2)$. Проводя рассуждения, аналогичные вышеприведённым, можно утверждать, что решения систем (3.15) и (3.12) совпадают на всех последующих промежутках. Лемма 3.1 доказана.

Определение 3.4. Будем говорить, что система (3.7), замкнутая обратной связью (3.6), является ГРАУ, если для любых $\sigma \in S(\Omega)$ и $x(0) \in \mathbb{R}^n$ для соответствующего решения $x(t) \in \mathbb{R}^n$ системы (3.12) выполнено:

$$\|x(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty.$$

При этом, обратную связь (3.6) называем *стабилизирующей*. Следующее утверждение о связи свойств устойчивости замкнутых систем (3.1) и (3.7) является следствием Леммы 3.1.

Лемма 3.2. Пусть линейная стационарная обратная связь $u = -k^T x$ ($k \in \mathbb{R}^n$) обеспечивает ГРАУ для системы (3.7). Тогда эта же обратная связь будет обеспечивать глобальную равномерную асимптотическую устойчивость и для системы (3.1).

Таким образом, лемма 3.2 позволяет свести задачу стабилизации системы (3.1) к задаче стабилизации соответствующей расширенной системы (3.7).

Замечание 3.3. Требование устойчивости матриц \hat{A}_i является необходимым для стабилизируемости расширенной переключаемой системы, поскольку процедура расширения динамического порядка такова, что получаемые расширенные режимы не являются вполне управляемыми (поскольку содержат неуправляемые подсистемы, задаваемые матрицами \hat{A}_i).

3.3. Достаточное условие стабилизируемости

Запишем замкнутую систему (3.12) в виде следующей интервальной системы

$$\dot{x} = [\tilde{\Lambda}_\sigma(k)]x, \quad \sigma \in S(\Omega), \quad \tilde{Z}(\Omega) = \{\tilde{Z}_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n} : (ij) \in \Omega\}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.21)$$

Сформулируем теперь условия на вектор k , обеспечивающие ГРАУ системы (3.21). Для этого вначале определим понятие вершинных матриц для произвольной интервальной матрицы $[A]$.

Итак, поставим в соответствие матрице $[A] = ([a_{kj}, \bar{a}_{kj}])_{k,j=\overline{1,n}}$ параллело-
топ $P(A) = \prod_{k,j=\overline{1,n}} [a_{kj}, \bar{a}_{kj}]$ в пространстве \mathbb{R}^{n^2} . Каждому вектору $q = (q_1, \dots, q_{n^2}) \in$
 $P(A)$ сопоставим матрицу

$$A(q) = \begin{pmatrix} q_1 & \dots & q_n \\ q_{n+1} & \dots & q_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n(n-1)+1} & \dots & q_{n^2} \end{pmatrix}.$$

Тогда $[A] = \{A(q) : q \in P(A)\}$. Пусть $G(A) = \{q_A^{(\nu)}\}_{\nu=1,\dots,2^{n^2}}$ — множество всех
вершин параллелоотопа $P(A)$, откуда следует, что $P(A) = \text{Conv} \{q_A^{(\nu)}\}_{\nu=1,\dots,2^{n^2}}$, а
значит и $[A] = \text{Conv} \{A(q_A^{(\nu)})\}_{\nu=1,\dots,2^{n^2}}$. Матрицы $A(q_A^{(\nu)})$ называют
вершинными матрицами для интервальной матрицы $[A]$.

Теорема 3.1. Пусть

1) при некотором векторе $k \in \mathbb{R}^n$ существует единая функция Ляпунова
 $V(x) = x^\top Hx$ ($H \succ 0$) для семейства систем

$$\dot{x} = Q_l^{(i)} x, \quad i = 1, \dots, m, \quad l = 1, \dots, 2^{n^2}, \quad (3.22)$$

где $Q_l^{(i)}$ — вершинные матрицы i -го режима соответствующей системы (3.21);

2) для матриц преемственности из множества $\tilde{Z}(\Omega)$ системы (3.21)
выполняются неравенства

$$H - \tilde{Z}_{ij}^\top H \tilde{Z}_{ij} \succeq 0, \quad (ij) \in \Omega \quad (3.23)$$

Тогда система (3.21) является ГРАУ.

Действительно, в работе [92] показано, что если выполнено условие (3.23),
то в моменты смены режимов, когда могут происходить скачкообразные изме-
нения вектора состояния системы (3.21), определяемые матрицами преемствен-
ности \tilde{Z}_{ij} , значение функции $V(x)$ не возрастает, т.е.

$$V(\tilde{Z}_{ij}x) \leq V(x) \quad (3.24)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $(ij) \in \Omega$.

Далее, пусть переключаемая система

$$\dot{x} = \Lambda_\sigma(k)x \quad (3.25)$$

является некоторым элементом интервального семейства (3.21). Рассмотрим производную

$$\dot{V} \Big|_{(i)}(x) = x^T (\Lambda_i(k)^T H + H \Lambda_i(k)) x.$$

общей квадратичной функции Ляпунова $V(x) = x^T H x$ в силу произвольного i -го режима

$$\dot{x} = \Lambda_i(k)x, \quad \Lambda_i(k) \in [\tilde{\Lambda}_i(k)] \quad (3.26)$$

системы (3.25).

Заметим, что $\Lambda_i(k) = \sum \alpha_l Q_l^{(i)}$, где $\alpha_l \geq 0$, $\sum \alpha_l = 1$, $Q_l^{(i)}$ — вершинные матрицы для интервальной матрицы $[\tilde{\Lambda}_i(k)]$. Тогда $\dot{V} \Big|_{(i)}(x) = x^T ((\sum \alpha_l Q_l^{(i)})^T H + H (\sum \alpha_l Q_l^{(i)})) x = \sum \alpha_l (x^T ((Q_l^{(i)})^T H + H Q_l^{(i)}) x) \leq \sum \alpha_l \lambda_l^{(i)} \|x\|^2$, где $\lambda_l^{(i)}$ — максимальное собственное значение матрицы $(Q_l^{(i)})^T H + H Q_l^{(i)}$.

Пусть

$$-\lambda = \max_{i,l} \lambda_l^{(i)}. \quad (3.27)$$

Здесь максимум берётся по всем вершинным матрицам всех интервальных матриц $[\tilde{\Lambda}_i(k)]$. Очевидно, что $-\lambda < 0$.

Тогда получаем следующую оценку

$$\dot{V} \Big|_{(i)}(x) \leq \sum \alpha_l \lambda_l^{(i)} \|x\|^2 \leq -\lambda \|x\|^2 \sum \alpha_l = -\lambda \|x\|^2 < 0 \quad \text{при } x \neq 0. \quad (3.28)$$

Теперь предположим, что при выполнении условий теоремы 3.1 соответствующая система (3.21) все же не является ГРАУ. Тогда, в силу (3.28), для некоторого переключающего сигнала $\hat{\sigma} \in S(\Omega)$ и начального условия $\hat{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ найдется такое $\mu > 0$, что для любого $t^* > 0$ будет существовать хотя бы одно решение $x(t)$ системы (3.21) (при заданных $\hat{\sigma}$, $\hat{x}(0)$), которое не попадает в область $\omega_0 = \{x : V(x) < \mu\}$ при $t \in [0; t^*]$. Пусть r — радиус некоторого шара с

центром в нуле и принадлежащего области ω_0 . Зафиксируем теперь произвольное $t^* > 0$. Тогда, в соответствии с вышеуказанным предположением, найдется решение $\hat{x}(t)$ системы (3.21) (при заданных $\hat{\sigma}$, $\hat{x}(0)$), для которого выполняется неравенство $\|\hat{x}(t)\| > r$ для всех $t \in [0; t^*]$. Пусть $\hat{x}(t)$ является решением некоторой системы вида (3.25).

Обозначим через t_1, t_2, \dots, t_l все моменты переключения системы (3.25) на промежутке $[0; t^*]$, обусловленные переключающим сигналом $\hat{\sigma}(t)$. Пусть

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_l < t_{l+1} = t^*.$$

Пусть теперь на некотором промежутке $[t_j; t_{j+1}]$ активным является i -й режим (3.26). Тогда, в силу (3.28) и выбора константы r , на этом промежутке будет выполняться оценка

$$\dot{V}(\hat{x}(t)) < -\lambda r^2.$$

Теперь, учитывая (3.24), оценим значение $V(\hat{x}(t^*))$.

$$\begin{aligned} V(\hat{x}(t^*)) &= V(\hat{x}(0)) + (V(\hat{x}(t_1)) - V(\hat{x}(0))) + (V(\hat{x}(t_2)) - V(\tilde{Z}_{\sigma(t_1)\sigma(0)}\hat{x}(t_1))) + \\ &\quad + (V(\tilde{Z}_{\sigma(t_1)\sigma(0)}\hat{x}(t_1) - V(\hat{x}(t_1))) + (V(\hat{x}(t_3)) - V(\tilde{Z}_{\sigma(t_2)\sigma(t_1)}\hat{x}(t_2))) + \\ &\quad + (V(\tilde{Z}_{\sigma(t_2)\sigma(t_1)}\hat{x}(t_2) - V(\hat{x}(t_2))) + \dots + (V(\hat{x}(t^*)) - V(\tilde{Z}_{\sigma(t_l)\sigma(t_{l-1})}\hat{x}(t_l))) + \\ &\quad + (V(\tilde{Z}_{\sigma(t_l)\sigma(t_{l-1})}\hat{x}(t_l) - V(\hat{x}(t_l))) \leq V(\hat{x}(0)) + (V(\hat{x}(t_1)) - V(\hat{x}(0))) + \\ &\quad + (V(\hat{x}(t_2)) - V(\tilde{Z}_{\sigma(t_1)\sigma(0)}\hat{x}(t_1))) + (V(\hat{x}(t_3)) - V(\tilde{Z}_{\sigma(t_2)\sigma(t_1)}\hat{x}(t_2))) + \dots \\ &\quad \dots + (V(\hat{x}(t^*)) - V(\tilde{Z}_{\sigma(t_l)\sigma(t_{l-1})}\hat{x}(t_l))) = V(\hat{x}(0)) + \int_0^{t_1} \dot{V} \Big|_{\sigma(0)} \hat{x}(\tau) d\tau + \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} \dot{V} \Big|_{\sigma(t_1)} \hat{x}(\tau) d\tau + \int_{t_2}^{t_3} \dot{V} \Big|_{\sigma(t_2)} \hat{x}(\tau) d\tau + \dots + \int_{t_l}^{t^*} \dot{V} \Big|_{\sigma(t_l)} \hat{x}(\tau) d\tau \leq \\ &\quad \leq V(\hat{x}(0)) + \int_0^{t_1} (-\lambda r^2) d\tau + \int_{t_1}^{t_2} (-\lambda r^2) d\tau + \int_{t_2}^{t_3} (-\lambda r^2) d\tau + \dots \\ &\quad \dots + \int_{t_l}^{t^*} (-\lambda r^2) d\tau = V(\hat{x}(0)) - \lambda r^2 t^*. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили

$$V(\hat{x}(t^*)) \leq V(\hat{x}(0)) - \lambda r^2 t^*.$$

Поскольку константа λr^2 не зависит от t^* , то при достаточно больших t^* может оказаться, что $V(\hat{x}(t^*)) < 0$, что противоречит положительной определенности функции $V(x)$. Полученное противоречие доказывает теорему 3.1.

Лемма 3.2 и теорема 3.1, фактически, дают конструктивный алгоритм для проверки, является ли данная обратная связь $u = k^T x$ ($k \in \mathbb{R}^n$) стабилизирующей для системы (3.1). Указанный алгоритм позволяет разрабатывать различные численные процедуры поиска вектора k стабилизирующей обратной связи для системы (3.1). Это могут быть либо обычные сеточные методы поиска либо методы интеллектуального поиска на множестве параметров обратной связи.

3.4. Методы построения стабилизирующего регулятора

Рассмотрим теперь вопрос об аналитическом алгоритме поиска вектора k стабилизирующей обратной связи. Выпишем в явном виде интервальные матрицы $[\tilde{\Lambda}_i(k)]$ ($i = 1, \dots, m$), являющиеся интервальными оболочками матричных семейств

$$\{\tilde{A}_i - \tilde{b}_i k^T : \tilde{A}_i \in [\tilde{A}_i], \tilde{b}_i \in [\tilde{b}_i]\}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Используя правила выполнения интервальных операций (сложения, вычитания и умножения) [86; 94], вышеупомянутые интервальные матрицы можно описать следующим образом

$$[\tilde{\Lambda}_i(k)] = ([\lambda_{pr}^{(i)}(k_r)])_{p,r=1}^n,$$

где k_r — r -тая компонента вектора $k \in \mathbb{R}^n$,

$$\lambda_{pr}(k_r) = \begin{cases} [\underline{a}_{pr}^{(i)} - \bar{b}_i^p k_r, \bar{a}_{pr}^{(i)} - \underline{b}_i^p k_r], & \text{если } k_r \geq 0, \\ [\bar{a}_{pr}^{(i)} - \underline{b}_i^p k_r, \underline{a}_{pr}^{(i)} - \bar{b}_i^p k_r], & \text{если } k_r \leq 0. \end{cases} \quad (3.29)$$

Здесь b_i^p — p -тая компонента вектора \tilde{b}_i .

3.4.1. Случай точечных векторов b_i

Рассмотрим случай, когда для всех векторов $[b_i]$, определяющих режимы системы (3.1) выполняются условия $\underline{b}_i = \overline{b}_i$, то есть когда эти векторы являются "точечными". В этом случае поиск вектора параметров k стабилизирующей обратной связи можно свести к решению системы линейных матричных неравенств. Действительно, если векторы $[b_i]$ являются точечными, то, в силу (3.29)

$$[\tilde{\Lambda}_i(k)] = [\tilde{A}_i] - \tilde{b}_i k^T = ([\underline{a}_{pr}^{(i)} - b_i^p k_r, \overline{a}_{pr}^{(i)} - b_i^p k_r])_{p,r=1}^n$$

и вершинные матрицы $Q_i^{(l)}$ для интервальной матрицы $[\tilde{\Lambda}_i(k)]$ имеют вид

$$Q_i^{(l)} = \tilde{A}_i^{(l)} - \tilde{b}_i k^T,$$

где $\tilde{A}_i^{(l)}$ — вершинные матрицы для $[\tilde{A}_i]$. Тогда условие существования общей квадратичной функции Ляпунова для семейства систем (3.22) равносильна разрешимости системы матричных неравенств

$$\begin{cases} (\tilde{A}_i^{(l)} - \tilde{b}_i k^T)^T H + H(\tilde{A}_i^{(l)} - \tilde{b}_i k^T) \prec 0, & i = 1, \dots, m, \quad l = 1, \dots, 2^{n^2}, \\ H \succ 0, \end{cases} \quad (3.30)$$

которая является билинейной относительно неизвестной матрицы H и вектора k . Известно [62], что конгруэнтное преобразование с матрицей H^{-1} переводит эту пару неравенств в линейные матричные неравенства относительно новых матриц $\hat{H} = H^{-1}$ и $\hat{k}^T = k^T H^{-1}$:

$$\begin{cases} \hat{H}(\tilde{A}_i^{(l)})^T + \tilde{A}_i^{(l)} \hat{H} - (\hat{k} \tilde{b}_i^T + \tilde{b}_i \hat{k}^T) \prec 0, & i = 1, \dots, m, \\ \hat{H} \succ 0, & l = 1, \dots, 2^{n^2}. \end{cases} \quad (3.31)$$

Таким образом, если система линейных матричных неравенств (3.31) имеет решения \hat{H}_* , \hat{k}_* , то система (3.21), для которой

$$[\tilde{\Lambda}_\sigma(k)] = [\tilde{A}_\sigma] - \tilde{b}_\sigma k^T, \quad (3.32)$$

при $k^T = \hat{k}_*^T \hat{H}_*^{-1}$ удовлетворяет пункту 1 условия теоремы 3.1.

Далее, в работе [92] показано, что условие

$$H - \tilde{Z}_{ij}^T H \tilde{Z}_{ij} \succeq 0, \quad (ij) \in \Omega \quad (3.33)$$

эквивалентно неравенству $V(x) - V(\tilde{Z}_{ij}x) \geq 0$ при $x \in \mathbb{R}^n$. Следовательно, требование пункта 2 условия теоремы 3.1 можно заменить условием (3.33). Применяя теперь к неравенствам (3.33) конгруэнтное преобразование с матрицей H^{-1} , получим

$$\hat{H} - \hat{H} \tilde{Z}_{ij}^T \hat{H}^{-1} \tilde{Z}_{ij} \hat{H} \succeq 0. \quad (3.34)$$

Заметим, что матрица в левой части неравенства (3.34) является дополнением по Шуру матрицы \hat{H} . А тогда, в соответствии с [62, с. 19] неравенство (3.34) эквивалентно системе матричных неравенств

$$\begin{cases} \hat{H} \succ 0, \\ \begin{pmatrix} \hat{H} & \tilde{Z}_{ij} \hat{H} \\ \hat{H} \tilde{Z}_{ij}^T & \hat{H} \end{pmatrix} \succeq 0. \end{cases} \quad (3.35)$$

Тогда получаем, что система матричных неравенств, составленная из неравенств (3.31) и (3.34), эквивалентна системе линейных матричных неравенств

$$\begin{cases} \hat{H}(\tilde{A}_i^l)^T + \tilde{A}_i^l \hat{H} - (\hat{k} \tilde{b}_i^T + \tilde{b}_i \hat{k}^T) \prec 0, & i = 1, \dots, m, \\ \hat{H} \succ 0, & l = 1, \dots, 2^{n^2}, \\ \begin{pmatrix} \hat{H} & \tilde{Z}_{ij} \hat{H} \\ \hat{H} \tilde{Z}_{ij}^T & \hat{H} \end{pmatrix} \succeq 0. \end{cases} \quad (3.36)$$

Таким образом, в случае, когда векторы $[b_i]$ системы (3.1) являются точечными, то поиск стабилизирующей обратной связи для такой системы можно свести к решению системы линейных матричных неравенств (3.36). А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. Пусть для системы (3.1) вида

$$\dot{x}^{(\sigma)} = [A_\sigma]x^{(\sigma)} + b_\sigma u, \quad \sigma \in S(\Omega), \quad Z(\Omega) = \{Z_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j} : (ij) \in \Omega\}, \quad (3.37)$$

разрешима система линейных матричных неравенств (3.36) относительно матрицы \hat{H} и вектора \hat{k} ($\tilde{A}_i^{(l)}$ – вершинные матрицы для $[\tilde{A}_i]$).

Тогда обратная связь $u = -k^T x$ является стабилизирующей для системы (3.37), где $k^T = \hat{k}_*^T \hat{H}_*^{-1}$ (пара (\hat{k}_*, \hat{H}_*) – решение (3.36)).

3.4.2. Общий случай

Полученное в предыдущем разделе достаточное условие устойчивости системы (3.12) позволяет сформулировать конструктивное достаточное условие существования стабилизирующей обратной связи $u = -k^T x$ для системы (3.7) в случае, когда $[b_i] = b_i, i = 1 \dots m$. Однако, оно не позволяет сформулировать эффективный алгоритм нахождения вектора k стабилизирующей обратной связи в случае интервальных векторов $[b_i]$.

В данном разделе предлагается конструктивный алгоритм поиска стабилизирующего регулятора вида $u = -k^T x$ для переключаемой интервальной системы (3.7) с режимами одинаковых порядков n и импульсными эффектами (скачкообразное изменение текущего состояния системы при переключениях). Этот алгоритм основан на некотором достаточном условии существования стабилизирующей обратной связи по состоянию $u = -k^T x$ для системы (3.7).

Рассмотрим вначале задачу стабилизации интервальной системы

$$\dot{x} = [A]x + [b]u \quad (3.38)$$

с помощью обратной связи $u = -k^T x$. Здесь $[A] = ([a_{ij}, \bar{a}_{ij}])_{i,j=1}^n, [b] = ([b^i, \bar{b}^i])_{i=1}^n$.

Указанную задачу можно переформулировать следующим образом: найти вектор

$$k^T = (k_1 \dots k_n)$$

такой, что для любого вектора параметров

$$w^T = (g \quad s),$$

где $g^T = (g_1 \dots g_{n^2})$, $s^T = (s_1 \dots s_n)$, $g_1 \in [\underline{a}_{11}, \bar{a}_{11}]$, \dots , $g_n \in [\underline{a}_{1n}, \bar{a}_{1n}]$, $g_{n+1} \in [\underline{a}_{21}, \bar{a}_{21}]$, \dots , $g_{2n} \in [\underline{a}_{2n}, \bar{a}_{2n}]$, \dots , $g_{n^2-n} \in [\underline{a}_{n1}, \bar{a}_{n1}]$, \dots , $g_{n^2} \in [\underline{a}_{nn}, \bar{a}_{nn}]$, $g_{n^2} \in [\underline{a}_{nn}, \bar{a}_{nn}]$, $s_1 \in [\underline{b}^1, \bar{b}^1]$, \dots , $s_n \in [\underline{b}^n, \bar{b}^n]$ система

$$\dot{x} = \Psi(w, k)x$$

с матрицей

$$\Psi(w, k) = \begin{pmatrix} g_1 - s_1 k_1 & \dots & g_n - s_1 k_n \\ g_{n+1} - s_2 k_1 & \dots & g_{2n} - s_2 k_n \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{n^2-n} - s_n k_1 & \dots & g_{n^2} - s_n k_n \end{pmatrix}$$

является асимптотически устойчивой.

Заметим, что множество матриц $\Psi(w, k)$ при каждом фиксированном $k \in \mathbb{R}^n$ и при всех возможных значениях вектора w образует выпуклое множество в пространстве $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Действительно, сопоставим матрице

$$\Psi(w, k) = (\psi_{ij}(w, k))_{i,j=1}^n$$

вектор

$$\psi^T(w, k) = (\psi_{11}(w, k) \dots \psi_{1n}(w, k)) \psi_{21}(w, k) \dots \psi_{2n}(w, k) \dots \psi_{n1}(w, k) \dots \psi_{nn}(w, k).$$

То есть вектор $\psi(w, k)$ фактически является "развёрткой" матрицы $\Psi(w, k)$ по строкам. Несложно заметить, что векторы $\psi(w, k)$ и w связаны следующим линейным соотношением

$$\psi(w, k) = \Theta(k)w, \tag{3.39}$$

где матрица $\Theta(k) \in \mathbb{R}^{(n^2+n) \times (n^2+n)}$

$$\Theta(k) = \begin{pmatrix} I_n & O_n & \dots & O_n & -k & \bar{o}_n & \dots & \dots & \bar{o}_n \\ O_n & I_n & \dots & \dots & \bar{o}_n & -k & \bar{o}_n & \dots & \bar{o}_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ O_n & \dots & O_n & I_n & \bar{o}_n & \dots & \dots & \bar{o}_n & -k \end{pmatrix}.$$

Здесь, I_n — единичная матрица порядка n , O_n — нулевая матрица порядка n , \bar{o}_n — нулевой вектор-столбец размерности n .

Введём следующие обозначения: $e_i^T = (0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0)$ — единичный вектор размерности n , i -ая компонента которого равна 1, $E_i = \begin{pmatrix} O_n \\ \vdots \\ O_n \\ I_n \\ O_n \\ \vdots \\ O_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2+n}$ —

единичный блочный вектор-столбец, i -ый блок которого — единичная матрица порядка n .

Используя формулу (3.39) и введённые обозначения, представим матрицу $\Psi(w, k)$ следующим образом:

$$\Psi(w, k) = \sum_{j=1}^n e_j \psi^T(w, k) E_j = \sum_{j=1}^n e_j w^T \Theta^T(k) E_j. \quad (3.40)$$

Теперь заметим, что множество D допустимых параметров w образует параллелотоп в пространстве \mathbb{R}^{n^2+n} , являющийся выпуклой оболочкой конечного набора его вершин p_i , т.е.

$$D = Conv\{p_i, i = \overline{1, 2^{n^2+n}}\}.$$

При этом вершины p_i представляются векторами, содержащими в качестве компонент всевозможные сочетания нижних и верхних границ соответствующих промежутков $[a_{ij}; \bar{a}_{ij}]$, $[b^i; \bar{b}^i]$.

Тогда любой $w \in D$ представляется в виде линейной комбинации

$$w = \sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i p_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum \lambda_i = 1 \quad (3.41)$$

Из (3.40) и (3.41) получаем

$$\Psi(w, k) = \sum_{j=1}^n e_j \left(\sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i p_i \right)^T \Theta^T(k) E_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i e_j p_i^T \Theta^T(k) E_j \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_i e_j p_i^T \Theta^T(k) E_j \right) = \sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^n e_j p_i^T \Theta^T(k) E_j \right).$$

Обозначим $\Psi_i(k) = \sum_{j=1}^n e_j p_i^T \Theta^T(k) E_j$. Таким образом получаем, что для любого $w \in D$

$$\Psi(w, k) \in \text{Conv}\{\Psi_i(k), i = \overline{1, 2^{n^2+n}}\} \quad (3.42)$$

Заметим, что каждую матрицу $\Psi_i(k)$ можно представить в виде $\Psi_i(k) = F_i - h_i k^T$, $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $h_i \in \mathbb{R}^n$. Сформулируем теперь достаточное условие существования стабилизирующей обратной связи для системы (3.38).

Теорема 3.3. Пусть система линейных матричных неравенств

$$\begin{cases} P F_i^T + F_i P + z h_i^T + h_i z^T < 0 \\ P > 0, \quad i = \overline{1, 2^{n^2+n}} \end{cases} \quad (3.43)$$

имеет решение (z_0, P_0) , $z_0 \in \mathbb{R}^n$, $P_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_0^T = P_0$. Тогда обратная связь $u = -k^T x$, где $k^T = -z_0^T P_0^{-1}$, стабилизирует систему (3.38).

Действительно, пусть система линейных матричных неравенств (3.43) имеет решение (z_0, P_0) и пусть $k^T = -z_0^T P_0^{-1}$.

Тогда

$$P_0 F_i^T + F_i P_0 + z_0 h_i^T + h_i z_0^T < 0 \quad (3.44)$$

Умножим неравенство (3.44) с двух сторон на положительно определённую матрицу P_0^{-1} . Имеем

$$F_i^T P_0^{-1} + P_0^{-1} F_i + P_0^{-1} z_0 h_i^T P_0^{-1} + P_0^{-1} h_i z_0^T P_0^{-1} < 0,$$

откуда

$$F_i^T P_0^{-1} + P_0^{-1} F_i - k h_i^T P_0^{-1} - P_0^{-1} h_i k^T < 0.$$

Таким образом,

$$(F_i - h_i k^T)^T P_0^{-1} + P_0^{-1} (F_i - h_i k^T) < 0 \quad (3.45)$$

Последнее неравенство означает, что системы

$$\dot{x} = (F_i - h_i k^T)x, \quad i = \overline{1, 2^{n^2+n}}$$

асимптотически устойчивы.

Рассмотрим теперь для произвольного $w \in D$ матрицу $\Psi(w, k)$. В силу (3.42)

$$\Psi(w, k) = \sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i \Psi_i(k), \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_i \lambda_i = 1$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Psi^T(w, k) P_0^{-1} + P_0^{-1} \Psi(w, k) &= \left(\sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i \Psi_i(k) \right)^T P_0^{-1} + P_0^{-1} \left(\sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i \Psi_i(k) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i (\Psi_i^T(k) P_0^{-1} + P_0^{-1} \Psi_i(k)). \end{aligned}$$

Теперь, учитывая, что $\lambda_i \geq 0$ и неравенство (3.45), получаем

$$\Psi^T(w, k) P_0^{-1} + P_0^{-1} \Psi(w, k) < 0$$

для положительно определённой матрицы P_0^{-1} . А это означает, что система

$$\dot{x} = \Psi(w, k)x$$

асимптотически устойчива. Таким образом, обратная связь $u = -k^T x$ стабилизирует систему (3.38). Теорема 3.3 доказана.

Вернёмся теперь к задаче стабилизации системы (3.7).

Основываясь на результатах предыдущего раздела и на рассуждениях, использованных при доказательстве вышеприведённой теоремы 3.3, можем сформулировать следующее достаточное условие глобальной равномерной асимптотической устойчивости системы (3.12).

Теорема 3.4. Пусть выполнены условия:

1. При некотором $k \in \mathbb{R}^n$ существует единая функция Ляпунова $V(x) = x^T H x$ ($H > 0$) для семейства систем

$$\dot{x} = \Psi_i^{(l)}(k)x, \quad i = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, 2^{n^2+n}},$$

где $\Psi_i^{(l)}(k) = \sum_{j=1}^n e_j (p_i^{(l)})^T \Theta^T(k) E_j$, $\text{Conv}\{p_i^{(l)}, l = \overline{1, 2^{n^2+n}}\} = D_i$ — множество допустимых векторов параметров w для i -го режима системы (3.7);

2. Для матриц преобладности из множества $\tilde{Z}(\Omega)$ системы (3.7) выполнены условия

$$\begin{pmatrix} H^{-1} & \tilde{Z}_{ij} H^{-1} \\ \tilde{Z}_{ij}^T H^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix} \geq 0$$

при всех $(i, j) \in \Omega$. Тогда система (3.12) является ГРАУ.

Из теорем 3.3 и 3.4, а также из результатов предыдущего раздела вытекает следующее достаточное условие существования стабилизирующей обратной связи для системы (3.7).

Теорема 3.5. Пусть для системы (3.7) разрешима система линейных мат-

ричных неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} P(F_i^{(l)})^T + F_i^{(l)}P + z(h_i^{(l)})^T + h_i^{(l)}z^T < 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, 2^{n^2+n}}, \\ P > 0, \\ \left(\begin{array}{cc} P & \tilde{Z}_{ij}P \\ P\tilde{Z}_{ij}^T & P \end{array} \right) \geq 0, \quad (i, j) \in \Omega, \end{array} \right. \quad (3.46)$$

где матрицы $F_i^{(l)}$ и вектор-столбцы $h_i^{(l)}$ таковы, что $\Psi_i^{(l)}(k) = F_i^{(l)} - h_i^{(l)}k^T$.

Тогда, если пара (z_0, P_0) — решение системы (3.46), то обратная связь $u = -k^T x$, где $k^T = -z_0^T P_0^{-1}$, является стабилизирующей для системы (3.7).

3.5. Выводы к третьей главе

В рамках задачи стабилизации по состоянию скалярных по входу переключаемых интервальных линейных систем, режимы функционирования которых могут иметь различные динамические порядки, предложен подход к построению стабилизирующего регулятора, основанный на методе расширения динамического порядка и решении систем линейных матричных неравенств. Предложен метод сведения задачи стабилизации переключаемой интервальной системы с режимами различных динамических порядков к задаче стабилизации переключаемой интервальной системы с режимами одинаковых порядков. Сформулировано и доказано достаточное условие существования стабилизирующего регулятора в форме статической обратной связи по состоянию для переключаемой интервальной системы в терминах разрешимости системы линейных матричных неравенств.

Стабилизация переключаемой системы регулятором переменной структуры

В данной главе рассматривается задача стабилизации переключаемой линейной интервальной системы с медленными переключениями, недоступными для наблюдения. Решение предлагается искать в классе регуляторов переменной структуры. Для обеспечения работоспособности такого регулятора необходимо построение наблюдателя переключающего сигнала, в качестве которого предлагается использовать нейросеть. В начале главы в качестве вспомогательного этапа получены некоторые теоретические результаты для построения нейросетевого регулятора переменной структуры для переключаемых линейных систем без интервальной неопределённости, на основе которых далее формулируются уже результаты для переключаемых интервальных систем.

4.1. Теоретические аспекты построения нейрорегулятора для переключаемых линейных систем

4.1.1. Постановка задачи

Рассматривается непрерывная скалярная переключаемая линейная система

$$\dot{x} = A_\sigma x + b_\sigma u, \quad \sigma \in S_\tau, \quad (4.1)$$

где $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow I = \{1, \dots, m\}$ — непрерывная справа кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал) с конечным числом разрывов (переключений) на любом конечном промежутке; S_τ — множество всех переключающих сигналов σ , для которых время между любыми двумя соседними переключениями не меньше τ ($\tau > 0$); I — множество индексов, нумерующих режимы функционирования

ния системы (4.1); $A_\sigma = A \circ \sigma$ — композиция отображения $A : I \rightarrow \{A_1, \dots, A_m\}$ ($A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$) и переключающего сигнала σ , $b_\sigma = b \circ \sigma$ — аналогичная композиция для отображения $b : I \rightarrow \{b_1, \dots, b_m\}$ ($b_i \in \mathbb{R}^n$); пары матриц (A_i, b_i) , $i = 1, \dots, m$, определяют режимы функционирования системы (4.1); $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^1$ — управляющий вход.

Задача 4.1 Требуется стабилизировать систему (4.1) в нулевом положении равновесия, т.е. построить обратную связь $u = u(x)$, обеспечивающую равномерную асимптотическую устойчивость соответствующей замкнутой системы.

Решение $x(t)$ системы (4.1) при фиксированных начальном условии $x(0)$ и переключающем сигнале $\sigma \in S_\tau$ определяем как решение линейной нестационарной системы с кусочно-постоянными коэффициентами следующего вида

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x + b_{\sigma(t)}u(x), \quad x(0) = x_0, \quad \sigma \in S_\tau. \quad (4.2)$$

Далее в настоящей главе для векторов будем рассматривать норму $\|x\| = \max_i |x_i|$, а для матриц, соответственно, $\|A\| = \max_i \sum_j |a_{ij}|$.

Известные подходы к решению сформулированной выше задачи стабилизации системы (4.1) с медленными переключениями можно разбить на две группы. К первой группе относятся методы, предполагающие построение единого регулятора для семейства динамических систем, включающего все различные режимы (A_i, b_i) переключаемой системы (4.1). Фактически, в этом случае речь идет о нахождении одновременно стабилизирующего регулятора для конечного семейства линейных систем. При этом данный регулятор должен не только обеспечивать устойчивость каждого режима системы (4.1), но и устойчивость траекторий этой системы при любом переключающем сигнале из множества S_τ . Одним из наиболее известных методов, позволяющих синтезировать подобные регуляторы, является метод квадратичной стабилизации, основанный на поиске регулятора в форме статической линейной обратной связи, обеспечивающего существование общей функции Ляпунова для системы (4.1), замкнутой этим

регулятором (см. раздел 1.1.5 главы 1). Популярность данного подхода, как было показано ранее (см. главу 1), обусловлена возможностью сведения задачи синтеза такого регулятора к задаче поиска решений системы линейных матричных неравенств, которая, в свою очередь, допускает численное решение. Также можно отметить метод сверхстабилизации (см. раздел 2.1.3 главы 2), предполагающий поиск единой статической обратной связи, обеспечивающей свойство сверхустойчивости для всех замкнутых режимов системы (4.1). В этом случае поиск стабилизатора может быть сведен к решению задачи линейного программирования (см. раздел 2.1.3 главы 2). Отметим, что упомянутые методы имеют свои достоинства и недостатки. К достоинствам можно отнести тот факт, что регуляторы, найденные в соответствии с методом квадратичной стабилизации или методом сверхстабилизации, на самом деле, решают более общую задачу, а именно, обеспечивают устойчивость переключаемой системы при произвольных переключениях (когда отсутствует ограничение снизу на время переключений для различных режимов). С другой стороны, с увеличением количества режимов, шансы на нахождение единого регулятора существенно уменьшаются, поскольку его существование становится связанным с разрешимостью линейных неравенств большой размерности.

Качественно другой подход к решению поставленной задачи заключается в построении регулятора переменной структуры (переключаемого регулятора)

$$u = u_\sigma(x), \quad (4.3)$$

каждый режим которого является стабилизирующей обратной связью $u = u_i(x)$ для, соответственно, i -го режима $\dot{x} = A_i x + b_i u$ переключаемой системы (4.1), т.е. обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы

$$\dot{x} = A_i x + b_i u_i(x). \quad (4.4)$$

Отметим, что в предположении полной управляемости пары (A_i, b_i) , стабилизирующую обратную связь для каждого режима системы (4.1) можно искать в

форме линейной статической обратной связи $u = -k_i^T x$. Известно [95, с. 249], что такая обратная всегда существует, как решение задачи модального управления.

Таким образом, система (4.1), замкнутая регулятором (4.3), будет иметь вид

$$\dot{x} = A_\sigma x + b_\sigma u_\sigma(x), \quad \sigma \in S_\tau.$$

Укажем теперь две основные проблемы, которые необходимо решать для обеспечения работоспособности вышеуказанного регулятора переменной структуры. Первая состоит в том, что для реализации указанного регулятора необходимо знать моменты переключения режимов и номера активных режимов в каждый момент времени для того, чтобы обеспечить синхронность переключений регулятора. Но, как правило, такая информация о переключаемой системе в режиме реального времени не доступна. Вторая проблема заключается в том, что устойчивость каждого режима (4.11) переключаемой системы в отдельности не является достаточным условием устойчивости самой переключаемой системы (4.1).

Одно из возможных решений первой проблемы, позволяющее использовать данный регулятор, заключается в построении наблюдателя переключающего сигнала (в дальнейшем будем называть его просто наблюдателем), который определял бы номер активного режима для текущего момента времени, что, в свою очередь, позволило бы обеспечить синхронность переключения регулятора с переключениями режимов. Учитывая известные оценки времени задержки τ для обеспечения устойчивости переключаемой системы с устойчивыми режимами (см, например, [21, с. 56], [78; 96]), решение второй проблемы естественно искать, используя эти оценки при построении регуляторов (4.3).

4.1.2. Подход к решению

В данном разделе исследуются теоретические аспекты решения задачи 4.1 на основе нейросетевого подхода, который заключается в том, что в качестве вышеупомянутого наблюдателя режимов предлагается использовать нейронную сеть [97, с. 55]. Можно считать, что выходом такой нейросети является оценка $\hat{\sigma}(t)$ недоступного для измерения переключающего сигнала. При этом регулятор переменной структуры ищем в виде

$$u = -k_{\hat{\sigma}}^T x, \quad (4.5)$$

где $\hat{\sigma}(t)$ — оценка переключающего сигнала, $\hat{\sigma}(t) \in \{1, \dots, m\}$, а векторы $k_i \in \mathbb{R}^n$ выбираются исходя из условий устойчивости матриц $A_i - b_i k_i^T$.

Пару — переключаемый регулятор и нейронную сеть — далее будем называть *нейрорегулятором*. Систему (4.1), замкнутую нейрорегулятором можно представить переключаемой системой следующего вида

$$\dot{x} = (A_{\sigma} - b_{\sigma} k_{\hat{\sigma}}^T) x, \quad \sigma \in S_{\tau}, \quad \hat{\sigma} \in S_{\varepsilon_p, \varepsilon_p}. \quad (4.6)$$

где $\varepsilon_p = \frac{\tau}{p}$ — достаточно малая положительная константа, $p \in \mathbb{N}$ — некоторый фиксированный параметр алгоритма наблюдения, S_{ε_p} — множество переключающих сигналов, для которых моменты переключений принадлежат множеству $\{l\varepsilon_p\}$, $l = 0, 1, 2, \dots$. Перенумеруем (от 1 до m^2) все возможные режимы

$$\dot{x} = (A_i - b_i k_j^T) x \quad (i, j = 1, \dots, m) \quad (4.7)$$

переключаемой системы (4.6), присвоив каждому (ij) -му режиму соответствующий номер $s = (i - 1)m + j$. Введем функцию $\xi : \{1, \dots, m^2\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$, отображающую каждый номер s в соответствующий ему индекс i , т.е. $\xi(s) = i$.

Работа нейронной сети в качестве наблюдателя переключающего сигнала осуществляется в процессе функционирования системы и состоит в следующем: для заданной дискретной последовательности моментов времени $l\varepsilon_p$, $l = 0, 1, 2, \dots$, по каждой паре измерений вектора состояния $(x(l\varepsilon_p), x((l + 1)\varepsilon_p))$

нейронная сеть должна определять номер s текущего режима переключаемой системы (4.6) в момент $t = (l + 1)\varepsilon_p$. Обозначим выход нейросети в момент $l\varepsilon_p$ через $N[l\varepsilon_p]$. На основе данной информации оценка $\hat{\sigma}[l\varepsilon]$ переключающего сигнала $\sigma(t)$ строится следующим образом:

$$\hat{\sigma}(t) \equiv \xi(N[l\varepsilon_p]) \quad \text{при } t \in [l\varepsilon_p; (l + 1)\varepsilon_p), \quad l = 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

В результате, переключение векторов k_i стабилизирующей обратной связи задает переключающий сигнал (4.8) с некоторым заданным начальным условием $\hat{\sigma}(0) = \hat{\sigma}_0$ ($\hat{\sigma}_0 \in \{1, \dots, m\}$). Описанный наблюдатель далее будем обозначать через $\mathcal{N}_{\varepsilon_p}$.

Таким образом, основная задача функционирования нейронной сети состоит в построении оценки $\hat{\sigma}$ неизвестного переключающего сигнала $\sigma \in S_\tau$. Дискретную ошибку оценивания $e_\sigma[l\tau]$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) сигнала $\sigma(t)$ определим следующим образом:

$$e_\sigma[l\tau] = \max_{i=0, l-1} \mu_{i\tau}^{(i+1)\tau},$$

где $\mu_{i\tau}^{(i+1)\tau}$ — количество промежутков вида $[j\varepsilon_p, (j + 1)\varepsilon_p) \subset [i\tau, (i + 1)\tau]$, для которых $\sigma(t) \neq \hat{\sigma}(j\varepsilon_p)$. Заметим, что введённая ошибка оценивания не обязана стремиться к нулю на бесконечности, в связи с чем, подобный наблюдатель называем неидеальным.

Можно выделить несколько основных шагов настройки нейрорегулятора:

- 1) выбор регуляторов $u = -k_i^T x$, обеспечивающих достаточно быстрое затухание переходных процессов замкнутых режимов переключаемой системы с учётом времени задержки τ ;
- 2) выбор величины ε_p с учётом ограничений на ошибку оценивания и времени задержки τ ;
- 3) построение обучающей выборки на поверхности единичного куба;
- 4) обучение нейросети на промежутке $[0; \varepsilon_p]$;
- 5) проверка работоспособности нейросети по определению текущего активного режима;

б) моделирование переключаемой системы (4.1) замкнутой построенным нейрорегулятором.

Далее обсуждаются теоретические вопросы, связанные с настройкой и работоспособностью нейрорегулятора. К ним относятся, главным образом, задачи, сформулированные в вышечисленных пунктах 1–4.

4.1.3. Выбор режимов переключаемого регулятора

Построение стабилизирующего регулятора переменной структуры для системы (4.1) в случае ненаблюдаемых переключающих сигналов включает два основных шага: построение стабилизирующих регуляторов для каждого режима в отдельности и настройка алгоритма их переключений. В настоящем разделе рассмотрим первый из указанных шагов. Как было указано выше, необходимым условием устойчивости переключаемой системы является асимптотическая устойчивость каждого ее режима. К сожалению, это условие не является достаточным и требует усиления в зависимости от класса допустимых переключающих сигналов. Поскольку мы рассматриваем случай медленных переключений с заданным временем задержки τ , то при синтезе регулятора переменной структуры, при построении стабилизаторов для каждого режима системы (4.1) можно использовать подход, основанный на достаточном условии устойчивости переключаемых линейных систем, сформулированном в работе [96].

Итак, в предположении полной управляемости пар (A_i, b_i) ($i = 1, \dots, m$), для каждого режима

$$\dot{x} = A_i x + b_i u \quad (4.9)$$

построим обратную связь $u = -k_i^T x$, обеспечивающую простой вещественный и устойчивый спектр матрицы замкнутой системы

$$\dot{x} = (A_i - b_i k_i^T) x. \quad (4.10)$$

Т.е. $\text{Spec}(A_i - b_i k_i^T) \subset \mathbb{R}_-$ и для любых $s_j, s_m \in \text{Spec}(A_i - b_i k_i^T)$ следует, что $s_j \neq s_m$.

В этом случае, для нормы вектора решения системы (4.10) можно выписать [76, с. 57] следующую оценку

$$\|x(t)\| \leq \|e^{\Lambda_{ii}(t-s)}\| \cdot \|x(s)\| \leq c_{ii} e^{\alpha_{ii}(t-s)} \|x(s)\|, \quad t \geq s \geq 0,$$

где

$$\Lambda_{ii} = A_i - b_i k_i^T, \quad \alpha_{ii} = \max_{\lambda_k^i \in \text{Spec}\{\Lambda_{ii}\}} \lambda_k^i < 0, \quad c_{ii} = \|M_{ii}^{-1}\| \cdot \|M_{ii}\|.$$

Здесь M_{ii} — матрица преобразования, приводящая матрицу Λ_{ii} к диагональному виду $J_{ii} = \text{diag}\{\lambda_1^i, \dots, \lambda_n^i\}$, т.е.

$$J_{ii} = M_{ii}^{-1} \Lambda_{ii} M_{ii}.$$

Заметим, что столбцами матриц M_{ii} являются собственные векторы соответствующих матриц Λ_{ii} .

Обозначим

$$\alpha = \max_{i=1,m} \alpha_{ii}, \quad c = \max_{i=1,m} c_{ii}.$$

В соответствии с достаточным условием устойчивости [96], переключаемая система с режимами (4.10) является устойчивой при любых переключающих режимах из множества S_τ , если

$$\tau > \frac{2}{\alpha} \ln \frac{1}{c} = \frac{2 \ln c}{|\alpha|}. \quad (4.11)$$

Для выполнения условия (4.11) можно рекомендовать строить регуляторы $u = -k_i^T x$, обеспечивающие достаточно большую величину α , что всегда возможно в силу предположения о полной управляемости пар $(A_i - b_i k_i^T)$. Известно, что, как правило, $c = O(|\alpha|^{n-1})$.

4.1.4. Квантование времени работы наблюдателя переключающего сигнала

Как уже отмечалось выше, основная проблема при реализации регулятора переменной структуры состоит в том, что для его работоспособности нужна

информация о текущем переключающем сигнале, что позволяет обеспечить синхронность переключения режимов регулятора с переключениями режимов системы. И если переключающий сигнал не доступен для измерения, то необходимо использовать наблюдатель для оценки текущего значения переключающего сигнала. Выше (см. раздел 1.2 главы 4) был определен неидеальный наблюдатель, работающий на основе нейросети. Фактически, данный наблюдатель представляет собой дискретную систему, выход которой управляет переключением режимов регулятора переменной структуры. В идеале, режимы регулятора должны переключаться синхронно с переключениями режимов системы (4.1). Однако, моменты переключений системы (4.1), обусловленные переключающими сигналами $\sigma \in S_\tau$, совершенно не обязательно должны совпадать с дискретной последовательностью $\{l\varepsilon\}$ моментов срабатывания нейросети. В результате этого, могут возникать ошибки нейросети в определении номера активного режима замкнутой системы (4.6), что, в свою очередь, повлечет неверное включение очередного режима регулятора. Более того, нельзя исключать и того факта, что нейросеть может самопроизвольно выдавать ошибочное значение активного режима. Достаточно полную информацию о корректности работы нейросети содержит введенная выше ошибка оценивания переключающего сигнала $e_\sigma[l\tau]$, на основе которой ниже будет сформулировано достаточное условие устойчивости переключаемой системы (4.1), замкнутой нейрорегулятором (4.5), (4.8).

Далее нам потребуется следующая лемма.

Лемма 4.1. Пусть для системы

$$\dot{x} = A_\sigma x, \quad \sigma \in S_\tau \quad (4.12)$$

существуют константы $d > 1$ и $q > 0$ такие, что для любого переключающего сигнала $\sigma \in S_\tau$ и начального условия $x(0) \in \mathbb{R}^n$ для соответствующего решения $x(t)$ справедливы неравенства

$$1) \|x((i+1)q)\| < \frac{1}{d} \|x(iq)\| \text{ для всех } i = 0, 1, \dots;$$

2) $\|x(t)\| < \|x(iq)\|$ для всех $t \in [(i+1)q; (i+2)q]$, $i = 0, 1, \dots$

Тогда для любого начального условия $x(0) \in \mathbb{R}^n$ и любого переключающего сигнала $\sigma \in S_\tau$ норма соответствующего решения системы (4.12) стремится к нулю, т.е.

$$\|x(t)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Действительно, в силу условия 1)

$$\|x((i+1)q)\| < \frac{1}{d^{i+1}} \|x(0)\|.$$

Учитывая, что $d > 1$, получаем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|x(iq)\| = 0.$$

Далее, обозначим $h_{i+1} = \max_{t \in [(i+1)q; (i+2)q]} \|x(t)\|$. Тогда, в силу условия 2) $h_{i+1} \leq \|x(iq)\|$. Следовательно

$$\lim_{i \rightarrow \infty} h_i = 0. \quad (4.13)$$

Теперь рассмотрим произвольную последовательность $\{t_j\}$ такую, что $t_j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда в силу (4.13) найдётся номер i_0 такой, что $h_i < \varepsilon$ для всех $i \geq i_0$. Далее, пусть j_0 такой, что $t_j \in [i_0q; +\infty)$ при $j \geq j_0$. Тогда для любого $j \geq j_0$ найдётся $i_1 \geq i_0$ такой, что $t_j \in [i_1q; (i_1+1)q]$ и, следовательно, $\|x(t_j)\| \leq h_{i_1} < \varepsilon$. Таким образом, получаем, что $\|x(t_j)\| \leq \varepsilon$ для любого $j \geq j_0$, т.е. $\lim_{i \rightarrow \infty} \|x(t_j)\| = 0$. Отсюда, в силу произвольности выбранной последовательности $\{t_j\}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0.$$

Лемма доказана.

Далее будем использовать следующее обозначение

$$\Lambda_{ij} = A_i - b_i k_j^T, \quad i, j = \overline{1, m}.$$

Пусть J_{ij} — жорданова нормальная форма для Λ_{ij} , а M_{ij} — матрица, приводящая Λ_{ij} к соответствующей жордановой форме J_{ij} . Положим

$$\alpha_{ij} = \max_{\lambda_k^{(ij)} \in \text{Spec } \Lambda_{ij}} \text{Re}(\lambda_k^{(ij)}).$$

Для систем

$$\dot{x} = (A_i - b_i k_j^T)x, \quad i \neq j$$

можно выписать следующие оценки для норм решений [97]

$$\|x(t)\| \leq \|e^{\Lambda_{ij}(t-s)}\| \cdot \|x(s)\| \leq c_{ij} e^{\alpha_{ij}(t-s)} P_{ij}(t-s) \|x(s)\|.$$

Здесь $c_{ij} = \|M_{ij}^{-1}\| \cdot \|M_{ij}\|$, $P_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{r_{ij}-1} \frac{t^k}{k!}$, где r_{ij} — размер максимальной клетки Жордана в жордановой нормальной форме J_{ij} матрицы Λ_{ij} .

Обозначим

$$\rho = \max_{\substack{i,j=\overline{1,m} \\ i \neq j}} \alpha_{ij}, \quad \beta = \max_{\substack{i,j=\overline{1,m} \\ i \neq j}} c_{ij}, \quad r = \max_{\substack{i,j=\overline{1,m} \\ i \neq j}} r_{ij}.$$

Без ограничения общности будем считать, что $\rho > 0$.

Сформулируем теперь достаточное условие устойчивости замкнутой системы (4.6).

Теорема 4.1. Пусть для замкнутой системы (4.6) при любом переключающем сигнале $\sigma \in S_\tau$ и любом начальном условии $x(0) \in \mathbb{R}^n$ наблюдатель $\mathcal{N}_{\varepsilon_p}$ генерирует оценку $\hat{\sigma} \in S_{\varepsilon_p}$ с ошибкой, удовлетворяющей условию

$$e_\sigma[l\tau] \leq \theta, \quad l = 1, 2, \dots$$

для некоторого $\theta \in \mathbb{N}$, $1 \leq \theta \leq [p/2]$.

Тогда, если

$$\tau > \frac{2}{\alpha} \ln \frac{1}{h},$$

где $h = c^{\theta+2} \beta^\theta P^\theta(\varepsilon_p) e^{(\rho-\alpha)\theta\varepsilon_p}$, то для любого начального условия $x(0) \in \mathbb{R}^n$ и любого переключающего сигнала $\sigma \in S_\tau$ норма соответствующего решения

системы (4.6) стремится к нулю

$$\|x(t)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что $h > 1$. Далее, в силу условия теоремы на каждом отрезке вида $[i\tau; (i+1)\tau]$, ($i = 0, 1, \dots$) максимальное число промежутков вида $[l\varepsilon_p; (l+r)\varepsilon_p]$ ($l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $r \in \mathbb{N}$), на которых $\sigma(t) \not\equiv \hat{\sigma}[l\varepsilon_p]$, не более θ (при этом, для каждого l число r , фактически, равно количеству "склеенных" промежутков длины ε_p , на которых выполнено указанное тождество), максимальное число промежутков вида $[l\varepsilon_p; (l+r)\varepsilon_p]$ ($l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $r \in \mathbb{N}$), на которых $\sigma(t) \equiv \hat{\sigma}[l\varepsilon_p]$, не более $\theta + 1$ и не более одного промежутка вида $[l\varepsilon_p; (l+1)\varepsilon_p]$, содержащего точку разрыва переключающего сигнала $\sigma(t)$ (соответственно, на таком промежутке $\sigma(t) \not\equiv \hat{\sigma}[l\varepsilon_p]$). Заметим, что для всех $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верны следующие неравенства

$$\begin{aligned} \|x((l+1)\varepsilon_p)\| &\leq c\|x(l\varepsilon_p)\|e^{\alpha\varepsilon_p}, & \text{если } \sigma(t) \equiv \hat{\sigma}[l\varepsilon_p], \\ \|x((l+1)\varepsilon_p)\| &\leq \beta\|x(l\varepsilon_p)\|P(\varepsilon_p)e^{\rho\varepsilon_p}, & \text{если } \sigma(t) \not\equiv \hat{\sigma}[l\varepsilon_p]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

А если $\sigma(t) \not\equiv \hat{\sigma}[l\varepsilon_p]$ на промежутке $[l\varepsilon_p; (l+1)\varepsilon_p]$, внутри которого лежит точка разрыва переключающего сигнала $\sigma(t)$, то справедлива оценка

$$\|x((l+1)\varepsilon_p)\| \leq c\beta P(\varepsilon_p)e^{\rho\varepsilon_p}\|x(l\varepsilon_p)\|. \quad (4.15)$$

Из неравенств (4.14) и (4.15), нетрудно получить следующую оценку для решений системы (4.6)

$$\|x((i+1)\tau)\| \leq h\|x(i\tau)\|e^{\alpha\tau}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (4.16)$$

Учитывая, что $\alpha < 0$, в силу условия теоремы получаем следующую цепочку неравенств:

$$\tau > \frac{2}{\alpha} \ln h^{-1}, \quad \alpha\tau < \ln h^{-2}, \quad e^{\alpha\tau} < h^{-2}, \quad \|x(i\tau)\|e^{\alpha\tau} < h^{-2}\|x(i\tau)\|,$$

откуда получаем

$$h^2\|x(i\tau)\|e^{\alpha\tau} < \|x(i\tau)\|. \quad (4.17)$$

Далее, из (4.16) и (4.17) имеем

$$h\|x((i+1)\tau)\| \leq h^2\|x(i\tau)\|e^{\alpha\tau} < \|x(i\tau)\|. \quad (4.18)$$

Отсюда, окончательно, получаем

$$\|x((i+1)\tau)\| < \frac{1}{h}\|x(i\tau)\|, \quad i = 0, 1, \dots \quad (4.19)$$

Таким образом, мы показали, что для замкнутой системы (4.6) выполнен пункт 1 леммы 4.1 при $q = \tau$, $d = h$. Докажем теперь, что для этой системы выполняется также и пункт 2 леммы 4.1.

Действительно, зафиксируем произвольное $t \in [(i+1)\tau; (i+2)\tau]$ ($i = 0, 1, \dots$) и рассмотрим два случая.

1) Пусть $t \in [l\varepsilon_p; (l+1)\varepsilon_p] \subset [(i+1)\tau; (i+2)\tau]$ и на этом промежутке $\sigma(t) \equiv \hat{\sigma}[l\varepsilon_p]$. Далее, пусть на отрезке $[(i+1)\tau; (i+2)\tau]$ левее t располагается \varkappa промежутков вида $[l\varepsilon_p; (l+1)\varepsilon_p]$, для которых $\sigma(t) \not\equiv \hat{\sigma}[l\varepsilon_p]$ и r промежутков такого же вида, где $\sigma(t) \equiv \hat{\sigma}[l\varepsilon_p]$. Тогда, учитывая (4.14) и (4.15), получаем оценку

$$\|x(t)\| \leq c^{r+1}\beta^\varkappa P^\varkappa(\varepsilon_p)e^{(\rho-\alpha)\varkappa\varepsilon_p c}\|x((i+1)\tau)\|e^{\alpha(t-(i+1)\tau)}.$$

Поскольку $e^{\alpha(t-(i+1)\tau)} < 1$, то

$$\|x(t)\| \leq c^{r+2}\beta^\varkappa P^\varkappa(\varepsilon_p)e^{(\rho-\alpha)\varkappa\varepsilon_p}\|x((i+1)\tau)\|. \quad (4.20)$$

Отсюда, учитывая (4.19), получаем

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq c^{r+2}\beta^\varkappa P^\varkappa(\varepsilon_p)e^{(\rho-\alpha)\varkappa\varepsilon_p c}\|x((i+1)\tau)\| < \\ &< c^{r+2}\beta^\varkappa P^\varkappa(\varepsilon_p)e^{(\rho-\alpha)\varkappa\varepsilon_p} \frac{1}{h}\|x(i\tau)\| = \frac{c^{r+2}\beta^\varkappa P^\varkappa(\varepsilon_p)e^{(\rho-\alpha)\varkappa\varepsilon_p}}{c^{\theta+2}\beta^\theta P^\theta(\varepsilon_p)e^{(\rho-\alpha)\theta\varepsilon_p}}\|x(i\tau)\|. \end{aligned} \quad (4.21)$$

В силу того, что в рассматриваемом случае $r \leq \theta$, $\varkappa \leq \theta$, то дробь в последнем неравенстве не превосходит единицу и тогда окончательно имеем

$$\|x(t)\| < \|x(i\tau)\|. \quad (4.22)$$

2) Пусть теперь $t \in [l\varepsilon_p; (l+1)\varepsilon_p] \subset [(i+1)\tau; (i+2)\tau]$ и на этом промежутке $\sigma(t) \not\equiv \hat{\sigma}[l\varepsilon_p]$. Также как и в случае 1), пусть на отрезке $[(i+1)\tau; (i+2)\tau]$ левее t располагается \varkappa промежутков вида $[l\varepsilon_p; (l+1)\varepsilon_p]$, для которых $\sigma(t) \not\equiv \hat{\sigma}[l\varepsilon_p]$ и r промежутков такого же вида, где $\sigma(t) \equiv \hat{\sigma}[l\varepsilon_p]$. Тогда, рассуждая как и в случае 1), учитывая (4.14) и (4.15), получаем оценку

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq c^{r+1} \beta^\varkappa P^\varkappa(\varepsilon_p) e^{(\rho-\alpha)\varkappa\varepsilon_p} \beta P(\varepsilon_p) \|x((i+1)\tau)\| e^{\rho(t-(i+1)\tau)} \leq \\ &\leq c^{r+1} \beta^{\varkappa+1} P^{\varkappa+1}(\varepsilon_p) e^{(\rho-\alpha)(\varkappa+1)\varepsilon_p} \|x((i+1)\tau)\|. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Отсюда, учитывая (4.19), получаем

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq c^{r+1} \beta^{\varkappa+1} P^{\varkappa+1}(\varepsilon_p) e^{(\rho-\alpha)(\varkappa+1)\varepsilon_p} \|x((i+1)\tau)\| < \\ &< c^{r+1} \beta^{\varkappa+1} P^{\varkappa+1}(\varepsilon_p) e^{(\rho-\alpha)(\varkappa+1)\varepsilon_p} \frac{1}{h} \|x(i\tau)\| = \\ &= \frac{c^{r+1} \beta^{\varkappa+1} P^{\varkappa+1}(\varepsilon_p) e^{(\rho-\alpha)(\varkappa+1)\varepsilon_p}}{c^{\theta+2} \beta^\theta P^\theta(\varepsilon_p) e^{(\rho-\alpha)\theta\varepsilon_p}} \|x(i\tau)\|. \end{aligned} \quad (4.24)$$

В силу того, что в рассматриваемом случае $r \leq \theta$, $\varkappa + 1 \leq \theta$, то дробь в последнем неравенстве не превосходит единицу и в случае 2) также имеет место неравенство (4.22).

Таким образом, мы получили, что при выполнении условий теоремы 4.1 выполняются условия леммы 4.1. А тогда для любого начального условия $x(0) \in \mathbb{R}^n$ и любого переключающего сигнала $\sigma \in S_\tau$ норма соответствующего решения замкнутой системы (4.6) стремится к нулю. Теорема 4.1 доказана.

4.1.5. Оценка нормы решения для замкнутой системы

Пользуясь результатами раздела 4.1.4, можно получить оценку для решений устойчивой замкнутой системы (4.6). А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия теоремы 4.1. Тогда при любом начальном условии $x(0)$ таком, что $\|x(0)\| \leq \gamma$ (для некоторого $\gamma > 0$) и любом

переключающем сигнале $\sigma \in S_\tau$ для соответствующего решения $x(t)$ системы (4.6) выполнено неравенство

$$\|x(t)\| \leq \bar{\gamma}, \quad t \in [0; +\infty),$$

где $\bar{\gamma} = h\gamma$.

Действительно, если выполнены условия теоремы 4.1, то из полученных в ходе ее доказательства неравенств (4.19) и (4.22) следует, что для любого переключающего сигнала $\sigma \in S_\tau$ и начального условия $x(0) \in \mathbb{R}^n$ для соответствующего решения $x(t)$ справедливы неравенства

- 1) $\|x((i+1)\tau)\| < \frac{1}{h}\|x(i\tau)\|$ для всех $i = 0, 1, \dots$;
- 2) $\|x(t)\| < \|x(i\tau)\|$ для всех $t \in [(i+1)\tau; (i+2)\tau]$, $i = 0, 1, \dots$

Из этих неравенств следует, что для расчета величины $\bar{\gamma}$ достаточно оценить наибольшее значения нормы вектора $x(t)$ на промежутке $[0; \tau]$. А учитывая оценки (4.20) и (4.23), получаем

$$\|x(t)\| \leq c^{\theta+2}\beta^\theta P^\theta(\varepsilon_p)e^{(\rho-\alpha)\theta\varepsilon_p}\|x(0)\| \leq h\gamma$$

при всех $t \in [0; \tau]$. Теорема 4.2 доказана.

4.1.6. Формирование обучающей выборки

Как было отмечено в разделе 1.2 главы 4, задача нейросети состоит в том, чтобы по каждой паре измерений вектора состояния $(x(l\varepsilon_p), x((l+1)\varepsilon_p))$ нейронная сеть определяла бы номер s текущего режима переключаемой системы (4.6) в момент $t = (l+1)\varepsilon_p$. Причем считаем, что эту задачу нейросеть должна правильно решать в предположении, что на рассматриваемом отрезке $[l\varepsilon_p; (l+1)\varepsilon_p]$ отсутствуют точки разрыва сигнала $\sigma(t)$. И поскольку, в этом случае, на таких отрезках будет активен один из линейных стационарных режимов системы (4.6), то $x((l+1)\varepsilon_p) = x(\varepsilon_p)$, если $x(l\varepsilon_p) = x(0)$. Таким образом, нейронную сеть достаточно обучить на векторах вида $(x(0), x(\varepsilon_p))$, построенных для всех возможных режимов системы (4.6).

В качестве множества начальных условий $x(0)$ для формирования обучающей выборки можно использовать поверхность единичного куба $C(0; 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$. Такой выбор обусловлен линейностью режимов рассматриваемой переключаемой системы. Действительно, любой паре $(x(l\varepsilon_p), x((l+1)\varepsilon_p))$ можно сопоставить пару $(\frac{x(l\varepsilon_p)}{\|x(l\varepsilon_p)\|}, \frac{x((l+1)\varepsilon_p)}{\|x(l\varepsilon_p)\|})$, которую можно подавать на вход обученной нейросети.

4.2. Некоторые теоретические аспекты нейросетевого подхода к стабилизации переключаемых интервальных систем

4.2.1. Постановка задачи

Рассматривается непрерывная скалярная переключаемая интервальная линейная система

$$\dot{x} = [A_\sigma]x + [b_\sigma]u, \quad \sigma \in S_\tau, \quad (4.25)$$

где $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow I = \{1, \dots, m\}$ — непрерывная справа кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал) с конечным числом разрывов (переключений) на любом конечном промежутке; S_τ — множество всех переключающих сигналов σ , для которых время между любыми двумя соседними переключениями не меньше τ ($\tau > 0$); I — множество индексов, нумерующих режимы функционирования системы (4.25); $[A_\sigma] = [A] \circ \sigma$ — композиция отображения $[A] : I \rightarrow \{[A_1], \dots, [A_m]\}$ ($[A_i] \in \mathbb{R}^{n \times n}$) и переключающего сигнала σ , $[b_\sigma] = [b] \circ \sigma$ — аналогичная композиция для отображения $[b] : I \rightarrow \{[b_1], \dots, [b_m]\}$ ($[b_i] \in \mathbb{R}^n$); пары интервальных матриц ($[A_i], [b_i]$), $i = 1, \dots, m$, определяют режимы функционирования системы (4.25); $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^1$ — управляющий вход.

Переключаемую интервальную систему (4.25) будем понимать как беско-

нечное семейство обычных переключаемых систем вида:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} A_1x(t) + b_1u, & \text{при } \sigma(t) = 1, \\ A_2x(t) + b_2u, & \text{при } \sigma(t) = 2, \\ \dots & \dots \\ A_mx(t) + b_mu, & \text{при } \sigma(t) = m, \end{cases} \quad (4.26)$$

где $A_i \in [A_i]$, $b_i \in [b_i]$ ($i = 1, \dots, m$), $\sigma \in S_\tau$. При этом, если $t_0, t_1, \dots, t_n, \dots$ представляет собой последовательность моментов переключения, то $t_j - t_i \geq \tau$ для всех $j > i$.

Далее предполагаем, что переключающий сигнал не доступен для наблюдения.

Задача 4.2. Требуется стабилизировать систему (4.25) в нулевом положении равновесия, т.е. построить обратную связь $u = u(x)$ такую, что для любых $x(0) \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in S_\tau$ и любых наборов $\{A_1, \dots, A_m\}$ ($A_i \in [A_i]$), $\{b_1, \dots, b_m\}$ ($b_i \in [b_i]$) норма $\|x(t)\|$ соответствующего решения системы (4.26), замкнутой этой обратной связью, стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

При этом вектор-функция $x(t)$ определяется как решение линейной нестационарной системы с кусочно-постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x + b_{\sigma(t)}u, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \sigma \in S_\tau, \quad (4.27)$$

где $A_{\sigma(t)} \in \{A_1, \dots, A_m\}$, $b_{\sigma(t)} \in \{b_1, \dots, b_m\}$. Далее для векторов будем использовать нормы $\|x\| = \max_i |x_i|$ или $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$, а для матриц, соответственно, $\|A\| = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ или $\|A\|_2 = \sqrt{\max_i s_i(A^*A)}$, где $s_i(A^*A)$ — собственные числа матрицы A^*A .

В данном разделе для решения задачи 4.2 предлагается использовать подход аналогичный изложенному в разделе 4.1 и искать стабилизирующую обратную связь в виде переключаемого регулятора вида (4.3) с режимами в форме линейной статической обратной связи $u = -k_i^T x$

$$u = -k_\sigma^T x, \quad \sigma \in S_\tau, \quad (4.28)$$

где $k_\sigma = k \circ \sigma$ — композиция отображения $k : I \rightarrow \{k_1^T, \dots, k_m^T\}$ ($k_i \in \mathbb{R}^n$) и переключающего сигнала σ . Тогда система (4.25), замкнутая регулятором (4.3), будет иметь вид

$$\dot{x} = [A_\sigma]x - [b_\sigma]k_\sigma^T x, \quad \sigma \in S_\tau. \quad (4.29)$$

Теперь заметим, что при использовании переключаемого регулятора для стабилизации системы (4.25) необходимо решить две проблемы. Первая состоит в поиске для каждого интервального режима

$$\dot{x} = [A_i]x + [b_i]u$$

стабилизирующей линейной статической обратной связи $u = -k_i^T x$, существование которой уже не гарантируется легко проверяемым критерием, как в случае обычных (не интервальных) линейных систем. Вместе с этим, поиск стабилизирующей обратной связи для каждого режима переключаемой системы (4.25) неразрывно связан с решением вопроса об устойчивости этой системы, замкнутой соответствующим регулятором (4.28), поскольку известно, что устойчивость каждого замкнутого режима

$$\dot{x} = ([A_i]x - [b_i]k_i^T)x \quad (4.30)$$

системы (4.25) в отдельности еще не является достаточным условием устойчивости замкнутой переключаемой системы (4.29). Вторая проблема состоит в том, что для реализации указанного регулятора необходимо знать моменты переключения режимов и номера активных режимов в каждый момент времени для того, чтобы обеспечить синхронность переключений регулятора. Но, по условию, такая информация о переключаемой системе в режиме реального времени не доступна.

Далее в подразделе 4.2.2 для решения первой проблемы предлагается использовать результаты подраздела 3.4.2, позволяющие свести задачу нахождения стабилизирующей обратной связи для каждого интервального режима к решению системы линейных матричных неравенств, а для решения задачи

устойчивости замкнутой системы (4.29) будет предложена методика получения оценок времени задержки τ для обеспечения устойчивости переключаемой интервальной системы с устойчивыми режимами на основе результатов работы [89, с. 64]. Решение второй проблемы представлено в подразделах 4.2.3, 4.2.4 и основывается оно на методе построения неидеального наблюдателя переключающего сигнала, изложенного в разделе 4.1.

4.2.2. Выбор режимов переключаемого регулятора

Зафиксируем произвольный номер $i \in I$ и рассмотрим задачу поиска параметров вектора $k_i \in \mathbb{R}^n$, обеспечивающего устойчивость любой системы из семейства

$$\dot{x} = ([A_i] - [b_i]k_i^T)x. \quad (4.31)$$

Для этого, в соответствии с методикой, изложенной в подразделе 3.4.2, по вершинным матрицам $A_{l,i}$ и векторам $b_{l,i}$ ($l = \overline{1, 2^{n^2+n}}$) интервальных семейств $[A_i]$ и $[b_i]$ строятся специальные множества матриц $F_{l,i} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и векторов $g_{l,i} \in \mathbb{R}^n$, после чего вектор обратной связи k_i находим из системы линейных матричных неравенств

$$\begin{cases} P_i F_{l,i}^T + F_{l,i} P_i + z_i g_{l,i}^T + g_{l,i} z_i^T < 0 \\ P_i > 0, \quad l = \overline{1, 2^{n^2+n}}. \end{cases} \quad (4.32)$$

Если (z_i, P_i) — решение системы (4.32), то $k_i^T = -z_i^T P_i^{-1}$. При этом функция

$$V_i(x) = x^T P_i x$$

является общей квадратичной функцией Ляпунова для семейства систем (4.31).

Итак, пусть стабилизирующие обратные связи $u = -k_i^T x$ для каждого i -го режима системы (4.25) построены. Рассмотрим теперь вопрос об оценке времени задержки τ , которое гарантирует устойчивость замкнутой системы (4.29) при любом $\sigma \in S_\tau$.

Зафиксируем номер $i \in \{1, \dots, m\}$ и рассмотрим произвольную систему

$$\dot{x} = (A - bk_i^T)x, \quad (4.33)$$

где $A \in [A_i]$, $b \in [b_i]$. В разделе 3.4.2 показано, что матрица такой системы может быть представлена в виде

$$A - bk_i^T = \sum_{l=1}^p \lambda_l \Psi_l^{(i)}(k_i), \quad \sum_{l=1}^p \lambda_l = 1, \quad \lambda_l \geq 0, \quad (4.34)$$

где $\Psi_l^{(i)}(k_i) = F_{l,i} - g_{l,i}k_i^T$, $p = 2^{n^2+n}$.

Пусть пара (z_i, P_i) — решение системы (4.32). В разделе 3.4.2 показано, что тогда для всех $l = \overline{1, 2^{n^2+n}}$ выполняется неравенство

$$(\Psi_l^{(i)}(k_i))^T Q_i + Q_i \Psi_l^{(i)}(k_i) < 0,$$

где $k_i^T = -z_i^T P_i^{-1}$, $Q_i = P_i^{-1}$. Отсюда и из (4.34) имеем

$$\begin{aligned} (A - bk_i^T)^T Q_i + Q_i (A - bk_i^T) &= \left(\sum_{l=1}^p \lambda_l \Psi_l^{(i)}(k_i) \right)^T Q_i + Q_i \left(\sum_{l=1}^p \lambda_l \Psi_l^{(i)}(k_i) \right) = \\ &= \sum_{l=1}^p (\lambda_l (\Psi_l^{(i)}(k_i))^T Q_i + Q_i \Psi_l^{(i)}(k_i)) = - \sum_{l=1}^p \lambda_l H_l^{(i)}, \end{aligned}$$

где

$$H_l^{(i)} = -((\Psi_l^{(i)}(k_i))^T Q_i + Q_i \Psi_l^{(i)}(k_i))$$

— положительно определенные матрицы.

Таким образом,

$$(A - bk_i)^T Q_i + Q_i (A - bk_i) = - \sum_{l=1}^p \lambda_l H_l^{(i)},$$

причем матрица $H^{(i)} = \sum_{l=1}^p \lambda_l H_l^{(i)}$ является положительно определенной. Отсюда получаем, что система (4.33) асимптотически устойчива, а в силу произвольности выбора матрицы A и вектора b получаем, что обратная связь $u = -k_i^T x$ обеспечивает устойчивость семейства замкнутых систем (4.31).

Далее, пусть $h_{min}^{(i)}$ — минимальное собственное значение матрицы $H^{(i)}$. Тогда имеем следующую цепочку соотношений

$$\begin{aligned} h_{min}^{(i)} &= \min_{\|x\|_2=1} (x^T H^{(i)} x) = \min_{\|x\|_2=1} (x^T (\sum_{l=1}^p \lambda_l H_l^{(i)}) x) = \min_{\|x\|_2=1} (\sum_{l=1}^p \lambda_l (x^T H_l^{(i)} x)) \geq \\ &\geq \min_{\|x\|_2=1} (\sum_{l=1}^p \lambda_l (h_l^{(i)} \|x\|_2^2)) \geq \min_{\|x\|_2=1} (\|x\|_2^2 (\sum_{l=1}^p \lambda_l h_l^{(i)})) = \sum_{l=1}^p \lambda_l h_l^{(i)}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

где $h_l^{(i)}$ — минимальные собственные значения матриц $H_l^{(i)}$. Обозначим $\mu_i = \min_l h_l^{(i)}$. Тогда из (4.35) получаем

$$h_{min}^{(i)} \geq \sum_{l=1}^p \lambda_l h_l^{(i)} \geq \mu_i \sum_{l=1}^p \lambda_l = \mu_i,$$

то есть

$$h_{min}^{(i)} \geq \mu_i. \quad (4.36)$$

В соответствии с [89, с. 56] для любого решения $x(t)$ системы (4.33) выполнено неравенство

$$\|x(t)\|_2 \leq c_i e^{-\theta_i(t-s)} \|x(s)\|_2 \quad t \geq s \geq 0,$$

где $c_i = \sqrt{\frac{M_i}{m_i}}$, $\theta_i = \frac{h_{min}^{(i)}}{2M_i}$, а m_i и M_i — соответственно минимальное и максимальное собственные значения матрицы Q_i . В силу (4.36)

$$e^{-\theta_i(t-s)} \leq e^{-\nu_i(t-s)} \quad \text{при } t > s \geq 0,$$

где $\nu_i = \frac{\mu_i}{2M_i}$, а тогда для любого решения $x(t)$ системы (4.33) получаем

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{n} \|x(t)\|_2 \leq c_i \sqrt{n} e^{-\nu_i(t-s)} \|x(s)\|_2 \leq c_i \sqrt{n} e^{-\nu_i(t-s)} \|x(s)\| \quad \text{при } t > s \geq 0.$$

Обозначая $c_{ii} = c_i \sqrt{n}$, $\alpha_{ii} = -\nu_i$, перепишем последнее неравенство в виде

$$\|x(t)\| \leq c_{ii} e^{\alpha_{ii}(t-s)} \|x(s)\|, \quad t \geq s \geq 0. \quad (4.37)$$

На основании вышеизложенного и достаточного условия устойчивости переключаемой линейной системы, полученного в работе [96], сформулируем следующую теорему.

Теорема 4.3. Пусть для переключаемой интервальной линейной системы (4.25) при любом $i \in I$ совместна система линейных матричных неравенств (4.32) и (z_i, P_i) — соответствующее ее решение. Тогда переключаемый регулятор

$$u = -k_\sigma^T x, \quad k_i^T = -z_i^T P_i^{-1}, \quad \sigma \in S_\tau \quad (4.38)$$

стабилизирует систему (4.25) при

$$\tau > \frac{2 \ln c}{|\alpha|},$$

где $c = \max_i c_{ii}$, $\alpha = \max_i \alpha_{ii}$.

4.2.3. Построение неидеального наблюдателя режимов замкнутой переключаемой системы

Как уже было упомянуто выше, отсутствие информации о значении переключающего сигнала в процессе функционирования переключаемой системы не дает возможности непосредственно использовать переключаемый регулятор (4.38). Для того чтобы обеспечить синхронность переключений самой системы и регулятора необходимо построить наблюдатель, который бы формировал в каждый момент времени оценку переключающего сигнала $\sigma(t)$. В данном разделе, как и в разделе 4.1, предлагается строить оценку переключающего сигнала на основе нейросетевого подхода, который заключается в том, что в качестве вышеупомянутого наблюдателя режимов используется нейронная сеть. Считаем, что выходом такой нейросети является оценка $\hat{\sigma}(t)$ недоступного для измерения переключающего сигнала $\sigma(t)$. При этом регулятор переменной структуры будет иметь вид

$$u = -k_{\hat{\sigma}}^T x, \quad (4.39)$$

где $\hat{\sigma}(t)$ — оценка переключающего сигнала, $\hat{\sigma}(t) \in \{1, \dots, m\}$, а векторы $k_i \in \mathbb{R}^n$ выбираются исходя из условий устойчивости семейств матриц $[A_i] - [b_i]k_i^T$.

Пара — переключаемый регулятор и нейронная сеть — в разделе 4.1 была названа нейрорегулятором. Систему (4.25), замкнутую нейрорегулятором можно представить переключаемой системой следующего вида

$$\dot{x} = ([A_\sigma] - [b_\sigma]k_\sigma^T)x, \quad \sigma \in S_\tau, \hat{\sigma} \in S_{\varepsilon_p, \varepsilon_p}. \quad (4.40)$$

где $\varepsilon_p = \frac{\tau}{p}$ — достаточно малая положительная константа, $p \in \mathbb{N}$ — некоторый фиксированный параметр алгоритма наблюдения, $S_{\varepsilon_p, \varepsilon_p}$ — множество переключающих сигналов, для которых моменты переключений принадлежат множеству $\{l\varepsilon_p\}$, $l = 0, 1, 2, \dots$. Перенумеруем (от 1 до m^2) все возможные режимы

$$\dot{x} = ([A_i] - [b_i]k_j^T)x \quad (i, j = 1, \dots, m) \quad (4.41)$$

переключаемой системы (4.40), присвоив каждому (ij) -му режиму соответствующий номер $s = (i - 1)m + j$. Введем функцию $\xi : \{1, \dots, m^2\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$, отображающую каждый номер s в соответствующий ему индекс i , т.е. $\xi(s) = i$.

Как и в случае построения нейронаблюдателя для переключающего сигнала обычной переключаемой системы, рассмотренной в разделе 4.1, работа нейронной сети в качестве наблюдателя переключающего сигнала для переключаемой интервальной системы (4.25) также осуществляется в процессе функционирования системы и состоит в том, что для заданной дискретной последовательности моментов времени $l\varepsilon_p$, $l = 0, 1, 2, \dots$, по каждой паре измерений вектора состояния $(x(l\varepsilon_p), x((l + 1)\varepsilon_p))$ нейронная сеть должна в момент времени $t = (l + 1)\varepsilon_p$ определять номер s текущего режима переключаемой системы (4.40). Также как и в разделе 4.1, обозначим выход нейросети в момент $l\varepsilon_p$ через $N[l\varepsilon_p]$. На основе данной информации оценка $\hat{\sigma}[l\varepsilon]$ переключающего сигнала $\sigma(t)$ строится следующим образом:

$$\hat{\sigma}(t) \equiv \xi(N[l\varepsilon_p]) \quad \text{при } t \in [l\varepsilon_p; (l + 1)\varepsilon_p), \quad l = 1, 2, \dots \quad (4.42)$$

В результате, переключение векторов k_i стабилизирующей обратной связи задает переключающий сигнал (4.42) с некоторым заданным начальным условием

$\hat{\sigma}(0) = \hat{\sigma}_0$ ($\hat{\sigma}_0 \in \{1, \dots, m\}$). Описанный наблюдатель далее обозначаем через $\mathcal{N}_{\varepsilon_p}$. По аналогии с разделом 4.1 введем дискретную ошибку оценивания $e_\sigma[l\tau]$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) сигнала $\sigma(t)$:

$$e_\sigma[l\tau] = \max_{i=0, l-1} \mu_{i\tau}^{(i+1)\tau},$$

где $\mu_{i\tau}^{(i+1)\tau}$ — количество промежутков вида $[j\varepsilon_p, (j+1)\varepsilon_p) \subset [i\tau, (i+1)\tau]$, для которых $\sigma(t) \neq \hat{\sigma}(j\varepsilon_p)$.

Заметим, что построение описанного неидеального наблюдателя для переключаемой интервальной системы является существенно более сложной задачей по сравнению с обычной системой, рассмотренной в разделе 4.1, поскольку в данном случае каждый режим, по сути, представляет собой континуальное семейство систем, в связи с чем, теперь речь идет о распознавании с помощью нейросети различных семейств линейных динамических систем.

4.2.4. Квантование времени работы наблюдателя переключающего сигнала

Одной из основных проблем обеспечения работоспособности переключаемого регулятора (4.39) является правильный выбор величины ε_p (периода срабатывания неидеального наблюдателя). Учитывая, что режимы регулятора (4.39) могут переключаться только в дискретные моменты времени $t = l\varepsilon_p$ и при этом еще могут возникать ошибки в распознавании режимов замкнутой системы (4.40), то практически неизбежно будут возникать неустойчивые режимы на промежутках времени, длина которых будет зависеть от величины ε_p . И для того, чтобы при этом обеспечить стремление нормы решения к нулю, необходимо рассчитать "правильное" значение величины ε_p в зависимости от возможной ошибки оценивания переключающего сигнала и от величины задержки τ . Решению этого вопроса и посвящен настоящий раздел.

Итак, для каждого замкнутого режима

$$\dot{x} = ([A_i] - [b_i]k_j^T)x, \quad i \neq j \quad (4.43)$$

построим интервальное расширение

$$\dot{x} = [\Lambda_{ij}]x, \quad [\Lambda_{ij}] = \{\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n} : |\Lambda - \Lambda_{ij}^\circ| \leq \Delta\Lambda_{ij}\}, \quad (4.44)$$

где Λ_{ij}° — центральный элемент интервального семейства, $\Delta\Lambda_{ij}$ — размах интервальной неопределенности и $A_i - b_i k_j^T \in [\Lambda_{ij}]$ для любых $A \in [A_i]$ и $b \in [b_i]$. Знаки модуля $|\cdot|$ и неравенства \leq относительно матриц далее понимаем поэлементно.

Рассмотрим следующие системы

$$(\Sigma_1) \quad \dot{x} = \Lambda_{ij}^\circ x,$$

$$(\Sigma_2) \quad \dot{x} = (|\Lambda_{ij}^\circ| + \Delta\Lambda_{ij})x,$$

$$(\Sigma_3) \quad \dot{x} = |\Lambda_{ij}^\circ|x.$$

Пусть $J_{ij}^{(l)}$ — жорданова нормальная форма (ЖНФ) для матрицы системы Σ_l , $r_{ij}^{(l)}$ — размер максимальной клетки Жордана для $J_{ij}^{(l)}$ и $M_{ij}^{(l)}$ — соответствующая матрица преобразования к ЖНФ $J_{ij}^{(l)}$. Обозначим

$$\alpha_{ij}^{(l)} = \max_{\lambda_k^{(ijl)} \in \text{Spec } J_{ij}^{(l)}} \lambda_k^{(ijl)},$$

$$c_{ij}^{(l)} = \|(M_{ij}^{(l)})^{-1}\| \cdot \|(M_{ij}^{(l)})\|,$$

$$P_{ij}^{(1)}(t) = \sum_{k=0}^{r_{ij}^{(1)}-1} \frac{t^k}{k!}.$$

Тогда, в соответствии с [76, с. 57], для норм матриц Коши систем Σ_l ($l = 1, 2, 3$) выполняются оценки

$$\begin{aligned} \|e^{\Lambda_{ij}^\circ(t-s)}\| &\leq c_{ij}^{(1)} e^{\alpha_{ij}^{(1)}(t-s)} P_{ij}^{(1)}(t-s), \\ \|e^{(|\Lambda_{ij}^\circ| + \Delta\Lambda_{ij})(t-s)}\| &\leq c_{ij}^{(2)} e^{\alpha_{ij}^{(2)}(t-s)} P_{ij}^{(2)}(t-s), \\ \|e^{|\Lambda_{ij}^\circ|(t-s)}\| &\leq c_{ij}^{(3)} e^{\alpha_{ij}^{(3)}(t-s)} P_{ij}^{(3)}(t-s) \end{aligned} \quad (4.45)$$

при любых $t > s \geq 0$.

Пусть теперь Λ — некоторая произвольная матрица из семейства $[\Lambda_{ij}]$. Тогда, в соответствии с [39, с. 88], для матрицы Коши системы

$$\dot{x} = \Lambda x \quad (4.46)$$

при любых $t > s \geq 0$ имеем следующую оценку

$$|e^{\Lambda(t-s)} - e^{|\Lambda_{ij}^\circ|(t-s)}| \leq e^{(|\Lambda_{ij}^\circ| + \Delta\Lambda_{ij})(t-s)} - e^{|\Lambda_{ij}^\circ|(t-s)}$$

или

$$e^{|\Lambda_{ij}^\circ|(t-s)} - e^{(|\Lambda_{ij}^\circ| + \Delta\Lambda_{ij})(t-s)} + e^{|\Lambda_{ij}^\circ|(t-s)} \leq e^{\Lambda(t-s)} \leq e^{|\Lambda_{ij}^\circ|(t-s)} + e^{(|\Lambda_{ij}^\circ| + \Delta\Lambda_{ij})(t-s)} - e^{|\Lambda_{ij}^\circ|(t-s)}.$$

Отсюда, для любого решения системы (4.46) справедлива оценка $\|x(t)\| = \|e^{\Lambda(t-s)}x(s)\| \leq \|e^{\Lambda(t-s)}\| \cdot \|x(s)\| \leq \|e^{|\Lambda_{ij}^\circ|(t-s)} + e^{(|\Lambda_{ij}^\circ| + \Delta\Lambda_{ij})(t-s)} - e^{|\Lambda_{ij}^\circ|(t-s)}\| \cdot \|x(s)\|$.

Учитывая (4.45) и неравенство

$$\|e^{|\Lambda_{ij}^\circ|(t-s)} - e^{(|\Lambda_{ij}^\circ| + \Delta\Lambda_{ij})(t-s)} + e^{|\Lambda_{ij}^\circ|(t-s)}\| \leq \|e^{|\Lambda_{ij}^\circ|(t-s)}\| + \|e^{(|\Lambda_{ij}^\circ| + \Delta\Lambda_{ij})(t-s)}\| + \|e^{|\Lambda_{ij}^\circ|(t-s)}\|$$

получаем

$$\|x(t)\| \leq \left(\sum_{l=1}^3 c_{ij}^{(l)} e^{\alpha_{ij}^{(l)}(t-s)} P_{ij}^{(l)}(t-s) \right) \|x(s)\|, \quad t > s \geq 0.$$

Вводя обозначения

$$c_{ij} = 3 \max\{c_{ij}^{(1)}, c_{ij}^{(2)}, c_{ij}^{(3)}\},$$

$$\alpha_{ij} = \max\{\alpha_{ij}^{(1)}, \alpha_{ij}^{(2)}, \alpha_{ij}^{(3)}\},$$

$$r_{ij} = \max\{r_{ij}^{(1)}, r_{ij}^{(2)}, r_{ij}^{(3)}\},$$

окончательно получаем

$$\|x(t)\| \leq c_{ij} e^{\alpha_{ij}(t-s)} P_{ij}(t-s) \|x(s)\|, \quad t > s \geq 0, \quad (4.47)$$

где $P_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{r_{ij}-1} \frac{t^k}{k!}$. И поскольку каждая система семейства (4.43) принадлежит также семейству (4.44), то для любого решения режима (4.43) верна та же оценка (4.47). Обозначим

$$\rho = \max_{i \neq j} \alpha_{ij}, \quad \beta = \max_{i \neq j} c_{ij}, \quad r = \max_{i \neq j} r_{ij}.$$

Без ограничения общности будем считать, что $\rho > 0$.

Основываясь теперь на неравенствах (4.37), (4.47) и основном результате раздела 4.1, сформулируем достаточное условие устойчивости замкнутой системы (4.40).

Теорема 4.4. Пусть для замкнутой системы (4.40) при любом переключающем сигнале $\sigma \in S_\tau$ и любом начальном условии $x(0) \in \mathbb{R}^n$ наблюдатель $\mathcal{N}_{\varepsilon_p}$ генерирует оценку $\hat{\sigma} \in S_{\varepsilon_p, \varepsilon_p}$ с ошибкой, удовлетворяющей условию

$$e_\sigma[l\tau] \leq \theta$$

для некоторого $\theta \in \mathbb{N}$, $0 \leq \theta \leq [p/2]$.

Тогда, если

$$\tau > \frac{2 \ln h}{|\alpha|}, \quad (4.48)$$

где $h = c^{\theta+2} \beta^\theta P^\theta(\varepsilon_p) e^{(\rho-\alpha)\theta\varepsilon_p}$, то для любого начального условия $x(0) \in \mathbb{R}^n$ и любого переключающего сигнала $\sigma \in S_\tau$ норма соответствующего решения системы (4.40) стремится к нулю

$$\|x(t)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Здесь $P(t) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{t^k}{k!}$

4.3. Выводы к четвёртой главе

Разработан метод построения регулятора переменной структуры для стабилизации переключаемых линейных интервальных систем в случае ненаблюдаемых переключающих сигналов. Отражены вопросы, связанные с настройкой и

работоспособностью нейрорегулятора. Для стабилизации переключаемой интервальной системы поиск для каждого интервального режима стабилизирующей линейной статической обратной связи сводится к решению системы линейных матричных неравенств, а для решения задачи устойчивости замкнутой системы предложена методика получения оценок времени задержки.

Заключение

Основные результаты работы автора заключаются в следующем.

1. Разработан метод построения цифрового (дискретного) регулятора по выходу для переключаемой линейной интервальной системы.
2. Разработан метод построения цифрового (дискретного) сверхстабилизатора по состоянию для переключаемой линейной интервальной системы.
3. Разработан метод решения задачи стабилизации переключаемой линейной интервальной системы с режимами различных динамических порядков.
4. Сформулировано и доказано достаточное условие существования стабилизирующего регулятора в форме статической обратной связи по состоянию для переключаемой линейной интервальной системы.
5. Сформулировано и доказано достаточное условие существования стабилизирующего регулятора в форме динамической обратной связи по выходу для переключаемой линейной интервальной системы.
6. Разработан метод построения регулятора переменной структуры для стабилизации переключаемых линейных интервальных систем в случае ненаблюдаемых переключающих сигналов.

Полученные теоретические результаты имеют значимость в рамках современной теории автоматического управления, теории переключаемых систем и аналитической теории дифференциальных уравнений.

Необходимо отметить, что интерес к задачам управления переключаемыми системами в настоящее время остается достаточно высоким, что подтверждается большим количеством работ, публикуемых по данному направлению. При этом, несмотря на большое количество исследований, в рамках рассматриваемой тематики продолжают возникать новые постановки задач, многие из которых остаются открытыми.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук Фурсову Андрею Серафимовичу за по-

становку задачи и внимание к работе, профессорско–преподавательскому составу факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова за полученное образование, а также всем сотрудникам кафедры Нелинейных динамических систем и процессов управления факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова за поддержку и внимание к диссертационной работе.

Список литературы

1. *Емельянов С. В.* Системы автоматического управления с переменной структурой. — М. : Наука, 1967.
2. *Емельянов С. В.* Теория систем автоматического управления с переменной структурой: зарождение и начальный этап развития // *Нелинейная динамика и управление.* Вып. 4. — 2004. — С. 5—16.
3. *Цыпкин Я. З.* Теория линейных импульсных систем. — М.: Физматгиз, 1963. — С. 970.
4. *Лурье А. И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. — М.: Гостехиздат., 1951. — С. 216.
5. *Бусленко Н. П.* Математическое моделирование производственных процессов на цифровых вычислительных машинах. — Издательство: М., Наука, 1964. — С. 364.
6. *Глушков В. М.* Программное обеспечение моделирования непрерывно-дискретных систем. — Издательство: М., Наука, 1975.
7. *Harel D.* Statecharts: A Visual Formalism for Complex Systems // *Science of Computer Programming.* — 1987. — Т. 8, № 3. — С. 231—274.
8. *Pnueli A.* Timed and hybrid statecharts and their textual representations // *Second International Symposium Nijmegen.* — 1992. — Т. 571. — С. 591—620.
9. *Esposito J. M., Kumar V., Pappas G. J.* Accurate event detection for simulating hybrid systems // *Hybrid Systems: Computation and Control (HSCC).* — 2001. — С. 204—217.
10. *Esposito J. M., Kumar V.* Event detection near singularities // *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation.* — 2007. — Т. 17. — С. 1—22.

11. *Lee E. A., Zhenq H.* Operational Semantics of Hybrid Systems // Proc. of Hybrid Systems: Computational and Control (HSCC). — 2005. — Т. 3414. — С. 25—53.
12. *Карпов Ю. Г.* Имитационное моделирование систем. Введение в моделирование с AnyLogic 5. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — С. 400.
13. *Карпов Ю. Г.* Теория автоматов. — СПб.: Питер, 2002. — С. 224.
14. *Колесов Ю. Б., Сениченков Ю. Б.* Моделирование систем. Объектно-ориентированный подход: Учебное пособие. — СПб.: БХВ-Петербург, 2006. — С. 192.
15. *Колесов Ю. Б.* Объектно-ориентированное моделирование сложных динамических систем. — СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2004. — С. 239.
16. *Новиков Е. А., Шорников Ю. В.* Компьютерное моделирование жестких гибридных систем: монография. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012. — С. 451.
17. *Новиков Е. А., Шорников Ю. В.* Программа моделирования сложных динамических систем с запаздыванием // Алгоритмы и программы. — 1985. — Т. 67, № 4. — С. 31.
18. *Новиков Е. А., Шорников Ю. В.* Численное моделирование гибридных систем явными методами // Вычислительные технологии. — 2008. — Т. 13, № 2. — С. 88—104.
19. *Сениченков Ю. Б.* Основы теории и средства моделирования гибридных систем. — СПб, 2005. — С. 233.
20. *Сениченков Ю. Б.* Численное моделирование гибридных систем. — СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2004. — С. 206.
21. *Liberzon D.* Switching in system and control. — Boston: Birkhauser, 2003.

22. *Mahmoud M. S.* Switched time-delay systems: Stability and control. — Springer Science Business Media, LCC, 2010.
23. *Шпилевая О. А., Котов К. Ю.* Переключаемые системы: устойчивость и проектирование (обзор // Автометрия. — 2008. — Т. 44, № 5. — С. 71—87.
24. *Васильев С. Н., Маликов А. И.* О некоторых результатах по устойчивости переключаемых и гибридных систем // Сборник статей «Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН». Казань: Фолиант. — 2011. — Т. 1. — С. 23—81.
25. *Rewienski M., White J.* Model order reduction for nonlinear dynamical systems based on trajectory piecewise-linear approximations // Linear Algebra and its Applications. — 2006. — Т. 415. — С. 426—454.
26. *Johanson M.* Piecewise linear control systems. A Computational Approach. — Springer Berlin, Heidelberg, 2003.
27. *Sun Z., Ge S. S.* Stability theory of switched dynamical systems. — Springer-Verlag London Limited, 2011.
28. *Барсегян В. Р.* Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. — М.: Наука, 2016.
29. *Ащепков Л. Т.* Оптимальное управление системой с промежуточными условиями // ПММ. — 1981. — Т. 45, № 2. — С. 215—222.
30. *Ащепков Л. Т.* Оптимальное управление разрывными системами. — Новосибирск: Наука, 1987. — С. 227.
31. *Болтянский В. Г.* Задача оптимизации со сменой фазового пространства // Дифференциальные уравнения. — 1983. — Т. 19, № 3. — С. 518—521.
32. *Бортаковский А. С.* Необходимые условия оптимальности гибридных систем переменной размерности // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2022. — № 1. — С. 28—40.

33. *Кириллов А. Н.* Динамические системы с переменной структурой и размерностью // Известия вузов. Приборостроение. — 2009. — Т. 52, № 3. — С. 23—28.
34. *Казмерчук П. В.* Дифференцирование функционалов на траектории составной динамической системы // Электронный журнал «Труды МАИ». — 2010. — № 41. — С. 1—21.
35. *Охтилев М. Ю., Соколов Б. В., Юсупов Р. М.* Интеллектуальные технологии мониторинга и управление структурной динамикой сложных динамических объектов. — М: Наука, 1987. — С. 410.
36. *Величенко В. В.* Условия оптимальности в задачах управления с промежуточными условиями // Докл.АН СССР. — 1967. — Т. 174. — С. 1011—1013.
37. *Бортаковский А. С.* Задача оптимального управления в системе со структурными изменениями // Мехатроника, оптимизация, управление. — 2011. — № 9. — С. 2—7.
38. *Максимова И. С., Розова В. Н.* Достаточные условия управляемости в задаче со сменой фазового пространства // Вестник ТГУ. — 2011. — Т. 16, № 3. — С. 742—747.
39. *Ащепков Л. Т., Давыдов Д. В.* Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления. — М., 2006.
40. Stability analysis and controller synthesis for hybrid dynamical systems / W. P. M. H. Heemels [и др.] // Phil. Trans. R. Soc. A. — 2010. — Т. 368. — С. 4937—4960.
41. *Hespanha J. P.* Uniform stability of switched linear systems: extensions of LaSalle's Invariance Principle // Automatic Control, IEEE Transactions. — 2004. — Т. 49, № 4. — С. 470—482.

42. *Платонов А. В.* К вопросу об асимптотической устойчивости решений разностных систем с переключениями // Автоматика и телемеханика. — 2018. — № 5. — С. 46—58.
43. *Александров А. Ю., Платонов А. В.* Об асимптотической устойчивости решений гибридных многосвязных систем // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 5. — С. 18—30.
44. *Косов А. А., Козлов М. В.* Об асимптотической устойчивости однородных сингулярных систем с переключениями // Автоматика и телемеханика. — 2019. — № 3. — С. 45—54.
45. *Маликов А. И.* Оценивание состояния и стабилизация дискретных систем с неопределенными нелинейностями и возмущениями // Автоматика и телемеханика. — 2019. — № 11. — С. 59—82.
46. *Каменецкий В. А.* Частотные условия устойчивости дискретных систем с переключениями // Автоматика и телемеханика. — 2018. — № 8. — С. 3—26.
47. *Гелиг А. Х., Зубер И. Е.* Стабилизация некоторых классов неопределенных систем с помощью прямого и непрямого управления. I. Непрерывные системы // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 8. — С. 76—90.
48. *Гелиг А. Х., Зубер И. Е.* Стабилизация некоторых классов неопределенных систем с помощью прямого и непрямого управления. II. Импульсные и дискретные системы // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 9. — С. 72—87.
49. *Краснова С. А., Сиротина Т. Г., Уткин В. А.* Структурный подход к робастному управлению // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 8. — С. 65—95.

50. *Поляков А. Е.* О практической стабилизации систем с релейным запаздывающим управлением // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 11. — С. 81—95.
51. *Zhai G., Lin H., Antsaklis P. J.* Quadratic stabilizability of switched linear systems with polytopic uncertainties // International Journal of Control. — 2003. — Т. 76, № 7. — С. 747—753.
52. *Александров А. Ю., Мейсон О.* О диагональной устойчивости позитивных систем с переключениями и запаздыванием // Автоматика и телемеханика. — 2018. — № 12. — С. 16—33.
53. *Sun Z., Zheng D. Z.* On reachability and stabilization of switched linear control systems // IEEE Trans. Automat. Contr. — 2001. — Т. 46. — С. 291—295.
54. *Hien L. V., Ha Q. P., Phat V. N.* Stability and stabilization of switched linear dynamic systems with time delay and uncertainties // Applied Mathematics and Computation 210. — 2009. — С. 223—231.
55. *Zong G. D., Wu Y.* Exponential stability of a class of switched and hybrid systems // Proceedings of the IEEE on Control Automat. Robotics and Vision. — 2004. — С. 2244—2249.
56. *Александров А. Ю., Косов А. А., Чэнь Я.* Об устойчивости и стабилизации механических систем с переключениями // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 6. — С. 5—17.
57. *Luo S., Deng F.* Stabilization of hybrid stochastic systems in the presence of asynchronous switching and input delay // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems 32. — 2019. — С. 254—266.
58. *Xiang W.* Stabilization for continuous-time switched linear systems: A mixed switching scheme // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2018. — Т. 63, № 4. — С. 1220—1226.

59. *Lou X., Li Y., Sanfelice R. G.* Robust stability of hybrid limit cycles with multiple jumps in hybrid dynamical systems // *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*. — 2020. — Т. 36.
60. *Schill M., Buss M.* Robust ballistic catching: a hybrid system stabilization problem // *IEEE Transactions on Robotics*. — 2018. — Т. 6. — С. 1502—1517.
61. *Pettersson S., Lennartson B.* Stabilization of hybrid systems using a min-projection strategy // *Proc. 2001 American Contr. Conf.* — 2001. — С. 223—228.
62. *Баландин Д. В., Коган М. М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
63. *Blondel V.* Simultaneous stabilization of linear systems. — pringer-Verlag, 1994.
64. *Ким Д. П.* Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. — М., 2004.
65. *Поляк Б., Щербаков П.* Сверхустойчивые линейные системы управления. I. Анализ. — 2002.
66. *Александров А. Г.* Оптимальные и адаптивные системы. — М., 1989.
67. Одновременная стабилизация объектов различных порядков / С. В. Емельянов [и др.] // *Дифференциальные уравнения*. — 2013. — Т. 49, № 5. — С. 649—655.
68. *Емельянов С. В., Фомичёв В. В., Фурсов А. С.* Одновременная стабилизация линейных динамических объектов регулятором переменной структуры // *Автоматика и телемеханика*. — 2012. — Т. 7. — С. 15—24.
69. *Коровин С. К., Кудрицкий А. В., Фурсов А. С.* О некоторых подходах к одновременной стабилизации линейных объектов регулятором заданной структуры // *Дифференц. уравнения*. — 2009. — Т. 45, № 4. — С. 597—608.

70. *Коровин С. К., Миняев С. И., Фурсов А. С.* Подход к одновременной стабилизации линейных динамических объектов с запаздыванием // Дифференц. уравнения. — 2011. — Т. 47, № 11. — С. 1592—1598.
71. Топологический подход к задаче существования общего стабилизатора для семейства динамических систем / С. К. Коровин [и др.] // Докл. РАН. — 2011. — Т. 441, № 6. — С. 737—742.
72. *Бобылёва О. Н., Фомичёв В. В., Фурсов А. С.* Достаточные условия существования общего стабилизатора для семейства линейных нестационарных объектов // Дифференц. уравнения. — 2012. — Т. 48, № 7. — С. 917—924.
73. О построении общего стабилизатора для семейств линейных нестационарных объектов / А. В. Ильин [и др.] // Докл. РАН. — 2013. — Т. 448, № 3. — С. 279—284.
74. *Фурсов А. С.* Одновременная стабилизация: теория построения универсального регулятора для семейства динамических объектов. — М.: АРГА-МАК-МЕДИА, 2016.
75. *Поляк Б., Хлебников М. В., Рапопорт Л. Б.* Математическая теория автоматического управления: учебное пособие. — М.: ЛЕНАНД, 2019.
76. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1976.
77. *Поляков К. Ю.* Основы теории цифровых систем управления: учеб. пособие. — СПбГМТУ, 2002.
78. *Фурсов А. С., Хусаинов Э. Ф.* К вопросу о стабилизации переключаемых линейных систем // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 7. — С. 1522—1533.
79. *Фурсов А. С., Капалин И. В.* Стабилизация переключаемых линейных систем регулятором переменной структуры // Дифференциальные уравнения. — 2016. — Т. 52, № 8. — С. 1109—1120.

80. *Фурсов А. С., Миняев С. И., Исхаков Э. А.* Построение цифрового стабилизатора для переключаемой линейной системы // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 8. — С. 1121—1127.
81. *Фурсов А. С., Капалин И. В., Хоншан Х.* Стабилизация векторных по входу переключаемых линейных систем регулятором переменной структуры // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 11. — С. 1532—1542.
82. *Фурсов А. С., Миняев С. И., Гусева В. С.* Построение цифрового стабилизатора для переключаемой линейной системы с запаздыванием в управлении // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 8. — С. 1132—1141.
83. Стабилизация векторных по входу переключаемых линейных систем с режимами различных динамических порядков / А. С. Фурсов [и др.] // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 11. — С. 1540—1546.
84. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985.
85. *Халил Х. К.* Нелинейные системы. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2009. — С. 832.
86. *Шарый С. П.* Конечномерный интервальный анализ. — М., 2007.
87. *Поляк Б., Щербаков П.* Робастная устойчивость и управление. — М., 2002.
88. *Иванов В. А., Ющенко А.* Теория дискретных систем автоматического управления. — М.: Наука, 1983.
89. *Поляк Б., Хлебников М. В., Щербаков П.* Управление системами при внешних возмущениях. — М.: ЛЕНАНД, 2014.
90. *Liberzon D., Morse A.* Basic problems in stability and design of switched systems // IEEE Control Systems. — 1999. — Т. 19, № 5. — С. 59—70.

91. *Тимохин А. Н.* Моделирование систем управления с применением Matlab: учебное пособие. — М.: ИНФРА-М, 2021.
92. *Фурсов А. С., Капалин И. В.* Некоторые подходы к стабилизации переключаемых линейных систем с режимами различных динамических порядков // Дифференциальные уравнения. — 2019. — Т. 55, № 12. — С. 1693—1700.
93. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. Т. 55. — М., 1981.
94. Прикладной интервальный анализ / Л. Жолен [и др.]. — М. : Ижевск, 2007.
95. *Андреев Ю. Н.* Управление конечномерными линейными объектами. — М.: Наука, 1976.
96. *Фурсов А. С., Хусаинов Э. Ф.* Сверхстабилизация линейных динамических объектов при действии оперативных возмущений // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50, № 7. — С. 865—876.
97. *Хайкин С.* Нейронные сети. — М.: Издательский дом "Вильямс", 2006.

Публикации автора по теме диссертации

Основные публикации автора по теме диссертации в журналах, индексируемых Web of Science, Scopus, RSCI, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ:

1. Фурсов А. С., Миняев С. И., Мосолова Ю. М. Синтез цифрового стабилизатора по выходу для переключаемой интервальной линейной системы // Дифференциальные уравнения. — 2019. — Т. 55, № 11. — С. 1545—1559. — (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0,855). Перевод:
Fursov A.S., Minyaev S.I., Mosolova Yu M. Synthesis of a digital output controller for a switched interval linear system // Differential Equations. — 2019. — Vol.

55, no. 11. — P. 1503–1517. — (RSCI, Web of Science, Scopus, Five Year Impact Factor 2022 — 0.6, SJR — 0.57).

Работа опубликована в открытой печати. Автором разработаны методы решения задач и получены все основные результаты. Научным руководителем, профессором А.С. Фурсовым и С.И. Миняевым поставлены задачи и намечены направления их решения.

2. Фурсов А.С., Мосолова Ю.М., Миняев С.И. Цифровая сверхстабилизация переключаемой интервальной линейной системы // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т. 56, № 11. — С. 1516–1527. — (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0,855). Перевод: Fursov A.S., Mosolova Yu M., Minyaev S.I. Digital superstabilization of a switched interval linear system // Differential Equations. — 2020. — Vol. 56, no. 11. — P. 1524–1535. — (RSCI, Web of Science, Scopus, Five Year Impact Factor 2022 — 0.6, SJR — 0.57).

Работа опубликована в открытой печати. Автором разработаны методы решения задач и получены все основные результаты. Научным руководителем, профессором А.С. Фурсовым и С.И. Миняевым поставлены задачи и намечены направления их решения.

3. Фурсов А.С., Мосолова Ю.М. Построение систем стабилизации для переключаемых интервальных объектов с режимами различных порядков // Дифференциальные уравнения. — 2021. — Т. 57, № 11. — С. 1555–1563. — (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0,855). Перевод:

Fursov A.S., Mosolova Yu M. Construction of stabilization systems for switched interval plants with modes of different orders // Differential Equations. — 2021. — Vol. 57, no. 11. — P. 1536–1544. — (RSCI, Web of Science, Scopus, Five Year Impact Factor 2022 — 0.6, SJR — 0.57).

Работа опубликована в открытой печати. Автором разработаны методы ре-

шения задач и получены все основные результаты. Научным руководителем, профессором А.С. Фурсовым поставлены задачи и намечены направления их решения.

4. Фурсов А.С., Мосолова Ю.М. Достаточные условия существования стабилизирующих регуляторов для переключаемых интервальных систем // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т. 58, № 4. — С. 534–544. — (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0,855).

Перевод:

Fursov A.S., Mosolova Yu M. Sufficient conditions for the existence of stabilizing controllers for switched interval systems // Differential Equations. — 2022. — Vol. 58, no. 4. — P. 535–545. — (RSCI, Web of Science, Scopus, Five Year Impact Factor 2022 — 0.6, SJR — 0.57).

Работа опубликована в открытой печати. Автором разработаны методы решения задач и получены все основные результаты. Научным руководителем, профессором А.С. Фурсовым поставлены задачи и намечены направления их решения.

5. Фурсов А.С., Мосолова Ю.М. Теоретические аспекты построения нейрорегулятора для переключаемых систем // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т. 58, № 11. — С. 1548–1556. — (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0,855). Перевод:

Fursov A.S., Mosolova Yu M. Theoretical aspects of constructing a neurocontroller for switched systems // Differential Equations. — 2022. — Vol. 58, no. 11. — P. 1549–1557. — (RSCI, Web of Science, Scopus, Five Year Impact Factor 2022 — 0.6, SJR — 0.57).

Работа опубликована в открытой печати. Автором разработаны методы решения задач и получены все основные результаты. Научным руководителем, профессором А.С. Фурсовым поставлены задачи и намечены направления их решения.

6. Мосолова Ю.М. Численная реализация алгоритма поиска сверхстабилизатора для переключаемых интервальных систем // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. — 2023, — Т. 1, — С. 42-53.— (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, импакт-фактор РИНЦ 2021: 0,077). Перевод:
Mosolova Yu. M. Numerical Implementation of an Algorithm for Searching for a Superstabilizer for Switched Interval Systems // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. — 2023, — Vol. 47. — P. 33-44. — (RSCI).
Работа опубликована в открытой печати.
7. Фурсов А.С., Мосолова Ю.М. Некоторые теоретические аспекты нейросетевого подхода к стабилизации переключаемых интервальных систем // Дифференциальные уравнения. — 2023. — Т. 59, № 10. — С. 1425–1432. — (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0,855). Перевод:
Mosolova Yu M., Fursov A.S. Some theoretical aspects of the neural network approach to stabilization of switched interval systems // Differential Equations. — 2023. — Vol. 59, no. 10. — P. 1425–1432. — (RSCI, Web of Science, Scopus, Five Year Impact Factor 2022 — 0.6, SJR — 0.57).
Работа опубликована в открытой печати. Автором разработаны методы решения задач и получены все основные результаты. Научным руководителем, профессором А.С. Фурсовым поставлены задачи и намечены направления их решения.

Иные публикации автора по теме диссертации

8. Мосолова Ю. М., Фурсов А. С. Стабилизация переключаемой интервальной линейной системы цифровым регулятором // Ломоносовские чтения-2019: научная конференция, факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова. Тезисы докладов. — Москва : ООО "МАКС Пресс". — 2019. — С. 109–111.

9. Фурсов А. С., Мосолова Ю. М. Стабилизация переключаемой линейной системы в условиях параметрической неопределенности // Материалы XV Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». — ИПУ РАН Москва. — 2020. — С. 439–442.
10. Fursov A., Mosolova Y. Switched linear system stabilization under parametric uncertainty // IEEE Xplore: 15th International Conference on Stability and Oscillation of Nonlinear Control Systems. — Moscow. — 2020.
11. Фурсов А. С., Мосолова Ю. М., Османов А. Особенности численной реализации алгоритма построения цифрового стабилизатора для параметрически неопределенной переключаемой системы (О семинаре по проблемам нелинейной динамики и управления при Московском государственном университете) // Дифференциальные уравнения. — 2021. — Т. 57, № 2. — С. 286–288.
12. Фурсов А. С., Мосолова Ю. М. Некоторые подходы к стабилизации переключаемых интервальных систем // Интеллектуальные системы. Теория и приложения (ранее: Интеллектуальные системы по 2014, № 2, ISSN 2075-9460). — 2021. — Т. 25, № 4. — С. 297–300.
13. Фурсов А. С., Мосолова Ю. М. К вопросу о стабилизации переключаемых интервальных систем с режимами различных динамических порядков // Ломоносовские чтения-2021: научная конференция, факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова. Тезисы докладов. — Изд-во Моск. ун-та. — 2021. — С. 153–155.
14. Фурсов А. С., Мосолова Ю. М. Перспективы использования нейрорегуляторов для стабилизации переключаемых систем (О семинаре по проблемам нелинейной динамики и управления при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова) // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т. 58, № 2. — С. 280–281.

15. Фурсов А. С., Мосолова Ю. М. К вопросу о существовании стабилизирующей обратной связи для переключаемых интервальных систем // Ломоносовские чтения-2022: научная конференция, факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова. Тезисы докладов. — Москва : ООО "МАКС Пресс". — 2022. — С. 92–94.
16. Фурсов А. С., Мосолова Ю. М. Некоторые вопросы применения нейросетевого подхода в задаче стабилизации переключаемых интервальных систем // Ломоносовские чтения-2023: научная конференция, факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова. Тезисы докладов. — Москва : ООО "МАКС Пресс". — 2023. — С. 89–90.

Приложение А

Верификация достаточного условия устойчивости линейной переключаемой системы.

А.1. Случай линейных переключаемых систем без параметрической неопределённости.

1. Задание исходных систем. Сперва задача стабилизации решалась для линейных переключаемых систем вида (1.17) с "точечными" матрицами. Было задано два режима со следующими матрицами (код представлен в виде М-файла):

$$A1 = [0 \ -2; \ 1 \ -3];$$

$$B1 = [2; \ 0];$$

$$C1 = [0 \ 1];$$

$$D1 = 0;$$

$$\text{sys1} = \text{ss}(A1, B1, C1, D1);$$

$$A2 = [-3 \ 1; \ 0 \ -2];$$

$$B2 = [1; \ 0];$$

$$C2 = [0 \ 1];$$

$$D2 = 0;$$

$$\text{sys2} = \text{ss}(A2, B2, C2, D2);$$

Для переключения состояния системы была использована функция `rand()`, использование которой позволило менять состояние системы в произвольный заранее неизвестный момент (код представлен в виде М-файла):

$$\text{currentState} = 1;$$

```

time = 0:T:1;

switches = zeros(size(time));
cur_sys = sys1;

for idx = 1:length(time)
    t = time(idx);

    if rand() < 0.01
        if currentState == 1
            currentState = 2;
            cur_sys = 2;
        else
            currentState = 1;
            cur_sys = 1;
        end
    end

    switches(idx) = currentState;
end

```

2. Вывод графика (рис. А.1.) переключения режимов (код расчета представлен в виде М-файла):

```

figure;
plot(time, switches, 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Time');
ylabel('State');
title('Switching between states');

```

```
ylim([0.5 2.5]);  
yticks([1 2]);  
yticklabels({'State 1', 'State 2'});  
grid on;
```

```
A1 = [0 -2; 1 -3];
```

```
B1 = [2; 0];
```

```
C1 = [0 1];
```

```
D1 = 0;
```

```
A2 = [-3 1; 0 -2];
```

```
B2 = [1; 0];
```

```
C2 = [0 1];
```

```
D2 = 0;
```

Построен график переключения состояний системы, который в один из запусков имеет вид:

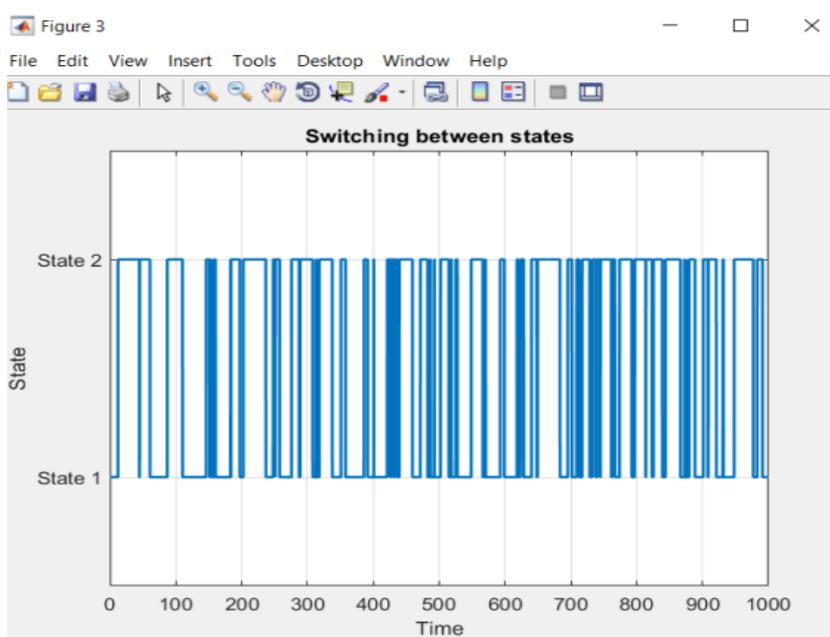


Рисунок А.1. Переключающий сигнал.

3. Поиск параметров регулятора. При замыкании заданных исходных систем регулятором вида (1.11)-(1.12) были определены перебором по сетке наилучшие параметры данного регулятора (H, h, Q, q) , стабилизирующего замкнутые системы вида (1.13). Для этого для дискретной модели системы (1.18) составлялась система матричных неравенств (1.59), реализован поиск общей функции Ляпунова и самих параметров регулятора (код расчета представлен в виде М-файла):

```
T = 0.1;
l = 1000;

L = sdpvar(3,3);

best_L = [];
best_h = 0;
best_H = 0;
best_q = 0;
best_Q = 0;
best_cost = Inf;

solution_found = false;
for h = 0.1:0.1:0.4
    for H = 0.1:0.1:0.4
        for q = 0.1:0.1:0.4
            for Q = 0.1:0.1:0.4
```

Задание матриц (1.19) для дискретных переключаемых систем, замкнутых регулятором вида (1.11)-(1.12) и поиск общей функции Ляпунова.

```
A_d = expm(A1*T);
```

```

B_d = integral(@(x) expm(A1*x), 0, T, ...
'ArrayValued', true) * B1;

Lambda = [A_d + B_d*h*C1, B_d*H; C1*q, Q];

A_d2 = expm(A2*T);
B_d2 = integral(@(x) expm(A2*x), 0, T, ...
'ArrayValued', true) * B2;

Lambda2 = [A_d2 + B_d2*h*C2, B_d2*H; C2*q, Q];

Constraints = [L >= 0, Lambda'*L*Lambda - L <= 0, ...
Lambda2'*L*Lambda2 - L <= 0];

info = optimize(Constraints);

if info.problem == 0
    solution_L = value(L);

    cost = sum(eig(solution_L));

    if cost < best_cost
        best_L = solution_L;
        best_h = h;
        best_H = H;
        best_q = q;
        best_Q = Q;
        best_cost = cost;
    end
end

```

```

        solution_found = true;
    end
end
end
end
end
end

if solution_found
    disp('Best solution:');
    disp(best_L);
    disp(['h = ', num2str(best_h), ', H = ', num2str(best_H), ', ...
    q = ', num2str(best_q), ', Q = ', num2str(best_Q)]);
else
    disp('No feasible solution found.');
```

```

end

h = best_h;
H = best_H;
q = best_q;
Q = best_Q;
```

В результате выполнения части кода получена информация о разрешимости системы матричных неравенств при параметрах регулятора $H = 0.4, h = 0.4, Q = 0.2, q = 0.4$.

```

num_steps = 1 + 1;
v(1) = 0.1; % v[0] = v0 = 1
x(:, 1) = [0.05; 0.05]; % Начальные условия
```

```

for i = 1:num_steps - 1
    x(:, i+1) = (A_d + h * B_d * C1) * x(:, i) + B_d * H * v(i);
    v(i+1) = q * C1 * x(:, i) + Q * v(i);
end

norm_x = vecnorm(x);
norm_v = abs(v);

figure;
subplot(2,1,1);
plot(0:l, norm_x, 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Time Step (l)');
ylabel('||x[lT]||');
title('Norm of State Vector ||x[lT]||');
grid on;

subplot(2,1,2);
plot(0:l, norm_v, 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Time Step (l)');
ylabel('||v[lT]||');
title('Norm of Value v[lT]');
grid on;

combined_norm = sqrt(norm_x.^2 + norm_v.^2);
figure;
plot(0:l, combined_norm, 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Time Step (l)');
ylabel('Combined Norm');
title('Combined Norm of State and Value');

```

```
grid on;
```

А.2. Случай линейных интервальных переключаемых систем.

1. Заданы интервальные матрицы системы. Для дальнейшей работы с такими матрицами использовались "левые" и "правые" матрицы - матрицы для левых границ отрезков интервалов и соответственно для правых (в формулах левые границы обозначались буквой с чертой снизу, правые - сверху):

```
A1_new = [[-0.1 0.1] [-2.1 -1.9]; [0.9 1.1] [-3.1 -2.9]];
```

```
B1_new = [[1.9 2.1]; [-0.1 0.1]];
```

```
C1_new = [[-0.1 0.1] [0.9 1.1]];
```

```
A2_new = [[-3.1,-2.9] [0.9,1.1]; [-0.1,0.1] [-2.1,-1.9]];
```

```
B2_new = [[0.9,1.1]; [-0.1,0.1]];
```

```
C2_new = [[-0.1,0.1] [0.9,1.1]];
```

2. Вычисления значений для матриц интервальных систем. Использовались формулы (1.37), (1.39)-(1.40), (1.32)-(1.35) главы 1 (код расчета представлен в виде М-файла):

```
A1_0 = zeros(2, 2);
```

```
for i = 0:1
```

```
    for j = 1:2
```

```
        A1_0(i * 2 + j) = (A1_new(i * 4 + j) + ...  
            + A1_new(i * 4 + j + 2)) / 2;
```

```
    end
```

```
end
```

```

A2_0 = zeros(2, 2);
for i = 0:1
    for j = 1:2
        A2_0(i * 2 + j) = (A2_new(i * 4 + j) + ...
            + A2_new(i * 4 + j + 2)) / 2;
    end
end

deltaA1 = zeros(2, 2);
for i = 0:1
    for j = 1:2
        deltaA1(i * 2 + j) = (A1_new(i * 4 + j + 2) - ...
            - A1_new(i * 4 + j)) / 2;
    end
end

deltaA2 = zeros(2, 2);
for i = 0:1
    for j = 1:2
        deltaA2(i * 2 + j) = (A2_new(i * 4 + j + 2) - ...
            - A2_new(i * 4 + j)) / 2;
    end
end

B1_0 = zeros(2, 1);
for i = 1:2
    B1_0(i) = (B1_new(i) + B1_new(i+2))/2;
end

```

```

deltaB1 = zeros(2, 1);
for i = 1:2
    deltaB1(i) = (B1_new(i+2) - B1_new(i))/2;
end

B2_0 = zeros(2, 1);
for i = 1:2
    B2_0(i) = (B2_new(i) + B2_new(i+2))/2;
end

deltaB2 = zeros(2, 1);
for i = 1:2
    deltaB2(i) = (B2_new(i+2) - B2_new(i))/2;
end

Lambda1_L = expm(A1_0*T) - expm((abs(A1_0)+deltaA1)*T) + ...
+ expm(abs(A1_0)*T);
Lambda1_R = expm(A1_0*T) + expm((abs(A1_0)+deltaA1)*T) - ...
- expm(abs(A1_0)*T);

Lambda2_L = expm(A2_0*T) - expm((abs(A2_0)+deltaA2)*T) + ...
+ expm(abs(A2_0)*T);
Lambda2_R = expm(A2_0*T) + expm((abs(A2_0)+deltaA2)*T) - ...
- expm(abs(A2_0)*T);

Mu1_L = integral(@(x) ( expm(A1_0*(T-x))*B1_0 - ...
- (expm((abs(A1_0)+ deltaA1)*(T-x)) - ...
- expm(abs(A1_0)*(T-x)))*(abs(B1_0)+deltaB1)- ...

```

```

- abs(expm(A1_0*(T-x))*deltaB1), 0, T, 'ArrayValued', true);
Mu1_R = integral(@(x) ( expm(A1_0*(T-x))*B1_0 + ...
+ (expm((abs(A1_0)+ deltaA1)*(T-x)) - ...
- expm(abs(A1_0)*(T-x)))*(abs(B1_0)+deltaB1)+ ...
+ abs(expm(A1_0*(T-x))*deltaB1), 0, T, 'ArrayValued', true);

```

```

Mu2_L = integral(@(x) ( expm(A2_0*(T-x))*B2_0 - ...
- (expm((abs(A2_0)+ deltaA2)*(T-x)) - ...
- expm(abs(A2_0)*(T-x)))*(abs(B2_0)+deltaB2) - ...
- abs(expm(A2_0*(T-x))*deltaB2), 0, T, 'ArrayValued', true);
Mu2_R = integral(@(x) ( expm(A2_0*(T-x))*B2_0 + ...
+ (expm((abs(A2_0)+ deltaA2)*(T-x)) - ...
- expm(abs(A2_0)*(T-x)))*(abs(B2_0)+deltaB2)+ ...
+ abs(expm(A2_0*(T-x))*deltaB2), 0, T, 'ArrayValued', true);

```

```

mu1_c1_L = [[min(min(min(Mu1_L(1)*C1_new(1),
Mu1_L(1)*C1_new(2)), ...
Mu1_R(1)*C1_new(1)), Mu1_R(1)*C1_new(2)), ...
min(min(min(Mu1_L(1)*C1_new(3), Mu1_L(1)*C1_new(4)), ...
Mu1_R(1)*C1_new(3)), Mu1_R(1)*C1_new(4))]
[ min(min(min(Mu1_L(2)*C1_new(1), Mu1_L(2)*C1_new(2)), ...
Mu1_R(2)*C1_new(1)), Mu1_R(2)*C1_new(2)), ...
min(min(min(Mu1_L(2)*C1_new(3), Mu1_L(2)*C1_new(4)), ...
Mu1_R(2)*C1_new(3)), Mu1_R(2)*C1_new(4))]];

```

```

mu1_c1_R = [[max(max(max(Mu1_L(1)*C1_new(1), Mu1_L(1)*C1_new(2)), ...
Mu1_R(1)*C1_new(1)), Mu1_R(1)*C1_new(2)), ...
max(max(max(Mu1_L(1)*C1_new(3), Mu1_L(1)*C1_new(4)), ...
Mu1_R(1)*C1_new(3)), Mu1_R(1)*C1_new(4))]

```

```

        [max(max(max(Mu1_L(2)*C1_new(1), Mu1_L(2)*C1_new(2)), ...
        Mu1_R(2)*C1_new(1)), Mu1_R(2)*C1_new(2)), ...
        max(max(max(Mu1_L(2)*C1_new(3), ...
        Mu1_L(2)*C1_new(4)), Mu1_R(2)*C1_new(3)), ...
        Mu1_R(2)*C1_new(4))]];

mu2_c2_L = [[min(min(min(Mu2_L(1)*C2_new(1), Mu2_L(1)*C2_new(2)), ...
        Mu2_R(1)*C2_new(1)), Mu2_R(1)*C2_new(2)), ...
        min(min(min(Mu2_L(1)*C2_new(3), Mu2_L(1)*C2_new(4)), ...
        Mu2_R(1)*C2_new(3)), Mu2_R(1)*C2_new(4))]
        [min(min(min(Mu2_L(2)*C2_new(1), Mu2_L(2)*C2_new(2)), ...
        Mu2_R(2)*C2_new(1)), Mu2_R(2)*C2_new(2)), ...
        min(min(min(Mu2_L(2)*C2_new(3), Mu2_L(2)*C2_new(4)), ...
        Mu2_R(2)*C2_new(3)), Mu2_R(2)*C2_new(4))]];

mu2_c2_R = [[max(max(max(Mu2_L(1)*C2_new(1),
        Mu2_L(1)*C2_new(2)), ...
        Mu2_R(1)*C2_new(1)), Mu2_R(1)*C2_new(2)), ...
        max(max(max(Mu2_L(1)*C2_new(3), Mu2_L(1)*C2_new(4)), ...
        Mu2_R(1)*C2_new(3)), Mu2_R(1)*C2_new(4))]
        [max(max(max(Mu2_L(2)*C2_new(1), Mu2_L(2)*C2_new(2)), ...
        Mu2_R(2)*C2_new(1)), Mu2_R(2)*C2_new(2)), ...
        max(max(max(Mu2_L(2)*C2_new(3), Mu2_L(2)*C2_new(4)), ...
        Mu2_R(2)*C2_new(3)), Mu2_R(2)*C2_new(4))]];

h = best_h;

Lambda1_mu1_h_c1_L = Lambda1_L + h * mu1_c1_L;
Lambda1_mu1_h_c1_R = Lambda1_R + h * mu1_c1_R;

```

$\text{Lambda2_mu2_h_c2_L} = \text{Lambda2_L} + h * \text{mu2_c2_L};$

$\text{Lambda2_mu2_h_c2_R} = \text{Lambda2_R} + h * \text{mu2_c2_R};$

$H = \text{best_H};$

$\text{mu1_H_L} = H * \text{Mu1_L};$

$\text{mu1_H_R} = H * \text{Mu1_R};$

$\text{mu2_H_L} = H * \text{Mu2_L};$

$\text{mu2_H_R} = H * \text{Mu2_R};$

$q = \text{best_q};$

$q_C1_new_L = [q * C1_new(1), q * C1_new(3)];$

$q_C1_new_R = [q * C1_new(2), q * C1_new(4)];$

$q_C2_new_L = [q * C2_new(1), q * C2_new(3)];$

$q_C2_new_R = [q * C2_new(2), q * C2_new(4)];$

$Q_L = \text{best_Q};$

$Q_R = \text{best_Q};$

$\text{Lambda_tilda_1_L} = [\text{Lambda1_mu1_h_c1_L}, \text{mu1_H_L}; q_C1_new_L, Q_L];$

$\text{Lambda_tilda_1_R} = [\text{Lambda1_mu1_h_c1_R}, \text{mu1_H_R}; q_C1_new_R, Q_R];$

$\text{Lambda_tilda_2_L} = [\text{Lambda2_mu2_h_c2_L}, \text{mu2_H_L}; q_C2_new_L, Q_L];$

$\text{Lambda_tilda_2_R} = [\text{Lambda2_mu2_h_c2_R}, \text{mu2_H_R}; q_C2_new_R, Q_R];$

3. Построение параллелотопа и вычисление координат его узлов с последующей проверкой устойчивости интервальной системы для найденных параметров регулятора (код расчёта представлен в виде М-файла):

```
tmp = reshape([Lambda_tilda_1_L(:)'; Lambda_tilda_1_R(:)'], 1, []);
tmp2 = reshape([Lambda_tilda_2_L(:)'; Lambda_tilda_2_R(:)'], 1, []);

Parallelotop1 = [];
Parallelotop2 = [];
for a = 1:2
    for b = 3:4
        for c = 5:6
            for d = 7:8
                for e = 9:10
                    for f = 11:12
                        for g = 13:14
                            for i = 15:16
                                for j = 17:18
                                    new_row = [tmp(a), tmp(b), ...
                                        tmp(c), tmp(d), ...
                                        tmp(e), tmp(f), ...
                                        tmp(g), tmp(i), ...
                                        tmp(j)];
                                    new_row2 = [tmp2(a), ...
                                        tmp2(b), tmp2(c), ...
                                        tmp2(d), tmp2(e), ...
                                        tmp2(f), tmp2(g), ...
                                        tmp2(i), tmp2(j)];
                                    Parallelotop1 = [Parallelotop1;
```



```

if info.problem == 0
    disp("YES");
    solution_L = value(L);
    disp('solution_L = ');
    disp(solution_L);
    cost = sum(eig(solution_L));
    disp("Solution cost: " + num2str(cost));
else
    disp("NO");
end

```

Построен график (рис. А.2.) поведения нормы соответствующего решения замкнутой системы. Норма стремится к нулю, что указывает на свойство устойчивости замкнутой переключаемой системы при найденных параметрах регуля-

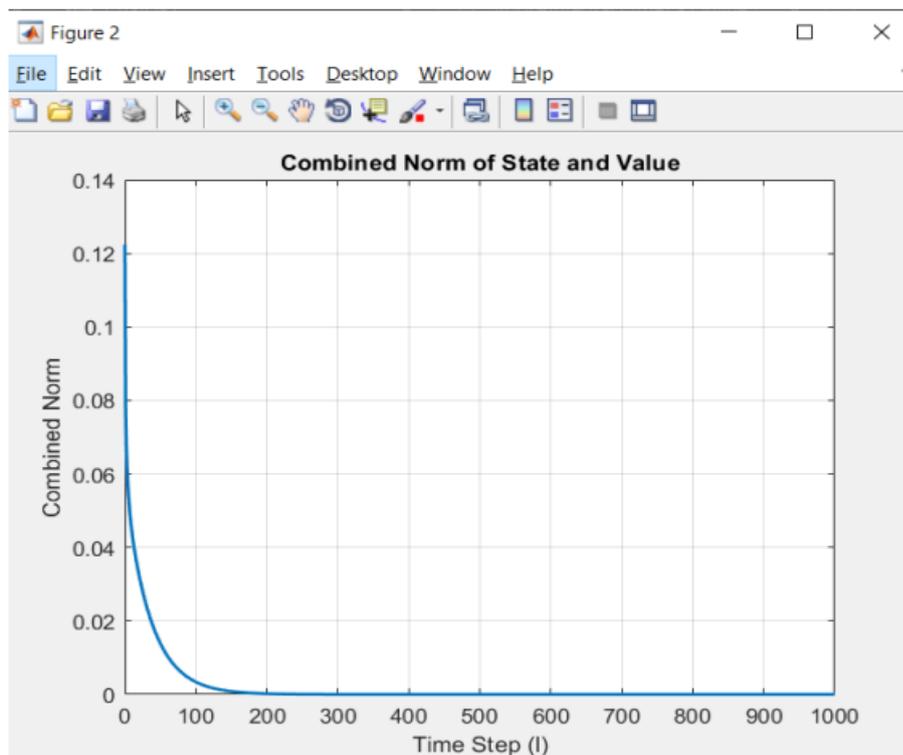


Рисунок А.2. Поведение нормы решения замкнутой системы.

тивности замкнутой переключаемой системы при найденных параметрах регуля-

тора $H = 0.4$, $h = 0.4$, $Q = 0.2$, $q = 0.4$ и общей функции Ляпунова

$$L = \begin{pmatrix} 1.1832 & -0.0705 & 0.0161 \\ -0.0705 & 1.4152 & -0.0918 \\ 0.0161 & -0.0918 & 0.9524 \end{pmatrix}.$$

Приложение Б

Программный модуль SFMCS (Stabilizing Feedback and Modeling Closed System)

1. Расчет стабилизирующей обратной связи (процедура SF) включает в себя:

а) расчет коэффициентов $\lambda_{p,j}^{(i)}$, $\mu_{p,j}^{(i)}$, $j = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, m}$, в соответствии с формулами (1.37), (1.39)-(1.40), (1.32)-(1.35) главы 1 (код расчета представлен в виде М-файла):

```
A_1_d = [-1 -1 ; 0 1];
```

```
%%нижняя граница интервальной матрицы A для первого режима
```

```
A_1_u = [2 1; 2 2];
```

```
%%верхняя граница интервальной матрицы A для первого режима
```

```
b_1_d = [1 ; 1];
```

```
%%нижняя граница интервальной матрицы b для первого режима
```

```
b_1_u = [2 ; 2];
```

```
%%верхняя граница интервальной матрицы b для первого режима
```

```
T = 1;
```

```
%%аналогичные входные данные для второго режима
```

```
A_2_d = [-1 -1; 0 -1];
```

```
A_2_u = [0 0; 3 3];
```

```
b_2_d = [-2 ; -2];
```

```
b_2_u = [-1 ; -1];
```

```
%%расчет формул (1.32)-(1.35) главы 1 для первого режима
```

```

A_1_0 = (A_1_u + A_1_d)/2;
delata_A_1 = (A_1_u - A_1_d)/2;
b_1_0 = (b_1_u + b_1_d)/2;
delata_b_1 = (b_1_u - b_1_d)/2;

%%расчет формул (1.32)-(1.35) главы 1 для второго режима

A_2_0 = (A_2_u + A_2_d)/2;
delata_A_2 = (A_2_u - A_2_d)/2;
b_2_0 = (b_2_u + b_2_d)/2;
delata_b_2 = (b_2_u - b_2_d)/2;
q = [1 0];

t = linspace(0, T, 1000);

%%расчет формулы (1.39) главы 1 для первого режима

f = @(xi) ...
    exp(A_1_0*(T-xi))*b_1_0 - ...
    (exp((abs(A_1_0)+delata_A_1)*(T-xi)) - ...
    exp(abs(A_1_0)*(T-xi)))*(abs(b_1_0)+delata_b_1) -...
    abs(exp(A_1_0*(T-xi)))*delata_b_1;
fv = zeros(1000, 2);
for i = 1:1000
    fv(i, :) = f(t(i));
end
mu_1_d = trapz(t, fv)';
%% нижняя граница для интервальной матрицы mu

```

```
%%расчет формулы (1.40) главы 1 для первого режима
```

```
f = @(xi) ...
```

```
    exp(A_1_0*(T-xi))*b_1_0 + ...
```

```
    (exp((abs(A_1_0)+delata_A_1)*(T-xi)) - ...
```

```
    exp(abs(A_1_0)*(T-xi)))*(abs(b_1_0)+delata_b_1) + ...
```

```
    abs(exp(A_1_0*(T-xi)))*delata_b_1;
```

```
fv = zeros(1000, 2);
```

```
for i = 1:1000
```

```
    fv(i, :) = f(t(i));
```

```
end
```

```
mu_1_u = trapz(t, fv)';
```

```
%% верхняя граница для интервальной матрицы mu
```

```
%%расчет формул (1.37) главы 1 для первого режима
```

```
lambda_1_d = exp(A_1_0*T) - exp((abs(A_1_0)+delata_A_1)*T) + ...
```

```
exp(abs(A_1_0)*T);
```

```
%%нижняя граница для интервальной матрицы lambda
```

```
lambda_1_u = exp(A_1_0*T) + exp((abs(A_1_0)+delata_A_1)*T) - ...
```

```
exp(abs(A_1_0)*T);
```

```
%%верхняя граница для интервальной матрицы lambda
```

```
k = [1 1];
```

```
%%расчет формул (2.24), (2.25) раздела 2.1 для первого режима
```

```

m_1_d = min(lambda_1_d - mu_1_d*k, lambda_1_u - mu_1_u*k );
%%нижняя граница для интервальной матрицы m

m_1_u = max(lambda_1_u - mu_1_u*k, lambda_1_d - mu_1_d*k );
%%верхняя граница для интервальной матрицы m

%%расчет формулы (1.39) главы 1 для второго режима

f = @(xi) ...
    exp(A_2_0*(T-xi))*b_2_0 - ...
    (exp((abs(A_2_0)+delata_A_2)*(T-xi)) - ...
    exp(abs(A_2_0)*(T-xi)))*(abs(b_2_0)+delata_b_2) -...
    abs(exp(A_2_0*(T-xi)))*delata_b_2;
fv = zeros(1000, 2);
for i = 1:1000
    fv(i, :) = f(t(i));
end
mu_2_d = trapz(t, fv)';
%% нижняя граница для интервальной матрицы mu

%%расчет формулы (1.40) главы 1 для второго режима

f = @(xi) ...
    exp(A_2_0*(T-xi))*b_2_0 + ...
    (exp((abs(A_2_0)+delata_A_2)*(T-xi)) - ...
    exp(abs(A_2_0)*(T-xi)))*(abs(b_2_0)+delata_b_2) +...
    abs(exp(A_2_0*(T-xi)))*delata_b_2;
fv = zeros(1000, 2);
for i = 1:1000

```

```

    fv(i, :) = f(t(i));
end
mu_2_u = trapz(t, fv)';
%% верхняя граница для интервальной матрицы mu

%%расчет формул (1.37) главы 1 для второго режима

lambda_2_d = exp(A_2_0*T) - exp((abs(A_2_0)+delata_A_2)*T) + ...
exp(abs(A_2_0)*T);
%% нижняя граница для интервальной матрицы lambda

lambda_2_u = exp(A_2_0*T) + exp((abs(A_2_0)+delata_A_2)*T) - ...
exp(abs(A_2_0)*T);
%% верхняя граница для интервальной матрицы lambda

%%расчет формул (2.24), (2.25) раздела 2.1 для второго режима

m_2_d = min(lambda_2_d - mu_2_d*K, lambda_2_u - mu_2_u*K )
%%нижняя граница для интервальной матрицы m

m_2_u = max(lambda_2_u - mu_2_u*K, lambda_2_d - mu_2_d*K )
%%верхняя граница для интервальной матрицы m

```

б) решение задачи линейного программирования (2.29), приведенной в разделе 2.1.3 (код расчета представлен в виде М-файла):

```

LambdaF0 = lambda_1_d;
%% нижняя граница интервальной матрицы lambda для первого режима
LambdaF1 = lambda_1_u;

```

```

%% верхняя граница интервальной матрицы lambda для первого режима
LambdaS0 = lambda_2_d;
%% нижняя граница интервальной матрицы lambda для второго режима
LambdaS1 = lambda_2_u;
%% верхняя граница интервальной матрицы lambda для второго режима

muF0 = mu_1_d;
%% нижняя граница интервальной матрицы mu для первого режима
muF1 = mu_1_u;
%% верхняя граница интервальной матрицы mu для первого режима
muS0 = mu_2_d;
%% нижняя граница интервальной матрицы mu для второго режима
muS1 = mu_2_u;
%% верхняя граница интервальной матрицы mu для второго режима

%% решаем задачу линейного программирования для интервальных матриц

f = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; ...
0; 0; 0; 0; 0; 0; 1];
h = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0;
-LambdaF0(1,1); LambdaF0(1,1); -LambdaF1(1,1); LambdaF1(1,1);
-LambdaF0(1,2); LambdaF0(1,2); -LambdaF1(1,2); LambdaF1(1,2);
-LambdaF0(2,1); LambdaF0(2,1); -LambdaF1(2,1); LambdaF1(2,1);
-LambdaF0(2,2); LambdaF0(2,2); -LambdaF1(2,2); LambdaF1(2,2);
0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0;
-LambdaS0(1,1); LambdaS0(1,1); -LambdaS1(1,1); LambdaS1(1,1);
-LambdaS0(1,2); LambdaS0(1,2); -LambdaS1(1,2); LambdaS1(1,2);
-LambdaS0(2,1); LambdaS0(2,1); -LambdaS1(2,1); LambdaS1(2,1);
-LambdaS0(2,2); LambdaS0(2,2); -LambdaS1(2,2); LambdaS1(2,2);

```



```

-0.5*(muF0(1)+muF1(1)) 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0.5 0 0 0 0 ...
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0.5*(muF0(1)+muF1(1)) 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 -0.5 0 0 0 0 ...
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 -0.5*(muF0(1)+muF1(1)) 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 -0.5 0 0 0 ...
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0.5*(muF0(1)+muF1(1)) 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0.5 0 0 0 0 ...
0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 -0.5*(muF0(1)+muF1(1)) 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0.5 0 0 0 ...
0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0.5*(muF0(1)+muF1(1)) 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 -0.5 0 0 0 ...
0 0 0 0 0 0 0 0 0;
(muF1(1)-muF0(1)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
0 0 0 0 0 0;
(muF0(1)-muF1(1)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
0 0 0 0 0 0;
0 (muF1(1)-muF0(1)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
0 0 0 0 0 0;
0 (muF0(1)-muF1(1)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
0 0 0 0 0 0;
(muF1(2)-muF0(2)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 ...
0 0 0 0 0 0;
(muF0(2)-muF1(2)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 ...
0 0 0 0 0 0;
0 (muF1(2)-muF0(2)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 ...
0 0 0 0 0 0;
0 (muF0(2)-muF1(2)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 ...
0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1;

```

```

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 -1;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 -1;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 -1;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 -1;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 -1;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 -1;
-0.5*(muS0(1)+muS1(1)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 ...
0 0 0 0 -0.5 0 0 0 0;
0.5*(muS0(1)+muS1(1)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 ...
0 0 0 0.5 0 0 0 0;
-0.5*(muS0(1)+muS1(1)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 ...
0 0 0 0 0.5 0 0 0 0;
0.5*(muS0(1)+muS1(1)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 ...
0 0 0 -0.5 0 0 0 0;
0 -0.5*(muS0(1)+muS1(1)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 ...
0 0 0 0 0 -0.5 0 0 0;
0 0.5*(muS0(1)+muS1(1)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 ...
0 0 0 0 0.5 0 0 0;
0 -0.5*(muS0(1)+muS1(1)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
-1 0 0 0 0 0.5 0 0 0;
0 0.5*(muS0(1)+muS1(1)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 ...
0 0 0 0 -0.5 0 0 0;
-0.5*(muS0(1)+muS1(1)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
-1 0 0 0 0 0 -0.5 0 0;
0.5*(muS0(1)+muS1(1)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 ...
0 0 0 0 0 0.5 0 0;
-0.5*(muS0(1)+muS1(1)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
-1 0 0 0 0 0.5 0 0;

```

```

0.5*(muS0(1)+muS1(1)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
-1 0 0 0 0 -0.5 0 0;
0 -0.5*(muS0(1)+muS1(1)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
0 0 -1 0 0 0 -0.5 0;
0 0.5*(muS0(1)+muS1(1)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
0 0 -1 0 0 0 0.5 0;
0 -0.5*(muS0(1)+muS1(1)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
0 0 -1 0 0 0 0.5 0;
0 0.5*(muS0(1)+muS1(1)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
0 0 -1 0 0 0 -0.5 0;
(muS1(1)-muS0(1)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
0 -1 0 0 0 0;
(muS0(1)-muS1(1)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
0 -1 0 0 0 0;
0 (muS1(1)-muS0(1)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
0 0 -1 0 0 0;
0 (muS0(1)-muS1(1)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
0 0 -1 0 0 0;
(muS1(2)-muS0(2)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
0 0 0 -1 0 0;
(muS0(2)-muS1(2)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
0 0 0 -1 0 0;
0 (muS1(2)-muS0(2)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
0 0 0 0 -1 0;
0 (muS0(2)-muS1(2)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
0 0 0 0 -1 0];

```

```

x = linprog(f,tA,h);
K = [x(1) x(2)];
r110f = x(3);

```

```
r111f = x(4);
r120f = x(5);
r121f = x(6);
r210f = x(7);
r211f = x(8);
r220f = x(9);
r221f = x(10);
l11f = x(11);
l12f = x(12);
l21f = x(13);
l22f = x(14);
r110s = x(15);
r111s = x(16);
r120s = x(17);
r121s = x(18);
r210s = x(19);
r211s = x(20);
r220s = x(21);
r221s = x(22);
l11s = x(23);
l12s = x(24);
l21s = x(25);
l22s = x(26);
sigma = x(27)
```

Отметим, что при решении задачи линейного программирования использовалась встроенная Matlab-функция `linprog`.

2. Моделирование интервальной переключаемой системы второго порядка с двумя режимами (процедура MCS), замкнутой линейной статической обрат-

ной связью. В качестве одного из входных параметров работы процедуры MCS является элемент интервального семейства. Выбор элемента интервального семейства переключаемой системы осуществляется посредством приведённого ниже программного кода в среде Matlab на основе случайного выбора (в формате М-файла):

```
%%расчет элементов матрицы A для первого режима с использованием  
функции rand (равномерно распределенного случайного числа)
```

```
A_1 = rand(2).*(A_1_u - A_1_d) + A_1_d;
```

```
%%расчет элементов матрицы A для второго режима с использованием  
функции rand (равномерно распределенного случайного числа)
```

```
A_2 = rand(2).*(A_2_u - A_2_d) + A_2_d;
```

```
%%расчет элементов матрицы b для первого режима с использованием  
функции rand (равномерно распределенного случайного числа)
```

```
b_1 = rand(2,1).*(b_1_u - b_1_d) + b_1_d;
```

```
%%расчет элементов матрицы b для второго режима с использованием  
функции rand (равномерно распределенного случайного числа)
```

```
b_2 = rand(2,1).*(b_2_u - b_2_d) + b_2_d.
```

Замкнутая переключаемая система реализована в среде Matlab (Simulink) в виде структурной схемы (см. рис. Б.1).

С помощью блока **Uniform Random Number** здесь синтезирован переключаемый сигнал. Данный блок использует обычный (гауссовский) генератор слу-

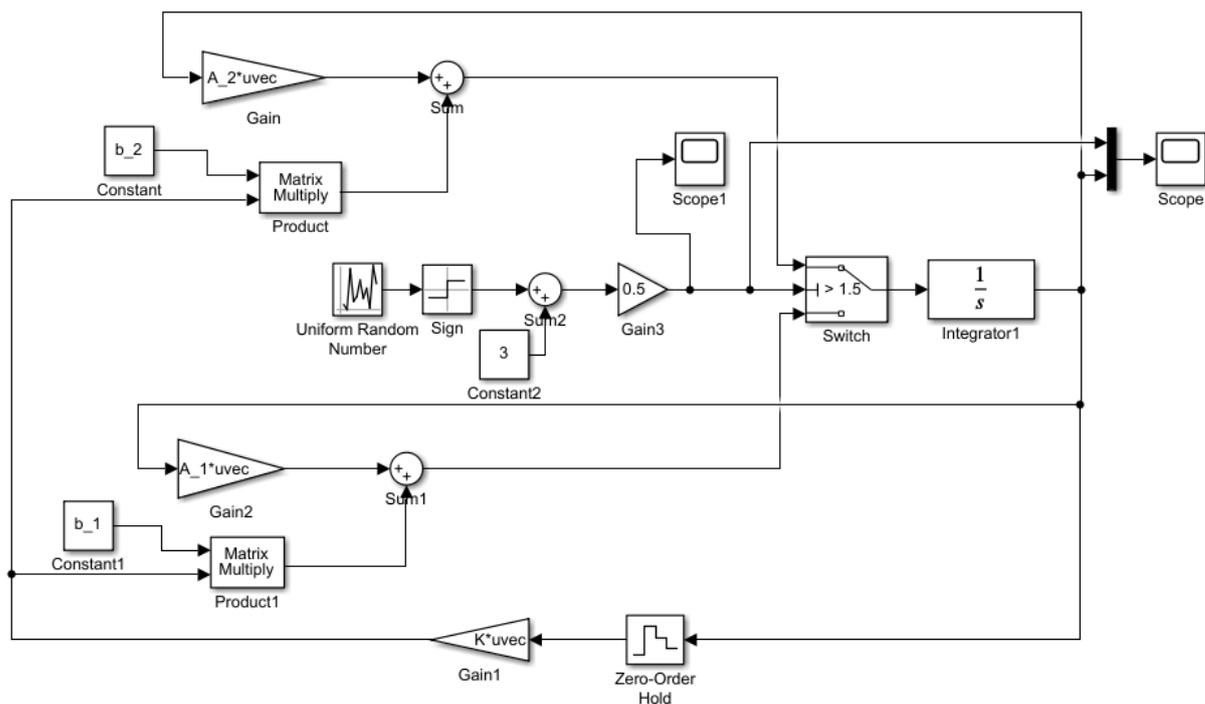


Рисунок Б.1. Структурная схема замкнутой переключаемой системы с двумя режимами.

чайных чисел. Переключающий сигнал подается на управление блока **Switch** для выбора соответствующего режима переключаемой системы. Если сигнал в блоке **Switch** не превосходит порогового значения, то в системе выбираются матрицы A_1 и b_1 (блоки **Gain2**, **Constant1**), соответствующие первому режиму. В противном случае, система выбирает матрицы A_2 и b_2 (блоки **Gain**, **Constant**), соответствующие второму режиму переключаемой системы. Блок **Zero-Order Hold** является формирующим элементом цифрового регулятора в виде фиксатора нулевого порядка. Для решения ОДУ используется решатель *ode1*, реализующий метод Эйлера.