

## ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации **И.С. Харчевой**  
**“Биллиардные книжки как способ реализации особенностей  
интегрируемых систем”**,  
представленной на соискание ученой степени  
кандидата физико - математических наук  
(специальность 1.1.3 – “Геометрия и топология”)

Диссертация Ирины Сергеевны Харчевой посвящена одному из центральных вопросов, возникающих во многих задачах дифференциальной геометрии, теории динамических систем, классической механики, математической физики, — вопросу интегрируемости. Грубо говоря, интегрируемость это "решаемость" системы, поскольку изначальный смысл слова "проинтегрировать" как раз заключался в том, чтобы найти решение. Более общо, интегрируемость выделяет достаточно узкий класс динамических систем, которые могут быть точно проинтегрированы, что накладывает существенные ограничения на геометрию фазовых пространств интегрируемых систем вместе с некоторыми геометрическими свойствами, исследованиями которых занимается множество геометров в самых разных областях математики. Например, очень популярным на сегодня являются исследования по торической геометрии, в фокусе которой фазовые пространства с наиболее правильным торическим действием, регулярно вырождающимся на компонентах правильной коразмерности, — и в таких терминах, например, формулируются конструкции Зеркальной симметрии. Однако Вселенная интегрируемых систем не уместается в существующие рамки, и даже случай систем с двумя степенями свободы — размерностно простейший — все еще позволяет далекие продвижения в новых направлениях и достижения важных новых результатов, что и показывает рецензируемая диссертационная работа.

Фазовое пространство вполне интегрируемой системы является геометрическим и топологическим объектом, и естественная задача — классификации интегрируемых систем — может быть произведена исходя из геометрических и топологических свойств фазовых пространств. Один из важных методов классификации был предложен А.Т. Фоменко: вводится понятие лиувиллевой эквивалентности интегрируемых систем и затем предлагается система инвариантов Фоменко (грубые молекулы) и Фоменко - Цишанга (меченые молекулы), при этом оказывается, что две интегрируемые системы лиувиллево эквивалентны когда и только когда их меченые молекулы совпадают.

С другой стороны, задача классификации требует выделения некоторого образцового класса интегрируемых систем, который бы служил "базисом". Таким подходящим классом оказался класс интегрируемых биллиардов и их обобщений. Классическая теорема об интегрируемости плоского биллиарда, ограниченного эллипсом, полученная Дж. Биркгофом, была обобщена В.В. Козловым и Д.В. Трещевым на области с кусочно - гладкими границами, составленными из дуг софокусных квадрик, далее оказалось что

такие куски можно склеивать в более сложные конфигурации, названные топологическими бильярдами, а затем в работах В.В. Ведюшкиной было показано, что из таких кусочков можно составлять целые комплексы ("бильiardные книжки"), причем соответствующая система остается интегрируемой. Именно такие системы и оказываются подходящим базисом для классификации интегрируемых систем с двумя степенями свободы по модулю Лиувиллевой эквивалентности.

В рамках такого подхода к задаче классификации интегрируемых систем была сформулирована гипотеза А.Т. Фоменко, состоящая из четырех пунктов, получивших со временем литерную нумерацию А, В, С и D и рассматриваемых сегодня как отдельные гипотезы, соединяемые общей преамбулой: "интегрируемыми бильiardными книжками можно моделировать..."

В диссертации рассматриваются и полностью доказываются гипотезы А и В. Гипотеза А утверждает, что интегрируемыми бильiardными книжками можно моделировать любой атом, или, иными словами, любую невырожденную боттовскую бифуркацию двумерных торов Лиувилля. Доказательство этой гипотезы составляет Пятую главу представленной диссертации. Гипотеза В утверждает, что интегрируемыми бильiardными книжками можно моделировать любую грубую молекулу, или, иными словами, базу любого слоения Лиувилля с невырожденными особенностями. Доказательство этой гипотезы составляет Шестую главу диссертации.

Таким образом, диссертация посвящена доказательству гипотез А и В, которые были полностью доказаны в соавторстве с В.В. Ведюшкиной. При этом личный вклад автора диссертации кроме совместных работ четко выделен еще и следующим: И.С. Харчева в сольной работе сделала важный шаг в общем ходе доказательства гипотез А и В, исследовав изоэнергетические многообразия интегрируемых бильiardных книжек и установив что такие многообразия являются топологическими кусочно - гладкими трехмерными многообразиями (Теорема 3.1).

Текст диссертации на 124 страницах содержит Введение, шесть Глав и Заключение, а также список литературы из 53 наименований, включающий в себя 5 работ автора по теме диссертации и 16 тезисов докладов автора по теме диссертации.

Во **Введении** автор представляет общие данные о теме диссертации, методах решения главных задач диссертации, опирающихся на новую теорию, объединившую теорию классического бильiardа и теорию интегрируемых систем. Далее представлены основные положения, выносимые на защиту.

**Первая глава** содержит общие данные о стандартных бильiardах, а затем описываются обобщающие классическую теорию бильiardные книжки, доказываются интегрируемость бильiardной книжки, что необходимо для дальнейшего чтения работы.

Во **Второй** автор напоминает необходимые определения атомов и молекул как элементов теории топологической классификации интегрируемых систем. Представлены конструкции 2 - атомов и 3 - атомов, а затем приводится конструкция дублей для атомов, которая играет важную роль в дальнейших рассуждениях.

**Третья глава** посвящена описанию фазового пространства бильярдной книжки, что потребовало склейки кокасательных расслоений листов, затем показано, как на таком фазовом пространстве выглядят первые интегралы. Основной результат этой главы - доказательство одного из основных результатов, вынесенных на защиту: изоэнергетическая поверхность для положительных значений есть топологическое кусочно - гладкое трехмерное многообразие. Это делает возможным применить к бильярдным книжкам теорию Фоменко - Цишанга, обобщив необходимую конструкцию на кусочно - гладкий случай.

В **Четвертой главе** автор представляет два подкласса множества бильярдных книжек, достаточные для дальнейшей работы. Для этих частных случаев упрощаются комбинаторные описания, в том числе слоения Лиувилля и движения материальной точки, поскольку множество возможных перестановок для перехода с листа на лист оказывается достаточно ограниченным. Далее для таких книжек доказывается кусочно - гладкий аналог теоремы Лиувилля, причем явно описываются особые слои, а для неособых показывается что все они составлены из несвязных объединений кусочно - гладких торов.

**Пятая глава** посвящена доказательству пункта А гипотезы Фоменко, теоремы о реализации атомов при помощи бильярдных книжек. Приводится явный алгоритм построения бильярдной книжки, реализующей произвольный боттовский атом, вычисляется грубая молекула для такой книжки, а затем представлено доказательство теоремы о реализации атомов, откуда следует корректность найденного алгоритма.

Наконец, **Шестая глава** посвящена третьему основному результату, выносимому на защиту, - доказательству теоремы о реализации произвольной грубой молекулы через подходящую бильярдную книжку, что является подтверждением пункта В гипотезы Фоменко.

Обращает на себя **Заключение** диссертации, в котором автор не только подытоживает свою работу, но и представлены три направления задач, естественно вытекающих из диссертационной работы, над которыми уже трудятся молодые участники семинара Фоменко - Ведюшкиной.

Диссертация И.С. Харчевой является научным исследованием высокого уровня, вызывающим интерес у специалистов как в области динамических систем и математической физики, так и в дифференциальной топологии и геометрии симплектических многообразий. При этом поставленные задачи были полностью решены.

Необходимо отметить, что рецензируемая диссертационная работа является примером сбалансированного исследования, где четкие теоретические методы и идеи дополняются сложными конкретными вычислениями, что показывает как высокую теоретическую подготовку диссертанта, так и его умение производить технически сложные выкладки.

Сам текст диссертации очень хорошо продуман, что позволило на небольшом объеме достаточно подробно и выпукло показать геометрию и технику вычислений. Текст достаточно хорошо проработан, и мной было замечено достаточно малое число опечаток (например, на стр. 15, 24, 31, 56, 58, 59, 66 и 74), которые не мешают чтению и не снижают высокой оценки текста


диссертации.

Все результаты диссертации являются новыми, оригинальными, своевременно опубликованными в 5 статьях в математических журналах, индексируемых WoS и Scopus или входящих в список научных журналов, рекомендованных для защиты в диссертационных советах МГУ, а также представленными автором на различных конференциях, причем только список опубликованных тезисов состоит из 16 пунктов.

Автореферат полностью соответствует содержанию диссертации.

Значительный объем выполненных автором исследований по актуальной и важной теме позволяет рассматривать представленную работу, как несомненно удовлетворяющую всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук, определенным в пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в МГУ им. М.В.Ломоносова, и автора этой работы, Харчеву Ирину Сергеевну, как несомненно заслуживающую присвоения ей искомой учёной степени по специальности 1.1.3 - "Геометрия и топология".

Официальный оппонент,  
доктор физико-математических наук,  
профессор РАН,  
начальник сектора ЛТФ ОИЯИ  
04 мая 2022 г.

 Н.А. Тюрин

ntyurin@theor.jinr.ru; +7(925)8007367; +7(496)2163005  
Лаборатория Теоретической Физики им. Н.Н. Боголюбова,  
Объединенный Институт Ядерных Исследований (Дубна),  
141980, Жолио - Кюри, 6, г. Дубна, Московская область

Подпись Н.А. Тюрин удостоверяю.  
Ученый секретарь ЛТФ ОИЯИ

 А.В. Андреев

