

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

АНДРЕЕВ ПАВЕЛ АЛЕКСАНДРОВИЧ

**ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ
МНОГОЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМ В ТЕРМИНАХ ЭВОЛЮЦИИ
КОЛЛЕКТИВНЫХ НАБЛЮДАЕМЫХ**

1.3.3 – Теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2024

Содержание

- **Введение.** 5
 - **Обзор литературы по теме диссертации** 16

- **Глава 1. Одножидкостная и двухжидкостная модели спин-поляризованных вырожденных заряженных фермионов со спином 1/2**
 - **1.1 Одножидкостная квантовая гидродинамика заряженных фермионов со спин-спиновым взаимодействием в восьми моментном приближении** 43
 - **1.2 Квантовая гидродинамика с отдельной спиновой эволюцией (двухжидкостная модель) электронного газа** 63
 - **1.3 Кинетическая модель плазмы с отдельной спиновой эволюцией** 79
 - **1.4 Заключение к главе 1** 86

- **Глава 2. Квантовогидродинамические модели атомарных ультрахолодных квантовых газов бозонов и фермионов**
 - **2.1 Одножидкостная модель слабодействующих фермионов с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия** 88
 - **2.2 Тензор квантовых напряжений для конденсата Бозе-Эйнштейна с анизотропным взаимодействием** 104
 - **2.3 Бозон-фермионные смеси и смеси нормальной вырожденной компонент квантовых газов одного сорта** 116
 - **2.4 Квантовая гидродинамика с отдельной спиновой эволюцией спин-поляризованных фермионов** 123
 - **2.5 Вклад короткодействующего взаимодействия вырожденных фермионов в уравнение эволюции тензора давления** 127
 - **2.6 Влияние квантовых флуктуаций, электрического и магнитного дипольных моментов на коллективные свойства квантовых газов** 132
 - **2.7 Заключение к главе 2** 140

- **Глава 3. Эволюция спина в квантовой плазме и её вклад в волновые процессы**
 - **3.1 Спин-электрон акустические волны, распространение параллельно внешнему магнитному полю 141**
 - **3.2 Кинетическая теория и затухание Ландау спин-электрон акустических волн 154**
 - **3.3 Распространение спин-электрон акустических волн под произвольным углом к внешнему магнитному полю 168**
 - **3.4 Спин-электрон акустические волны в электрон-позитрон ионной плазме 176**
 - **3.5 Поверхностные спин-электрон акустические волны 190**
 - **3.6 Спин-электрон акустические волны в двумерном электронном газе 198**
 - **3.7 Спин-электрон акустический солитон 205**
 - **3.8 Необыкновенные спин-электрон акустические волны 213**
 - **3.9 Тонкая структура циклотронных волн, вызванная эволюцией спинов электронов 222**
 - **3.10 Заключение к главе 3 248**

- **Глава 4. Коллективные эффекты в системах квантовых газов**
 - **4.1 Спектры коллективных возбуждений в ультрахолодных фермионах и бозон-фермионных смесях 250**
 - **4.2 Ярко-подобный солитон в конденсате Бозе-Эйнштейна и бозон-фермионных смесях при рассмотрении короткодействующего взаимодействия с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия 266**
 - **4.3 Равновесное состояние частично поляризованных фермионов при наличии короткодействующего взаимодействия между фермионами с разными проекциями спина 281**
 - **4.4 Спектр коллективных возбуждений частично поляризованных фермионов при раздельной спиновой эволюции 288**

| | |
|---|-----|
| ○ 4.5 Солитон обусловленный квантовыми флуктуациями в дипольном БЭК | 299 |
| ○ 4.6 Заключение к главе 4 | 305 |
| ● Заключение. | 307 |
| ● Литература. | |
| ○ Список публикаций автора по теме диссертации | 311 |
| ○ Используемая литература | 314 |

ВВЕДЕНИЕ.

Актуальность темы диссертационной работы

Теория коллективных процессов в квантовых системах является основой современного понимания фундаментальных макроскопических процессов в твердых, жидких и газообразных фазовых состояниях материи. Методы систематического вывода таких моделей из микроскопической динамики квантовых частиц является одной из актуальных задач современной теоретической физики. Важность таких исследований обусловлена необходимостью обоснования макроскопических моделей. Также вывод моделей с микроскопической точки зрения позволяет точнее понять область применимости модели и физический смысл входящих в неё параметров. Кроме того открывается возможность для обобщения этих моделей. В работе представлен вывод моделей квантовых плазмopodobных сред, где динамика вырожденного электронного газа играет основную роль. Рассмотрены модели, описывающие коллективную динамику спинов электронов. Такие системы играют основную роль в современной наноэлектронике и спинтронике. А также такие системы существуют в астрофизических объектах находящихся в экстремальных условиях и содержащих вырожденный электронный газ. А именно системы находящиеся в сильных магнитных полях. Следовательно, исследование квантовых коллективных эффектов и моделей их описания в квантовых плазмopodobных средах является актуальной проблемой, как с фундаментальной точки зрения, так и основа современных технологических применений. Вторым классом физических объектов, рассмотренным в работе, является квантовый газ ультрахолодных нейтральных атомов. При этом основной акцент сделан на моделях атомов с полуцелым спином. Наряду с динамикой фермионов рассмотрены атомарные бозон-фермионные смеси и модели их описания для различных типов атомов. После экспериментального открытия конденсата Бозе-Эйнштейна в парах щелочных металлов в 1995 году, за что, в 2001 году была присуждена Нобелевская премия по физике, сформировалось и продолжает активно развиваться научная область по теоретическому и экспериментальному исследованию ультрахолодных бозонов, фермионов и их смесей.

Цель и задачи работы

Основная цель диссертационной работы – получение, исследование и применение макроскопических моделей квантовых систем выведенных исходя из микроскопической динамики квантовых частиц. Для достижения основной цели были поставлены следующие задачи:

1. Разработать аналитический метод описания макроскопических квантовых процессов, где макроскопические функции определены через многочастичную микроскопическую волновую функцию, что позволит получить макроскопические уравнения, основанные на точной микроскопической динамике. *Простейшей макроскопической функцией является распределение частиц в трёхмерном физическом пространстве координат - скалярное поле концентрации частиц (числа частиц в единице объёма).* Это приводит к тому, что искомые системы уравнений имеют формальное сходство с уравнениями гидродинамики.

2. Получить замкнутые системы макроскопических уравнений для квантовых плазмopodobных сред, *в форме уравнений эволюции макроскопических полей различной тензорной размерности, принимающих вид уравнений квантовой гидродинамики,* в которых динамика спина проявляется наряду с взаимодействием зарядов частиц системы.

3. Дать вывод систем уравнений для коллективных эффектов в ультра-холодных атомарных квантовых газах в форме уравнений квантовой гидродинамики. Рассмотреть различные приближения для моделей описания фермионов, бозонов и бозон-фермионных смесей.

4. Изучить коллективные эффекты в квантовых газах и в квантовых плазмopodobных средах:

* рассмотреть вклад квантовых эффектов в волновые процессы в плазмopodobных средах;

* исследовать спиновую динамику в вырожденном спин-поляризованном электронном газе при рассмотрении системы электронов как двух подсистем частиц с различными проекциями спина и вычислить характеристики объёмных и поверхностных волн;

* рассмотреть солитоны в частично спин-поляризованных вырожденных плазмopodobных средах;

- * исследовать волны в квантовых газах, спектры коллективных возбуждений;
- * рассмотреть возможность возникновения новых волновых эффектов (новых типов солитонов) в квантовых газах при рассмотрении обобщенных моделей квантовых газов учитывающих эффекты, не описываемые в приближении среднего (главного) поля.

Объект и предмет исследования

Объектами исследования являются ультра-холодные атомарные квантовые газы фермионов, бозонов и бозон-фермионных смесей, а также вырожденные плазмоподобные среды. **Предметами** исследования являются волновые процессы в ультра-холодных атомарных квантовых газах и вырожденных плазмоподобных средах, методы описания коллективных процессов в этих средах и методика систематического получения моделей с различной требуемой степенью точностью.

Методология диссертационного исследования заключается в проведении аналитических и численных расчетов, разработке математических моделей, их верификации на известных теоретических моделях и предсказаниях, получении и интерпретации результатов. Численный анализ получаемых аналитических выражений проводился на основе пакета Wolfram Mathematica.

Научная новизна

В диссертационной работе впервые получены следующие научные результаты:

1. Развита квантово-гидродинамический метод для ультрахолодных газовых систем нейтральных Ферми атомов на основе их детерминированной микроскопической динамики описываемой многочастичным уравнением Шредингера в координатном представлении. Построенный метод переводит эволюцию системы из абстрактного многомерного конфигурационного пространства, где система частиц описывается волновой функцией, в трехмерное физическое пространство, где динамика системы представлена набором материальных полей различной тензорной размерности, определенных через волновую функцию. В рамках предложенного формализма получена цепочка гидродинамических уравнений, представляющая собой систему интегро-дифференциальных уравнений для $2N$ элементов тензоров различной тензорной размерности, где N число частиц системы. Интегральными слагаемыми представлено взаимодействие между частицами среды.

2. Разработана процедура разложения по малому параметру, который равен отношению радиуса действия потенциала короткодействующего взаимодействия нейтральных атомов, к характерному размеру макроскопических структур или среднему расстоянию между частицами. Эта процедура использована в интегральных слагаемых. Она позволяет внести информацию о радиусе взаимодействия в предложенный математический аппарат. В рамках данной процедуры получен вклад взаимодействия в виде констант взаимодействия представляющих собой моменты потенциала взаимодействия между частицами. Которые являются коэффициентами разложения в возникающий ряд динамических функций.

3. Разработана процедура приближенного вычисления многочастичных гидродинамических функций возникающих в интегральных слагаемых основанная на введении малого параметра равного отношению энергии взаимодействия к энергии Ферми позволяющая получить функциональную зависимость многочастичных функций через одночастичные гидродинамические функции. В рамках данной процедуры получена замкнутая система уравнений для спин-поляризованных фермионов состоящая из уравнений эволюции концентрации, поля скоростей и давления, содержащие взаимодействие с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия.

4. Предложен метод квантовой гидродинамики с отдельной спиновой эволюцией для систем заряженных частично спин-поляризованных фермионов построенный из уравнений эволюции парциальных концентраций и плотностей импульса частиц с определенной проекцией спина с учетом их несохранения, вследствие, переворота спина, и уравнения эволюции плотности спина. Уравнение эволюции импульса содержит поле силы пропорциональное потоку момента силы изменяющее проекцию спина частицы и дающее механизм несохранения парциального импульса.

5. Аналитически показано, что коллективная динамика в системах частично спин-поляризованных заряженных вырожденных фермионов приводит к существованию спин-электрон-акустических волн как волны с относительной динамикой частиц одного сорта обладающих различными проекциями спина. Обнаружено, что реальная часть спектра объёмных и поверхностных спин-электрон-акустических

волн имеет линейную зависимость в длинноволновом пределе. Получено, что спин-электрон-акустические волны являются слабозатухающими в следствии бесстолкновительного затухания.

6. Получено, что эволюция спинов электронов в вырожденном электронном газе при учете аномального магнитного момента электрона приводит к возникновению тонкой структуры циклотронных волн состоящей из трех ветвей для циклотронной волны каждого порядка. Также получено, что возникает одиночная ветвь циклотронной волны нулевого порядка, обусловленная динамикой спина. Свойства циклотронных волн рассчитаны разработанным методом квантовой кинетики с отдельной спиновой эволюцией.

7. Показано, что нелокальное бозон-бозонное и бозон-фермионное короткодействующее взаимодействие в бозон-фермионных смесях нейтральных частиц находящихся при близкой к нулю температуре создает условие для уменьшения частоты акустических волн. Уменьшение возникает в сравнении с линейным спектром. Компенсация этой дисперсии отталкивающим взаимодействием приводит к условию формирования яркого солитона, как области с повышенной концентрацией, в бозонной подсистеме, находящейся в состоянии конденсата Бозе-Эйнштейна.

Теоретическая и практическая значимость работы

Развитые в диссертации методы могут быть использованы для построения новых замкнутых теоретических моделей коллективных процессов в квантовых системах, на пути дальнейшего обобщения развитых моделей, так и при изучении других физических систем. Разработанные в диссертации кинетические и гидродинамические модели квантовых физических систем могут широко применяться для расчета стационарных и нестационарных физических процессов в системах большого числа взаимодействующих частиц. Предсказанные явления, полученные для их описания аналитические соотношения и численные решения полученных уравнений, могут непосредственно использоваться при разработке технологий. В частности, они могут быть использованы для создания приборов и устройств, функционирующих на основе учета поляризации спинов в плазмоподобных средах, в частности в спинтронике, а также при применении квантовых газов для развития новых методов передачи информации.

Работа выполнялась при финансовой поддержке РФФИ (гранты 16-32-00886 и 20-02-00476). Полученные результаты могут представлять научный и практический интерес для ряда научно-исследовательских организаций и институтов РАН, таких как МФТИ, ИОФАН, МИРЭА, ФИАН, МИЭТ и т.д.

Положения выносимые на защиту

1. Детерминированная микроскопическая динамика, описываемая многочастичным уравнением Шредингера в координатном представлении, приводит к методу описания эволюции системы из абстрактного многомерного конфигурационного пространства, где система частиц описывается волновой функцией, в трехмерное физическое пространство, где динамика системы представлена набором материальных полей различной тензорной размерности, определенных через волновую функцию. Предложенный формализм возникает в виде цепочки гидродинамических уравнений, представляющей собой систему интегро-дифференциальных уравнений для $2N$ элементов тензоров различной тензорной размерности, где N число частиц системы. Интегральными слагаемыми представлено взаимодействие между частицами среды.

2. Процедура разложения по малому параметру, равному отношению радиуса действия потенциала короткодействующего взаимодействия нейтральных атомов, к характерному размеру макроскопических структур или среднему расстоянию между частицами, в интегральных слагаемых позволяет внести информацию о радиусе взаимодействия в предложенный математический аппарат. Вклад взаимодействия в виде констант взаимодействия представляющих собой моменты потенциала взаимодействия между частицами возникает в уравнениях гидродинамики, которые являются коэффициентами разложения в возникающий ряд динамических функций.

3. Процедура приближенного вычисления многочастичных гидродинамических функций возникающих в интегральных слагаемых основана на введении малого параметра равного отношению энергии взаимодействия к энергии Ферми приводит к функциональной зависимости многочастичных функций через одночастичные гидродинамические функции. В рамках данной процедуры возникает замкнутая система уравнений для спин-поляризованных фермионов

состоящая из уравнений эволюции концентрации, поля скоростей и давления, содержащие взаимодействие с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия.

4. Метод квантовой гидродинамики с отдельной спиновой эволюцией для систем заряженных частично спин-поляризованных фермионов построен из уравнений эволюции парциальных концентраций и плотностей импульса частиц с определенной проекцией спина с учетом их несохранения, вследствие, переворота спина, и уравнения эволюции плотности спина. Уравнение эволюции импульса содержит поле силы пропорциональное потоку момента силы изменяющее проекцию спина частицы и дающее механизм несохранения парциального импульса.

5. Коллективная динамика в системах частично спин-поляризованных заряженных вырожденных фермионов приводит к существованию спин-электрон-акустических волн как волны с относительной динамикой частиц одного сорта обладающих различными проекциями спина. Реальная часть спектра объемных и поверхностных спин-электрон-акустических волн является линейным в длинноволновом пределе. Спин-электрон-акустические волны демонстрируют бесстолкновительное затухание малое в сравнении с их частотой.

6. Эволюция спинов электронов в вырожденном электронном газе при учете аномального магнитного момента электрона приводит к возникновению тонкой структуры циклотронных волн состоящей из трех ветвей для циклотронной волны каждого порядка. Возникает одиночная ветвь циклотронной волны нулевого порядка, обусловленная динамикой спина. Свойства циклотронных волн рассчитаны разработанным методом квантовой кинетики с отдельной спиновой эволюцией.

7. Нелокальное взаимодействие в смесях нейтральных частиц, находящихся при близкой к нулю температуре, создает условие для уменьшения частоты, акустических волн, по отношению к линейному спектру. Компенсация этой дисперсии отталкивающим взаимодействием приводит к условию формирования яркого солитона, как области с повышенной концентрацией в бозонной подсистеме находящейся в состоянии конденсата Бозе-Эйнштейна.

Степень достоверности и апробация результатов

Представленные в диссертационной работе результаты получены с использованием современных методов теоретической и математической физики. Часть полученных находится в хорошем согласии с теоретическими исследованиями других научных групп, их достоверность также не вызывает сомнения. Кроме того, в диссертационной работе, предложены новые аналитические модели и предсказан ряд новых эффектов. Эти результаты также можно считать достоверными, так как они получены в рамках тех же методов и приближений что и результаты, находящиеся в согласии с исследованиями других научных групп.

Результаты диссертационной работы неоднократно докладывались и обсуждались на российских и международных конференциях по проблемам физики плазмы, физики конденсированного состояния и оптики, и научных семинарах. Основные результаты диссертационной работы были представлены лично автором на следующих международных конференциях:

- Andreev P. A., *Hydrodynamic and kinetic modeling of the spin-electron acoustic waves in spin-1/2 quantum plasmas*, Joint ICTP-IAEA College on Plasma Physics, 29 October - 09 November, Trieste, Italy, 2018.
- Andreev P. A., *On a formation of the superconductive state due to Cooper pair formation via the quantum of spin-electron acoustic waves in the partially spin-polarized electron gas*, Conference on Multi-Condensate Superconductivity and Superfluidity in Solids and Ultracold Gases, May 14-18, Trieste, Italy, 2018.
- Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., *Separated spin evolution of electrons: Which new effects we can find from the Pauli equation?*, International Scientific Spring – 2015, March 16-20, Islamabad, Pakistan, 2015.
- Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., *Model of spin-1/2 electron-positron plasmas: The role of the annihilation interaction*, International Scientific Spring – 2015, March 16-20, Islamabad, Pakistan, 2015.
- Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., *Quantum plasmas beyond the quantum Bohm potential*, International Scientific Spring – 2015, March 16-20, Islamabad, Pakistan, 2015.

- Kuz'menkov L. S., Andreev P. A., *Classic hydrodynamic and kinetic formalism as averaging of delta-functional particle images*, First ICTP-NCP International College on Plasma Physics, November 11-15, Islamabad, Pakistan, 2013.
- Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., *Spin waves and spin instabilities in quantum plasmas*, First ICTP-NCP International College on Plasma Physics, November 11-15, Islamabad, Pakistan, 2013.
- Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., Ivanov A. Yu., *Semi-relativistic hydrodynamics of three-dimensional and low-dimensional quantum plasmas*, First ICTP-NCP International College on Plasma Physics, November 11-15, Islamabad, Pakistan, 2013.
- Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., Mahajan S. M., Asenjo F., *Exchange interaction in quantum hydrodynamics*, Joint ICTP-IAEA College on plasma physics, October 1-12, Miramare - Trieste, Italy, 2012.
- Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., *Fermi spin current contribution in spin wave spectrum of spin-1/2 fermions*, 47th Annual Meeting of The American Physical Society, Division of Atomic, Molecular and Optical Physics, p. 112, May 23-27, Providence, Rhode Island, United States of America, 2016.
- Андреев П.А., Спин-электрон-акустические волны и их роль в объяснении высокотемпературной сверхпроводимости, "Ломоносовские чтения", секция физики, сс. 84-86, Апрель, Москва, Россия, 2016.
- Andreev P. A., *Spin-electron acoustic waves: Linear and nonlinear regimes, and applications*, 57th Annual Meeting of the APS Division of Plasma Physics, November 16–20, Savannah, Georgia, United States of America, 2015.
- Andreev P. A., *On mechanisms of BEC stability and fermions instability for electric dipolar quantum gases with the exchange part of dipole-dipole interaction*, 46th Annual Meeting of The American Physical Society, Division of Atomic, Molecular and Optical Physics, p. 104, June 8-12, Columbus, Ohio, United States of America, 2015.
- Andreev P. A., *Finite size of molecules and the evolution of dipole directions in dipolar BECs*, Quo vadis Bose-Einstein-Condensation? V, December 16 – 20, Bad Honnef, Germany, 2014.

- Andreev P. A., *Separated spin-up and spin-down QHD of electrons in magnetised quantum plasmas*, Joint ICTP-IAEA College On Advanced Plasma Physics, August 18- 29, Miramare - Trieste, Italy, 2014.
- Andreev P. A., Kuzmenkov L. S., *Explicit contribution of molecule radius in dynamical properties of dipolar BECs*, 45th Annual Meeting of The American Physical Society, Division of Atomic, Molecular and Optical Physics, p. 152, June 2-6, Madison, Wisconsin, United States of America, 2014.
- Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., *Spin and electric polarization waves in dielectric systems of different dimensions*, PIERS Proceedings, pp. 1055-1059, August 19-23, Moscow, Russia, 2012.
- Андреев П.А., Кузьменков Л.С., Труханова М.И., *Волны поляризации и методы их возбуждения (Waves of polarization and methods of their generation)*, XLVIII Всероссийская конференция по проблемам физики частиц, плазмы и физики твердого тела, оптоэлектроники посвященная столетнему юбилею профессора Я.П. Терлецкого, Май 15-18, Москва, Россия, 2012.
- Андреев П.А., Кузьменков Л.С., *Метод квантовой гидродинамики для поляризованного конденсата Бозе-Эйнштейна*, "Ломоносовские чтения", секция физики, с. 128-131, Ноябрь, Москва, Россия, 2011.
- Андреев П.А., Кузьменков Л.С., *Спиновые волны в плазмоподобных средах*, "Ломоносовские чтения", секция физики с. 80-82, Ноябрь, Москва, Россия, 2011.
- Андреев П.А., Иванов А.Ю., Кузьменков Л.С., *О слаборелятивистском нелинейном уравнении Шредингера*, "Ломоносовские чтения", секция физики, с. 131-134, Ноябрь, Москва, Россия, 2011.
- Andreev P. A. and Kuz'menkov L. S., *Generation of waves by a neutron beam in a quantum plasma of nonzero spin. An influence of the spin-orbit interaction*, PIERS Proceedings, pp.1047-1051, March 20-23, Marrakesh, MOROCCO, 2011.

Публикации

По теме диссертационной работы опубликовано 41 статья в рецензируемых международных научных журналах, индексируемых в базах данных Web of Science и/или Scopus. Из них 10 статей опубликованы в журналах из списка Топ-25 по

импакт фактору по версии Thomson Reuters, таких как Chaos, Physical Review A, Physical Review B, Physical Review E, Applied Physics Letters, Europhysics Letters, J. Phys. B. Это позволяет считать, что результаты диссертационной работы соответствуют современному мировому уровню исследований в области теоретической физики плазмы, оптики и конденсированного состояния вещества, являются обоснованными и достоверными.

Личный вклад автора

Все результаты, представленные в диссертационной работе, получены лично автором или при его непосредственном участии. Вклад автора в диссертационную работу является определяющим, это касается как постановки решаемых задач, так и основных идей, теоретических моделей, методов и выводов диссертационной работы.

Структура диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, включающего обзор литературы, четырех глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 336 страницах, включает в себя 71 рисунок. Общее число ссылок на литературные источники составляет 326. Каждая глава содержит заключительный параграф посвященный формулировке основных результатов и выводов.

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация основана на результатах работ [1-41] и посвящена методам получения уравнений квантовой гидродинамики и кинетики исходя из динамики квантовых частиц подчиненной многочастичному уравнению Шредингера/Паули для вырожденных плазмоподобных сред и ультрахолодных квантовых атомарных газов и исследованию волновых свойств этих систем на основе разработанных методов.

Гидродинамическое и кинетическое описание макроскопических процессов и микроскопическое обоснование этих методов

Модели динамики жидкостей и газов как распределённых в пространстве сред были предложены в виде уравнений гидродинамики Эйлера и уравнения непрерывности для случая идеальной жидкости. Диссипативные процессы в жидкостях и газах были смоделированы в уравнении Навье-Стокса, которое содержит тензор напряжений, представленный в виде разложения по пространственным производным поля скоростей. Впоследствии, уравнение Эйлера было использовано для описания динамики плазмы, при этом уравнение Эйлера содержало силу Лоренца для описания взаимодействия различных элементов среды.

Уравнения гидродинамики описывают эволюцию материальных полей (концентрации, векторного поля скорости, которое, в нерелятивистском пределе, пропорционально плотности импульса) в трехмерном физическом пространстве координат. Кроме того, была развита физическая кинетика, в которой основное внимание уделяется эволюции функции распределения определенной в шестимерном фазовом пространстве, где наряду с пространством координат рассматривается пространство импульсов. Примерами кинетических уравнений являются уравнение Больцмана для слабонеидеального газа нейтральных атомов и система уравнений Власова-Максвелла для бесстолкновительной плазмы.

Интегрирование кинетического уравнения, предварительно умноженного на импульс в некоторой степени, начиная с нулевой степени, по импульсу, позволяет получить набор уравнений для материальных полей определенных в физическом

пространстве. Интеграл функции распределения дает концентрацию частиц, интеграл от функции распределения, умноженной на импульс (на квадрат импульса) пропорционален полю скоростей (плотности энергии) и т.д. Формально можно получить бесконечную систему уравнений гидродинамики, которая будет переопределенной, так как эволюция конечного числа частиц N , требует конечного числа гидродинамических функций, а именно $2N$ функций, для бесспиновых частиц, что более явно видно при квантовом описании. Отметим, что при подсчете гидродинамических функций считается каждая компонента тензора, а не вся тензорная функция. Таким образом, формально, зная кинетическое уравнение можно получить соответствующую гидродинамику. Однако каждая из этих моделей является макроскопической моделью, определенная на определенных пространственных масштабах. Поэтому, для каждой из этих моделей требуется вывод исходя из микроскопической модели описывающей динамику отдельных частиц, будь то классическая или квантовая механика.

В 1946 году вышла работа Н.Н. Боголюбова под названием “Проблемы динамической теории в статистической физике”, в которой был предложен вывод уравнений физической кинетики, а именно уравнения Больцмана и нерелятивистского предела системы уравнений Власова-Максвелла (т.е. системы уравнений Власова-Пуассона) (см. [42], [43], [44]). В работе Боголюбова, рассматривается уравнение Лиувилля, для N -частичной функции распределения $f_N(\mathbf{r}_1(t), \mathbf{p}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t), \mathbf{p}_N(t), t)$. Эта функция зависит от координат и импульсов всех частиц. Интегрирование функции распределения по координатам и импульсам $N-1$ частиц позволяет получить одночастичную функцию распределения, а соответствующее интегрирование уравнения Лиувилля приводит к уравнению эволюции одночастичной функции распределения. Однако слагаемое содержащее парное взаимодействие частиц включает двухчастичную функцию распределения. Конкретизация физической системы приводит к методу приближенного выражения двухчастичной функции распределения через одночастичную функцию, что дает замкнутый математический аппарат для исследования данного типа физических систем.

Классическая механика систем большого числа частиц представляет собой динамику точечных бесструктурных объектов. Аналитически распределение

точечных частиц в трехмерном физическом пространстве можно представить как суперпозицию дельта функций $n(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))$, где $\mathbf{r}_i(t)$ это координата i -ой частицы в момент времени t , \mathbf{r} это векторное поле координаты в физическом пространстве, а полученная функция $n(\mathbf{r}, t)$ это микроскопическая концентрация частиц (см. [45, 46]). Такая функция описывает динамику системы на микроскопическом масштабе.

Переход на макроскопический масштаб, т.е. к модели сплошной среды, требует усреднения по физически бесконечно малому объёму. Явный вид оператора усреднения предложен в работе [47] (см. также [48]). В квантовом случае, волновая функция, описывающая свойства точечных частиц, представляет собой непрерывную функцию. Таким образом, переход к коллективной динамике не требует усреднения. Однако необходимо спроецировать $3N$ мерное конфигурационное пространство, в котором определена многочастичная волновая функция, в трёхмерное физическое пространство.

При рассмотрении микроскопической динамики точечных классических частиц в фазовом пространстве можно построить микроскопическую одночастичную функцию распределения, зависящую от координат и импульсов всех частиц, $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t))$, где $\mathbf{p}_i(t)$ это импульс i -ой частицы в момент времени t , $\{\mathbf{r}, \mathbf{p}\}$ это шестимерное векторное поле в фазовом пространстве (см. [45, 46]). При переходе на макроскопический масштаб необходимо выполнить усреднение по физически бесконечно малому объёму, аналогично методу, предложенному для гидродинамики [47], [48].

Представленное выше описание посвящено методам классической физики. Однако диссертация сфокусирована на построении моделей квантовых систем. Отметим некоторые квантовые модели. В силу того, что одночастичное уравнение Шредингера для одного электрона во внешнем электромагнитном поле можно представить в гидродинамической форме, которая, в значительной степени, совпадает с уравнениями гидродинамики электронного газа в приближении самосогласованного поля, возникает возможность приближенного применения одночастичного уравнения Шредингера для моделирования свойств квантовой

плазмы (см. к примеру [49], [50]). Такой подход является значительным упрощением в сравнении с методами квантовой статистики, которые позволяют описать огромное многообразие физических явлений, включая сверхтекучесть и сверхпроводимость [51]. При этом важно отметить, что упомянутые методы, привязанные к одночастичному уравнению Шредингера, имеют практические достоинства. Они позволяют легко получать уравнения квантовой гидродинамики или кинетики. Кроме того, полученные уравнения показывают вклад квантовых эффектов, которые, в простейших случаях, входят аддитивно в уравнения гидродинамики. Таким образом, возникает необходимость метода систематического рассмотрения квантовой задачи многих тел с целью получения неравновесных уравнений гидродинамики и кинетики. Сохранив при этом физическая ясность подходов используемых в работах [49], [50]. Такая задача решается в диссертации.

Квантовые плазмоподобные среды

Гидродинамическая запись уравнения Шредингера для одиночной частицы во внешнем поле была сделана Маделунгом в 1926 г. [52]. Уравнения, полученные Маделунгом для одной частицы, похожи на уравнения гидродинамики для многочастичных систем классических частиц. Это подобие было использовано в [53] в 1964 году для квантово-гидродинамического описания квантовой плазмы. Подробный анализ уравнений квантовой гидродинамики для одиночной частицы со спином $1/2$ во внешнем поле был выполнен Такабаяси [54], [55], [56], [57], [58], [59], [60] в 50-х годах XX века. Метод многочастичной квантовой гидродинамики предложен Кузьменковым и др. в 1999-2001 гг. [61], [62]. Этот метод отличается от одночастичного рассмотрением многочастичной квантовой динамики. Это открывает широкие возможности для рассмотрения различных физических систем [39], [41]. Другая форма вывода была недавно предложена в [63], где многочастичные эффекты включены в модель через суммирование по частицам системы. Такой подход не рассматривает перехода из конфигурационного пространства в трехмерное физическое пространство. Кроме того, квантовые корреляции, такие как обменные эффекты, не предусмотрены такой этой моделью. Упрощенная форма уравнений квантовой гидродинамики рассматривалась в

работах [64], [65]. В этих работах, фактически использовались результаты работ Такабаяси [54], [56] по “флуидизации” уравнения Паули, но в применении к квантовым плазмоподобным средам. При этом применение уравнения Паули позволило учесть эволюцию спина. Этот метод послужил основой для многих работ по описанию квантовой плазмы частиц со спином. Этот метод возникает как упрощенное представление многочастичного уравнения Шредингера с кулоновским и спин-спиновым взаимодействиями в терминах коллективных переменных [61]. Коллективные переменные — это макроскопические наблюдаемые переменные, подходящие для описания систем многих частиц. Это концентрация частиц, плотность импульса, давление, плотность магнитного момента (спина), плотность энергии, спиновый ток (поток намагниченности) и т. д. Эти переменные определяются через многочастичную волновую функцию или волновой спинор [61]. Эволюция волновой функции подчиняется многочастичному уравнению Шредингера. Следовательно, применяя уравнение Шредингера, мы можем вывести уравнения эволюции коллективных переменных. Для многочастичных систем были получены уравнение эволюции числа частиц (уравнение непрерывности), уравнение баланса импульса (уравнение Эйлера), уравнение баланса энергии, уравнение эволюции магнитного момента [61], [64], [65]. Этот набор уравнений является обобщением пятимоментного приближения для частиц со спином, появляющегося как восьмимоментное приближение. В общем случае, эта система уравнений не является замкнутой системой уравнений. Это цепочка уравнений, которую следует обрезать, с целью получения замкнутого аппарата. Замыкание системы уравнений дает приближенное описание. Кроме того это дает «объяснение» нашему математическому методу свойств рассматриваемой системы. Обобщения восьмимоментного приближения были развиты в [30], где уравнение эволюции спинового тока было получено для получения более полной информации о свойствах спиновой эволюции. Слагаемые, описывающие взаимодействие между частицами в уравнениях гидродинамики, содержат двухчастичные функции, включая двухчастичные корреляции. В применении метода квантовой гидродинамики основное внимание было сосредоточено на приближении самосогласованного поля [39], [61], [62], когда двухчастичные функции появляются как произведения на две соответствующие одночастичные

функции. Квантовые корреляции, связанные с обменным кулоновским и спин-спиновым взаимодействиями, рассматривались в работах [61], [62].

Спиновые эффекты в плазме вводились с помощью гидродинамического формализма [61], [66], [64]. Также кинетическая модель была предложена в [67], [68] воспроизводя результаты более старых работ [69], где фазовое пространство было расширено до восьми измерений. Два дополнительных измерения использованы, чтобы включить спиновую зависимость в функцию распределения частиц, с учётом фиксированности модуля спина отдельной частицы. Другая кинетическая модель частиц со спином $1/2$ была установлена в [28], [70], [71], [72] с повторением основных результатов работ [73], [74], [75], [76], где функции распределения для частиц со спином рассматривались в традиционном шестимерном фазовом пространстве. Однако дополнительная функция распределения использована для описания спиновой эволюции. При этом спиновая эволюция проявляется через векторную функцию распределения - функции распределения спинов возникающей в дополнение к традиционной скалярной функции распределения.

Метод квантовой гидродинамики и некоторые его модификации были использованы для изучения волновых явлений в квантовой плазме частиц со спином $1/2$ [64], [77], [78], [79], [80], [81], [82], [83]. Наличие спина индуцирует спин-спиновое взаимодействие через магнитное поле, создаваемое магнитными моментами [61]. Это взаимодействие изменяет дисперсию плазменных волн по сравнению с бесспиновым случаем [84], [85]. Кроме того, эволюция спина приводит к дополнительным волнам в плазме. Существование новых спин-плазменных волн было показано теоретически в ряде работ. Спин-плазменные волны, распространяющиеся перпендикулярно внешнему магнитному полю получены в [77], [78]. Спин-плазменные волны, распространяющиеся параллельно внешнему магнитному полю найдены в [79]. И новые волны, связанные с эволюцией спинового тока обнаружены в работах [30], [86]. В случае электрон-позитронной плазмы, равенство масс электронов и позитронов меняет дисперсионные зависимости спин-плазменных волн, как и свойства обычных, бесспиновых, плазменных волн.

Наряду с новыми волновыми решениями изучались модификации известных волновых процессов. В рамках гидродинамической модели и формализма линейной функции отклика исследованы эффекты спиновой поляризации на ленгмюровскую волну и нулевой звук [87]. Обнаружено, что спиновая поляризация увеличивает коэффициент пространственной дисперсии ленгмюровских волн. Показано также, что фазовая скорость нулевого звука увеличивается с увеличением степени поляризации. Также в литературе сообщается о следующих проявлениях спиновой динамики. Увеличение частоты быстрой магнитозвуковой моды и уменьшение частоты медленной магнитозвуковой моды получено в [64], [83]. Взаимодействие магнитозвуковых волн в квантовой плазме частиц со спином $1/2$ рассмотрено в [88], где получены два уравнения Кортевега-де Фриза-Бюргера для описания магнитозвуковых волн. Эти уравнения использованы для изучения влияния спиновой намагниченности при лобовых столкновениях магнитозвуковых солитонов. При этом вычислены фазовые сдвиги, вызванные столкновениями. Снижение переноса энергии в квантовой плазме со спином $1/2$ за счет изменения групповой скорости необыкновенной волны в определенном диапазоне волновых чисел получено в [89]. Уширение магнитозвуковых солитонов, за счёт эффективного отрицательного потенциального поля, вызванного спин-спиновым взаимодействием, обнаружено в [90]. Формирование крупномасштабных флуктуаций плотности за счёт динамики вистлеров в сильно намагниченной плазме высокой плотности предсказано в [91]. Работа [92] посвящена исследованию магнитной диффузии. В ней получены результаты о том, что магнитная диффузия играет основную роль при переходе от солитонов к ударным волнам для нелинейных магнитозвуковых волн произвольной амплитуды. Подробный анализ ударных волн, как в режиме малых, так и произвольных амплитуд, в квантовой плазме со спином $1/2$ выполнен в [93]. Свойства составных нелинейных структур, индуцированные лобовыми столкновениями магнитозвуковых солитонов, изучены в [94]. Существенное влияние спин-спинового взаимодействия на динамику магнитозвуковых волн малой, но конечной амплитуды, проявляется как в осциллирующих, так и монотонных возмущениях подобных ударным волнам [95]. В работе [96] выведена система уравнений типа уравнений Захарова для циркулярно поляризованных альфвеновских волн, исходя из

магнитогидродинамики Холла, включающей квантовые поправки для изучения распространения альфвеновских солитонов через квантовую плазму. Индуцированная спином модификация неустойчивости Рэля–Гейлора рассмотрена в [97]. Модуляционная неустойчивость магнитозвуковых волн в плотной квантовой плазме изучена в [98]. Обзоры некоторых тем, изучаемых для квантовой плазмы, представлены в [49], [99]. Отметим, что спин вносит вклад в динамику плазмы через модификацию давления Ферми [27] и за счет учета эволюции спинового тока [30].

Наличие спина электронов изменяет структуру интегралов движения. Очевидно, энергия спин-спинового взаимодействия вносит дополнительное слагаемое в полную энергию системы. Однако спин и его динамика приводят к существованию спиновой (квантовой) завихренности [25], [100], [101], [102]. Это влияет на структуру и условия сохранения гидродинамической спиральности, которая является макроскопическим интегралом движения распределенных систем. Приложение квантовой гидродинамики к изучению завихренности частиц со спином рассмотрено в работах [57], [100], [101], [103].

При рассмотрении квантовой плазмы частиц со спином, в литературе используют уравнения квантовой гидродинамики и квантовой кинетики. Различные методы вывода уравнений квантовой гидродинамики без учета спина частиц представлены в работах [62], [104], [105], они также были применены к квантовой плазме частиц со спином [61], [63]. Эти уравнения содержат концентрацию частиц n , плотность импульса \mathbf{j} , поле скоростей \mathbf{v} , или функцию распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, при построении соответствующей квантовой кинетики. Эти функции описывают все частицы определенного сорта независимо от направления их спина. Разность между числами частиц в разных спиновых состояниях входит в спиновую плотность \mathbf{S} или намагниченность \mathbf{M} . Эти модели не содержат явного различия между состояниями частиц со спином вверх и со спином вниз.

В одножидкостной модели электронов с разными спинами динамика спинов определяется обобщением уравнения Блоха [56]. В двухжидкостной модели электронов z -проекция намагниченности M_z больше не является независимой переменной. Она пропорциональна разнице концентраций электронов со спином вверх и электронов со спином вниз. Другие проекции намагниченности M_x и M_y

появляются в двухжидкостной модели как независимые переменные, но они не носят индексов "вверх" или "вниз", поскольку относятся к обоим видам электронов. Это происходит потому, что определения M_x и M_y содержат волновые функции электронов со спином вверх и вниз в неаддитивной форме. Для развития области квантовой плазмы было важно получить систему уравнений квантовой гидродинамики для вырожденных электронов, учитывающих два различных спиновых состояния (спин-вверх и вниз) как два разных сорта частиц. Поэтому был выполнен вывод уравнений квантовой гидродинамики, в котором явно различаются состояния со спином вверх и состояния со спином вниз [27].

Гидродинамическая модель квантовых частиц с отдельной эволюцией частиц со спином вверх и спином вниз предложена в [106]. Эта модель нашла ряд применений [80], [91], [107]. Эта модель предложена исходя из качественных соображений, обобщающих одножидкостную модель, частиц одного сорта. Она находится в частичном противоречии с моделью, которая была позднее выведена исходя из уравнения Паули. Отметим, что основные линейные явления в квантовой плазме со спином $1/2$ были рассмотрены в [64], [65], [79], где найден вклад спинов в дисперсию плазменных волн и продемонстрировано существование спин-плазменных волн. Однако в этих работах электроны рассматривались как единая жидкость.

Частным случаем моделирования квантовой плазмы со спином $1/2$ является отдельное описание электронов со спином вверх и со спином вниз. При этом электроны не рассматриваются как единая жидкость [61], [65], а рассматриваются как две взаимодействующие жидкости [27], [78], [106], [108]. Поскольку давления Ферми намагниченных электронов со спином вверх и со спином вниз различны, двухжидкостная модель дает дополнительные продольные волны в электронном газе [24], [27]. Эти волны связаны с относительным движением электронов со спином вверх и вниз и называются спин-электрон-акустические волны. Рассмотрены нелинейные спин-электрон-акустические волны, распространяющиеся параллельно внешнему магнитному полю, при этом продемонстрировано существование спин-электрон-акустического солитона [22]. Спин-электрон-акустические волны это продольные волны в плазмоподобных средах существующие наряду с поперечными спин-плазменными волнами [25],

[77], [78], [79], [109]. Волны той же природы, называемые спиновыми плазмонами, обнаружены для двумерного электронного газа и графена [110], [111], [112], [113].

Развитие моделей квантовой плазмы со спином $1/2$ включает вывод квантовой гидродинамики с отдельной спиновой эволюцией [22], [25], [27] и квантовой кинетики с отдельной спиновой эволюцией [19]. Простейший вывод квантовой гидродинамики с разделенной спиновой эволюции основан на уравнении Паули для одной частицы [27]. Вывод, основанный на уравнении Паули, обнаруживает специфическую структуру силового поля спин-спинового взаимодействия. Более того, он демонстрирует несохранение числа частиц в каждой подсистеме. Предложен многочастичный вывод квантовой кинетики отдельной спиновой эволюции [19]. Методология многочастичной квантовой гидродинамики может быть применена к выводу квантовых кинетических уравнений для частиц со спином [28], что имеет как аналогию, так и некоторое отличие в сравнении с методом функций Вигнера [114]. Метод многочастичной квантовой гидродинамики был обобщен для вывода квантовой кинетики отдельной спиновой эволюции [19].

Квантовые свойства плазмы также обусловлены обменным взаимодействием. Описание обменного взаимодействия в плазме представлено в [62], [66], [115], [116]. Обменное взаимодействие между зарядами входит в уравнение Эйлера как потенциальная сила и, таким образом, является эффективной модификацией давления. Таким образом, обменное взаимодействие дает вклад в продольные и продольно-поперечные волны. Гидродинамические модели обменного взаимодействия получены в приближении малости обменных эффектов. Поэтому область применимости этих моделей лежит за пределами плотностей вырожденного электронного газа в металлах и может быть использована в астрофизических системах.

Уравнение эволюции спина, дополняющее систему уравнений квантовой гидродинамики, является обобщением уравнения Блоха. Совокупность частиц, как и отдельная частица, эволюционирует под действием внешнего поля. Кроме того, возникает взаимодействие между частицами системы. Однако наряду с динамическими эффектами возникают коллективные кинематические эффекты. А именно дивергенция тензора спинового тока. Его квантовая часть имеет ненулевое

значение, даже для одной частицы, как это было получено Такабаяси для одночастичной гидродинамики [54]. Но существует и коллективная часть спинового тока, она связана с разбросом частиц по квантовым состояниям и может быть ассоциирована с тепловым движением или с принципом Паули, если мы имеем дело с вырожденными фермионами. Тепловая часть спинового тока подобна давлению входящего в уравнение Эйлера. Тензор спинового тока может быть приближенно представлен в терминах других гидродинамических переменных, т.е. использовано некоторое уравнение состояния. Во многих работах по квантовой гидродинамике отбрасывают тепловую часть спинового тока в силу отсутствия уравнения состояния. Однако, уравнение для “тепловой части” спинового тока для вырожденного электронного газа, где описанные величины обусловлены принципом Паули, было получено сравнительно недавно. Эта модель была использована для изучения волновых процессов в плазмopodobных средах. Уравнение состояния для спинового тока, полученное в [7] с применением квантовой гидродинамики отдельной спиновой эволюции. Его явный вид найден для вырожденного электронного газа [7] и является аналогом давления Ферми. Поэтому его можно называть спиновым током Ферми. В таком подходе, существование спинового тока Ферми тесно связано с разностью давления Ферми для электронов со спином вверх и спином вниз [7]. Спиновый ток Ферми приводит к модификации спектра спин-плазменных волн [7], в частности, изменяется частота отсечки спиновых волн. Если частота отсечки спин-плазменной волны больше плазменной частоты, возникает гибридизация спектров спин-плазменной волны и обыкновенной волны. Альтернативное уравнение состояния было получено из квантовой кинетики с отдельной спиновой эволюцией как момента векторной функции распределения спинов [19].

Спиновый ток играет важную роль в физике квантовой плазмы. Однако он также находится в центре внимания в физике конденсированного состояния, особенно применительно к спинтронике. Спинтроника связана со спин-зависимым явлением переноса электронов [117]. Для моделирования эффектов, связанных со спиновым током, аналитическое определение спинового тока в терминах эффективной одночастичной волновой функции разработано в работах [118], [119], [120], [121]. Необходимость применения полного тока, состоящего из спинового и

орбитального тока, высказана в [122]. Методология этих исследований отличается от квантовой гидродинамики, где спиновый ток возникает как часть набора гидродинамических переменных для описания коллективных явлений.

Тепловая часть спинового тока может повлиять на большинство эффектов в спиновой квантовой плазме и связанных со спином эффектов в физике конденсированных сред. Если рассматривать квантовую плазму со спином $1/2$ со спин-орбитальным взаимодействием, тогда в поле силы возникает тензор спинового тока в уравнении Эйлера и в спиновом моменте силы в уравнении эволюции магнитного момента [9]. Там тоже возникает тепловая часть спинового тока. Кроме того тепловая часть спинового тока влияет на структуру уравнений для спиновой завихренности и гидродинамической спиральности.

В классической плазме модель электрон-позитронной плазмы не отличается от модели электрон-ионной плазмы. Электроны, позитроны и ионы участвуют в электромагнитном взаимодействии между зарядами. Некоторые интересные эффекты существуют в классической электрон-позитронной плазме из-за равенства масс и модулей зарядов обоих видов. Используя двухжидкостные гидродинамические и кинетические модели, было замечено, что многие волновые явления, такие как акустические волны, вистлеры, вращение Фарадея, низшие гибридные волны и поперечные альфвеновские волны, отсутствуют в нерелятивистской электрон-позитронной плазме [123], [124]. Квантовая природа частиц требует включения взаимодействия Дарвина [26], [125] наряду со спином частиц [61], [64], [65]. Взаимодействие Дарвина имеет слабoreлятивистскую природу [126], поэтому в большинстве работ по квантовой плазме им пренебрегают. Квантовая модель электрон-позитронной плазмы требует учета дополнительного взаимодействия, которого нет между электронами. Это так называемое аннигиляционное взаимодействие [126] (см. параграф 83). Это не аннигиляция самих электрон-позитронных пар. Однако это слабoreлятивистский след электрон-позитронного взаимодействия, когда электрон-позитронная пара превращается в виртуальный фотон, который распадается обратно в электрон-позитронную пару. Изучение аннигиляционного взаимодействия в электрон-позитронной квантовой плазме является существенной частью понимания квантовых и релятивистских свойств плазмы [127], [128], [129], [130], [131], [132].

Рассмотрение квантовой электрон-позитронной плазмы даёт основу для астрофизических приложений плотной парной плазмы. А именно для плазмы находящейся в сильном магнитном поле, таким как поле в сильно намагниченных пульсарах [133], [134].

Электрон-позитронная плазма обнаружена во многих астрофизических средах, таких как ранняя Вселенная, в магнитосфере нейтронных звезд. Существование электронно-позитронной плазмы в компактных звездах исследовалось с помощью упрощенной модели гравитационного коллапса или пульсирующего барионного ядра. Она показала возможные процессы, приводящие к рождению электрон-позитронных пар на границе барионного ядра. Это позволило рассчитать плотность электрон-позитронных пар $n_{\text{pair}}=10^{28} \text{ см}^{-3}$ [135]. Считается, что вырожденная электрон-позитронная плазма с ионами находится в компактных астрофизических объектах, таких как нейтронные звезды и внутренние слои белых карликов [133], [136].

Проводятся эксперименты по получению электрон-позитронной плазмы в лабораториях. В связи с этим были предложены различные методы. В работе [137] был представлен план создания и диагностики электронно-позитронной плазмы в стеллараторах, а также идут разработки в области создания источников позитронов. Взаимодействие сверхкоротких лазерных импульсов с газообразными или твердыми мишенями может привести к генерации оптически тонкой электрон-позитронной плазмы с плотностью выше твердотельной в диапазоне $10^{23}-10^{28} \text{ см}^{-3}$ [138]. Было показано, что с помощью компактной лазерной установки в лаборатории [139] можно генерировать безионную электрон-позитронную плазму. Её зарядовая плотность порядка 10^{16} см^{-3} и малая расходимость, открывают возможность изучения электрон-позитронной плазмы в контролируемых лабораторных экспериментах.

Следует отметить, что в последние годы рассматриваются классические релятивистские свойства электрон-позитронной плазмы, а также квантовые свойства электрон-позитронной и электрон-позитрон-ионной плазмы. Например, влияние термоинерционных эффектов на магнитное пересоединение (magnetic reconnection) в релятивистской электрон-позитронной плазме [140]. Само модуляция нелинейных волн в слабо намагниченной горячей релятивистской

электрон-позитронной плазме и нелинейные альфвеновские волны в сильно намагниченной релятивистской электрон-позитронной плазме изучались на пути исследования классической релятивистской электрон-позитронной плазмы [141]. В этих работах применялась гидродинамическая модель релятивистской плазмы, с температурой основанная на уравнении состояния выражающее плотность импульса через температуру и поле скоростей [142].

Электрон-позитронная и электрон-позитрон-ионная квантовая плазма со спином $1/2$ и её волновые свойства рассматривались в работах [78], [106], [143], [144], [145], [146], [147], [148], [149]. В частности, в работе [148] для электрон-позитронной плазмы были обнаружены новые спин-зависимые альфвеновские солитоны, подчиняющиеся уравнению Кортевега-де Фриза, где нелинейность вызвана спиновыми эффектами. Влияние квантового потенциала Бома и спиновых поправок на спектр магнитозвуковых волн в нерелятивистской и релятивистской вырожденной электрон-позитрон-ионной плазме рассмотрено в литературе. Однако релятивистские эффекты были включены только в давление Ферми.

О продольной волне в вырожденной безспиновой квантовой электрон-позитрон-ионной плазме сообщалось в работах [147], [150], [151], [152]. Она называется позитрон-акустической волной. Для режима ультрарелятивистских электронов и нерелятивистских позитронов получен закон дисперсии позитрон-акустических волн в промежуточном диапазоне длин волн [150].

Основное обсуждение, представленное выше, относится к нерелятивистским квантовым системам или режимам, в которых учитываются релятивистские поправки, полученные в слабoreлятивистском приближении. Однако существуют ряд гидродинамических и кинетических подходов основанных на релятивистских квантовых уравнениях. Прежде всего, отметим гидродинамическое представление уравнения Дирака [57], [129]. Это даёт сравнительно сложную гидродинамическую модель, структура которой значительно отличается от нерелятивистской квантовой гидродинамики или классической релятивистской гидродинамики. Однако, в работе [153] использовано представление уравнения Дирака в виде уравнения второго порядка. На этой основе получена система уравнений непрерывности, четырех импульса и спина которые имеют структуру сравнимую с известными результатами. Что, в частности, позволяет авторам выделить квантовые поправки в

релятивистские уравнения гидродинамики. Квантовое релятивистское кинетическое уравнение было получено из уравнения Дирака для одной частицы с использованием функции распределения Вигнера в [154]. Альтернативный взгляд на квантовую кинетическую теорию частиц со спином $1/2$ предложен в [155] в пределе больших пространственных масштабов. Нелинейные уравнения Шредингера и Паули могут быть получены исходя из многочастичной квантовой гидродинамики, выведенной из соответствующего микроскопического многочастичного уравнения Шредингера [61], [62]. Наличие таких уравнений ставит вопрос о соответствующих нелинейных уравнениях Клейна-Фока-Гордона и Фейнмана—Гелл-Манна. Решение этого вопроса, основанного на микроскопической динамике, не реализовано на данный момент. Поэтому, в работе [156], развит полуфеноменологический подход, основанный на одночастичных уравнениях и применении концепции ансамбля частиц. В силу сложности уравнений гидродинамики полученных непосредственно из уравнения Дирака была разработана приближенная процедура для исследования релятивистских эффектов в квантовой плазме, в которой выполнено разложение по спиновым степеням свободы [157] – [161].

Ультрахолодные квантовые газы нейтральных атомов

Сверхтекучесть гелия-4 обнаруженная экспериментально в 1938 г. объяснялась конденсацией Бозе-Эйнштейна (БЭК) атомов гелия. Однако изначально конденсация Бозе-Эйнштейна была предсказана для идеального Бозе газа, тогда как гелий является жидкостью с сильным взаимодействием между частицами. Хотя взаимодействие атомов гелия значительно слабее, чем межчастичное взаимодействие между другими атомами факт образования жидкости означает уход от режима слабонеидеального газа. Тем не менее, это привело к развитию теории слабонеидеального Бозе газа, большой вклад в которую внёс Н.Н. Боголюбов [162], [163], [164]. В сравнительно недавних экспериментах, проведенных в 1995 г. реализован конденсат Бозе-Эйнштейна разреженных газов и показано, что конденсат Бозе-Эйнштейна проявляет сверхтекучесть. Ультрахолодные газы имеют слабонеидеальную природу из-за их разреженности.

Экспериментальные и теоретические подходы к физике квантовых газов продолжали развиваться в последнее время. В частности, изучались различные нелинейные структуры [165], [166], [167], [168], [169], [170]. Были разработаны методы получения БЭК [171] и бозон-фермионных смесей [172], [173], [174], [175], [176] и исследование их свойств. Существует экспериментальная возможность манипуляции межчастичным взаимодействием в широком диапазоне. Это создает контролируемые условия, как для отталкивания, так и для притяжения между атомами, например, в атомарном БЭК ${}^7\text{Li}$ [177]. В работе [172] рассматривается смесь вырожденных газов бозонов и фермионов. В этой смеси взаимодействие между атомами может быть изменено от отталкивания к притяжению.

После получения БЭК в экспериментах с парами атомов щелочных металлов были проведены теоретические и экспериментальные исследования линейных волн и нелинейных структур в БЭК. Отдельным направлением в этой области было исследование поляризованного БЭК. Это связано с недавними экспериментальными успехами в охлаждении поляризованных атомов и молекул. Экспериментально был реализован БЭК с магнитной поляризацией для атомов ${}^{52}\text{Cr}$. Было много попыток экспериментального получения электрически поляризованного БЭК (см. обзоры [178], [179], [180], [181]). Для этого проводятся попытки охлаждения Бозе молекул с электрическим дипольным моментом. Особый интерес представляет создание электрически поляризованного БЭК. Это обусловлено большой величиной диполь-дипольного взаимодействия в сравнении с намагниченным БЭК.

При теоретическом исследовании БЭК с парным взаимодействием, а также с учётом трёхчастичного взаимодействия, используется эффективное макроскопическое нелинейное уравнение Шредингера (НУШ). Это уравнение содержит кубическую нелинейность и нелинейность пятой степени [182], [183], [184]. Оригинальное уравнение с кубической нелинейностью носит название уравнения Гросса-Питаевского (ГП). Дополнительно, для описания неупругого рассеяния атомов в литературе используются мнимая часть констант взаимодействия в нелинейных слагаемых [185]. Трёхчастичное взаимодействие также приводит к образованию димеров. Этот процесс приводит к потере атомов из БЭК [186], [187]. Уравнение ГП используется для бозонов при равной нулю

температуре. Однако влияние конечной температуры существующей в практически реализуемых квантовых газах также исследуется в литературе. Подробное описание свойств БЭК и квантовых газов при ненулевых температурах можно найти, к примеру, в обзоре [188]. В 2007 году, возможность получения уравнения ГП из микроскопического многочастичного уравнения Шредингера продемонстрирована в [189], где доказаны соответствующие теоремы. Однако методика вывода не обсуждается в этой работе. Прямой вывод уравнения ГП из многочастичного уравнения Шредингера представлен в [41] методом квантовой гидродинамики. Кроме того, НУШ для системы бозонов, находящихся в состоянии БЭК, с короткодействующим потенциалом взаимодействия, в третьем порядке по радиусу взаимодействия, получен в [41]. Если оставить только слагаемое, возникающее в первом порядке по радиусу взаимодействия, то получится известное уравнение ГП выведенное из многочастичного уравнения Шредингера, при рассмотрении потенциала парного взаимодействия. При выводе авторы не используют предположения о плотности рассматриваемой системы. Поэтому не было ограничений по продолжительности процесса взаимодействия. Таким образом, не обязательно рассматривать взаимодействие как рассеяние. Этот вывод не исключает взаимодействия нескольких частиц в один и тот же момент времени [41].

Фундаментальное и подробное описание влияния ненулевой температуры на динамику БЭК дано в [190], где рассматривалось только двухчастичное взаимодействие. Влияние несконденсированных атомов на динамику БЭК рассматривается в [190], где динамика несконденсированных атомов (нормальной компоненты) не включена. Учет динамики нормальной компоненты приводит к двухжидкостной гидродинамике. Интерференция сверхтекучей и нормальной компонент обычно описывается двухжидкостной гидродинамикой [191]. Недавние примеры использования двухжидкостной гидродинамики можно найти в работах [192], [193], [194], [195]. Связь двухжидкостной гидродинамики с кинетическими уравнениями представлена в работах [195], [196]. В цитируемых работах использовалось кинетическое уравнение типа Больцмана с соответствующим интегралом столкновений.

Плотность энергии основного состояния БЭК была рассчитана в [197], [198], [199], во втором порядке по малому параметру, существующему для разреженных сред $\sqrt{a^3 \rho}$ с учетом эффектов трёхчастичного взаимодействия (где ρ — плотность частиц, a - длина рассеяния s-волновом в приближении). Вычисление константы под логарифмом представлено в [197], где показана её зависимость от длины рассеяния. Явный трёхчастичный контактный потенциал для разреженного БЭК получен из микроскопической теории в [184]. Вывод основан на значениях квантового среднего от произведений одномодовых операторов уничтожения и рождения. Константа трёхчастичного взаимодействия зависит от длины рассеяния s-волны, определяемой через парный потенциал.

Отметим некоторые физические эффекты, существующие в БЭК обусловленные трёхчастичным взаимодействием. Стабильность БЭК с трёхчастичным взаимодействием рассмотрена, в частности, в работе [185]. Влияние начальных условий на устойчивость БЭК изучалось в [185]. Исследование выполнено с использованием вариационного подхода и численного моделирования трёхмерного БЭК находящегося в ловушке. В этих работах для изучения свойств БЭК с трёхчастичным взаимодействием использовалось нелинейное уравнение с нелинейностями третьей и пятой степени. В работе [200] обсуждаются локализованные основные состояния БЭК в оптических решетках с притягивающим и отталкивающим трёхчастичным взаимодействием. Кинетическое уравнение типа Власова для ультрахолодных бозонов предложено в [201], где для вывода кинетического уравнения использовались функция распределения Вигнера и НУШ с нелинейностями третьей и пятой степени. В большинстве работ двухчастичное взаимодействие, в приближении Гросса-Питаевского, играет основную роль. Однако в современных исследованиях может быть реализовано условие, где двухчастичная длина рассеяния стремится к нулю, что может быть получено манипулированием внешним магнитным полем, вдали от резонанса Фешбаха [202]. В этой ситуации главную роль играют двухчастичное взаимодействие в третьем порядке по радиусу взаимодействия и трёхчастичное взаимодействие, в отличие от режима моделируемым уравнением ГП.

Существуют различные обобщения уравнения ГП. Эти обобщения, в частности, сделаны для двух видов нелокальных нелинейностей: интегральное

нелинейное слагаемое добавлено в модели дипольного БЭК [203], [204], [205], [206], и неинтегральные нелинейности, содержащие пространственные производные макроскопической волновой функции использованы для более детального учета короткодействующего взаимодействия в сравнении с уравнением ГП [41], [207], [208]. Отметим примеры НУШ с нелинейностями, содержащими пространственные производные волновых функций, использующиеся для изучения БЭК [207]. В [208], НУШ содержит вторые пространственные производные квадрата модуля волновой функции. При переходе к уравнениям гидродинамики это дает плотность силы пропорциональную произведению концентрации на третью производную концентрации. Уравнения квантовой гидродинамики в третьем порядке по радиусу взаимодействия получены в [41]. В этом случае плотность силы в уравнении Эйлера имеет иной вид, а именно она пропорциональна третьей производной квадрата концентрации. Вторая константа взаимодействия g_2 возникает при учете взаимодействия вплоть до приближения в третьем порядке по радиусу взаимодействия. В общем случае параметр g_2 не зависит от константы g и должен рассматриваться как дополнительный параметр. Приближенная оценка параметра g_2 через константу g рассматривается в [41]. Локальная плотность лагранжиана для двухчастичного и трёхчастичного эффективного короткодействующего взаимодействия содержащая зависимость от $(\psi^* \psi)^2$, $(\psi^* \psi)^3$, $\nabla(\psi^* \psi) \cdot \nabla(\psi^* \psi)$ представлена в [208] и соответствует уравнениям, представленным в [207]. Обобщение уравнения ГП на режим с большим газовым параметром предлагается в [209], где представлен НУШ с нелинейностью четвертой степени, которая, однако, является локальной.

При экспериментальном исследовании БЭК в магнитных ловушках исследователи работают с числом частиц N порядка 10^4 - 10^5 . При квантово-механическом описании такой системы необходимо решать уравнение Шредингера, определяющее волновую функцию, зависящую от $3N$ координаты и времени. Волновые процессы, процессы переноса, обмена энергией и импульсом при взаимодействии происходят в трехмерном физическом пространстве. В связи с этим необходимо преобразовать уравнение Шредингера в уравнения, определяющие динамику функций в трехмерном физическом пространстве. Эта

задача решается методом квантовой гидродинамики. Кроме того, существует метод позволяющий построить НУШ на основе системы уравнений квантовой гидродинамики [41].

Многие процессы в квантовых системах определяются динамикой и дисперсией коллективных возбуждений. Закон дисперсии коллективных возбуждений в вырожденном разреженном Бозе газе был получен Боголюбовым в 1947 г. (современные обзоры см. в [162], [210]). Многие авторы изучали изменение спектра Боголюбова, возникающее при более тщательном учете короткодействующих взаимодействий [41], [211], [212], [213], [214], [215], [216], или при сложной геометрии системы [217], [218]. В работах [219], [220], [221], [222], [223] авторы исследовали влияние динамики электрического дипольного момента на дисперсию коллективных возбуждений в БЭК. Неустойчивость спектра Боголюбова в трёхмерном дипольном БЭК с отталкивающим короткодействующим взаимодействием была получена в [219], [221]. Кроме того, показано, что спектр Боголюбова для двумерного дипольного БЭК устойчив в широком диапазоне параметров [222]. Имеются также обзорные статьи [180], [181], [203], [205], [224], в которых рассматриваются различные аспекты физики поляризованных БЭК. Кроме того, интересна возможность существования волн поляризации в дипольном БЭК. Динамика поляризации представляет интерес не только для квантовых газов, но и для физики твердого тела и физики низкоразмерных систем. Поляризационные волны в низкоразмерных и многослойных системах проводников, диэлектриков и полупроводников рассмотрены в статьях [39], [225]. Аналогично, в БЭК молекул, имеющих электрический дипольный момент, наряду с модой Боголюбова возможно существование волны поляризации.

Для исследования БЭК системы частиц с электрическим дипольным моментом или магнитными моментами используются различные теоретические методы. Одним из теоретических описаний поляризованных БЭК является обобщение уравнения ГП [204], [226], [227]. При использовании этого метода были выполнены работы по следующим направлениям: спинорный БЭК [228], [229], влияние магнитных моментов на эволюцию БЭК [203], [230], [231], [232], [233], а также о влиянии электрической поляризации частиц на динамические процессы в

БЭК [203], [234], [235]. Дипольные ультрахолодные фермионы также исследованы в работах [236], [237], [238].

При интерпретации диполь-дипольного взаимодействия в квантовых газах использовались понятия длины рассеяния и первого борновского приближения по аналогии с короткодействующим взаимодействием. Поэтому задача взаимодействия часто сводится к процессу рассеяния. Различные приближения, основанные на процессе рассеяния, были проанализированы в [239]. В частности, рассмотрены условия использования первого борновского приближения и представлено обобщение уравнения ГП для рассеяния поляризованных атомов за пределами первого борновского приближения.

При использовании метода квантовой гидродинамики задача рассеяния не формулируется. При этом нет необходимости ограничиваться процессом рассеяния, поскольку в центре внимания находится дальнедействующее взаимодействие между атомами, в том числе взаимодействие между несколькими атомами одновременно. Так как для поляризованных атомов, взаимодействие между диполями рассматривается как дальнедействие [179], [180]. Однако каждое событие взаимодействия между диполями можно рассматривать как процесс рассеяния в системах частиц с малой концентрацией. Это приближение возможно как для нейтральных поляризованных частиц, так и для заряженных. Кинетическая теория для последнего случая была разработана Л.Д. Ландау в 1936 г. [43]. Ландау построил интеграл столкновений для кулоновских частиц, используя аналогию с уравнением Больцмана. Интеграл столкновений Ландау зависит от сечения рассеяния. В этой модели, рассмотрена задача о рассеянии заряженных частиц на малые углы, что подходит для сильно разреженных газов. Однако, для частиц с дальнедействующими взаимодействиями более подходит формулировка с использованием самосогласованного поля. Этот подход предложен А.А. Власовым в 1938 г. для систем заряженных частиц [240].

Наряду с уравнением ГП для исследования поляризованных БЭК и других систем частиц, имеющих электрический дипольный момент, применялись и другие методы. Гидродинамическая формулировка теории Хартри-Фока для частиц с большими электрическими дипольными моментами рассмотрена в [241], [242]. Уравнение типа Эйлера было получено в статье [242] из эволюции матрицы

плотности. Динамика электрического дипольного момента в димерных изоляторах Мотта вызывает появление низкочастотных возбуждений [243]. Спектр одночастичных возбуждений и длинноволновых коллективных мод (нулевой звук) в нормальной фазе был получен в [244] в рамках приближения Хартри-Фока, которое на равных рассматривает прямое и обменное взаимодействия. Модель минимальной связи для описания влияния изменения поляризации в пространстве на свойства БЭК построена в [245]. Метод функционала плотности применён для исследования поляризованных квантовых газов в [246]. Модель Хаббарда для поляризованного БЭК также использовалась в [247]. Квантовая задача двух тел для поляризованных молекул анализируется в [248]. Существование состояний со спонтанной межслойной когерентностью было предсказано в [249] в двухслойных системах полярных молекул. Расчеты в [249] были основаны на подходе вторичного квантования, где гамильтониан учитывает вращение молекул и диполь-дипольное взаимодействие. Анизотропия сверхтекучести поляризованных фермионов была продемонстрирована в [250]. А соответствующие термодинамические и корреляционные свойства были исследованы [251]. Влияние электрического дипольного момента на системы охлажденных нейтральных атомов, которые используются для квантовых вычислений и устройств, с квантовой памятью, анализировалось в [252].

Наличие Бозе-частиц, в состояниях с неминимальной энергией (квантовые флуктуации), за счет межчастичных взаимодействий и их влияние на свойства БЭК рассмотрены в [253]. Это привело к модели обобщающей уравнение ГП, для дипольного полностью поляризованного БЭК. Это рассматривалось в рамках большого канонического ансамбля, где квантовые флуктуации вблизи состояния БЭК представлены в терминах расширения амплитуд Боголюбова. Для получения аналитических решений рассмотрен режим Томаса-Ферми полученных уравнений. Амплитуда рассеяния при малом импульсе использовалась вплоть до второго порядка по потенциалу рассеяния в расчетах энергии основного состояния [253]. Соответствующие гидродинамические уравнения были также представлены в [253], где новые эффекты появляются за счет использования предложенного там уравнения состояния.

Большинство экспериментов выполняется с сильно разреженными газами. Тем не менее, заметные успехи были достигнуты в Бозе конденсации плотных газов [254], [255]. Следовательно, необходим детальный учет короткодействующего взаимодействия, в частности описание короткодействующего взаимодействия вплоть до третьего порядка по радиусу взаимодействия [41].

Основное обсуждение квантовых газов, представленное выше, сфокусировано на системах атомов. Однако существует много работ о БЭК квазичастиц, в частности экситонов. Характерным свойством БЭК системы экситонов, индуцированных в полупроводниках [256], является значительная величина электрического дипольного момента экситона. Это приводит к сильному взаимодействию экситонов с внешним электрическим полем и возникновению коллективных диполь-дипольных взаимодействий в экситонных системах. К таким системам можно применить метод квантовой гидродинамики вместе с квантовой кинетикой, основанной на неравновесных функциях Грина или уравнений эволюции матрицы плотности.

Солитоны - известные нелинейные явления, существующие в различных средах. Они обнаружены на поверхности воды, в плазме, в лазерах, в ультрахолодных Бозе атомах [257], , в ультрахолодных фермионах [258], [259], в различных условиях физики конденсированного состояния, таких как спиновые волны [260], [261], [262] и волны плотности заряда [263], [264], [265]. Солитоны проявляют различные свойства, такие как притяжение, отталкивание, разрушение, слияние, обращение друг вокруг друга и аннигиляцию двух солитонов. Недавно было продемонстрировано, что солитоны могут поглощать резонансные волны [266].

При анализе нелинейных волн многие физические модели различных физических систем приводят к нелинейному уравнению Шрёдингера (например, уравнению Гросса-Питаевского) или уравнению Кортевега-де Фриза с кубической нелинейностью, где нелинейность в основном обусловлена межчастичным взаимодействием. Например, притягивающее короткодействующее взаимодействие в БЭК нейтральных частиц приводит к существованию яркого солитона (область увеличения концентрации), а отталкивающее взаимодействие приводит к

образованию темного солитона (область уменьшения концентрации). Эти названия произошли от изучения нелинейных световых волн в среде, где увеличение (уменьшение) амплитуды солитона по сравнению с равновесной амплитудой делает его ярче (темнее). Однако БЭК с притяжением между частицами неустойчив к коллапсу, в трехмерном случае. Следовательно, это решение можно наблюдать в квазиодномерной геометрии. Давление Ферми является причиной появления темных солитонов в ультрахолодных фермионах [259], где давление Ферми дает эффективное отталкивание, но с дробной нелинейностью. Однако более общие модели содержат сложные формы нелинейностей, такие как нелокальная нелинейность. Обобщенные модели предсказывают существование яркого солитона в средах с отталкивающим взаимодействием в приближении среднего поля [38], [267].

К настоящему времени показано, что в БЭК с отталкивающим взаимодействием атомов образуется яркий солитон. Солитон такого типа существует, например, в БЭК атомов ^{87}Rb в слабом периодическом потенциале [268]. Образование яркого солитона в конденсате атомов ^7Li рассмотрено в [177], [269] для квазиодномерного случая. Свойства темного солитона изучались в [270], где экспериментально показана генерация темного солитона в сигарообразном конденсате атомов ^{87}Rb с использованием метода фазового импринтинга. Исследование темного солитона в БЭК внутри вихревого кольца описано в [271]. Помимо одномерных солитонных возмущений в БЭК рассматривают трехмерные возмущения [272]. Показана возможность существования солитонных возмущений в БЭК с диполь-дипольным взаимодействием [273]. Теоретически показано, что в двухкомпонентном БЭК могут существовать солитоны типа яркий-яркий, темный-яркий и темный-темный [274]. Эти решения могут быть описаны с помощью уравнения ГП. Теоретический анализ при более точном учете взаимодействия позволяет прогнозировать новые типы солитонных решений в БЭК [41]. В [40] этот подход использован для изучения того, как изменяется форма яркого солитона при более точном рассмотрении взаимодействий в БЭК.

В литературе изучаются ультрахолодные бозон-фермионные смеси. Примерами таких смесей являются ^7Li - ^6Li [275], [276], ^{23}Na - ^6Li [277] и ^{87}Rb - ^{40}K [278]. В частности, рассматриваются возможности возникновения новых

солитонных возмущений в смеси Бозе и Ферми атомов с короткодействующими потенциалами взаимодействия.

Теоретические работы, посвященные ультрахолодным фермионам, содержат нелинейное уравнение Шрёдингера (аналог уравнения ГП для бозонов), не учитывающее взаимодействия между фермионами [279], [280]. Это связано с тем, что первое борновское приближение не дает вклада во взаимодействие ультрахолодных фермионов. Это уравнение учитывает вклад давления Ферми, обусловленного принципом Паули. Для полного понимания динамики фермионов и механизмов релаксации в таких системах важно понять роль взаимодействия в системах фермионов. Это также необходимо для построения гидродинамической модели нелинейных структур, например, вихрей в сильно взаимодействующем газе Ферми атомов, которые исследованы экспериментально в [281].

Также солитоны изучаются в фермионах и бозон-фермионных смесях в первом порядке по радиусу взаимодействия. Тёмные солитоны существуют в сверхтекучих Ферми газах [282], [283]. Наличие относительно небольшого числа бозонов может внести нелинейность в фермионную систему и существенно изменить свойства системы [173]. В работе [174] предложено интерпретировать локализованные состояния в бозон-фермионной смеси с притягивающим (отталкивающим) бозон-фермионным взаимодействием как материально-волновую реализацию квантовых точек. В [284] изучаются солитоны, включающие большую часть бозонов системы и относительно небольшую часть фермионов вблизи поверхности Ферми. В случае притяжения между компонентами солитоны могут описывать одновременное увеличение или уменьшение плотностей обоих компонентов смеси. С другой стороны, в случае отталкивающего взаимодействия между компонентами они могут описывать увеличение плотности в одном компоненте и уменьшение плотности в другом компоненте. Было показано, что яркие солитоны могут формироваться в бозон-фермионной смеси, которая находится в трёхмерном вытянутом гармоническом потенциале [285]. Для этого притяжение между Бозе и Ферми атомами должно быть достаточно сильным, превращая, таким образом, отталкивающие взаимодействия между бозонами в притяжение. В то же время силы притяжения, возникающие в бозонном облаке, должны быть достаточно слабыми, чтобы избежать коллапса.

При малых плотностях фермионов и бозон-фермионном притяжении, может появиться яркий бозон-фермионный солитон [286]. При изучении бозон-фермионных смесей p -волновое взаимодействие между фермионами было включено в [287] при исследовании ярких солитонных решений. Это приводит к стабилизации, обусловленной отталкивающим взаимодействием в p -волновом приближении. Тёмные фермионные солитоны в бозон-фермионной смеси рассматривались в [288], где была показана возможность свободного расширения тёмного солитона при отталкивающем бозон-фермионном взаимодействии. Изучаются солитоны в бозон-фермионных смесях с фермион-фермионным взаимодействием, которое появляется при анализе третьего порядка по радиусу взаимодействия. При этом для нахождения солитонных решений используется метод масштабирования переменной [289], который является примером метода возмущений. Аналогичный метод был использован для изучения БЭК частиц со спином 1 [290]. Применение метода масштабирования переменной к волнам при изучении БЭК представлено в [291], где дан краткий обзор применения такого метода возмущений для одномерного БЭК в первом порядке по радиусу взаимодействия, для различных условий и различных методов масштабирования.

Солитоны, как фундаментальные нелинейные возбуждения, также изучаются в дипольном БЭК [235], [292], [293]. Эти исследования основаны на использовании обобщения уравнения ГП для дипольного БЭК [203], [204], [205], [206], [219], [226], [227], [294]. Электрическое поле, вызванное поляризацией, можно ввести явно [34], [245]. Следовательно, электрически поляризованный БЭК также рассматривается как диэлектрическая среда [245].

Недавние эксперименты с БЭК редкоземельных элементов продемонстрировали существование квантовой неустойчивости Розенцвейга, для объяснения которой требуется более полный учет физических эффектов в сравнении с уравнением ГП. Представляется, что это требует учета квантовых флуктуаций в БЭК в дополнение к стандартному короткодействующему взаимодействию и диполь-дипольному взаимодействию. В некоторой степени «конструктивное» трёхчастичное взаимодействие [37], описываемое нелинейностью пятой степени в уравнении ГП, было использовано для моделирования этих явлений [295]. Однако описание, основанное на квантовых

флуктуациях, продемонстрировало лучшее согласие с экспериментальными данными. Все упомянутые взаимодействия и связанные с ними квантовые флуктуации применимы к дипольному БЭК атомов хрома ^{52}Cr (см. [233]) и к БЭК редкоземельных атомов (см. [296], [297] для атомов ^{164}Dy). Квантовая неустойчивость Розенцвейга обнаружена только для редкоземельных атомов. Отсюда возникает вопрос: это количественная или качественная разница двух типов дипольных атомов. Можно предположить, что атомы редкоземельных элементов показывают качественное отличие из-за анизотропии короткодействующего взаимодействия. Это следует из анализа спектра резонанса Фешбаха в редкоземельных атомах, где проявляется анизотропия квазипотенциалов [298]. Это, в частности, показывает, что необходима модель редкоземельных атомов с учетом анизотропного короткодействующего взаимодействия.

Установлено, что квантовая неустойчивость Розенцвейга в БЭК лантаноидов (атомов с относительно большим диполь-дипольным взаимодействием) может быть смоделирована эффективным нелинейным уравнением Шрёдингера с локальной формой квантовых корреляций [299], [300], [301], [302]. В этой модели возникает нелинейное слагаемое с нелинейностью четвертого порядка, вызванное квантовыми флуктуациями [296], [297], [299], [303], где квантовые флуктуации связаны с короткодействующим и диполь-дипольным взаимодействием. Дипольная часть квантовых флуктуаций найдена в работах [253], [304]. Теоретическое исследование физических следствий квантовой неустойчивости Розенцвейга проводится после экспериментального обнаружения этого явления [305]-[312].

ГЛАВА 1. ОДНОЖИДКОСТНАЯ И ДВУХЖИДКОСТНАЯ МОДЕЛИ СПИН-ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ВЫРОЖДЕННЫХ НЕЙТРАЛЬНЫХ ФЕРМИОНОВ СО СПИНОМ 1/2

1.1 Одножидкостная квантовая гидродинамика заряженных фермионов со спин-спиновым взаимодействием в восьми моментном приближении

Как было сказано во введении, метод многочастичной квантовой гидродинамики был предложен и развит в работах Кузьменкова и Максимова в 1999-2001 годах [61], [62], [66]. Первым шагом был сделан без учета спиновой эволюции, но с учетом различия статистических свойств систем бозонов и фермионов [62]. Следом спин-1/2 многочастичная квантовая гидродинамика была получена для систем электронов [61], [66]. В этом параграфе обобщим спин-1/2 многочастичную квантовую гидродинамику для электрон-позитронной плазмы, которая имеет особенности из-за аннигиляционного взаимодействия [25]. В последующих параграфах этот метод будет обобщен для получения системы уравнений квантовой гидродинамики с отдельной спиновой эволюцией, уравнений спин-1/2 квантовой кинетики, и квантовой кинетики с отдельной спиновой эволюцией.

Основная задача метода многочастичной квантовой гидродинамики это представление многочастичного уравнения Шредингера (уравнения Паули для частиц со спином) в терминах коллективных переменных (коллективных наблюдаемых) подходящих для описания квантовой плазмы или других систем многих частиц. Далее следуя работе [25] и частично работе [7] представим основы метода квантовой гидродинамики.

Многочастичное уравнение Паули

$$i\hbar\partial_t\psi(R,t) = \hat{H}\psi(R,t), \quad (1.1.1)$$

с гамильтонианом

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2m_i} \mathbf{D}_i^2 + q_i \varphi_{i,ext} - \gamma_i \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \mathbf{B}_{i,ext} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i}^N (e_i e_j G_{ij} - \gamma_i \gamma_j G_{ij}^{\alpha\beta} \sigma_i^\alpha \sigma_j^\beta) \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i}^N \frac{\pi e_i e_j \hbar^2}{m^2 c^2} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) - \sum_{i=1}^{N_e} \sum_{j=N_e+1}^{N_e+N_p} \frac{\pi e_i e_j \hbar^2}{2m^2 c^2} (3 + \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j) \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

является исходным уравнением при выводе уравнений квантовой гидродинамики, представленный в этом параграфе. Использованный гамильтониан (1.1.2) представлен для описания системы электронов и позитронов. Обобщение на случаи электрон-ионной и электрон-позитрон-ионной плазмы выполняется тривиальным образом.

В уравнении (1.1.2) использованы следующие обозначения: $N = N_{e^-} + N_{e^+}$ это полное число частиц, N_{e^-} и N_{e^+} это числа электронов и позитронов соответственно, m_i это масса частиц с номером i , далее рассматриваются частицы одинаковой массы, латинские индексы обозначают номер частицы при микроскопическом описании, латинские индексы a также будут использоваться для коллективных переменных при обозначении сорта частиц, греческие индексы α это тензорные индексы, пробегающие значения один, два, три для пространственных компонент векторов, правило Эйнштейна относительно суммирования по повторяющимся индексам также предполагается во всех уравнениях, векторные обозначения (к примеру, вектор $\mathbf{V}_{i,ext}$) используются наряду с индексами, e_i это заряд частиц, γ_i это магнитный момент, для электронов и позитронов он может быть записан в следующем виде $\gamma_i = g\mu_B$, $\mu_B = q_i\hbar/2m_e c$, это магнетон Бора, отличие магнитного момента от магнетона Бора связано с учетом аномального магнитного момента $g = 1.00116$, σ_i матрицы Паули, $\hat{\mathbf{D}}_i = \hat{\mathbf{p}}_i - e_i\mathbf{A}_{i,ext}/c$, $\hat{\mathbf{p}}_i = -i\hbar\nabla_i$ это оператор импульса, $\varphi_{i,ext}$ это скалярный потенциал внешнего электромагнитного поля, $\mathbf{A}_{i,ext}$ это векторный потенциал внешнего электромагнитного поля, $\mathbf{V}_{i,ext}$ это индукция магнитного поля, $G_{ij} = 1/r_{ij}$ это функция Грина кулоновского взаимодействия, в которой использовано краткое обозначение для расстояния между частицами $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$,

$$G_{ij}^{\alpha\beta} = 4\pi\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{r}_{ij}) + \nabla_i^\alpha\nabla_i^\beta \frac{1}{r_{ij}}, \quad (1.1.3)$$

это функция Грина спин-спинового взаимодействия. Также использованы обозначения для скорости света c и постоянной Планка \hbar .

Рассмотрим физический смысл различных слагаемых в гамильтониане (1.1.2). Первое слагаемое представляет собой сумму операторов кинетической

энергии всех частиц. Второе слагаемое это потенциальная энергия зарядов во внешнем электромагнитном поле. Третье слагаемое это оператор потенциальной энергии магнитных моментов во внешнем магнитном поле. Эти слагаемые относятся к движению каждой частицы во внешних электромагнитных полях. Остальные слагаемые описывают взаимодействие между частицами: кулоновское взаимодействие (взаимодействие неподвижных зарядов), спин-спиновое взаимодействие (взаимодействие неподвижных магнитных моментов), дарвиновское взаимодействие (его можно интерпретировать как квантово-релятивистская поправка к кулоновскому взаимодействию, так как оба содержат только заряд частиц и расстояние между ними, а операторы импульса или спина отсутствуют там) и аннигиляционное взаимодействие соответственно.

Аннигиляционное взаимодействие хорошо изучено при исследовании позитрония, где оно играет заметную роль. Его существование связано с тем, что при взаимодействии электрона и позитрона существует диаграмма Фейнмана, в которой электрон и позитрон образуют виртуальный фотон, который распадается на электрон и позитрон. Эта диаграмма дает дополнительное слагаемое в гамильтониан Брейта. Остальные слагаемые существуют при взаимодействии электронов, при взаимодействии позитронов и при взаимодействии электронов и позитронов. Эти слагаемые соответствуют диаграмме Фейнмана, в которой происходит обмен виртуальным фотоном между двумя взаимодействующими частицами. Вывод гамильтониана Брейта представлен в четвертом томе курса теоретической физики Л. Ландау, Е. Лифшиц [126]. Отметим, что гамильтониан Брейта включает в себя другие взаимодействия, имеющие релятивистскую природу. Это спин-токовое (взаимодействие магнитного момента одной частицы с движущимся зарядом другой частицы через создаваемые ими магнитные поля), спин-орбитальное (действие статического электрического поля на движущийся магнитный момент [126]) и ток-токовое (это классическое взаимодействие двух движущихся зарядов через создаваемое ими магнитное поле) взаимодействия. Эти взаимодействия также были изучены при развитии метода многочастичной квантовой гидродинамики (см. [9], [25], [26], [33] соответственно). Их вклад будет описан ниже. Заметим, что спин-токовое и ток-токовое взаимодействия дадут очевидный вклад в силу Лоренца и силу, возникающую при учете спин-спинового

взаимодействия, но кроме этого они вносят дополнительный нетривиальный вклад. Следует отметить, что взаимодействия входящие в гамильтониан (1.1.2) имеют квазистатическую структуру, не смотря на релятивистскую природу спин-спинового, дарвиновского и аннигиляционного взаимодействия. Это выражается в том, что соответствующие слагаемые в гамильтониане (1.1.2) не содержат оператор импульса.

Далее для вывода уравнений гидродинамики необходимо определить подходящие коллективные переменные. Следуя работам [61], [62], [66], в качестве базовых переменных выберем концентрации частиц каждого сорта. В данном случае необходимо определить концентрацию электронов

$$n_e(\mathbf{r}, t) = \int \psi^+(R, t) \sum_{i=1}^{N_e} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \psi(R, t) dR, \quad (1.1.4)$$

и концентрацию позитронов

$$n_p(\mathbf{r}, t) = \int \psi^+(R, t) \sum_{i=N_e+1}^{N_e+N_{e^+}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \psi(R, t) dR. \quad (1.1.5)$$

Функции (1.1.4) и (1.1.5) определены через многочастичную волновую функцию ψ , которая описывает динамику всех частиц системы и удовлетворяет уравнению Паули (1.1.1). Концентрации частиц каждого сорта определены в соответствии с определением квантового среднего требуемого оператора. В данном случае выбран оператор концентрации точечных частиц как сумма дельта функций. Это сделано в соответствии с правилом квантования соответствующей классической микроскопической концентрации.

Уравнения непрерывности и уравнения Эйлера

Дифференцируя концентрацию частиц сорта a и применяя уравнение Паули (1.1.1) с гамильтонианом (1.1.2) для преобразования производных волновых функций по времени, после небольших преобразований полученного выражения, найдем следующее уравнения непрерывности каждого сорта частиц

$$\partial_t n_a(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}_a(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.1.6)$$

где

$$\mathbf{j}_a(\mathbf{r}, t) = \int dR \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \frac{1}{2m_i} \left((\mathbf{D}_i \psi)^+(R, t) \psi(R, t) + h.c. \right), \quad (1.1.7)$$

это поток частиц сорта a (плотность импульса частиц сорта a).

Используя поток частиц и концентрацию частиц можно определить поле скоростей частиц данного сорта $\mathbf{j}_a(\mathbf{r}, t) = n_a(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}_a(\mathbf{r}, t)$.

Аннигиляционное взаимодействие не сопровождается фактической аннигиляцией электрон-позитронных пар. При этом происходит только виртуальная аннигиляция с последующим рождением электрон-позитронной пары при описании этого взаимодействия на языке Фейнмановских диаграмм. Следовательно, число электронов и позитронов не меняется и уравнения непрерывности электронов и позитронов возникают в традиционной форме с равной нулю правой частью.

При выводе уравнений непрерывности было получено определение потока частиц (плотности импульса) определенного сорта в терминах многочастичной волновой функции (1.1.7). Используя это определение можно получить уравнение баланса импульса. Для этого продифференцируем плотность импульса (1.1.7) по времени и используем уравнение Паули с гамильтонианом (1.1.2). После продолжительных преобразований получим уравнение баланса импульса:

$$\begin{aligned} \partial_t j_a^\alpha + \partial_\beta \Pi_a^{\alpha\beta} = & \frac{e_a}{m_a} n_a \left(E_{ext}^\alpha + \frac{1}{c} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} v_a^\beta B_{ext}^\gamma \right) + \frac{\gamma_a}{m_a} M_a^\beta \partial^\alpha B_{ext}^\beta \\ & - \frac{e_a^2}{m_a} \int (\nabla G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) n_{2,aa}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' - \frac{e_a e_b}{m_a} \int (\nabla G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) n_{2,ab}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' \\ & + \frac{1}{m_a} \int (\nabla G^{\beta\gamma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) M_{2,aa}^{\beta\gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' + \frac{1}{m_a} \int (\nabla G^{\beta\gamma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) M_{2,ab}^{\beta\gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' \\ & + \frac{\pi e_a^2 \hbar^2}{m_a^3 c^2} \int (\nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) n_{2,aa}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' + \frac{\pi e_a e_b \hbar^2}{m_a^2 m_b c^2} \int (\nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) n_{2,ab}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' \\ & + \frac{3 \pi e_a e_b \hbar^2}{2 m_a^2 m_b c^2} \int (\nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) n_{2,ab}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' + \frac{2\pi}{m_a} \int (\nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) M_{2,ab}^{\beta\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) d\mathbf{r}', \quad (1.1.8) \end{aligned}$$

где

$$\Pi_a^{\alpha\beta} = \int dR \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \frac{1}{4m_i^2} (\psi^+(R, t) D_i^\beta D_i^\alpha \psi(R, t) + (D_i^\beta \psi)^+(R, t) D_i^\alpha \psi(R, t) + h.c.). \quad (1.1.9)$$

это плотность потока импульса.

Намагниченность частиц каждого сорта это векторное поле определенное следующим образом:

$$\mathbf{M}_a(\mathbf{r}, t) = \int dR \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \gamma_i \psi^+(R, t) \boldsymbol{\sigma}_i \psi(R, t). \quad (1.1.10)$$

Кроме того, уравнение Эйлера (1.1.8) содержит два типа двухчастичных концентраций. А именно двухчастичные концентрации совпадающих либо различных сортов частиц. В результате вычислений двухчастичные концентрации возникают в терминах многочастичной волновой функции:

$$n_{2,ab}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \int \sum_{i,j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) \psi^+(R, t) \psi(R, t) dR. \quad (1.1.11)$$

В формуле для двухчастичной концентрации (1.1.11) пределы суммирования по индексу i зависят от того динамику какого сорта частиц описывает уравнение Эйлера (1.1.8), т.е. чему равен индекс a . В определении (1.1.11) значение индекса b может совпадать или отличаться от значения индекса a . В уравнении Эйлера (1.1.8) предполагается, что индексы a и b не совпадают.

Также уравнение Эйлера содержит вторую двухчастичную функцию. Двухчастичная намагниченность имеет следующее определение

$$M_{2,ab}^{\beta\gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \gamma_a \gamma_b \int \sum_{i,j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) \psi^+(R, t) \hat{\sigma}_i^\beta \hat{\sigma}_j^\gamma \psi(R, t) dR. \quad (1.1.12)$$

Индексы в двухчастичной намагниченности устроены, так же как и в двухчастичной концентрации.

Используем приближение самосогласованного поля. Кроме того, отметим, что традиционно уравнение баланса импульса записывается в терминах поля скоростей. Для этого плотность импульса записывается через поле скоростей как показано выше. Кроме того тензор плотности потока импульса требует соответствующих преобразований. Требуемая методика введения поля скоростей в уравнение Эйлера и уравнения эволюции спина представлена в работах [57], [64], [65]. После всех этих действий получаем следующее уравнение баланса импульса (уравнение Эйлера) для электронов

$$\begin{aligned} mn_e (\partial_t + \mathbf{v}_e \cdot \nabla) \mathbf{v}_e + \nabla p_e - \frac{\hbar^2}{4m} n_e \nabla \left(\frac{\Delta n_e}{n_e} - \frac{(\nabla n_e)^2}{2n_e^2} \right) \\ + \frac{\hbar^2}{4m\gamma_e^2} \partial^\beta (n_e (\partial^\beta \mu_e^\gamma) \nabla \mu_e^\gamma) = q_e n_e \mathbf{E} + \frac{q_e}{c} n_e [\mathbf{v}_e, \mathbf{B}] + n_e \mu_e^\beta \nabla B^\beta \\ + \frac{\pi q_e^2 \hbar^2}{m^2 c^2} n_e \nabla n_e + \frac{\pi q_e q_p \hbar^2}{m^2 c^2} n_e \nabla n_p + \frac{3}{2} \frac{\pi q_e q_p \hbar^2}{m^2 c^2} n_e \nabla n_p + 2\pi n_e \mu_e^\beta \nabla (n_p \mu_p^\beta), \quad (1.1.13) \end{aligned}$$

и следующее уравнение баланса импульса для позитронов

$$\begin{aligned}
& mn_p(\partial_t + \mathbf{v}_p \cdot \nabla) \mathbf{v}_p + \nabla p_p - \frac{\hbar^2}{4m} n_p \nabla \left(\frac{\Delta n_p}{n_p} - \frac{(\nabla n_p)^2}{2n_p^2} \right) \\
& + \frac{\hbar^2}{4m\gamma_p^2} \partial^\beta (n_p (\partial^\beta \mu_p^\gamma) \nabla \mu_p^\gamma) = q_p n_p \mathbf{E} + \frac{q_p}{c} n_p [\mathbf{v}_p, \mathbf{B}] + n_p \mu_p^\beta \nabla B^\beta \\
& + \frac{\pi q_p^2 \hbar^2}{m^2 c^2} n_p \nabla n_p + \frac{\pi q_e q_p \hbar^2}{m^2 c^2} n_p \nabla n_e + \frac{3}{2} \frac{\pi q_e q_p \hbar^2}{m^2 c^2} n_p \nabla n_e + 2\pi n_p \mu_p^\beta \nabla (n_e \mu_e^\beta). \quad (1.1.14)
\end{aligned}$$

Следующие обозначения использованы в уравнениях баланса импульса p_a это давление, \mathbf{E} это напряженность электрического поля, $\boldsymbol{\mu}_a(\mathbf{r}, t) = \mathbf{M}_a(\mathbf{r}, t) / n_a(\mathbf{r}, t)$ это приведенная намагниченность, $\mathbf{M}_a(\mathbf{r}, t)$ это намагниченность частиц определенного сорта, Δ это оператор Лапласа.

Представим описание физического смысла слагаемых входящих в уравнения Эйлера (1.1.13) и (1.1.14). Первая группа слагаемых в левой части каждого уравнения Эйлера пропорциональна субстанциональной производной скорости и описывает динамику локального центра масс. Второе слагаемое это градиент давления, которое является средним значением квадрата скорости движения частиц относительно локального центра масс. Третье и четвертое слагаемые в левой части уравнения Эйлера квантовый потенциал Бома. Квантовый потенциал Бома, как и давление выделяется из тензора плотности потока импульса при введении поля скоростей.

Рассмотрим слагаемые, расположенные в правой части уравнения Эйлера (1.1.13) и (1.1.14). Первое слагаемое в правой части соответствует взаимодействию заряда частиц рассматриваемого сорта с внешним электрическим полем, кулоновскому взаимодействию частиц одного сорта и кулоновскому взаимодействию электронов и позитронов. Это соответствует первому, четвертому и пятому слагаемым в уравнении (1.1.8). Второе слагаемое это сила Лоренца связанная с действием на движущийся заряд частиц рассматриваемого сорта внешнего магнитного поля. Взаимодействия, дающие вклад в это слагаемое будут также обсуждаться ниже. Третье слагаемое связано с действием магнитного поля на магнитный момент частиц рассматриваемого сорта. А именно, это действие внешнего магнитного поля, магнитного поля создаваемого магнитными моментами частиц того же сорта и частицами другого сорта при диполь-дипольном взаимодействии магнитных моментов. Это слагаемое соответствует третьему,

шестому и седьмому слагаемым в уравнении (1.1.8). Четвертое (пятое) слагаемое это дарвинавское взаимодействие частиц одного сорта (разных сортов). Оно соответствует восьмому (девятому) слагаемому в уравнении (1.1.8). Последние два слагаемые это аннигиляционное взаимодействие частиц разного сорта. Они соответствуют последним двум слагаемым в уравнении (1.1.8). Отметим, что слагаемые пять и шесть в уравнении (1.1.13) (или уравнении (1.1.14), тоже касается слагаемых девять и десять в уравнении (1.1.8)) можно объединить в одно слагаемое, но они записаны отдельно, чтобы подчеркнуть их различное происхождение.

Основная часть диссертация посвящена выводу и применению минимальной системы уравнений гидродинамики состоящей из уравнений непрерывности, Эйлера, и уравнения эволюции магнитного момента. В этом случае уравнение Эйлера требует применения уравнения состояния. Для режима квантовой плазмы требуется низкая температура. В предельном случае можно ограничиться нулевой температурой (соответствующий вырожденному электронному газу) и использовать уравнение состояния в виде давления Ферми:

$$p = p_{Fe} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5m} n^{5/3}. \quad (1.1.15)$$

При этом градиент давления выражается через градиент концентрации и производную давления по концентрации

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{1}{3} m v_{Fe}^2, \quad (1.1.16)$$

где использована скорость Ферми $v_{Fe} = (3\pi^2 n_0)^{1/3} \hbar / m$.

Учет слаборелятивистских эффектов в исходном гамильтониане требует соответствующей модификации уравнения состояния

$$p = p_{Fe} \left(1 - \frac{1}{14} \frac{v_{Fe}^2}{c^2} \right), \quad (1.1.17)$$

и производной давления

$$\delta p = \frac{\partial p}{\partial n} \delta n = \frac{1}{3} m v_{Fe}^2 \left(1 - \frac{1}{10} \frac{v_{Fe}^2}{c^2} \right) \delta n. \quad (1.1.18)$$

Уравнение эволюции спина (магнитного момента)

Так как намагниченность (1.1.10) определена для частиц одного сорта, то магнитный момент частиц можно вынести за знак суммы и за знак интеграла. В итоге останется векторное поле плотности спина частиц данного сорта:

$$\mathbf{S}_a(\mathbf{r}, t) = \int dR \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \psi^\dagger(R, t) \boldsymbol{\sigma}_i \psi(R, t), \quad (1.1.19)$$

причем $\mathbf{M}_a(\mathbf{r}, t) = \gamma \mathbf{S}_a(\mathbf{r}, t)$.

Фактически это квантовое среднее следующего оператора:

$$\sum_i \boldsymbol{\sigma}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (1.1.20)$$

Таким образом, намагниченность и плотность спина имеют очевидное определение. Тем не менее, нет необходимости вводить это определение, так как оно возникает при выводе уравнения Эйлера.

Дифференцируя намагниченность электронов (1.1.10) по времени, беря производные волновых функций из уравнения Паули с гамильтонианом (1.1.2) получим общий вид уравнения эволюции магнитного момента электронов (аналогично и для позитронов):

$$\begin{aligned} \partial_t M_a^\alpha + \partial_\beta J_{M,a}^{\alpha\beta} &= \frac{2\gamma_a}{\hbar} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} M_a^\beta B_{ext}^\gamma + \frac{2\gamma_a}{\hbar} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \int (G^{\gamma\delta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) M_{2,aa}^{\beta\delta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' \\ &+ \frac{2\gamma_a}{\hbar} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \int (G^{\gamma\delta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) M_{2,ab}^{\beta\delta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' + \frac{4\pi\gamma_a}{\hbar} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') M_{2,ab}^{\beta\gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) d\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

Исходная форма уравнения эволюции намагниченности (1.1.21) содержит одну новую функцию, это коллективный спиновый ток или поток намагниченности частиц определенного сорта:

$$J_{M,a}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = \int dR \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \frac{1}{2m_i} (\psi^\dagger(R, t) D_i^\beta \sigma_i^\alpha \psi(R, t) + h.c.). \quad (1.1.22)$$

После введения поля скоростей и рассмотрения приближения самосогласованного поля удобно записать уравнение эволюции намагниченности через приведенную намагниченность $\boldsymbol{\mu}_a = \mathbf{M}_a / n_a$.

Находим, требуемые уравнения для электронов

$$n_e (\partial_t + \mathbf{v}_e \cdot \nabla) \boldsymbol{\mu}_e - \frac{\hbar}{2m\gamma_e} \partial^\beta [n_e \boldsymbol{\mu}_e, \partial^\beta \boldsymbol{\mu}_e] = \frac{2\gamma_e}{\hbar} n_e [\boldsymbol{\mu}_e, \mathbf{B}] + 2\pi \frac{2\gamma_e}{\hbar} n_e n_p [\boldsymbol{\mu}_e, \boldsymbol{\mu}_p], \quad (1.1.23)$$

и для позитронов

$$n_p (\partial_t + \mathbf{v}_p \cdot \nabla) \boldsymbol{\mu}_p - \frac{\hbar}{2m\gamma_p} \partial^\beta [n_p \boldsymbol{\mu}_p, \partial^\beta \boldsymbol{\mu}_p] = \frac{2\gamma_p}{\hbar} n_p [\boldsymbol{\mu}_p, \mathbf{B}] + 2\pi \frac{2\gamma_p}{\hbar} n_e n_p [\boldsymbol{\mu}_p, \boldsymbol{\mu}_e]. \quad (1.1.24)$$

В каждом из полученных уравнений эволюции намагниченности первое слагаемое это субстанциональная производная приведенной намагниченности. Второе слагаемое в левых частях уравнений это квантовая часть дивергенции тензора спинового тока. Она является аналогом квантового потенциала Бома в уравнении Эйлера. Правые части уравнений содержат взаимодействие частиц между собой и с внешним магнитным полем. Внешнее магнитное поле входит в первое слагаемое в правой части каждого уравнения эволюции намагниченности. Кроме того, эти слагаемые содержат спин-спиновое взаимодействие. Последнее слагаемое в правой части каждого уравнение вызвано аннигиляционным взаимодействием.

Уравнения поля

Уравнения Эйлера и уравнения эволюции намагниченности, полученные в приближении самосогласованного поля, содержат электромагнитное поле вызванное частицами всех сортов входящих систему. Это поле удовлетворяет уравнениям Максвелла:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_a q_a n_a, \quad (1.1.25)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.1.26)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B}, \quad (1.1.27)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \sum_a q_a n_a \mathbf{v}_a + 4\pi \sum_a \nabla \times (n_a \mathbf{u}_a). \quad (1.1.28)$$

Представленные выше уравнения квантовой гидродинамики выведены в квазистатическом приближении, т.е. исходный гамильтониан не содержит спин-токовое, спин-орбитальное, ток-токовое (закон Био-Савара) взаимодействия. Тем не менее, здесь представлены полные уравнения Максвелла.

Спиновая гидродинамическая завихрённость и спиральность квантовой электрон-позитронной плазмы

Классическая жидкость обладает завихрёностью, которая определяется как ротор поля скоростей $\mathbf{\Omega}_{cl} = \nabla \times \mathbf{v}$. С существованием завихрённости тесно связана еще одна физическая величина, это гидродинамическая спиральность определенная следующим образом $h_{cl} = \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{\Omega}_{cl} \rangle$, где угловые скобки описывают интегрирование по всему пространству. Для изоэнтропического движения жидкости имеет место сохранение гидродинамической спиральности, наряду с сохранением циркуляции

[191]. Электромагнитное поле также обладает завихрённостью и спиральностью. Индукция магнитного поля $\mathbf{\Omega}_{em} \equiv \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, играет роль завихрённости электромагнитного поля, а спиральность определяется следующим образом, $h_{em} = \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \rangle$. Плазмopodobные среды сочетают свойства жидкости и электромагнетизма. Как следствие, из уравнений гидродинамики плазмы следует существование комбинированной завихрённости для каждого сорта частиц классической плазмы (рассмотрим это на примере электронов): $\mathbf{\Omega}_{pl} = \mathbf{B} + mc\nabla \times \mathbf{v} / q_e$. Очевидно, можно ввести гидродинамическую спиральность плазмы: $h_{pl} = \langle \mathbf{\Omega}_{pl} \cdot (\mathbf{A} + mc\mathbf{v} / q_e) \rangle$, которая сохраняется при изоэнтропическом движении плазмы.

Учет спина электронов и квантового потенциала Бома изменяет структуру уравнения Эйлера. Однако часть слагаемых имеет вид градиента некоторой функции, в частности бесспиновая часть потенциала Бома, так что при взятии ротора от уравнения Эйлера эта часть слагаемых уходит. Плотность силы спин-спинового взаимодействия остается (в неё можно включить непотенциальную часть зависящего от спина потенциала Бома вводя обобщенную индукцию магнитного поля представленную ниже). Таким образом, спин-спиновое взаимодействие приводит к не сохранению гидродинамической спиральности классической плазмы.

Можно предположить существование обобщенной завихрённости учитывающей спин частиц. Она приводит к сохранению соответствующей обобщенной гидродинамической спиральности [57], [100], [101].

Анализ уравнения эволюции плотности спина (магнитного момента) приводит к существованию следующей спиновой (квантовой) завихрённости:

$$\Omega_{(a),q} = \frac{\nabla \mu_{(a),x} \times \nabla \mu_{(a),y}}{\gamma_a \mu_{(a),z}}. \quad (1.1.29)$$

Спиновая завихрённость (1.1.29) может быть записана в тензорной форме:

$$\Omega_{(a),q}^\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{\delta\mu\nu} \mu_a^\delta \partial^\beta \mu_a^\mu \partial^\gamma \mu_a^\nu / \gamma_a^3. \quad (1.1.30)$$

Доказательство эквивалентности этих формул требует использования следующего условия $\mu_e^2 = \gamma_e^2$.

Обобщенная завихрѐнность построена как суперпозиция классической и спиновой завихрѐнностей

$$\Omega_{e,-} = \Omega_{pl,e} - \frac{\hbar c}{2q_a} \Omega_{q,e}. \quad (1.1.31)$$

Она приводит к сохранению соответствующей обобщенной гидродинамической спиральности [100].

Вернѐмся к модели электрон-позитронной плазмы с аннигиляционным взаимодействием. Мы видим, что зависящая от спина часть аннигиляционного взаимодействия приводит к не сохранению обобщенной гидродинамической спиральности. В этом случае можно ввести аннигиляционную часть квантовой завихрѐнности. Это приводит к дальнейшему обобщению гидродинамической спиральности, которая сохраняется при изоэнтропическом движении электрон-позитронной плазмы.

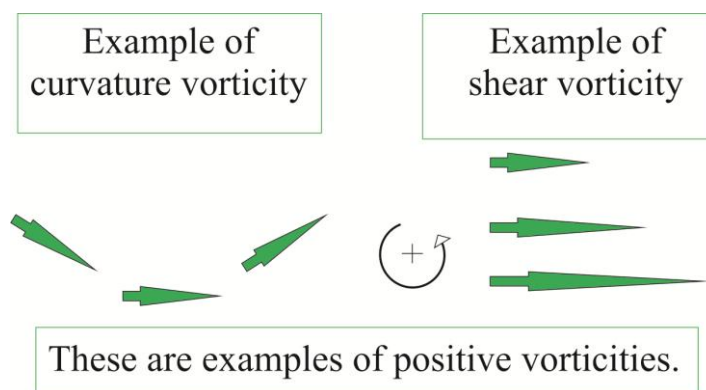


Рис.1.1.1. Два примера завихрѐнностей векторного поля имеющих положительное значение завихрѐнности.

Рассмотрим подробнее процесс введения спиновой и аннигиляционной завихрѐнностей в рамках модели квантовой гидродинамики электрон-позитронной плазмы.

Хорошо известно, что в классической плазме можно ввести завихрѐнность частиц определенного сорта. Незаряженная жидкость имеет завихрѐнность в виде ротора поля скоростей. Однако классическая завихрѐнность плазмы состоит из двух частей. Наряду с завихрѐнностью вещества возникает вклад завихрѐнности электромагнитного поля, а именно индукция магнитного поля. В итоге имеем следующую суперпозицию:

$$\mathbf{\Omega}_{(a),c} = \mathbf{B} + \frac{mc}{q_a} \nabla \times \mathbf{v}_a. \quad (1.1.32)$$

Уравнение Эйлера приводит к следующему уравнению для классической завихрённости частиц сорта а:

$$\partial_t \mathbf{\Omega}_{(a),c} = \nabla \times (\mathbf{v}_a \times \mathbf{\Omega}_{(a),c}) + \frac{\hbar}{2m\gamma_a} \nabla \mu_a^\beta \times \nabla \hat{B}_a^\beta. \quad (1.1.33)$$

Аналогичное уравнение возникает для спиновой (квантовой) завихрённости из уравнения эволюции намагниченности:

$$\partial_t \mathbf{\Omega}_{(a),q} = \nabla \times (\mathbf{v}_a \times \mathbf{\Omega}_{(a),q}) + \frac{q_a}{mc\gamma_a} \nabla \mu_a^\beta \times \nabla \hat{B}_a^\beta. \quad (1.1.34)$$

Оба уравнения содержат эффективное магнитное поле для частиц сорта а. В случае электрон позитронной плазмы, запишем эффективное магнитное поле, действующее на электроны

$$\mathbf{B}_e = \mathbf{B} + \frac{\hbar c}{2q_e \gamma_e} \frac{1}{n_e} \partial^\beta (n_e \partial^\beta \boldsymbol{\mu}_e) + 2\pi n_p \boldsymbol{\mu}_p, \quad (1.1.35)$$

и эффективное магнитное поле, действующее на позитроны

$$\mathbf{B}_p = \mathbf{B} + \frac{\hbar c}{2q_p \gamma_p} \frac{1}{n_p} \partial^\beta (n_p \partial^\beta \boldsymbol{\mu}_p) + 2\pi n_e \boldsymbol{\mu}_e. \quad (1.1.36)$$

Полную завихрённость можно получить как суперпозицию классической и спиновой завихрённостей. При этом можно составить сумму и разность завихрённостей:

$$\mathbf{\Omega}_{(a),\pm} = \mathbf{\Omega}_{(a),c} \pm \frac{\hbar c}{2q_a} \mathbf{\Omega}_{(a),q}. \quad (1.1.37)$$

Сумма завихрённостей приводит к каноническому уравнению эволюции завихрённости с источником

$$\partial_t \mathbf{\Omega}_{(a),+} = \nabla \times (\mathbf{v}_a \times \mathbf{\Omega}_{(a),+}) + \frac{\hbar}{m\gamma_a} \nabla \mu_a^\beta \times \nabla \hat{B}_a^\beta. \quad (1.1.38)$$

Разность завихрённостей дает каноническому уравнению эволюции завихрённости без источника:

$$\partial_t \mathbf{\Omega}_{(a),-} = \nabla \times (\mathbf{v}_a \times \mathbf{\Omega}_{(a),-}). \quad (1.1.39)$$

Для исследования свойств обобщенной гидродинамической спиральности необходимо представить векторный потенциал квантовой завихрённости, ротор

которого дает завихренность. Он, очевидно, выражается через проекции спиновой поляризации:

$$\mathbf{P}_q = -s_z \nabla \left[\arctan \left(\frac{s_y}{s_x} \right) \right]. \quad (1.1.40)$$

В итоге получим обобщенные векторные потенциалы завихренности соответствующие двум представленным выше обобщенным гидродинамическим спиральностям:

$$\mathbf{P}_{(a),\pm} = \mathbf{P}_{(a),c} \pm \frac{\hbar c}{2q_a \gamma_a} \mathbf{P}_{(a),q}. \quad (1.1.41)$$

Используя определения векторных потенциалов завихрённостей, получим уравнения эволюции векторных потенциалов, которые необходимы для расчета эволюции гидродинамической спиральности:

$$\partial_t \mathbf{P}_{(a),+} = \mathbf{v}_a \times \boldsymbol{\Omega}_{(a),+} + \frac{\hbar}{m \gamma_a} \mu^\beta \nabla \hat{B}_a^\beta + \frac{c}{q_a} \boldsymbol{\chi}_a, \quad (1.1.42)$$

и

$$\partial_t \mathbf{P}_{(a),-} = \mathbf{v}_a \times \boldsymbol{\Omega}_{(a),-} + \frac{c}{q_a} \boldsymbol{\chi}_a, \quad (1.1.43)$$

где

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi}_e = & -\frac{\nabla p_e}{n_e} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \left(\frac{\nabla^2 \sqrt{n_e}}{\sqrt{n_e}} \right) + \frac{\pi e^2 \hbar^2}{m^2 c^2} \nabla n_e \\ & - \frac{5 \pi e^2 \hbar^2}{2 m^2 c^2} \nabla n_p + \frac{\hbar^2}{8 m \gamma_e^2} \nabla (\partial^\beta \mu_e^\gamma \cdot \partial^\beta \mu_e^\gamma) - \nabla \left(q_e \varphi + \frac{1}{2} m \mathbf{v}_e^2 \right), \end{aligned} \quad (1.1.44)$$

и

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi}_p = & -\frac{\nabla p_p}{n_p} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \left(\frac{\nabla^2 \sqrt{n_p}}{\sqrt{n_p}} \right) + \frac{\pi e^2 \hbar^2}{m^2 c^2} \nabla n_p \\ & - \frac{5 \pi e^2 \hbar^2}{2 m^2 c^2} \nabla n_e + \frac{\hbar^2}{8 m \gamma_p^2} \nabla (\partial^\beta \mu_p^\gamma \cdot \partial^\beta \mu_p^\gamma) - \nabla \left(q_p \varphi + \frac{1}{2} m \mathbf{v}_p^2 \right). \end{aligned} \quad (1.1.45)$$

Используя завихрённости каждого типа $\boldsymbol{\Omega}_{(a),\pm} = \boldsymbol{\Omega}_{(a),c} \pm \frac{\hbar c}{2q_a} \boldsymbol{\Omega}_{(a),q}$ и их потенциалы, построим две гидродинамических спиральности

$$h_{(a),\pm} = \int \mathbf{P}_{(a),\pm} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{(a),\pm} d\mathbf{r}. \quad (1.1.46)$$

Используя уравнения эволюции завихрённостей и векторных потенциалов завихрённостей, найдем производные по времени от обобщенных гидродинамических спиральностей для каждого сорта частиц:

$$\frac{dh_{(a),-}}{dt} = 0, \quad (1.1.47)$$

и

$$\frac{dh_{(a),+}}{dt} = \frac{2\hbar}{m\gamma_a} \mu^\gamma (\partial^\beta \hat{B}^\gamma) \Omega_{(a),+}^\beta. \quad (1.1.48)$$

Видно, что “отрицательная” спиральность $h_{(a),-}$ (1.1.46), сохраняется во времени и является интегралом движения наряду с энергией системы. Отметим, что сохранение гидродинамической спиральности может препятствовать достижению абсолютного минимума энергии системы. Так что система будет находиться в метастабильном состоянии при условном минимуме энергии.

Нелинейное уравнение Паули

Уравнения квантовой гидродинамики были выведены непосредственно из многочастичного уравнения Шредингера (Паули). Гидродинамика описывает коллективные свойства физических систем. В некоторых случаях уравнения многочастичной квантовой гидродинамики могут быть приближенно представлены в виде эффективного нелинейного уравнения Шредингера [62], [210] или нелинейного уравнения Паули [61] для частиц со спином.

В случае безспиновых частиц уравнения квантовой гидродинамики могут быть непосредственно преобразованы в нелинейное уравнение Шредингера для безвихревого движения [41], [62]. Однако спинорная структура многочастичного уравнения Паули скрывается в определении скалярных и векторных полей (гидродинамических переменных). Это скрывает возможность непосредственного вывода спинорного нелинейного уравнения Паули. Однако можно записать нелинейное уравнение Паули, подбирая его таким образом, чтобы из него следовали корректные уравнения многочастичной квантовой гидродинамики. В итоге, нелинейное уравнение Паули получает обоснование.

Электрон-позитронная плазма, очевидно, описывается системой двух нелинейных уравнений Паули. Нелинейное уравнение Паули (или уравнения для нескольких сортов частиц) не выводится непосредственно из уравнений квантовой

гидродинамики, как выводится нелинейное уравнение Шредингера для бесспиновых частиц. Эти уравнения обосновываются тем, что из них следуют уравнения квантовой гидродинамики, выведенные из микроскопической теории.

В итоге находим следующую пару уравнений Паули:

$$i\hbar \frac{\partial \Phi_e(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(\frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{q_e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + q_e \varphi + (3\pi^2 n_e)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m} - \gamma_e \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{B} - \frac{\pi e^2 \hbar^2}{m^2 c^2} n_e + \frac{5}{2} \frac{\pi e^2 \hbar^2}{m^2 c^2} n_p - 2\pi \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{M}_p \right) \Phi_e(\mathbf{r}, t), \quad (1.1.49)$$

и

$$i\hbar \frac{\partial \Phi_p(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(\frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{q_p}{c} \mathbf{A} \right)^2 + q_p \varphi + (3\pi^2 n_p)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m} - \gamma_p \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{B} - \frac{\pi e^2 \hbar^2}{m^2 c^2} n_p + \frac{5}{2} \frac{\pi e^2 \hbar^2}{m^2 c^2} n_e - 2\pi \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{M}_e \right) \Phi_p(\mathbf{r}, t), \quad (1.1.50)$$

где концентрация и намагниченность части данного сорта следующим образом определены в терминах эффективной коллективной волновой функции $n_a = \Phi_a^\dagger \Phi_a$ и $\mathbf{M}_a = \Phi_a^\dagger \gamma_a \boldsymbol{\sigma} \Phi_a$.

Остановимся на физическом смысле отдельных слагаемых в нелинейных уравнениях Паули. Его можно легко проследить при явном сравнении этих уравнений с исходным многочастичным уравнением Паули. На примере нелинейного уравнения Паули для электронов (1.1.49) мы видим следующее. Первое слагаемое в правой части это оператор кинетической энергии. Второе слагаемое это потенциальная энергия заряда в электрическом поле. Третье слагаемое это вклад давления Ферми. Четвертое слагаемое это потенциальная энергия магнитного момента в магнитном поле. Пятое слагаемое это потенциальная энергия взаимодействия Дарвина между частицами одного сорта. Шестое слагаемое это суперпозиция энергии взаимодействия Дарвина частиц разного сорта и независимой от спина часть энергии аннигиляционного взаимодействия. Последнее слагаемое это зависящая от спина часть энергии аннигиляционного взаимодействия. Электромагнитное поле в нелинейных уравнениях Паули это самосогласованное поле удовлетворяющее уравнениям Максвелла.

Чтобы согласовать представленные нелинейные уравнения Паули с уравнениями квантовой гидродинамики, необходимо явно определить эффективные волновые функции в терминах гидродинамических переменных.

В случае бесспиновых частиц такое определение имеет хорошо известный вид

$$\Phi_a^{SL}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n_a(\mathbf{r}, t)} \exp\left(\frac{i}{\hbar} m_a \phi_a(\mathbf{r}, t)\right), \quad (1.1.51)$$

где $\phi_a(\mathbf{r}, t)$ это потенциал поля скоростей $\mathbf{v}_a = \nabla \phi_a$.

Для частиц со спином эффективная коллективная волновая функция определена как спинор, имеющий следующую структуру

$$\Phi_a(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n_a(\mathbf{r}, t)} \exp\left(\frac{i}{\hbar} m_a \phi_a(\mathbf{r}, t)\right) \xi(\mathbf{r}, t), \quad (1.1.52)$$

где единичный спинор имеет следующий явный вид

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \cos \Theta \cdot e^{i\Xi} \\ i \sin \Theta \cdot e^{-i\Xi} \end{pmatrix}, \quad (1.1.53)$$

где $\Theta(\mathbf{r}, t)$ и $\Xi(\mathbf{r}, t)$ скалярные поля. Такое определение эффективной волновой функции соответствует представленным выше формулам для концентрации и намагниченности.

Как упомянуто выше, нелинейное уравнение Шредингера (Паули) соответствует безвихревому движению жидкости, т.е. $\nabla \times \mathbf{v}_a = 0$. Электромагнитная и квантовая части завихренности не имеют ограничений в данном случае. Несмотря на ограниченность описания плазмы (и других сред) в терминах нелинейного уравнения Шредингера, следует отметить, что нелинейное уравнение Шредингера является более простым методом исследования физических систем. В частности, нелинейное уравнение Шредингера является более удобным для численного моделирования.

Вклад спин-токового, спин-орбитального и ток-токового взаимодействий в уравнениях квантовой гидродинамики.

Отдельно представим поля сил вызванных спин-токовым, спин-орбитальным и ток-токовым взаимодействиями. Ограничимся при этом приближением самосогласованного поля.

Поле силы спин-орбитального взаимодействия было рассмотрено, к примеру, в работе [9]. Запишем поле силы, следуя работе [9] (см. уравнение 3.16)

$$F_{SO,a}^{\alpha} = \frac{\gamma_a}{m_a c} \varepsilon^{z\alpha\beta} \partial_i (S_{a,z} E^{\beta}) + \frac{\gamma_a}{m_a c} \partial^{\alpha} E^{\beta} \cdot \varepsilon^{\beta\gamma\delta} J_a^{\delta\gamma} - \frac{e_a}{m_a c} \frac{\gamma_a}{m_a c} \varepsilon^{\alpha\gamma\delta} E^{\beta} B^{\delta} \varepsilon^{\beta\gamma\mu} S_a^{\mu}. \quad (1.1.54)$$

Первое слагаемое в формуле (1.1.54) может быть переписано более подробно при применении уравнения эволюции спина в первой части первого слагаемого $\gamma_a \varepsilon^{z\alpha\beta} E^{\beta} \partial_i S_{a,z} / m_a c$. Как следует из определения спин-орбитального взаимодействия, для возникновения этого эффекта требуется существование электрического поля. Однако, есть вклад от переменного во времени электрического поля $\gamma_a \varepsilon^{z\alpha\beta} S_{a,z} \partial_i E^{\beta} / m_a c$ (вторая часть первого слагаемого). Второе слагаемое требует пространственной неоднородности электрического поля. Последнее слагаемое в формуле (1.1.54) проявляется при сосуществовании электрического и магнитного поля.

Далее, следуя работам [26], [33], рассмотрим вклад ток-токового взаимодействия возникающий наряду с очевидным вкладом в силу Лоренца

$$\begin{aligned} F_{a,CC}^{\alpha} = & \frac{e_a \hbar^2}{4m_a^2 c^2} \partial^{\beta} (n \partial^{\alpha} E^{\beta}) - \frac{e_a}{m_a c^2} \left[E^{\alpha} \left(\frac{1}{2} mnv^2 + n\varepsilon \right) + E^{\beta} (mnv^{\alpha} v^{\beta} + P^{\alpha\beta}) \right] \\ & - \frac{e_a^2 \hbar^2}{8m_a^2 c^2} \partial^{\beta} n \cdot \int \partial^{\alpha} G_{CC}^{\beta\gamma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \partial^{\nu} n(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' - \frac{e_a^3}{2m_a c^2} n \int G_{CC}^{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n(\mathbf{r}', t) E^{\beta}(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' \\ & + \frac{e_a^2}{2c^2} \int \left[\partial^{\alpha} G_{CC}^{\beta\gamma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \partial^{\beta} G_{CC}^{\alpha\gamma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] \pi^{\beta\gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' \\ & + \frac{e_a^2}{2m_a c^2} \int \partial^{\gamma} G_{CC}^{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left[mn_a(\mathbf{r}', t) v_a^{\beta}(\mathbf{r}', t) v_a^{\gamma}(\mathbf{r}', t) + P_a^{\beta\gamma}(\mathbf{r}', t) \right] d\mathbf{r}', \quad (1.1.55) \end{aligned}$$

где

$$G_{CC}^{\beta\gamma}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \frac{\delta^{\beta\gamma}}{r_{ij}} + \frac{r_{ij}^{\beta} r_{ij}^{\gamma}}{r_{ij}^3} \quad (1.1.56)$$

это функция Грина ток-токового взаимодействия.

Также в уравнении (1.1.55) содержатся две ранее не определенные макроскопические функции:

$$\varepsilon_a = \int dR \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \frac{1}{4m_i} (\psi^+(R, t) D_i^2 \psi(R, t) + h.c.), \quad (1.1.57)$$

и

$$\pi^{\beta\gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \int \sum_{i, j \neq i} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) a^2 \left(u_i^\alpha u_j^\beta - \frac{\hbar^2}{2m_i^2} \partial_i^\alpha \partial_j^\beta \ln a \right) dR. \quad (1.1.58)$$

Первая группа слагаемых в формуле (1.1.55) имеет частичное сходство с вкладом взаимодействия Дарвина. Хотя подробное сравнение требует переписывания поля силы взаимодействия Дарвина через напряженность электрического поля, используя уравнение Пуассона. Пятая группа слагаемых в выражении (1.1.55) содержащая тензор (1.1.58) может быть интерпретирована как квантово-тепловая часть силы Лоренца $e_a \mathbf{j} \times \mathbf{V} / m_a c$.

Перейдем к вкладу спин-токового взаимодействия в уравнение Эйлера. Оно, наряду с тривиальным вкладом во второе и третье слагаемые в правой части уравнения Эйлера (1.1.13), имеет следующий вид

$$F_{sc}^\alpha(\mathbf{r}, t) = -\frac{q_a}{mc} n \int (\partial^\gamma C_{sc}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) J_M^{\gamma\beta}(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' - \frac{q_a}{mc} \frac{2\gamma_a}{\hbar} M^\gamma \varepsilon^{\mu\nu\gamma} \int C_{sc}^{\alpha\mu}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') G^{\nu\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') M^\sigma(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' - \frac{q_a}{mc} \frac{2\gamma_a}{\hbar} n \varepsilon^{\mu\nu\gamma} \int C_{sc}^{\mu\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') B^\nu(\mathbf{r}', t) M^\gamma(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}', \quad (1.1.59)$$

где

$$C_{sc}^{\alpha\beta} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial^\gamma (1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (1.1.60)$$

это функция Грина спин-токового взаимодействия.

Как и в случае ток-токового взаимодействия в приближении самосогласованного поля появляются интегральные слагаемые. Принимая во внимание, что намагниченность и спиновый ток пропорциональны магнитному моменту видим, что, строго говоря, второе и третье слагаемое содержат третью степень обратной скорости света и потому могут быть рассмотрены как выходящие за рамки выбранного приближения. Однако первое слагаемое пропорционально второй степени обратной скорости света и не может быть отброшено.

Отметим вклад рассмотренных взаимодействий, в момент сил, действующий на магнитный момент. Начнем с момента силы спин-орбитального взаимодействия, следуя работе [9] (см. уравнения 3.6 и 3.14):

$$T_{a,SO}^\alpha = -\frac{2\gamma_a}{\hbar c} \varepsilon^{\alpha\mu\nu} \varepsilon^{\mu\gamma\beta} E^\gamma J_{a,M}^{\nu\beta}. \quad (1.1.61)$$

Перейдем к обсуждению вклада спин-токового взаимодействия в уравнение эволюции магнитного момента. Очевидно, что спин-токовое взаимодействие

приводит к формированию магнитного поля, которое создано электрическими токами. Оно действует на магнитный момент, создавая момент силы, представленный первым слагаемым в правой части уравнения (1.1.23). Другого, нетривиального вклада не возникает в этом случае.

Ток-токовое взаимодействие не дает вклада в момент сил, действующий на магнитный момент. Момент сил пропорционален коммутатору оператора спина с соответствующим слагаемым в гамильтониане, а оператор ток-токового взаимодействия не содержит операторов спина, т.ч. их коммутатор равен нулю.

Выводы.

Развита модель многочастичной квантовой гидродинамики с кулоновским и спин-спиновым взаимодействием на примере электрон-позитронной квантовой плазме. В этом режиме модель содержит взаимодействие Дарвина и аннигиляционное взаимодействие. Эти квазистатические поправки имеют релятивистскую природу. Минимальный набор уравнений гидродинамики это уравнение непрерывности и уравнение Эйлера. Наличие спина приводит к необходимости учёта, уравнения эволюции плотности спина. Использование приближения самосогласованного поля привело к ограничению набора функций до концентрации, поля скоростей и давления. А для давления использовано уравнение состояния, выражение для давления Ферми со слабoreлятивистскими поправками. Рассмотрена формулировка уравнений гидродинамики через нелинейное уравнение Паули. Выведено уравнение эволюции гидродинамической завихрённости, в квантовой плазме. Исследован вклад спин-спинового и аннигиляционного взаимодействий в несохранение гидродинамической спиральности. Показана необходимость введения спиновой завихрённости и обобщенной квантовой завихрённости, которая содержит вклад аннигиляционного взаимодействия. Представлено краткое обсуждение поля сил и поля момента сил спин-токового, спин-орбитального и ток-токового взаимодействий. Все это создает основу для обобщения метода квантовой гидродинамики на режим отдельной эволюции электронов с различной проекцией спина. Кроме того, спиновая эволюция, описанная в этом разделе, приводит к существованию новых волновых процессов рассмотренных ниже.

1.2 Квантовая гидродинамика с отдельной спиновой эволюцией электронного газа

В предыдущем разделе представлен вывод уравнений квантовой гидродинамики для квантовой плазмы на примере электрон-позитронной плазмы. Вывод основан на нерелятивистской микроскопической модели системы большого числа взаимодействующих частиц. В результате одно линейное уравнение в частных производных для волновой функции $3N$ пространственных переменных и времени переформулировано как система нелинейных уравнений для физических полей различной тензорной размерности имеющая вид уравнений гидродинамики. Система уравнений оказывается не замкнутой, но представлена приближенная модель учитывающая эволюцию концентрации, поля скоростей и плотности магнитного момента. Отсюда следует, что рассматривая квантовую плазму частиц со спином можно применить уравнения квантовой гидродинамики или квантовой кинетики. Вывод этих уравнений неоднократно рассматривался в литературе [62], [63], [104], [105].

Далее рассмотрим систему электронов не как единую жидкость, а как совокупность двух жидкостей отличающихся направлением проекции спина. Ниже следуем работе [27] и частично работе [7].

А именно электроны со спином вверх и электроны со спином вниз будут рассмотрены отдельно. Для демонстрации основных особенностей такого описания проявляющихся в уравнениях гидродинамики, рассмотрим простейший метод получения подобных уравнений. А именно, используем одночастичное уравнение Паули в качестве исходного уравнения. В рассматриваемом случае необходимо рассмотреть заряженную частицу в произвольном внешнем электромагнитном поле:

$$i\hbar\partial_t\psi = \left(\frac{1}{2m} (\i\hbar\nabla + q_e\mathbf{A}/c)^2 + q_e\varphi - \mu_e\hat{\sigma}\mathbf{B} \right) \psi. \quad (1.2.1)$$

Это уравнение описывает эволюцию спинорной волновой функции $\psi(\mathbf{r}, t)$. В уравнении (1.2.1) использованы следующие обозначения: $\varphi = \varphi_{ext}$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{ext}$ это скалярный и векторный потенциалы внешнего электромагнитного поля, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{ext}$ это внешнее магнитное поле, $q_e = -e$ (m) это заряд (масса) электрона, μ_e это магнитный момент электрона, ∇ это векторный оператор градиента, $\hat{\sigma}$ это вектор

матриц Паули, \hbar это приведенная постоянная Планка, и c это скорость света.

Представим явный вид матриц Паули

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.2.2)$$

Спинорная волновая функция может быть явно записана в следующем виде, через две комплексозначные функции

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \end{pmatrix}. \quad (1.2.3)$$

Плотность вероятности обнаружить частицу в точке с координатой \mathbf{r} вне зависимости от проекции её спина определяется как $\rho = \psi^+ \psi$, где ψ^+ это эрмитово-сопряжённая волновая функция. Выше использованы волновые функции, описывающие состояния со спином вверх ψ_u и спином вниз ψ_d . Индексы u и d или \uparrow и \downarrow указывают знак проекции спина. Они позволяют определить плотности вероятности обнаружения частицы в точке \mathbf{r} с спином вверх $\rho_u = |\psi_u|^2$ или спином вниз $\rho_d = |\psi_d|^2$, при этом $\rho = \rho_u + \rho_d$. Индекс u (d) соответствует состоянию со спином сонаправленным (противоположно направленным) с направлением внешнего магнитного поля.

Так как далее рассматривается отдельная спиновая эволюция, то полезно расписать уравнение Паули в явном виде через парциальные волновые функции

$$i\hbar \partial_t \psi_u = \left(\frac{1}{2m} (i\hbar \nabla + q_e \mathbf{A} / c)^2 + q_e \varphi - \mu_e B_z \right) \psi_u - \mu_e (B_x - iB_y) \psi_d, \quad (1.2.4)$$

и

$$i\hbar \partial_t \psi_d = \left(\frac{1}{2m} (i\hbar \nabla + q_e \mathbf{A} / c)^2 + q_e \varphi + \mu_e B_z \right) \psi_d - \mu_e (B_x + iB_y) \psi_u. \quad (1.2.5)$$

Ось Oz направлена вдоль выделенного направления связанного с направлением спиновой поляризации.

Структура уравнения Паули, выражающаяся в условной краткой записи системы уравнений, в виде единого уравнения говорит о том, что уравнения гидродинамики могут быть разбиты на две подгруппы, в соответствии с проекцией спина.

Рассмотрим временную эволюцию плотности вероятностей и выведем следующие уравнения непрерывности

$$\partial_t n_u + \nabla(n_u \mathbf{v}_u) = \frac{\mu_e}{\hbar} (S_x B_y - S_y B_x), \quad (1.2.6)$$

и

$$\partial_t n_d + \nabla(n_d \mathbf{v}_d) = -\frac{\mu_e}{\hbar} (S_x B_y - S_y B_x). \quad (1.2.7)$$

При выводе уравнений непрерывности (1.2.6) и (1.2.7) возникают плотности потоков вероятности частиц каждого сорта $\mathbf{j}_s = n_s \mathbf{v}_s = \frac{1}{2m} (\psi_s^* \hat{\mathbf{p}} \psi_s + c.c.)$. Эти потоки переписаны через парциальные поля скоростей.

Традиционно, уравнение непрерывности показывает сохранение числа частиц определенного сорта. Поэтому, обычное уравнение непрерывности содержит ноль в правой части уравнения: $\partial_t n + \nabla(n\mathbf{v}) = 0$. Если процессы ионизации, рекомбинации или аннигиляции не происходят в рассматриваемой среде, тогда полное число электронов не меняется $n_e = n_u + n_d$. Однако, направление спина электрона может измениться в результате взаимодействия с окружающими частицами. Следовательно, число электронов со спином вверх (со спином вниз) увеличивается, если число электронов со спином вниз (со спином вверх) уменьшается. Этот эффект смоделирован правой частью уравнений (1.2.6) и (1.2.7).

Кулоновское взаимодействие не меняет число электронов с определенной проекцией. Тогда как спин-спиновое взаимодействие приводит к не сохранению проекций спинов электронов и к существованию правой части уравнений (1.2.6) и (1.2.7).

Уравнения (1.2.6) и (1.2.7) позволяют вывести уравнение непрерывности для полной концентрации электронов $n_e = n_u + n_d$. Суммируя уравнения (1.2.6) и (1.2.7) находим уравнение $\partial_t n_e + \nabla(n_u \mathbf{v}_u + n_d \mathbf{v}_d) = 0$, показывающее сохранение полного числа электронов.

Так как $S_z = n_u - n_d$, то используя уравнения непрерывности (1.2.6) и (1.2.7) можно вывести уравнение для z-проекции уравнения Блоха описывающего эволюцию спиновой плотности. Вычитая уравнение (1.2.7) из уравнения (1.2.6) мы находим

$$\partial_t S_z + \nabla(n_u \mathbf{v}_u - n_d \mathbf{v}_d) = \frac{2\mu_e}{\hbar} [\mathbf{S}, \mathbf{B}]_z. \quad (1.2.8)$$

Уравнение Блоха (1.2.8) поясняет, что правая часть уравнения (1.2.6) (правая часть уравнения (1.2.7)) пропорциональна моменту силы (моменту силы, взятому с обратным знаком) действующего на спин.

Представленный анализ показывает, что уравнения непрерывности (1.2.6) и (1.2.7) являются эквивалентом двух уравнений одножидкостной гидродинамики электронов: уравнение непрерывности и z-проекция уравнения Блоха. Следовательно, уравнения непрерывности (1.2.6) и (1.2.7) не приводят к новым эффектам. Как это будет показано далее, преимущество системы уравнений квантовой гидродинамики с отдельной спиновой эволюцией проявляется в применении уравнения Эйлера.

Уравнения эволюции плотности импульса, электронов каждого сорта, имеют следующий вид:

$$mn_s (\partial_t + \mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s + \nabla p_s - \frac{\hbar^2}{4m} n_s \nabla \left(\frac{\Delta n_s}{n_s} - \frac{(\nabla n_s)^2}{2n_s^2} \right) = e_s n_s \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_s, \mathbf{B}] \right) + \mathbf{F}_{S,s}, \quad (1.2.9)$$

где сила спин-спиновой взаимодействия

$$\mathbf{F}_{S,s} = \pm \mu n_s \nabla B_z + \frac{\mu}{2} (S_x \nabla B_x + S_y \nabla B_y) \pm \frac{m\mu}{\hbar} [(\mathbf{J}_{Mx} - \mathbf{v}_s S_x) B_y - (\mathbf{J}_{My} - \mathbf{v}_s S_y) B_x], \quad (1.2.10)$$

которая содержит конвективно-квантовый спиновый ток. Тензор спинового тока записан в нетрадиционной форме вектора и одного индекса, где конструкция \mathbf{J}_{Mx} соответствует элементам $J_M^{x\beta}$, а \mathbf{J}_{My} соответствует элементам $J_M^{y\beta}$ тензора спинового тока $J_M^{\alpha\beta}$.

Конвективно-квантовый тензор спинового тока

$$J_M^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} S^\alpha (\mathbf{v}_\uparrow^\beta + \mathbf{v}_\downarrow^\beta) - \varepsilon^{\alpha\gamma z} \frac{\hbar}{4m} \left(\frac{\partial^\beta n_\uparrow}{n_\uparrow} - \frac{\partial^\beta n_\downarrow}{n_\downarrow} \right) S_\gamma. \quad (1.2.11)$$

Для вывода уравнений Эйлера (1.2.9) надо продифференцировать определение парциального тока через волновые функции по времени и использовать уравнения (1.2.4) и (1.2.5).

В силу того что в данном разделе представлен упрощенный вывод уравнений с отдельной спиновой эволюции и использовано одночастичное исходное

уравнение, то давление p_s не возникает в этом уравнении. Однако давление включено в соответствии с многочастичной моделью описанной в разделе 1.1.

В модели электроны с определенной проекцией спина рассматриваются независимо. Давление также рассматривается как совокупность двух парциальных давлений. Соответственно, необходимо рассматривать по одному электрону в каждом квантовом состоянии. Поэтому давление электронов с определенной проекцией спина отличается коэффициентом от традиционного давления Ферми

$$p_s = \frac{(6\pi^2)^{\frac{2}{3}} \hbar^2 n_s^{\frac{5}{3}}}{5m}. \quad (1.2.12)$$

Более последовательное и методическое обсуждение, также как и микроскопический вывод, уравнений квантовой гидродинамики с отдельной спиновой эволюции описан в работе [9].

Последняя группа слагаемых в силе спин-спиновой взаимодействия (1.2.10) существует из-за несохранения числа частиц со спином вверх и спином вниз. Что в частности приводит к дополнительному механизму несохранения (эволюции) импульса каждой подсистемы электронов. Часть формулы (1.2.10), а именно слагаемые пропорциональные полю скоростей, возникают при применении уравнений непрерывности в процессе исключения производной концентрации по времени из производной тока \mathbf{j}_s по времени. Однако слагаемые пропорциональные спиновому току возникают непосредственно при эволюции плотности импульса (тока \mathbf{j}_s).

Если рассмотреть одножидкостную модель электронов, то получим, что электроны движутся под действием полного давления Ферми, которое является суммой парциальных давлений электронов со спином вверх и спином вниз. Тогда как в двухжидкостной модели электронов, электроны с определенной проекцией спина движутся под действием соответствующего парциального давления. Таким образом, квантовая гидродинамика с отдельной спиновой эволюцией дает более детальное описание динамики электронов.

Построение квантовой гидродинамики с отдельной спиновой эволюцией это шаг в противоположном направлении по сравнению с выводом магнитогидродинамики. Последняя модель описывает электроны и ионы как единую жидкость. Тогда как электрон-ионная плазма описывается трехжидкостной

гидродинамической моделью при применении квантовой гидродинамики с раздельной спиновой эволюцией.

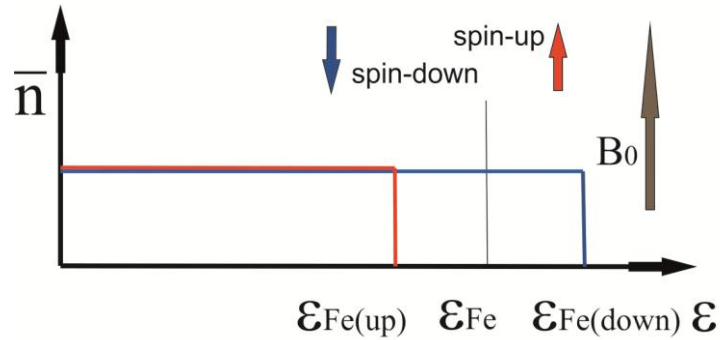


Рис. 1.2.1. Рисунок показывает функции распределения вырожденных электронов со спином вверх и спином вниз находящихся во внешнем магнитном поле.

Левая часть уравнения Эйлера (1.2.9) содержит кинематические эффекты. Первое слагаемое в уравнении Эйлера это субстанциональная производная поля скоростей $(\partial_t + \mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s$. Второе слагаемое это градиент парциального давления, где давление описывает распределение частиц по различным квантовым состояниям. Это распределение может быть температурными эффектами, или, в случае фермионов находящихся при температуре меньше температуры Ферми, распределение фермионов вызвано принципом Паули и приводит к давлению Ферми. Последнее слагаемое в левой части уравнения Эйлера (1.2.9) это парциальный квантовый потенциал Бома.

В правой части уравнения Эйлера (1.2.9) находятся слагаемые описывающие взаимодействие частиц с внешним электромагнитным полем и взаимодействие между частицами. Первая группа слагаемых представляет собой силу Лоренца. Второе слагаемое описывает спин-спиновое взаимодействие. Его явный вид представлен формулой (1.2.10). Плотность силы спин-спинового взаимодействия состоит из трех групп слагаемых. Первое слагаемое представляет собой плотность силы действующей на z-проекцию магнитного момента, которые различаются знаком и плотностью для электронов с различной проекцией спина: $\pm \mu_n \nabla B_z$. Второе слагаемое это плотность силы действующей на x- и y-проекции магнитного момента. Соответствующие плотности силы одинаковы и равны половине силы действующей на все электроны: $\frac{\mu}{2} (S_x \nabla B_x + S_y \nabla B_y)$. Третья группа слагаемых

описывает изменение плотности импульса вследствие не сохранения числа частиц с определенным импульсом: $\pm \frac{m\mu}{\hbar} [(\mathbf{J}_{Mx} - \mathbf{v}_s S_x)B_y - (\mathbf{J}_{My} - \mathbf{v}_s S_y)B_x]$. Эта часть плотности силы фактически описывает обмен импульсом между подсистемами электронов с различным импульсом.

Уравнения непрерывности и уравнения Эйлера (1.2.6)-(1.2.9) содержат проекции плотности спина S_x , S_y и S_z . Чтобы понять структуру спиновой плотности рассмотрим одночастичную плотность спина. Используем стандартное определение плотности спина

$$S_x = \psi^\dagger \hat{\sigma}_x \psi = \psi_d^* \psi_u + \psi_u^* \psi_d = 2a_u a_d \cos \Delta\phi, \quad (1.2.13)$$

$$S_y = \psi^\dagger \hat{\sigma}_y \psi = i(\psi_d^* \psi_u - \psi_u^* \psi_d) = -2a_u a_d \sin \Delta\phi, \quad (1.2.14)$$

и $S_z = \psi^\dagger \hat{\sigma}_z \psi = n_u - n_d$. Эти формулы явно показывают, что в отличие от концентрации и поля скоростей, которые могут быть приписаны каждому сорту электронов, все проекции плотности спина определены через характеристики обоих сортов электронов. Поэтому плотности спина не несут индексов u или d.

Так как уравнения непрерывности и уравнения Эйлера содержат плотности спина S_x , S_y , то необходимо вывести уравнения эволюции спина, чтобы получить замкнутую систему уравнений квантовой гидродинамики с отдельной спиновой эволюцией.

Как и выше используем явный вид проекций спиновой плотности S_x , S_y и продифференцируем их по времени. Используем уравнения Паули (1.2.4) и (1.2.5) для производных компонент спинора по времени и получим следующие уравнения эволюции спиновой плотности:

$$\partial_t S_x + \frac{1}{2} \nabla [S_x (\mathbf{v}_\uparrow + \mathbf{v}_\downarrow)] - \frac{\hbar}{4m} \nabla \left(S_y \left(\frac{\nabla n_\uparrow}{n_\downarrow} - \frac{\nabla n_\downarrow}{n_\downarrow} \right) \right) = \frac{2\gamma_e}{\hbar} (B_z S_y - B_y (n_\uparrow - n_\downarrow)), \quad (1.2.15)$$

и

$$\partial_t S_y + \frac{1}{2} \nabla [S_y (\mathbf{v}_\uparrow + \mathbf{v}_\downarrow)] + \frac{\hbar}{4m} \nabla \left(S_x \left(\frac{\nabla n_\uparrow}{n_\uparrow} - \frac{\nabla n_\downarrow}{n_\downarrow} \right) \right) = \frac{2\gamma_e}{\hbar} (B_x (n_\uparrow - n_\downarrow) - B_z S_x), \quad (1.2.16)$$

где также возникает конвективно-квантовый тензор спинового тока (1.2.11) представленный при выводе уравнений Эйлера.

Уравнения (1.2.15) и (1.2.16) это прямое следствие одночастичных уравнений Паули (1.2.4) и (1.2.5). В общем случае, при наличии многочастичных эффектов, возникает тепловая часть спинового тока. Она не восстановлена здесь. Однако ниже этот вопрос будет рассмотрен с различных точек зрения. А именно с использованием нелинейного уравнения Паули со спинорным давлением или с использованием кинетических уравнений с отдельной спиновой эволюцией.

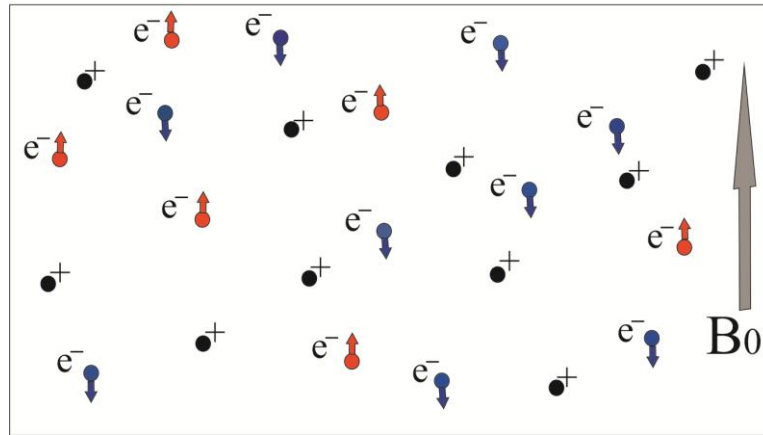


Рис. 1.2.2. Рисунок показывает систему электронов со спином вверх и спином вниз вместе с нейтрализующим фоном ионов.

Гидродинамические уравнения (1.2.6)-(1.2.16) идут в системе с уравнениями Максвелла, в которых источники записаны через парциальные концентрации и поля скоростей:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi(en_i - en_{e\uparrow} - en_{e\downarrow}), \quad (1.2.17)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B}, \quad (1.2.18)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} (en_i \mathbf{v}_i - en_{e\uparrow} \mathbf{v}_{e\uparrow} - en_{e\downarrow} \mathbf{v}_{e\downarrow}) + 4\pi \nabla \times \mathbf{M}, \quad (1.2.19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.2.20)$$

где намагниченность имеет следующий вид:

$$\mathbf{M} = \left\{ \gamma_e S_{e,x}, \gamma_e S_{e,y}, \gamma_e (n_{e\uparrow} - n_{e\downarrow}) \right\}. \quad (1.2.21)$$

Остальные источники поля в уравнениях Максвелла (1.2.17)-(1.2.20) указаны явно.

Уравнение состояния для тепловой части спинового тока

Как показано выше, уравнение эволюции векторного поля магнитного момента (спиновой плотности) электронов получается в следующем виде

$$\partial_i \mathbf{M}^\alpha + \nabla^\beta \mathbf{J}^{\alpha\beta} = \frac{2\gamma}{\hbar} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \mathbf{M}^\beta \mathbf{V}^\gamma. \quad (1.2.22)$$

Это уравнение возникает для электронов электрон-ионной плазмы, электрон-позитронной плазмы, и для нейтральных частиц обладающих магнитным моментом. Это уравнение содержит плотность потока спина

$$\mathbf{J}^{\alpha\beta} = \langle \gamma_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \mathbf{D}_i^\beta \hat{\sigma}_i^\alpha / m_i \rangle. \quad (1.2.23)$$

Вводя поле скоростей в уравнения квантовой гидродинамики частиц со спином, получим, что плотность потока спина состоит из трех частей:

$$\mathbf{J}^{\alpha\beta} = \mathbf{M}^\alpha \mathbf{v}^\beta - \frac{\hbar}{2m\gamma} \varepsilon^{\alpha\mu\nu} \mathbf{M}^\mu \partial^\beta \left(\frac{\mathbf{M}^\nu}{n} \right) + \mathbf{J}_{th}^{\alpha\beta}. \quad (1.2.24)$$

Первое слагаемое представляет собой поток спина при движении локальной группы частиц как единого целого (при перемещении локального центра масс). Второе слагаемое, это квантовый поток спина, аналогичный потенциалу Бома входящего в поток импульса. Последнее слагаемое это поток спина на тепловых скоростях или, как сказано выше, это тепловая часть спинового тока. Основной задачей этого раздела является вывод уравнения состояния для тепловой части спинового тока. Причем, исследование сфокусировано на вырожденном электронном газе, который, естественно находится при температуре равной нулю. Однако, в силу принципа Паули, электроны распределены в импульсном пространстве. Это распределение электронов приводит к давлению Ферми:

$$\mathbf{P} = \frac{(3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \hbar^2}{10 m} \left[\left(n - \frac{\mathbf{M}_z}{\gamma} \right)^{\frac{5}{3}} + \left(n + \frac{\mathbf{M}_z}{\gamma} \right)^{\frac{5}{3}} \right]. \quad (1.2.25)$$

Аналогично, предполагается, что это распределение дает ненулевой вклад в спиновый ток, называемый спиновый ток Ферми.

После введения поля скоростей и перехода к редуцированной намагниченности, уравнение баланса магнитного момента может быть представлено в следующем виде:

$$n(\partial_i + \mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\mu} - \frac{\hbar}{2m\gamma_e} \partial^\beta [n \boldsymbol{\mu}, \partial^\beta \boldsymbol{\mu}] + \mathfrak{S} = \frac{2\gamma_e}{\hbar} n[\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V}]. \quad (1.2.26)$$

Выше, исходя из системы уравнений одножидкостной гидродинамики электронов с учетом их спина получено нелинейное уравнение Паули. В этом

уравнении, слагаемое описывающее вклад давления Ферми рассмотрено в виде скаляра, а точнее пропорционально единичной матрице, так как входит в спинорное уравнение. Такая модель предполагает, что в подсистемах электронов с различными проекциями спина давление Ферми одинаково. Очевидно, что давление Ферми для электронов с различной проекцией спина в спин поляризованном электронном газе различно. Этот факт, в частности, отражен в модели квантовой гидродинамики с отдельной спиновой эволюцией.

Следуя работе [7] запишем нелинейное уравнение Паули со спинорным вкладом давления

$$i\hbar\partial_t\Phi(\mathbf{r},t)=\left(\frac{1}{2m}\hat{\mathbf{D}}^2+\begin{pmatrix}\varepsilon_{F\uparrow} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{F\downarrow}\end{pmatrix}+q_e\varphi-\gamma_e\hat{\sigma}\mathbf{B}\right)\Phi(\mathbf{r},t), \quad (1.2.27)$$

где $\hat{\mathbf{D}}=\hat{\mathbf{p}}-q_e\mathbf{A}/c$, φ это скалярный потенциал электромагнитного поля, \mathbf{A} это векторный потенциал электромагнитного поля и $\varepsilon_{Fs}=(6\pi^2n_s)^{2/3}\hbar^2/2m$ это парциальные энергии ферми электронов с определенной проекцией спина.

Явный вид элементов спинора второго ранга, описывающего вклад давления в нелинейное уравнение Паули, может быть получен из соответствия этого уравнения уравнениям непрерывности и баланса импульса, в модели квантовой гидродинамики, с отдельной спиновой эволюцией.

Нелинейное уравнение Паули со спинорным давлением может быть использовано для вывода уравнения эволюции спина, которое было известно нам с точностью до явного вида тепловой части спинового тока. Теперь, в результате вывода возникает слагаемое вызванное распределением частиц в импульсном пространстве и имеющее смысл спинового тока Ферми (или более корректно, это дивергенция тензора спинового тока Ферми). Оно возникает в следующем виде:

$$\mathfrak{S}=(\pi_{\uparrow}-\pi_{\downarrow})[\mathbf{M},\mathbf{e}_z]/\hbar=\frac{(3\pi^2)^{2/3}\hbar}{m_e}\left[\left(n-\frac{M_z}{|\gamma_e|}\right)^{2/3}-\left(n+\frac{M_z}{|\gamma_e|}\right)^{2/3}\right][\mathbf{M},\mathbf{e}_z]. \quad (1.2.28)$$

В приближении малой спиновой поляризации дивергенция тензора спинового тока Ферми принимает следующий вид:

$$\mathfrak{S}=-\frac{4(3\pi^2)^{2/3}\hbar}{3m_e}\frac{M_z}{n^{1/3}}[\mathbf{S},\mathbf{e}_z]. \quad (1.2.29)$$

Уравнение состояния для равновесного спинового тока Ферми может быть извлечено из квантовой кинетики аналогично уравнению состояния для давления. Для этого необходимо использовать соответствующие равновесные функции распределения.

Рассмотрим этот вопрос подробнее, частично следуя работе [19]. Рассмотрим частицы со спином $1/2$. В этом случае, вырожденный частично спин-поляризованный газ описывается суммой двух ступенек Ферми. Эти ступеньки имеют различную ширину:

$$f_0(p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} [\mathcal{G}(p - p_{Fu}) + \mathcal{G}(p - p_{Fd})]. \quad (1.2.30)$$

Такая скалярная функция распределения может быть использована для вычисления давления

$$\Pi^{\alpha\beta} \rightarrow p^{\alpha\beta} = \frac{1}{m} \int p^\alpha p^\beta f_0(p) d\mathbf{p}. \quad (1.2.31)$$

В силу изотропии функции распределения (1.2.30) находим, что тензор давления пропорционален символу Кронекера: $p^{\alpha\beta} = p\delta^{\alpha\beta}$, в частности имеем $p = p^{zz}$. Элемент тензора можно найти, вычисляя интеграл в определении давления:

$$p^{zz} = \frac{2\pi}{m(2\pi\hbar)^3} \int (\mathcal{G}(p - p_{Fu}) + \mathcal{G}(p - p_{Fd})) p_z^2 p^2 \sin\theta d\theta dp, \quad (1.2.32)$$

где $\mathcal{G}(p - p_{Fs})$ это тета-функция Хевисайда, она равна 1 для положительного значения аргумента, тета-функция равна нулю для отрицательного значения аргумента.

Вычисление приводит к выражению спин поляризованного давления Ферми

$$p^{zz} = \frac{(6\pi^2)^{\frac{2}{3}} \hbar^2}{5m} \left(n_{0u}^{\frac{5}{3}} + n_{0d}^{\frac{5}{3}} \right). \quad (1.2.33)$$

Вычисление уравнения состояния для спинового тока требует использования равновесной спиновой функции распределения. Кинетическая модель для частиц со спином будет более подробно рассмотрена ниже. Отметим, что наряду с традиционной скалярной функцией распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, также возникает векторная функция распределения $\mathbf{S}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, называемая спиновой функцией распределения, хотя эволюция спина входит в эту функцию наряду с эволюцией

частиц в фазовом пространстве. Её равновесное значение для спин поляризованного вырожденного газа Ферми имеет следующие проекции

$$S_{0x}(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} [\mathcal{G}(p - p_{Fu}) - \mathcal{G}(p - p_{Fd})] \cos \varphi, \quad (1.2.34)$$

$$S_{0y}(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} [\mathcal{G}(p - p_{Fu}) - \mathcal{G}(p - p_{Fd})] \sin \varphi, \quad (1.2.35)$$

и

$$S_{0z}(p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} [\mathcal{G}(p - p_{Fu}) - \mathcal{G}(p - p_{Fd})], \quad (1.2.36)$$

где φ обозначает полярный угол в импульсном пространстве. Этот символ также использован для электростатического потенциала, но их различие видно из контекста и размерности. Вводя условный вектор $\mathbf{n} = \{\cos \varphi, \sin \varphi, 1\}$ функцию распределения (1.2.34)-(1.2.36) можно переписать в компактном виде $\mathbf{S}_0 = \mathbf{n} [\mathcal{G}(p - p_{Fu}) - \mathcal{G}(p - p_{Fd})] / (2\pi\hbar)^3$.

Используя спиновую функцию распределения, не содержащую потоков, получаем определение тепловой части спинового тока или спиновый ток в системе отсчета локального центра масс:

$$J^{\alpha\beta} \rightarrow J_{th}^{\alpha\beta} = \frac{1}{m} \int p^\beta S_0^\alpha(p) d\mathbf{p}. \quad (1.2.37)$$

Применение формул (1.2.34)-(1.2.37) приводит к следующим выражениям для компонент тензора спинового тока (см. [19] после формулы 33):

$$J^{xx} = J^{yy} = 3\pi\hbar (6\pi^2)^{1/3} (n_{0\uparrow}^{4/3} - n_{0\downarrow}^{4/3}) / 64m, \quad J^{xy} = J^{xz} = J^{yx} = J^{yz} = J^{zx} = J^{zy} = J^{zz} = 0.$$

Как будет показано выше, наличие тепловой части спинового тока модифицирует уравнение эволюции гидродинамической квантовой завихренности и приводит к не сохранению обобщенной гидродинамической спиральности. Это дает обобщение результатов полученных в разделе 1.1.

Как показано выше в разделе 1.1, для системы частиц со спином можно ввести квантовую (спиновую) гидродинамическую завихренность:

$$\Omega_q^\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{\mu\nu\sigma} \left(\frac{S_\mu}{n} \right) \partial_\beta \left(\frac{S_\nu}{n} \right) \partial_\gamma \left(\frac{S_\sigma}{n} \right). \quad (1.2.38)$$

При учете спинового тока представленного после формулы (1.2.37) получается следующее уравнение эволюции квантовой завихренности

$$\partial_t \mathbf{\Omega}_q = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{\Omega}_q) + \frac{q}{mc} \nabla \left(\frac{S_\beta}{n} \right) \times \nabla \mathbf{B}_{mod}^\beta. \quad (1.2.39)$$

В формуле (1.2.39) использовано понятие эффективного магнитного поля

$$\mathbf{B}_{mod} = \mathbf{B} + \frac{(\varepsilon_{F\downarrow} - \varepsilon_{F\uparrow})}{2\gamma_e} \mathbf{e}_z, \quad (1.2.40)$$

где содержится вклад спинового тока, записанный в терминах энергии ферми как функции концентрации и вклад спиновой части квантового потенциала Бома:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B} + \frac{\hbar c}{2qn} \partial^\beta \left(n \partial_\beta \left(\frac{\mathbf{S}}{n} \right) \right). \quad (1.2.41)$$

Эффективное магнитное поле в данной форме было введено выше при исследовании гидродинамической завихренности в спин-1/2 электрон-позитронной квантовой плазме.

Учет отличного от нуля спинового тока Ферми в уравнении эволюции спина не вносит изменений в уравнение эволюции классической гидродинамической завихренности, которое возникает из уравнения Эйлера:

$$\partial_t \mathbf{\Omega}_c = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{\Omega}_c) + \frac{q}{mc} \nabla \left(\frac{S_\beta}{n} \right) \times \nabla \mathbf{B}^\beta. \quad (1.2.42)$$

Как было показано выше, полную завихренность можно ввести как сумму или разность классической и квантовой завихренностей

$$\mathbf{\Omega}_\pm = \mathbf{\Omega}_c \pm \frac{\hbar c}{2q} \mathbf{\Omega}_q. \quad (1.2.43)$$

В отсутствии спинового тока Ферми, каноническая форма уравнения эволюции $\mathbf{\Omega}_-$ не содержит источников. Однако, в рассматриваемом случае, спиновый ток Ферми приводит к источнику завихренности в этом уравнении

$$\partial_t \mathbf{\Omega}_- = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{\Omega}_-) + \frac{c}{2q_e} \nabla \left(\frac{S_z}{n} \right) \times \nabla (\varepsilon_{F\uparrow} - \varepsilon_{F\downarrow}). \quad (1.2.44)$$

Очевидно, что это приводит к несохранению обобщенной гидродинамической спиральности.

Уравнение эволюции спинового тока.

Уравнения эволюции числа частиц, импульса и спина получены в Главе I методом многочастичной квантовой гидродинамики. Однако, упрощенная форма этих уравнений также могут быть получены исходя их одночастичного уравнения Шредингера. Многочастичная квантовая гидродинамика позволяет получить расширенные системы уравнений. Ниже, в Главе II, предложен ряд форм расширенных систем уравнений для систем нейтральных частиц. Следуя работе [30] рассмотрим эволюцию спинового тока. Т.е. вместо использования уравнения состояния для возмущения этой величины получим уравнение эволюции этой величины. Однако в этом уравнении возникнут новые физические величины, для которых необходимо использовать уравнение состояния. Кроме того, наличие уравнения эволюции спинового тока не снимает необходимости получения уравнения состояния для равновесного значения. Уравнение эволюции спинового тока и уравнение эволюции потока спинового тока также рассматривались в работе [7] в контексте отдельной спиновой эволюции.

Используя определение (1.2.23) и уравнение Шредингера, с гамильтонианом, содержащим кулоновское и спин-спиновое взаимодействие, с последующим применением приближения самосогласованного поля, можно получить следующее уравнение

$$\partial_t J^{\alpha\beta} + \partial_\gamma J^{\alpha\beta\gamma} = \frac{q}{m} M^\alpha E^\beta + \frac{q}{mc} \gamma \varepsilon^{\beta\gamma\delta} J^{\alpha\gamma} B^\delta + \frac{\gamma^2}{m} n \partial^\beta B^\alpha - \frac{2\gamma}{\hbar} \varepsilon^{\alpha\gamma\delta} B^\gamma J^{\delta\beta}, \quad (1.2.45)$$

где $J^{\alpha\beta\gamma}$ это тензор потока спинового тока. Уравнение (1.2.45), наряду с уравнением эволюции давления, может дать расширенную систему уравнений квантовой гидродинамики заряженных частиц со спином.

Релятивистские эффекты в плазме: радиационные поправки к закону Кулона и их вклад в коллективные процессы в плазме

Представленные в этой главе явления рассмотрены в слаборелятивистском приближении, а точнее основное внимание уделено спиновым эффектам. В литературе представлен ряд работ по квантовой гидродинамике и квантовой кинетике, где авторы выходят за границы слаборелятивистского приближения и используют уравнение Дирака для построения релятивистских моделей коллективных эффектов в плазмоподобных средах [129], [153], [154]. Однако применение одночастичного уравнения как основы теории коллективных

процессов не позволяет учесть все квантово-релятивистские эффекты. Одним из примеров является структура взаимодействия Дарвина, являющегося частью гамильтониана Брейта [126], рассмотренного в разделе 1.1. Другим примером являются радиационные поправки, рассмотренные в этом разделе. Данный пример показывает, что проблема построения квантово-релятивистской гидродинамики остаётся открытой проблемой на сегодняшний день, построение которой необходимо для описания известных астрофизических явлений [132].

Существуют различные примеры радиационных поправок [126] и [12]. Однако, здесь рассмотрим один пример, следуя работе [12].

Используя соответствующую добавку в потенциал взаимодействия частиц в микроскопическом гамильтониане можно вывести уравнения гидродинамики, методом, описанным выше. Уравнения непрерывности и Эйлера в приближении самосогласованного поля имеют следующий вид [12]:

$$\partial_t n + \nabla(n\mathbf{v}) = 0, \quad (1.2.46)$$

и

$$m\mathbf{n}(\partial_t + \mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \nabla p - \frac{\hbar^2}{4m}\nabla\Delta\left(n + \frac{\hbar^2}{2m^2c^2}\Delta n\right) = -e^2 n \nabla \int G_{QED}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')n(\mathbf{r}',t)d\mathbf{r}', \quad (1.2.47)$$

где использована модифицированная функция Грина [126]

$$G_{QED}(\xi) = \frac{1}{\xi} \left[1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \left(\frac{\hbar}{mc\xi} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{2mc\xi}{\hbar}\right) \right], \quad (1.2.48)$$

содержащая $\xi = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $\xi = |\xi|$, и постоянную тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$.

Первое слагаемое в формуле (1.2.48) это закон Кулона.

Выводы:

Спинорные свойства частиц могут быть учтены в гидродинамической модели путем введения парциальных концентраций частиц с определенным значением проекции спина на выделенное направление. При этом другие гидродинамические функции разделятся на два класса. Функции, которые не содержат вклад спина, будут иметь парциальный характер, как и концентрации. Другие функции содержащие вклад спина будут описывать совокупность частиц с различными проекциями спина, как, к примеру, спиновая плотность или спиновый

ток. Такая модель квантовой плазмы, называемая квантовая гидродинамика с раздельной спиновой эволюцией, представлена в этом разделе.

Представлен упрощенный вывод модели, который позволяет легче понять структуру гидродинамических функций возникающих в такой модели.

На основе развитой модели представлено нелинейное уравнение Паули со спинорным давлением. Это уравнение использовано далее для вывода уравнения состояния для тепловой части коллективного спинового тока. Более того, представлен альтернативный подход к уравнению состояния для тепловой части коллективного спинового тока основанный на моментах равновесной спиновой функции распределения.

Исследовано влияние спинового тока на уравнение эволюции квантовой завихренности среды и показано несохранение соответствующей обобщенной квантовой гидродинамической спиральности.

1.3 Кинетическая модель плазмы с отдельной спиновой эволюцией

Выше развита модель квантовой гидродинамики с отдельной спиновой эволюцией, в которой электроны со спином вниз и электроны со спином вверх описываются независимо. Таким образом, электроны с различной проекцией спина рассматриваются как два разных сорта частиц. Эта модель позволяет получить новый тип продольных волн в вырожденной квантовой плазме, которые называются спин-электрон акустические волны (СЭАВ) [24], [27]. СЭАВ существуют в спин-поляризованной плазме в результате различия давлений Ферми для электронов с различной проекцией спина.

Распространение СЭАВ параллельно к внешнему магнитному полю рассмотрено мной в работе [27]. Дальнейшее исследование СЭАВ выполнено в работах [23], [24], где рассмотрено распространение объемных СЭАВ под произвольным углом к направлению внешнего магнитного поля [24] и свойства СЭАВ в двумерном электронном газе [23]. Причем, при исследовании двумерно электронного газа было рассмотрено две геометрии: плоская и цилиндрическая.

При распространении объемных спин-электрон-акустических волн под произвольным углом к внешнему магнитному полю обнаружено две спин-электрон-акустические волны, вырождающиеся в одну в предельных случаях распространения волн параллельно и перпендикулярно внешнему магнитному полю [24].

Известно, что такие явления как бесстолкновительное затухание Ландау и нулевой звук в вырожденном электронном газе требуют для своего описания применение кинетической модели.

Чтобы выявить структуру кинетических уравнений возникающий при отдельной спиновой эволюции можно использовать одночастичное уравнение Паули. Хотя полноценная теоретическая модель требует вывода кинетических уравнений из многочастичного уравнения Паули. Такой вывод предложен в работе [19]. Следуя этой работе и частично работе [28].

Не останавливаясь подробно на громоздком выводе уравнений, приведу основные определения позволяющие понять методику расчетов.

Наиболее известной квантовой функцией распределения является функция Вигнера [114]. Тем не менее, это не единственное возможное определение

квантовой функцией распределения. В соответствии с методом многочастичной квантовой гидродинамики используем классическую микроскопическую функцию распределения, проквантуем её, получив, таким образом, оператор функции распределения:

$$\hat{f} = \sum_i \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}_i) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i). \quad (1.3.1)$$

Далее рассмотрим квантовое среднее оператора функции распределения и получим следующее выражение для квантовой функции распределения частиц сорта a :

$$f_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{4} \int \left[\Psi^\dagger(R, t) \sum_i (\delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}_i) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i) + \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i) \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}_i)) \Psi(R, t) + h.c. \right] dR. \quad (1.3.2)$$

Такое определение может быть использовано для электронов или ионов. Если мы хотим рассмотреть отдельную спиновую эволюцию, например, электронов, то вместо полного многочастичного спинора Ψ , следует использовать его часть, относящуюся к электронам с определенной проекцией спина Ψ_s . В итоге получаем искомую функцию распределения. Дифференцируя её по времени и используя многочастичное уравнение Паули для производных по времени от волновых функций описывающих электроны с определенной проекцией спина Ψ_s , найдем следующие кинетические уравнения для электронов со спином вверх

$$\begin{aligned} & \partial_t f_{e\uparrow} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_{e\uparrow} + q_e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \right) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_{e\uparrow} \\ & + \gamma_e \nabla B^z \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_{e\uparrow} + \frac{\gamma_e}{2} (\nabla B_x \cdot \nabla_{\mathbf{p}} S_{e,x} + \nabla B_y \cdot \nabla_{\mathbf{p}} S_{e,y}) = \frac{\gamma_e}{\hbar} [S_{e,x} B_y - S_{e,y} B_x], \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

и электронов со спином вниз

$$\begin{aligned} & \partial_t f_{e\downarrow} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_{e\downarrow} + q_e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \right) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_{e\downarrow} \\ & - \gamma_e \nabla B^z \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_{e\downarrow} + \frac{\gamma_e}{2} (\nabla B_x \cdot \nabla_{\mathbf{p}} S_{e,x} + \nabla B_y \cdot \nabla_{\mathbf{p}} S_{e,y}) = -\frac{\gamma_e}{\hbar} [S_{e,x} B_y - S_{e,y} B_x]. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Чтобы выявить основные свойства полученной модели кинетические уравнения (1.3.3) и (1.3.4) записаны с использованием двух приближений. Во-первых, использовано приближение самосогласованного поля. Во-вторых, отброшены квантовые слагаемые, которые явно пропорциональны постоянной

Планка и содержащие более высокие порядки производных функций распределения по импульсу.

Рассмотрим структуру полученных кинетических уравнений. Каждое из них содержит все три слагаемых из уравнения Власова как основной структурный элемент: $\partial_t f_{es} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_{es} + q_e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \right) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_{es}$. Остальные слагаемые связаны со спин-спиновым взаимодействием.

Складывая кинетические уравнения (1.3.3) и (1.3.4) получим, что правая часть этих уравнений уходит. Первые три слагаемые в левых частях уравнений (“Власовские” слагаемые) попарно складываются и дают стандартные слагаемые уравнения Власова: $\partial_t f_e + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_e + q_e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \right) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_e$, где использована связь полной функции распределения электронов с парциальными функциями распределения: $f_e = f_{e\uparrow} + f_{e\downarrow}$. Остальные слагаемые в правой части кинетических уравнений складываются в следующую конструкцию $\gamma_e \nabla B_z \cdot \nabla_{\mathbf{p}} (f_{e\uparrow} - f_{e\downarrow}) + \gamma_e (\nabla B_x \cdot \nabla_{\mathbf{p}} S_{e,x} + \nabla B_y \cdot \nabla_{\mathbf{p}} S_{e,y})$. Учитывая, что $S_z(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_{e\uparrow}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) - f_{e\downarrow}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, получить, что найденная конструкция принимает вид спин-спинового взаимодействия знакомый из одножидкостной кинетической модели электронов: $\gamma_e \nabla B^\beta(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} S^\beta(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, здесь использована спиновая (векторная) функция распределения электронного газа $S^\beta(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$.

На основе сказанного можно проследить параллели и отличия с уравнениями квантовой гидродинамики с отдельной спиновой эволюцией, выведенные выше. Аналог поля силы спин-спинового взаимодействия существующей в уравнениях Эйлера одножидкостной и двухжидкостной гидродинамик электронов присутствует в левых частях кинетических уравнений. Однако аналог части поля силы спин-спинового взаимодействия существующая в уравнениях Эйлера двухжидкостной модели электронов и ответственная за изменение плотности импульса в силу переворота спина отсутствует в кинетических уравнениях. Вместо этого, в правых частях кинетических уравнений присутствуют кинетические моменты силы спин-спинового взаимодействия, аналогичные тем, что мы находим в уравнениях непрерывности двухжидкостной модели электронов.

Для дальнейшего построения кинетической модели с отдельной спиновой эволюцией необходимо получить уравнения эволюции для x- и y- проекций спиновой функции распределения.

При выводе кинетических уравнений эволюции парциальных функций распределения возникает новая функция распределения определенная как квантовое среднее следующего оператора

$$\hat{S}^\alpha = \sum_i \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}_i) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i) \hat{\sigma}_i^\alpha. \quad (1.3.5)$$

Эта функция содержит проекции матриц Паули, наряду с дельта функциями, от операторов координаты и импульса. Она ассоциируется со спиновой плотностью в фазовом пространстве. Таким образом, спиновая функция распределения имеет следующий явный вид

$$S_a^\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{4} \int \left[\Psi^\dagger(R, t) \sum_i (\delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}_i) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i) + \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i) \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}_i)) \hat{\sigma}_i^\alpha \Psi(R, t) + h.c. \right] dR, \quad (1.3.6)$$

где волновые функции это полные многочастичные спиноры без выделения электронов с различными проекциями.

Дифференцируя явный вид функции распределения по времени и используя многочастичное уравнение Паули для производных по времени от волновых функций описывающих электроны с определенной проекцией спина Ψ_s , найдем следующие кинетические уравнения для проекций спиновой функции распределения электронов:

$$\begin{aligned} \partial_t S_{e,x} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} S_{e,x} + q_e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \right) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} S_{e,x} \\ + \gamma_e \nabla B_x \cdot \nabla_{\mathbf{p}} (f_{e\uparrow} + f_{e\downarrow}) - \frac{2\gamma_e}{\hbar} (S_{e,y} B_z - (f_{e\uparrow} - f_{e\downarrow}) B_y) = 0, \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

и

$$\begin{aligned} \partial_t S_{e,y} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} S_{e,y} + q_e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \right) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} S_{e,y} \\ + \gamma_e \nabla B_y \cdot \nabla_{\mathbf{p}} (f_{e\uparrow} + f_{e\downarrow}) - \frac{2\gamma_e}{\hbar} ((f_{e\uparrow} - f_{e\downarrow}) B_x - S_{e,x} B_z) = 0. \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Принимая во внимание, что $f_e = f_{e\uparrow} + f_{e\downarrow}$ и $S_z(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_{e\uparrow}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) - f_{e\downarrow}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ видно, что уравнения (1.3.7) и (1.3.8) полностью совпадают с соответствующими уравнениями в одножидкостной кинетической модели электронов. Наряду с первыми тремя

слагаемыми аналогичными слагаемым в уравнении Власова для скалярной функции распределения $\left(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} + q_e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \right) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \right) S_e^\alpha$, существуют два последних слагаемых связанных со спин-спиновым взаимодействием. Последнее из них представляет собой момент сил, действующий на магнитный момент со стороны внешнего магнитного поля.

Очевидно, что электромагнитное поле, входящее в кинетические уравнения удовлетворяет уравнениям Максвелла. Исходный гамильтониан, входящий в многочастичное уравнение Паули, использованное при выводе кинетических уравнений, содержит кулоновское взаимодействие зарядов и диполь-дипольное спин-спиновое взаимодействие. Следовательно, уравнения Максвелла возникающие при выводе кинетических уравнений в приближении самосогласованного поля это квазистатические уравнения содержащие вклад намагниченности среды. Полноценное применение выведенных кинетических уравнений, как и известного уравнения Власова, предполагает применение полной системы уравнений Максвелла:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.3.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi (q_i n_i + q_e n_{e\uparrow} + q_e n_{e\downarrow}), \quad (1.3.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B}, \quad (1.3.11)$$

и

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} (q_i \mathbf{j}_i + q_e \mathbf{j}_{e\uparrow} + q_e \mathbf{j}_{e\downarrow}) + 4\pi \nabla \times \mathbf{M}_e, \quad (1.3.12)$$

где намагниченность электронов следующим образом связана с плотностью спина в координатном пространстве и концентрацией частиц: $\mathbf{M}_e = \left\{ \gamma_e S_{ex}(\mathbf{r}, t), \gamma_e S_{ey}(\mathbf{r}, t), \gamma_e (n_{e\uparrow}(\mathbf{r}, t) - n_{e\downarrow}(\mathbf{r}, t)) \right\}$. Концентрация электронов с определенной проекцией спина, плотности потока электронов с определенной проекцией спина и плотность спина электронов имеют следующие определения в терминах функций распределения:

$$n_{as}(\mathbf{r}, t) = \int f_{as}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}, \quad (1.3.13)$$

$$\mathbf{j}_{as}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{v} f_{as}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}, \quad (1.3.14)$$

$$S_a^x(\mathbf{r}, t) = \int S_a^x(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}, \quad (1.3.15)$$

и

$$S_a^y(\mathbf{r}, t) = \int S_a^y(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}. \quad (1.3.16)$$

Как и в случае квантовой гидродинамики с отдельной спиновой эволюцией, в кинетике с отдельной спиновой эволюцией часть функций, такие как скалярные функции распределения, определены для электронов с определенной проекцией спина, тогда как другие функции, к примеру, векторная функция распределения, определены одновременно для всех электронов.

Выводы:

Представлены уравнения квантовой кинетики с отдельной спиновой эволюцией. В этом случае кинетическая модель электронов содержит четыре кинетических уравнения. Два уравнения возникают для скалярных парциальных функций распределения для электронов с различными проекциями спина. Их сумма дает традиционную функцию распределения. А их разность дает z-проекцию векторной (спиновой) функции распределения. Показана необходимость использования спиновой функции распределения для учета спиновых свойств электронного газа. Однако в модели с отдельной спиновой эволюцией явно используются x- и y-проекции спиновой функции распределения. Так как третья проекция не является независимой функцией, а определяется суперпозицией скалярных функций распределения.

Уравнения записаны в приближении самосогласованного поля, что позволило пренебречь двухчастичными корреляционными функциями распределения. Кроме того, слагаемые пропорциональные постоянной Планка, содержащие пространственные производные электрического и магнитного поля более высокого порядка также отброшены. Это меняет коротковолновые свойства.

Подробности вычисления и промежуточные уравнения общего вида не представлены. Однако исходные уравнения и определения показывают, что методика вычислений в значительной степени дублирует и обобщает методику вывода уравнений многочастичной квантовой гидродинамики представленной в разделе 1.1.

Кроме того, представленная методика является логическим обобщением квантовой гидродинамики с раздельной спиновой эволюцией. Отметим, что гидродинамика с раздельной спиновой эволюцией была выведена из одночастичной модели, что не является полноценным выводом уравнений. Но это был методический ход для простой и явной демонстрации структуры уравнений возникающей в модели с раздельной спиновой эволюцией. Многочастичные уравнения использованы для вывода кинетических уравнений с раздельной спиновой эволюцией для фундаментального обоснования уравнений гидродинамики и кинетики с раздельной спиновой эволюцией.

1.4 Заключение к главе 1

Представлен метод квантовой гидродинамики для плазмоподобных сред.

Разработаны два вида гидродинамических моделей. Одна имеет более традиционный вид, в ней электроны описываются как один сорт частиц. Системы других частиц, вне зависимости от их спина, также рассматриваются как один сорт. Спиновые свойства проявляются через плотность спина, спиновый ток и другие функции.

В другой гидродинамической модели учитываются спинорные свойства частиц, так что вводятся парциальные концентрации для каждой проекции спина частиц определенного сорта. Следовательно, для электронов вводятся две парциальные концентрации. Поэтому возникают два уравнения непрерывности, два уравнения Эйлера и т.д. Однако не все функции распадаются на суперпозицию парциальных функций. Если функция явно учитывает спиновые свойства, простейший пример это плотность спина, то она одновременно описывает частицы со всеми проекциями спина. Квантовая гидродинамика с такой структурой названа гидродинамика с отдельной спиновой эволюцией.

Метод многочастичной квантовой гидродинамики использован для вывода уравнений гидродинамики электрон-ионной, электрон-позитронной и электрон-позитрон-ионной плазмы. Рассмотрена нерелятивистская модель и слаборелятивистские поправки, описываемые гамильтонианом Брейта. Структура вывода уравнений продемонстрирована на примере электрон-позитронной плазмы. При этом, в исходный гамильтониан включены следующие взаимодействия: кулоновское взаимодействие, спин-спиновое взаимодействие, взаимодействие Дарвина, и аннигиляционное взаимодействие.

Кинетические модели дают более полное описание динамики фермионов, включая предельный случай вырожденных фермионов. Поэтому концепция вывода уравнений многочастичной квантовой гидродинамики обобщена для вывода кинетических уравнений. Ключевым шагом является введение микроскопического определения функции распределения. Вывод уравнений приводит к появлению новой одночастичной функции распределения, которая является векторной функцией. Эта функция является квантовым средним произведения двух

операторов, оператора спина и оператора функции распределения и называется спиновой функцией распределения.

Описанная концепция использована для вывода квантовой кинетики с отдельной спиновой эволюцией. В этом случае вводятся две парциальные функции распределения для электронов с определенной проекцией спина. В этом случае спиновая функция распределения описывает все электроны одновременно. Однако z -проекция спиновой функции распределения не является независимой функцией, но является разностью парциальных функций распределения.

Совокупность разработанных моделей создает основу для исследования спиновых эффектов в плазмоподобных средах.

ГЛАВА 2. ОДНОЖИДКОСТНАЯ И ДВУХЖИДКОСТНАЯ МОДЕЛИ СПИН-ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ВЫРОЖДЕННЫХ НЕЙТРАЛЬНЫХ ФЕРМИОНОВ СО СПИНОМ 1/2

2.1 Одножидкостная модель слабо взаимодействующих фермионов с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия

Экспериментальная реализация конденсата Бозе-Эйнштейна в парах щелочных атомов в 1995 году привела к огромному интересу к экспериментальному и теоретическому исследованию Бозе газов, Ферми газов и их смесей.

Различные методы и приближения использовались при моделировании таких систем. В частности, использовались гидродинамические методы и методы, основанные на нелинейном уравнении Шредингера для эффективной коллективной волновой функции. Более того, эти методы тесно связаны между собой. Сравнительно простые уравнения квантовой гидродинамики могут быть представлены в виде нелинейного уравнения Шредингера или нелинейного уравнения Паули.

Метод квантовой гидродинамики, разработанный для квантовой плазмы [62], был развит в применении к Бозе атомам находящимся в состоянии конденсата Бозе-Эйнштейна и фермионам при ненулевой температуре [37], [41]. В частности, при этом было выведено уравнение Гросса-Питаевского и получено его нелокальное обобщение при более детальном описании короткодействующего взаимодействия между бозонами [41].

Системы вырожденных фермионов проявляют себя по-разному, в зависимости от характера короткодействующего взаимодействия между атомами. В частности возможен переход в сверхпроводящее состояние через образование куперовских пар Ферми атомов (см. к примеру, [317]). Это приводит к акценту на динамике квазичастиц описываемых статистикой Бозе-Эйнштейна. Значительное внимание в современной литературе уделяется сильно взаимодействующим фермионам. Помимо самостоятельного интереса к таким системам, в данном случае прослеживается параллель с системами нуклонов, ядерной материей и

тяжелыми ядрами. Макроскопические состояния, рассмотренные ниже, соответствуют нормальной фазе, без перехода в сверхпроводящее состояние.

Вне зависимости от коллективного поведения фермионов, изначально, на микроскопическом уровне, мы имеем систему N фермионов, которая описывается уравнением Шредингера

$$i\hbar\partial_t\psi = \hat{H}\psi. \quad (2.1.1)$$

Рассмотрим систему N нейтральных фермионов с короткодействующим потенциалом взаимодействия. Такая система может быть описана многочастичным уравнением Шредингера со следующим гамильтонианом:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} \hat{p}_i^\alpha \hat{p}_{\alpha i} + \sum_{i=1}^N V_{ext}(\mathbf{r}_i, t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j,i \neq j} U(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|), \quad (2.1.2)$$

где $\hat{p}_i^\alpha = -i\hbar\nabla_i^\alpha$ это оператор импульса Ферми атомов, и $U_{ij} = U(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$ это потенциал парного изотропного взаимодействия между частицами, так как потенциал зависит от модуля вектора относительного расположения двух частиц.

Анизотропные короткодействующие потенциалы парного взаимодействия нейтральных частиц также будут рассмотрены ниже.

В соответствии с методом многочастичной квантовой гидродинамики, начнем вывод основных уравнений с определения локальной концентрации частиц. Для этого введем, оператор микроскопической концентрации в координатном представлении $\sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$. Далее рассмотрим, квантовое среднее этого оператора используя многочастичную волновую функцию, что дает квантовую концентрацию частиц:

$$n(\mathbf{r}, t) = \int dR \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \psi^+(R, t) \psi(R, t). \quad (2.1.3)$$

где $dR = \prod_{i=1}^N d\mathbf{r}_i$ это элемент объема в $3N$ -мерном конфигурационном пространстве.

Дифференцируя концентрацию (2.1.3) по времени и используя уравнение Шредингера с гамильтонианом (2.1.2) для преобразования производных волновой функции по времени получим уравнение непрерывности:

$$\partial_t n(\mathbf{r}, t) + \nabla \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.1.4)$$

В последнем слагаемом уравнения непрерывности введена новая функция:

$$j^\alpha(\mathbf{r}, t) = \int dR \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \frac{1}{2m_i} \left[(\hat{p}_i^\alpha \psi)^+(R, t) \psi(R, t) + \psi^+(R, t) \hat{p}_i^\alpha \psi(R, t) \right]. \quad (2.1.5)$$

это поток частиц пропорциональный плотности импульса. Представленный вывод дал явный вид векторной функции потока частиц определенный через многочастичную волновую функцию. Такое определение позволяет вывести уравнение эволюции потока частиц (уравнение баланса импульса или уравнение Эйлера). Для вывода дифференцируем явный вид потока частиц (2.1.5) и используем уравнение Шредингера с гамильтонианом (2.1.2) для преобразования производных волновой функции по времени. После преобразований получаем общий вид уравнения Эйлера:

$$\partial_i j^\alpha(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{m} \partial_\beta \Pi^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{m} \int d\mathbf{r}' (\nabla^\alpha U(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) n_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) - \frac{1}{m} n(\mathbf{r}, t) \nabla^\alpha V_{ext}(\mathbf{r}, t). \quad (2.1.6)$$

Уравнение Эйлера содержит тензор плотности потока импульса

$$\Pi^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = \int dR \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \frac{1}{4m_i} \left[\psi^+(R, t) \hat{p}_i^\alpha \hat{p}_i^\beta \psi(R, t) + (\hat{p}_i^\alpha \psi)^+(R, t) \hat{p}_i^\beta \psi(R, t) + c.c. \right], \quad (2.1.7)$$

и двухчастичную концентрацию

$$n_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \int dR \sum_{i,j,i \neq j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) \psi^+(R, t) \psi(R, t) \quad (2.1.8)$$

входящую в плотность силы взаимодействия.

При исследовании нейтральных фермионов ограничимся двумя гидродинамическими уравнениями выведенными выше. Таким образом, выполним обрыв цепочки уравнений. Для этого приближенно вычислим тензор плотности потока импульса (2.1.7) и двухчастичную концентрацию (2.1.8) через гидродинамические функции и параметры системы.

Далее используем стандартное преобразование тензора плотности потока импульса возникающее при введении поля скоростей.

Выше подобная процедура использована при учете эволюции спина, однако её детали не были представлены в тексте. В данном случае, без учета спиновой эволюции, эта процедура значительно упрощается. Представим краткое описание.

Скорости отдельных частиц могут быть получены как градиент фазы многочастичной волновой функции

$$\psi(R, t) = a(R, t) \exp\left(\frac{iS(R, t)}{\hbar}\right) \quad (2.1.9)$$

по соответствующим координатам $\mathbf{v}_i(R, t) = \frac{1}{m_i} \nabla_i S(R, t)$.

Отметим, что представление волновой функции в виде (2.1.9) является общей формулой, будучи записью комплексной функции через две действительные функции. Квазиклассическая модель основана на представлении волновой функции в виде комплексной фазы и разложении этой фазы в ряд по постоянным Планка [314] (см. главу 7).

Далее введем поле скоростей через плотность тока и концентрацию частиц: $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = n(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Разность между скоростью отдельных частиц и полем скоростей представляет скорость движения отдельных частиц относительно локального центра масс $\mathbf{u}_i(\mathbf{r}, R, t) = \mathbf{v}_i(R, t) - \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Аналогичная величина возникает в классической гидродинамике и имеет смысл скорости теплового движения частиц. Определение потока частиц (2.1.5) и определение поля скоростей показывают, что поле скоростей это среднее значение скоростей отдельных частиц. Следовательно, среднее значение скоростей теплового движения частиц равно нулю.

Отметим, что в данном разделе, вывод уравнений квантовой гидродинамики происходит сначала без отсылок на предыдущие результаты. Все что у нас есть это незамкнутая система уравнений непрерывности и баланса импульса выведенные для макроскопической системы из микроскопического многочастичного уравнения Шредингера с гамильтонианом (2.1.2). Таким образом, упоминание тепловых эффектов на данном этапе возникает впервые. Вывод уравнений квантовой гидродинамики в рамках рассматриваемого метода не связан с выводом кинетических уравнений или построением статистической теории с применением распределения Гиббса. Понятие температуры вводится в связи с отклонением в поступательном или вращательном движении частиц от движения локального среднего значения, как это сделано в предыдущем абзаце.

Подставляя многочастичную волновую функцию, представленную в виде (2.1.9), в определение плотности потока импульса $\Pi^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$, выделим скорости отдельных частиц $\mathbf{v}_i(R, t)$, разделим их на составляющие в виде поля скоростей и скорости теплового движения частиц $\mathbf{v}_i(R, t) = \mathbf{u}_i(\mathbf{r}, R, t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, учтем, что среднее значение скоростей теплового движения частиц равно нулю. В результате, придем к следующему выражению для тензора плотности потока импульса:

$$\Pi^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = mn(\mathbf{r}, t)v^\alpha(\mathbf{r}, t)v^\beta(\mathbf{r}, t) + p^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) + T^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t), \quad (2.1.10)$$

в котором

$$p^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = \int dR \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) a^2(R, t) m_i u_i^\alpha u_i^\beta \quad (2.1.11)$$

это тензор теплового давления, возникающий по аналогии с классической гидродинамикой, как среднее значение произведения проекций тепловой скорости. След этого тензора позволяет ввести температуру системы частиц в рассматриваемой модели.

Выражение для плотности потока импульса $\Pi^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$ (2.1.10) содержит слагаемое, не имеющее аналога в классической гидродинамике. Его явный вид

$$T^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \int dR \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) a^2(R, t) \frac{\partial^2 \ln a}{\partial x_{\alpha i} \partial x_{\beta i}} \quad (2.1.12)$$

содержит квадрат постоянной Планка, что также указывает на квантовое происхождения данного слагаемого. Это слагаемое связано с известным в квантовой механике квантовым потенциалом Бома [314].

Рассматривая многочастичную волновую функцию в приближении мультипликативности, получим упрощенную форму тензора $T^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$. Однако, не удастся выразить тензор $T^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$ через концентрацию частиц или другие гидродинамические переменные. Положим, что все частицы имеют одинаковую пространственную часть волновых функций, что некорректно для большинства систем фермионов, но, к примеру, справедливо для бозонов находящихся в состоянии конденсата Бозе-Эйнштейна. Тем не менее, используем, данное одночастичное приближение для тензора $T^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$. При рассмотрении большинства физических эффектов тензор $T^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$ вносит малый вклад. Поэтому, можно предположить, что отличие одночастичной формы тензора $T^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$ от его более корректной формы для систем фермионов является менее значимым, чем вклад одночастичного тензора $T^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$. В итоге, в одночастичном приближении находим следующее выражение для тензора $T^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$:

$$T^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{4m} \left(\partial^\alpha \partial^\beta n(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial^\alpha n(\mathbf{r}, t) \cdot \partial^\beta n(\mathbf{r}, t)}{n(\mathbf{r}, t)} \right). \quad (2.1.13)$$

Такое приближение использовано во всех существующих работах по гидродинамике квантовой плазмы.

В уравнение Эйлера входит дивергенция тензора $T^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$, которую можно представить в следующем компактном виде, который также будет удобен при выводе нелинейного уравнения Шредингера (уравнения Гросса-Питаевского) из уравнений квантовой гидродинамики

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} n(\mathbf{r}, t) \partial^\alpha \frac{\Delta \sqrt{n(\mathbf{r}, t)}}{\sqrt{n(\mathbf{r}, t)}}. \quad (2.1.14)$$

В частности, это выражение удобно тем, что представляет $\partial_\beta T^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$ как плотность потенциальной силы.

В результате введения поля скоростей приходим к следующему виду уравнений квантовой гидродинамики:

$$\partial_t n + \nabla(n\mathbf{v}) = 0, \quad (2.1.15)$$

и

$$m n (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}^\alpha + \partial_\beta (p^{\alpha\beta} + T^{\alpha\beta}) = -n \nabla^\alpha V_{ext} - \frac{1}{m} \int d\mathbf{r}' (\nabla^\alpha U(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) n_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t). \quad (2.1.16)$$

Перейдем к рассмотрению плотности силы короткодействующего взаимодействия. При этом полезно перейти от двухчастичной концентрации обратно к волновым функциям и выполнить интегрирование по переменной \mathbf{r}' . В итоге плотность силы взаимодействия можно записать в следующем виде

$$\mathbf{F} = -\int dR \sum_{i,j,i \neq j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) (\nabla_i U(\mathbf{r}_{ij})) \cdot \psi^+(R, t) \psi(R, t). \quad (2.1.17)$$

Отметим, что наряду с сферически-симметричными потенциалами взаимодействия будут рассмотрены анизотропные потенциалы. При этом ограничимся четными аксиально-симметричными потенциалами. Такая модель будет развита для бозонных изотопов редкоземельных элементов находящихся в состоянии конденсата Бозе-Эйнштейна.

Переобозначая индексы суммирования можно переписать плотность силы взаимодействия в эквивалентной форме

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\int dR \sum_{i,j,i \neq j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) (\nabla_j U(\mathbf{r}_{ij})) \cdot \psi^+(R, t) \psi(R, t) \\ &= \int dR \sum_{i,j,i \neq j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) (\nabla_i U(\mathbf{r}_{ij})) \cdot \psi^+(R, t) \psi(R, t). \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

Запишем плотность силы короткодействующего взаимодействия как полу сумму двух эквивалентных форм этой силы представленных выше:

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{2} \int dR \sum_{i,j,i \neq j} (\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)) (\nabla_i U(\mathbf{r}_{ij})) \cdot \psi^+(R,t) \psi(R,t). \quad (2.1.19)$$

Чтобы учесть короткодействующий характер взаимодействия между фермионами в полученном выражении используем переменные центра масс и относительного движения для всех пар частиц

$$\mathbf{R}_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j), \quad \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j. \quad (2.1.20)$$

Используем эти координаты для i -й и j -й частиц и перепишем плотность силы

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{2} \int dR \sum_{i,j,i \neq j} \left[\delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{ij} - \frac{1}{2}\mathbf{r}_{ij}\right) - \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{ij} + \frac{1}{2}\mathbf{r}_{ij}\right) \right] (\nabla_i U(\mathbf{r}_{ij})) \cdot \psi^+(R,t) \psi(R,t). \quad (2.1.21)$$

В силу короткодействующего характера взаимодействия видим, что подынтегральное выражение отлично от нуля при малых расстояниях между взаимодействующими частицами. Поэтому, подынтегральное выражение может быть разложено в ряд по относительному расстоянию между частицами $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. Отметим, что параметр $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ входит в i -й и j -й аргументы многочастичной волновой функции $\psi(R,t)$. Поэтому, при разложении подынтегрального выражения, также выполняем разложение в ряд волновых функции, двух соответствующих аргументов волновых функций.

В результате разложения в ряд получим следующее громоздкое выражение

$$\begin{aligned} \partial_\beta \sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{r},t) = & \int dR \sum_{i,j,i \neq j} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^k \sum_{m=1}^n (\partial_{\beta_1} \dots \partial_{\beta_{2l+1}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{ij})) \times \\ & \times (-1)^{2l+p+m+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2l+k+n+1} \frac{1}{(2l+1)!} \frac{1}{k!} \frac{1}{n!} C_k^p C_n^m \mathbf{r}_{ij}^{\beta_1} \dots \mathbf{r}_{ij}^{\beta_{2l+1}} \mathbf{r}_{ij}^{\gamma_1} \dots \mathbf{r}_{ij}^{\gamma_k} \mathbf{r}_{ij}^{\delta_1} \dots \mathbf{r}_{ij}^{\delta_n} \times \\ & \times \frac{\partial U(\mathbf{r}_{ij})}{\partial \mathbf{r}_{ij}^\alpha} (\partial_1^{\gamma_1} \dots \partial_1^{\gamma_{k-p}} \partial_2^{\gamma_{k-p+1}} \dots \partial_2^{\gamma_k} \psi^*(\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ij}, R_{N-2})) \times \\ & \times (\partial_1^{\delta_1} \dots \partial_1^{\delta_{n-m}} \partial_2^{\delta_{n-m+1}} \dots \partial_2^{\delta_n} \psi(\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ij}, R_{N-2})), \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

где $C_k^p = \frac{k!}{p!(k-p)!}$. Далее рассмотрим, частные случаи формулы (2.1.22).

Перепишем уравнение Эйлера, используя тензор квантовых напряжений

$$mn(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}^\alpha + \partial_\beta (p^{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\beta} + T^{\alpha\beta}) = -n \nabla^\alpha V_{ext}. \quad (2.1.23)$$

Явный вид тензора квантовых напряжений демонстрирует симметрию тензора относительно перестановки индексов $\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = \sigma^{\beta\alpha}(\mathbf{r}, t)$.

В силу того что преобразования плотности силы взаимодействия позволившие представить её как дивергенцию тензора квантовых напряжений независимы от процедуры введения поля скоростей, то уравнение Эйлера для плотности потока также может быть представлено с применением тензора квантовых напряжений:

$$\partial_i j^\alpha(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{m} \partial_\beta (\Pi^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) + \sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)) = -\frac{1}{m} n(\mathbf{r}, t) \nabla^\alpha V_{ext}(\mathbf{r}, t). \quad (2.1.24)$$

Рассмотрим главное слагаемое в разложении (2.1.22), т.е. ограничимся рассмотрением первого слагаемого. В этом случае, тензор квантовых напряжений, может быть записан в следующей компактной форме:

$$\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2} \int dR \sum_{i,j,i \neq j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{ij}) r_{ij}^\beta \frac{\partial U(\mathbf{r}_{ij})}{\partial \mathbf{r}_{ij}^\alpha} \psi^+(R', t) \psi(R', t), \quad (2.1.25)$$

где $R' = \{\dots, \mathbf{R}_{ij}, \dots, \mathbf{R}_{ij}, \dots\}$, т.е. предполагается, что i -й и j -й аргументы волновых функций одинаковы и равны \mathbf{R}_{ij} .

При рассмотрении сферически-симметричных потенциалов, формула (2.1.25) переходит в [41]

$$\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2} \int dR \sum_{i,j,i \neq j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{ij}) \frac{r_{ij}^\alpha r_{ij}^\beta}{r_{ij}} \frac{\partial U(r_{ij})}{\partial r_{ij}} \psi^+(R', t) \psi(R', t), \quad (2.1.26)$$

где $r_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}|$.

В выражении (2.1.26) учтено слагаемое пропорциональное первой степени расстояния между взаимодействующими частицами r_{ij} . Поэтому рассматриваемое приближение называется уравнения квантовой гидродинамики в первом порядке по радиусу взаимодействия.

Полагая, что все фермионы находятся в одном спиновом состоянии, получим, что спиновая часть волновой функции симметрична. Следовательно, координатная часть волновой функции, преобразованная при выводе тензора квантовых напряжений, антисимметрична относительно перестановки аргументов. В совокупности с равенством двух аргументов получим, что волновые функции в

формуле (2.1.26) равны нулю. Это приводит к равенству нулю тензора квантовых напряжений в первом порядке по радиусу взаимодействия:

$$\sigma_{FOIR}^{\alpha\beta} = 0. \quad (2.1.27)$$

Если система фермионов не полностью спин поляризована, то можно воспользоваться приближенной моделью волновой функции, где координатная часть есть произведение двух детерминантов Слэтера. Каждый детерминант содержит совокупность волновых функций описывающих фермионы с определенной проекцией спина [315], это соответствует известной схеме Юнга для построения многочастичной волновой функции описанной, в частности, в курсе Ландау [314] (см. параграф 63). Таким образом, имеет место антисимметрия координатной части волновой функции относительно перестановки частиц имеющих одинаковое значение проекции спина. Для частиц с разными проекциями спина симметрия или антисимметрия волновой функции не предполагается.

Система частично спин поляризованных фермионов содержит взаимодействие фермионов с разными проекциями спина, что приводит к ненулевому значению тензора квантовых напряжений в первом порядке по радиусу взаимодействия.

Тензор квантовых напряжений в первом порядке по радиусу взаимодействия для системы частично спин поляризованных фермионов.

Рассмотрим поле сил взаимодействия в первом порядке по радиусу взаимодействия для системы частично спин поляризованных фермионов. В соответствии с разложением волновой функции на произведение двух детерминантов Слэтера соответствующего известной схеме Юнга рассмотрим фермионы с различной проекцией как частицы различного сорта. В этом случае симметризация поля силы, представленная формулой (2.1.19) не работает. Поэтому нужно вводить координаты относительного движения и центра масс в формулу (2.1.17). Следуя работе [6] (см. раздел III. В), рассмотрим поле силы, действующее на частицы с определённым направлением спина, в результате разложения по координатам относительного движения получим следующее выражение

$$F_{FOIR}^{\alpha} = \frac{1}{2} \int \sum_{i,j \neq i} r_{ij}^{\alpha} r_{ij}^{\beta} \frac{1}{r_{ij}} \frac{\partial U}{\partial r_{ij}} \frac{\partial \delta_i}{\partial r^{\beta}} \Psi^*(R',t) \Psi(R',t) dR$$

$$-\frac{1}{2} \int \sum_{i,j \neq i} r_{ij}^\alpha r_{ij}^\beta \frac{1}{r_{ij}} \frac{\partial U}{\partial r_{ij}} \delta_i \left[\Psi^* \left(\frac{\partial \Psi}{\partial R_{ij,1}^\beta} - \frac{\partial \Psi}{\partial R_{ij,2}^\beta} \right) + c.c. \right] dR. \quad (2.1.28)$$

После преобразований, подобных описанным выше, получим выражение для поля силы в терминах парциальных концентраций

$$F_{FOIR}^\alpha = -g n_{(1)} \partial^\alpha n_{(2)}. \quad (2.1.29)$$

Скомбинируем поля сил действующих на частицы с различными значениями проекции спина. В итоге, получим, что поле силы может быть записано как дивергенция тензора квантовых напряжений $F_{FOIR}^\alpha = -\partial^\beta \sigma_{FOIR}^{\alpha\beta}$, где

$$\sigma_{FOIR}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \delta^{\alpha\beta} g_0 n_\uparrow(\mathbf{r}, t) n_\downarrow(\mathbf{r}, t). \quad (2.1.30)$$

Используя равновесную спиновую поляризацию для перехода от парциальных концентраций к полной концентрации фермионов, получим

$$\sigma_{FOIR}^{\alpha\beta} = \frac{1}{8} \delta^{\alpha\beta} g_0 (1 - \eta^2) n^2(\mathbf{r}, t). \quad (2.1.31)$$

Дальнейшие преобразования выполним предполагая, что спиновая поляризация не меняется в процессе эволюции.

В итоге получим уравнение Эйлера, которое принимает следующий вид

$$m n (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}^\alpha + \partial_\beta P^{\alpha\beta} - \frac{\hbar^2}{2m} \partial_\alpha \frac{\Delta \sqrt{n}}{\sqrt{n}} + (1 - \eta^2) \frac{g}{4} n \partial^\alpha n = -n \nabla^\alpha V_{ext}. \quad (2.1.32)$$

Так как в силу изотропии взаимодействия можно ограничиться изотропным тензором давления

$$\frac{\nabla^\alpha P}{m n} = \nabla^\alpha \mu. \quad (2.1.33)$$

Также используем условие безвихревого движения фермионов $\mathbf{v} = \nabla \phi$.

В итоге, найдем интеграл Коши-Лагранжа:

$$\partial_t \phi + \frac{1}{2} v^2 + \mu + \frac{1}{4m} g (1 - \eta^2) n - \frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\Delta \sqrt{n}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{m} V_{ext} = const. \quad (2.1.34)$$

Этот интеграл используем для вывода, уравнения эволюции эффективной волновой функции системы фермионов.

Для вывода нелинейного уравнения Шредингера из системы уравнений квантовой гидродинамики определим эффективную волновую функцию в терминах концентрации частиц и потенциала поля скоростей:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n(\mathbf{r}, t)} \exp\left(\frac{i}{\hbar} m\phi(\mathbf{r}, t)\right). \quad (2.1.35)$$

Дифференцируя эффективную волновую функцию по времени и используя уравнение непрерывности и скалярный интеграл Коши-Лагранжа для производных по времени от гидродинамических переменных. В результате вычислений, получаем следующее нелинейное уравнение Шредингера для системы слабозаимодействующих фермионов:

$$i\hbar\partial_t\Phi(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + \mu(\mathbf{r}, t) + V_{ext}(\mathbf{r}, t) + g(1-\eta^2)|\Phi(\mathbf{r}, t)|^2\right)\Phi(\mathbf{r}, t). \quad (2.1.36)$$

Эффективная волновая функция нормирована на полное число частиц в системе:

$$\int d\mathbf{r}\Phi^*(\mathbf{r}, t)\Phi(\mathbf{r}, t) = N. \quad (2.1.37)$$

Тензор квантовых напряжений спин-поляризованных фермионов с полной поляризацией с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия.

Общий вид тензора квантовых напряжений, записанный с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия, справедливый, как для бозонов, так и для фермионов имеет следующий громоздкий явный вид [41]

$$\begin{aligned} \sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = & -\frac{1}{2}\int dR \sum_{i,j,i\neq j} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}_{ij}) \frac{r_{ij}^\alpha r_{ij}^\beta}{r_{ij}} \frac{\partial U(r_{ij})}{\partial r_{ij}} \psi^*(\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ij}, R_{N-2}, t) \psi(\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ij}, R_{N-2}, t) \\ & -\frac{1}{48}\partial_\gamma\partial_\delta \int dR \sum_{i,j,i\neq j} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}_{ij}) \frac{r_{ij}^\alpha r_{ij}^\beta r_{ij}^\gamma r_{ij}^\delta}{r_{ij}} \frac{\partial U(r_{ij})}{\partial r_{ij}} \psi^*(\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ij}, R_{N-2}, t) \psi(\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ij}, R_{N-2}, t) \\ & -\frac{1}{8}\int dR \sum_{i,j,i\neq j} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}_{ij}) \frac{r_{ij}^\alpha r_{ij}^\beta r_{ij}^\gamma r_{ij}^\delta}{r_{ij}} \frac{\partial U(r_{ij})}{\partial r_{ij}} \times \left(\frac{1}{2}\psi^*(\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ij}, R_{N-2}, t) \partial_{\gamma_1}\partial_{\delta_1}\psi(\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ij}, R_{N-2}, t) \right. \\ & +(\partial_{\gamma_2}\psi^*(\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ij}, R_{N-2}, t))\partial_{\delta_2}\psi(\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ij}, R_{N-2}, t) - (\partial_{\gamma_1}\psi^*(\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ij}, R_{N-2}, t))\partial_{\delta_2}\psi(\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ij}, R_{N-2}, t) \\ & +(\partial_{\gamma_1}\psi^*(\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ij}, R_{N-2}, t))\partial_{\delta_1}\psi(\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ij}, R_{N-2}, t) - (\partial_{\gamma_2}\psi^*(\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ij}, R_{N-2}, t))\partial_{\delta_1}\psi(\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ij}, R_{N-2}, t) \\ & +\frac{1}{2}\psi^*(\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ij}, R_{N-2}, t)\partial_{\gamma_2}\partial_{\delta_2}\psi(\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ij}, R_{N-2}, t) - \psi^*(\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ij}, R_{N-2}, t)\partial_{\gamma_1}\partial_{\delta_2}\psi(\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ij}, R_{N-2}, t) \\ & \left. +\frac{1}{2}(\partial_{\gamma_1}\partial_{\delta_1}\psi^*(\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ij}, R_{N-2}, t))\psi(\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ij}, R_{N-2}, t) - (\partial_{\gamma_1}\partial_{\delta_2}\psi^*(\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ij}, R_{N-2}, t))\psi(\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ij}, R_{N-2}, t) \right. \\ & \left. +\frac{1}{2}(\partial_{\gamma_2}\partial_{\delta_2}\psi^*(\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ij}, R_{N-2}, t))\psi(\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ij}, R_{N-2}, t)\right). \quad (2.1.38) \end{aligned}$$

В этом уравнении использовано следующее обозначение для аргументов волновой функции $\psi(\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ij}, R_{N-2}, t)$. Первый (второй) аргумент соответствует i -й (j -й) частице. Символ R_{N-2} соответствует остальным аргументам волновой функции. Символ ∂_{γ_1} (∂_{γ_2}) это производная по аргументу i -й (j -й) частицы, которые в компактных обозначениях стоят на первом и втором местах, соответственно. Данная формула представлена для случая изотропного взаимодействия.

Более того, так как все фермионы находятся в одном спиновом состоянии, это соответствует тому, что спиновая часть волновой функции симметрична, а следовательно координатная часть ассиметрична. Таким образом, $\psi(\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{R}_{ij}, R_{N-2}, t) = 0$, тогда как её производные могут быть отличны от нуля. Это приводит к тому, что первые две группы слагаемых в формуле (2.1.38) равны нулю. В третьей группе слагаемых первое, шестое, седьмое, восьмое, девятое и десятое слагаемые равны нулю. Но четыре слагаемых в четвертой группе слагаемых отличны от нуля. Методика вычисления каждого слагаемого аналогичны вычислению двухчастичной концентрации, но с волновыми функциями, находящимися под действием оператора производной. Соответствующая методика описана ниже.

Общий вид тензора квантовых напряжений, в системе фермионов полученный с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{ff}^{\alpha\beta} = & \frac{1}{2} \Upsilon_{2ff} \left(\delta^{\alpha\beta} \left(n_f \sum_g n_g |\nabla \varphi_g|^2 - \left| \sum_g n_g \varphi_g^* \nabla \varphi_g \right|^2 \right) \right. \\ & \left. + \left(n_f \sum_g n_g (\partial^\alpha \varphi_g^*) \partial^\beta \varphi_g - \sum_g n_g \varphi_g^* (\partial^\alpha \varphi_g) \sum_{g'} n_{g'} (\partial^\beta \varphi_{g'}^*) \varphi_{g'} + c.c. \right) \right). \end{aligned} \quad (2.1.39)$$

Вычисляя этот тензор и выделяя поле скоростей в структуре одночастичных волновых функций, получим

$$\sigma_{ff}^{\alpha\beta} = \frac{m^2}{2\hbar^2} \Upsilon_{2ff} I_0^{\alpha\beta\gamma\delta} n_f p_f^{\gamma\delta}, \quad (2.1.40)$$

где $I_0^{\alpha\beta\gamma\delta} = \delta^{\alpha\beta} \delta^{\gamma\delta} + \delta^{\alpha\gamma} \delta^{\beta\delta} + \delta^{\alpha\delta} \delta^{\beta\gamma}$. Формула (2.1.40) учитывает то, что фермионы имеют полную спиновую поляризацию. Далее используем уравнение состояния для давления в виде давления Ферми:

$$\sigma_{ff}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \Upsilon_{2,ff} \delta^{\alpha\beta} (6\pi^2)^{\frac{2}{3}} n_f^{\frac{8}{3}}. \quad (2.1.41)$$

Используя выражение (2.1.40) придем к уравнению Эйлера содержащему давление в кинематических слагаемых (в левой части уравнения) и в динамических слагаемых (в правой части уравнения)

$$mn(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) v^\alpha + \partial_\beta (p^{\alpha\beta} + T^{\alpha\beta}) = -n \nabla^\alpha V_{ext} - \frac{m^2}{2\hbar^2} \Upsilon_{2,ff} I_0^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla^\beta (n_f p_f^{\gamma\delta}). \quad (2.1.42)$$

В качестве минимальной гидродинамической модели фермионов будем ограничиваться уравнением непрерывности и уравнением Эйлера. Однако ниже, в Разделе 2.5 будет выведено уравнение эволюции тензора давления. Таким образом, применение расширенной гидродинамической модели не требует использования уравнения состояния в уравнении Эйлера (2.1.42).

Вычисление двухчастичной концентрации вырожденных фермионов.

Вычисление тензора квантовых напряжений сводится к вычислению двухчастичной концентрации, которая может быть представлена в следующем виде

$$n_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = N(N-1) \int dR_{N-2} \langle n_1, n_2, \dots | \mathbf{r}, \mathbf{r}', R_{N-2}, t \rangle \times \langle \mathbf{r}, \mathbf{r}', R_{N-2}, t | n_1, n_2, \dots \rangle, \quad (2.1.43)$$

где $dR_{N-2} = \prod_{k=3}^N d\mathbf{r}_k$ это элемент объема в $3(N-2)$ - мерном пространстве, и

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}, \mathbf{r}', R_{N-2}, t | n_1, n_2, \dots \rangle &= \sum_f \sqrt{\frac{n_f}{N}} \langle \mathbf{r}, t | f \rangle \langle \mathbf{r}', R_{N-2}, t | n_1, \dots, (n_f-1), \dots \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \sum_f \sum_{f', f' \neq f} \sqrt{\frac{n_f}{N}} \sqrt{\frac{n_{f'}}{N-1}} (-1)^{\sum_{f' \leq g < f} n_g} (\langle \mathbf{r}, t | f \rangle \langle \mathbf{r}', t | f' \rangle - \\ &\quad - \langle \mathbf{r}, t | f' \rangle \langle \mathbf{r}', t | f \rangle) \langle R_{N-2}, t | n_1, \dots, (n_{f'}-1), \dots, (n_f-1), \dots \rangle \end{aligned} \quad (2.1.44)$$

это многочастичная волновая функция, записанная в представлении чисел заполнения. Здесь сразу использовано разложение детерминанта Слэтера по строке и по двум строкам, соответственно. Кроме того, для разложения использованы одночастичные волновые функции $\langle \mathbf{r}, t | f \rangle = \varphi_f(\mathbf{r}, t)$. При рассмотрении бозонов в разложении (2.1.44) появляется еще одно слагаемое соответствующее двум частицам, находящимся в одном квантовом состоянии.

Волновая функция $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}', R_{N-2}, t | n_1, n_2, \dots \rangle$, учитывает проектирование движения двух частиц из конфигурационного пространства в физическое трехмерное пространство, что выражается наличием аргументов \mathbf{r} и \mathbf{r}' .

Фактически двухчастичная концентрация $n_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$ может быть переписана через волновую функцию (N-2)-х частиц

$$n_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \frac{1}{4} \sum_f \sum_{f', f' \neq f} \sqrt{n_f n_{f'}} \langle \mathbf{r}, t | f \rangle \langle \mathbf{r}', t | f' \rangle \times \\ \times \sum_g \sum_{g', g' \neq g} \sqrt{n_g n_{g'}} \langle g | \mathbf{r}, t \rangle \langle g' | \mathbf{r}', t \rangle (-1)^{\sum_{j' \leq l < j} n_{j'}} (-1)^{\sum_{j' \leq k < j} n_k} \times \\ \times \int dR_{N-2} \langle n_1, \dots, (n_{g'} - 1), \dots, (n_g - 1), \dots | R_{N-2}, t \rangle \langle R_{N-2}, t | n_1, \dots, (n_{f'} - 1), \dots, (n_f - 1), \dots \rangle. \quad (2.1.45)$$

Последний интеграл легко вычисляется, так что получаем дальнейшее упрощение двухчастичной концентрации

$$n_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \frac{1}{4} \sum_f \sum_{f', f' \neq f} \sqrt{n_f n_{f'}} \langle \mathbf{r}, t | f \rangle \langle \mathbf{r}', t | f' \rangle \sum_g \sum_{g', g' \neq g} \sqrt{n_g n_{g'}} \langle g | \mathbf{r}, t \rangle \langle g' | \mathbf{r}', t \rangle \times \\ \times (-1)^{\sum_{j' \leq l < j} n_{j'}} (-1)^{\sum_{j' \leq k < j} n_k} \langle n_1, \dots, (n_{g'} - 1), \dots, (n_g - 1), \dots | n_1, \dots, (n_{f'} - 1), \dots, (n_f - 1), \dots \rangle. \quad (2.1.46)$$

Далее вычислим интеграл $\langle n_1, \dots, (n_{g'} - 1), \dots, (n_g - 1), \dots | n_1, \dots, (n_{f'} - 1), \dots, (n_f - 1), \dots \rangle$ выражающий нормировку волновой функции (N-2)-х частиц.

Нормировка зависит от симметрии частиц. Для антисимметричных состояний получаем

$$\langle n_1, \dots, (n_{f'} - 1), \dots, (n_f - 1), \dots | n_1, \dots, (n_{q'} - 1), \dots, (n_q - 1), \dots \rangle \\ = \delta(f - q) \delta(f' - q') - \delta(f - q') \delta(f' - q),$$

а для симметричных

$$\langle n_1, \dots, (n_{f'} - 1), \dots, (n_f - 1), \dots | n_1, \dots, (n_{q'} - 1), \dots, (n_q - 1), \dots \rangle = \delta(f - q) \delta(f' - q') + \delta(f - q') \delta(f' - q).$$

Рассмотрим для примера антисимметричный случай. Используя нормировочный интеграл, избавимся от сумм по g и g' . В итоге придем к следующему представлению для двухчастичной концентрации:

$$n_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = n(\mathbf{r}, t) n(\mathbf{r}', t) - |\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)|^2, \quad (2.1.47)$$

где

$$n(\mathbf{r}, t) = \sum_g n_g \varphi_g^*(\mathbf{r}, t) \varphi_g(\mathbf{r}, t), \quad (2.1.48)$$

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \sum_g n_g \varphi_g^*(\mathbf{r}, t) \varphi_g(\mathbf{r}', t), \quad (2.1.49)$$

это выражения для концентрации частиц и матрицы плотности в терминах одночастичных волновых функций.

Поле силы взаимодействия фермионов с различными проекциями спина с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия

В результате разложения формулы (2.1.17) для поля силы по относительному расстоянию пары взаимодействующих частиц получаем поле силы взаимодействия фермионов с различными проекциями спина. При этом сохраняем слагаемые, возникающие в третьем порядке по радиусу взаимодействия

$$\begin{aligned}
F_{TOIR}^{\alpha} = & -\Upsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} N_1 N_2 \int dR_{N-1} \left[-\frac{1}{3!} \frac{1}{2^3} \partial_{\beta} \partial_{\gamma} \partial_{\delta} \delta_i \cdot \psi_1^*(R_{ij}) \psi_2^*(R_{ij}) \psi_1(R_{ij}) \psi_2(R_{ij}) \right. \\
& + \frac{1}{2!} \frac{1}{2^3} \partial_{\beta} \partial_{\gamma} \delta_i \cdot \left[\psi_1^*(R_{ij}) \psi_2^*(R_{ij}) (\partial_{\delta}^{(1)} - \partial_{\delta}^{(2)}) \psi_1(R_{ij}) \psi_2(R_{ij}) + c.c. \right] \\
& - \frac{1}{2} \frac{1}{2^3} \partial_{\beta} \delta_i \cdot \left[\psi_1^*(R_{ij}) \psi_2^*(R_{ij}) (\partial_{\gamma}^{(1)} \partial_{\delta}^{(1)} - 2\partial_{\gamma}^{(1)} \partial_{\delta}^{(2)} + \partial_{\gamma}^{(2)} \partial_{\delta}^{(2)}) \psi_1(R_{ij}) \psi_2(R_{ij}) \right. \\
& + (\partial_{\gamma}^{(1)} \partial_{\delta}^{(1)} - 2\partial_{\gamma}^{(1)} \partial_{\delta}^{(2)} + \partial_{\gamma}^{(2)} \partial_{\delta}^{(2)}) \psi_1^*(R_{ij}) \psi_2^*(R_{ij}) \cdot \psi_1(R_{ij}) \psi_2(R_{ij}) \\
& \left. + (\partial_{\gamma}^{(1)} - \partial_{\gamma}^{(2)}) \psi_1^*(R_{ij}) \psi_2^*(R_{ij}) \cdot (\partial_{\delta}^{(1)} - \partial_{\delta}^{(2)}) \psi_1(R_{ij}) \psi_2(R_{ij}) \right] \\
& + \frac{1}{3!} \frac{1}{2^3} \delta_i \left[\psi_1^*(R_{ij}) \psi_2^*(R_{ij}) \cdot (\partial_{\beta}^{(1)} \partial_{\gamma}^{(1)} \partial_{\delta}^{(1)} - 3\partial_{\beta}^{(1)} \partial_{\gamma}^{(1)} \partial_{\delta}^{(2)} + 3\partial_{\beta}^{(1)} \partial_{\gamma}^{(2)} \partial_{\delta}^{(2)} - \partial_{\beta}^{(2)} \partial_{\gamma}^{(2)} \partial_{\delta}^{(2)}) \psi_1(R_{ij}) \psi_2(R_{ij}) \right. \\
& \left. + (\partial_{\beta}^{(1)} - \partial_{\beta}^{(2)}) \psi_1^*(R_{ij}) \psi_2^*(R_{ij}) \cdot (\partial_{\gamma}^{(1)} \partial_{\delta}^{(1)} - 2\partial_{\gamma}^{(1)} \partial_{\delta}^{(2)} + \partial_{\gamma}^{(2)} \partial_{\delta}^{(2)}) \psi_1(R_{ij}) \psi_2(R_{ij}) + c.c. \right], \quad (2.1.50)
\end{aligned}$$

где $\psi_l = \psi_l(R_{ij})$, $l=1,2$. Комбинируя слагаемые можно получить простое выражение для поля силы в терминах производных концентрации

$$F_{TOIR}^{\alpha} = \frac{1}{3!} \Upsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} n_{(1)} \partial_{\beta} \partial_{\gamma} \partial_{\delta} n_{(2)}. \quad (2.1.51)$$

Выводы.

В этом разделе развита квантовогидродинамическая модель вырожденных нейтральных квантовых газов (фермионов). При рассмотрении фермионов предполагалось, что они описываются как один сорт частиц в не зависимости от их спина. Таким образом, пренебрегалось спинорными свойствами фермионов, которые будут рассмотрены в следующем разделе.

Гидродинамическая модель выведена из микроскопического уравнения Шредингера. Полученная в этом разделе гидродинамическая модель ограничивается уравнением непрерывности и уравнения Эйлера для каждого сорта частиц.

Разработана методика анализа короткодействующего взаимодействия, где малый радиус действия сил выступает ключевым и малым параметром. Формальное разложение дает набор слагаемых, начиная с нулевого порядка по малому параметру. Однако четные члены разложения (включая нулевой порядок) оказываются равными нулю во всех моделях.

При рассмотрении ненулевых нечетных членов подробно изучены первый и третий члены, т.е. первый и третий порядки по радиусу взаимодействия.

При рассмотрении фермионов рассматривался потенциал взаимодействия между всеми частицами вне зависимости от проекции спина. Однако, взаимодействие между фермионами с одинаковыми и разными проекциями спина рассмотрено различным образом. Взаимодействие между фермионами рассмотрено для случая изотропного парного взаимодействия. Взаимодействие рассмотрено с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия.

Первый порядок по радиусу взаимодействия дает нулевое значение плотности силы при взаимодействии фермионов с одинаковой проекцией спина. Однако, при учете третьего порядка по радиусу взаимодействия возникает потенциальная плотность силы пропорциональная соответствующей константе взаимодействия.

Константа взаимодействия, в первом порядке по радиусу взаимодействия, совпадающая, с константой взаимодействия в уравнении Гросса-Питаевского, является нулевым моментом потенциала взаимодействия. А вторая константа взаимодействия, возникающая в третьем порядке по радиусу взаимодействия, является вторым моментом потенциала взаимодействия.

Далее, при рассмотрении взаимодействия фермионов с различными проекциями спина существуют нетривиальные выражения для плотности силы в первом и третьем порядках по радиусу взаимодействия. Причем, в третьем порядке по радиусу взаимодействия плотность силы является нелокальной силой и содержит пространственные производные выше первого порядка.

Для большинства рассмотренных случаев получены нелинейные уравнения Шредингера. Как и пара уравнений гидродинамики, уравнение непрерывности и уравнение Эйлера, нелинейное уравнение Шредингера возникает для каждого сорта частиц.

2.2 Тензор квантовых напряжений для конденсата Бозе-Эйнштейна с анизотропным взаимодействием.

Тензор квантовых напряжений в первом порядке по радиусу взаимодействия для конденсата Бозе-Эйнштейна с анизотропным взаимодействием.

В качестве первого шага в изучении вклада анизотропии короткодействующего взаимодействия в свойства квантовых газов рассмотрим тензор квантовых напряжений в первом порядке по радиусу взаимодействия для конденсата Бозе-Эйнштейна [8]. Важно заранее отметить, что изучаемый вклад оказывается равным нулю. Однако, не тривиальный результат будет получен в третьем порядке по радиусу взаимодействия, т.ч. следует рассмотреть метод анализа на простом примере и убедиться в тривиальном результате возникающем в первом порядке по радиусу взаимодействия.

В подынтегральном выражении в формуле (2.1.26) координаты относительного движения можно выделить явно. При этом координата центра масс пары частиц сплетается с координатами других частиц через аргументы волновой функции. В итоге, тензор квантовых напряжений может быть записан через след двухчастичной концентрации умноженной на интеграл от потенциала взаимодействия:

$$\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2} \text{Tr}(n_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)) \int d\mathbf{r} r^\beta \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial r^\alpha}, \quad (2.2.1)$$

где учтено, что мы рассматриваем четные аксиально-симметричные потенциалы $U(\mathbf{r}) \rightarrow U(r, \theta)$, и $\text{Tr}f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = f(\mathbf{r}, \mathbf{r})$ это след функции двух аргументов.

Далее, для аксиально-симметричного потенциала формула (2.2.1) преобразуется к следующему виду

$$\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2} \text{Tr}(n_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)) \int d\mathbf{r} r^\beta \left(\frac{r^\alpha}{r} \frac{\partial U(r, \theta)}{\partial r} + \frac{e_\theta^\alpha}{r} \frac{\partial U(r, \theta)}{\partial \theta} \right), \quad (2.2.2)$$

где $\mathbf{r} = r \{ \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta \}$ и $\mathbf{e}_\theta = \{ \cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta \}$.

Ограничиваясь сферически-симметричными потенциалами, получим следующее упрощенное выражение, рассмотренное в работах [37], [41]

$$\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2} \text{Tr}(n_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)) \int d\mathbf{r} \frac{r^\alpha r^\beta}{r} \frac{\partial U(r)}{\partial r}. \quad (2.2.3)$$

Второе слагаемое в формуле (2.2.2) не является симметричным тензором $e_{\theta}^{\alpha} e_r^{\beta}$. Его можно представить как сумму симметричного и антисимметричного тензоров $0.5(e_{\theta}^{\alpha} e_r^{\beta} + e_{\theta}^{\beta} e_r^{\alpha}) + 0.5(e_{\theta}^{\alpha} e_r^{\beta} - e_{\theta}^{\beta} e_r^{\alpha})$. Таким образом, в силу анизотропии короткодействующего взаимодействия тензор квантовых напряжений теряет свойство симметричности. Однако, как будет показано ниже, для аксиально-симметричных потенциалов, это выражение, после интегрирования, становится симметричным и даже диагональным.

Тензорная структура тензора квантовых напряжений в первом порядке по радиусу взаимодействия.

Начнем исследование тензора квантовых напряжений в первом порядке по радиусу взаимодействия с изучения его тензорной структуры представленной последним множителем в формуле (2.2.3).

Рассмотрим первое слагаемое в формуле (2.2.2) пропорциональное следующему тензору:

$$\Upsilon^{\alpha\beta} = \int d\mathbf{r} \frac{r^{\alpha} r^{\beta}}{r} \frac{\partial U(r, \theta)}{\partial r}. \quad (2.2.4)$$

Вычисление этого интеграла возможно, только если известен реальный потенциал взаимодействия пар частиц, который чаще всего не известен. Однако информацию можно извлечь, зная степень анизотропии потенциала взаимодействия. Рассматривая щелочные атомы, внешний электрон у которых находится в s -состоянии, волновая функция которых сферически симметрична, можно описать взаимодействие посредством сферически симметричного потенциала взаимодействия $U(\mathbf{r}) = U(r)$:

$$\Upsilon^{\alpha\beta} = \int d\mathbf{r} \frac{r^{\alpha} r^{\beta}}{r} \frac{\partial U(r)}{\partial r}. \quad (2.2.5)$$

Тогда, тензорная структура определяется произведением радиус векторов $r^{\alpha} r^{\beta}$. Интегрирование показывает, что тензор $\Upsilon^{\alpha\beta}$ пропорционален символу Кронекера $\Upsilon^{\alpha\beta} = \Upsilon \cdot \delta^{\alpha\beta}$, где

$$\Upsilon = \frac{4\pi}{3} \int \frac{\partial U(r)}{\partial r} r^3 dr. \quad (2.2.6)$$

Интегрируя по частям выражение, полученное для Υ , и учитывая короткодействие рассматриваемого взаимодействия, получим

$$\Upsilon = \frac{4\pi}{3} \int dr(r)^3 \frac{\partial U(r)}{\partial r} = - \int d\mathbf{r} U(r), \quad (2.2.7)$$

т.е. $\Upsilon = -g$, где g это известная из теории конденсата Бозе-Эйнштейна константа короткодействующего взаимодействия.

Если потенциал взаимодействия не является сферически симметричным, то потенциал можно представить в виде ряда по сферическим функциям

$$U(r, \theta) = \sqrt{4\pi} \sum_{l=2n, n=0}^{\infty} U_l(r) Y_{l0}(\theta), \quad (2.2.8)$$

данное разложение представляет собой частный случай, возникающий для четного аксиально-симметричного потенциала.

Перепишем тензор квантовых напряжений (2.2.2) используя разложение (2.2.8):

$$\begin{aligned} \sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = & -\frac{1}{2} Tr(n_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)) \times \\ & \times \sqrt{4\pi} \sum_{l=2n, n=0}^{\infty} \int d\mathbf{r} \left(Y_{l0}(\theta) \frac{r^\alpha r^\beta}{r} \frac{\partial U_l(r)}{\partial r} + U_l(r) \frac{e_\theta^\alpha r^\beta}{r} \frac{\partial Y_{l0}(\theta)}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Далее, вернемся к рассмотрению тензора $\Upsilon^{\alpha\beta}$ и учтем, что

$$r^\alpha r^\beta = r^2. \quad (2.2.10)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{4\pi}}{3} Y_{00} - \sqrt{\frac{8\pi}{15}} \left[\frac{Y_{20}}{\sqrt{6}} - (Y_{22} + Y_{2,-2}) \right] & -i\sqrt{\frac{8\pi}{15}} (Y_{22} - Y_{2,-2}) & \sqrt{\frac{8\pi}{15}} (Y_{21} - Y_{2,-1}) \\ -i\sqrt{\frac{8\pi}{15}} (Y_{22} - Y_{2,-2}) & \frac{\sqrt{4\pi}}{3} Y_{00} - \sqrt{\frac{8\pi}{15}} \left[\frac{Y_{20}}{\sqrt{6}} + (Y_{22} + Y_{2,-2}) \right] & -i\sqrt{\frac{8\pi}{15}} (Y_{21} + Y_{2,-1}) \\ \sqrt{\frac{8\pi}{15}} (Y_{21} - Y_{2,-1}) & -i\sqrt{\frac{8\pi}{15}} (Y_{21} + Y_{2,-1}) & \frac{\sqrt{4\pi}}{3} \left(Y_{00} + \frac{2}{\sqrt{5}} Y_{20} \right) \end{pmatrix}.$$

Отсюда, в силу ортогональности сферических функций, видно, что в первом порядке по радиусу взаимодействия только анизотропия потенциала взаимодействия пропорциональная сферическим функциям второго порядка $U_2(r)$, наряду с изотропной частью описываемой сферической функцией нулевого порядка $U_0(r)$, рассмотренной выше, дает ненулевой вклад.

Представим аксиально-симметричную часть разложения произведения радиус векторов

$$\left(r^\alpha r^\beta \right)_{as} = r^2 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{4\pi}}{3} Y_{00} - \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \frac{Y_{20}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{4\pi}}{3} Y_{00} - \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \frac{Y_{20}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{4\pi}}{3} Y_{00} + \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \frac{2}{3} Y_{20} \end{pmatrix}. \quad (2.2.11)$$

Таким образом, анизотропия, рассмотренная в аксиально-симметричном пределе, меняет тензорную структуру тензора квантовых напряжений, и вводит вторую константу взаимодействия

$$\begin{aligned} \Upsilon^{\alpha\beta} &= \frac{4\pi}{3} \int \cos\theta d\varphi d\theta dr(r)^3 \left(Y_{00} \delta^{\alpha\beta} + \sqrt{\frac{1}{5}} Y_{20} I^{\alpha\beta} \right) \left(\frac{\partial U_0(r)}{\partial r} Y_{00} + \frac{\partial U_2(r)}{\partial r} Y_{20} \right) \\ &= \frac{4\pi}{3} \delta^{\alpha\beta} \int dr(r)^3 \frac{\partial U_0(r)}{\partial r} + \frac{4\pi}{3\sqrt{5}} I^{\alpha\beta} \int dr(r)^3 \frac{\partial U_2(r)}{\partial r}, \\ &= -\delta^{\alpha\beta} \int d\mathbf{r} U_0(r) - \sqrt{\frac{1}{5}} I^{\alpha\beta} \int d\mathbf{r} U_2(r), \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

где использована диагональная матрица с нулевым следом

$$I^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (2.2.13)$$

Константа g , введенная выше, может быть переобозначена как нулевой момент изотропной части потенциала взаимодействия $g_0 = \int d\mathbf{r} U_0(r)$, а вторая константа короткодействующего взаимодействия в первом порядке по радиусу взаимодействия может быть обозначена как $g_2 = \int d\mathbf{r} U_2(r)$. В результате получим структуру тензора

$$\Upsilon^{\alpha\beta} = -\delta^{\alpha\beta} g_0 - \sqrt{\frac{1}{5}} I^{\alpha\beta} g_2. \quad (2.2.14)$$

Перейдем к рассмотрению слагаемого в формуле (2.2.2) пропорциональному тензору

$$\Gamma^{\alpha\beta} = \int d\mathbf{r} e_\theta^\alpha e_r^\beta \frac{\partial U(r, \theta)}{\partial \theta}. \quad (2.2.15)$$

При вычислении тензора $\Gamma^{\alpha\beta}$ учтем, что

$$e_{\theta}^{\alpha} e_r^{\beta} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \theta \cos^2 \varphi & \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi & \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi & \cos^2 \theta \sin \varphi \\ -\sin^2 \theta \cos \varphi & -\sin^2 \theta \sin \varphi & -\sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.2.16)$$

Для аксиально-симметричного потенциала дают вклад только представленные ниже элементы матрицы:

$$(e_{\theta}^{\alpha} e_r^{\beta})_{as} = -\frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \cdot I^{\alpha\beta}. \quad (2.2.17)$$

Тензор $\Gamma^{\alpha\beta}$ содержит производные сферических функций четного порядка $Y_{2n,0}$. Формула (2.2.17) показывает, что нет необходимости рассматривать полное разложение потенциала взаимодействия в ряд (2.1.34), а достаточно ограничиться только сферическими функциями нулевого и второго порядка. Так как функция Y_{00} является константой, то она не дает вклада в тензор $\Gamma^{\alpha\beta}$. Таким образом, находим тензор $\Gamma^{\alpha\beta}$ в следующем виде

$$\Gamma^{\alpha\beta} = -\sqrt{4\pi} \int d\mathbf{r} e_{\theta}^{\alpha} e_r^{\beta} U_2(r) \sin \theta Y'_{20} = \sqrt{\pi} I^{\alpha\beta} \int U_2(r) \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos \theta Y'_{20} d\mathbf{r}, \quad (2.2.18)$$

где штрих Y' означает производную по $\cos \theta$, а также учтено, что $\frac{\partial Y_{10}}{\partial \theta} = -\sin \theta Y'_{10}$ и

$\frac{\partial}{\partial \theta} Y_{00}(\theta) = 0$ и то, что сферические функции более высокого порядка не дают

вклада в тензор $\Gamma^{\alpha\beta}$. В рассматриваемом выражении $\sin^2 \theta$ и $\cos \theta Y'_{20}$ это линейные комбинации сферических функций нулевого и второго порядка:

$\sin^2 \theta = \frac{2}{3} \sqrt{4\pi} \left(Y_{00} - \frac{1}{\sqrt{5}} Y_{20} \right)$ и $\cos \theta Y'_{20} = \sqrt{5} Y_{00} + 2Y_{20}$. Используя ортонормированность

сферических функций, получаем следующий результат для тензора $\Gamma^{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\alpha\beta} &= \frac{4\pi}{\sqrt{5}} I^{\alpha\beta} \int dr r^2 U_2(r) \\ &= I^{\alpha\beta} \frac{1}{\sqrt{5}} \int U_2(r) d\mathbf{r} = \frac{I^{\alpha\beta}}{\sqrt{5}} g_2. \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

Это аналогично второму слагаемому в тензоре $\Upsilon^{\alpha\beta}$.

Комбинируя слагаемые пропорциональные $U_2(r)$, получим, что вклад пропорциональные g_2 сокращают друг друга в конечном выражении для тензора квантовых напряжений

$$\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \delta^{\alpha\beta} g_0 \cdot \text{Tr}(n_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)). \quad (2.2.20)$$

Полученный результат совпадает с результатами для изотропной модели. Таким образом, анизотропия не проявляется в первом порядке по радиусу взаимодействия. Следовательно, для бозонов находящихся в состоянии конденсата Бозе-Эйнштейна получаем, что данный результат соответствует приближению Гросса-Питаевского.

Двухчастичная концентрация бозонов находящихся в состоянии конденсата Бозе-Эйнштейна была вычислена в работе [41], где получено, что $\text{Tr}(n_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t))|_{BEC} = n^2(\mathbf{r}, t)$. Таким образом, при учете аксиальной анизотропии, тензор квантовых напряжений конденсата Бозе-Эйнштейна в первом порядке по радиусу взаимодействия не меняется и имеет следующий вид:

$$\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \delta^{\alpha\beta} g_0 \cdot n^2(\mathbf{r}, t). \quad (2.2.21)$$

Тензор квантовых напряжений конденсата Бозе-Эйнштейна при наличии анизотропии короткодействующего взаимодействия с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия.

Рассмотрим общий вид тензора квантовых напряжений с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия, с учетом анизотропии. При этом учтём второй порядок по радиусу взаимодействия. Это выражение справедливо как для бозонов, так и для фермионов имеет следующий громоздкий явный вид [41]

$$\begin{aligned} \sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = & -\frac{1}{2} \int dR \sum_{i,j,i \neq j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{ij}) r_{ij}^\beta \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial r_{ij}^\alpha} \psi^* \psi \\ & - \frac{1}{48} \partial_\gamma \partial_\delta \int dR \sum_{i,j,i \neq j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{ij}) r_{ij}^\beta r_{ij}^\gamma r_{ij}^\delta \frac{\partial U(\mathbf{r}_{ij})}{\partial r_{ij}^\alpha} \psi^* \psi - \frac{1}{8} \int dR \sum_{i,j,i \neq j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{ij}) r_{ij}^\beta r_{ij}^\gamma r_{ij}^\delta \frac{\partial U(\mathbf{r}_{ij})}{\partial r_{ij}^\alpha} \times \\ & \times \left[\frac{1}{2} \psi^* \partial_{\gamma_1} \partial_{\delta_1} \psi + \frac{1}{2} \psi^* \partial_{\gamma_2} \partial_{\delta_2} \psi - (\partial_{\gamma_1} \psi^*) \partial_{\delta_2} \psi - (\partial_{\gamma_2} \psi^*) \partial_{\delta_1} \psi + (\partial_{\gamma_1} \psi^*) \partial_{\delta_1} \psi + (\partial_{\gamma_2} \psi^*) \partial_{\delta_2} \psi \right. \\ & \left. - \psi^* \partial_{\gamma_1} \partial_{\delta_2} \psi + \frac{1}{2} (\partial_{\gamma_1} \partial_{\delta_1} \psi^*) \psi + \frac{1}{2} (\partial_{\gamma_2} \partial_{\delta_2} \psi^*) \psi - (\partial_{\gamma_1} \partial_{\delta_2} \psi^*) \psi \right], \quad (2.2.22) \end{aligned}$$

где опущен аргумент волновой функции, который такой же, как и в формуле (2.1.38). Формула (2.2.22) является обобщением формулы (2.1.38). Отметим, что слагаемые, возникающие во втором порядке по радиусу взаимодействия,

обращаются в ноль для рассматриваемой структуры анизотропии потенциала взаимодействия.

При дальнейшем вычислении тензора квантовых напряжений для аксиально-симметричных потенциалов получаем следующую формулу

$$\begin{aligned}
\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = & -\frac{1}{2} \int dR \sum_{i,j,i \neq j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{ij}) r_{ij}^\beta \left(\frac{r_{ij}^\alpha}{r_{ij}} \frac{\partial U(r_{ij}, \theta_{ij})}{\partial r_{ij}} + \frac{e_\theta^\alpha}{r_{ij}} \frac{\partial U(r_{ij}, \theta_{ij})}{\partial \theta_{ij}} \right) \psi^* \psi \\
& - \frac{1}{48} \partial_\gamma \partial_\delta \int dR \sum_{i,j,i \neq j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{ij}) r_{ij}^\beta r_{ij}^\gamma r_{ij}^\delta \left(\frac{r_{ij}^\alpha}{r_{ij}} \frac{\partial U(r_{ij}, \theta_{ij})}{\partial r_{ij}} + \frac{e_\theta^\alpha}{r_{ij}} \frac{\partial U(r_{ij}, \theta_{ij})}{\partial \theta_{ij}} \right) \psi^* \psi \\
& - \frac{1}{8} \int dR \sum_{i,j,i \neq j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{ij}) r_{ij}^\beta r_{ij}^\gamma r_{ij}^\delta \left(\frac{r_{ij}^\alpha}{r_{ij}} \frac{\partial U(r_{ij}, \theta_{ij})}{\partial r_{ij}} + \frac{e_\theta^\alpha}{r_{ij}} \frac{\partial U(r_{ij}, \theta_{ij})}{\partial \theta_{ij}} \right) \left(\frac{1}{2} \psi^* \partial_{\gamma 1} \partial_{\delta 1} \psi \right. \\
& + (\partial_{\gamma 1} \psi^*) \partial_{\delta 1} \psi + (\partial_{\gamma 2} \psi^*) \partial_{\delta 2} \psi - (\partial_{\gamma 1} \psi^*) \partial_{\delta 2} \psi - (\partial_{\gamma 2} \psi^*) \partial_{\delta 1} \psi + \frac{1}{2} \psi^* \partial_{\gamma 2} \partial_{\delta 2} \psi - \psi^* \partial_{\gamma 1} \partial_{\delta 2} \psi \\
& \left. + \frac{1}{2} (\partial_{\gamma 1} \partial_{\delta 1} \psi^*) \psi + \frac{1}{2} (\partial_{\gamma 2} \partial_{\delta 2} \psi^*) \psi - (\partial_{\gamma 1} \partial_{\delta 2} \psi^*) \psi \right). \tag{2.2.23}
\end{aligned}$$

Формула (2.2.23) содержащая слагаемые вплоть до третьего порядка по радиусу взаимодействия позволяет отделить интеграл по относительному движению рассматриваемой пары частиц \mathbf{r}_{ij} , как это было сделано выше в первом порядке по радиусу взаимодействия. Поэтому можно отдельно исследовать тензорную структуру тензора квантовых напряжений $\sigma^{\alpha\beta}$.

А именно, для слабовзаимодействующих бозонов с изотропным потенциалом взаимодействия, формулу (2.2.23) можно переписать в терминах гидродинамических функций [37], [41]

$$\begin{aligned}
\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = & -\frac{1}{2} \Upsilon \delta^{\alpha\beta} \left(2n^2 + \sum_f n_f (n_f - 1) |\varphi_f|^4 \right) - \frac{1}{48} \Upsilon_2 (\delta^{\alpha\beta} \Delta + 2\partial^\alpha \partial^\beta) \left(2n^2 + \sum_f n_f (n_f - 1) |\varphi_f|^4 \right) \\
& + \frac{1}{\hbar^2} \Upsilon_2 (mn (\delta^{\alpha\beta} \Pi^{\gamma\gamma} + 2\Pi^{\alpha\beta}) - \delta^{\alpha\beta} j^2 - 2j^\alpha j^\beta) - \frac{1}{2} \Upsilon_2 n \text{Tr} \left((\delta^{\alpha\beta} \partial_\gamma \partial'_\gamma + \partial_\alpha \partial'_\beta) \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \right) \\
& - \frac{1}{8} \Upsilon_2 (\delta^{\alpha\beta} \delta^{\gamma\delta} + \delta^{\alpha\gamma} \delta^{\beta\delta} + \delta^{\alpha\delta} \delta^{\beta\gamma}) \left(\sum_f n_f (n_f - 1) (\varphi_f^* \varphi_f^* (\varphi_f \partial_\gamma \partial_\delta \varphi_f - \partial_\gamma \varphi_f \partial_\delta \varphi_f) + c.c.) \right), \tag{2.2.24}
\end{aligned}$$

где, однако, для компактности, нет явного выделения вклада функций описывающих бозоны в состоянии конденсата Бозе-Эйнштейна и бозоны, находящиеся в возбужденных состояниях. Более детальная формула представлена в [41]. Формулы первого порядка по радиусу взаимодействия подробно

рассмотрены в [37]. Отметим, что первые два слагаемые в (2.2.24) содержат квадрат концентрации n^2 , который возникает из слагаемых описывающих динамику частиц находящихся в различных квантовых состояниях. Следовательно, явно это слагаемое можно записать следующим образом $n^2 = (n_B + n_n)^2 \rightarrow 2n_B n_n + 2\tilde{n}_n^2$, где n_n концентрация частиц находящихся в возбужденных состояниях, n_B концентрация частиц находящихся в состоянии конденсата Бозе-Эйнштейна, \tilde{n}_n^2 содержит символ тильда, так как в этом слагаемом отсутствует вклад пар частиц находящихся в одном и том же квантовом состоянии. Однако именно эти частицы входят в $\sum_f n_f (n_f - 1) |\varphi_f|^4 = n_{f_0} (n_{f_0} - 1) |\varphi_{f_0}|^4 + \sum_{f \neq f_0} n_f (n_f - 1) |\varphi_f|^4$, где первое слагаемое частицы в состоянии конденсата Бозе-Эйнштейна, а последнее слагаемое относится к частицам находящимся в возбужденном состоянии. Каждое из описанных слагаемых возникает при вычислении двухчастичной концентрации бозонов. Третье и четвертое слагаемые в (2.2.24) по своей структуре аналогичны структуре n^2 описанной выше. В изотропном режиме вклад второго порядка по радиусу взаимодействия очевидно равен нулю.

Если ограничиться только частицами, находящимися в состоянии конденсата Бозе-Эйнштейна, то надо использовать часть формулы (2.2.24) относящейся к взаимодействию частиц находящихся в одном квантовом состоянии. Это слагаемое явно содержит сумму по параметру f . Причем, в данном случае, параметр f принимает только одно значение f_0 , соответствующее квантовому состоянию с минимальным значением энергии

$$\begin{aligned} \sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = & -\frac{1}{2} \Upsilon \delta^{\alpha\beta} n_{f_0} (n_{f_0} - 1) |\varphi_{f_0}|^4 - \frac{1}{48} \Upsilon_2 (\delta^{\alpha\beta} \Delta + 2\partial^\alpha \partial^\beta) n_{f_0} (n_{f_0} - 1) |\varphi_{f_0}|^4 \\ & - \frac{1}{8} \Upsilon_2 (\delta^{\alpha\beta} \delta^{\gamma\delta} + \delta^{\alpha\gamma} \delta^{\beta\delta} + \delta^{\alpha\delta} \delta^{\beta\gamma}) \left(n_{f_0} (n_{f_0} - 1) \left(\varphi_{f_0}^* \varphi_{f_0}^* (\varphi_{f_0} \partial_\gamma \partial_\delta \varphi_{f_0} - \partial_\gamma \varphi_{f_0} \partial_\delta \varphi_{f_0}) + c.c. \right) \right). \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

Предполагается, что минимальное значение энергии соответствует режиму, в котором отсутствуют потоки частиц. В итоге получим упрощение формулы (2.2.25). Эта ормула является промежуточным выражением для тензора квантовых напряжений, так как нет явной связи с гидродинамическими функциями. Последнее слагаемое в формуле содержит два вклада. Первое из них пропорционально произведению концентрации и давления, тогда как давлению

равно нулю в данном случае. Второе из них пропорционально произведению поля скоростей. Поэтому, это слагаемое также равно нулю. В итоге формула (2.2.25) упрощается и принимает следующий вид

$$\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2} \Upsilon \delta^{\alpha\beta} n_{f_0} (n_{f_0} - 1) |\varphi_{f_0}|^4 - \frac{1}{48} \Upsilon_2 (\delta^{\alpha\beta} \Delta + 2\partial^\alpha \partial^\beta) n_{f_0} (n_{f_0} - 1) |\varphi_{f_0}|^4. \quad (2.2.26)$$

Результат (2.2.26) показывают, что нетривиальная часть квантового тензора напряжений для конденсата Бозе-Эйнштейна связана с слагаемыми пропорциональными следу двухчастичной концентрации.

Запишем соответствующее упрощение формулы (2.2.23) для её применения в вычислении тензорной структуры $\sigma^{\alpha\beta}$:

$$\sigma^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \Upsilon \delta^{\alpha\beta} Tr n_2 - \frac{1}{48} \Upsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\gamma \partial_\delta Tr n_2. \quad (2.2.27)$$

Тензорная структура тензора квантовых напряжений в третьем порядке по радиусу взаимодействия.

Исследуем тензорную структуру части тензора квантовых напряжений возникающей в третьем порядке по радиусу взаимодействия. Она определяется двумя тензорами $t_r^{\alpha\beta\gamma\delta} = e_r^\alpha e_r^\beta e_r^\gamma e_r^\delta$ и $t_\theta^{\alpha\beta\gamma\delta} = e_\theta^\alpha e_r^\beta e_r^\gamma e_r^\delta$, которые входят в формулу (2.2.23). Тензор $t_r^{\alpha\beta\gamma\delta} = e_r^\alpha e_r^\beta e_r^\gamma e_r^\delta$ полностью симметричен по всем индексам. Тогда как тензор $t_\theta^{\alpha\beta\gamma\delta} = e_\theta^\alpha e_r^\beta e_r^\gamma e_r^\delta$ симметричен только по трем индексам, что отражает анизотропию рассматриваемой системы. Принцип вычислений аналогичен тому, что показано выше в первом порядке по радиусу взаимодействия

Далее, получаем, что выражение для тензора квантовых напряжений для БЭК, возникающее в третьем порядке по радиусу взаимодействия, пропорционально второй производной от следа двухчастичной концентрации:

$$\Delta_3 \sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{48} \partial_\gamma \partial_\delta Tr(n_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)) \cdot \int r^\beta r^\gamma r^\delta \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial r^\alpha} d\mathbf{r}. \quad (2.2.28)$$

Отличие от изотропного случая проявляется в структуре интеграла дающего константы взаимодействия. В него входят упомянутые выше структуры в виде тензоров $t_r^{\alpha\beta\gamma\delta} = e_r^\alpha e_r^\beta e_r^\gamma e_r^\delta$ и $t_\theta^{\alpha\beta\gamma\delta} = e_\theta^\alpha e_r^\beta e_r^\gamma e_r^\delta$. Представим результат вычисления констант взаимодействия

$$\int r^\beta r^\gamma r^\delta \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial r^\alpha} d\mathbf{r} = -\frac{1}{3} \tilde{g}_{2,0} I_0^{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{\sqrt{5}} \tilde{g}_{2,2} I_2^{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (2.2.29)$$

где тензор $I_0^{\alpha\beta\gamma\delta} = \delta^{\alpha\beta}\delta^{\gamma\delta} + \delta^{\alpha\gamma}\delta^{\beta\delta} + \delta^{\alpha\delta}\delta^{\beta\gamma}$ представляет собой симметричную часть тензора (2.2.29), а тензор $I_2^{\alpha\beta\gamma\delta}$ даёт несимметричную часть, которая задана отдельными компонентами входящего в определение тензора $I_{2,l}^{\alpha\beta\gamma\delta}$, не симметричен относительно:

$$I_2^{xxxx} = I_2^{yyyy} = 1, \quad I_2^{zzzz} = -2, \quad I_{2,0}^{xxxx} = I_{2,0}^{yyyy} = -2/3,$$

$$I_2^{xyxy} = I_2^{yxyx} = I_2^{zxxz} = I_2^{zzyy} = 1/3.$$

Кроме того, использованы следующие обозначения для констант взаимодействия: $g_{2,l} = \int r^2 U_l(r) d\mathbf{r} / 24$, $g_{2,l} = \tilde{g}_{2,l} / 24$.

Представим уравнение Эйлера в рассмотренном приближении [8]

$$m\mathbf{n}(\partial_t + \mathbf{v}\nabla)v^\alpha + n\partial^\alpha V_{\text{ext}} - \frac{\hbar^2}{2m}n\partial^\alpha \frac{\Delta\sqrt{n}}{\sqrt{n}} + gn\partial^\alpha n + \frac{g_{2,0}}{2}\partial^\alpha \Delta n^2 - \frac{g_{2,2}}{2\sqrt{5}}I_2^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\beta\partial_\gamma\partial_\delta n^2 = 0. \quad (2.2.30)$$

Трёхчастичное взаимодействие частиц в квантовых газах

Слагаемые, возникающие в третьем порядке по радиусу взаимодействия, как в изотропном случае, так и в случае анизотропного потенциала взаимодействия, дают обобщения приближения Гросса-Питаевского. Однако, это один из путей обобщения этой модели. Предложенное обобщение основано на рассмотрении потенциала парного взаимодействия бозонов. Даже одновременное сближение трех бозонов приведет к взаимодействию через парный потенциал. Однако, если частицы обладают структурой и сила взаимодействия достаточна для изменения внутренней структуры, то присутствие третьей частицы изменит характер взаимодействие пары частиц. Такое влияние можно моделировать посредством трёхчастичного потенциала взаимодействия, который не сводится к суперпозиции парных потенциалов [37]. Такое взаимодействие может быть учтено в микроскопическом многочастичном гамильтониане. Рассматривая систему бозонов с трёхчастичным взаимодействием, методом квантовой гидродинамики получаем систему уравнений непрерывности и Эйлера. Ограничиваясь пределом нулевой температуры и рассматривая взаимодействия в первом порядке по радиусу взаимодействия, получаем соответствующее уравнение Эйлера [37] (см. уравнение 52):

$$m\mathbf{n}(\partial_t + \mathbf{v}\nabla)v^\alpha + n\partial^\alpha V_{\text{ext}} - \frac{\hbar^2}{2m}n\partial^\alpha \frac{\Delta\sqrt{n}}{\sqrt{n}} + gn\partial^\alpha n + \chi n\partial^\alpha n^2 = 0. \quad (2.2.31)$$

Уравнение Эйлера (2.2.31) позволяет вывести соответствующее нелинейное уравнение Шредингера для макроскопической волновой функции. Это уравнение

имеет вид уравнения Шредингера с кубической нелинейностью и нелинейностью пятой степени [37] (см. уравнение 50):

$$i\hbar\partial_t\Phi = \left(-\frac{\hbar^2\Delta}{2m} + V_{ext} + g|\Phi|^2 - \chi|\Phi|^4 \right) \Phi. \quad (2.2.32)$$

Уравнения (2.2.31) и (2.2.32) содержат константу трёхчастичного взаимодействия χ , которая определена следующим образом

$$\chi = -\frac{1}{3} \int \left[(r_1\partial_{r_1} + |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|\partial_3) U(r_1, r_2, \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos\Omega}) \right] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \quad (2.2.33)$$

через потенциал трёхчастичного взаимодействия $U(r_1, r_2, \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos\Omega})$. В формуле (2.2.33) использованы следующие обозначения: Ω это угол между векторами \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , ∂_3 это производная по третьему аргументу у потенциала трёхчастичного взаимодействия. Изначально такое уравнение (2.2.32) было предложено в работах [182], [183].

Кроме того, трехчастичное короткодействующее взаимодействие в системах дипольных частиц использовалось для качественного моделирования образования квантовых капель [295], хотя модель, учитывающая квантовые флуктуации, показала более точное количественное согласие с экспериментом.

Выводы.

В этом разделе развита квантовогидродинамическая модель вырожденных нейтральных квантовых Бозе газов. Гидродинамическая модель выведена из микроскопического уравнения Шредингера. Полученная в этом разделе гидродинамическая модель ограничивается уравнением непрерывности и уравнения Эйлера для каждого сорта частиц.

Разработана методика анализа короткодействующего взаимодействия, где малый радиус действия сил выступает ключевым и малым параметром. Формальное разложение дает набор слагаемых, начиная с нулевого порядка по малому параметру. Однако нулевой и четные члены разложения оказываются равными нулю во всех моделях бозонов, включая бозоны с анизотропным взаимодействием. При рассмотрении ненулевых нечетных членов подробно изучены первый и третий члены, т.е. первый и третий порядки по радиусу взаимодействия.

Бозоны рассмотрены с учетом анизотропии парного взаимодействия. Показано, что в первом порядке по радиусу взаимодействия проявляется только изотропная часть взаимодействия. В третьем порядке по радиусу взаимодействия проявляется изотропная часть взаимодействия и дипольная часть разложения короткодействующего потенциала взаимодействия.

Нетривиальные выражения плотности силы взаимодействия бозонов существуют в первом и третьем порядках по радиусу взаимодействия. Первый порядок совпадает с моделью Гросса-Питаевского.

Наличие анизотропии потенциала взаимодействия приводит к существованию третьей константы взаимодействия. Она тоже является вторым моментом потенциала взаимодействия, а именно радиальной зависимости дипольной части потенциала взаимодействия.

В первом порядке по радиусу взаимодействия получены нелинейные уравнения Шредингера, которое совпадает с уравнением Гросса-Питаевского. Как и пара уравнений гидродинамики, уравнение непрерывности и уравнение Эйлера, нелинейное уравнение Шредингера возникает для каждого сорта частиц. Однако нелинейное уравнение Шредингера не возникает для бозонов при учете третьего порядка по радиусу взаимодействия. Это справедливо как при учете анизотропии потенциала взаимодействия, так и в изотропном случае.

2.3 Бозон-фермионные смеси и смеси нормальной вырожденной компонент квантовых газов одного сорта.

Бозон-фермионные смеси

При рассмотрении бозон-фермионных смесей рассмотрим следующий микроскопический гамильтониан:

$$\hat{H} = \sum_i \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} + V_{(ext)}(\mathbf{r}_i, t) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i_b, j_b} U_{i_b j_b}(\mathbf{r}_{i_b} - \mathbf{r}_{j_b}) + \frac{1}{2} \sum_{i_f, j_f} U_{i_f j_f}(\mathbf{r}_{i_f} - \mathbf{r}_{j_f}) + \sum_{i_b, j_f} U_{i_b j_f}(\mathbf{r}_{i_b} - \mathbf{r}_{j_f}), \quad (2.3.1)$$

который содержит три слагаемых описывающих взаимодействие, а именно взаимодействие частиц одного сорта, взаимодействие частиц второго сорта и взаимодействие между парами частиц принадлежащим разным сортам частиц.

Используя этот гамильтониан можно вывести систему уравнений квантовой гидродинамики для бозон-фермионных смесей. При этом рассмотрение бозонов и фермионов не измениться. Специфика проявятся при рассмотрении бозон-фермионного взаимодействия (детали этой модели можно найти в работе [6], [41]), т.е. при рассмотрении взаимодействия между частицами разного сорта.

Отметим, что структура плотности силы взаимодействия, частиц разного сорта, может быть вычислена по методике использованной выше для систем бозонов одного сорта и фермионов одного сорта. Здесь в качестве смеси рассмотрена бозон-фермионная смесь. Но этот результат может быть использован смесей другого вида, как например бозон-бозонные и фермион-фермионные смеси. Ещё раз отметим формулу (2.1.18) для плотности силы взаимодействия:

$$\mathbf{F} = - \int dR \sum_{i, j, i \neq j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) (\nabla_i U(\mathbf{r}_{ij})) \cdot \psi^*(R, t) \psi(R, t). \quad (2.3.2)$$

И отметим, что плотность силы не содержит симметрии при рассмотрении потенциала взаимодействия частиц разного сорта $U_{i_b j_f}$, а именно последнего слагаемого в формуле (2.3.1). Без повтора вычислений представим систему уравнений квантовой гидродинамики, полученную с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия

Уравнения непрерывности для каждого сорта частиц имеют традиционный вид. Представим уравнения Эйлера каждого сорта частиц:

$$m_f n_f (\partial_t + \mathbf{v}_f \cdot \nabla) \mathbf{v}_f^\alpha - \frac{\hbar^2}{2m_f} \partial^\alpha \left(\frac{\Delta \sqrt{n_f}}{\sqrt{n_f}} \right) + \partial_\beta (p_f^{\alpha\beta} + \sigma_{ff}^{\alpha\beta}) = F_{fb}^\alpha - n_f \nabla^\alpha V_{ext} \quad (2.3.3)$$

для фермионов и

$$m_b n_b (\partial_t + \mathbf{v}_b \cdot \nabla) \mathbf{v}_b^\alpha - \frac{\hbar^2}{2m_b} \partial^\alpha \left(\frac{\Delta \sqrt{n_b}}{\sqrt{n_b}} \right) + \partial_\beta \sigma_{bb}^{\alpha\beta} = F_{bf}^\alpha - n_b \nabla^\alpha V_{ext} \quad (2.3.4)$$

для бозонов. В уравнение Эйлера для системы спин-поляризованных фермионов

$$(2.3.3) \text{ входит давление Ферми } p_f^{\alpha\beta} = \frac{\hbar^2}{5m_f^2} (6\pi^2)^{\frac{2}{3}} n_f^{\frac{5}{3}} \delta^{\alpha\beta}.$$

Тензор квантовых напряжений системы спин-поляризованных фермионов со спином 1/2 входящий в уравнение эволюции фермионов имеет следующий вид:

$$\sigma_{ff}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g_{2ff} (6\pi^2)^{\frac{2}{3}} n_f^{\frac{8}{3}} \delta^{\alpha\beta}, \quad (2.3.5)$$

где использовано уравнение состояния для давления в виде давления Ферми в соответствии с формулой (2.1.21) и уравнением (59) в [6], и соответствующим упрощением уравнения (18) в [5].

Бозон-бозонное взаимодействие представлено тензором квантовых напряжений:

$$\sigma_{bb}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g_b n_b^2 \delta^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g_{2b} \partial^\alpha \partial^\beta n_b^2. \quad (2.3.6)$$

Оно представлено в соответствии с уравнением (17) в [5]. Формула (2.3.6) также соответствует уравнению (1) в [40], уравнению (46) в [41], и уравнению (4) в [38] однако в этих работах использованы другие обозначения для констант взаимодействия.

Взаимодействие разных сортов частиц представлено плотностью силы, которая не является дивергенцией тензора квантовых напряжений

$$F_{fb}^\alpha = -g_{bf} n_f \partial^\alpha n_b - \frac{1}{2} g_{2bf} n_f \partial^\alpha \Delta n_b, \quad (2.3.7)$$

и соответствует уравнениям (17) и (18) в [5], уравнению (54) в [41].

Пренебрегая бозон-бозонным взаимодействием в третьем порядке по радиусу взаимодействия можно получить НУШ для системы бозонов даже при учёте бозон фермионного взаимодействия с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия

$$i\hbar \partial_t \Phi_b = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_b} + V_{ext} + g_b n_b + g_{bf} n_f + \frac{1}{2} g_{2bf} \Delta n_f \right) \Phi_b. \quad (2.3.8)$$

Такой вывод является формальным, так как систематический анализ взаимодействия требует одновременного пренебрежения всеми слагаемыми, возникающими в третьем порядке по радиусу взаимодействия. Таким образом, как для систем бозонов, так и для смесей квантовых газов мы можем использовать уравнение Гросса-Питаевского только в первом порядке по радиусу взаимодействия.

Рассмотрим возможность использования НУШ в системах фермионов. Уравнения (2.3.3), (2.3.5) и (2.3.7) позволяют получить интеграл Коши-Лагранжа при условии потенциальности поля скоростей. Ограничиваясь первым порядком по радиусу взаимодействия, получаем НУШ для системы фермионов одного сорта

$$i\hbar\partial_t\Phi_f = \left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m_f} + V_{ext} + (6\pi^2)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m_f} n_f^{\frac{2}{3}} + g_{bf}n_b \right) \Phi_f. \quad (2.3.9)$$

Полученное нелинейное уравнение Шредингера можно сравнить с другими уравнениями, предложенными в литературе для рассмотрения ультра холодных фермионов с короткодействующим взаимодействием. Это сравнение представлено после формулы (57) в работе [41]. Отметим, что уравнение (2.3.9) получено прямым вычислением исходя из микроскопической динамики частиц, тогда как альтернативные уравнения, обсуждаемые в работе [41], имеют феноменологическое происхождение.

Плотность силы короткодействующего взаимодействия, между фермионами возникающая в третьем порядке по радиусу взаимодействия приводит к неинтегральной (локальной) форме интеграла Коши:

$$i\hbar\partial_t\Phi_f = \left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m_f} + V_{ext} + (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m_f} n_f^{\frac{2}{3}} + g_{bf}n_b + \frac{1}{2} g_{2bf}\Delta n_b + \frac{4}{5} (6\pi^2)^{\frac{2}{3}} g_{2ff}n_f^{\frac{5}{3}} \right) \Phi_f. \quad (2.3.10)$$

Последнее слагаемое в этом уравнении описывают взаимодействие между фермионами. Взаимодействие между частицами разного сорта (четвёртое и пятое слагаемые в правой части) продемонстрировано на примере бозон-фермионной смеси.

Таким образом, рассмотрение фермион-фермионных смесей может быть выполнено в терминах НУШ с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия. При необходимости рассмотрения систем бозонов или смесей содержащих бозонную компоненту с точностью до третьего порядка по радиусу

взаимодействия мы можем использовать уравнения квантовой гидродинамики (2.3.3) и (2.3.4). Однако, использование НУШ является более удобным при численном решении большинства задач.

Квантовые газы одного сорта при конечной температуре, представленные как смеси нормальной вырожденной компонент квантовых газов.

Метод квантовой гидродинамики позволяет получить системы уравнений для коллективных процессов в квантовых системах исходя из микроскопической динамики частиц описываемой многочастичным уравнением Шредингера. Температура является макроскопическим параметром и не входит в исходные уравнения. Однако, понятие температуры возникает по мере вывода уравнений квантовой гидродинамики наряду с концентрацией, полем скоростей, плотностью спина, плотностью потока импульса и т.д.

Общие формулы, получаемые при выводе всех представленных выше уравнений, содержат вклад температуры. Однако конечные замкнутые системы уравнений получены при переходе к пределу нулевой температуры. Представим систематический учёт температурных эффектов в виде замкнутой системы уравнений на примере системы бозонов малой температуры, в режиме, когда значительная доля частиц находится в состоянии конденсата Бозе-Эйнштейна. Представим основные результаты, следуя работам [1], [37]. В работе [37] двухжидкостная модель нейтральных бозонов развита в первом порядке по радиусу взаимодействия с учетом трёхчастичного взаимодействия, но ограничиваясь уравнениями непрерывности и баланса импульса для каждой компоненты. В работе [1] рассмотрено только двухчастичное взаимодействие в первом порядке по радиусу взаимодействия, но представлена расширенная гидродинамическая модель, включающая уравнения эволюции тензора давления и тензора потока давления. Следуя этим работам, ограничимся рассмотрением общей части включающей уравнения непрерывности и баланса импульса для каждой компоненты, при учёте двухчастичного взаимодействия в первом порядке по радиусу взаимодействия.

Воспользуемся общим видом кинематической части уравнений гидродинамики, записанной через концентрацию, плотность потока частиц и плотность потока импульса (2.1.4) и (2.1.6) (левая часть этих уравнений). Эти

функции аддитивны по частицам системы. Они позволяют ввести разбиение каждого уравнения на парциальные уравнения для каждой подсистемы [1], [37] с последующим введением поля скоростей для каждой подсистемы. Разделения правой части уравнения Эйлера выполняется после вычисления тензора квантовых напряжений. При этом результат вычисления двухчастичной концентрации при ненулевой температуре отличается от формулы (2.1.21) наличием слагаемых учитывающих наличие частиц в состояниях с ненулевой энергией (см. уравнение 42 в [1], см. также [37] и [41]):

$$\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \delta^{\alpha\beta} g_0 \cdot (n_B^2 + 4n_B n_n + 2n_n^2). \quad (2.3.11)$$

Первое слагаемое в правой части соответствует взаимодействию частиц находящихся в состоянии БЭК, соответствующие функции имеют индекс B . Второе слагаемое соответствует взаимодействию частиц находящихся в возбужденных состояниях (нормальная жидкость) с частицами в состоянии БЭК. Последнее слагаемое описывает взаимодействие между частицами находящимися в возбужденных состояниях. Функции, описывающие нормальную жидкость, содержат индекс n . В итоге, формула (2.3.11) приводит к следующим парциальным плотностям силы $F^\alpha = -\partial_\beta \sigma^{\alpha\beta} = F_B^\alpha + F_n^\alpha$,

$$F_B^\alpha = -g_0 n_B \partial^\alpha (n_B + 2n_n), \quad (2.3.12)$$

и

$$F_n^\alpha = -2g_0 n_n \partial^\alpha (n_B + n_n). \quad (2.3.13)$$

Критерием разделения служит то, что плотность силы, действующая на выбранную подсистему, пропорциональна концентрации этой подсистемы, умноженной на источник поля.

Аддитивность концентрации, плотности потока частиц и плотности потока импульса позволяет представить их в следующем виде: $n = n_B + n_n$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}_B + \mathbf{j}_n$, $\Pi^{\alpha\beta} = \Pi_B^{\alpha\beta} + \Pi_n^{\alpha\beta}$.

Сказанное здесь позволяет записать соответствующие уравнения гидродинамики. Но сформулируем следующие из гидродинамики нелинейные уравнения Шредингера

$$i\hbar\partial_t\Phi_B = \left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V_{ext} + g_b(n_B + 2n_n) \right) \Phi_B, \quad (2.3.14)$$

и

$$i\hbar\partial_t\Phi_n = \left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V_{ext} + 2g_b(n_B + n_n) \right) \Phi_n. \quad (2.3.15)$$

Сравним уравнения (2.3.14) и (2.3.15) с результатами, представленными в обзоре [210] (см. формулы 127-129). Уравнение (2.3.15) в нашем подходе возникает вместо пары уравнений 128-129 в работе [210], которые записаны для волновых функций отдельных возбужденных состояний. Будучи записанными для каждого состояния, в котором, может находиться несколько частиц, они не являются одночастичными. Однако они относятся к малому числу частиц и вообще говоря, могут быть рассмотрены как микроскопические функции. Эволюция волновых функций возбужденных состояний подчиняется НУШ, которые структурно похожи на уравнение (2.3.15). Однако, уравнение (2.3.15) выведено для одной волновой функции имеющей макроскопическую природу. Таким образом, модель (2.3.14) и (2.3.15) является менее точной. Улучшение точности модели (2.3.14) и (2.3.15) в терминах макроскопических переменных может быть достигнуто путём расширения системы уравнений гидродинамики, что частично сделано в работе [1] для бозонов. Также, ниже, расширенная гидродинамическая модель для вырожденных фермионов, где учтена эволюция тензора давления, рассмотрена в разделе (2.5) следуя работе [6].

Выводы.

В этом разделе развита квантовая гидродинамика вырожденных нейтральных квантовых бозон-фермионных смесей. Взаимодействие рассмотрено с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия. Таким образом, показано, что метод многочастичной квантовой гидродинамики эффективен не только для систем нейтральных фермионов или бозонов одного сорта, но и для смеси произвольного числа сортов нейтральных атомов. Демонстрация этого подхода выполнена для смеси двух сортов, но полученные результаты могут быть легко обобщены для случая большего числа сортов частиц. Единый подход для вычисления плотности силы взаимодействия частиц использован для вычисления плотности силы взаимодействия двух сортов частиц, где выполнено разложение

функций определяющих плотность силы по малому относительному расстоянию между парой взаимодействующих частиц, что оправдано в силу короткодействия рассматриваемого взаимодействия.

Кроме того, рассмотрена система бозонов при малой, но не равной нулю температуре. Такая система традиционно рассматривается в терминах двухжидкостной гидродинамики, где одна жидкость соответствует БЭК, а вторая (нормальная) жидкость соответствует частицам находящимся на возбуждённых энергетических уровнях. Дано краткое описание того как эта модель возникает при использовании метода многочастичной квантовой гидродинамики.

2.4 Квантовая гидродинамика с отдельной спиновой эволюцией спин-поляризованных фермионов

Рассмотрим отдельную спиновую эволюцию нейтральных частично спин-поляризованных фермионов со спином $1/2$. При этом учтем вклад короткодействующего взаимодействия между фермионами со спином вверх и фермионами со спином вниз, следуя работе [10].

Квантовая гидродинамика с отдельной спиновой эволюцией была предложена и разработана в работе [27] и описана в разделе 1.2 на примере квантовой плазмы, где частицы взаимодействуют посредством короткодействующего взаимодействия. Рассмотрим модификацию этой модели для частиц с короткодействующим взаимодействием. Подробное описание эффектов короткодействующего взаимодействия в квантовой гидродинамике представлено в разделе 2.1. Причем, там отдельно рассмотрено взаимодействие фермионов с одинаковой проекцией спина и разными проекциями спина. Это дает основание для корректного учета взаимодействия в модели с отдельной спиновой эволюцией.

При исследовании фермионов со спином в Главе 1 получено нелинейное уравнение Паули со спинорным давлением. Учтем короткодействующее взаимодействие в нелинейном уравнении Паули и получим соответствующие уравнения квантовой гидродинамики.

Для описания данной системы частиц используем модель с минимальным учётом взаимодействия в виде нелинейного уравнения Паули:

$$i\hbar\partial_t\hat{\Phi}=\left(-\frac{\hbar^2\Delta}{2m}+\hat{\pi}+\hat{g}-\mu\hat{\sigma}\cdot\mathbf{B}\right)\hat{\Phi}, \quad (2.4.1)$$

где $\hat{\Phi}=\{\Phi_\uparrow,\Phi_\downarrow\}$ это эффективная спинорная волновая функция, $\hat{\sigma}$ это вектор, составленный из матриц Паули, μ это магнитный момент частиц.

Подобное уравнение было введено и обосновано для электронов с отдельной спиновой эволюцией. Однако, взаимодействие зарядов заменено короткодействующим взаимодействием нейтральных атомов.

Нелинейное уравнение Паули содержит спинорное давление

$$\hat{\pi}=\begin{pmatrix}\pi_\uparrow & 0 \\ 0 & \pi_\downarrow\end{pmatrix}, \quad (2.4.2)$$

содержащее $\pi_s = (6\pi^2 n_s)^{\frac{2}{3}} \hbar^2 / 2m$. Его можно переписать в терминах матриц Паули

$$\hat{\pi} = \pi_{\uparrow} (\hat{\mathbf{I}} + \hat{\sigma}_z) / 2 + \pi_{\downarrow} (\hat{\mathbf{I}} - \hat{\sigma}_z) / 2, \quad (2.4.3)$$

и единичной матрицы

$$\hat{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.4.4)$$

Парциальные концентрации имеют следующую связь с эффективной спинорной волновой функцией $n_s = |\Phi_s|^2$.

Далее, короткодействующее взаимодействие рассмотрено в первом порядке по радиусу взаимодействия и представлено в нелинейном уравнении Паули спином второго ранга:

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} gn_d & 0 \\ 0 & gn_u \end{pmatrix} = \frac{g}{2} [(n_u + n_d) \hat{\mathbf{I}} + (n_d - n_u) \sigma_z], \quad (2.4.5)$$

где g это константа короткодействующего взаимодействия. Традиционно, её можно представить через амплитуду рассеяния $g = 4\pi\hbar^2 a / m$.

Внешнее магнитное поле, отталкивающее короткодействующее взаимодействие, и эффективное магнитное поле, описывающее радиочастотное поле приводят к созданию равновесной спиновой поляризации. Представленная модель включает в себя информацию об анизотропии системы. Ось z направлена в направлении анизотропии системы.

Нелинейное уравнение Паули (2.4.1) может быть переписано на языке квантовой гидродинамики. На наш выбор можно получить уравнения одножидкостной гидродинамики фермионов или двухжидкостной гидродинамики (модель с отдельной спиновой эволюцией). Остановимся на квантовой гидродинамике с отдельной спиновой эволюцией.

Выведем пару уравнений непрерывности с ненулевыми правыми частями, каждое из которых соответствует фермионам с определенной проекцией спина:

$$\partial_t n_s + \nabla(n_s \mathbf{v}_s) = \pm \frac{\mu}{\hbar} (S_x B_y - S_y B_x). \quad (2.4.6)$$

Входящее в уравнение непрерывности поле скоростей введено через поток частиц. Подробно, метод введения поля скоростей в уравнения одножидкостной и

двухжидкостной гидродинамик для частиц со спином обсуждался выше при рассмотрении моделей заряженных фермионов.

Проекции спиновой плотности имеют очевидное определение в рамках рассматриваемой модели: $S_x = \hat{\Phi}^\dagger \hat{\sigma}_x \hat{\Phi}$, $S_y = \hat{\Phi}^\dagger \hat{\sigma}_y \hat{\Phi}$, и $S_z = \hat{\Phi}^\dagger \hat{\sigma}_z \hat{\Phi} = n_u - n_d$.

Эволюция поля скоростей, каждого сорта частиц, удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$mn_s (\partial_t + \mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s + \nabla p_s - \frac{\hbar^2}{4m} n_s \nabla \left(\frac{\Delta n_s}{n_s} - \frac{(\nabla n_s)^2}{2n_s^2} \right) = \mathbf{F}_{g,s} + \mathbf{F}_{S,s}, \quad (2.4.7)$$

которое содержит плотности сил короткодействующего взаимодействия $\mathbf{F}_{g,u} = -gn_u \nabla n_d$, $\mathbf{F}_{g,d} = -gn_d \nabla n_u$, и плотности сил спин-спинового взаимодействия

$$F_{S,s}^\alpha = \pm \mu n_s \partial^\alpha B_z + \frac{\mu}{2} (S_x \partial^\alpha B_x + S_y \partial^\alpha B_y) \pm \frac{m\mu}{\hbar} \left((J_{(M)}^{x\alpha} - S_x v_s^\alpha) B_y - (J_{(M)}^{y\alpha} - S_y v_s^\alpha) B_x \right), \quad (2.4.8)$$

в которые входит тензор спинового тока:

$$J_{(M)}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (v_u^\beta + v_d^\beta) S^\alpha - \varepsilon^{\alpha\gamma z} \frac{\hbar}{4m} \left(\frac{\partial^\beta n_u}{n_u} - \frac{\partial^\beta n_d}{n_d} \right) S^\gamma. \quad (2.4.9)$$

Уравнение Эйлера содержит парциальные давления. Рассматривая систему вырожденных фермионов, используем парциальные давления Ферми $p_s = 2\pi_s n_s / 5$ в качестве уравнения состояния, которое возникает при непосредственном выводе уравнения Эйлера (2.4.7) из нелинейного уравнения Паули (2.4.1).

Данная модель включает только две проекции спиновой плотности как независимые переменные. Проекция спиновой плотности на выделенное направление является разностью парциальных концентраций. Так что нет необходимости в её рассмотрении. Однако, удобно записать уравнение эволюции спиновой плотности в векторном виде:

$$n (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{S}}{n} + \frac{(6\pi^2)^{\frac{2}{3}} \hbar}{m} \left(n_u^{\frac{2}{3}} - n_d^{\frac{2}{3}} \right) [\mathbf{S}, \mathbf{e}_z] - \frac{\hbar}{2m} \partial^\beta [\mathbf{S}, \partial^\beta \frac{\mathbf{S}}{n}] = \frac{2\mu}{\hbar} [\mathbf{S}, \mathbf{B}] + \frac{g}{\hbar} (n_u - n_d) [\mathbf{S}, \mathbf{e}_z], \quad (2.4.10)$$

где $[\mathbf{S}, \mathbf{B}]$ означает векторное произведение векторов, а также использованы понятия полной концентрации $n = n_\uparrow + n_\downarrow$, и поля скоростей всех фермионов $\mathbf{v} = (n_\uparrow \mathbf{v}_\uparrow + n_\downarrow \mathbf{v}_\downarrow) / n$.

Второе слагаемое в уравнении (2.4.10) это спиновый ток Ферми. Третье слагаемое это квантовая часть спинового тока, являющаяся аналогом квантового потенциала Бома. Первое слагаемое в правой части уравнения (2.4.10) это момент силы спин-спинового взаимодействия. Последнее слагаемое в уравнении (2.4.10) это момент сил короткодействующего взаимодействия.

Спин-спиновое взаимодействие рассмотрено в приближении самосогласованного поля. При этом, магнитные моменты пропорциональные рассматриваемым спинам вызывают магнитное поле в соответствии с магнитоэлектростатическим пределом уравнений Максвелла:

$$\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi\mu \nabla \times \mathbf{S}, \quad (2.4.11)$$

и $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, где $\mathbf{S} = \{S_x, S_y, n_u - n_d\}$.

Уравнения (2.4.1)-(2.4.10) показывают метод учета короткодействующего взаимодействия в квантовой гидродинамике с отдельной спиновой эволюцией и нелинейном уравнении Паули. Модель получена в первом порядке по радиусу взаимодействия. Соответствующее обобщение, учитывающее эффекты третьего порядка по радиусу взаимодействия может быть выполнено аналогичным образом. Соответствующие уравнения будут представлены в Главе 4 при анализе волновых возбуждений в ультрахолодных фермионах.

Выводы:

Построена модель спинорных свойств спин-1/2 фермионов с короткодействующим потенциалом взаимодействия. По существу представлена квантовая гидродинамика с отдельной спиновой эволюцией, но для нейтральных фермионов. Нелинейное уравнение Паули, полученное для электронного газа с отдельной спиновой эволюцией, адаптировано, с учетом результатов вычислений плотности силы взаимодействия, нейтральных фермионов, в разделе 2.1. Представленная модель ограничена первым порядком по радиусу взаимодействия. Спинорное давление также учтено в использованной модели.

Нелинейное уравнение Паули также преобразовано в виде уравнений гидродинамики учитывающих уравнение эволюции спина наряду с уравнениями непрерывности и Эйлера. Далее эти уравнения будут использованы для исследования равновесных состояний фермионов и динамики малых возбуждений в линейном и нелинейном режимах.

2.5 Вклад короткодействующего взаимодействия вырожденных фермионов в уравнение эволюции тензора давления

Как отмечалось выше, более точное описание кинетических свойств фермионов в рамках аппарата гидродинамики требует вывода уравнений эволюции тензора давления и других средних значений, содержащих более высокий порядок оператора импульса. Для рассмотрения акустических волн в главном порядке необходимо воспользоваться вкладом уравнения эволюции тензора давления.

Как видно из уравнения (2.1.42) тензор давления входит в поле силы взаимодействия частиц одного сорта, наряду с традиционным вкладом в левую часть уравнения Эйлера.

Вывод уравнения эволюции тензора давления начнем с вывода уравнения эволюции плотности потока импульса $\Pi^{\alpha\beta}$, которая возникает в следующем виде

$$\Pi^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = \int dR \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \frac{1}{4m_i} \left[\psi^+(R, t) \hat{p}_i^\alpha \hat{p}_i^\beta \psi(R, t) + (\hat{p}_i^\alpha \psi)^+(R, t) \hat{p}_i^\beta \psi(R, t) + c.c. \right], \quad (2.5.1)$$

как это было показано в Разделе 2.1 (формула (2.1.7)).

Далее, дифференцируя тензор плотности потока импульса (2.5.1) по времени, используя уравнение Шредингера с гамильтонианом (2.1.2) и следуя методике изложенной в Разделе 2.1 на примере уравнения эволюции импульса, получим уравнение эволюции плотности потока импульса

$$\begin{aligned} \partial_t \Pi^{\alpha\beta} + \partial_\gamma M^{\alpha\beta\gamma} = & -\frac{1}{m} j^\beta \partial_\alpha V_{ext} - \frac{1}{m} j^\alpha \partial_\beta V_{ext} - \frac{1}{m} \int \partial_\alpha U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') j^\beta(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' \\ & - \frac{1}{m} \int \partial_\beta U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') j^\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) d\mathbf{r}', \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

где

$$\begin{aligned} M^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}, t) = & \int dR \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \frac{1}{8m_i^3} \left[\psi^+(R, t) \hat{p}_i^\alpha \hat{p}_i^\beta \hat{p}_i^\gamma \psi(R, t) + (\hat{p}_i^\alpha \psi)^+(R, t) \hat{p}_i^\beta \hat{p}_i^\gamma \psi(R, t) \right. \\ & \left. + (\hat{p}_i^\alpha \hat{p}_i^\gamma \psi)^+(R, t) \hat{p}_i^\beta \psi(R, t) + (\hat{p}_i^\gamma \psi)^+(R, t) \hat{p}_i^\alpha \hat{p}_i^\beta \psi(R, t) + c.c. \right] \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

и

$$j_2^\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \int dR \sum_{i, j, i \neq j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) \frac{1}{2m_i} \left[\psi^+(R, t) \hat{p}_i^\alpha \psi(R, t) + c.c. \right]. \quad (2.5.4)$$

Правая часть уравнения (2.5.2) представляет собой поле тензора силы вызванного внешним полем (два первых слагаемых в правой части) и взаимодействием между частицами (последние два слагаемые).

Введем поле скоростей, в полученное уравнение, следуя методике изложенной в Разделе 2.1. В итоге получим показанную выше структуру тензора плотности потока импульса $\Pi^{\alpha\beta} = n v^\alpha v^\beta + p^{\alpha\beta} + T^{\alpha\beta}$, и структуру тензора $M^{\alpha\beta\gamma}$:

$$M^{\alpha\beta\gamma} = n v^\alpha v^\beta v^\gamma + v^\alpha p^{\beta\gamma} + v^\beta p^{\alpha\gamma} + v^\gamma p^{\alpha\beta} + Q^{\alpha\beta\gamma} + T^{\alpha\beta\gamma} + L^{\alpha\beta\gamma}, \quad (2.5.5)$$

где

$$Q^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}, t) = \int dR \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) a^2(R, t) m_i u_i^\alpha u_i^\beta u_i^\gamma \quad (2.5.6)$$

представляет тепловой вклад,

$$T^{\alpha\beta\gamma} = \frac{\hbar^2}{4m^2} \left[-\frac{1}{6} n (\partial^\alpha \partial^\beta v^\gamma + \partial^\alpha \partial^\gamma v^\beta + \partial^\beta \partial^\gamma v^\alpha) - \sqrt{n} v^\gamma \partial^\alpha \partial^\beta \sqrt{n} - \sqrt{n} v^\beta \partial^\alpha \partial^\gamma \sqrt{n} - \sqrt{n} v^\alpha \partial^\beta \partial^\gamma \sqrt{n} + v^\gamma \partial^\alpha \sqrt{n} \cdot \partial^\beta \sqrt{n} + v^\beta \partial^\alpha \sqrt{n} \cdot \partial^\gamma \sqrt{n} + v^\alpha \partial^\beta \sqrt{n} \cdot \partial^\gamma \sqrt{n} \right] \quad (2.5.7)$$

представляет квантовый вклад,

$$L^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}, t) = \int dR \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \frac{\hbar^2}{4m^2} \left[-\frac{1}{6} a^2 (\partial_i^\alpha \partial_i^\beta u_i^\gamma + \partial_i^\alpha \partial_i^\gamma u_i^\beta + \partial_i^\beta \partial_i^\gamma u_i^\alpha) - a u_i^\gamma \partial_i^\alpha \partial_i^\beta a - a u_i^\beta \partial_i^\alpha \partial_i^\gamma a - a u_i^\alpha \partial_i^\beta \partial_i^\gamma a - a u_i^\beta \partial_i^\alpha \partial_i^\gamma a - a u_i^\alpha \partial_i^\beta \partial_i^\gamma a + u_i^\gamma \partial_i^\alpha a \cdot \partial_i^\beta a + u_i^\beta \partial_i^\alpha a \cdot \partial_i^\gamma a + u_i^\alpha \partial_i^\beta a \cdot \partial_i^\gamma a \right] \quad (2.5.8)$$

представляет квантово-тепловой вклад.

При этом двухчастичная функция (2.5.4) принимает следующий вид $j_2^\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = v^\alpha(\mathbf{r}, t) \cdot n_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) + J_2^\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$, где

$$J_2^\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \int dR \sum_{i,j,i \neq j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) a^2(R, t) u_i^\alpha(R, t). \quad (2.5.9)$$

В итоге уравнение эволюции тензора давления принимающее во внимание уравнение состояния для тензора квантового потенциала Боме возникает как

$$\begin{aligned} & \partial_i p^{\alpha\beta} + v^\gamma \partial_\gamma p^{\alpha\beta} + p^{\alpha\beta} \partial_\gamma v^\gamma + p^{\alpha\gamma} \partial_\gamma v^\beta + p^{\beta\gamma} \partial_\gamma v^\alpha + \partial_\gamma Q^{\alpha\beta\gamma} + \partial_\gamma T^{\alpha\beta\gamma} + \partial_\gamma L^{\alpha\beta\gamma} \\ & + \frac{\hbar^2}{4m^2} \left[\partial_\alpha \partial_\beta \partial_\gamma (n v^\gamma) - v^\gamma \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\gamma n - \frac{1}{n} \partial_\alpha n \cdot \partial_\beta n \cdot \partial_\gamma v^\gamma - \frac{\partial_\beta n}{n} \partial_\gamma (n \partial_\alpha v^\gamma) - \frac{\partial_\alpha n}{n} \partial_\gamma (n \partial_\beta v^\gamma) \right] \\ & = \frac{1}{m} (F^{\alpha\beta} + F^{\beta\alpha} - v^\alpha F^\beta - v^\beta F^\alpha). \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

Правая часть уравнения (2.5.10) преобразовалась при введении поля скоростей и введении тензора давления. Однако, разработанная методика основана на вычислении поля тензора силы $F^{\alpha\beta}$ в исходном виде, возникающем в уравнении (2.5.2).

Опуская подробности вычислений, представим исходное определение поля тензора силы $F^{\alpha\beta}$ и конечные выражения, возникающие при слабом взаимодействии фермионов с одинаковой проекцией спина и фермионов с различными проекциями спина.

Поле тензора силы $F^{\alpha\beta}$, выраженное через волновые функции, имеет следующее выражение:

$$F^{\alpha\beta} = -\int (\partial^\alpha U(\mathbf{r}-\mathbf{r}')) j_2^\beta(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) d\mathbf{r}'. \quad (2.5.11)$$

Определение (2.5.11) показывает, что поле тензора силы $F^{\alpha\beta}$ является не симметричным тензором, но уравнение эволюции тензора давления содержит симметризованную комбинацию.

Вычисления для короткодействующего взаимодействия между фермионами с различными проекциями спина, выполненные с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия, дают следующий результат

$$F^{\alpha\beta} = -g \cdot j_{(1)}^\beta \partial^\alpha n_{(2)} - \frac{1}{2} g_2 j_{(1)}^\beta \partial^\alpha \Delta n_{(2)}, \quad (2.5.12)$$

где использованы дополнительные индексы. Индекс (1) дает указание на сорт частиц, эволюция которых рассматривается, на которые действует рассматриваемый потенциал. Индекс (2) дает указание на сорт частиц, действие которых рассмотрено через короткодействующий потенциал.

Для частиц с одной проекцией спина получаем, что в первом порядке по радиусу взаимодействия поле тензора силы $F^{\alpha\beta}$ равно нулю.

Вычисления, выполненные в третьем порядке по радиусу взаимодействия, дают ненулевой и довольно громоздкий результат

$$F^{\alpha\beta} = -\frac{m^2}{8\hbar^2} g_2 I_0^{\alpha\gamma\delta\mu} \left\{ \partial^\gamma \left[n Q^{\beta\delta\mu} + 2n v^\beta p^{\delta\mu} \right] + \partial^\gamma n \cdot \left[n v^\beta v^\delta v^\mu + Q^{\beta\delta\mu} + v^\beta p^{\delta\mu} + 2v^\mu p^{\beta\delta} \right] \right\}, \quad (2.5.13)$$

где выражение представлено в длинноволновом пределе. Общая формула, полученная в работе [6], содержит слагаемые, включающие более высокие пространственные производные.

Уравнение эволюции давления (2.5.10) содержит тензоры $Q^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}, t)$, $T^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}, t)$, $L^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}, t)$. Квантовый тензор $T^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}, t)$, представляющий собой аналог квантового потенциала Бома, представлен формулой (2.5.7) в приближенном виде. Как и квантовый потенциал Бома этот тензор вычислен для одной частицы и это выражение использовано как приближенное уравнение состояния для системы фермионов. Используя приближение слабозаимодействующих частиц, вычислим тензор $L^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}, t)$. Используем в качестве приближенных функций плоские волны и получим, что этот тензор равен нулю: $L^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}, t) = 0$. Тензор $Q^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}, t)$ также вычислим в приближении слабозаимодействующих частиц. Использование плоских волн дает ненулевое значение. Но дальнейшее суммирование по различным состояниям внутри сферы Ферми дает нулевое значение этого тензора: $Q^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}, t) = 0$. Эти результаты упрощают и замыкают уравнение эволюции тензора давления (2.5.10) и, в частности, упрощают поле тензора силы (2.5.13) к следующему виду

$$F^{\alpha\beta} = -\frac{m^2}{8\hbar^2} g_2 I_0^{\alpha\gamma\delta\mu} \left\{ 2\partial^\gamma (n v^\beta p^{\delta\mu}) + \partial^\gamma n \cdot [n v^\beta v^\delta v^\mu + v^\beta p^{\delta\mu} + 2v^\mu p^{\beta\delta}] \right\}. \quad (2.5.14)$$

Уравнение эволюции давления (2.5.10) содержит вклад поля силы наряду с полем тензора силы. Поле силы выведено выше, но запишем его выражения для удобства дальнейшего применения уравнения эволюции давления в Разделе 4 и явного представления правой части уравнения (2.5.10):

$$F^\alpha = -\partial_\beta \sigma^{\alpha\beta} = \frac{m^2}{2\hbar^2} g_2 I_0^{\alpha\gamma\delta\mu} v^\beta \partial_\gamma (n p^{\delta\mu}).$$

Выводы.

Представлено уравнение эволюции тензора давления для системы нейтральных вырожденных фермионов с изотропным короткодействующим взаимодействием, которое выведено методом квантовой гидродинамики исходя из многочастичного уравнения Шредингера.

Вычислено поле тензора силы для взаимодействия фермионов находящихся в одинаковых спиновых состояниях и для взаимодействия фермионов находящихся в различных спиновых состояниях. Однако структура поле тензора силы и поле

силы короткодействующего взаимодействия для взаимодействия фермионов находящихся в различных спиновых состояниях имеет такую структуру в приближении слабозаимодействующих частиц, что они взаимно исключаются из уравнения эволюции тензора давления. Так что динамика тензора давления обусловлена взаимодействием фермионов находящихся в одинаковых спиновых состояниях.

Уравнение эволюции тензора давления расширяет систему уравнений гидродинамики и позволяет выполнить более детальный анализ кинетических эффектов. В частности, это позволяет получить корректное выражение для скорости звука соответствующее кинетической теории.

Исследование коротковолнового диапазона требует учета уравнений эволюции тензоров высшего ранга. Кроме того, уравнения эволюции тензоров высшего ранга могут дать оценку степени точности результатов основанных на уравнении эволюции давления.

Уравнение Эйлера для бозонов находящихся в состоянии конденсата Бозе-Эйнштейна не содержит давления, так как все бозоны находятся в одном квантовом состоянии и их распределение в импульсном пространстве тривиально. Следовательно, уравнение эволюции давления рассмотрено только для вырожденных фермионов.

2.6 Влияние квантовых флуктуаций, электрического и магнитного дипольных моментов на коллективные свойства квантовых газов

Атомарный конденсат Бозе-Эйнштейна или системы атомов ультрахолодных фермионов это системы неточечных частиц. Взаимодействие бозонов и бозон-фермионное взаимодействие в первом приближении описывается амплитудой рассеяния a или соответствующей константой взаимодействия $g = 4\pi\hbar^2 a / m$. Однако атомы редкоземельных элементов, для Бозе изотопов которых конденсат Бозе-Эйнштейна получен экспериментально на сегодняшний день, обладают магнитным дипольным моментом. Это приводит к тому, что взаимодействие существует на расстоянии, превышающем характерный радиус атома. И следствия этого взаимодействия являются экспериментально обнаружимыми. Асимптотически такое взаимодействие можно описать через потенциал диполь-дипольного взаимодействия:

$$U_{dip} = \frac{\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \boldsymbol{\mu}_2}{r_{12}^3} - 3 \frac{(\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \mathbf{r}_{12})(\boldsymbol{\mu}_2 \cdot \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^5}. \quad (2.6.1)$$

Если диполи параллельны друг другу то формула (2.6.1) упрощается:

$$U_{dip,par} = \frac{\mu_0^2}{r_{12}^3} (1 - 3 \cos^2 \theta), \quad (2.6.2)$$

где μ_0 это модуль дипольного момента, который является углом между направлением поляризации и радиус вектором, построенным между взаимодействующими частицами.

Аналогично, электрическое диполь-дипольное взаимодействие существует между полярными молекулами ультрахолодных газов.

Наличие диполь-дипольного взаимодействия между Бозе атомами или молекулами, находящимися в состоянии конденсата Бозе-Эйнштейна приводит к обобщению уравнения Гросса-Питаевского

$$i\hbar\partial_t\Phi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Phi + (V_{ext} + g|\Phi|^2 + \Theta_{dd})\Phi, \quad (2.6.3)$$

где Θ_{dd} это нелинейное слагаемое описывающее вклад диполь-дипольного взаимодействия:

$$\Theta_{dd}(\mathbf{r}, t) = \int |\Phi(\mathbf{r}', t)|^2 U_{dip,par}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3r'. \quad (2.6.4)$$

Диполь-дипольное взаимодействие описывается интегральным слагаемым (2.6.4). Интегральная форма этого слагаемого связана с дальнедействующим (нелокальным) характером диполь-дипольного взаимодействия.

Характерным примером дальнедействующего взаимодействия является взаимодействие зарядов, рассмотренное в Главе I, где взаимодействие описывается в приближении самосогласованного поля.

Неточечность частиц приводит к затруднению их систематического анализа, так как фундаментальные теории, в частности квантовая механика, сформулированы для точечных объектов.

Поэтому рассмотрим микроскопическую модель точечных частиц с диполь-дипольным взаимодействием. Отметим, что потенциал диполь-дипольного взаимодействия точечных частиц отличается от формулы (2.6.1). Более того, он различен для магнитного дипольного взаимодействия

$$\begin{aligned} U_{dip,\mu} &= \frac{\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \boldsymbol{\mu}_2}{r_{12}^3} - 3 \frac{(\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \mathbf{r}_{12})(\boldsymbol{\mu}_2 \cdot \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^5} - \frac{8\pi}{3} (\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \boldsymbol{\mu}_2) \delta(\mathbf{r}_{12}) \\ &= -(\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \nabla_1)(\boldsymbol{\mu}_2 \cdot \nabla_1) \frac{1}{r_{12}} - 4\pi (\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \boldsymbol{\mu}_2) \delta(\mathbf{r}_{12}), \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

и электрического дипольного взаимодействия

$$U_{dip,el} = \frac{\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2}{r_{12}^3} - 3 \frac{(\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{r}_{12})(\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^5} + \frac{4\pi}{3} (\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2) \delta(\mathbf{r}_{12}) = -(\mathbf{d}_1 \cdot \nabla_1)(\mathbf{d}_2 \cdot \nabla_1) \frac{1}{r_{12}}. \quad (2.6.6)$$

Различие потенциалов очевидно связано с тем, что электрическое поле, создаваемое электрическим дипольным моментом, в электростатическом приближении, удовлетворяет электростатическим уравнениям Максвелла $\text{div}\mathbf{E} = -4\pi\text{div}\mathbf{P}$ и $\text{rot}\mathbf{E} = 0$, где \mathbf{P} это плотность электрического дипольного момента. Для одной частицы, пропорциональна дельта функции $\mathbf{P} = \mathbf{d}_1\delta(\mathbf{r}_{12})$. Поле, создаваемое магнитным дипольным моментом, в магнитостатическом приближении, удовлетворяет, соответственно, магнитостатическим уравнениям Максвелла $\text{div}\mathbf{B} = 0$ и $\text{rot}\mathbf{B} = 4\pi\text{rot}\mathbf{M}$, где \mathbf{M} это плотность магнитного дипольного момента. Таким образом, различие структуры различных пар уравнений Максвелла приводит к разной структуре потенциалов (2.6.5) и (2.6.6).

Рассмотрим диполь-дипольное взаимодействие на примере точечных Бозе частиц, обладающих электрическим дипольным моментом. (взаимодействие

магнитных моментов рассмотрено выше в Главе I в контексте взаимодействия электронов). Получаемые здесь результаты можно адаптировать для системы фермионов сравнением бозонов и фермионов, представленных выше в этой главе.

Вывод системы уравнений квантовой гидродинамики выполним для системы описываемой гамильтонианом, который входит в уравнение Шредингера $i\hbar\partial_t\psi = \hat{H}\psi$. Он содержит потенциал короткодействующего взаимодействия и потенциал диполь-дипольного взаимодействия:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} \hat{\mathbf{p}}_i \hat{\mathbf{p}}_i + \sum_{i=1}^N [V_{ext,i} - \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{E}_{i,ext}] + \frac{1}{2} \sum_{i,j,i \neq j} \left[U(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) - (\mathbf{d}_i \cdot \nabla_i)(\mathbf{d}_j \cdot \nabla_j) \frac{1}{r_{ij}} \right]. \quad (2.6.7)$$

Определяем концентрацию частиц стандартным для метода квантовой гидродинамики образом

$$n(\mathbf{r}, t) = \int \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \psi^*(R, t) \psi(R, t) dR. \quad (2.6.8)$$

Рассмотрим эволюцию концентрации во времени и получим уравнение непрерывности

$$\partial_t n(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.6.9)$$

Уравнение непрерывности дает явный вид потока частиц

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \int dR \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \frac{1}{2m_i} (\psi^* \hat{\mathbf{p}}_i \psi + c.c.). \quad (2.6.10)$$

Эволюция потока частиц приводит к уравнению Эйлера

$$\begin{aligned} \partial_t j^\alpha + \partial_\beta \Pi^{\alpha\beta} = & -n \nabla^\alpha V_{ext} - \frac{1}{m} \int d\mathbf{r}' (\nabla^\alpha U(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) n_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \\ & + \frac{1}{m} P^\beta \partial^\alpha E_{ext}^\beta + \frac{1}{m} \int (\nabla G^{\beta\gamma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) P_{2,ab}^{\beta\gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) d\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

Второе слагаемое в правой части уравнения Эйлера (2.6.11) относится к короткодействующему взаимодействию, которое было рассмотрено выше, в Главе II. Третье и четвертое слагаемые относятся к влиянию электрического дипольного момента.

Представим определение и структуру тензора потока импульса

$$\Pi^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = \int dR \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \frac{1}{4m_i} \left[\psi^* \hat{p}_i^\alpha \hat{p}_i^\beta \psi + (\hat{p}_i^\alpha \psi)^* \hat{p}_i^\beta \psi + c.c. \right] \quad (2.6.12)$$

и

$$\Pi^{\alpha\beta} = mnv^\alpha v^\beta + p^{\alpha\beta} - \frac{\hbar^2}{4m} \left(\partial^\alpha \partial^\beta n(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial^\alpha n(\mathbf{r}, t) \cdot \partial^\beta n(\mathbf{r}, t)}{n(\mathbf{r}, t)} \right). \quad (2.6.13)$$

Тепловая часть тензор давления $p^{\alpha\beta}$ для конденсата Бозе-Эйнштейна равна нулю.

На этой стадии вывода модели возникают две возможности. Первая, простейшая, возможность, проиллюстрированная обобщенным уравнением Гросса-Питаевского (2.6.3), соответствует полной поляризации диполей. В этом случае плотность электрического дипольного момента пропорциональна концентрации частиц. Это соотношение выступает своеобразным уравнением состояния, позволяющим замкнуть систему уравнений, ограничиваясь двумя уравнениями гидродинамики [31], [34]. Вторая возможность связана с рассмотрением эволюции направления электрического дипольного момента [32], [36], и [39]. Тогда плотность электрического дипольного момента это независимая функция и необходимо получить уравнение эволюции этой функции. Точнее, как показывают исследование, необходимо использовать две функции: плотность электрического дипольного момента и тензор потока электрического дипольного момента.

Если мы ограничимся режимом полной поляризации диполей, то, в этом случае, двухчастичная плотность дипольного момента оказывается пропорциональной двухчастичной концентрации частиц

$$P_2^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = n_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \delta^{\alpha z} \delta^{\beta z}, \quad (2.6.14)$$

где

$$n_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \int dR \sum_{i,j,i \neq j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) \psi^*(R, t) \psi(R, t). \quad (2.6.15)$$

Так как эта величина возникает в слагаемом, описывающем дальнедействующее взаимодействие, то можно воспользоваться приближением самосогласованного поля. Таким образом, двухчастичная концентрация $n_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$ распадается на произведение одночастичных концентраций $n_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = n(\mathbf{r}, t) \cdot n(\mathbf{r}', t)$. В этом случае последнее слагаемое принимает такую же структуру, как и третье слагаемое в правой части уравнения (2.6.11) $\frac{n}{m} d^\beta \partial^\alpha E^\beta$, где самосогласованное электрическое поле удовлетворяет уравнениям Максвелла $\nabla \cdot \mathbf{E} = -4\pi(\mathbf{d} \cdot \nabla)n$ и $\text{rot} \mathbf{E} = 0$. Для большего соответствия с моделью (2.6.3), (2.6.4) можно оставить это слагаемое в интегральной форме.

Уравнения (2.6.11) и (2.6.14) записаны для электрического дипольного момента [31], [34]. Аналогичные уравнения можно записать для магнитного дипольного момента [31]. Кроме того, спин-спиновое взаимодействие представлено выше для заряженных фермионов.

Подчеркнём структуру поля силы диполь-дипольного взаимодействия, входящую в уравнении Эйлера, в суперпозиции с короткодействующим взаимодействием:

$$\mathbf{F} = P^\beta \nabla E^\beta - gn \nabla n - \frac{1}{2} g_2 \nabla \Delta n^2. \quad (2.6.16)$$

Уравнения эволюции электрической поляризации возникают наряду с эволюцией потока электрического дипольного момента [32], [36], и [39]. Плотность электрического дипольного момента P^α входящая в плотность силы (2.6.16) возникает в следующем виде при выводе уравнения Эйлера (2.6.11) [32], [36], [39]:

$$\mathbf{P} = \int dR \sum_{i,j,i \neq j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \cdot \psi^*(R,t) \mathbf{d}_i \psi(R,t), \quad (2.6.17)$$

где \mathbf{d}_i это оператор электрического момента отдельной частицы. Предполагается, что поля, возникающие в среде, не меняют структуру частиц. Поэтому пренебрегается изменением величины электрического дипольного момента. Эволюция плотности электрического дипольного момента (2.6.17) во времени приводит к уравнению “непрерывности” векторной величины:

$$\partial_i P^\alpha + \partial_\beta R^{\alpha\beta} = 0, \quad (2.6.18)$$

где тензор $R^{\alpha\beta}$ это плотность потока электрического дипольного момента. В рамках рассматриваемой модели она имеет следующее определение в терминах многочастичной волновой функции

$$R^{\alpha\beta} = \frac{1}{2m} \int dR \sum_{i,j,i \neq j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \cdot (\psi^*(R,t) d_i^\alpha \hat{p}_i^\beta \psi(R,t) + c.c.). \quad (2.6.19)$$

Уравнение эволюции плотности диполей рассматривалось в рамках классической гидродинамики системы заряженных частиц [47], где диполь являлся характеристикой физически бесконечно малого объёма содержащего заряженные частицы. Тогда как определение (2.6.17) относится к отдельным атомам или молекулам [32], [36], или для ионизованных элементов среды [39].

Уравнение эволюции плотности дипольного момента (2.6.18) не содержит влияния взаимодействия на динамику диполей. Рассмотрим уравнение эволюции плотность потока электрического дипольного момента для системы нейтральных частиц находящихся в состоянии БЭК [32], [36]:

$$\begin{aligned} \partial_t R^{\alpha\beta} + \partial_\gamma (R^{\alpha\beta} v^\gamma + R^{\alpha\gamma} v^\beta - P^\alpha v^\beta v^\gamma) - \frac{\hbar^2}{4m^2} \partial^\beta \Delta P^\alpha + \frac{\hbar^2}{8m^2} \partial_\gamma \left(\frac{\partial^\beta P^\alpha \cdot \partial^\gamma n}{n} + \frac{\partial^\gamma P^\alpha \cdot \partial^\beta n}{n} \right) \\ = -\frac{g}{m} \partial^\beta (nP^\alpha) + \frac{\sigma}{m} \frac{P^\alpha P^\gamma}{n} \partial^\beta E_\gamma, \end{aligned} \quad (2.6.20)$$

где первое слагаемое в правой части описывает короткодействующее взаимодействие, а второе слагаемое содержит числовую константу σ , и описывает диполь-дипольное взаимодействие, в пределе точечных диполей.

Полученная система уравнений не позволяет перейти к НУШ. Однако, как отмечалось выше, если мы предполагаем полную поляризацию системы диполей, то мы можем отбросить уравнения (2.6.18) и (2.6.20). Ограничиваясь, таким образом, системой уравнений непрерывности и Эйлера, с соответствующим полем силы (2.6.16), пренебрегая при этом плотностью силы взаимодействия в третьем порядке по радиусу взаимодействия. Получаем уравнение Гросса-Питаевского с учетом диполь-дипольного взаимодействия [31], [34] (см. также [203], [204], [205]), где это уравнение представлено в интегральной форме для неточечных частиц:

$$i\hbar \partial_t \Phi = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext} + gn - d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E} \right) \Phi. \quad (2.6.21)$$

При этом предполагается следующая структура плотности электрического дипольного момента $\mathbf{P} = d \cdot n \cdot \mathbf{l}$, дающая определение константы d , в терминах \mathbf{P} и концентрации n . Кроме того, \mathbf{l} это единичный вектор в направлении поляризации диполей, \mathbf{E} это электрическое поле создаваемое диполями среды удовлетворяет квазистатическим уравнениям Максвелла, представленные после уравнения (2.6.15).

Даже в случае полной спиновой поляризации есть возможность более точного учета диполь-дипольного взаимодействия. Это более детальное рассмотрение кинематических функций, т.е. гидродинамических функций являющихся квантовым средним более высокой степени оператора импульса. В разделе 2.5 рассмотрена расширенная модель вырожденных фермионов, где учтена

эволюция тензора давления, следуя работе [6]. Согласно более ранним работам [316], [317], [318], при изучении коллективных эффектов в фермионах, необходимо учитывать эволюцию давления для получения корректной скорости звука. Использование уравнение состояния для давления, к примеру, давления Ферми для вырожденных фермионов, в уравнении Эйлера, даёт качественное описание звука и других коллективных процессов.

Однако, диполь-дипольное взаимодействие, рассмотренное в приближении самосогласованного поля, не дает вклада в уравнение эволюции давления, как бозонов, так и фермионов. Нетривиальный учёт этого взаимодействия возникает при выводе уравнения эволюции потока давления [1], [2], [3]. Представим уравнение эволюции давления [2] (см. уравнение 9)

$$\partial_t p^{\alpha\beta} + \partial_\gamma (v^\gamma p^{\alpha\beta}) + p^{\alpha\gamma} \partial_\gamma v^\beta + p^{\beta\gamma} \partial_\gamma v^\alpha + \partial_\gamma Q^{\alpha\beta\gamma} = 0, \quad (2.6.22)$$

которое возникает при выводе уравнения эволюции плотности потока импульса, и последующего введения поля скоростей. Однако, давление связано с наличием частиц в возбужденных квантовых состояниях. То же самое можно сказать о тензоре потока давления $Q^{\alpha\beta\gamma}$. Соответственно, ожидается, что значение этих физических величин равно нулю для БЭК и уравнение (2.6.22) не противоречит такому предположению. Однако, последующий анализ уравнения эволюции потока давления показывает, что взаимодействие приводит к переходу частиц из БЭК в возбужденные состояния и возникновению отличных от нуля значений $p^{\alpha\beta}$ и $Q^{\alpha\beta\gamma}$.

Запишем уравнение эволюции тензора потока давления для частиц с доминирующим диполь-дипольным взаимодействием [2] (см. уравнение 10)

$$\partial_t Q^{\alpha\beta\gamma} + \partial_\delta (v^\delta Q^{\alpha\beta\gamma}) + Q^{\alpha\gamma\delta} \partial_\delta v^\beta + Q^{\beta\gamma\delta} \partial_\delta v^\alpha + Q^{\alpha\beta\delta} \partial_\delta v^\gamma = \frac{\hbar^2}{4m^3} n \partial^\alpha \partial^\beta \partial^\gamma \Phi_d, \quad (2.6.23)$$

где Φ_d это потенциал диполь-дипольного взаимодействия $E^\alpha = -\partial^\alpha \Phi_d$. Плотность силового поля в уравнении (2.6.23) это поток потока плотности силы. Эта физическая величина пропорциональны второй пространственной производной напряженности электрического поля.

Выводы:

Представлен микроскопически вывод уравнений квантовой гидродинамики для точечных дипольных Бозе-частиц, обладающих электрическим дипольным моментом и находящихся в состоянии конденсата Бозе-Эйнштейна. Основной

акцент сделан на режиме полной поляризации электрического дипольного момента. Также представлены уравнения гидродинамики, описывающие эволюцию направлений электрических дипольных моментов среды, которые возникают в виде пары уравнений: уравнения эволюции поляризации и уравнения эволюции потока поляризации. Отдельно рассмотрена расширенная система уравнений квантовой гидродинамики для системы, полностью поляризованных диполей, где эволюция давления и потока давления даёт нетривиальный результат даже в пределе равной нулю температуры.

2.7 Заключение к главе 2

Разработан метод микроскопической квантовой гидродинамики в применении к квантовым газам нейтральных частиц и их смесей с короткодействующим потенциалом взаимодействия для частиц, подчиняющимся распределениям Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака.

Для фермионов выведено три типа моделей: одножидкостная гидродинамика, гидродинамика с отдельной спиновой эволюцией и расширенная гидродинамика с отдельной спиновой эволюцией, содержащая вклад эволюции парциальных давлений. Для всех случаев выполнен расчет вклада взаимодействия с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия.

Бозоны в состоянии конденсата Бозе-Эйнштейна не содержат вклада давления. Поэтому нет ответвления цепочки уравнений в этом направлении в отличие от фермионов, для которых выведено соответствующее обобщение. Однако для бозонов учтено наличие анизотропии короткодействующего взаимодействия, которая проявляется в свойствах редкоземельных элементов. Модель выведена с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия.

ГЛАВА 3. ЭВОЛЮЦИЯ СПИНА В КВАНТОВОЙ ПЛАЗМЕ И ЕЁ ВКЛАД В ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

3.1 Спин-электрон акустические волны, распространение параллельно внешнему магнитному полю

Изучая свойства плазмы и плазмоподобных сред можно использовать методы гидродинамики и кинетики. На протяжении нескольких десятилетий эти методы использовались для изучения различных процессов, включая волновые процессы. В частности, были развиты методы квантовой гидродинамики и квантовой кинетики для частиц со спином. Этот раздел посвящен первому шагу в применении модели квантовой гидродинамики с отдельной спиновой эволюцией развитой в работе [27] и описанной в Главе 1.

Запишем основные уравнения квантовой гидродинамики, с отдельной спиновой эволюцией, которые были выведены выше.

Два уравнения непрерывности для электронов, со спином вверх и спином вниз имеют следующий вид, с ненулевой правой частью описывающей переворот спина под действием внешнего и самосогласованного магнитных полей:

$$\partial_t n_s + \nabla(n_s \mathbf{v}_s) = \pm \frac{\gamma_e}{\hbar} (S_x B_y - S_y B_x). \quad (3.1.1)$$

Два уравнения Эйлера для заряженных частиц, со спином вверх и спином вниз имеют следующий вид:

$$mn_s (\partial_t + \mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{v}_s + \frac{(6\pi^2)^{\frac{2}{3}} \hbar^2}{5m} \nabla n_s^{\frac{5}{3}} - \frac{\hbar^2}{4m} n_s \nabla \left(\frac{\Delta n_s}{n_s} - \frac{(\nabla n_s)^2}{2n_s^2} \right) = q_e n_s \mathbf{E} + \frac{q_e}{c} n_s [\mathbf{v}_s \times \mathbf{B}]$$

$$\pm \gamma_e n_s \nabla B_z + \frac{\gamma_e}{2} (S_x \nabla B_x + S_y \nabla B_y) \pm \frac{m_e \gamma_e}{\hbar} [(\mathbf{J}_{Mx} - \mathbf{v}_s S_x) B_y - (\mathbf{J}_{My} - \mathbf{v}_s S_y) B_x], \quad (3.1.2)$$

где

$$\mathbf{J}_{(M)x} = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{\uparrow} + \mathbf{v}_{\downarrow}) S_x - \frac{\hbar}{4m} \left(\frac{\nabla n_{\uparrow}}{n_{\uparrow}} - \frac{\nabla n_{\downarrow}}{n_{\downarrow}} \right) S_y, \quad (3.1.3)$$

и

$$\mathbf{J}_{(M)y} = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{\uparrow} + \mathbf{v}_{\downarrow}) S_y + \frac{\hbar}{4m} \left(\frac{\nabla n_{\uparrow}}{n_{\uparrow}} - \frac{\nabla n_{\downarrow}}{n_{\downarrow}} \right) S_x. \quad (3.1.4)$$

Последняя группа слагаемых описывает изменение плотности импульса электронов с определенной проекцией спина вызванное переверотом спина под действием внешнего и самосогласованного магнитных полей.

Также модель содержит уравнения эволюции x- и y- проекций плотности спина

$$\partial_t S_x + \frac{1}{2} \nabla [S_x (\mathbf{v}_u + \mathbf{v}_d)] - \frac{\hbar}{4m} \nabla \left(S_y \left(\frac{\nabla n_u}{n_u} - \frac{\nabla n_d}{n_d} \right) \right) = \frac{2\gamma_e}{\hbar} (B_z S_y - B_y (n_u - n_d)), \quad (3.1.5)$$

и

$$\partial_t S_y + \frac{1}{2} \nabla [S_y (\mathbf{v}_\uparrow + \mathbf{v}_\downarrow)] + \frac{\hbar}{4m} \nabla \left(S_x \left(\frac{\nabla n_\uparrow}{n_\uparrow} - \frac{\nabla n_\downarrow}{n_\downarrow} \right) \right) = \frac{2\gamma_e}{\hbar} (B_x (n_\uparrow - n_\downarrow) - B_z S_x). \quad (3.1.6)$$

Самосогласованное электромагнитное поле, входящее в уравнения квантовой гидродинамики с отдельной спиновой эволюцией удовлетворяют уравнениям Максвелла. Не будем повторять обозначения и физический смысл отдельных слагаемых в каждом уравнении, так как это сделано в разделе 1.2.

Исследуем высокочастотные объемные волны малой амплитуды, распространяющиеся параллельно внешнему магнитному полю, в частично спин поляризованной плазме в терминах представленной модели. Будем предполагать, что ионы создают положительно заряженный неподвижный фон.

Положим, что внешнее однородное постоянное магнитное поле направлено вдоль оси z: $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$. Рассмотрим равновесное состояние системы. Очевидно, что равновесные концентрации электронов со спином вверх и электронов со спином вниз являются не равными друг другу константами $n_{0\uparrow} \neq n_{0\downarrow}$. Постоянная и однородная равновесная намагниченность (плотность спина) параллельна внешнему магнитному полю: $\mathbf{S}_0 = S_0 \mathbf{e}_z$. Равновесное поле скоростей электронов каждого сорта и равновесное электрическое поле равны нулю. Далее рассмотрим малые возмущения равновесных состояний $n_s = n_{0s} + \delta n_s$, $\mathbf{v}_s = 0 + \delta \mathbf{v}_s$, $\mathbf{S} = S_0 \mathbf{e}_z + \delta \mathbf{S}$, $\mathbf{E} = 0 + \delta \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z + \delta \mathbf{B}$, причем положим, что эти возмущения являются плоскими монохроматическими волнами, к примеру: $\delta n_s \sim e^{-i\omega t + ik_z z}$. Представим физические величины как суммы равновесных значений и малых возмущений. А также пренебрежем квадратами и более высокими степенями возмущений. В итоге получим систему линейных дифференциальных уравнений. Используя явный вид

возмущений, получим алгебраическую систему уравнений устанавливающих связь между амплитудами возмущений:

$$\omega \delta n_s - n_{0s} k_z \delta v_{sz} = 0 \quad (3.1.7)$$

из уравнений непрерывности (отметим, что в линейном приближении правая часть уравнения обращается в ноль);

$$\begin{aligned} & -i\omega m n_s \delta \mathbf{v}_s + \frac{(6\pi^2)^{\frac{2}{3}} \hbar^2}{3m} i k_z n_{0s}^{\frac{2}{3}} \delta n_s \mathbf{e}_z + \frac{i\hbar^2}{4m} k_z^3 \delta n_s \mathbf{e}_z \\ & = q_e n_{0s} \delta \mathbf{E} + \frac{q_e}{c} n_{0s} [\delta \mathbf{v}_s \times \mathbf{B}_0] \pm i k_z \gamma_e n_{0s} \delta B_z \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

из уравнений Эйлера;

$$-i\omega \delta S_x = \frac{2\gamma_e}{\hbar} (B_0 \delta S_y - (n_{0\uparrow} - n_{0\downarrow}) \delta B_y), \quad (3.1.9)$$

и

$$-i\omega \delta S_y = \frac{2\gamma_e}{\hbar} ((n_{0\uparrow} - n_{0\downarrow}) \delta B_x - B_0 \delta S_x) \quad (3.1.10)$$

из уравнений эволюции плотности спина;

$$\nabla \cdot \delta \mathbf{E} = 4\pi q_e (\delta n_{e\uparrow} + \delta n_{e\downarrow}), \quad (3.1.11)$$

$$\nabla \cdot \delta \mathbf{B} = 0, \quad (3.1.12)$$

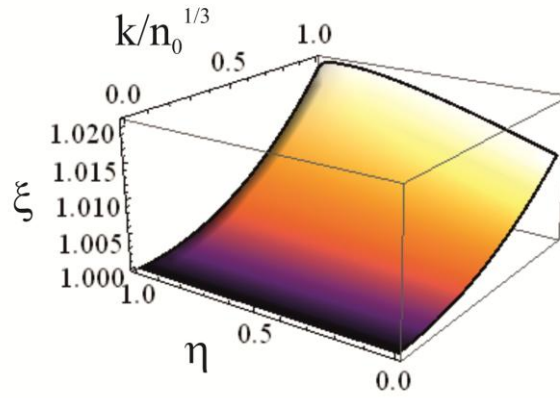
$$k_z \mathbf{e}_z \times \delta \mathbf{E} = \frac{\omega}{c} \delta \mathbf{B}, \quad (3.1.13)$$

и

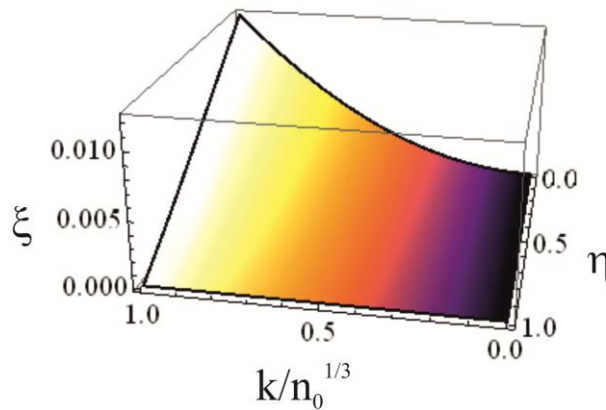
$$k_z \mathbf{e}_z \times \delta \mathbf{B} = -\frac{\omega}{c} \delta \mathbf{E} - \frac{4\pi q_e i}{c} (n_{0\uparrow} \delta \mathbf{v}_{e\uparrow} + n_{0\downarrow} \delta \mathbf{v}_{e\downarrow}) + 4\pi \gamma_e k_z \mathbf{e}_z \times \delta \mathbf{S} \quad (3.1.14)$$

из уравнений Максвелла.

Выразим возмущения всех гидродинамических величин через возмущения электрического поля. Далее подставим полученные выражения в уравнение (3.1.14) и получим систему трех однородных уравнений. Одно уравнение, для z-проекции электрического поля оказывается независимым от двух других. Оно описывает продольные волны, с колебаниями напряженности электрического поля вдоль направления распространения. Уравнения для x- и y- проекций электрического поля связаны друг с другом. Они описывают поперечные циркулярно-поляризованные волны.



a



b

Рис. 3.1.1. Зависимость безразмерного квадрата частоты представленного в единицах квадрата ленгмюровской частоты $\xi = \omega^2 / \omega_{Le}^2$ от безразмерного волнового вектора $k / \sqrt[3]{n_0}$ и спиновой поляризации $\eta = |\Delta n| / n_{0e}$ для двух продольных волн существующих в вырожденном электронном газе при отдельной эволюции электронов с разной проекцией спина. Рисунок получен для волн распространяющихся параллельно внешнему магнитному полю. Ионы предполагаются неподвижными. (а) Показывает дисперсионную зависимость ленгмюровской волны, (b) показывает дисперсионную зависимость спин-электрон акустической волны. Рисунок получен для следующей концентрации электронов

$$n_{0e} = 10^{21} \text{ см}^{-3}.$$

Как условия существования возмущений с ненулевыми амплитудами получаем дисперсионное уравнение для продольных волн

$$1 - \frac{\omega_{L\uparrow}^2}{\omega^2 - u_{\uparrow}^2 k_z^2} - \frac{\omega_{L\downarrow}^2}{\omega^2 - u_{\downarrow}^2 k_z^2} = 0, \quad (3.1.15)$$

и дисперсионное уравнение для поперечных волн

$$k_z^2 c^2 - \omega^2 + \omega_{Le}^2 \frac{\omega}{\omega \pm |\Omega_e|} - 4\pi\gamma_e k_z^2 c^2 \frac{2\gamma_e}{\hbar} \frac{n_{0\uparrow} - n_{0\downarrow}}{\omega \pm g|\Omega_e|} = 0, \quad (3.1.16)$$

где

$$\omega_{Le}^2 = \frac{4\pi e^2 n_{0s}}{m} \quad (3.1.17)$$

это парциальная ленгмюровская частота для электронов с определенной проекцией спина. Полная ленгмюровская частота всех электронов есть сумма парциальных

ленгмюровских частот $\omega_{Le}^2 = \omega_{L\uparrow}^2 + \omega_{L\downarrow}^2$, и $u_s^2 = \frac{1}{3} v_{Fs}^2 + \frac{\hbar^2 k_z^2}{4m_e^2}$. Парциальная скорость

Ферми также использована здесь: $v_{Fs} = (6\pi^2 n_{0s})^{2/3} \hbar / m$.

Последнее слагаемое в уравнении (3.1.16) пропорционально спиновой поляризации $(n_{0\uparrow} - n_{0\downarrow}) \sim \eta$. Однако, это слагаемое может быть получено при исследовании спиновой динамики в электронном газе в рамках одножидкостной модели электронного газа [77], [79].

Второе уравнение в (3.1.16) (со знаком минус) содержит новое решение, отсутствующее в классическом безспиновом пределе. Это поперечная спиновая волна. Это решение существует в силу наличия у электрона аномального магнитного момента. Этот эффект неоднократно обсуждался в литературе. В разделе 3.10 представлен другой эффект связанный с аномальной частью магнитного момента электрона это тонкая структура циклотронных волн описываемых кинетической теорией.

Представленный в литературе анализ показывает, что исследовании спиновой эволюции посредством одножидкостной модели электронного газа приводит к эффектам пропорциональным целочисленным степеням спиновой поляризации. Тогда как, эффекты, вызванные отдельной спиновой эволюцией, добавляют слагаемые пропорциональные разности концентраций электронов, с разными проекциями спина взятых в дробных степенях: $n_{0\uparrow}^d - n_{0\downarrow}^d$, где d это дробное число.

Уравнение (3.1.15) имеет следующий вид в отсутствии спиновой поляризации

$$1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2 - \left(\frac{1}{3} v_{Fe}^2 + \frac{\hbar^2 k_z^2}{4m_e^2} \right) k_z^2} = 0, \quad (3.1.18)$$

где использовано $\omega_{L\uparrow}^2 = \omega_{L\downarrow}^2 = \omega_{Le}^2 / 2$ и $u_{\uparrow}^2 = u_{\downarrow}^2 = \frac{1}{3} v_{Fe}^2 + \frac{\hbar^2 k_z^2}{4m_e^2}$, включающее традиционную скорость Ферми: $v_{Fe} = (3\pi^2 n_{0e})^{2/3} \hbar / m$. Упрощенное уравнение (3.1.18) это хорошо известное дисперсионное уравнение дающее спектр квантовых ленгмюровских волн: $\omega^2 = \omega_{Le}^2 + \left(\frac{1}{3} v_{Fe}^2 + \frac{\hbar^2 k_z^2}{4m_e^2} \right) k_z^2$. Это показывает, что учет спиновой поляризации при отдельной спиновой эволюции электронов увеличивает степень уравнения. Приводя к квадратному уравнению относительно квадрата частоты вместо линейного уравнения для квадрата частоты. Таким образом, полученное дисперсионное уравнение (3.1.15) показывает существование еще одной продольной волны. Далее рассмотрим свойства второй продольной волны и влияние спиновой поляризации на дисперсионную зависимость ленгмюровских волн. Второе решение носит название спин-электрон акустической волны [27].

Рассмотрим дисперсионное уравнение для продольных волн (3.1.15). Дисперсионное уравнение (3.1.15) можно переписать, приведя слагаемые к общему знаменателю. При этом некоторые слагаемые комбинируются в физические величины, описывающие все электроны. В итоге дисперсионное уравнение принимает следующий вид:

$$\omega^4 - \omega^2 \left[(u_{\uparrow}^2 + u_{\downarrow}^2) k_z^2 + \omega_{Le}^2 \right] + (u_{\uparrow}^2 \omega_{L\downarrow}^2 + u_{\downarrow}^2 \omega_{L\uparrow}^2) k_z^2 + u_{\uparrow}^2 u_{\downarrow}^2 k_z^4 = 0. \quad (3.1.19)$$

Общее решение этого уравнения может быть представлено в следующем виде

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left[(u_{\uparrow}^2 + u_{\downarrow}^2) k_z^2 + \omega_{Le}^2 \pm \sqrt{(u_{\uparrow}^2 - u_{\downarrow}^2)^2 k_z^4 + \omega_{Le}^4 + 2(u_{\uparrow}^2 - u_{\downarrow}^2)(\omega_{L\uparrow}^2 - \omega_{L\downarrow}^2) k_z^2} \right]. \quad (3.1.20)$$

Верхний знак соответствует ленгмюровской волне. Соответственно, нижний знак дает спектр спин-электрон акустической волны. Решение (3.1.20) исследовано численно, и результат представлен на Рис. (3.1.1).

Из Рис. (3.1.1) видно, что существуют два волновых решения. Частоты обеих волн монотонно растут с увеличением волнового вектора. Увеличение спиновой поляризации от 0 до 1 заметно увеличивает квадрат частоты ленгмюровских волн Рис. (3.1.1а). Квадрат частоты спин-электрон-акустических волн порядка 0.01—0.001 квадрата ленгмюровской частоты, что соответствует частотам значительно большим частоты ионной ленгмюровской волны. Кроме того, частоты спин-электрон-акустических волн значительно снижаются при увеличении спиновой поляризации. Так что ионы могут оказывать значительное влияние в этом режиме. Этот эффект обсуждается ниже в этом разделе.

Выполним приближенный аналитический анализ формулы (3.1.20).

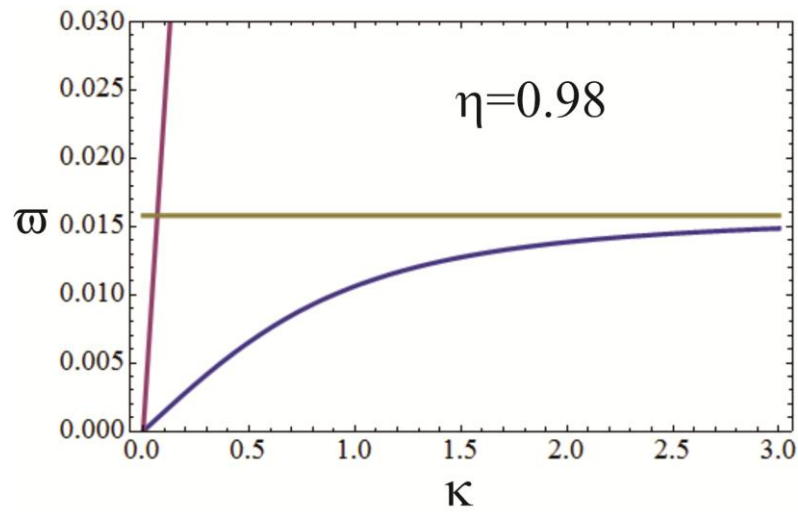


Рис. 3.1.2. показаны спектры ионозвуковых волн и спин-электрон-акустических волн при сравнительно большой спиновой поляризации $\eta = 0.98$.

Ветвь с большей фазовой скоростью это спин-электрон-акустическая волна.

Нижняя кривая представляет ионозвуковую волну. Горизонтальная линия соответствует ионной ленгмюровской частоте. Следующие безразмерные единицы использованы на этом рисунке $\bar{\omega} = \omega / \omega_{Le}$, $\kappa = \kappa r_{De}$, $r_{De} = v_{Fe} / \omega_{Le}$.

Рассмотрим предел малой спиновой поляризации, при котором равновесные концентрации электронов с разной проекцией спина мало различаются. В этом пределе, первое и третье слагаемые под корнем в формуле (3.1.20) значительно меньше второго слагаемого. Разлагая квадратный корень, в ряд и учитывая, только слагаемые линейные по малому параметру находим следующие выражения

$$\omega_+^2 = \omega_{Le}^2 + \frac{1}{2}(u_\uparrow^2 + u_\downarrow^2)k_z^2 + (u_\uparrow^2 - u_\downarrow^2)k_z^2 \frac{(u_\uparrow^2 - u_\downarrow^2)k_z^2 + 2(\omega_{L\uparrow}^2 - \omega_{L\downarrow}^2)}{4\omega_{Le}^2} \quad (3.1.21)$$

для ленгмюровских волн, и

$$\omega^2 = \frac{1}{2}(u_\uparrow^2 + u_\downarrow^2)k_z^2 - (u_\uparrow^2 - u_\downarrow^2)k_z^2 \frac{(u_\uparrow^2 - u_\downarrow^2)k_z^2 + 2(\omega_{L\uparrow}^2 - \omega_{L\downarrow}^2)}{4\omega_{Le}^2} \quad (3.1.22)$$

для спин-электрон-акустических волн.

Первые два слагаемых в спектре ленгмюровской волны (3.1.21) представляют собой вклад известный из одножидкостного спектра квантовых ленгмюровских волн, а именно квадрат ленгмюровской частоты, вклад спин-поляризованного давления Ферми, пропорциональный k_z^2 , и вклад квантового потенциала Бома, пропорциональный k_z^4 . Дополнительное слагаемое связано с отдельной спиновой эволюцией. Оно также содержит слагаемые пропорциональные k_z^2 и k_z^4 . Однако, это слагаемое исчезает в пределе нулевой спиновой поляризации. Отметим, что дополнительное слагаемое положительно и увеличивает частоту ленгмюровских волн.

Спектр спин-электрон акустических волн, в рассматриваемом приближении, состоит из двух слагаемых. Первое пропорционально сумме квадратов скоростей Ферми электронов с разной проекцией спина и представляет собой вклад спин-поляризованного давления Ферми, наряду с квантовым потенциалом Бома. Второе слагаемое это тоже слагаемое, которое возникло в спектре ленгмюровских волн, но здесь оно возникает с противоположным знаком и приводит к уменьшению частоты спин-электрон акустических волн. Обратим внимание на первое слагаемое: $\omega^2 \approx \frac{1}{2}(u_\uparrow^2 + u_\downarrow^2)k_z^2$. Несмотря на то, что это слагаемое не исчезает в пределе нулевой спиновой поляризации, это решение не существует при нулевой поляризации как это видно из исходного дисперсионного уравнения (3.1.15).

Рассмотрим противоположный предел, а именно предел сильной спиновой поляризации, когда значение поляризации близко к единице $\eta \approx 1$. Поэтому, представим парциальные концентрации в следующем виде $n_\uparrow = n_{0e} - \delta$, $n_\downarrow = \delta$, где $\delta/n_{0e} \ll 1$.

В этом пределе формула (3.1.20) дает следующие предельные случаи:

$$\omega_+^2 = \omega_{Le}^2 + \frac{2^{\frac{2}{3}}}{3} v_{Fe}^2 k_z^2 \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\delta}{n_{0e}} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{4m_e^2} - \omega_{Le}^2 \frac{\delta}{n_{0e}} \frac{\frac{2^{\frac{2}{3}}}{3} v_{Fe}^2 k_z^2}{\omega_{Le}^2 + \frac{2^{\frac{2}{3}}}{3} v_{Fe}^2 k_z^2} \quad (3.1.23)$$

для ленгмюровских волн, и

$$\omega_+^2 = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{3} \left(\frac{\delta}{n_{0e}} \right)^{\frac{2}{3}} v_{Fe}^2 k_z^2 + \omega_{Le}^2 \frac{\delta}{n_{0e}} \frac{\frac{2^{\frac{2}{3}}}{3} v_{Fe}^2 k_z^2}{\omega_{Le}^2 + \frac{2^{\frac{2}{3}}}{3} v_{Fe}^2 k_z^2} \quad (3.1.24)$$

для спин-электрон-акустических волн.

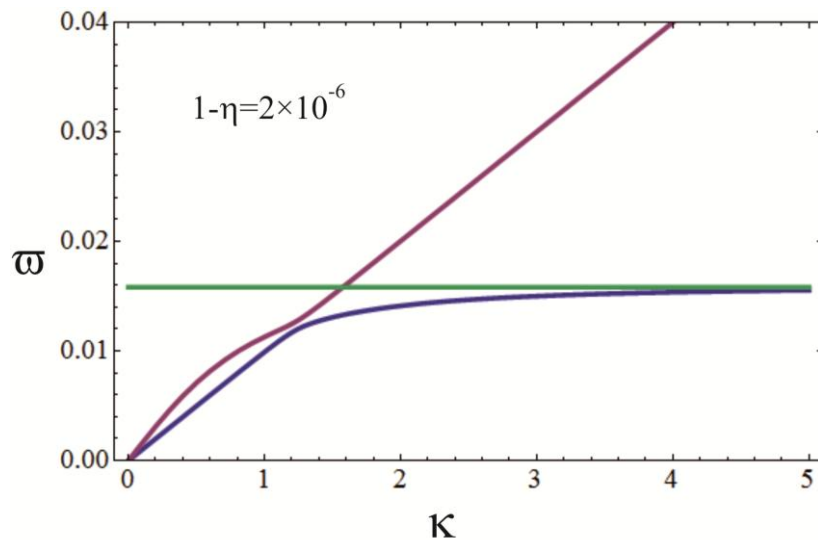


Рис. 3.1.3. Данный рисунок аналогичен рисунку (3.1.2), но здесь использовано большее значение спиновой поляризации $\eta = 0.999998$.

Второе слагаемое в уравнении (3.1.23) показывает, что малая деполяризация приводит к уменьшению вклада давления Ферми по сравнению со случаем полной спиновой поляризации. Сравнение первого и последнего слагаемых в выражении (3.1.23) показывает, что они пропорциональны ленгмюровской частоте. Причем последнее слагаемое имеет отрицательный знак и уменьшает вклад ленгмюровской частоты в спектр за счет малой деполяризации. Помимо ленгмюровской частоты последнее слагаемое содержит два множителя. Каждый из них меньше единицы. Таким образом, уменьшение вклада ленгмюровской частоты невелико и суммарно эти слагаемые дают положительный вклад в спектр. Это соответствует заключению, полученному в пределе малой спиновой поляризации, согласно

которому частота ленгмюровских волн растет с увеличением поляризации. Это также соответствует численному анализу, представленному на Рис. (3.1.1).

Перейдем к обсуждению спин-электрон-акустической волны с малой деполяризацией. Оба слагаемых в формуле (3.1.24) пропорциональны деполяризации. Основной вклад дает первое слагаемое пропорциональное $\delta^{2/3}$. Второе слагаемое пропорционально большей степени малого параметра, однако будучи положительным, оно увеличивает значение частоты спин-электрон-акустических волн. В целом видно, что частота уменьшается с увеличением поляризации в соответствии с другими данными описанными выше.

Полученные результаты легко обобщить на случай движения ионов. Запишем соответствующее дисперсионное уравнение в режиме вырожденных ионов с полуцелым спином, следуя работе [27]

$$1 - \frac{\omega_{L\uparrow}^2}{\omega^2 - u_{\uparrow}^2 k_z^2} - \frac{\omega_{L\downarrow}^2}{\omega^2 - u_{\downarrow}^2 k_z^2} - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2 - \frac{1}{3} v_{Fi}^2 k_z^2} = 0. \quad (3.1.25)$$

Приближение значения спиновой поляризации к 1 значительно уменьшает частоту спин-электрон-акустической волны. Так что динамика ионов может оказывать влияние на спектр спин-электрон-акустической волны. Численный анализ, представленный на Рис. (3.1.2), показывает, что при спиновой поляризации $\eta = 0.98$ вклад ионов пренебрежимо мал. Однако дальнейший рост спиновой поляризации, проиллюстрированный на Рис. (3.1.3), при условии $\eta = 0.98$, показывает, что возникает гибридизация спектров спин-электрон-акустических волн и ионно-звуковых волн в области сравнительно больших волновых векторов, когда спин-электрон-акустическая волна имеет приближенно линейный спектр, а спектр ионно-звуковых волн выходит на насыщение, приближаясь к ионной ленгмюровской частоте.

Полученные результаты показывают, что спектр плазмоподобных сред обогатился второй (в рассматриваемом режиме) акустической волной. В связи с этим следует отметить одно из важных последствий существования ионно-звуковой волны, а именно то, что фононы, кванты ионно-звуковых волн, участвуют в формировании куперовских пар электронов при достаточно низких температурах. Это, в свою очередь, приводит к возможности перехода металлов в

сверхпроводящее состояние. Представлены оценки вклада квантов спин-электрон-акустических волн (называемых спелнонами) в формирование куперовских пар электронов.

При исследовании квантовой плазмы в литературе большое внимание уделяется квантовому потенциалу Бома (см. третье слагаемое в уравнении Эйлера (3.1.2) и линеаризованном уравнении Эйлера (3.1.8)). Квантовый потенциал Бома проявляется в линейных и нелинейных характеристиках большинства волн в плазме. Определенно этот эффект заслуживает внимания. Однако, существует конкурирующий классический эффект связанный с конечным размером ионов [29]. Сравнение этих эффектов показывает, что они сравнимы. Более того, при определенных условиях конечный размер ионов доминирует над квантовым потенциалом Бома.

Конечный размер иона влияет на электрон-ионное и ионно-ионное кулоновское взаимодействие. Таким образом, этот эффект оказывает влияние на свойства спин-электрон-акустических волн только в пределе больших значений спиновой поляризации. Тем не менее этот эффект играет важную роль в понимании квантовой плазмы и коротковолнового диапазона волн в плотных плазмоподобных средах.

Для оценки вклада радиуса ионов в свойства плазмы и, в частности, в спектр коллективных возбуждений использована довольно грубая, но эффективная модель, где ионы рассмотрены как непроницаемые шары некоторого фиксированного радиуса, который является параметром задачи.

Это приводит к следующим линеаризованным уравнениям гидродинамики электрон-ионной плазмы [29]

$$\begin{aligned}
 -i\omega m_e n_{0e} \delta \mathbf{v}_e + m_e u_{Fe}^2 \nabla \delta n_e = -q_e n_{0e} \left(q_e \nabla \delta n_e \cdot \int_0^{+\infty} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{ik(\mathbf{r}'-\mathbf{r})} d\mathbf{r}' \right. \\
 \left. + q_i \nabla \delta n_i \cdot \int_{r_0}^{+\infty} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{ik(\mathbf{r}'-\mathbf{r})} d\mathbf{r}' \right) \quad (3.1.26)
 \end{aligned}$$

и

$$-i\omega m_i n_{0i} \delta \mathbf{v}_i + m_i v_{Ti}^2 \nabla \delta n_i = -q_i n_{0i} \left(q_e \nabla \delta n_e \cdot \int_{r_0}^{+\infty} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{ik(\mathbf{r}'-\mathbf{r})} d\mathbf{r}' \right)$$

$$+ q_i \nabla \delta n_i \cdot \int_{2r_0}^{+\infty} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{ik(\mathbf{r}'-\mathbf{r})} d\mathbf{r}' \Big), \quad (3.1.27)$$

где r_0 это радиус иона и для простоты электроны рассмотрены как единая жидкость. Уравнение непрерывности не меняются по сравнению с точечными частицами, поэтому оно здесь не приведено.

Уравнения Эйлера представлены в интегральной форме. Интегралы, входящие в уравнения Эйлера могут быть вычислены:

$$I_{ee} = \int_0^{+\infty} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{ik(\mathbf{r}'-\mathbf{r})} d\mathbf{r}' = \frac{4\pi}{k^2}, \quad (3.1.28)$$

$$I_{ei} = \int_{r_0}^{+\infty} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{ik(\mathbf{r}'-\mathbf{r})} d\mathbf{r}' = \frac{4\pi}{k^2} \cos(r_0 k), \quad (3.1.29)$$

и

$$I_{ii} = \int_{2r_0}^{+\infty} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{ik(\mathbf{r}'-\mathbf{r})} d\mathbf{r}' = \frac{4\pi}{k^2} \cos(2r_0 k). \quad (3.1.30)$$

Модель приводит к следующему спектру ионно-звуковых волн [29]:

$$\omega^2 = \omega_{Li}^2 \frac{\cos(2r_0 k) - \frac{\omega_{Le}^2}{u_{Fe}^2 k^2} \sin^2(r_0 k)}{1 + \frac{\omega_{Le}^2}{u_{Fe}^2 k^2}}. \quad (3.1.31)$$

Влияние конечного радиуса ионов проявляется в пределе малых длин волн, как и влияние квантового потенциала Бома. Менее значительная (как аналитически, так и численно) модификация возникает в спектре ленгмюровских волн через электрон-ионное взаимодействие:

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2 + \omega_{Li}^2 \cos^2(r_0 k) + u_{Fe}^2 k^2. \quad (3.1.32)$$

Таким образом, второе слагаемое в формуле (3.1.32) модифицировано конечным радиусом иона, а третье слагаемое модифицировано вкладом квантового потенциала Бома.

Выводы:

Показано, что отдельная спиновая эволюция электронов приводит к существованию нового волнового решения названного спин-электрон-акустическая волна. Спин-электрон-акустическая волна обнаружена как электростатическая волна, распространяющаяся параллельно внешнему магнитному полю. Спин-

электрон-акустическая волна имеет приближенно линейный спектр, при сравнительно небольших волновых векторах. Полагая ионы неподвижными, обнаруживаем спектр двух волн, это ленгмюровская волна и спин-электрон-акустическая волна. Учёт динамики ионов приводит к существованию хорошо известных ионно-звуковых волн. При этом спин-электрон-акустическая волна занимает промежуточный диапазон частот, по сравнению с ленгмюровской и ионно-звуковой волнами. Механизм существования ленгмюровской волны это синхронные колебания электронов относительно ионов. Однако в спин-электрон-акустической волне происходят приблизительно противофазные колебания электронов с противоположными спинами.

Отмечено, что спин-электрон-акустические волны, а точнее кванты этих волн, наряду с фононами, дают вклад в формирование куперовских пар электронов. Что проявляется в расширении диапазона температур, в котором может существовать сверхпроводимость, по сравнению с традиционной моделью сверхпроводимости. Однако такой эффект проявляется в системах с частичной спиновой поляризацией носителей заряда.

Таким образом, развитый в разделе 1.2, метод квантовой гидродинамики с отдельной спиновой эволюцией, приводит к возможности обнаружения нового явления в вырожденном частично спин поляризованном электронном газе, а именно спин-электрон-акустической волне. Поэтому ниже представлено дальнейшее исследование линейных и нелинейных свойств спин-электрон-акустических волн.

3.2 Кинетическая теория и затухание Ландау спин-электрон акустических волн

Рассмотренная выше квантовая гидродинамика с отдельной спиновой эволюцией квантовой плазмы с частично спин-поляризованными электронами приводит к существованию нового типа волновых решений, которые отсутствуют в безспиновом случае или при рассмотрении спинов электронов в рамках одножидкостной модели электронов. Дисперсионные зависимости этих волновых решений называемых спин-электрон акустические волны найдены в рамках гидродинамической модели. Очевидно, гидродинамика не учитывает процессы, приводящие к затуханию Ландау. Следовательно, вычисление мнимой части частоты спин-электрон-акустических волн и оценка величины затухания спин-электрон-акустических волн могут быть выполнены в рамках квантовой кинетики с отдельной спиновой эволюцией. Поэтому рассмотрим соответствующую модель спин-электрон-акустических волн [19].

Кинетическое уравнение для электронов со спином вверх возникает в следующем виде:

$$\begin{aligned} \partial_t f_{eu} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_{eu} + q_e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \right) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_{eu}, \\ + \mu_e \nabla B^z \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_{eu} + \frac{\mu_e}{2} (\nabla B_x \cdot \nabla_{\mathbf{p}} S_{e,x} + \nabla B_y \cdot \nabla_{\mathbf{p}} S_{e,y}) = \frac{\mu_e}{\hbar} (S_{e,x} B_y - S_{e,y} B_x). \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Кинетическое уравнение для электронов со спином вниз выводится в следующем виде

$$\begin{aligned} \partial_t f_{ed} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_{ed} + q_e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \right) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_{ed} \\ - \mu_e \nabla B^z \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_{ed} + \frac{\mu_e}{2} (\nabla B_x \cdot \nabla_{\mathbf{p}} S_{e,x} + \nabla B_y \cdot \nabla_{\mathbf{p}} S_{e,y}) = -\frac{\mu_e}{\hbar} (S_{e,x} B_y - S_{e,y} B_x). \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Рассматривая ионы как классические частицы, будем описывать их при помощи традиционного кинетического уравнения Власова:

$$\partial_t f_i + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_i + q_i \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \right) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_i = 0. \quad (3.2.3)$$

В кинетических уравнениях для электронов присутствует спиновая функция распределения. Уравнения эволюции проекций спиновой функции распределения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} & \partial_t S_{e,x} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} S_{e,x} + q_e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \right) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} S_{e,x} \\ & + \mu_e \nabla B_x \cdot \nabla_{\mathbf{p}} (f_{eu} + f_{ed}) - \frac{2\mu_e}{\hbar} (S_{e,y} B_z - (f_{eu} - f_{ed}) B_y) = 0, \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

и

$$\begin{aligned} & \partial_t S_y + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} S_{e,y} + q_e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \right) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} S_{e,y} \\ & + \mu_e \nabla B_y \cdot \nabla_{\mathbf{p}} (f_{eu} + f_{ed}) - \frac{2\mu_e}{\hbar} ((f_{eu} - f_{ed}) B_x - S_{e,x} B_z) = 0. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Как обсуждалось выше, z-проекция спиновой функции распределения не является независимой переменной и выражается через скалярные функции распределения электронов со спином вниз и спином вверх: $S_z(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_{e\uparrow}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) - f_{e\downarrow}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, при этом полная функция распределения всех электронов это сумма скалярных функций распределения электронов с определенной проекцией спина: $f_e(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_{e\uparrow}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + f_{e\downarrow}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$.

Электромагнитное поле, входящее в кинетические уравнения удовлетворяет уравнениям Максвелла, которые можно записать в следующем виде:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B}, \quad (3.2.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi e \left(\int f_i(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p} - \int f_{e\uparrow}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p} - \int f_{e\downarrow}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p} \right), \quad (3.2.7)$$

и

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} + 4\pi \gamma_e \nabla \times \int \mathbf{S}_e(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p} \\ &+ \frac{4\pi e}{c} \left(\int \mathbf{v} f_i(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p} - \int \mathbf{v} f_{e\uparrow}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p} - \int \mathbf{v} f_{e\downarrow}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p} \right), \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

где источники поля записаны через парциальные скалярные и векторную функции распределения.

Выше представлены уравнения квантовой кинетики с отдельной спиновой эволюцией. Рассмотрим равновесные решения полученных уравнений при наличии однородного постоянного внешнего магнитного поля направленного вдоль оси z. Предполагаем, что равновесное состояние однородно, кроме того равновесные функции распределения не меняются во времени. Поэтому положим производные по времени и по пространственным координатам равными нулю. Наличие

однородного магнитного поля придает аксиальную симметрию рассматриваемой физической системе. Поэтому запишем кинетические уравнения для равновесных функций распределения в цилиндрической системе координат в импульсном пространстве $\mathbf{v} = \{v_\rho, \varphi, v_z\}$. В равновесном состоянии кинетические уравнения имеют следующий вид

$$\partial_\varphi f_{0e\uparrow} = 0, \quad \partial_\varphi f_{0e\downarrow} = 0, \quad \partial_\varphi f_{0i} = 0, \quad (3.2.9)$$

и

$$\partial_\varphi S_{0e,x} = S_{0e,y}, \quad \partial_\varphi S_{0e,y} = -S_{0e,x}. \quad (3.2.10)$$

Равновесное электрическое поле также положено равным нулю.

В отсутствие спиновой поляризации для вырожденных электронов следующая функция удовлетворяет поставленным условиям

$$f_{0e} = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \theta(p_{Fe} - p), \quad (3.2.11)$$

где $p_{Fe} = (3\pi^2 n_{0e})^{\frac{1}{3}} \hbar$ импульс Ферми и $\theta(p_{Fe} - p)$ тета-функция Хевисайда дающая распределение в виде ступеньки Ферми.

Принимая во внимание спиновую поляризацию, получим следующие парциальные функции распределения в виде ступенек Ферми различной ширины:

$$f_{0s} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \theta(p_{Fs} - p). \quad (3.2.12)$$

Это соответствует спин поляризованной скалярной функции распределения:

$$f_{0e} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} [\theta(p_{F\uparrow} - p) + \theta(p_{F\downarrow} - p)]. \quad (3.2.13)$$

Рассматривая ионы как классические частицы, используем распределение Максвелла в качестве равновесной функции распределения ионов:

$$f_{0i}(\mathbf{p}) = \frac{n_{0i}}{(\sqrt{2\pi m_i T_i})^3} \exp\left(-\frac{\mathbf{p}^2}{2m_i T_i}\right), \quad (3.2.14)$$

где T_i это температура ионов.

В режиме вырожденных ионов будем полагать, что ионы не поляризованы и используем ступеньку Ферми в качестве равновесной функции распределения

$$f_{0i} = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \Theta(p_{Fi} - p).$$

Уравнения для проекций спиновой равновесной функции распределения имеют следующие решения

$$S_{0x} = C(p_{\parallel}, p_{\perp}) \cos(\varphi + \varphi_0), \quad (3.2.15)$$

и

$$S_{0y} = C(p_{\parallel}, p_{\perp}) \sin(\varphi + \varphi_0). \quad (3.2.16)$$

В простейшем случае можно рассмотреть тривиальные решения, когда $C(p_{\parallel}, p_{\perp}) = 0$. В этом случае все равновесные функции являются изотропными. Однако, в общем случае коэффициент $C(p_{\parallel}, p_{\perp})$ отличен от нуля. В силу того, что равновесная намагниченность вырожденного электронного газа существует, вследствие различия импульса Ферми для электронов с различной проекцией спина то функции S_{0x} и S_{0y} могут быть положены пропорциональными разности ступенек Ферми, по аналогии с z-проекцией равновесной спиновой функции распределения. Следовательно, получаем следующие выражения для проекций равновесной спиновой функции распределения:

$$S_{0x} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \left(\Theta(p_{F\uparrow} - p) - \Theta(p_{F\downarrow} - p) \right) \cos(\varphi + \varphi_0), \quad (3.2.17)$$

и

$$S_{0y} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \left(\Theta(p_{F\uparrow} - p) - \Theta(p_{F\downarrow} - p) \right) \sin(\varphi + \varphi_0). \quad (3.2.18)$$

Запишем линеаризованные кинетические уравнения. Линеаризованное кинетическое уравнение для электронов со спином вверх возникает в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \partial_t \delta f_{eu} + \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{r}} \delta f_{eu} + q_e \left(\delta \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \delta \mathbf{B}] \right) \cdot \partial_{\mathbf{p}} f_{0eu} + q_e \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}_0] \cdot \partial_{\mathbf{p}} \delta f_{eu} \\ & + \mu_e \nabla \delta B_z \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_{0eu} + \frac{\mu_e}{2} \left(\nabla \delta B_x \cdot \nabla_{\mathbf{p}} S_{0e,x} + \nabla \delta B_y \cdot \nabla_{\mathbf{p}} S_{0e,y} \right) = \frac{\mu_e}{\hbar} \left(S_{0e,x} \delta B_y - S_{0e,y} \delta B_x \right). \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

Линеаризованное кинетическое уравнение для электронов со спином вниз имеет вид:

$$\begin{aligned} & \partial_t \delta f_{ed} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta f_{ed} + q_e \left(\delta \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \delta \mathbf{B}] \right) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_{0ed} + q_e \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}_0] \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \delta f_{ed} \\ & - \mu_e \nabla_{\alpha} \delta B_z \cdot \nabla_{\mathbf{p}\alpha} f_{0ed} + \frac{\mu_e}{2} \left(\nabla \delta B_x \cdot \nabla_{\mathbf{p}} S_{0e,x} + \nabla \delta B_y \cdot \nabla_{\mathbf{p}} S_{0e,y} \right) = -\frac{\mu_e}{\hbar} \left(S_{0e,x} \delta B_y - S_{0e,y} \delta B_x \right). \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

Линеаризованное кинетическое уравнение для ионов имеет стандартный вид:

$$\partial_t \delta f_i + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta f_i + q_i \left(\delta \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \delta \mathbf{B}] \right) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_{0i} + q_i \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}_0] \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \delta f_i = 0. \quad (3.2.21)$$

Линеаризованное кинетическое уравнение для x-проекции спиновой функции распределения электронов:

$$\begin{aligned} \partial_t \delta S_{e,x} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta S_{e,x} + q_e \left(\delta \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \delta \mathbf{B}] \right) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} S_{0e,x} + q_e \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}_0] \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \delta S_{e,x} \\ + \mu_e \nabla \delta B_x \cdot \nabla_{\mathbf{p}} (f_{0eu} + f_{0ed}) = \frac{2\mu_e}{\hbar} (\delta S_{e,y} B_{0z} + S_{0e,y} \delta B_z - (f_{0eu} - f_{0ed}) \delta B_y). \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

И последнее, линеаризованное кинетическое уравнение для y-проекции спиновой функции распределения электронов:

$$\begin{aligned} \partial_t \delta S_y + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta S_{e,y} + q_e \left(\delta \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \delta \mathbf{B}] \right) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} S_{0e,y} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}_0] \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \delta S_{e,y} \\ + \mu_e \nabla \delta B_y \cdot \nabla_{\mathbf{p}} (f_{0eu} + f_{0ed}) = \frac{2\mu_e}{\hbar} ((f_{0eu} - f_{0ed}) \delta B_x - S_{0e,x} \delta B_z - \delta S_{e,x} B_{0z}). \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

Будем рассматривать объемные волны с плоским волновым фронтом, т.е. будем считать, что возмущения всех функций распределения пропорциональны $e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, где ω это частота возмущения и \mathbf{k} это волновой вектор. Рассмотрим электростатические возбуждения и выразим возмущения функций распределения через возмущения напряженности электрического поля. Подставим найденные выражения в уравнение Пуассона и найдем следующее дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} 1 + \frac{8\pi^2 e^2}{k} \left\{ \sum_{s=u,d} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{p_{Fs}^2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \frac{J_n^2 \left(\frac{k_x v_{Fs} \sin\theta}{\Omega_s} \right)}{k_z v_{Fs} \cos\theta - \omega + n\Omega_e} \left[\cos\alpha \cos\theta + \frac{n\Omega_e}{kv_{Fs}} \right] \right. \\ \left. + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n_{0i}}{(2\pi m_i T_i)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\pi T_i} \int d\mathbf{p} \frac{v J_n^2 \left(\frac{k_x v_{Ti} \sin\theta}{\Omega_i} \right) e^{-\frac{p^2}{2m_i T_i}}}{k_z v_z - \omega + n\Omega_i} \left[\cos\alpha \cos\theta + \frac{n\Omega_i}{kv_{Ti}} \right] \right\} = 0, \quad (3.2.24) \end{aligned}$$

где $v_z = v \cos\theta$, $v_\perp = v \sin\theta$, для проекций скорости и $k_z = k \cos\alpha$, $k_x = k \sin\alpha$, для проекций волнового вектора. Кроме того, в дисперсионном уравнении (3.2.24) использованы следующие обозначения: $J_n(x)$, это функция Бесселя n -го порядка и Ω_a это циклотронная частота.

Первое слагаемое в фигурных скобках описывает вклад электронов, а второе вклад ионов. Вклад электронов содержит дельта функцию Дирака зависящую от модуля импульса, которая возникает как производная от тета функции. Поэтому тривиальное интегрирование по модулю импульса уже выполнено в дисперсионном уравнении (3.2.24).

Рассмотрим волны, распространяющиеся параллельно внешнему магнитному полю $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$, при этом $\alpha = 0$, следовательно $k_x = 0$, и $k_z = k$. При этом аргументы функций Бесселя обращаются в ноль, поэтому используем следующие свойства функций Бесселя $J_n(0) = 0$ при $n \neq 0$, и $J_0(0) = 1$. В итоге из всей суммы по n останется только одно слагаемое с $n = 0$. Соответствующее дисперсионное уравнение имеет следующий упрощенный вид:

$$1 + \frac{8\pi^2 e^2}{k^2} \left[\sum_{s=u,d} \frac{m_e^2 v_{Fs}}{(2\pi\hbar)^3} \left(2 + \omega \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{kv_{Fs} \cos\theta - \omega} \right) + \frac{1}{2\pi T_i} \frac{n_{0i}}{(2\pi m_i T_i)^{\frac{1}{2}}} \left((2\pi m_i T_i)^{\frac{1}{2}} + \omega \int \frac{e^{-\frac{p_z^2}{2m_i T_i}}}{kv_z - \omega} dp_z \right) \right] = 0. \quad (3.2.25)$$

Ионная часть дисперсионного уравнения для классических ионов содержит следующую хорошо известную в литературе функцию:

$$Z(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-\xi^2)}{\xi - \alpha} d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-\xi^2)}{\xi - \alpha} d\xi \right] + i\sqrt{\pi} \exp(-\alpha^2). \quad (3.2.26)$$

Здесь использованы следующие компактные обозначения: $\alpha = \frac{\omega}{kv_T}$ и $v_T \equiv \sqrt{\frac{T}{m}}$.

Рассмотрим хорошо известный высокочастотный предел функции $Z(\alpha)$, т.е. перейдем к следующему пределу: $\alpha \gg 1$. В результате разложения в ряд Тейлора найдем следующий результат:

$$Z(\alpha) \approx -\frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{1}{2\alpha^2} + \frac{3}{4\alpha^4} + \dots \right) + i\sqrt{\pi} \exp(-\alpha^2). \quad (3.2.27)$$

Ниже, эта приближенная формула будет использована для описания вклада классических ионов в спектр плазменных волн.

Спектр продольных волн распространяющихся параллельно внешнему магнитному полю в частично спин-поляризованной плазме

Вычисляя интегралы по θ и p_z в уравнении (3.2.25) получим явный вид дисперсионных уравнений. Выполним это в предельных случаях.

Рассматривая классические ионы в режиме относительно больших частот (3.2.27) и беря интеграл по θ в общем виде получаем следующее дисперсионное уравнение

$$1 = \frac{3}{2} \frac{\omega_{L\uparrow}^2}{v_{F\uparrow}^2 k^2} \left(\frac{\omega}{kv_{F\uparrow}} \ln \frac{\omega + kv_{F\uparrow}}{\omega - kv_{F\uparrow}} - 2 \right) + \frac{3}{2} \frac{\omega_{L\downarrow}^2}{v_{F\downarrow}^2 k^2} \left(\frac{\omega}{kv_{F\downarrow}} \ln \frac{\omega + kv_{F\downarrow}}{\omega - kv_{F\downarrow}} - 2 \right) + \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega^2} \right) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} i \frac{\omega_{Li}}{k^2 v_{Ti}^2} \frac{\omega}{kv_{Ti}} \exp \left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2} \right). \quad (3.2.28)$$

Выше показана формула для приближенного анализа вклада классических ионов в дисперсионное уравнение. Кроме того, запишем приближенные формулы для анализа вклада вырожденных носителей, которые также хорошо известны в литературе:

$$\frac{\omega}{kv_{Fa}} \ln \frac{\omega + kv_{Fa}}{\omega - kv_{Fa}} \approx 2 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{k^2 v_{Fa}^2}{\omega^2} + \frac{1}{5} \frac{k^4 v_{Fa}^4}{\omega^4} \right) \quad (3.2.29)$$

при $\omega \gg kv_{Fa}$,

и

$$\frac{\omega}{kv_{Fa}} \ln \frac{\omega + kv_{Fa}}{\omega - kv_{Fa}} \approx -\pi i \frac{\omega}{kv_{Fa}} + 2 \frac{\omega^2}{k^2 v_{Fa}^2} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\omega^2}{k^2 v_{Fa}^2} \right) \quad (3.2.30)$$

в противоположном пределе $\omega \ll kv_{Fa}$.

Далее используя уравнение (3.2.28) и приближенные формулы (3.2.29) и (3.2.30) рассмотрим спектр спин-электрон-акустических волн.

Спин-электрон-акустические волны: Режим классических ионов

Рассмотрим частоту волны и спиновую поляризацию электронов в следующем диапазоне $kv_{Ti}, kv_{Fu} \ll \omega \ll kv_{Fd}$, который позволяет получить аналитическое решение для дисперсионной зависимости спин-электрон-акустических волн. В данном диапазоне параметров, дисперсионное уравнение (3.2.28) принимает следующий вид:

$$1 + 3 \frac{\omega_{Ld}^2}{k^2 v_{Fd}^2} \left(1 + \frac{\pi}{2} i \frac{\omega}{kv_{Fd}} - \frac{\omega^2}{k^2 v_{Fd}^2} \right)$$

$$= \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3}{5} \frac{k^2 v_{Fu}^2}{\omega^2} \right) + \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega^2} \right) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} l \frac{\omega_{Li}^2}{k^2 v_{Ti}^2} \frac{\omega}{k v_{Ti}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}\right). \quad (3.2.31)$$

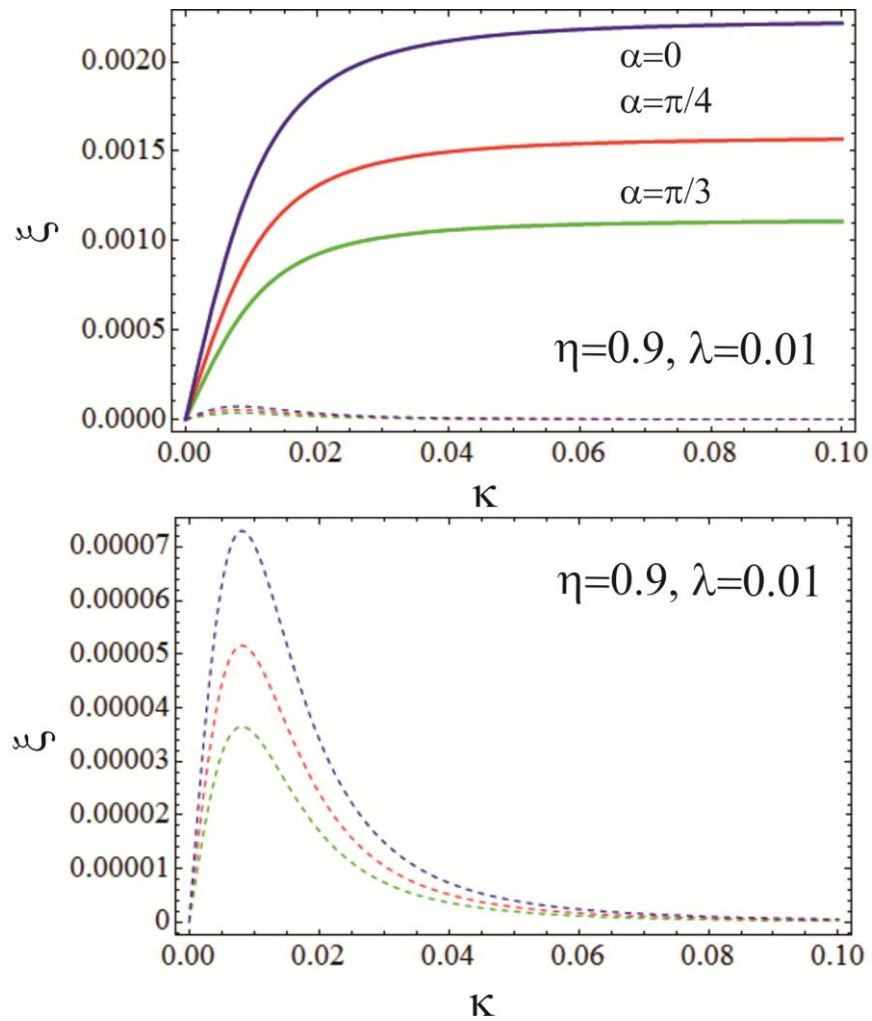


Рис. 3.2.1 Непрерывные линии показывают действительную часть частоты спин-электрон-акустических волн. Пунктирные линии показывают взятую с обратным знаком мнимую часть частоты спин-электрон-акустических волн. значения параметров показаны на рисунке. Решения получены для трех направлений распространения волн.

Действительная часть уравнения (3.2.31) представляет собой биквадратное уравнение относительно частоты. Будем также полагать, что мнимая часть уравнения дает малый вклад в решение. Пренебрегая слагаемыми, возникающими во втором порядке по малому параметру, приходим к линейному уравнению относительно квадрата частоты, которое дает следующее решение:

$$\omega_{R0}^2 = \frac{\omega_{Lu}^2 + \omega_{Li}^2}{1 + 3 \frac{\omega_{Ld}^2}{k^2 v_{Fd}^2}}. \quad (3.2.32)$$

Учитывая второй порядок малости посредством метода итераций, найдем дисперсию спин-электрон-акустических волн в более общем виде:

$$\omega_R^2 = \frac{\omega_{Lu}^2 \left(1 + \frac{3}{5} \frac{k^2 v_{Fu}^2}{\omega_{R0}^2}\right) + \omega_{Li}^2 \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega_{R0}^2}\right)}{1 + 3 \frac{\omega_{Ld}^2}{k^2 v_{Fd}^2} - 3 \frac{\omega_{Ld}^2 \omega_{R0}^2}{k^4 v_{Fd}^4}}. \quad (3.2.33)$$

Полагая, что мнимая часть дисперсионного уравнения является малой, найдем мнимую часть частоты методом итераций:

$$\omega_{im} = \frac{1}{2} \omega_R \frac{\frac{3\pi}{2} \frac{\omega_{Ld}^2}{k^2 v_{Fd}^2} \frac{\omega_{R0}}{k v_{Fd}} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{Li}^2}{k^2 v_{Ti}^2} \frac{\omega_{R0}}{k v_{Ti}} \exp\left(-\frac{\omega_{R0}^2}{2k^2 v_{Ti}^2}\right)}{1 + 3 \frac{\omega_{Ld}^2}{k^2 v_{Fd}^2} - 3 \frac{\omega_{Ld}^2 \omega_{R0}^2}{k^4 v_{Fd}^4}}. \quad (3.2.34)$$

Числитель дроби в формуле (3.2.34) состоит из двух частей. Первое слагаемое определяется электронами со спином вниз. Второе слагаемое связано с ионами с конечной температурой.

Полученные решения (3.2.32) и (3.2.33) удобно проанализировать в пределе больших длин волн $\omega_{Ld} \gg k v_{Fd}$. Это дает линейный спектр спин-электрон-акустических волн:

$$\omega_{R0}^2 = \frac{1}{3} k^2 v_{Fd}^2 \frac{\omega_{Lu}^2 + \omega_{Li}^2}{\omega_{Ld}^2}. \quad (3.2.35)$$

Пренебрегая вкладом ионов в формуле (3.2.35), выполним дальнейшее упрощение дисперсионной зависимости спин-электрон-акустических волн:

$$\omega_{R0}^2 = \frac{1}{3} \frac{n_{0u}}{n_{0d}} k^2 v_{Fd}^2. \quad (3.2.36)$$

Формулы (3.2.32) и (3.2.36) показывают, что спектр спин-электрон-акустических волн является линейным при малых значениях волнового вектора. С ростом волнового вектора частота выходит на насыщение, так что частота становится приблизительно равной парциальной ленгмюровской частоте электронов со спином вверх ω_{Lu} .

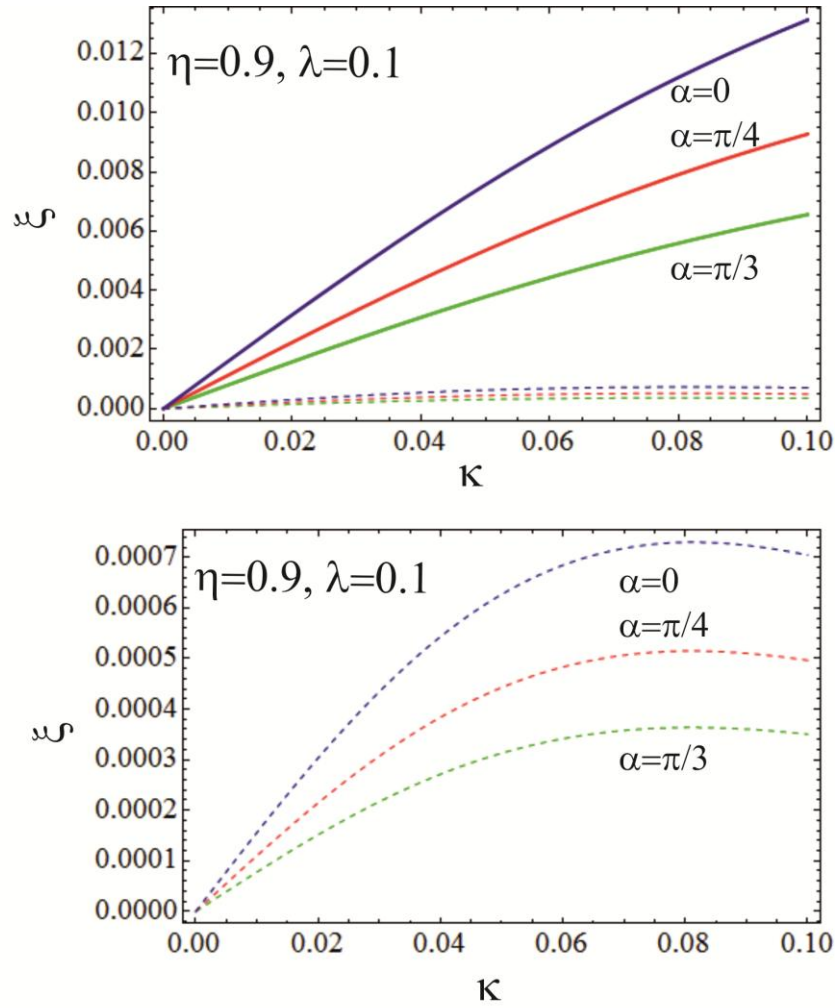


Рис. 3.2.2 Непрерывные линии показывают действительную часть частоты спин-электрон-акустических волн. Пунктирные линии показывают взятую с обратным знаком мнимую часть частоты спин-электрон-акустических волн. значения параметров показаны на рисунке. Решения получены для трех направлений распространения волн.

Спин-электрон-акустические волны: Режим вырожденных ионов.

Рассматривая ионы как вырожденный Ферми газ и ограничиваясь следующим диапазоном параметров $kv_{Fi}, kv_{Fu} \ll \omega \ll kv_{Fd}$, получим следующее дисперсионное уравнение для спин-электрон-акустических волн:

$$1 + 3 \frac{\omega_{Ld}^2}{k^2 v_{Fd}^2} \left(1 + \frac{\pi}{2} \frac{\omega}{kv_{Fd}} - \frac{\omega^2}{k^2 v_{Fd}^2} \right) = \frac{\omega_{Lu}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3}{5} \frac{k^2 v_{Fu}^2}{\omega^2} \right) + \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3}{5} \frac{k^2 v_{Fi}^2}{\omega^2} \right). \quad (3.2.37)$$

Основное отличие это уравнения от рассмотренного выше предела классического газа ионов состоит в отсутствии мнимой части вызванной ионами. В данном случае мнимая часть возникает только от электронов со спином вниз. Поэтому решение

для мнимой части частоты измениться значительно. Решение, для действительной части частоты возникающее без учета малых поправок не измениться. При учете малых действительных слагаемых структура решения останется такой же, как и в предыдущем случае с заменой v_{Ti} на v_{Fi} . Принимая во внимание малость мнимой части в дисперсионном уравнении (3.2.37), получим следующее решение для мнимой части частоты спин-электрон-акустических волн:

$$\omega_{im} = \frac{1}{2} \omega_R \frac{\frac{3\pi}{2} \frac{\omega_{Ld}^2}{k^2 v_{Fd}^2} \frac{\omega_{R0}}{k v_{Fd}}}{1 + 3 \frac{\omega_{Ld}^2}{k^2 v_{Fd}^2} - 3 \frac{\omega_{Ld}^2 \omega_{R0}^2}{k^4 v_{Fd}^4}}. \quad (3.2.38)$$

Аналитически рассмотрим следующий предельный случай для сравнения мнимой и действительной частей частоты спин-электрон-акустических волн $\omega_{Ld}^2 \gg k^2 v_{Fd}^2$. Оценка мнимой части частоты показывает, что мнимая часть много меньше, чем действительная часть частоты:

$$\omega_{im} = \frac{3\pi}{4} \frac{\omega_{Ld}^2}{k^2 v_{Fd}^2} \frac{\omega_{R0}}{k v_{Fd}} \omega_{R0} \ll \omega_{R0}. \quad (3.2.39)$$

Следовательно, спин-электрон-акустические волны являются слабозатухающими волнами, что делает оправданным более подробное исследование этого явления.

Решая дисперсионное уравнение (3.2.37) методом итераций, найдем действительную часть частоты, во втором порядке по малым параметрам. Эти параметры определены неравенством $k v_{Fi}, k v_{Fu} \ll \omega \ll k v_{Fd}$. В итоге получим выражение

$$\omega_R^2 = \frac{\omega_{Lu}^2 \left(1 + \frac{3}{5} \frac{k^2 v_{Fu}^2}{\omega_{R0}^2} \right) + \omega_{Li}^2 \left(1 + \frac{3}{5} \frac{k^2 v_{Fi}^2}{\omega_{R0}^2} \right)}{1 + 3 \frac{\omega_{Ld}^2}{k^2 v_{Fd}^2} - 3 \frac{\omega_{Ld}^2 \omega_{R0}^2}{k^4 v_{Fd}^4}}. \quad (3.2.40)$$

Решение (3.2.40) является вариацией решения (3.2.33) для случая вырожденных ионов.

Спин-электрон-акустические волны и затухание Ландау спин-электрон-акустических волн при произвольном направлении распространения волн относительно внешнего магнитного поля

Хотя в работе [19] было выведено дисперсионное уравнение для волн распространяющихся под произвольным углом к внешнему магнитному полю при учете отдельной спиновой эволюции. Анализ спектра был выполнен только для волн распространяющихся параллельно внешнему магнитному полю. Далее последуем работе [13], где рассмотрены действительная и мнимая части спектра спин-электрон-акустических волн при распространении волн под произвольным углом к внешнему магнитному полю.

Рассмотрим предел длинных волн, в этом случае разложим функции Бесселя входящие в уравнение (3.2.24) в ряд $J_n(x) \approx (x/2)^n / n!$. После разложения проинтегрируем полученное выражение по углу $J_n(x) \approx (x/2)^n / n!$. В итоге, даже ограничиваясь $n \in [-4, 4]$, получается громоздкое выражение, представленное в аппендиксе к работе [13]. Для дальнейшего упрощения выберем следующий режим, где частота волны близка к одной из гармоник циклотронной частоты (включая нулевую гармонику), так что $a_u \ll |n_0 - \xi| \ll a_d$ для фиксированного значения n_0 , поэтому $a_u \ll a_d \ll |n - \xi|$ для остальных значений $n \neq n_0$. Это соответствует значительной разнице параметров a_u и a_d , а значит сравнительно большим значениям спиновой поляризации.

В случае $n_0 = 0$ аналитически получено следующее дисперсионное уравнение из уравнения (3.2.24)

$$1 - \frac{1}{2}(1-\eta)\lambda^2 \frac{\cos^2 \alpha}{\xi^2} + \frac{3}{4}(1+\eta) \frac{\lambda^2}{a_d^2} \left(2 - \frac{2\xi^2}{a_d^2 \cos^2 \alpha} + \pi i \frac{\xi}{a_d \cos \alpha} \right) + \sum_s 3\lambda^2 \frac{n_{0s}}{n_{0e}} \sum_{n=1}^5 \frac{a_s^{2n-2} \sin^{2n} \alpha}{c_n (n!)^2} = 0, \quad (3.2.41)$$

где $c_1 = 3$, $c_2 = 3 \cdot 5$, $c_3 = 2 \cdot 5 \cdot 7$, $c_4 = 5 \cdot 7 \cdot 9$, $c_5 = 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11$, $\xi = \omega / |\Omega_e|$, $\lambda = \omega_{Le} / |\Omega_e|$, $\kappa = kv_{Fe} / |\Omega_e|$, $a_u = (1-\eta)^{1/3} \kappa$, $a_d = (1+\eta)^{1/3} \kappa$, и приближение $\xi \rightarrow 0$. Принято в последнем слагаемом уравнения (3.2.41).

Рассмотренное здесь значение $n_0 = 0$ соответствует дисперсионному уравнению для спин-электрон-акустических волн распространяющихся под произвольным углом к внешнему магнитному полю.

Рассмотрим различные группы слагаемых в уравнении (3.2.41). Видно что увеличение номера в последнем слагаемом приводит к увеличению знаменателя $\sim c_n (n!)^2$, где $c_n > 1$. Более того, все остальные множители в последнем слагаемом в уравнении (3.2.41) меньше единицы. Поэтому слагаемые с большим значением n дают пренебрежимо малый вклад в спектр спин-электрон-акустических волн.

В длинноволновом приближении уравнение (3.2.41) дает следующее решение для комплексной частоты

$$\xi^2 = \frac{1}{3} \frac{1-\eta}{1+\eta} a_d^2 \cos^2 \alpha \left(1 - \frac{\pi i}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}} \right). \quad (3.2.42)$$

Более полный анализ спектра спин-электрон-акустических волн возникающий из уравнения (3.2.41) представлен на Рисунках (3.2.1) и (3.2.2).

Рисунки (3.2.1) и (3.2.2) выполнены для трех углов распространения волн. Более того, мнимая часть частоты вынесена на отдельные рисунки, так как значение мнимой части частоты мало по сравнению с действительной частью. Для иллюстрации выбрано одно значение спиновой поляризации $\eta = 0.9$, но два разных значения отношения ленгмюровской частоты к циклотронной частоте. Действительная часть частоты идет линейно при малых волновых векторах выходя на насыщение. Это соответствует результатам аналитической модели полученной при распространении волн параллельно внешнему магнитному полю. Этот результат подтверждается и для других направлений распространения. Однако, с увеличением угла происходит уменьшение частоты насыщения. Мнимая часть частоты ведет себя немонотонно и имеет один максимум модуля мнимой части при волновых векторах близких к значению при котором происходит переход действительной частоты к насыщению. Более того, при меньших значениях параметра λ насыщение действительной части частоты и максимум модуля мнимой части частоты происходят при меньших значениях безразмерного волнового вектора, как это видно из сравнения Рисунков (3.2.1) и (3.2.2).

Выводы.

Кинетическая модель с отдельной спиновой эволюцией использована для исследования объемных волн малой амплитуды в электрон-ионной плазме с вырожденными и спин-поляризованными электронами. Получено дисперсионное уравнение для электростатических волн, распространяющихся под произвольным

углом к внешнему магнитному полю, но основное внимание уделено его решениям при распространении волн параллельно внешнему магнитному полю. Однако приближенные аналитические и численные решения получены и при произвольном направлении распространения. Кинетическая модель дает более детальную картину спектра спин-электрон-акустических волн по сравнению с гидродинамической моделью.

Кроме того, обнаружено затухание Ландау для спин-электрон-акустических волн. Показано, что в значительной области параметров затухание мало по сравнению с действительной частью частоты. В отличие от классической плазмы, где затухание Ландау для ленгмюровских волн экспоненциально мало, в данном случае имеем приближенно прямую пропорциональность между действительной и мнимой частями частоты спин-электрон-акустических волн. Исследование выполнено для двух режимов динамики ионов: классические ионы и вырожденные ионы для достаточно низкой температуры плазмоподобной среды.

Малая величина затухания показывает необходимость дальнейшего исследования свойств спин-электрон-акустических волн в вырожденных плазмоподобных средах с частичной спиновой поляризацией носителей заряда.

3.3 Распространение спин-электрон акустических волн под произвольным углом к внешнему магнитному полю

В этом разделе остановимся подробнее на гидродинамическом анализе электростатических волн в плазмподобной среде распространяющихся под произвольным углом к внешнему магнитному полю. Частично спин-поляризованная среда моделируется уравнениями квантовой гидродинамики с отдельной спиновой эволюцией. Рассматриваются свойства всех волн, включая спин-электрон-акустическую волну, следуя работе [24].

Равновесное состояние описывается отличными от нуля концентрациями электронов с различными проекциями спина $n_{0\uparrow}$, $n_{0\downarrow}$, $n_0 = n_{0\uparrow} + n_{0\downarrow}$, и внешним магнитным полем, направленным вдоль оси z , $\mathbf{B}_{ext} = B_0 \mathbf{e}_z$. Равновесные значения остальных величин равны нулю: $\mathbf{v}_{0\uparrow} = \mathbf{v}_{0\downarrow} = 0$, $\mathbf{E}_0 = 0$, $S_{0x} = S_{0y} = 0$.

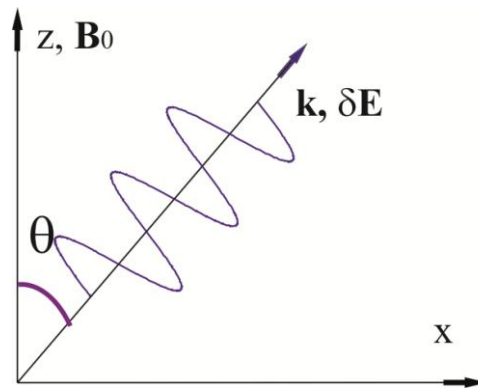


Рис. 3.3.1. представлена иллюстрация волны распространяющейся под углом θ к направлению внешнего магнитного поля, у которой направление возмущения напряженности электрического поля совпадает с направлением распространения волны.

Рассмотрим возмущения физических величин δn_{\uparrow} , δn_{\downarrow} , $\delta \mathbf{B}$, $\delta \mathbf{v}_{\uparrow}$, $\delta \mathbf{v}_{\downarrow}$, $\delta \mathbf{E}$, δS_x , δS_y в виде плоских монохроматических волн $\delta f = F_A e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, где δf представляет собой возмущение физической величины и F_A является амплитудой соответствующего возмущения.

Далее, без ограничения общности предполагаем, что волновой вектор имеет следующую структуру: $\mathbf{k} = \{k_x, 0, k_z\}$, $k_x = k \sin \theta$, $k_z = k \cos \theta$, где $k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$ и θ , это угол между направлением распространения волны и направлением внешнего

магнитного поля. В случае рассматриваемых в этом параграфе продольных волн возмущения магнитного поля равны нулю $\delta\mathbf{B} = 0$.

Парциальные скорости Ферми для электронов с определенным значением спина имеют следующий вид: $U_s^2 = \left(6\pi^2\right)^{\frac{2}{3}} \hbar^2 n_{0s}^{\frac{2}{3}} / 3m^2 = v_{Fs}^2 / 3$, где $s = u, d$ или $s = \uparrow, \downarrow$.

Представим основные шаги вывода дисперсионного уравнения. После линеаризации уравнений (3.1.1)-(3.1.6) и принимая во внимание электростатические уравнения Максвелла, находим следующие алгебраические уравнения:

$$-i\omega\delta n_s + ik_x n_{0s} \delta v_{s,x} + ik_z n_{0s} \delta v_{s,z} = 0, \quad (3.3.1)$$

$$-i\omega m n_{0s} \delta \mathbf{v}_s + im \mathbf{k} \left(U_s^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{4m^2} \right) \delta n_s = q_e n_{0s} \delta \mathbf{E} + \frac{q_e}{c} n_{0s} [\delta \mathbf{v}_s, \mathbf{B}_0], \quad (3.3.2)$$

$$ik_x \delta E_x + ik_z \delta E_z = -4\pi e (\delta n_{\uparrow} + \delta n_{\downarrow}), \quad (3.3.3)$$

и

$$\mathbf{e}_x (-k_z \delta E_y) + \mathbf{e}_y (k_z \delta E_x - k_x \delta E_z) + \mathbf{e}_z k_x \delta E_y = 0. \quad (3.3.4)$$

Так как $k_x \neq 0$, и $k_z \neq 0$, то уравнение (3.3.4) приводит к $\delta E_y = 0$. Уравнение (3.3.4) также дает связь между δE_x и δE_z :

$$k_z \delta E_x = k_x \delta E_z. \quad (3.3.5)$$

Запишем линеаризованное уравнение Эйлера (3.3.2) через проекции разделяя проекции скорости и возмущения других физических величин

$$-i\omega m n_{0s} \delta v_x - \frac{q_e}{c} n_{0s} B_0 \delta v_y = q_e n_{0s} \delta E_x - ik_x m \left(U_s^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{4m^2} \right) \delta n_s, \quad (3.3.6)$$

$$-i\omega m n_{0s} \delta v_y + \frac{q_e}{c} n_{0s} B_0 \delta v_x = 0, \quad (3.3.6)$$

и

$$-i\omega m n_{0s} \delta v_z = q_e n_{0s} \delta E_z - ik_z m \left(U_s^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{4m^2} \right) \delta n_s. \quad (3.3.8)$$

Из уравнений (3.3.6)-(3.3.8) находим, что проекции поля скоростей возникают в следующем виде:

$$\delta v_x = \frac{i\omega}{m n_{0s}} \frac{q_e n_{0s} \delta E_x - ik_x m \left(U_s^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{4m^2} \right) \delta n_s}{\omega^2 - \Omega^2}, \quad (3.3.9)$$

$$\delta v_y = -i\Omega\delta v_x / \omega, \quad (3.3.10)$$

и

$$\delta v_z = \frac{i}{mn_{0s}} \frac{1}{\omega} \left[q_e n_{0s} \delta E_z - ik_z m \left(U_s^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{4m^2} \right) \delta n_s \right]. \quad (3.3.11)$$

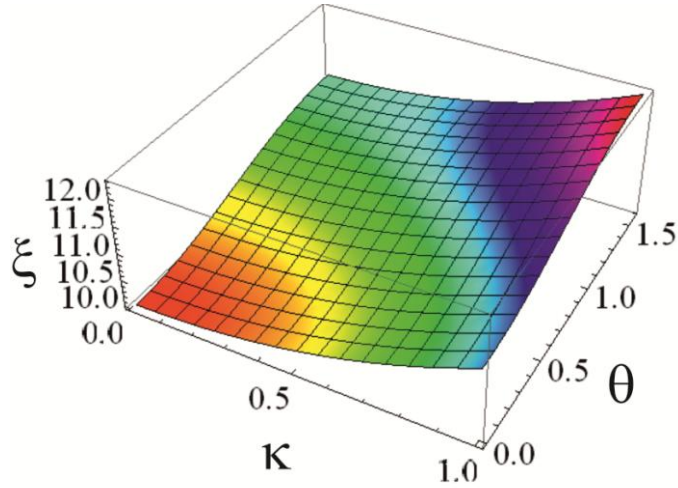


Рис. 3.3.2. Показана анизотропная дисперсионная зависимость ленгмюровской волны.

Далее, подставляем проекции поля скоростей в уравнение непрерывности (3.3.1). Это дает следующие выражения для возмущений концентрации электронов со спином вверх и спином вниз через напряженность электрического поля:

$$\delta n_s = iq_e n_{0s} \frac{\frac{k_x \delta E_x}{\omega^2 - \Omega^2} + \frac{k_z \delta E_z}{\omega^2}}{1 - U_s^2 \left(\frac{k_x^2}{\omega^2 - \Omega^2} + \frac{k_z^2}{\omega^2} \right)}. \quad (3.3.12)$$

Подставляя концентрации (3.3.12) в уравнение Пуассона (3.3.3) и используя связь между проекциями возмущения напряженности электрического поля, получаем дисперсионное уравнение:

$$1 - \left(\frac{\sin^2 \theta}{\omega^2 - \Omega^2} + \frac{\cos^2 \theta}{\omega^2} \right) \times \left[\frac{\omega_{Lu}^2}{1 - \left(\frac{\sin^2 \theta}{\omega^2 - \Omega^2} + \frac{\cos^2 \theta}{\omega^2} \right) \left(U_u^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{4m^2} \right) k^2} + \frac{\omega_{Ld}^2}{1 - \left(\frac{\sin^2 \theta}{\omega^2 - \Omega^2} + \frac{\cos^2 \theta}{\omega^2} \right) \left(U_d^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{4m^2} \right) k^2} \right] = 0, \quad (3.3.13)$$

где $\omega_{Lu}^2 = 4\pi e^2 n_{0u} / m$, $\omega_{Ld}^2 = 4\pi e^2 n_{0d} / m$, представляют собой квадраты парциальных ленгмюровских частот для электронов со спином вверх и спином вниз. Их сумма $\omega_{Le}^2 = \omega_{Lu}^2 + \omega_{Ld}^2$, дает полную ленгмюровскую частоту электронов.

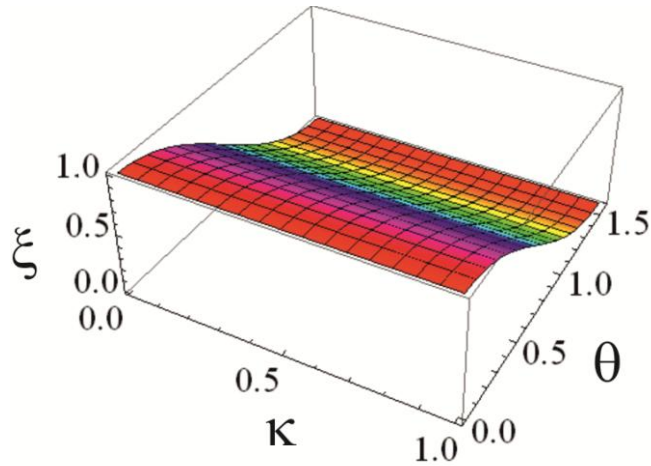


Рис. 3.3.3. Спектр волны Трайвелписа-Гоулда в зависимости от направления распространения волны.

Дисперсионное уравнение (3.3.13) это уравнение четвертой степени относительно квадрата частоты ω^2 . Следовательно, можно ожидать существование четырех волн. При этом существуют две хорошо известных волны это ленгмюровская волна и волна Трайвелписа-Гоулда. Таким образом, можно ожидать существования двух новых дополнительных решений.

Дисперсионное уравнение (3.3.13) является основным результатом этого параграфа. Оно описывает продольные волны, распространяющиеся под произвольным углом к внешнему магнитному полю.

При распространении волн параллельно внешнему магнитному полю дисперсионное уравнение (3.3.13) упрощается к следующей форме

$$1 - \frac{\omega_{Lu}^2}{\omega^2 - \left(U_u^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{4m^2} \right) k^2} - \frac{\omega_{Ld}^2}{\omega^2 - \left(U_d^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{4m^2} \right) k^2} = 0. \quad (3.3.14)$$

Уравнение (3.3.14) описывает две волны: ленгмюровскую волну и спин-электрон акустическую волну.

Уравнение подобное уравнению (3.3.14) можно получить для волн распространяющихся перпендикулярно внешнему магнитному полю рассматривая соответствующий предел уравнения (3.3.13). В результате получаем уравнение

$$1 - \frac{\omega_{Lu}^2}{\omega^2 - \Omega^2 - \left(U_u^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{4m^2} \right) k^2} - \frac{\omega_{Ld}^2}{\omega^2 - \Omega^2 - \left(U_d^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{4m^2} \right) k^2} = 0, \quad (3.3.15)$$

содержащее сдвиг квадрата частоты на квадрат циклотронной частоты. Видно, что уравнение (3.3.15) дает известное волновое решение известное как гибридная волна. Наряду с гибридной волной, уравнение (3.3.15) дает решение для волны подобной спин-электрон-акустической волне, но со спектром, сдвинутым на циклотронную частоту. По аналогии с гибридной волной, новое решение можно назвать гибридная спин-электрон-акустическая волна.

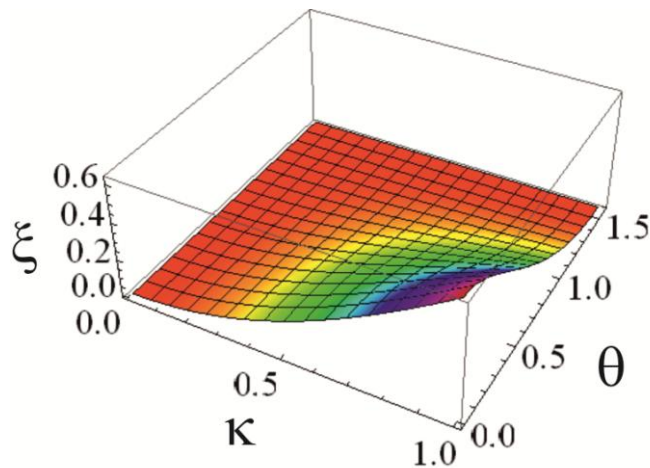


Рис. 3.3.4. Спектр нижней спин-электрон акустической волны.

Суммируя информацию, полученную в предельных случаях, получаем, что в общем случае существует две ветви спин-электрон-акустических волн.

Существование второй спин-электрон-акустической волны является основным выводом, следующим из дисперсионного уравнения (3.3.13).

Рис. (3.3.2)-(3.3.5) показывают дисперсионные зависимости ленгмюровской волны, волны Трайвелписа-Гоулда, и двух спин-электрон акустических волн, соответственно. Рисунки представлены в виде поверхностей показывающих изменение спектра при изменении направления распространения волн.

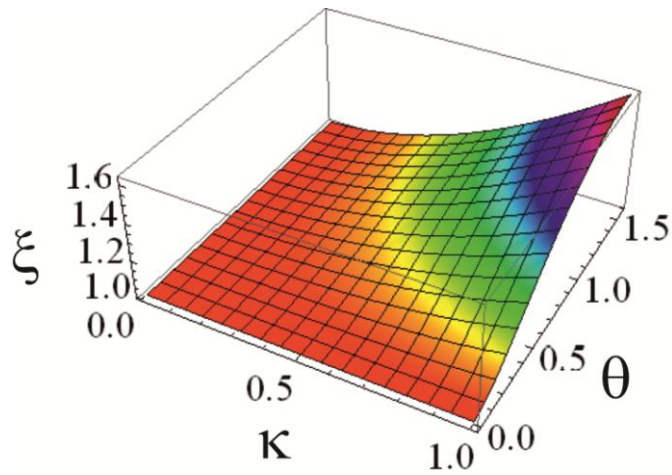


Рис. 3.3.5. Спектр верхней спин-электрон акустической волны.

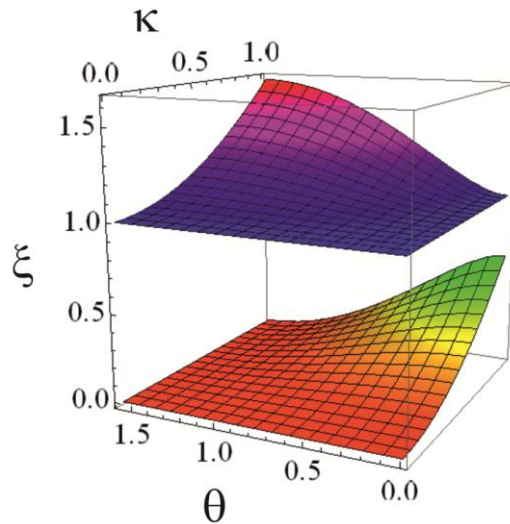


Рис. 3.3.6 Сравнение двух ветвей дисперсионной зависимости спин-электрон акустических волн.

Численный анализ спектра коллективных возбуждений.

Численный анализ уравнения (3.3.13) выполнен для следующих значений концентрации и магнитного поля: $n_0 = 10^{22} \text{ см}^{-3}$ и $B_0 = 1.1 \times 10^8 \text{ Г}$. Это соответствует следующему соотношению между ленгмюровской и циклотронной частотами $\omega_{Le}^2 \approx 10\Omega^2$. Также отбросим вклад квантового потенциала Бома который дает сравнительно малый вклад при длинах волн больших по сравнению с средним расстоянием между электронами. При численном анализе уравнения (3.3.13)

использованы следующие безразмерные переменные: безразмерный волновой

$$\text{вектор } \kappa = \frac{kU_{av}}{|\Omega|} = \frac{(3\pi^2)^{\frac{1}{3}} \hbar c}{\sqrt{3} eB_0} n_0^{\frac{1}{3}} k \text{ и квадрат безразмерной частоты } \xi = \frac{\omega^2}{\Omega^2}.$$

Рис. (3.3.6) показывает относительное расположение дисперсионных поверхностей для верхней и нижней спин-электрон акустических волн.

Рис. (3.3.2) показывает увеличение роста частоты при увеличении угла θ . Кроме того, Рис. (3.3.7) дополнительно показывает увеличение частоты ленгмюровских волн при учете спиновой поляризации.

Из Рис. (3.3.3) видно, что изменение угла распространения значительно влияет на дисперсионную зависимость волны Трайвелписа-Гоулда. Причем изменение частоты при изменении угла значительно превышает изменение частоты при изменении волнового вектора.

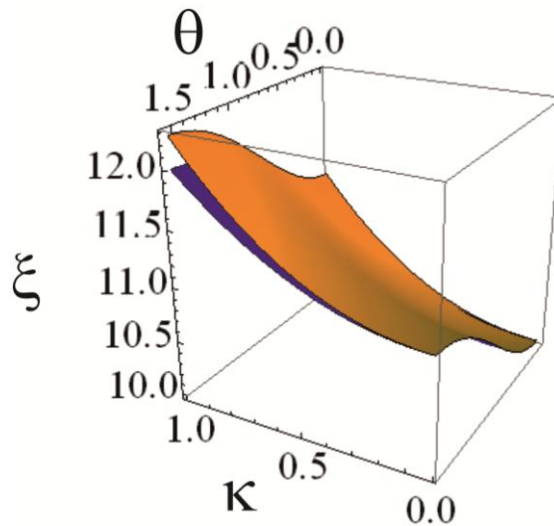


Рис. 3.3.7. Спектр ленгмюровских волн. Верхняя поверхность учитывает спиновую поляризацию давления Ферми. Нижняя поверхность построена для давления Ферми с нулевой поляризацией.

Перейдем к обсуждению спин-электрон-акустических волн показанных на Рис. (3.3.4)-(3.3.6). Их существование было выведено при аналитическом анализе уравнения (3.3.13). Теперь явно получен их спектр.

Рис. (3.3.4) показывает нижнюю спин-электрон-акустическую волну, которая была рассмотрена в разделах 3.1 и 3.2. Её зависимость от спиновой поляризации

обсуждалась ранее. А зависимость от угла распространения показывает уменьшение частоты с ростом угла θ .

Верхняя или гибридная спин-электрон-акустическая волна показана на Рис. (3.3.5). Её частота находится в области больше циклотронной частоты. Монотонный рост спектра при увеличении угла распространения виден из Рис. (3.3.5).

Выводы.

В этом параграфе показано, что отдельная спиновая эволюция приводит к существованию двух продольных спин-электрон акустических волн в намагниченной плазме. В пределе волн распространяющихся параллельно или перпендикулярно внешнему магнитному полю остается одна спин-электрон акустическая волна. Нижняя спин-электрон акустическая волна остается при распространении волн параллельно внешнему магнитному полю. Верхняя спин-электрон акустическая волна остается при распространении волн перпендикулярно внешнему магнитному полю.

3.4 Спин-электрон акустических волн в электрон-позитрон-ионной плазме

Выше описаны спин-электрон-акустические волны в электрон-ионной плазме. Рассмотрим это явление в электрон-позитронной и электрон-позитрон-ионной плазме, следуя работе [21].

Электрон-позитронная плазма отличается от электрон-ионной плазмы тем, что она состоит из частиц одинаковой массы. Электрически нейтральная электрон-позитронная плазма имеет одинаковые равновесные концентрации электронов и позитронов. Электрически нейтральная электрон-позитрон-ионная плазма наоборот содержит разные равновесные концентрации электронов и позитронов. При условии рассмотрения сравнительно высоких частот можно ограничиться неподвижными ионами. В этом случае, оба типа систем можно описать, одновременно варьируя отличие равновесных концентраций электронов и позитронов от нуля до некоторого значения.

Электрон-позитронная плазма встречается во множестве астрофизических системах, таких как ранняя вселенная, магнитосферы нейтронных звезд [319], [320]. Предполагается, что вырожденная электрон-позитронная плазма, в которой могут присутствовать ионы, существует в компактных астрофизических объектах, таких как нейтронные звезды и внутренних слоях белых карликов [133], [136].

Распространение волн в электрон-позитронной плазме отличается от распространения волн в электрон-ионной плазме. Приложение двухжидкостных гидродинамических и кинетических моделей плазмы показало, что многие волновые явления, такие как акустические волны, вистлеры, нижняя гибридная волна, сдвиговые альфвеновские волны отсутствуют в нерелятивистской электрон-позитронной плазме [123], [321].

Волновые явления изучались в квантовой электрон-ионной и квантовой электрон-позитрон-ионной плазме, в частности в спин-1/2 квантовой плазме и безспиновой квантовой плазме. К примеру, получен новый, зависящий от спина, альфвеновский солитон, подчиняющийся уравнению Кортевега-де Фриза, в котором нелинейность вызвана исключительно спиновыми эффектами [148], в электрон-позитронной плазме.

Существование продольной волны в вырожденной безспиновой электрон-позитрон-ионной плазме, называемая позитрон акустическая волна, обнаружена и изучена в работах [147], [150], [151], [152].

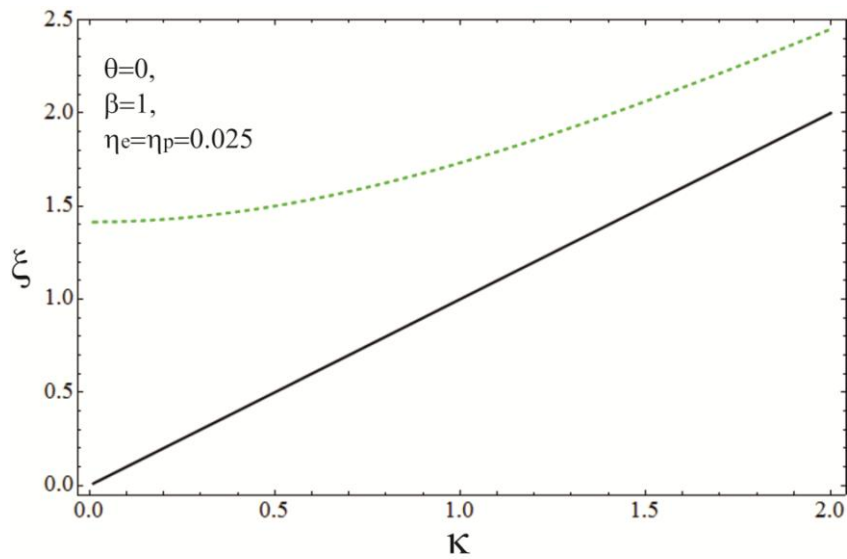


Рис. 3.4.1. Рисунок показывает спектр продольных волн распространяющихся параллельно внешнему магнитному полю в электрон-позитронной плазме. Рисунок содержит дисперсионные кривые ленгмюровской волны (верхняя линия) и спин-электрон акустической волны (нижняя линия).

Запишем четыре уравнения непрерывности модели квантовой гидродинамики с отдельной спиновой эволюцией для электронов/позитронов со спином вверх/вниз

$$\partial_t n_{as} + \nabla(n_{as} \mathbf{v}_{as}) = (-1)^{i_s} T_{az}, \quad (3.4.1)$$

где $T_{az} = \frac{\gamma_a}{\hbar}(B_x S_{ay} - B_y S_{ax})$, половина z-проекции момента силы, и параметр i_s принимает два значения в зависимости от проекции спина: $i_u = 2, i_d = 1$.

Представим уравнения Эйлера для электронов/позитронов со спином вверх/вниз

$$\begin{aligned} mn_{as}(\partial_t + \mathbf{v}_{as} \nabla) \mathbf{v}_{as} + \nabla P_{as} &= q_a n_{as} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_{as}, \mathbf{B}] \right) + (-1)^{i_s} \mu_a n_{as} \nabla B_z \\ &+ \frac{\mu_a}{2} (S_{ax} \nabla B_x + S_{ay} \nabla B_y) + (-1)^{i_s} m(\mathbf{T}_{az} - \mathbf{v}_{as} T_{az}), \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

где $P_{as} = \frac{(6\pi^2)^{\frac{2}{3}} n_{as}^{\frac{5}{3}} \hbar^2}{5m}$ давление системы электронов/позитронов с определенной проекцией спина $\mathbf{T}_{az} = \frac{\gamma_a}{\hbar} (\mathbf{J}_{(M)ax} B_y - \mathbf{J}_{(M)ay} B_x)$ - поток момента силы, и $\mathbf{J}_{(M)ax} = (\mathbf{v}_{au} + \mathbf{v}_{ad}) S_{ax} / 2$, $\mathbf{J}_{(M)ay} = (\mathbf{v}_{au} + \mathbf{v}_{ad}) S_{ay} / 2$ элементы квазиклассической части тензора спинового тока.

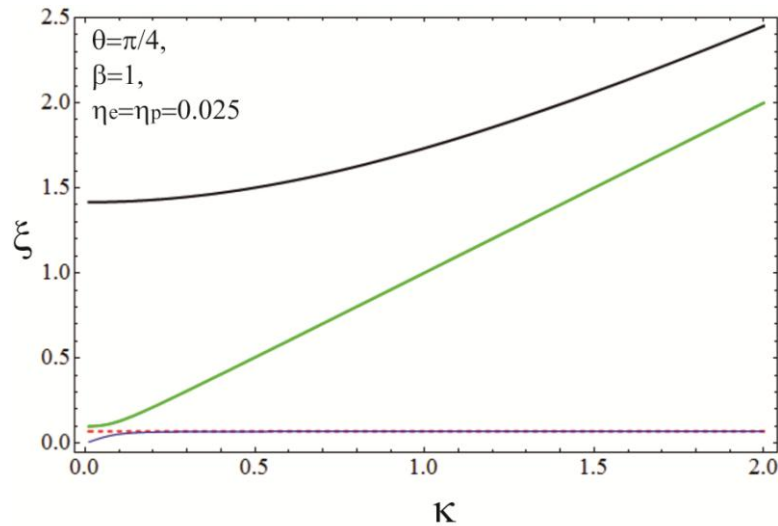


Рис. 3.4.2. Рисунок показывает дисперсионные зависимости продольных волн распространяющихся под углом κ к внешнему магнитному полю в электрон-позитронной плазме. Рисунок показывает спектр четырех волн. Верхняя линия описывает ленгмюровскую волну. Вторая линия снизу (красная пунктирная линия), идущая практически горизонтально, описывает волну Трайвелписа-Гоулда. Две оставшиеся линии описывают верхнюю и нижнюю ветви спин-электрон акустических волн. Более детально спектр низкочастотных волн представлен на следующем рисунке.

Уравнения для различных сортов частиц связаны уравнениями Максвелла. В этом разделе ограничимся электростатическими уравнениями Максвелла

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_{a,s} q_{as} n_{as} \text{ и } \nabla \times \mathbf{E} = 0.$$

Здесь рассмотрены электрон-позитронная и электрон-позитрон-ионная плазма находящиеся во внешнем магнитном поле $\mathbf{B}_{ext} = B_0 \mathbf{e}_z$ и изучены спектры волн в этих системах. Предполагается, что электроны, позитроны и ионы имеют

ненулевые однородные равновесные концентрации. Равновесные значения полей скоростей всех сортов частиц равны нулю.

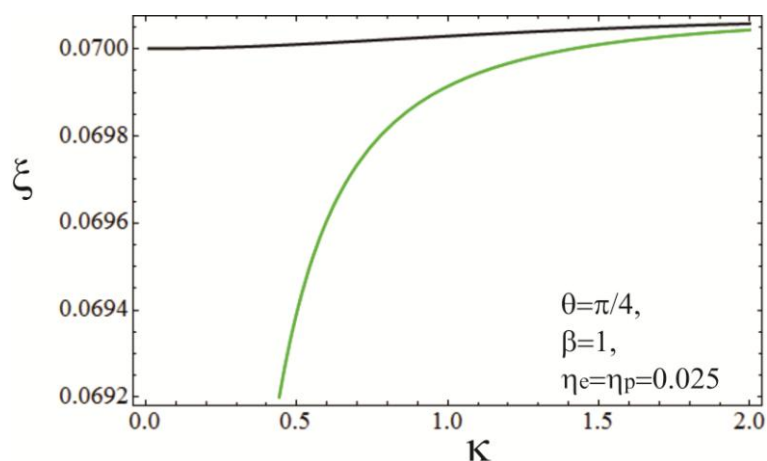


Рис. 3.4.3. Рисунок показывает низкочастотную часть спектра продольных волн распространяющихся под углом к внешнему магнитному полю в электрон-позитронной плазме, где $\Sigma = 0.1$.

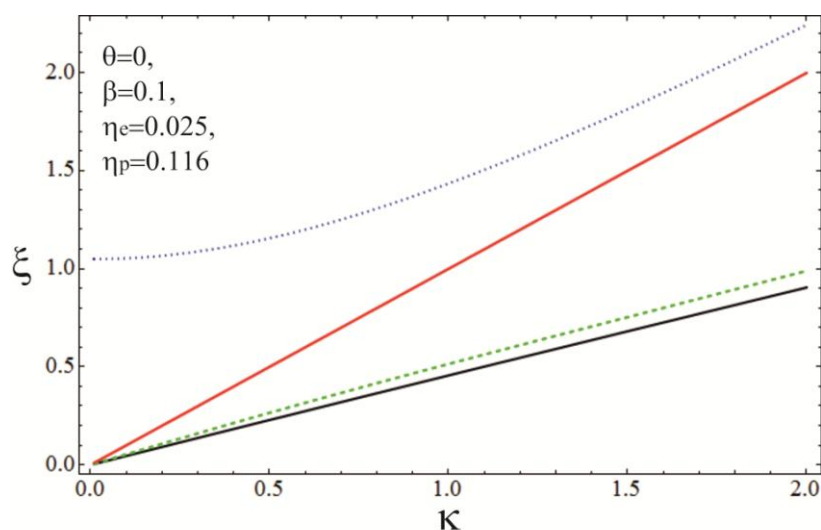


Рис. 3.4.4. Рисунок показывает спектр продольных волн в электрон-позитронной плазме, распространяющихся параллельно внешнему магнитному полю.

Отношение концентраций электронов и позитронов выбрано равным $\beta = 0.1$. Верхняя ветвь показывает ленгмюровскую волну. Три прямых линии показывают спин-электрон-акустическую волну, позитрон-акустическую волну, и спин-электрон-позитрон-акустическую волну (в порядке движения сверху вниз).

Для электрон-позитронной плазмы, равновесные концентрации электронов и позитронов равны друг другу $n_{0e} = n_{0p}$. Их спиновые поляризации также равны друг другу $\eta_e = \eta_p$, где $\eta_a = 3\mu_B B_0 / 2\varepsilon_{Fa}$ с магнетоном Бора μ_B и энергии Ферми $\varepsilon_{Fa} = (3\pi^2 n_{0a})^{2/3} \hbar^2 / 2m_a$ частиц сорта a . Соответственно, рассматривая парциальные концентрации частиц с определенным значением спина, получаем $n_{0eu} = n_{0pd}$ и $n_{0ed} = n_{0pu}$, где $n_{0eu} = n_{0e}(1-\eta_e)/2$, $n_{0ed} = n_{0e}(1+\eta_e)/2$, $n_{0pu} = n_{0p}(1+\eta_p)/2$ и $n_{0pd} = n_{0p}(1-\eta_p)/2$.

Для электрон-позитрон-ионной плазмы имеем $n_{0e} = n_{0p} + n_{0i}$. Следовательно, равновесные концентрации электронов и позитронов отличны друг от друга. Соответственно, системы электронов и позитронов имеют различные спиновые поляризации. Поэтому, параметры n_{0eu} , n_{0ed} , n_{0pu} , и n_{0pd} это четыре независимых параметра (иначе можно рассмотреть следующие четыре параметра n_{0e} , n_{0p} , η_e , и η_p). Соотношение между параметрами зависит от внешнего магнитного поля.

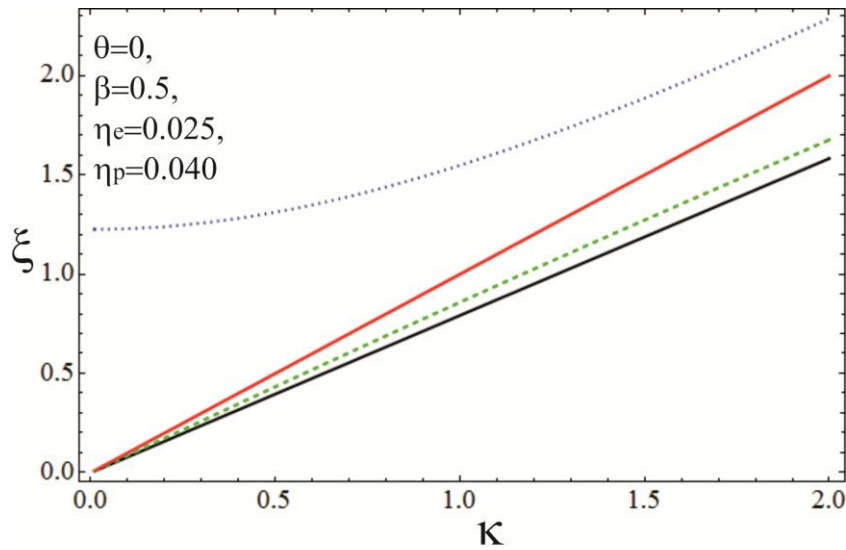


Рис. 3.4.5. Рисунок показывает спектр продольных волн в электрон-позитрон-ионной плазме, распространяющихся параллельно внешнему магнитному полю при $\beta = 0.5$ и $\Sigma = 0.1$.

Выше описано равновесное состояние системы. Тогда как изучению подлежат малые возмущения описанного равновесного состояния. В качестве возмущений рассматриваются плоские монохроматические волны с волновым

вектором $\mathbf{k} = \{k_x, 0, k_z\}$. В результате стандартных вычислений находим дисперсионное уравнение для электростатических волн в электрон-позитронной плазме/электрон-позитрон-ионной плазме:

$$1 = \left(\frac{\sin^2 \theta}{\omega^2 - \Omega^2} + \frac{\cos^2 \theta}{\omega^2} \right) \times \sum_{a=e,p} \left[\frac{\omega_{Lau}^2}{1 - \left(\frac{\sin^2 \theta}{\omega^2 - \Omega^2} + \frac{\cos^2 \theta}{\omega^2} \right) U_{au}^2 k^2} + \frac{\omega_{Lad}^2}{1 - \left(\frac{\sin^2 \theta}{\omega^2 - \Omega^2} + \frac{\cos^2 \theta}{\omega^2} \right) U_{ad}^2 k^2} \right], \quad (3.4.3)$$

где ω_{Las}^2 это квадрат парциальной ленгмюровской частоты для частиц сорта a , с определенной проекцией спина, $\Omega = eB_0 / m_e c$ это циклотронная частота, $U_{as}^2 = (6\pi^2 n_{0as}) \hbar^2 / 3m_e^2$, $k^2 = k_x^2 + k_z^2$, и θ это угол между направлением распространения волны и внешним магнитным полем. Квантовый потенциал Бома не рассматривается в этом режиме.

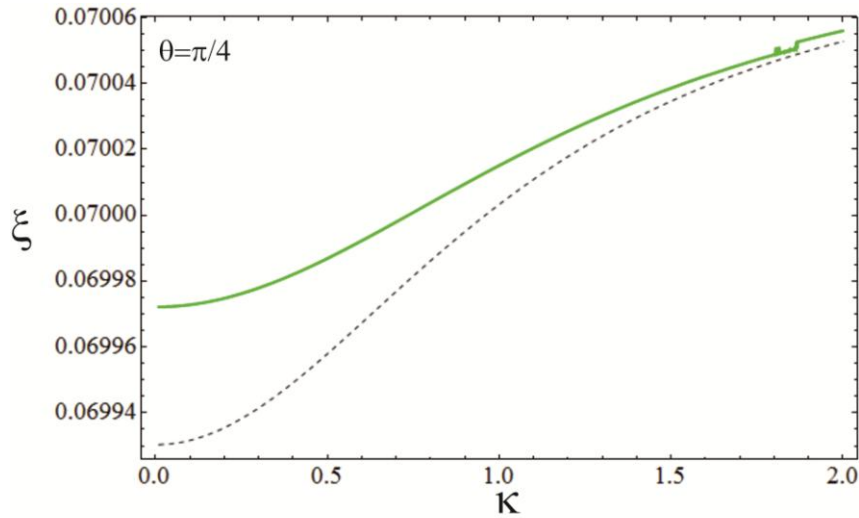


Рис. 3.4.6. Рисунок показывает спектр волны Трайвелпис-Гоулда в электрон-позитрон-ионной плазме при различных соотношениях между концентрациями электронов и позитронов. Верхняя (нижняя) линия получена для $\beta = 0.5$ ($\beta = 0.1$) и $\Sigma = 0.1$.

Полученное здесь дисперсионное уравнение обобщает дисперсионное уравнение для электростатических волн в электрон-ионной плазме, при условии

неподвижных ионов представленное формулой (3.3.13) и формулой (28) и в работе [24].

Для электрон-позитронной плазмы имеем $n_{0e} = n_{0p}$, $n_{0eu} = n_{0pd}$, и $n_{0ed} = n_{0pu}$. Поэтому уравнение (3.4.3) является уравнением четвертой степени относительно ω^2 при распространении волн под углом к внешнему магнитному полю. В предельных случаях параллельного или перпендикулярного распространения волн уравнение (3.4.3) упрощается до уравнения второй степени относительно ω^2 .

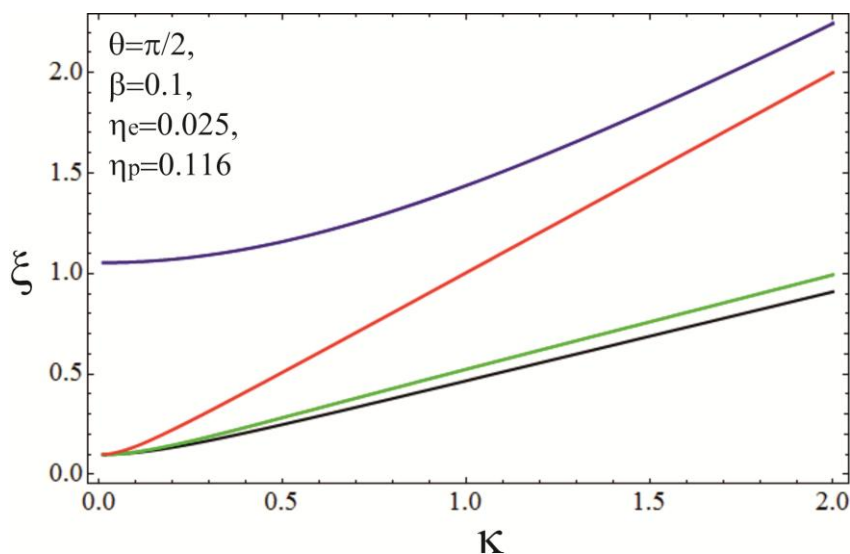


Рис. 3.4.7. рисунок показывает спектр продольных волн в электрон-позитронной плазме при распространении волн перпендикулярно внешнему магнитному полю при $\beta = 0.1$ и $\Sigma = 0.1$. Как описано в подписи к Рис. (3.4.7), существуют четыре волны: ленгмюровская (другими словами верхняя гибридная волна), спин-электрон-акустическая волна, позитрон-акустическая волна, и спин-электрон-позитрон-акустическая волна, соответственно при рассмотрении линий сверху вниз. Рисунок показывает, что квадрат частоты рассматриваемых волн сдвинут вверх на квадрат циклотронной частоты относительно случая распространения волн параллельно внешнему магнитному полю.

В случае электрон-позитрон-ионной плазмы все четыре параметра n_{0eu} , n_{0ed} , n_{0pu} , n_{0pd} отличаются друг от друга. В итоге это приводит к тому, что уравнение (3.4.3) это уравнение восьмой степени относительно квадрата частоты ω^2 при распространении под углом к внешнему магнитному полю. В предельных случаях

параллельного или перпендикулярного распространения волн уравнение (3.4.3) упрощается до уравнения четвертой степени относительно ω^2 .

Другая картина получается при рассмотрении электрон-позитрон-ионной плазмы, где концентрации электронов и позитронов различны. В этом случае, уравнение (3.4.3) это уравнение восьмой степени относительно квадрата частоты ω^2 . Поэтому, получаем четыре дополнительных решения. Одно из них это известная ранее позитрон-акустическая волна. Три оставшихся решения получены в работе [21], послужившей основой для данного раздела 3.4.

Численный анализ дисперсионного уравнения.

В представленном ниже численном анализе используется единственное значение равновесной концентрации электронов $n_{0e} \equiv n_0 = 10^{27} \text{ см}^{-3}$, но используются различные значения концентрации позитронов. Введем параметр измеряющий отношение равновесной концентрации позитронов к равновесной концентрации электронов $\beta = n_{0p} / n_{0e}$. Для электрон-позитронной плазмы, очевидно, находим $\beta = 1$. Для электрон-позитрон-ионной плазмы имеем $\beta \in (0,1)$.

Численный анализ ограничен двумя значениями параметра β : $\beta = 0.1$ и $\beta = 0.5$.

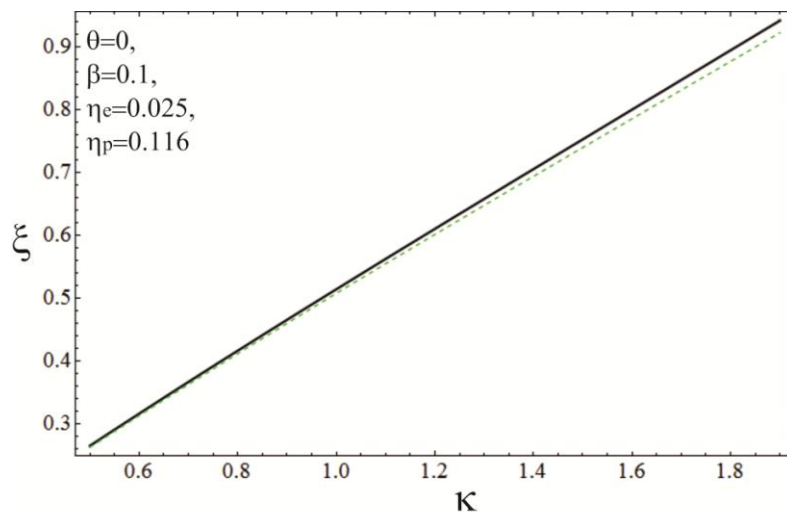


Рис. 3.4.8. Рисунок показывает сдвиг спектра позитрон-акустических волн в электрон-позитрон-ионной плазме распространяющихся параллельно внешнему магнитному полю при $\beta = 0.1$, при учете отдельной спиновой эволюции и вклада спиновой поляризации в давление Ферми. Верхняя (нижняя) линия описывает позитрон-акустическую волну с учетом (без учета) спиновых эффектов.

Изменяя значение параметра β при фиксированном числе электронов n_{0e} , мы меняем полную концентрацию лёгких частиц в системе. Это меняет полную ленгмюровскую частоту системы, которая является частотой ленгмюровской волны при $k \rightarrow 0$, итого $\omega_{L,eff}^2 = 4\pi e^2(n_{0e} + n_{0p})/m_e = 4\pi e^2 n_{0e}(1 + \beta)/m_e$. Это приводит к различию спектров ленгмюровских волн в разных режимах.

При представлении численных результатов в этом параграфе используются следующие безразмерные переменные: безразмерная частота $\xi = \omega / \omega_{Le}$, безразмерная циклотронная частота $\Sigma = \Omega_e / \omega_{Le}$, и безразмерный волновой вектор $\kappa = v_{Fe} k / 3\omega_{Le}$.

Численный анализ дисперсионного уравнения для электрон-позитронной плазмы.

Рассмотрим распространение волн в электрон-позитронной плазме при их движении вдоль или перпендикулярно внешнему магнитному полю. В этом случае возникает два волновых решения: ленгмюровская волна и спин-электрон акустическая волна. Их свойства подобны свойствам таких же волн в электрон-ионной плазме, которые описаны в [27] (см. также раздел 3.1). Данный режим проиллюстрирован на Рис (3.4.1).

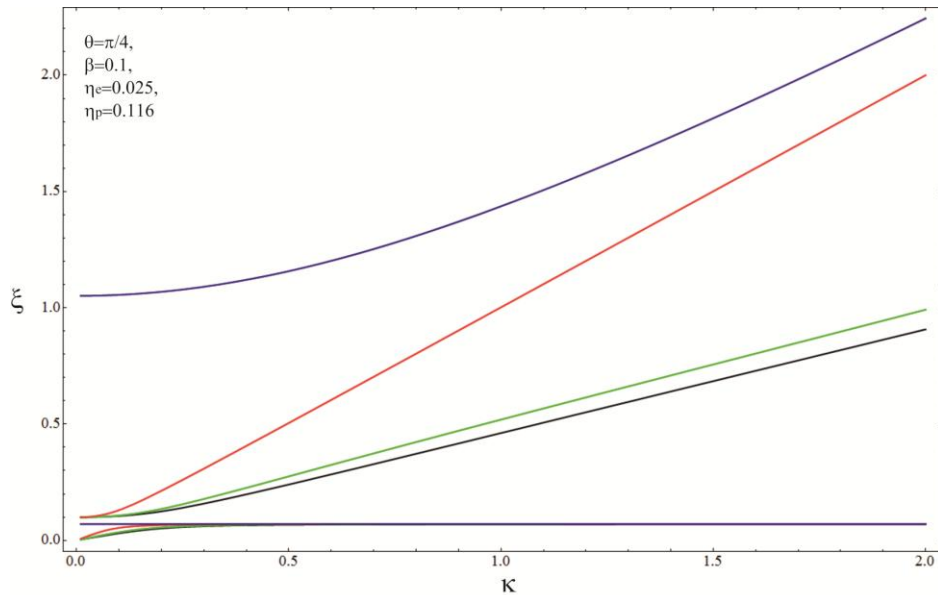


Рис. 3.4.9. Рисунок показывает спектр продольных волн распространяющихся под углом к внешнему магнитному полю в электрон-позитрон-ионной плазме. В этом режиме обнаруживается восемь ветвей, которые описаны в тексте. Рисунок

получен при $\beta = 0.1$ и $\Sigma = 0.1$.

Рассматривая распространение волн под углом к внешнему магнитному полю в электрон-позитронной плазме получим Рис. (3.4.2) показывающий существование четырех волн. Этот режим приводит к существованию двух ветвей спектра спин-электрон акустических волн. Таким образом, Рис. (3.4.2) показывает спектры ленгмюровской волны, верхней спин-электрон-акустической волны, волны Трайвелписа-Гоулда, и нижней спин-электрон-акустической волны, соответственно, в порядке уменьшения их частоты. Относительное поведение волны Трайвелписа-Гоулда и нижней спин-электрон-акустической волны показано на Рис. (3.4.3). откуда видно, что их спектры не пересекаются при всех физически допустимых значениях волнового вектора.

Суммируя результаты, представленные в этом подразделе, видно, что раздельная спиновая эволюция приводит к существованию двух спин-электрон акустических волн в электрон позитронной плазме. Это полностью соответствует результатам, полученным для электрон-ионной плазмы. Кроме того, показано увеличение частоты ленгмюровских волн из-за спиновой поляризации в силу соответствующего увеличения давления Ферми.

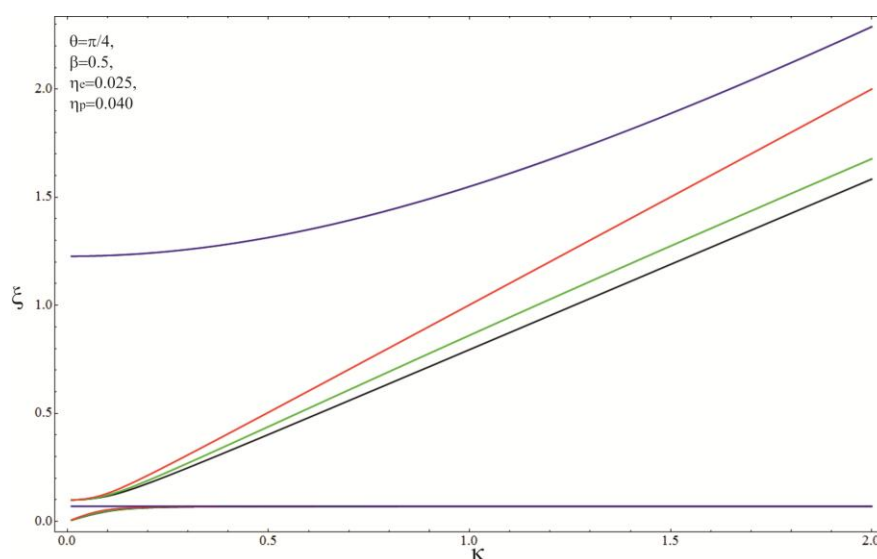


Рис. 3.4.10. Подобно предыдущему рисунку, этот рисунок показывает дисперсионную зависимость продольных волн распространяющихся под углом к магнитному полю в электрон-позитрон-ионной плазме при $\beta = 0.5$ и $\Sigma = 0.1$.

Численный анализ дисперсионного уравнения для электрон-позитрон-ионной плазмы.

Описывая продольные волны в электрон-позитрон-ионной плазме, начнем с распространения волн параллельно внешнему магнитному полю. Рис. (3.4.4) (Рис. (3.4.5)) показывает результаты численного решения уравнения (3.4.3) при $\beta = 0.1$ ($\beta = 0.5$).

Выше отмечено увеличение частоты ленгмюровских волн при увеличении равновесной концентрации позитронов при постоянной концентрации электронов. Подобный эффект проявляется в спектре волны Трайвелписа-Гоулда, что показано на Рис. (3.4.6). Прежде всего, Рис. (3.4.6) показывает наличие четырех волн в рассматриваемом режиме. Сравнивая этот результат с известными результатами и результатами работ [24], [27] приходим к следующим выводам. Высокочастотная кривая, очевидно, принадлежит ленгмюровской волне. Один из прямолинейных спектров принадлежит спин-электрон-акустической волне [27]. Одна из двух оставшихся линий принадлежит позитрон-акустической волне [147] которая существует в силу различия равновесных концентраций электронов и позитронов. В дополнение к трем известным ранее решениям получено дополнительное волновое решение [21]. Далее, следует распознать, каким волнам принадлежит каждый из трех прямолинейных спектров.

В электрон-позитрон-ионной плазме, в силу отдельной спиновой эволюции легких частиц, мы имеем четыре сорта частиц с различными равновесными концентрациями: $(1 + \eta_e)/2$, $(1 - \eta_e)/2$, $(1 - \eta_p)/2 = (1 + \eta_e \beta^{-2/3})/2$ и $(1 + \eta_p)/2 = (1 - \eta_e \beta^{-2/3})/2$.

Так как новая волна возникает в электрон-позитрон-ионной плазме, в результате учета отдельной спиновой эволюции, то ей дано название спин-электрон-позитрон-акустической волной. Спектры меняются при изменении числа позитронов. Выше отмечалось, что это меняет полное число легких частиц. Однако, это также меняет спиновую поляризацию позитронов которая зависит от энергии Ферми позитронного газа. Поэтому, изменение параметра β должно приводить к изменению спектра спин-электрон-позитрон-акустической волны.

Также рассчитаны спектры продольных волн распространяющихся перпендикулярно внешнему магнитному полю. Видно, что в этом режиме квадраты частот рассматриваемых волн увеличиваются на квадрат циклотронной частоты по

сравнению со спектрами соответствующих волн распространяющихся параллельно внешнему магнитному полю. Это можно увидеть на Рис. (3.4.7). В режиме распространения волн параллельно полю, частоты акустических волн стремятся к нулю при $k \rightarrow 0$. Соответственно, в режиме распространения волн перпендикулярно полю, для звуковых волн, находим $\omega \rightarrow \Omega$ при $k \rightarrow 0$.

Анализируя поведение спектров звуковых волн на рисунках (3.4.4), (3.4.5) и (3.4.7) видим, что верхняя прямая относится к спин-электрон-акустической волне подобной той, что существует в электрон-ионной или электрон-позитронной плазме. Средняя прямая линия представляет собой позитрон-акустическую волну. Рис. (3.4.8) показывает, что спиновые эффекты увеличивает частоту позитрон-акустическая волна. Нижняя ветвь это спин-электрон-позитрон-акустическая волна, которая фактически является спин-электрон-акустической волной в подсистеме позитронов. Она расположена ниже по частоте в силу того, что концентрация позитронов меньше концентрации электронов.

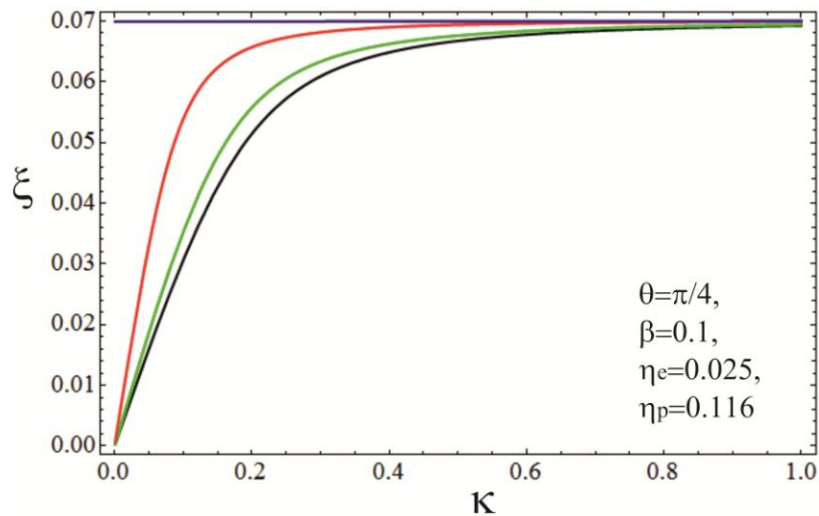


Рис. 3.4.11. Рисунок показывает детали низкочастотной части спектра продольных волн распространяющихся под углом к внешнему магнитному полю в электрон-позитрон-ионной плазме при $\beta = 0.1$ и $\Sigma = 0.1$. Полный спектр был показан на Рис. (3.4.9).

Спин-электрон-акустическая волна и позитрон-акустическая волна легко идентифицируются. К примеру, спектр позитрон-акустической волны получается из гидродинамической модели без отдельной спиновой эволюции. С точностью до малых сдвигов она воспроизводится в рассматриваемой модели. Спин-электрон-

акустическая волна возникает и в отсутствии позитронов, более того позитроны не оказывают заметного влияния на спин-электрон-акустическую волну, т.ч. сравнивая полученный спектр с спин-электрон-акустической волной в электрон-ионной плазме идентифицирует её спектр. Оставшаяся, не идентифицированная волна, методом исключения, соотносится с спин-электрон-позитрон-акустической волной.

Как следует из дисперсионного уравнения (3.4.3), число ветвей спектра удваивается при переходе в режим распространения волн под углом к магнитному полю. В итоге имеем восемь продольных волн. При этом обнаруживается вторая позитрон акустическая волна, наряду с богатым спектром спин-электрон акустических волн. Спин-электрон-акустические волны представляют собой верхнюю и нижнюю спин-электрон-акустические волны и верхнюю и нижнюю спин-электрон-позитрон-акустические волны, показанные на Рис. (3.4.9) и (3.4.10). Видно, что уменьшение концентрации позитронов приводит к сдвигу дисперсионных зависимостей позитрон-акустических волн и спин-электрон-позитрон-акустических волн в область больших частот, тогда как дисперсионные зависимости спин-электрон-акустических волн не показывает явных сдвигов. В результате дисперсионные зависимости спин-электрон-акустических волн, позитрон-акустических волн и спин-электрон-позитрон-акустических волн становятся ближе. Низкочастотная часть спектра в Рис. (3.4.9) и (3.4.10) плохо различима. Поэтому она показана отдельно на Рис. (3.4.11). В верхней части этого рисунка находится спектр волны Трайвелписа-Гоулда. Ниже расположены спектры нижних ветвей спин-электрон-акустических волн, позитрон-акустических волн и спин-электрон-позитрон-акустических волн.

Область применимости полученных результатов.

В вырожденном электронном газе, температура электронов должна быть значительно меньше температуры Ферми электронного газа $T \ll T_{Fe}$. Однако, в случае частичной спиновой поляризации температура системы должна быть значительно ниже парциальных температур Ферми $T \ll T_{Fau}, T_{Fad}$ позитронов и электронов.

При $n_{0e} = 10^{27} \text{ см}^{-3}$, $n_{0p} = 0.1n_{0e} = 10^{26} \text{ см}^{-3}$, и $B_0 = 10^{10}$ Гаусс, находим $\eta_e = 0.025$ и $\eta_p = 0.116$. Это приводит к следующим парциальным температурам Ферми для электронов $T_{Fes} = (1 \pm \eta_e)^{2/3} T_{Fe} \approx T_{Fe} = 3.47 \times 10^7 \text{ К}$ и для позитронов $T_{Fps} = (1 \pm \eta_p)^{2/3} T_{Fp} = \{0.23, 0.21\} T_{Fe} \approx 0.2 T_{Fe} = 0.7 \times 10^7 \text{ К}$. Поэтому, полученные результаты справедливы в диапазоне температур ниже 10^6 К . Для больших концентраций подобные результаты можно получить при больших температурах.

Сосуществование электронов и позитронов является неустойчивым по отношению к аннигиляции. Однако, время распада системы на несколько порядков превышает период колебаний. Можно выполнить соответствующие оценки [322] (см. уравнение 6), [323] (см. уравнение В1), [324] (см. уравнение 57). Это сделано в работе [21], где показана возможность описания представленных результатов в указанном диапазоне параметров.

Выводы.

Раздельная спиновая эволюция приводит к существованию спин-электрон-акустических волн. Показано существование двух спин-электрон-акустических волн в электрон-позитронной плазме. В предельных случаях распространения волн параллельно или перпендикулярно внешнему магнитному полю спектр вырождается до одной спин-электрон-акустической волны.

В электрон-позитрон-ионной плазме существуют две спин-электрон-позитрон-акустических волн наряду с двумя спин-электрон-акустическими волнами. В предельных случаях распространения волн параллельно или перпендикулярно внешнему магнитному полю спектр вырождается и мы находим одну спин-электрон-акустическую волну и одну спин-электрон-позитрон-акустическую волну.

Кроме того, показано существование второй позитрон-акустической волны, при распространении волн под произвольным углом к внешнему магнитному полю в электрон-позитрон-ионной плазме.

3.5 Поверхностные спин-электрон акустические волны

Разделы 3.1-3.4 посвящены объемным волнам в плазме существующих в модельных бесконечных средах или в конечных образцах вдали от поверхности. Одной из особенностей наличия поверхности является возникновение новых типов волн (поверхностных волн) которые распространяются вдоль поверхности среды и убывают при удалении от поверхности как вглубь среды, так и снаружи от неё.

Одним из наиболее хрестоматийных примеров поверхностных волн в плазме является поверхностный плазмон. Простейшей геометрией для анализа поверхностных волн является область полупространства занятая средой и граничащая с вакуумом. Ограничимся рассмотрением этой базовой геометрии для анализа фундаментальных явлений. При малых значениях плазмон имеет спектр близкий к электромагнитной волне в вакууме. При относительно больших значениях волнового вектора волна становится почти электростатической и имеет постоянную частоту (при пренебрежении тепловыми эффектами) равную ленгмюровской частоте деленной на корень из двух. Электростатическое приближение явно показывает родственность поверхностного плазмона с объемной ленгмюровской волной. Однако это новое решение, что видно из отличия спектра и пространственного распределения амплитуды поля.

Основной задачей этого раздела является выяснение вопроса о возможности существования новых поверхностных волн при учете частичной спиновой поляризации и отдельной спиновой эволюции вырожденных электронов, следуя работе [20].

Рассмотрим линеаризованную и Фурье преобразованную систему уравнений квантовой гидродинамики с отдельной спиновой эволюцией

$$\omega \delta n_s = n_{0s} k_z \delta v_{sz}, \quad (3.5.1)$$

и

$$-m n_{0s} \omega \delta \mathbf{v}_s + \frac{(6\pi^2)^{\frac{2}{3}}}{3m} n_{0s}^{\frac{2}{3}} \hbar^2 k_z \delta n_s \mathbf{e}_z = q_e n_{0s} \delta \mathbf{E}, \quad (3.5.2)$$

вместе с уравнениями Максвелла

$$\omega \delta B_y = k_z c \delta E_x + i c \partial_x \delta E_z, \quad (3.5.3)$$

$$\omega \delta E_x = k_z c \delta B_y + 4\pi i (n_{0u} \delta v_{ux} + n_{0d} \delta v_{dx}), \quad (3.5.4)$$

и

$$\omega \delta E_z = ic \partial_x \delta B_y + 4\pi l (n_{0u} \delta v_{uz} + n_{0d} \delta v_{dz}). \quad (3.5.5)$$

Уравнения (3.5.1)-(3.5.5) записаны с учетом геометрии системы представленной на Рис. (3.5.1).

Уравнения (3.5.1)-(3.5.5) приводят к поверхностной волне и соответствуют ТМ или Е-волной. Гидродинамические уравнения (3.5.1) и (3.5.2) решаются в каждом полупространстве независимо.

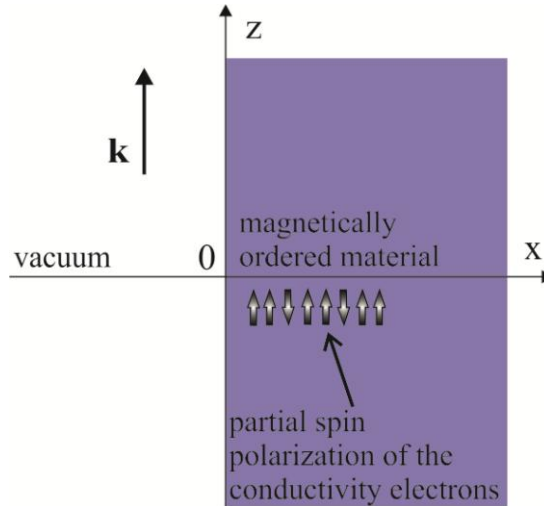


Рис. 3.5.1. Показана рассматриваемая система, где плазмоподобная среда заменяет полупространство с положительными значениями x . Длинной тонкой вертикальной стрелкой показано направление распространения волн вдоль поверхности.

Маленькие толстые стрелочки направленные вверх и вниз показывают частичную спиновую поляризацию электронов.

Уравнения решаются в режиме нулевого внешнего магнитного поля. Однако спиновая поляризация $\eta = |n_{0d} - n_{0u}| / (n_{0d} + n_{0u})$, предполагается отличной от нуля, в силу внутренних свойства материала. Таким образом, исследование сфокусировано на ферромагнитных и ферримагнитных магнитных материалах в состоянии с остаточной намагниченностью и содержащие проводящие электроны с частичной спиновой поляризацией, как это показано на Рис. (3.5.1). Рассматриваемая модель применима, когда оба сорта электронов вырождены: $T \ll T_{Fu}, T_{Fd}$, где T температура системы и $T_{Fs} = (6\pi^2 n_{0s})^{2/3} \hbar^2 / 2m$ температуры Ферми для электронов со спином вверх и спином вниз. Это дает ограничения для больших значений спиновой

поляризации. Так как при большой спиновой поляризации T_{Fu} будет очень малой, и не будет превышать температуру системы.

Линеаризованные уравнения гидродинамики дают следующие выражения для поля скоростей в терминах возмущений электрического поля:

$$\delta v_{sx} = -\frac{e}{m} \frac{i\delta E_x}{\omega}, \quad (3.5.6)$$

$$\delta v_{sz} = -\frac{e}{m} \frac{i\omega\delta E_z}{\omega^2 - k_z^2 U_s^2}, \quad (3.5.7)$$

где $U_s^2 = \hbar^2 (6\pi^2 n_{0s})^{2/3} / 3m_e^2$.

При нулевом внешнем магнитном поле и нулевой спиновой поляризации, диэлектрическая проницаемость возникает как диагональный тензор со следующими ненулевыми элементами $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \neq \varepsilon_{zz}$. Если учесть спиновую поляризацию электронов, то структура тензора диэлектрической проницаемости не меняется. Однако, явный вид элемента ε_{zz} изменяется и становится более сложной:

$$\varepsilon_{ud} \equiv \varepsilon_{zz} = 1 - \frac{\omega_{Lu}^2}{\omega^2 - k_z^2 U_u^2} - \frac{\omega_{Ld}^2}{\omega^2 - k_z^2 U_d^2}, \quad (3.5.8)$$

тогда как $\varepsilon \equiv \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 1 - \omega_{Le}^2 / \omega^2$ не меняются. Парциальные ленгмюровские частоты содержат парциальные концентрации электронов, имеющие следующие выражения через полную концентрацию электронов и спиновую поляризацию: $n_{0u} = (1 - \eta)n_0 / 2$ и $n_{0d} = (1 + \eta)n_0 / 2$.

Используя представленные выше линеаризованные уравнения Максвелла можно выразить δB_y и δE_x через δE_z . Используя эту связь, найдем волновое уравнение для δE_z :

$$c^2 \partial_x^2 \delta E_z + \omega^2 \frac{\varepsilon_{ud}}{\varepsilon} \left(\varepsilon - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right) \delta E_z = 0. \quad (3.5.9)$$

Волновое уравнение (3.5.9) применимо в обоих полупространствах. Показанные выше выражения для элементов тензора диэлектрической проницаемости справедливы в правом полупространстве. Тогда как в вакууме, в левом полупространстве, имеет тривиальные выражения $\varepsilon_{ud} = \varepsilon = 1$.

Уравнение (3.5.9) дает следующие решения для z-проекции электрического поля для левого и правого полупространства:

$$\delta E_z = \begin{cases} C_1 \exp\left(-\sqrt{\frac{\varepsilon_{ud}}{\varepsilon} k_z^2 - \varepsilon_{ud} \frac{\omega^2}{c^2}} x\right), & x > 0 \\ C_2 \exp\left(\sqrt{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} x\right), & x < 0 \end{cases}. \quad (3.5.10)$$

Граничные условия в рассматриваемой задаче это условия непрерывности функций δB_y и δE_z : $\{\delta E_z\}|_{x=0}=0$ и $\{\delta B_y\}|_{x=0}=0$. Для использования граничного условия $\{\delta B_y\}|_{x=0}=0$ нужно использовать связь между функциями δB_y и δE_z возникающую из линеаризованных уравнений Максвелла и имеющую следующий вид:

$$\delta B_y = \frac{ic}{\omega} \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \frac{\omega^2}{c^2}} \partial_x \delta E_z. \quad (3.5.11)$$

Условие $\{\delta E_z\}|_{x=0}=0$ дает $C_1 = C_2$. Последующее применение граничного условия $\{\delta B_y\}|_{x=0}=0$ приводит к искомому дисперсионному уравнению:

$$\sqrt{k_z^2 c^2 - \omega^2} + \varepsilon \sqrt{\frac{\varepsilon_{ud}}{\varepsilon} k_z^2 c^2 - \varepsilon \omega^2} = 0. \quad (3.5.12)$$

Это уравнение имеет действительные решения при $\varepsilon < 0$ и $\varepsilon_{ud} < 0$.

Дисперсионное уравнение (3.5.12) возникает при применении полной системы уравнений Максвелла. Однако, можно рассмотреть электростатический предел. Формально надо положить скорость света стремящейся к бесконечности в уравнении (3.5.12) и получить следующее уравнение $1 - \varepsilon \cdot \varepsilon_{ud} = 0$.

Уравнение $1 - \varepsilon \cdot \varepsilon_{ud} = 0$ это обобщение дисперсионного уравнения для неполяризованного вырожденного электронного газа в электростатическом режиме. Последнее имеет следующий известный в литературе вид:

$$1 - \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}\right) \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2 - \frac{1}{3} v_{Fe}^2 k^2}\right) = 0, \quad (3.5.13)$$

которое имеет следующее решение $\omega^2 = 0.5(\omega_{Le}^2 + v_{Fe}^2 k^2 / 3)$.

Обычно, в отсутствие спиновой поляризации, но при учете полной системы уравнений Максвелл, существуют две ветви дисперсионных зависимостей поверхностных волн которые можно получить из соответствующего упрощения уравнения (3.5.12)

$$\sqrt{k_z^2 c^2 - \omega^2} + \varepsilon \sqrt{k_z^2 c^2 - \varepsilon \omega^2} = 0. \quad (3.5.14)$$

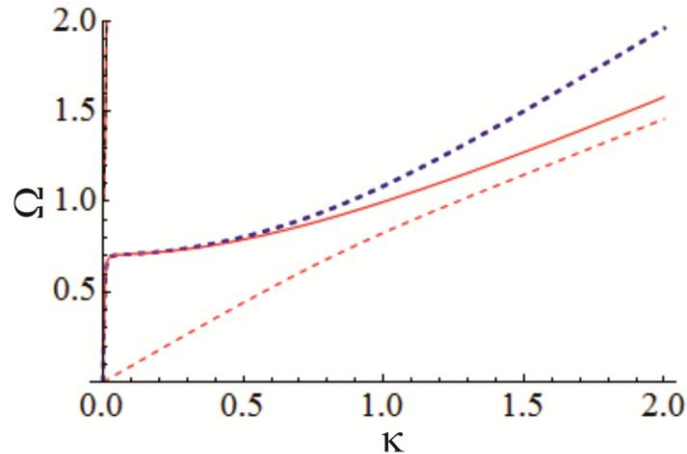


Рис. 3.5.2. Рисунок показывает спектр поверхностных волн в частично спин-поляризованном электронном газе при $\eta = 0.5$. Три штриховые линии показывают дисперсионные зависимости. Среди них есть одна слабо видимая ветвь, расположенная близко к вертикальной оси описывает “высокочастотную” поверхностную электромагнитную волну. Её частоты быстро растут с увеличением волнового вектора по сравнению с остальными волнами. Она не модифицирована отдельной спиновой эволюцией. Непрерывная линия описывает дисперсию поверхностных плазмонов (ленгмюровской волны) возникающая без учета спиновой поляризации в давлении Ферми и отдельной спиновой эволюции. Синяя штриховая линия, расположенная над сплошной линией описывает дисперсию поверхностных плазмонов с учетом спиновой поляризации. При малых волновых векторах её спектр является линейным с фазовой скоростью равной скорости света $\omega \approx kc$. Нижняя штриховая линия представляет дисперсионную зависимость поверхностной спин-электрон акустической волны.

В низкочастотной части спектра существует поверхностный плазмон. Коротковолновая часть спектра поверхностного плазмона представлена формулой (3.5.13). Эта часть спектра показывает аналогию с объемной ленгмюровской волной. Длинноволновая часть спектра аналогична электромагнитной волне с

линейным спектром $\omega = k_z c$. Гибридизация спектров ленгмюровской и электромагнитной волн оставляет и высокочастотную часть спектра, которая является второй волной в рассматриваемой системе.

Учет отдельной спиновой эволюции электронов приводит к возникновению нового волнового решения следующего из уравнения (3.5.12). Этот результат показан методом численного решения уравнения (3.5.12). Результат показан на Рис. (3.5.2) и (3.5.3). На рисунках использованы следующие безразмерные параметры $\Omega \equiv \omega / \omega_{Le}$, $\kappa = v_{Fe} k_z / (\omega_{Le} \sqrt{3})$, где $v_{Fe} = (3\pi^2 n_0)^{1/3} \hbar / m$.

Аналитические решения для поверхностной ленгмюровской волны и поверхностной спин-электрон акустической волны могут быть найдены в электростатическом пределе:

$$\omega^2 = \frac{1}{4} \left\{ \omega_{Le}^2 + k_z^2 \left[U_u^2 \left(\frac{n_0 + n_{0d}}{n_0} \right) + U_d^2 \left(\frac{n_0 + n_{0u}}{n_0} \right) \right] \right. \\ \left. \pm \sqrt{\left[\omega_{Le}^2 + k_z^2 \left[U_u^2 \left(\frac{n_0 + n_{0d}}{n_0} \right) + U_d^2 \left(\frac{n_0 + n_{0u}}{n_0} \right) \right] \right]^2 - 8k_z^4 U_u^2 U_d^2 - 8k_z^2 (\omega_{Lu}^2 U_d^2 + \omega_{Ld}^2 U_u^2)} \right\}. \quad (3.5.15)$$

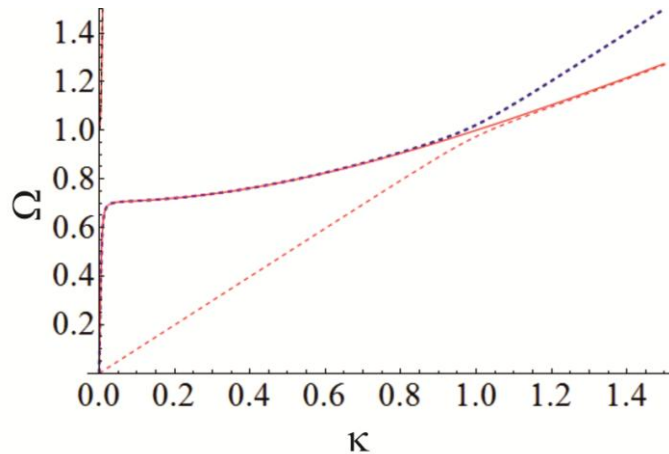


Рис. 3.5.3. Рисунок показывает спектр поверхностных волн, но для меньшего значения спиновой поляризации в сравнении с Рис. (3.5.2), при $\eta = 0.1$. Линии имеют значение аналогичное Рис. (3.5.2). В данном режиме имеет место гибридизация спектров поверхностных плазмонов и спин-электрон акустических волн.

Численный анализ, представленный на Рис. (3.5.2) показывает, что верхняя штриховая (синяя) линия поднимается от сплошной линии с ростом волнового

вектора. Это происходит в области сравнительно больших значений волнового вектора, где продольная составляющая электрического поля начинает доминировать, и это вследствие увеличения давления Ферми с ростом спиновой поляризации.

Также, Рис. (3.5.2) показывает, что спектр поверхностной спин-электрон акустической волны это почти прямая линия. Однако более детальный анализ показывает, что имеются два прямолинейных участка с изломом при $\kappa = v_{Fe} k_z / (\omega_{Le} \sqrt{3}) \approx 1$.

Уменьшение спиновой поляризации приводит к увеличению частоты поверхностных спин-электрон акустических волн. При значении $\eta = 0.5$ использованном на Рис. (3.5.2), имеем спектр спин-электрон акустических волн расположенный заметно ниже спектра неполяризованных плазмонов, а при $\eta = 0.1$ использованной на Рис. (3.5.3) получаем, что коротковолновая часть спектра спин-электрон акустических волн поднимается и совпадает со спектром неполяризованных плазмонов.

Увеличение частоты спин-электрон акустических волн с уменьшением спиновой поляризации происходит вместе с уменьшением частоты коротковолновой части спектра плазмонов. В итоге кривые сближаются, и происходит гибридизация спектров (расщепление дисперсионных кривых).

Как обсуждалось выше, поверхностный плазмон является результатом гибридизации спектров двух волн. Как показано на Рис. (3.5.3), промежуточная спиновая поляризация приводит к второй гибридизации спектра поверхностного плазмона с поверхностной спин-электрон-акустической волной.

Выводы.

В результате исследования поверхностных волн в частично спин-поляризованной плазме методом квантовой гидродинамики с отдельной спиновой эволюцией обнаружен новый тип поверхностных волн, называемый поверхностная спин-электрон-акустическая волна, так как механизм её возникновения аналогичен механизму возникновения объемной спин-электрон-акустической волны.

Более того, обнаружена возможность гибридизации спектров поверхностного плазмона и поверхностной спин-электрон-акустической волной в области сравнительно больших значений волнового вектора.

3.6 Спин-электрон-акустические волны в двумерном электронном газе

Ленгмюровская волна это фундаментальный коллективный процесс в многоэлектронных системах, в трехмерных и низкоразмерных системах. Однако раздельная эволюция электронов со спином вверх и электронов со спином вниз приводит к существованию дополнительного коллективного возбуждения в трехмерном безграничном электронном газе. Оно называется спин-электрон-акустическая волна, как это показано в разделе 3.1 и статье [27]. Такая волна существует при распространении волн параллельно внешнему магнитному полю [27]. При распространении волн под произвольным углом к внешнему магнитному полю существуют две ветви спин-электрон-акустических волн [24].

В этом разделе рассмотрим спин-электрон акустическую волну в двумерном электронном газе, имеющем плоскую геометрию следуя работе [23], в которой также рассмотрена цилиндрическая геометрия двумерного электронного газа. Исследуем спин-электрон-акустическую волну методом квантовой гидродинамики с раздельной спиновой эволюцией в приближении самосогласованного поля. Спин-электрон-акустическая волна в трехмерном электронном газе возникает как электростатическое возбуждение, в основные свойства которого не дает вклада спиновая динамика в плоскости перпендикулярной к направлению магнитного поля. Поэтому ограничимся тем же приближением при рассмотрении двумерного электронного газа.

Известно, что при гидродинамическом анализе двумерного электронного газа в плоской геометрии следует представить трехмерную концентрацию $n(x, y, z)$ как произведение двумерной концентрации $n = n(x, y)$ и дельта функции по координате z : $\delta(z)$. Соответственно размерность двумерной концентрации $[n_s] = cm^{-2}$ отличается от размерности трехмерной концентрации $[n_{3D}] = cm^{-3}$. Такой шаг математически фиксирует, что все электроны расположены в плоскости. Так как движение ограничено плоскостью, то поле скоростей имеет нулевую проекцию на направление перпендикулярное плоскости и имеет структуру двумерного вектора $\mathbf{v} = \{v_x, v_y\}$ зависящего от двух переменных $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y)$. Аналогичный переход имеет место и для спиновой плотности. Так как плоскость с электронным газом расположена в трехмерном пространстве, то z -проекция спиновой плотности

имеет смысл. Как и в трехмерном случае, z-проекция спиновой плотности является зависимой переменной в квантовой гидродинамике с отдельной спиновой эволюцией, а является разностью парциальных концентраций.

Структура x- и y-проекций спина на примере одночастичных состояний может быть записана в следующем виде $S_x = \psi^* \hat{\sigma}_x \psi = \psi_d^* \psi_u + \psi_u^* \psi_d = 2a_u a_d \cos \Delta\phi$ и $S_y = \psi^* \hat{\sigma}_y \psi = i(\psi_d^* \psi_u - \psi_u^* \psi_d) = -2a_u a_d \sin \Delta\phi$, где волновые функции ψ_s и их амплитуды a_s имеют соответствующую размерность. Кроме того, проекции спиновой плотности содержат разность фаз волновых функций электронов с определенными проекциями спина $\Delta\phi = \phi_u - \phi_d$. Видно, что в двумерном случае спиновая плотность описывает все электроны одновременно, содержа в своих определениях смесь характеристик электронов со спином вверх и спином вниз [23], [27].

Пара уравнений непрерывности для двумерной концентрации имеет такой же вид, что и в трехмерном случае

$$\partial_t n_s + \nabla(n_s \mathbf{v}_s) = (-1)^{i_s} T_z, \quad (3.6.1)$$

где $s = \{u = \uparrow, d = \downarrow\}$ для электронов со спином вверх и электронов со спином вниз, i_s имеет следующие значения: $i_\uparrow = 0$, $i_\downarrow = 1$.

Правая часть уравнения непрерывности содержит проекцию момента силы:

$$T_z = \frac{\gamma_e}{\hbar} (B_x S_y - B_y S_x), \quad (3.6.2)$$

содержащая магнитный момент электрона $\gamma_e = -ge\hbar/2mc$, проекции магнитного поля и фундаментальные константы.

Временная эволюция поля скоростей для электронов с определенной проекцией спина описывается соответствующими уравнениями Эйлера:

$$mn_s (\partial_t + \mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s + \nabla p_s - \frac{\hbar^2}{2m} n_s \nabla \left(\frac{\Delta \sqrt{n_s}}{\sqrt{n_s}} \right) = q_e n_s \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_s, \mathbf{B}] \right) + (-1)^{i_s} \gamma_e n_s \nabla B_z + \frac{\gamma_e}{2} (S_x \nabla B_x + S_y \nabla B_y) + (-1)^{i_s} m (\mathbf{T}_z - \mathbf{v}_s T_z), \quad (3.6.3)$$

где $q_e = -e$ заряд электрона, кроме того для компактности уравнения Эйлер использован ряд следующих обозначений.

Напряженность электрического поля имеет интегральную форму

$$\mathbf{E} = -q_e \nabla \int \frac{n_u + n_d - n_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx' dy' \quad (3.6.4)$$

и выражена как функция двумерных концентраций.

Поток момента силы

$$\mathbf{T}_z = \frac{\gamma_e}{\hbar} (\mathbf{J}_{(M)x} B_y - \mathbf{J}_{(M)y} B_x) \quad (3.6.5)$$

представляет собой компактное обозначение, трёх элементов тензора потока момента силы.

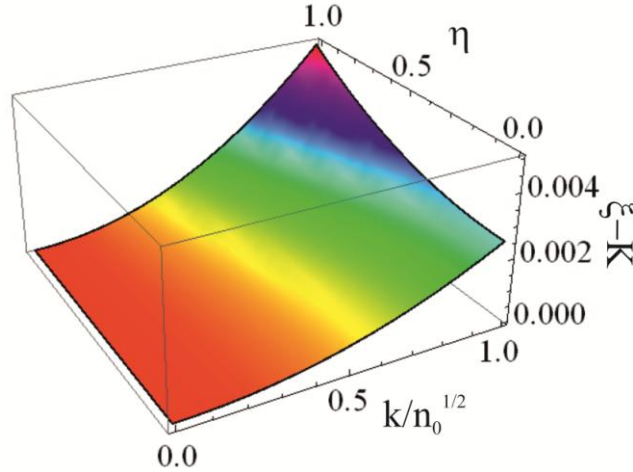


Рис. 3.6.1. Показана дисперсия ленгмюровских волн в плоском двумерном электронном газе с учетом спиновой поляризации электронного газа.

Соответствующее аналитическое решение представлено в тексте формулой (3.6.10) со знаком плюс перед квадратным корнем. На рисунке использованы следующие безразмерные величины $\xi = (\omega^2 - \Omega^2) / \omega_{ch}^2$, $K = k / \sqrt{n_{0e}}$ и спиновая поляризация η ,

$$\text{где } \omega_{ch}^2 = 2\pi e^2 n_{0e}^{3/2} / m \text{ и } \Omega_e = q_e B_0 / mc.$$

Поток момента силы содержит тензор спинового тока, представленный в следующем виде

$$\mathbf{J}_{(M)x} = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_u + \mathbf{v}_d) S_x - \frac{\hbar}{4m} \left(\frac{\nabla n_u}{n_u} - \frac{\nabla n_d}{n_d} \right) S_y, \quad (3.6.6)$$

и

$$\mathbf{J}_{(M)y} = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_u + \mathbf{v}_d) S_y + \frac{\hbar}{4m} \left(\frac{\nabla n_u}{n_u} - \frac{\nabla n_d}{n_d} \right) S_x. \quad (3.6.7)$$

Кроме того, использовано давление Ферми в качестве уравнения состояния для парциального давления: $p_s = \pi \hbar^2 n_s^2 / m$, здесь учтено, что в каждом квантовом состоянии находится один электрон с определенным значением спина.

Общий вид уравнений гидродинамики совпадает с уравнениями для трехмерного газа, но большинство векторов имеют, описанную выше, двумерную структуру. Основное отличие проявляется в уравнении состояния для давления и интегральном выражении для электрического поля (3.6.4).

Используем представленную модель для описания волновых возбуждений малой амплитуды. Равновесное состояние характеризуется концентрациями электронов с определенными значениями спина $n_{0\uparrow}$ и $n_{0\downarrow}$, сумма которых дает полную равновесную концентрацию $n_0 = n_{0\uparrow} + n_{0\downarrow}$. Предполагается, что система частиц помещена во внешнее магнитное поле перпендикулярное плоскости, в которой расположен электронный газ: $\mathbf{B}_{ext} = B_0 \mathbf{e}_z$. Электроны предполагаются макроскопически неподвижными: $\mathbf{v}_{0\uparrow} = \mathbf{v}_{0\downarrow} = 0$, и равновесное электрическое поле равно нулю: $\mathbf{E}_0 = 0$. Проекция спиновой плотности на направления, перпендикулярные внешнему магнитному полю равны нулю: $S_{0x} = S_{0y} = 0$. Далее рассмотрим малые возмущения равновесного состояния, распространяющиеся в виде плоских волн.

Линеаризованная и Фурье преобразованная система уравнений возникает в следующем виде:

$$-i\omega N_{As} + i n_{0s} \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{As} = 0, \quad (3.6.8)$$

и

$$-i\omega m n_{0s} \mathbf{V}_{As} + i k m U_s^2 N_{As} = -e^2 n_{0s} i \mathbf{k} \frac{2\pi}{k} (N_{Au} + N_{Ad}) - \frac{e}{c} n_{0s} B_0 (V_{as}^y \mathbf{e}_x - V_{As}^x \mathbf{e}_y), \quad (3.6.9)$$

где явно использованы амплитуды малых возмущений концентраций и полей скорости, и введено компактное обозначение для квадрата эффективной парциальной скорости “звука”: $U_s^2 = \frac{2\pi \hbar^2}{m^2} n_{0s} + \frac{\hbar^2 k^2}{4m^2}$.

Линеаризованное и Фурье преобразованное уравнение Эйлера (3.6.9) явно показывают то, что исследуется двумерная система электронов. Это проявляется в явном виде скорости звука. А главное, это явный вид второго слагаемого в

уравнении Эйлера (3.6.9). Коэффициент $2\pi/k$ присутствует вместо коэффициента $4\pi/k^2$, для трехмерного газа.

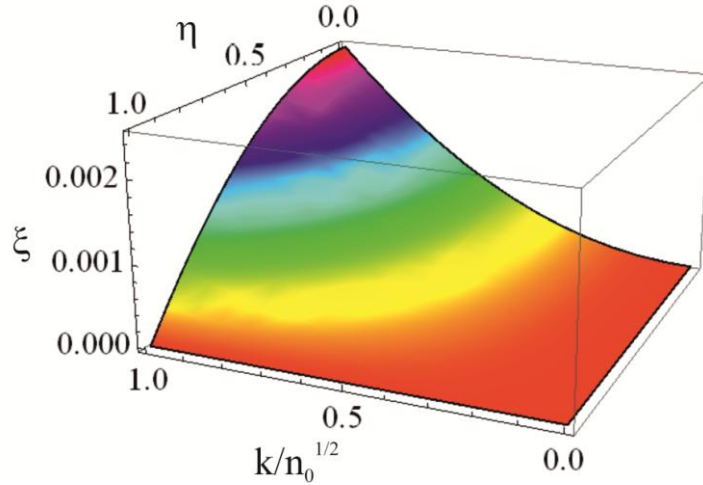


Рис. 3.6.2. Показана дисперсионная зависимость и её изменение в зависимости от спиновой поляризации для спин-электрон-акустических волн в плоском двумерном электронном газе. Соответствующее аналитическое решение представлено в тексте

формулой (3.6.10) со знаком минус перед квадратным корнем. На рисунке использован безразмерный квадрат частоты, сдвинутый на квадрат циклотронной частоты, $\xi = (\omega^2 - \Omega^2) / \omega_{ch}^2$ и спиновая поляризация η .

Имеем однородную систему четырех алгебраических уравнений (3.6.8) и (3.6.9). Связь пар уравнений соответствующих электронам с определенными проекциями спина возникает через кулоновское взаимодействие, входящее в уравнения Эйлера. Решение соответствующее ненулевым значениям амплитуд возбуждений существует, если определитель системы уравнений равен нулю.

Равенство нулю определителя данной системы уравнений приводит к биквадратному уравнению относительно частоты.

Аналитически решая дисперсионное уравнение, находим решение в виде двух ветвей спектра продольных волн:

$$\omega^2 - \Omega^2 = \frac{1}{2} \left(\omega_{L,u}^2 + \omega_{L,d}^2 + (U_u^2 + U_d^2) k^2 \pm \sqrt{(\omega_{L,u}^2 + \omega_{L,d}^2)^2 + (U_u^2 - U_d^2)^2 k^4 + 2k^2 (U_u^2 - U_d^2) (\omega_{L,u}^2 - \omega_{L,d}^2)} \right), \quad (3.6.10)$$

где использованы парциальные ленгмюровские частоты двумерного электронного газа $\omega_{L,s}^2 = 2\pi e^2 n_{0,s} k / m$. Сумма квадратов парциальных ленгмюровских частот

$\omega_L^2 = \omega_{L,u}^2 + \omega_{L,d}^2$ дает полную ленгмюровскую частоту двумерного электронного газа.

Также использована циклотронная частота $\Omega_e = q_e B_0 / mc$.

Для анализа полученных решений рассмотрим предельные случаи полученной формулы. В предельном случае нулевой поляризации получим, что равновесные концентрации равны друг другу, а, следовательно, скорости U_{\uparrow}^2 и U_{\downarrow}^2 также равны друг другу. В этом случае имеем две одинаковых строки в определителе (например, коэффициенты в уравнениях непрерывности). Так что определитель равен нулю для всех частот. Следовательно, надо вернуться к анализу исходных уравнений. Это упрощает общее дисперсионное уравнение и сводит его к линейному уравнению относительно квадрата частоты. Следовательно, получим, что существует единственное решение

$$\omega^2 - \Omega_e^2 = \frac{2\pi e^2 n_0 k}{m} + \frac{2\pi \hbar^2}{m^2} n_0 k^2, \quad (3.6.11)$$

которое соответствует спектру хорошо известных ленгмюровских волн. Решения (3.6.10) дают формальное второе решение в данном пределе, но их применение не правомерно в этом пределе.

Рассмотрим полученные решения (3.6.10) в длинноволновом приближении, разложим квадратный корень и оставим слагаемые, содержащие волновой вектор не старше второй степени.

Решение со знаком плюс перед квадратным корнем дает следующий предел:

$$\omega_1^2 = \omega_{Le}^2 + \varepsilon_{Fe,2D} (1 + \eta^2) k^2 / m + \Omega^2, \quad (3.6.12)$$

что показывает параболический рост квадрата частоты как функции волнового вектора от ненулевого значения определяемого суммой квадратов ленгмюровской и циклотронных частот. Причем, увеличение спиновой поляризации ускоряет рост частоты. Следующее предельное выражение для квадрата частоты находим исходя из решения со знаком минус перед квадратным корнем в формуле (3.6.10):

$$\omega_2^2 = \varepsilon_{Fe,2D} (1 - \eta^2) k^2 / m + \Omega^2. \quad (3.6.13)$$

Здесь отсутствует вклад ленгмюровской частоты. Тем не менее, эта формула показывает параболический рост квадрата частоты как функции волнового вектора от ненулевого значения определяемого квадратом циклотронных частоты. Видно,

что увеличение спиновой поляризации замедляет увеличение частоты с ростом волнового вектора.

Представленный приближенный анализ показывает, что решение со знаком плюс перед квадратным корнем в формуле (3.6.10) соответствует ленгмюровской волне, решения со знаком минус перед квадратным корнем в формуле (3.6.10) соответствует спин-электрон-акустической волне.

Численный анализ решений (3.6.10) показан на Рис. 3.6.1 и Рис. 3.6.2. Рис. 3.6.1 показывает сдвиг безразмерного дисперсионной зависимости от суммы квадратов ленгмюровской и циклотронной частот двумерного электронного газа как функцию волнового вектора и спиновой поляризации. Виден рост рассматриваемого параметра с увеличением волнового вектора. Это происходит из-за давления Ферми вырожденного электронного газа. Кроме того, видно, что рост параметра происходит быстрее с увеличением спиновой поляризации. Это связано с увеличением полного давления Ферми электронов с ростом спиновой поляризации, что согласуется с длинноволновым пределом представленным формулой (3.6.12).

Дисперсионная зависимость спин-электрон-акустических волн представлена на Рис. 3.6.2. Её зависимость от спиновой поляризации также представлена на Рис. 3.6.2. Видно, что квадрат частоты спин-электрон-акустических волн на три порядка меньше, чем квадрат частоты ленгмюровских волн. Очевидно, что частота спин-электрон акустических волн растет с увеличением волнового вектора. Причем, рост частоты замедляется при увеличении спиновой поляризации, что находится в соответствии с аналитическим анализом, выполненным в длинноволновом пределе.

Выводы.

В этом разделе описаны продольные коллективные возбуждения в частично спин поляризованном электронном газе методом квантовой гидродинамики с отдельной спиновой эволюцией. Показано возрастание частоты ленгмюровских волн, возникающее вследствие спиновой поляризации, входящей в уравнения через давление Ферми. Показано существование спин-электрон-акустической волны в двумерном электронном газе возникающей вследствие независимой эволюции электронов с различными проекциями спина на выделенное направление.

3.7 Спин-электрон акустический солитон

Выше показано существование спин-электрон акустической волны в линейном приближении уравнений квантовой гидродинамики и квантовой кинетики с отдельной спиновой эволюцией. Рассмотрим динамику спин-электрон-акустической волны, с учётом слабонелинейных эффектов следуя работе [22] и частично работе [18]. Так как спин-электрон-акустическая волна возникает как электростатическое возмущение при распространении возмущения вдоль внешнего магнитного поля, то рассмотрим слабонелинейные эффекты в том же режиме. Как было показано выше, в электростатическом приближении динамика спина не оказывает влияние на спин-электрон-акустическую волну. Тогда как сама волна возникает в результате существования равновесной спиновой поляризации электронов.

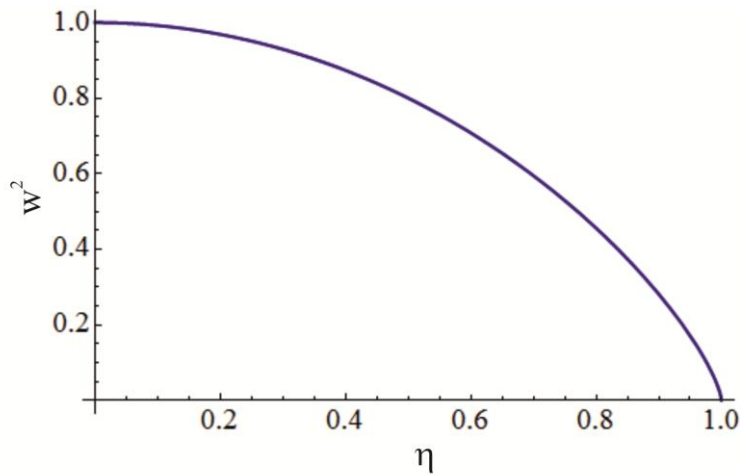


Рис. 3.7.1. Показана спиновая зависимость безразмерного квадрата скорости возмущения, в приближении самосогласованного поля представленной формулой (3.7.12).

Запишем систему уравнений квантовой гидродинамики с отдельной спиновой эволюцией в электростатическом приближении:

$$\partial_t n_s + \nabla \cdot (n_s \mathbf{v}_s) = 0, \quad (3.7.1)$$

и

$$m n_s (\partial_t + \mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s + \frac{(6\pi^2)^{\frac{2}{3}} \hbar^2}{5m} \nabla n_s^{\frac{5}{3}} - \frac{\hbar^2}{4m} n_s \nabla \left(\frac{\Delta n_s}{n_s} - \frac{(\nabla n_s)^2}{2n_s^2} \right) = q_e n_s \mathbf{E} + \frac{q_e}{c} n_s [\mathbf{v}_s \times \mathbf{B}_0], \quad (3.7.2)$$

вместе с уравнение Пуассона

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_a q_a n_a, \quad (3.7.3)$$

и условием потенциальности электрического поля

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (3.7.4)$$

Для решения этой системы уравнений воспользуемся методом масштабирования переменных [289]. Согласно этому методу введем следующие переменные

$$\xi = \varepsilon^{\frac{1}{2}}(z - Vt), \quad \tau = \varepsilon^{\frac{3}{2}}t. \quad (3.7.5)$$

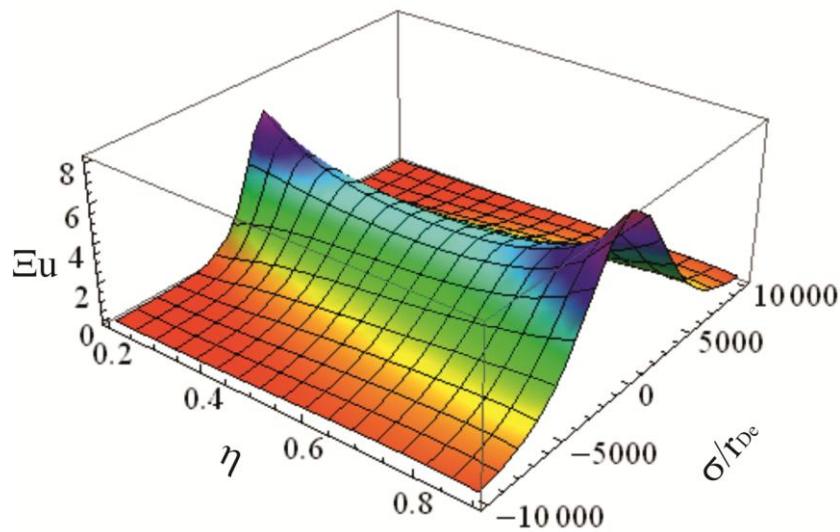


Рис. 3.7.2. Представлена зависимость профиля солитона возмущения концентрации электронов со спином вниз как функция спиновой поляризации.

В уравнении (3.7.5) предполагается, что возмущение распространяется вдоль оси z соответствующее направлению внешнего магнитного поля. Параметр V соответствует скорости распространения возмущения с плоским волновым фронтом в пространстве.

Выбор значений степеней безразмерного малого параметра можно подобрать из сравнения спин-электрон-акустической волны с ионно-звуковыми волнами. Формально, уравнения для спин-электрон-акустических волн содержат два сорта частиц, подобно электронам и ионам в обычной двухжидкостной модели плазмы, где каждый сорт частиц рассматривается как отдельная жидкость.

Гидродинамические функции представим в виде суперпозиции вкладов различных порядков малости

$$n_s = n_{0s} + \varepsilon n_{1s} + \varepsilon^2 n_{2s}, \quad (3.7.6)$$

$$v_{sz} = 0 + \varepsilon v_{1sz} + \varepsilon^2 v_{2sz}, \quad (3.7.7)$$

и

$$\phi = 0 + \varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2. \quad (3.7.8)$$

Напряженность электрического поля очевидным образом связана с потенциалом представленным формулой (3.7.8): $\mathbf{E} = -\nabla\phi$.

Выделяя вклад отдельной спиновой эволюции, пренебрежем вкладом квантового потенциала Бома. Перейдем к новым переменным (3.7.5) в уравнениях гидродинамики (3.7.1)-(3.7.3), при этом подставим разложения (3.7.6)-(3.7.8) в уравнения гидродинамики (3.7.1)-(3.7.3). В итоге каждое из уравнений (3.7.1)-(3.7.3) распадется на совокупность дифференциальных уравнений в различных порядках по малому параметру ε . В представленном ниже анализе, ограничимся первыми двумя порядками малости в каждом уравнении.

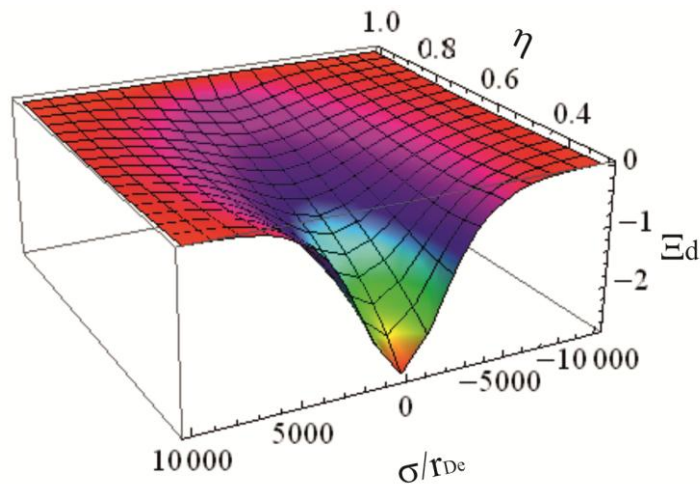


Рис. 3.7.3. Представлена зависимость профиля солитона возмущения концентрации электронов со спином вверх как функция спиновой поляризации.

Исходя из уравнений, возникающих из уравнений гидродинамики в низшем порядке по параметру ε . Найдем, следующие выражения для возмущений парциальных концентраций и парциальных скоростей в первом порядке малости через возмущения потенциала электрического поля в первом порядке малости

$$n_{1s} = \frac{-en_{0s}\phi_1}{m_e(V^2 - U_s^2)} \quad (3.7.9)$$

и

$$v_{1s} = \frac{Vn_{1s}}{n_{0s}} = \frac{-eV\phi_1}{m_e(V^2 - U_s^2)}. \quad (3.7.10)$$

В уравнениях (3.7.9) и (3.7.10) использована следующая комбинация параметров пропорциональная квадрату парциальной скорости Ферми:

$$U_s^2 = \frac{\hbar^2}{3m_e^2} (6\pi^2 n_{0s})^{\frac{2}{3}}.$$

На данном этапе параметр V остается неопределенным. Однако подстановка выражений (3.7.9) в уравнение Пуассона в первом порядке малости, выглядящее как нулевая сумма парциальных концентраций

$$n_{1\uparrow} + n_{1\downarrow} = 0 \quad (3.7.11)$$

даёт выражение для квадрата скорости возмущения:

$$V^2 = \frac{1}{n_{0e}} (n_{0\uparrow} U_{\downarrow}^2 + n_{0\downarrow} U_{\uparrow}^2). \quad (3.7.12)$$

Далее переходим к второму порядку малости.

Запишем уравнения возникающие из уравнений (3.7.1)-(3.7.3) в втором порядке малости:

$$-V\partial_{\xi} n_{2s} + n_{0s}\partial_{\xi} v_{2s} = -\partial_{\tau} n_{1s} - V\partial_{\xi} n_{1s}^2 / n_{0s} \quad (3.7.13)$$

и

$$\begin{aligned} & -Vmn_{0s}\partial_{\xi} v_{2s} + \frac{\hbar^2}{3m} (6\pi^2 n_{0s})^{\frac{2}{3}} \partial_{\xi} n_{2s} - Vmn_{1s}\partial_{\xi} v_{1s} + mn_{0s}\partial_{\tau} v_{1s} \\ & + mn_{0s}v_{1s}\partial_{\xi} v_{1s} + \frac{2\hbar^2}{9m} (6\pi^2 n_{0s})^{\frac{2}{3}} \frac{n_{1s}}{n_{0s}} \partial_{\xi} n_{1s} = en_{1s}\partial_{\xi} \Phi_1. \end{aligned} \quad (3.7.14)$$

Выражая v_{1s} через n_{1s} и v_{2s} через n_{2s} в уравнениях (3.7.13) и (3.7.14) находим следующее выражение для парциальных концентраций во втором порядке малости

$$\partial_{\xi} n_{2s} = \frac{1}{m(U_s^2 - V^2)} \left[en_{1s}\partial_{\xi} \Phi_1 - \frac{mV^2}{n_{0s}} \partial_{\xi} n_{1s}^2 - 2mV\partial_{\tau} n_{1s} - \frac{2\hbar^2}{9m} (6\pi^2)^{\frac{2}{3}} \frac{n_{1s}}{n_{0s}^{\frac{1}{3}}} \partial_{\xi} n_{1s} \right]. \quad (3.7.15)$$

Соответственно, во втором порядке малости уравнение Пуассона принимает следующий вид:

$$\partial_{\xi}^2 \phi_1 = 4\pi e (n_{2\uparrow} + n_{2\downarrow}). \quad (3.7.16)$$

Используя уравнения (3.7.9) и (3.7.15) преобразуем уравнение Пуассона (3.7.16) в однородное нелинейное дифференциальное уравнение для возмущения электростатического потенциала в первом порядке малости.

Возникающее в этом случае уравнение имеет вид уравнения Кортевега-де-Фриза:

$$D\partial_\tau\phi_1 + \partial_\xi^3\phi_1 - R\partial_\xi\phi_1^2 = 0. \quad (3.7.17)$$

Введенные в уравнении коэффициенты представлены ниже.

Используя стандартную подстановку $\sigma = \xi - U_0\tau$, получим, солитонное решение для потенциала электрического поля

$$\phi_1 = -\frac{3DU_0}{2R} \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{DU_0}\sigma\right)}. \quad (3.7.18)$$

Динамика ионов не рассмотрена при получении и исследовании солитонного решения. Поэтому существует ограничение на скорость распространения возмущения V . Она должна быть больше скорости звука (ионного звука), что дает следующую оценку $V \gg v_s = \sqrt{m_e/m_i}v_{Fe}$, где использована традиционная скорость Ферми $v_{Fe} = (3\pi^2n_0)^{1/3}\hbar/m$. Это дает ограничения на большие значения спиновой поляризации, как это видно из Рис. (3.7.1).

Обратим внимание на ключевые уравнения, приводящие к существованию солитонного решения (3.7.18). Первым шагом в получении решения является уравнение (3.7.11). Уравнение (3.7.11) имеет решение в результате противофазной динамики электронов с различными проекциями спина. Таким образом, решение (3.7.18) является следствием раздельной спиновой эволюции электронов. Следовательно, возникает ассоциация с линейным решением, возникающим при аналогичных условиях. А именно, существует аналогия с спин-электрон-акустической волной. По сути, рассмотрена слабонелинейная динамика спин-электрон-акустических волн приводящая к существованию солитонного решения называемого спин-электрон-акустическим солитоном.

Используя явный вид параметров входящих в уравнение (3.7.12) находим явный вид фазовой скорости звуковой волны в терминах скорости Ферми и спиновой поляризации

$$V^2 \equiv \frac{1}{3} v_{Fe}^2 \cdot w^2, \quad (3.7.19)$$

где

$$w^2 = \frac{1}{2} (1-\eta)^{\frac{2}{3}} (1+\eta)^{\frac{2}{3}} \left[(1-\eta)^{\frac{1}{3}} + (1+\eta)^{\frac{1}{3}} \right]. \quad (3.7.20)$$

Используем параметр (3.7.20) для представления коэффициентов входящих в уравнение Кортевега-де-Фриза (3.7.17).

Представим явный вид коэффициентов введенных в уравнении (3.7.17):

$$D = \frac{\sqrt{3}}{v_{Fe} r_{De}^2} \left[\frac{1-\eta}{\left(w^2 - (1-\eta)^{\frac{2}{3}} \right)^2} + \frac{1+\eta}{\left(w^2 - (1+\eta)^{\frac{2}{3}} \right)^2} \right] \quad (3.7.21)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{v_{Fe} r_{De}^2} \left[\frac{1}{(1-\eta)^{\frac{1}{3}} \left[\frac{1}{2} (1+\eta)^{\frac{2}{3}} \left((1-\eta)^{\frac{1}{3}} + (1+\eta)^{\frac{1}{3}} \right) - 1 \right]^2} + \frac{1}{(1+\eta)^{\frac{1}{3}} \left[\frac{1}{2} (1-\eta)^{\frac{2}{3}} \left((1-\eta)^{\frac{1}{3}} + (1+\eta)^{\frac{1}{3}} \right) - 1 \right]^2} \right]$$

и

$$R = \frac{e}{m_e} \frac{3}{v_{Fe}^2 r_{De}^2} \left[\frac{\frac{1}{2} (1-\eta)}{\left(w^2 - (1-\eta)^{\frac{2}{3}} \right)^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{w^2 + \frac{1}{3} (1-\eta)^{\frac{2}{3}}}{w^2 - (1-\eta)^{\frac{2}{3}}} \right) \right. \\ \left. + \frac{\frac{1}{2} (1+\eta)}{\left(w^2 - (1+\eta)^{\frac{2}{3}} \right)^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{w^2 + \frac{1}{3} (1+\eta)^{\frac{2}{3}}}{w^2 - (1+\eta)^{\frac{2}{3}}} \right) \right]. \quad (3.7.22)$$

В уравнениях (3.7.21) и (3.7.22) использован дебаевский радиус $r_{De} = v_{Fe} / \sqrt{3} \omega_{Le} \sim n_{0e}^{-1/6}$.

Уравнения (3.7.20)-(3.7.22) дают явный вид солитонного решения для спин-электрон-акустического солитона (3.7.18). В итоге можно численно проследить за характеристиками. Для анализа свойств электронов с различной спиновой поляризацией покажем солитонные решения для возмущения концентраций возникающие при комбинации уравнений (3.7.9) и (3.7.18).

Выделим размерные и спин-поляризованные части коэффициентов, представленных уравнениями (3.7.21) и (3.7.22): $D = D_0 \cdot \tilde{D}(\eta)$, $R = R_0 \cdot \tilde{R}(\eta)$,
 $D_0 = \sqrt{3}v_{Fe}^{-1}r_{De}^{-2}$, $R_0 = 3v_{Fe}^{-2}r_{De}^{-2}e/m_e$.

Используя размерные и безразмерные части коэффициентов, перепишем решение для спин-электрон-акустического солитона для электронов со спином вверх

$$n_{1d} = n_{0d} \frac{1.5\tilde{D}}{\tilde{R}} \frac{\sqrt{3}U_0}{v_{Fe}} \frac{\cosh^{-2}\left(\frac{\sigma}{2\Delta}\right)}{\left(w^2 - (1+\eta)^{\frac{2}{3}}\right)}, \quad (3.7.23)$$

где введен параметр определяющий ширину солитона

$$\Delta = r_{De} \sqrt{\frac{v_{Fe}}{\sqrt{3}U_0\tilde{D}}}. \quad (3.7.24)$$

Относительные возмущения парциальных концентраций n_{1s}/n_{0e} пропорциональны скорости распространения солитона в единицах скорости Ферми U_0/v_{Fe} . Представляя численные результаты для профилей солитона используем эффективные амплитуды $\Xi_s = (n_{1s}/n_{0e})/(\sqrt{3}U_0/v_{Fe})$.

Рис. (3.7.2) (Рис. (3.7.3)) показывает, что возмущение концентрации со спином вниз (спином вверх) является отрицательной (положительной). Используя терминологию, существующую в оптике и физике твёрдого тела, сформулируем утверждение, что существует тёмный (яркий) солитон, в подсистеме электронов со спином вниз (спином вверх).

Амплитуда тёмного солитона, в подсистеме электронов со спином вниз, возрастает при уменьшении спиновой поляризации, как это видно из Рис. (3.7.3), полученного как иллюстрация формулы (3.7.23). Амплитуда яркого солитона в подсистеме электронов со спином вверх имеет немонотонную зависимость как функция спиновой поляризации. Соответствующая зависимость показана на Рис. (3.7.2). Минимум амплитуды достигается при следующем значении спиновой поляризации $\eta_0 = 0.54$. Отметим, что при изменении спиновой поляризации от значения $\eta_0 = 0.54$ в сторону увеличения (уменьшения) значения поляризации до

значения $\eta_0 = 0.9$ ($\eta_0 = 0.1$) приводит к возрастанию эффективной амплитуды от значения $\Xi_u = 4$ до значения $\Xi_u = 8.2$ ($\Xi_u = 6.7$).

Выводы:

Исследована слабонелинейная динамика возмущений в спин-поляризованной электрон-ионной плазме. Исследование выполнено с использованием уравнений квантовой гидродинамики с отдельной спиновой эволюцией. При этом обнаружено существование спин-электрон-акустического солитона [22]. Результат получен для неподвижного ионного фона и для электростатических возмущений. Предполагалось, что возмущение распространяется вдоль внешнего магнитного поля.

Выше в разделе 3.4 исследована отдельная спиновая эволюция легких частиц в электрон-позитронной плазме и электрон-позитрон-ионной плазме. При распространении волн вдоль внешнего магнитного поля возникает две спин-электрон-акустических волны, условно можно отметить, что существует волна в системе электронов и волна в системе позитронов (спин-электрон-позитрон-акустическая волна). Исследование нелинейной эволюции этих волн показывает, что так же существует два солитонных решения. А именно, возникает спин-электрон-акустический солитон. Он аналогичен решению, показанному выше для электрон-ионной плазмы. А также возникает спин-электрон-позитрон-акустический солитон. Детали этого исследования представлены в работе [18].

3.8 Необыкновенные спин-электрон акустические волны

Спин-электрон-акустические волны рассмотрены в квази-электростатическом приближении. Такое приближение может быть использовано в качестве предварительного анализа. Однако оно является точным только для спин-электрон-акустических волн распространяющихся параллельно внешнему магнитному полю. Полный анализ волн распространяющихся перпендикулярно внешнему магнитному полю требует рассмотрения поперечного электромагнитного поля. Этот эффект рассмотрен в данном параграфе следуя работе [15] и частично работе [11].

Рассматривая необыкновенные спин-электрон-акустические волны, положим ось z направленной в направлении внешнего магнитного поля. Выберем ось x в качестве направления распространения волны, следовательно, сохраним в уравнениях только производные по переменной x .

Запишем линеаризованную систему уравнений квантовой гидродинамики с отдельной спиновой эволюцией (3.1.1)-(3.1.6) полагая $n_s = n_{0s} + \delta n_s$, $\mathbf{v}_s = 0 + \delta \mathbf{v}_s$, $\mathbf{E} = 0 + \delta \mathbf{E}$, и $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z + \delta \mathbf{B}$.

Представим систему линеаризованных уравнений квантовой гидродинамики с отдельной спиновой эволюцией с учетом параметров рассматриваемой задачи

$$\partial_t \delta n_s + n_{0s} \partial_x \delta v_{sx} = 0, \quad (3.8.1)$$

$$m n_{0s} \partial_t \delta v_{sx} + \partial_x \delta p_s = q_e n_{0s} \delta E_x + \frac{q_e}{c} n_{0s} B_0 \delta v_{sy}, \quad (3.8.2)$$

и

$$m n_{0s} \partial_t \delta v_{sy} = q_e n_{0s} \delta E_y - \frac{q_e}{c} n_{0s} B_0 \delta v_{sx}. \quad (3.8.3)$$

А z -проекция напряженности электрического поля не дает вклада в эволюцию необыкновенных волн, поэтому получаем $\partial_t \delta v_{sz} = 0$.

Также получаем следующие линеаризованные уравнения Максвелла

$$\frac{1}{c} \partial_t \delta E_x + \frac{4\pi}{c} q_e (n_{0e\uparrow} \delta v_{e\uparrow x} + n_{0e\downarrow} \delta v_{e\downarrow x}) = 0, \quad (3.8.4)$$

$$\frac{1}{c} \partial_t \delta E_y + \frac{4\pi}{c} q_e (n_{0e\uparrow} \delta v_{e\uparrow y} + n_{0e\downarrow} \delta v_{e\downarrow y}) = -\partial_x \delta B_z, \quad (3.8.5)$$

и

$$\partial_x \delta E_y = -\frac{1}{c} \partial_t \delta B_z. \quad (3.8.6)$$

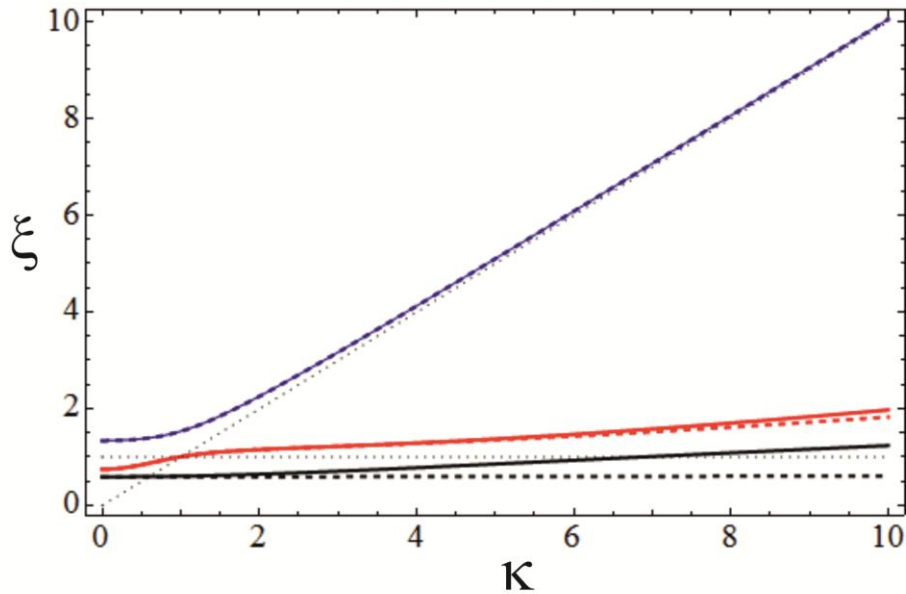


Рис. 3.8.1. На рисунке показан спектр необыкновенных волн в квантовой плазме в режиме, когда ленгмюровская частота больше циклотронной частоты. Непрерывные линии описывают три необыкновенных волны существующих в квантовой плазме при учете отдельной спиновой эволюции. Третья необыкновенная волна, это необыкновенная волна, представленная нижней (черной) линией. Она существует в силу нарушения симметрии между состояниями со спином вверх и спином вниз. Верхняя (синяя) и средняя (красная) штриховые линии описывают необыкновенные волны без учета отдельной спиновой эволюции. Нижняя (черная) штриховая линия описывает электростатическую спин-электрон-акустическую волну. Горизонтальная пунктирная линия показывает $\xi = 1$, которая соответствует $\omega = \omega_{Le}$. Наклонная пунктирная линия показывает $\xi = \kappa$, что соответствует $\omega = \kappa c$. Рисунок получен при следующих значениях параметров $n_{0e} = 2.6 \times 10^{27} \text{ см}^{-3}$, $B_0 = 10^{11} \text{ Г}$, $\eta_e = 0.09$ и температуре $T \ll T_{Fe} = 5.9 \times 10^7 \text{ К}$.

Уравнения (3.8.1)-(3.8.5) не учитывают динамику спина, так что парциальные концентрации удовлетворяют уравнениям непрерывности традиционного вида (3.8.1).

Квантовый потенциал Бома не рассмотрен в уравнениях гидродинамики. Основная задача показать свойства спин-электрон-акустической волны под влиянием поперечного поля. Дополнительное увеличение частоты, в коротковолновом диапазоне вызванное квантовым потенциалом Бома также важно, но не является основным эффектом.

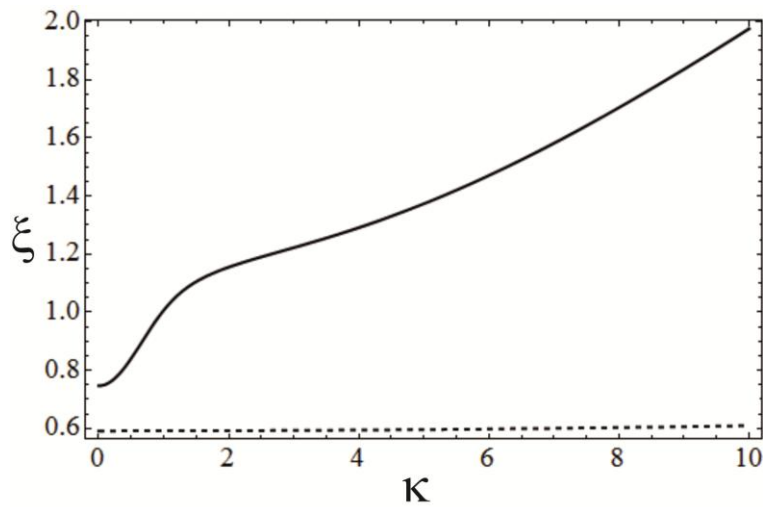


Рис. 3.8.2. Рисунок показывает необыкновенную спин-электрон-акустическую волну (непрерывная линия) и электростатическую спин-электрон-акустическую волну (штриховая линия) при параметрах, использованных для Рис. (3.8.1).

Рассматривая динамику плоских монохроматических волн посредством линейных уравнений (3.8.1)-(3.8.6) получим дисперсионное уравнение для необыкновенных волн:

$$\omega^2 - k^2 c^2 - \sum_{s=\uparrow, \downarrow} \left(2\omega^2 - \omega_{Le}^2 - k^2 c^2 - k^2 U_{Fs}^2 \right) \frac{\omega_{Ls}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2 - k^2 U_{Fs}^2} = 0, \quad (3.8.7)$$

где $U_{Fs}^2 = (6\pi^2 n_{0s})^{2/3} \hbar^2 / 3m^2$, это параметр пропорциональный квадрату парциальной скорости Ферми и квадрат парциальных ленгмюровских частот $\omega_{Ls}^2 = 4\pi e^2 n_{0s} / m$. Волновой вектор имеет следующую структуру $\mathbf{k} = \{k, 0, 0\}$, так как волна распространяется вдоль оси Ох.

Уравнение (3.8.7) является уравнением третьей степени относительно квадрата частоты ω^2 . Таким образом, существует три необыкновенные волны.

Пренебрегая раздельной спиновой эволюцией, получим упрощение формулы (3.8.7)

$$\omega^2 - k^2 c^2 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2 - k^2 U_{Fe}^2} (2\omega^2 - \omega_{Le}^2 - k^2 c^2 - k^2 U_{Fe}^2) = 0, \quad (3.8.8)$$

где $U_{Fe}^2 = (3\pi^2 n_{0e})^{2/3} \hbar^2 / 3m^2$. Частичная спиновая поляризация может быть учтена в одножидкостной модели электронов через соответствующее уравнение состояния. Но дисперсионное уравнение является уравнением второй степени относительно квадрата частоты ω^2 .

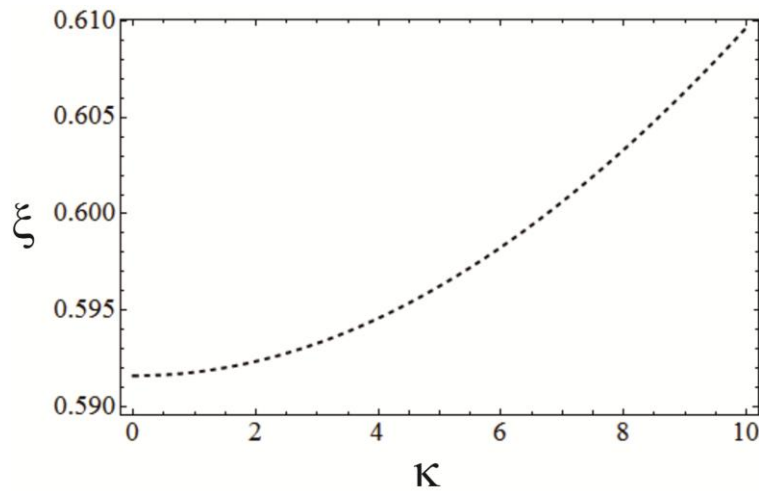


Рис. 3.8.3. Показаны детали спектра электростатической спин-электрон-акустической волны, т.к. в масштабе, выбранном на Рис. 3.9.2, эти детали не различимы.

Представим численный анализ полученного дисперсионного уравнения (3.8.7). С этой целью введем следующие безразмерные переменные: безразмерная частота $\xi = \omega / \omega_{Le}$, безразмерный волновой вектор $\kappa = kc / \omega_{Le}$, спиновая поляризация определена по следующей формуле $\eta = \tanh(\mu_B B_0 / \varepsilon_{Fe})$, где использованы энергия Ферми $\varepsilon_{Fe} = (3\pi^2 n_{0e})^{2/3} \hbar^2 / 2m$ и магнетон Бора $\mu_B = e\hbar / 2mc$.

Необыкновенные волны в квантовой плазме рассмотрены для режима плотного, но не релятивистского, вырожденного электронного газа, с концентрацией порядка $n_{0e} \sim 10^{27} \text{ см}^{-3}$. Отметим, что обменное взаимодействие не учтено в уравнениях (3.8.1)-(3.8.6) так как оно пренебрежимо мало в сравнении с давлением Ферми в рассматриваемых условиях.

Сравнение уравнений (3.8.7) и (3.8.8) показывает, что учет отдельной спиновой эволюции приводит к существованию дополнительного волнового решения. В электростатическом пределе оно переходит в гибридную спин-электрон-акустическую волну. Поэтому новое решение, подобно классическим продольно-поперечным волнам, может быть названо необыкновенной волной, а именно необыкновенной спин-электрон-акустической волной.

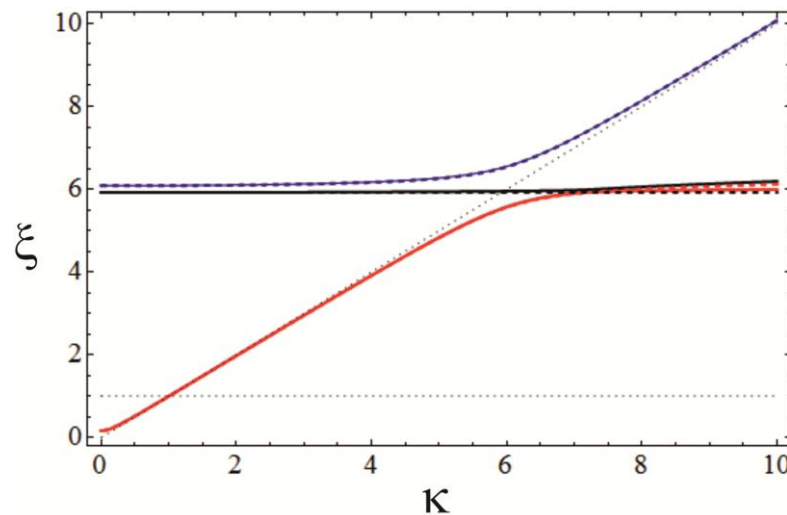


Рис. 3.8.4. Представлен спектр необыкновенных волн в квантовой плазме в режиме, когда ленгмюровская частота меньше циклотронной частоты. Описание кривых аналогично описанию на Рис. 3.8.1, однако необыкновенная спин-электрон-акустическая волна представлена средней (черной) непрерывной линией в данном случае. Рисунок получен для большего значения магнитного поля $B_0 = 10^{12} \text{ Г}$ в сравнении с Рис. 3.8.1. Это проявляется в большем значении спиновой поляризации $\eta_e = 0.72$, притом, что выбрано прежнее значение концентрации $n_{0e} = 2.6 \times 10^{27} \text{ см}^{-3}$.

Рассмотрим сильно намагниченную плазму, находящуюся в магнитном поле $B_0 = 10^{11} \text{ Г}$. Полагая, что концентрация электронов равна $n_{0e} = 2.6 \times 10^{27} \text{ см}^{-3}$, что

приводит к следующему значению спиновой поляризации $\eta_e = 0.09$. Температура системы предполагается значительно ниже температуры Ферми $T \ll T_{Fe} = 5.9 \times 10^7$ К.

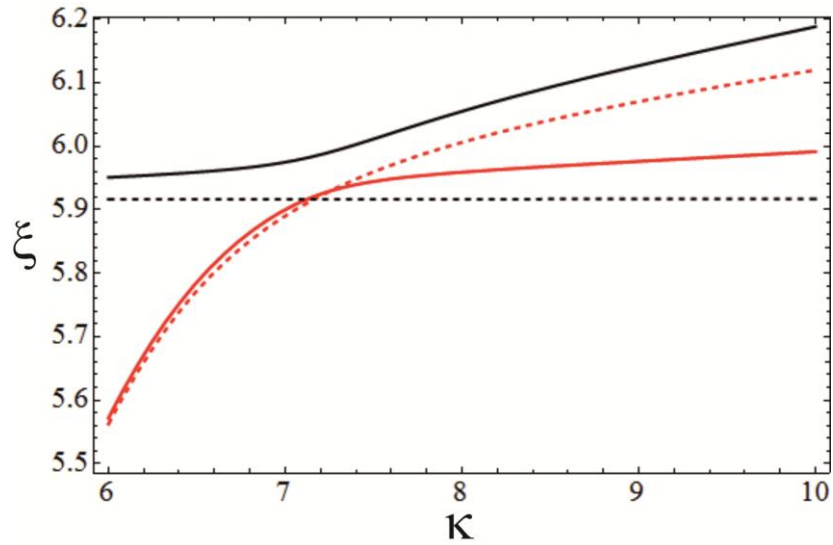


Рис. 3.8.5. Показаны детали Рис. (3.8.4) расположенные в окрестности циклотронной частоты в коротковолновом диапазоне.

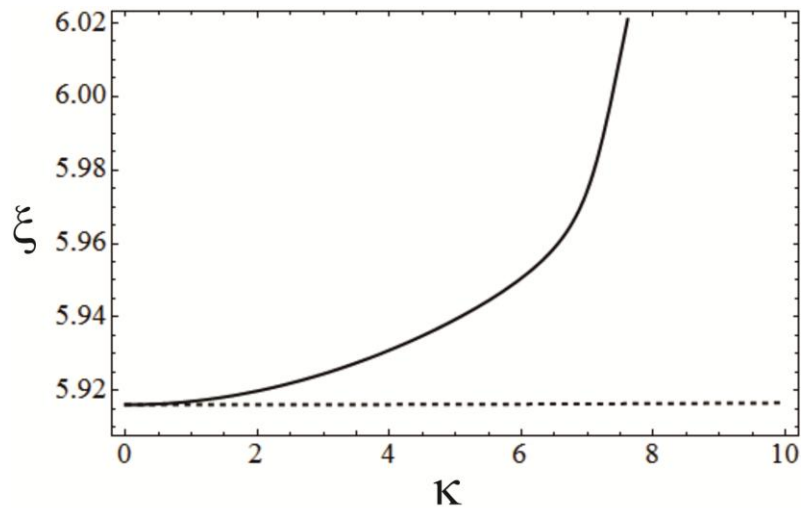


Рис. 3.8.6. Показаны детали спектра необыкновенной спин-электрон-акустической волны (непрерывная линия) и электростатической спин-электрон-акустической волны (штриховая линия), представленные на Рис. (3.8.4) и Рис. (3.8.5).

Выбранные значения концентрации и магнитного поля соответствуют квантовой плазме в режиме, когда ленгмюровская частота больше циклотронной

частоты. Далее будет рассмотрен режим, когда ленгмюровская частота меньше циклотронной частоты при соответствующем увеличении магнитного поля.

Результат решения дисперсионного уравнения (3.8.7) в данном режиме показан на Рис. (3.8.1). Верхняя необыкновенная волна, показанная верхней сплошной кривой. Она не имеет видимых изменений по сравнению с одножидкостной моделью электронов. Нижняя необыкновенная волна представлена средней сплошной кривой. Отличие от классического случая проявляется в увеличении частоты нижней необыкновенной волны в пределе коротких длин волн. Это увеличение может быть воспроизведено одножидкостной моделью при учете спиновой поляризации в уравнении состояния. При учете квантового потенциала Бома возникнет дополнительное увеличение частоты в этом режиме.

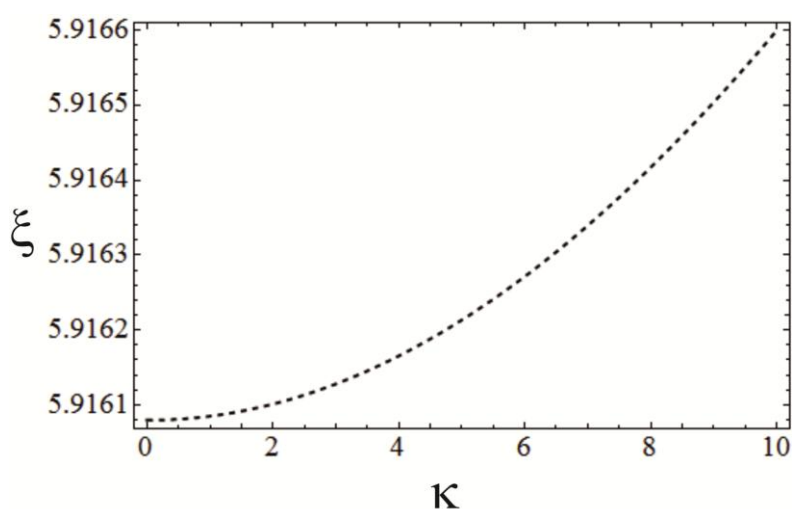


Рис. 3.8.7. Показаны детали спектра электростатической спин-электрон-акустической волны в режиме, когда ленгмюровская частота меньше циклотронной частоты, т.к. в масштабе, выбранном на Рис. (3.8.6) эти детали не различимы.

Третья (нижняя) сплошная кривая соответствует решению, возникающему при учете отдельной спиновой эволюции. Оно соответствует необыкновенной спин-электрон-акустической волне.

Более детальный вид спектра необыкновенной спин-электрон-акустической волны и его сравнение с электростатической спин-электрон-акустической волной представлены рисунками (3.8.2) и (3.8.3).

В режиме, когда ленгмюровская частота больше циклотронной частоты, наличие спин-электрон-акустической волны не оказывает влияния на спектр классических необыкновенных волн. Однако наличие спин-электрон-акустической волны меняет отклик среды в диапазоне сравнительно малых частот.

Далее рассмотрим режим, когда ленгмюровская частота меньше циклотронной частоты при соответствующем увеличении магнитного поля. В этом случае оставим концентрацию электронов прежней $n_{0e} = 2.6 \times 10^{27} \text{ см}^{-3}$, но магнитное поле увеличим до значения $B_0 = 10^{12} \text{ Г}$. Общий вид спектра необыкновенных волн показан на Рис. (3.8.4). В этом режиме частоты необыкновенной спин-электрон-акустической волны расположены между значениями верхней и нижней классических необыкновенных волн. Более того, спектры нижней необыкновенной волны и необыкновенной спин-электрон-акустической волны расположены близко в области больших волновых векторов. Для получения ясной картины представлен рисунок (3.8.5) показывающий описанную область. Как и в предыдущем режиме, верхняя необыкновенная волна не получает видимых изменений спектра при учете отдельной спиновой эволюции (см. Рис. (3.8.4)).

Изменения спектра нижней необыкновенной волны проявляются в области коротких длин волн. При промежуточных значениях волновых векторов происходит увеличение частоты нижней необыкновенной волны в силу вклада частичной спиновой поляризации в давление. Однако с увеличением волнового вектора происходит гибридизация спектров нижней необыкновенной волны и необыкновенной спин-электрон-акустической волны. Это приводит к уменьшению частоты нижней необыкновенной волны по сравнению с классическим спектром. Соответственно, спектр необыкновенной спин-электрон-акустической волны располагается выше спектра классической нижней необыкновенной волны. Сравнение спектров необыкновенной спин-электрон-акустической волны и электростатической спин-электрон-акустической волны показано на рисунках (3.8.5) и (3.8.6). Оба рассмотренных режима показывают значительное увеличение частоты спин-электрон-акустических волн при учете поперечного

электромагнитного поля. Дополнительное влияние спин-спинового взаимодействия и квантового потенциала Бома на представленное выше решение для необыкновенной спин-электрон-акустической волны получено [11].

Выводы:

Показан значительный вклад поперечного электрического поля в свойства спин-электрон-акустических волн распространяющихся перпендикулярно внешнему магнитному полю. Кроме того, обнаружена гибридизация спектров нижней необыкновенной волны и спин-электрон-акустической волн, в режиме, когда ленгмюровская частота меньше циклотронной частоты.

3.9 Тонкая структура циклотронных волн, вызванная эволюцией спинов электронов

Представленные выше задачи сфокусированы на отдельной спиновой эволюции электронов. Однако, даже рассматривая электроны как единую жидкость частиц обладающих магнитным моментом можно получить интересные эффекты. В частности, эволюция спина приводит к тонкой структуре поперечных циклотронных волн [16], [17]. Кроме того, эволюция спина приводит к существованию низкочастотной спиново-циклотронной волны. Частота этой волны порядка 0.001 от электронной циклотронной частоты. Такая волна была впервые предсказана для квазиклассического электронного газа с конечной температурой [67]. Спиново-циклотронная волна в вырожденном электронном газе рассмотрена в [17]. Этот эффект описывается в рамках кинетической теории. Представим результаты, следуя работам [14], [16], [17] и частично работе [28]. Помимо кинетического исследования спиновой динамики эти работы отслеживают вклад коллективного спинового тока. Как показано выше, явно спиновый ток появляется в уравнениях гидродинамики. Очевидно, что кинетическая теория дает более детальный анализ физических механизмов приводящих к спиновому току без явного введения этой функции.

Эволюция электронов в шестимерном фазовом пространстве описывается скалярной функцией распределения, которая удовлетворяет обобщенному кинетическому уравнению Власова

$$\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + q_e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f + \nabla_{\mathbf{r}}^{\alpha} B^{\beta} \cdot \nabla_{\mathbf{p}}^{\alpha} S^{\beta} = 0, \quad (3.9.1)$$

в котором, спин-спиновое взаимодействие электронов приводит к дополнительному слагаемому, содержащему спиновую (векторную) функцию распределения. Соответственно, модель содержит кинетическое уравнение для спиновой функции распределения

$$\partial_t S^{\alpha} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} S^{\alpha} + q_e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} S^{\alpha} + \nabla_{\mathbf{r}}^{\beta} B^{\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{p}}^{\beta} f - \frac{2\mu_e}{\hbar} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} S^{\beta} B^{\gamma} = 0. \quad (3.9.2)$$

Кинетические уравнения записаны в приближении самосогласованного поля. Электромагнитное поле, входящее в эти уравнения удовлетворяет уравнениям Максвелла:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi q_e \int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}, \quad (3.9.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.9.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B}, \quad (3.9.5)$$

и

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} + \frac{4\pi q_e}{c} \int \mathbf{v} \cdot f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p} + 4\pi \mu_e \nabla \times \int \mathbf{S}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}. \quad (3.9.6)$$

Рассматриваемая модель является нерелятивистской, поэтому импульс прямо пропорционален скорости $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.

Используем систему уравнений (3.9.1)-(3.9.6) для анализа спектра возбуждений малой амплитуды в частично спин-поляризованной плазме. Равновесное состояние опишем следующими равновесными функциями распределения и значениями полей удовлетворяющих исходной системе уравнений (3.9.1)-(3.9.6). Равновесное электрическое поле взято равным нулю $\mathbf{E}_0 = 0$, а равновесное магнитное поле равно внешнему магнитному полю, направленному по оси z $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$. Некоторые промежуточные результаты могут быть получены для неявного вида равновесных функций распределения. Положим, что равновесные функции однородны в координатном пространстве и изотропны в импульсном пространстве, так что $f_0(p)$ и $\mathbf{S}_0 = S_0(p) \mathbf{e}_z$, где $p = |\mathbf{p}|$ это модуль импульса. Здесь также использовано, что спиновая функция распределения имеет одну ненулевую равновесную проекцию.

При рассмотрении квазистатического приближения и рассмотрении кулоновского и спин-спинового взаимодействий электрическое и магнитное поле имеют следующий явный вид

$$\mathbf{E}_{int} = q_e \int \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}', \mathbf{p}, t) d\mathbf{r}' d\mathbf{p}, \quad (3.9.7)$$

и

$$B_{int}^\alpha = \mu_e \int G^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') S^\beta(\mathbf{r}', \mathbf{p}, t) d\mathbf{r}' d\mathbf{p}, \quad (3.9.8)$$

где использованы функции Грина кулоновского $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ и спин-спинового взаимодействия $G^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \partial^\alpha \partial^\beta (1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) + 4\pi \delta^{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$.

Основное внимание при выводе кинетических уравнений в главе 1 было сфокусировано на квантовой кинетики с отдельной спиновой эволюцией. Здесь

использована кинетика в которой все электроны рассмотрены как один сорт частиц или, используя гидродинамическую терминологию, как единая жидкость. Однако частичная спиноваяязация электронного газа проявляется в аддитивной структуре равновесной функции распределения состоящей из двух ступенек Ферми соответствующих электронам с разной проекцией спина (это будет явно показано ниже при представлении явного вида функций распределения). Это приводит к эффектам близким к отдельной спиновой эволюции и позволяет учитывать эффекты приводящие к нетривиальному коллективному спиновому току.

Рассмотрим малые возмущения описанного выше равновесного состояния прибавляя малые поправки к равновесным значениям. Малые поправки обозначим символом δ перед функций, к примеру, для скалярной функции распределения получаем δf . Рассмотрим пространственно-временную зависимость возмущений в виде плоских монохроматических волн.

В результате находим, что линеаризованные кинетические уравнения принимают следующий вид

$$-i\omega\delta f + i\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}\delta f + \frac{q_e}{c}B_0(\mathbf{v}\times\mathbf{e}_z)\cdot\nabla_{\mathbf{p}}\delta f + q_e\delta\mathbf{E}\cdot\nabla_{\mathbf{p}}f_0 + i\mu_e\delta B_z\mathbf{k}\cdot\nabla_{\mathbf{p}}S_0 = 0, \quad (3.9.9)$$

и

$$\begin{aligned} -i\omega\delta\mathbf{S} + i(\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})\delta\mathbf{S} + \frac{q_e}{c}B_0((\mathbf{v}\times\mathbf{e}_z)\cdot\nabla_{\mathbf{p}})\delta\mathbf{S} + i\mu_e(\mathbf{k}\cdot\nabla_{\mathbf{p}})f_0\delta\mathbf{B} \\ + q_e(\delta\mathbf{E}\cdot\nabla_{\mathbf{p}})\mathbf{S}_0 + \frac{2\mu_e}{\hbar}(\mathbf{B}_0\times\delta\mathbf{S} - \mathbf{S}_0\times\delta\mathbf{B}) = 0. \end{aligned} \quad (3.9.10)$$

Запишем линеаризованное кинетическое уравнение для спиновой функции распределения в проекциях на оси координат

$$\Omega_e\partial_{\varphi}\delta S_x + i(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v})\delta S_x + \Omega_{\mu}\delta S_y = i\mu_e(\mathbf{k}\cdot\nabla_{\mathbf{p}})f_0\delta B_x + \frac{2\mu_e}{\hbar}S_{0z}\delta B_y, \quad (3.9.11)$$

$$-\Omega_{\mu}\delta S_x + \Omega_e\partial_{\varphi}\delta S_y + i(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v})\delta S_y = i\mu_e(\mathbf{k}\cdot\nabla_{\mathbf{p}})f_0\delta B_y - \frac{2\mu_e}{\hbar}S_0\delta B_x, \quad (3.9.12)$$

и

$$\Omega_e\partial_{\varphi}\delta S_z + i(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v})\delta S_z = q_e(\delta\mathbf{E}\cdot\nabla_{\mathbf{p}})S_{0z} + i\mu_e(\mathbf{k}\cdot\nabla_{\mathbf{p}})f_0\delta B_z. \quad (3.9.13)$$

Из явного вида линеаризованных кинетических уравнений видно, что уравнение для скалярной функции распределения независимо от остальных

кинетических уравнений. Решая его, находим возмущение скалярной функции распределения:

$$\delta f = \frac{1}{\Omega_e} \times$$

$$\times \int_{C_0}^{\varphi} \left(q_e (\mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{E}) |_{\varphi'} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} + i \mu_e (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) |_{\varphi'} \delta B_z \frac{\partial S_{0z}}{\partial \varepsilon} \right) \exp \left(i \int_{\varphi}^{\varphi'} \frac{1}{\Omega_e} (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} |_{\varphi''}) d\varphi'' \right) d\varphi'. \quad (3.9.14)$$

Аналогично, уравнение для z-проекции спиновой функции распределения независимо от остальных кинетических уравнений. Решая его, находим возмущение z-проекции спиновой функции распределения

$$\delta S_z = \frac{1}{\Omega_e} \times$$

$$\times \int_{C_3}^{\varphi} \left(q_e (\mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{E}) |_{\varphi'} \frac{\partial S_{0z}}{\partial \varepsilon} + i \mu_e (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) |_{\varphi'} \delta B_z \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) \exp \left(i \int_{\varphi}^{\varphi'} \frac{1}{\Omega_e} (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} |_{\varphi''}) d\varphi'' \right) d\varphi'. \quad (3.9.15)$$

Уравнения для x- и y- проекций спиновой функции распределения связаны друг с другом.

Решая их, находим следующие решения

$$\delta S_x = \frac{\mu_e}{2\Omega_e} \left[\int_{C_1}^{\varphi} \exp \left(\frac{i\Omega_{\mu}}{\Omega_e} (\varphi - \varphi') \right) \exp \left(i \int_{\varphi}^{\varphi'} \frac{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} |_{\varphi''}}{\Omega_e} d\varphi'' \right) \times \right.$$

$$\times \left((\delta B_x + i\delta B_y) (i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} |_{\varphi'}) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} + \frac{2S_{0z}}{\hbar} (\delta B_y - i\delta B_x) \right) d\varphi'$$

$$+ \int_{C_2}^{\varphi} \exp \left(\frac{i\Omega_{\mu}}{\Omega_e} (\varphi' - \varphi) \right) \exp \left(i \int_{\varphi}^{\varphi'} \frac{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} |_{\varphi''}}{\Omega_e} d\varphi'' \right) \times$$

$$\left. \times \left((\delta B_x - i\delta B_y) (i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} |_{\varphi'}) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} + \frac{2S_{0z}}{\hbar} (\delta B_y + i\delta B_x) \right) d\varphi' \right], \quad (3.9.16)$$

и

$$\delta S_y = \frac{\mu_e}{2i\Omega_e} \left[\int_{C_1}^{\varphi} \exp \left(\frac{i\Omega_{\mu}}{\Omega_e} (\varphi - \varphi') \right) \exp \left(i \int_{\varphi}^{\varphi'} \frac{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} |_{\varphi''}}{\Omega_e} d\varphi'' \right) \times \right.$$

$$\times \left((\delta B_x + i\delta B_y) (i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} |_{\varphi'}) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} + \frac{2S_{0z}}{\hbar} (\delta B_y - i\delta B_x) \right) d\varphi'$$

$$+ \int_{C_2}^{\varphi} \exp \left(\frac{i\Omega_{\mu}}{\Omega_e} (\varphi' - \varphi) \right) \exp \left(i \int_{\varphi}^{\varphi'} \frac{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} |_{\varphi''}}{\Omega_e} d\varphi'' \right) \times$$

$$\times \left((i\delta B_y - \delta B_x)(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}|_{\varphi'}) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} - \frac{2S_{0z}}{\hbar} (\delta B_y + i\delta B_x) \right) d\varphi' \Big]. \quad (3.9.17)$$

Фурье образ линейризованной формы уравнений Максвелла имеет следующий вид

$$\mathbf{k} \times \delta \mathbf{E} = \frac{\omega}{c} \delta \mathbf{B}, \quad (3.9.18)$$

и

$$\mathbf{k} \times \delta \mathbf{B} = -\frac{\omega}{c} \delta \mathbf{E} - \frac{4\pi i q_e}{c} \int \mathbf{v} \cdot \delta f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p} + 4\pi \mu_e \mathbf{k} \times \int \delta \mathbf{S}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}. \quad (3.9.19)$$

Здесь приведены только два уравнения, которые используются при решении задачи.

Уравнение (3.9.18) позволяет выразить возмущение магнитного поле через возмущение электрического поля. В результате избавимся от возмущений магнитного поля в уравнении (3.9.19) и возмущениях функций распределения (3.9.14)-(3.9.17). Подставляя возмущения функций распределения в уравнение (3.9.19) получим систему трех алгебраических уравнений относительно проекций возмущения электрического поля, которую можно записать в традиционном виде

$$\left[k^2 \delta^{\alpha\beta} - k^\alpha k^\beta - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{\alpha\beta}(\omega) \right] \delta E_\beta = 0. \quad (3.9.20)$$

Временно возвращаясь к применению возмущений функций распределения можно кратко записать тензор диэлектрической проницаемости в следующем виде

$$\varepsilon^{\alpha\beta}(\omega) \delta E_\beta = \delta^{\alpha\beta} \delta E_\beta + \frac{4\pi i q_e}{\omega m} \int p^\alpha \delta f d\mathbf{p} - \frac{4\pi \mu_e c}{\omega} \int \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} k^\beta \delta S^\gamma d\mathbf{p}. \quad (3.9.21)$$

Первое слагаемое в этой формуле существует и в отсутствии среды. Второе слагаемое возникает при исследовании динамики зарядов. Однако спиновая эволюция изменяет это слагаемое, так как спин вносит вклад в решение для возмущения скалярной функции распределения. Последнее слагаемое вызвано эволюцией спина. Оно существует даже для нейтральных частиц. Однако динамика зарядов вносит вклад в это слагаемое через спиновую функцию распределения, как это видно из решений полученных выше для спиновой функции распределения (3.9.15)-(3.9.17).

Используя явный вид решений для возмущений функций распределения, запишем явный вид тензора диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} + \int d\mathbf{p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Lambda^{\alpha\beta}(n)}{\omega - k_z v_z - n\Omega_e} + \sum_{r=+,-} \int d\mathbf{p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Lambda_{S,r}^{\alpha\beta}(n)}{\omega - k_z v_z - n\Omega_e + r\Omega_\mu} - 4\pi\mu_e^2 \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2} \int d\mathbf{p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2 \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \delta^{\alpha\gamma} \delta^{\beta\gamma} + \Delta^\alpha \delta^{\beta\gamma}. \quad (3.9.22)$$

Здесь использован набор дополнительных обозначений.

Во втором слагаемом представлен следующий тензор

$$\Lambda^{\alpha\beta}(n) = \frac{4\pi q_e^2}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \Pi_{Cl}^{\alpha\beta}(n) + 4\pi\mu_e^2 \frac{k_x^2 c^2}{\omega} J_n^2 \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \delta^{\alpha\gamma} \delta^{\beta\gamma} + \frac{4\pi q_e \mu_e c}{\omega} \Pi_S^{\alpha\beta}(n) \frac{\partial S_{0z}}{\partial \varepsilon}, \quad (3.9.23)$$

в который входят

$$\hat{\Pi}_{Cl}(n) = \begin{pmatrix} \frac{\Omega_e^2}{k_x^2} n^2 J_n^2 & i v_\perp \frac{\Omega_e}{k_x} n J_n J_{n'} & v_z \frac{\Omega_e}{k_x} n J_n^2 \\ -i v_\perp \frac{\Omega_e}{k_x} n J_n J_{n'} & v_\perp^2 (J_{n'})^2 & -i v_\perp v_z J_n J_{n'} \\ v_z \frac{\Omega_e}{k_x} n J_n^2 & i v_\perp v_z J_n J_{n'} & v_z^2 J_n^2 \end{pmatrix}, \quad (3.9.24)$$

и

$$\Pi_S^{\alpha\beta}(n) = \begin{pmatrix} 0 & i\Omega_e n J_n^2 & 0 \\ -i\Omega_e n J_n^2 & 2k_x v_\perp J_n J_{n'} & -ik_x v_z J_n^2 \\ 0 & ik_x v_z J_n^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.9.25)$$

где v_\perp это скорость в направлении перпендикулярном z .

Тензор $\Pi_{Cl}^{\alpha\beta}(n)$ существует в классическом случае безспиновой динамики.

Тензор $\Pi_S^{\alpha\beta}(n)$ появляется при рассмотрении спиновой динамики заряженных частиц.

Третье слагаемое в выражении для тензора диэлектрической проницаемости (3.9.22) имеет полюсы при $\omega = k_z v_z + n\Omega_e \pm \Omega_\mu$. Т.е. частоты соответствующие нулю знаменателя сдвинуты на спиновую циклотронную частоту, которая отличается от зарядовой электронной циклотронной частоты из-за наличия аномального магнитного момента электронов.

Третье слагаемое в формуле (3.9.22) содержит тензоры $\Lambda_{S,r}^{\alpha\beta}(n)$, которые имеют следующий явный вид:

$$\hat{\Lambda}_{S+}(n) = \frac{4\pi}{\omega} \frac{\mu_e^2 c^2}{2\omega} J_n^2 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} (k_z v_z + n\Omega_e) + \frac{2S_{0z}}{\hbar} \right) \hat{K}, \quad (3.9.26)$$

и

$$\hat{\Lambda}_{S_-}(n) = \frac{4\pi}{\omega} \frac{\mu_e^2 c^2}{2\omega} J_n^2 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} (k_z v_z + n\Omega_e) - \frac{2S_{0z}}{\hbar} \right) (\hat{K})^*. \quad (3.9.27)$$

В тензоры $\Lambda_{S,r}^{\alpha\beta}(n)$ входит следующая матрица:

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} k_z^2 & -ik_z^2 & -k_x k_z \\ ik_z^2 & k_z^2 & -ik_x k_z \\ -k_x k_z & ik_x k_z & k_x^2 \end{pmatrix}. \quad (3.9.28)$$

Далее, диэлектрическая проницаемость (3.9.22) содержит вектор Δ в последнем слагаемом. Покомпонентно, этот вектор можно представить в следующем виде

$$\Delta = \frac{4\pi q_e \mu_e c}{\omega^2} \int \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial S_{0z}}{\partial \varepsilon} \left\{ -i\Omega_e n J_n^2, -k_x v_{\perp} J_n J_n', -ik_x v_z J_n^2 \right\} d\mathbf{p}. \quad (3.9.29)$$

Вычисления показывают, что только одна компонента этого вектора отлична от нуля в рассматриваемом режиме. Более того, эта компонента может быть записана в упрощенном виде:

$$\Delta_y = -k_x \frac{4\pi q_e \mu_e c}{\omega^2} \int \frac{\partial S_{0z} v_{\perp}}{\partial \varepsilon} J_0 J_0' d\mathbf{p}. \quad (3.9.30)$$

Рассматривая частично спин-поляризованный вырожденный электронный газ, запишем равновесные функции распределения как суперпозиции ступенек Ферми для электронов с определенной проекцией спина. Скалярная функция распределения, очевидно, пропорциональна сумме ступенек Ферми:

$$f_0(p) = \frac{\mathcal{G}(p_{F\uparrow} - p) + \mathcal{G}(p_{F\downarrow} - p)}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (3.9.31)$$

Тогда как z-проекция равновесной спиновой функции распределения пропорциональна разности ступенек Ферми:

$$S_{0z}(p) = \frac{\mathcal{G}(p_{F\uparrow} - p) - \mathcal{G}(p_{F\downarrow} - p)}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (3.9.32)$$

где $p_{Fs} = (6\pi^2 n_{0s})^{\frac{1}{3}} \hbar$ это импульс Ферми электронов с определенной проекцией спина. При вычислении тензора диэлектрической проницаемости используем формулу для производной функции Хэвисайда $\partial \mathcal{G}(p_{Fs} - p) / \partial p = -\delta(p - p_{Fs})$.

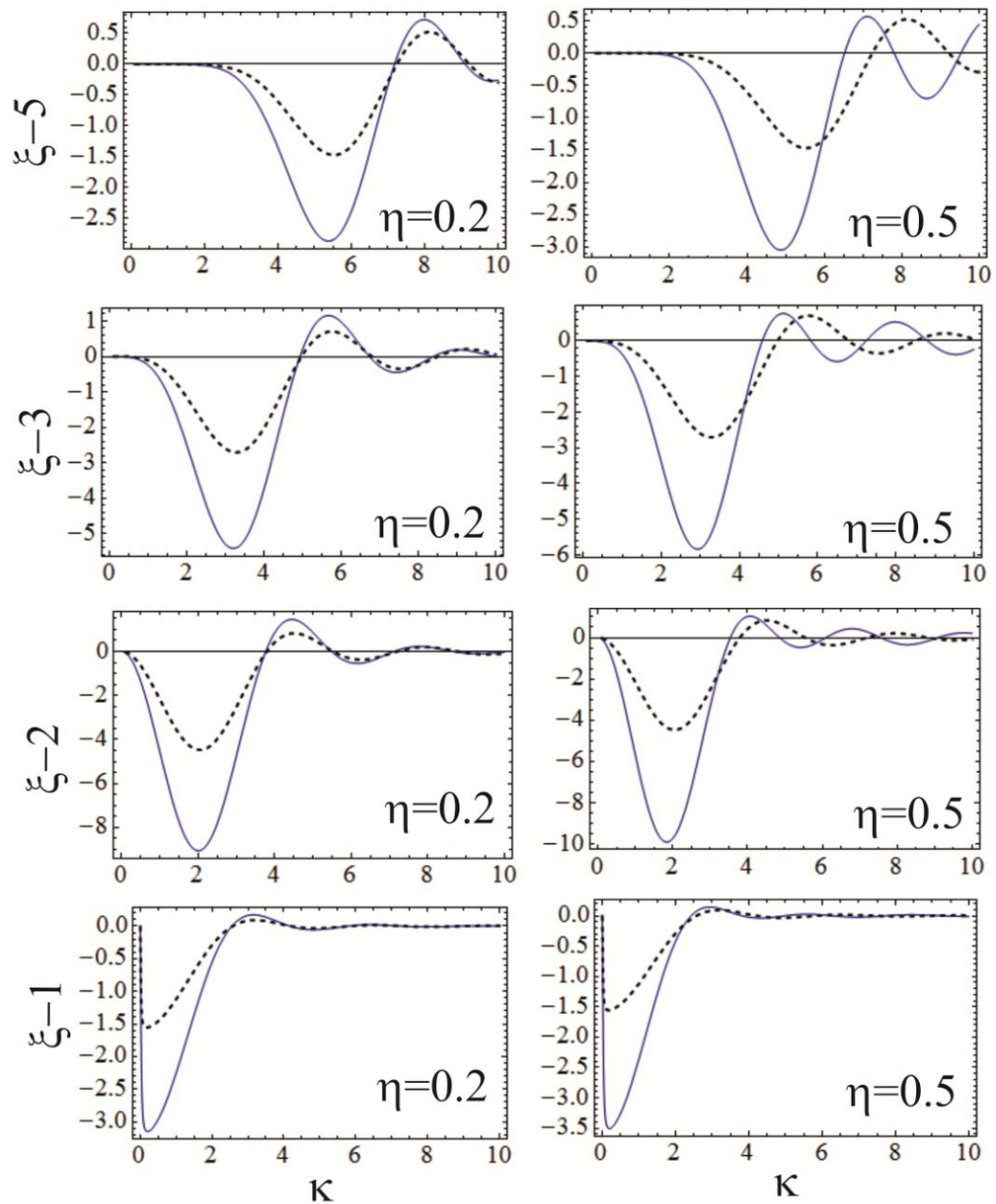


Рис. 3.9.1. Рисунок показывает влияние отдельной спиновой эволюции на спектр первой, второй, третьей и пятой обыкновенных циклотронных волн для двух значений спиновой поляризации (значения спиновой поляризации показаны на рисунке). Отдельная спиновая эволюция появляется в тензоре диэлектрической проницаемости через тензор $\Pi_{Cl}^{\alpha\beta}(n, s)$, существующий для классической плазмы. Динамика спинов не учитывается в данном случае. Сплошные кривые показывают спектр при учете отдельной спиновой эволюции. Штриховые кривые показывают классический результат, возникающий в отсутствии спиновой поляризации.

В итоге тензор диэлектрической проницаемости (3.9.22) принимает следующий вид

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} - \sum_{s=\uparrow,\downarrow} \int \sin\theta d\theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Lambda^{\alpha\beta}(n, s)}{\omega - k_z v_{Fs} \cos\theta - n\Omega_e} + \frac{mp_{Fs} \mu_e^2 c^2}{\pi \hbar^3} \frac{1}{2\omega^2} \sum_{r=+,-} \frac{J_n^2 (k_z v_{Fs} \cos\theta + n\Omega_e) \kappa_r^{\alpha\beta}}{\omega - k_z v_{Fs} \cos\theta - n\Omega_e + r\Omega_\mu} \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi \hbar^3} \frac{\mu_e^2 c^2}{\hbar \omega^2} \sum_{r=+,-} \int_0^{p_{Fs}} \frac{r(-1)^i J_n^2 \kappa_r^{\alpha\beta} p^2 dp}{\omega - k_z v_z - n\Omega_e + r\Omega_\mu} \right. \\ \left. - \frac{mp_{Fs}}{\pi \hbar^3} \left(\mu_e^2 \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2} J_n^2 + \frac{q_e \mu_e k_x c}{\omega^2} v_{Fs} \sin\theta J_n J_n' \right) \delta^{\alpha y} \delta^{\beta y} \right], \quad (3.9.33)$$

где $\kappa_+^{\alpha\beta} = K^{\alpha\beta}$, $\kappa_-^{\alpha\beta} = (K^{\alpha\beta})^*$, и $i_\uparrow = 0, i_\downarrow = 1$.

При записи тензора диэлектрической проницаемости (3.9.33) использовано следующее вспомогательное обозначение

$$\Lambda^{\alpha\beta}(n, s) = \frac{3\omega_{Ls}^2}{2\omega v_{Fs}^2} \Pi_{Cl}^{\alpha\beta}(n, s) + m^2 v_{Fs} \left(\frac{\mu_e^2 k_x^2 c^2}{\pi \hbar^3} \frac{1}{\omega} J_n^2 \delta^{\alpha y} \delta^{\beta y} + \frac{q_e \mu_e}{\pi \hbar^3} (-1)^i \frac{c}{\omega} \Pi_S^{\alpha\beta}(n, s) \right), \quad (3.9.34)$$

где входит часть классического тензора диэлектрической проницаемости

$$\hat{\Pi}_{Cl}(n, s) = \begin{pmatrix} \frac{\Omega_e^2}{k_x^2} n^2 J_n^2 & i v_{Fs} \sin\theta \frac{\Omega_e}{k_x} n J_n J_{n'} & v_{Fs} \cos\theta \frac{\Omega_e}{k_x} n J_n^2 \\ -i v_{Fs} \sin\theta \frac{\Omega_e}{k_x} n J_n J_{n'} & v_{Fs}^2 \sin^2\theta (J_{n'})^2 & -i v_{Fs}^2 \sin\theta \cos\theta J_n J_{n'} \\ v_{Fs} \cos\theta \frac{\Omega_e}{k_x} n J_n^2 & i v_{Fs}^2 \sin\theta \cos\theta J_n J_{n'} & v_{Fs}^2 \cos^2\theta J_n^2 \end{pmatrix}, \quad (3.9.35)$$

и тензор, связанный со спиновой эволюцией

$$\Pi_S^{\alpha\beta}(n, s) = \begin{pmatrix} 0 & i\Omega_e n J_n^2 & 0 \\ -i\Omega_e n J_n^2 & 2k_x v_{Fs} \sin\theta J_n J_{n'} & -ik_x v_{Fs} \cos\theta J_n^2 \\ 0 & ik_x v_{Fs} \cos\theta J_n^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.9.36)$$

Тензор (3.9.33) получен для произвольного направления распространения волн относительно внешнего магнитного поля. Используем его для анализа частных случаев, а именно для волн распространяющихся параллельно и перпендикулярно к внешнему магнитному полю.

Предельный случай волн, распространяющихся параллельно внешнему магнитному полю.

В случае распространения волн параллельно внешнему магнитному полю тензор диэлектрической проницаемости (3.9.33) упрощается и принимает следующий вид:

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} - \sum_{s=\uparrow,\downarrow} \int \sin\theta d\theta \left[\Pi_{Cl}^{\alpha\beta}(\theta, s) + \frac{m^2 \mu_e^2 c^2}{\pi \hbar^3 2\omega^2} \sum_{r=+,-} \frac{v_{Fs}^2 k_z \cos\theta \kappa_r^{\alpha\beta}}{\omega - k_z v_{Fs} \cos\theta + r\Omega_\mu} - \frac{m^3 \mu_e^2 c^2}{\pi \hbar^3 \hbar \omega^2} \sum_{r=+,-} \int_0^{v_{Fs}} \frac{r \kappa_r^{\alpha\beta} (-1)^{i_s} v^2 dv}{\omega - k_z v \cos\theta + r\Omega_\mu} \right], \quad (3.9.37)$$

где использованы следующие матрицы $\kappa_+^{\alpha\beta} = K_{\parallel}^{\alpha\beta}$, $\kappa_-^{\alpha\beta} = (K_{\parallel}^{\alpha\beta})^*$, здесь

$$\hat{K}_{\parallel} = k_z^2 \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.9.38)$$

Кроме того, диэлектрическая проницаемость (3.9.37) содержит следующий тензор

$$\Pi_{Cl}(\theta, s) = \frac{3\omega_{Ls}^2}{2\omega} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{4}[G(\omega - \Omega_e) + G(\omega + \Omega_e)] & i\frac{1}{4}[G(\omega - \Omega_e) - G(\omega + \Omega_e)] & 0 \\ -i\frac{1}{4}[G(\omega - \Omega_e) - G(\omega + \Omega_e)] & \frac{1}{4}[G(\omega - \Omega_e) + G(\omega + \Omega_e)] & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\cos^2\theta}{\omega - k_z v_{Fs} \cos\theta} \end{pmatrix}, \quad (3.9.39)$$

который является упрощением соответствующего тензора (3.9.35) использованного при произвольном направлении распространения волн.

Выражение (3.9.39) содержит следующие функции

$$G(\omega - \Omega_e) = \frac{\sin^2\theta}{\omega - k_z v_{Fs} \cos\theta - \Omega_e} \quad (3.9.40)$$

и

$$G(\omega + \Omega_e) = \frac{\sin^2\theta}{\omega - k_z v_{Fs} \cos\theta + \Omega_e}. \quad (3.9.41)$$

Далее, после интегрирования в формуле (3.9.37) получаем, конечное выражение для тензора диэлектрической проницаемости в режиме распространения волн параллельно внешнему магнитному полю

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} - \sum_{s=u,d} \left\{ \Pi_{Cl}^{\alpha\beta}(s) + \frac{m^2 v_{Fs} \mu_e^2 c^2}{\pi \hbar^3 2\omega^2} \sum_{r=+,-} \kappa_r^{\alpha\beta} \left[-2 + \frac{\omega + r\Omega_\mu}{k_z v_{Fs}} \ln \left(\frac{\omega + k_z v_{Fs} + r\Omega_\mu}{\omega - k_z v_{Fs} + r\Omega_\mu} \right) \right] + \frac{m^3 \mu_e^2 c^2}{\pi \hbar^3 \hbar \omega^2} \sum_{r=+,-} r \kappa_r^{\alpha\beta} (-1)^{i_s} \left[-\frac{v_{Fs}}{k_z^2} (\omega + r\Omega_\mu) \right] \right\}$$

$$+ \frac{(\omega + r\Omega_\mu)^2 - (k_z v_{Fs})^2}{2k_z^3} \ln \left(\frac{\omega + k_z v_{Fs} + r\Omega_\mu}{\omega - k_z v_{Fs} + r\Omega_\mu} \right) \Bigg\}. \quad (3.9.42)$$

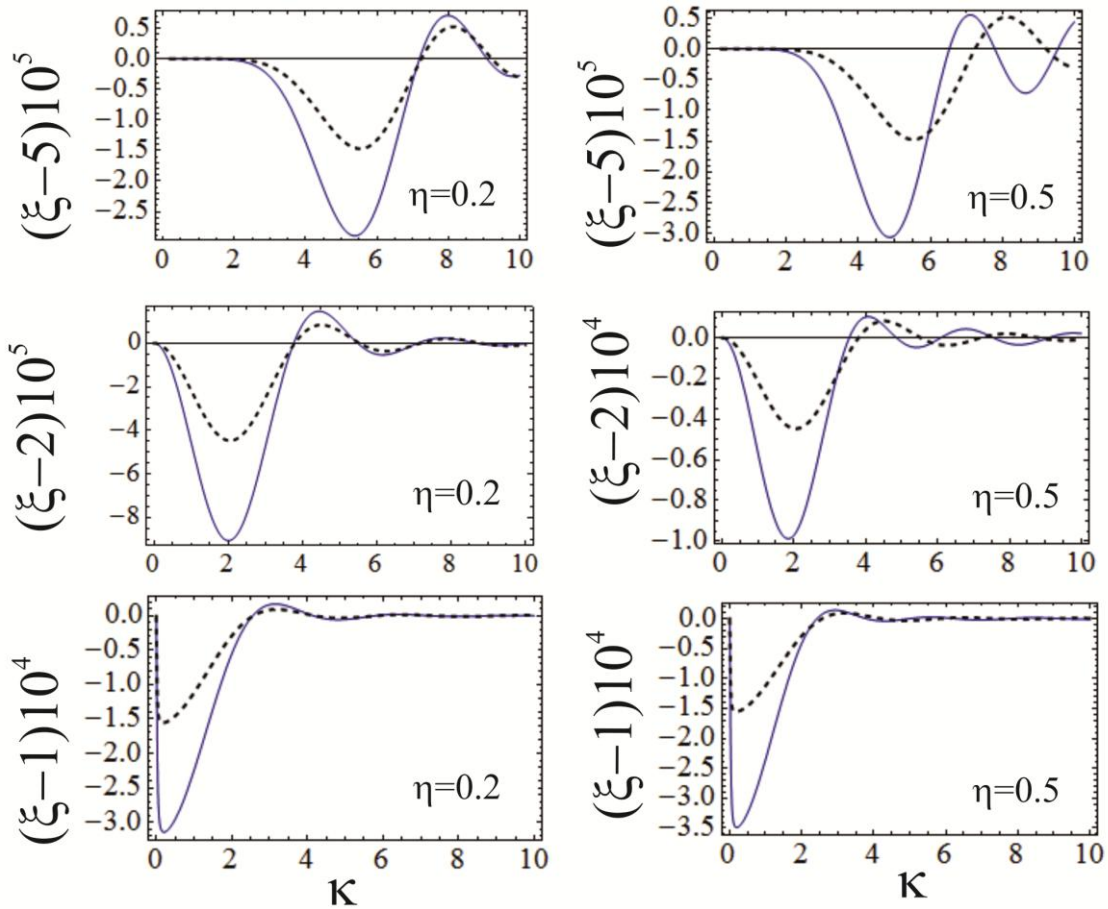


Рис. 3.9.2. Рисунок показывает влияние динамики спинов на спектр обыкновенных циклотронных волн при условии $\Omega_e = \Omega_\mu$ в уравнении (3.9.48), т.е. при пренебрежении аномальной частью магнитного момента электронов. Рисунок представлен для первой, второй и пятой обыкновенных циклотронных волн. В данном приближении число ветвей не меняется, но форма кривых заметно меняется, вследствие спиновой динамики. Сплошные кривые показывают спектр при учете отдельной спиновой эволюции. Штриховые кривые показывают классический результат, возникающий в отсутствие спиновых эффектов.

Классическая часть тензора диэлектрической проницаемости, модифицированная спиновой поляризацией и независимым рассмотрением электронов с различной проекцией спина содержит следующую матрицу:

$$\Pi_{Cl}(s) = \frac{3\omega_{Ls}^2}{2\omega} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{4}[G(\omega - \Omega_e) + G(\omega + \Omega_e)] & i\frac{1}{4}[G(\omega - \Omega_e) - G(\omega + \Omega_e)] & 0 \\ -i\frac{1}{4}[G(\omega - \Omega_e) - G(\omega + \Omega_e)] & \frac{1}{4}[G(\omega - \Omega_e) + G(\omega + \Omega_e)] & 0 \\ 0 & 0 & H(\omega) \end{pmatrix}, \quad (3.9.43)$$

в которой

$$G(\omega \mp \Omega_e) = \frac{1}{k_z v_{Fs}} \left[\frac{2(\omega \pm \Omega_e)}{k_z v_{Fs}} + \left(1 - \frac{(\omega \pm \Omega_e)^2}{(k_z v_{Fs})^2} \right) \ln \left(\frac{\omega + k_z v_{Fs} \pm \Omega_e}{\omega - k_z v_{Fs} \pm \Omega_e} \right) \right] \quad (3.9.44)$$

и

$$H(\omega) = \frac{\omega}{(k_z v_{Fs})^2} \left(-2 + \frac{\omega}{k_z v_{Fs}} \ln \left(\frac{\omega + k_z v_{Fs}}{\omega - k_z v_{Fs}} \right) \right). \quad (3.9.45)$$

При распространении волн параллельно внешнему магнитному полю находим дисперсионное уравнение в стандартной форме известной в классической физике плазмы, но с модифицированными элементами тензора диэлектрической проницаемости

$$\det \begin{pmatrix} k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{xx} & -\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{xy} & 0 \\ -\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{yz} & k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = 0. \quad (3.9.46)$$

Уравнение, содержащее zz-компоненту тензора диэлектрической проницаемости, описывает продольные волны

$$1 + \sum_{s=u,d} \frac{3\omega_{Ls}^2}{k_z^2 v_{Fs}^2} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\omega}{k_z v_{Fs}} \ln \left(\frac{\omega + k_z v_{Fs}}{\omega - k_z v_{Fs}} \right) \right] = 0. \quad (3.9.47)$$

Уравнение (3.9.47) полностью совпадает с уравнением, полученным выше исходя из квантовой кинетики с отдельной спиновой эволюцией. Выше уже выполнено решение и обсуждение этого уравнения. Поэтому сфокусируемся на дисперсионном уравнении для поперечных волн.

Полное выражение для дисперсионного уравнения, для поперечных волн, распространяющихся параллельно внешнему магнитному полю, представлено в

работе [17]. Следуя этой работе, запишем приближенный вид дисперсионного уравнения в длинноволновом приближении:

$$\frac{k_z^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \sum_{s=\uparrow, \downarrow} \left[\frac{\omega_{Ls}^2}{\omega k_z v_{Fs}} \left[\frac{k_z v_{Fs}}{\omega \mp |\Omega_e|} + \frac{1}{5} \left(\frac{k_z v_{Fs}}{\omega \mp |\Omega_e|} \right)^3 \right] \right. \\ \left. + \frac{\omega_{Ls}^2}{\omega^2} \frac{\hbar^2 k_z^2}{m^2 v_{Fs}^2} \left(\frac{k_z v_{Fs}}{\omega \mp |\Omega_\mu|} \right)^2 - (-1)^{i_s} \frac{\omega_{Ls}^2}{\omega^2} \frac{\hbar k_z}{2m v_{Fs}} \left[\frac{k_z v_{Fs}}{\omega \mp |\Omega_\mu|} + \frac{1}{5} \left(\frac{k_z v_{Fs}}{\omega \mp |\Omega_\mu|} \right)^3 \right] \right], \quad (3.9.48)$$

полученное для $\delta E_x = \pm i \delta E_y$. Представленное уравнение содержит слагаемые с точностью до третьего порядка по $k_z v_{Fs} / (\omega \mp |\Omega_e|)$.

Уравнение (3.9.48) содержит коэффициенты пропорциональные $\hbar k_z^2 / m$. Это показывает аналогию с известным квантовым потенциалом Бома. Однако эти слагаемые возникают из эволюции спина. При этом отметим, что рассматриваемая модель не содержит квантовый потенциал Бома. Уравнение (3.9.48) показывает, что с ростом волнового вектора роль спиновых эффектов возрастает. Однако увеличение волнового вектора следует рассматривать в ограниченных пределах, так как дисперсионное уравнение (3.9.48) получено в пределе малых волновых векторов. Изменение мнимой части частоты волн с правовинтовой циркулярной поляризацией распространяющихся параллельно внешнему магнитному полю вследствие спиновых эффектов с ростом волнового вектора показано в работе [325].

Раздельная спиновая эволюция не меняет степень дисперсионного уравнения (3.9.48). Поэтому, раздельная спиновая эволюция не меняет числа поперечных волн распространяющихся вдоль внешнего магнитного поля в этом режиме.

В последнюю группу слагаемых в уравнении (3.9.48) электроны со спином вверх и электроны со спином вниз входят с противоположными знаками. Таким образом, эти слагаемые исчезают при нулевой равновесной спиновой поляризации. Первое из них оказывается пропорциональным разности парциальных концентраций электронов в первой степени $n_{0\uparrow} - n_{0\downarrow}$. Такой вклад возникает вследствие динамики магнитных моментов без учета “тепловых эффектов”, в контексте рассматриваемого вырожденного электронного газа речь идет о распределении частиц по состояниям с разными значениями энергии. Второе из рассматриваемых

слагаемых пропорционально $n_{0\uparrow}^{5/3} - n_{0\downarrow}^{5/3}$, т.е. оно пропорционально разности парциальных концентраций электронов в дробной степени, а именно это выражение имеет сходство с разностью парциальных давлений Ферми. Это является проявлением “тепловых эффектов”. Появление этого слагаемого связано с динамикой спина и проявлением “тепловых эффектов” в спиновой динамике. Поэтому, оно имеет аналогию именно со спиновым током Ферми, а не давлением Ферми.

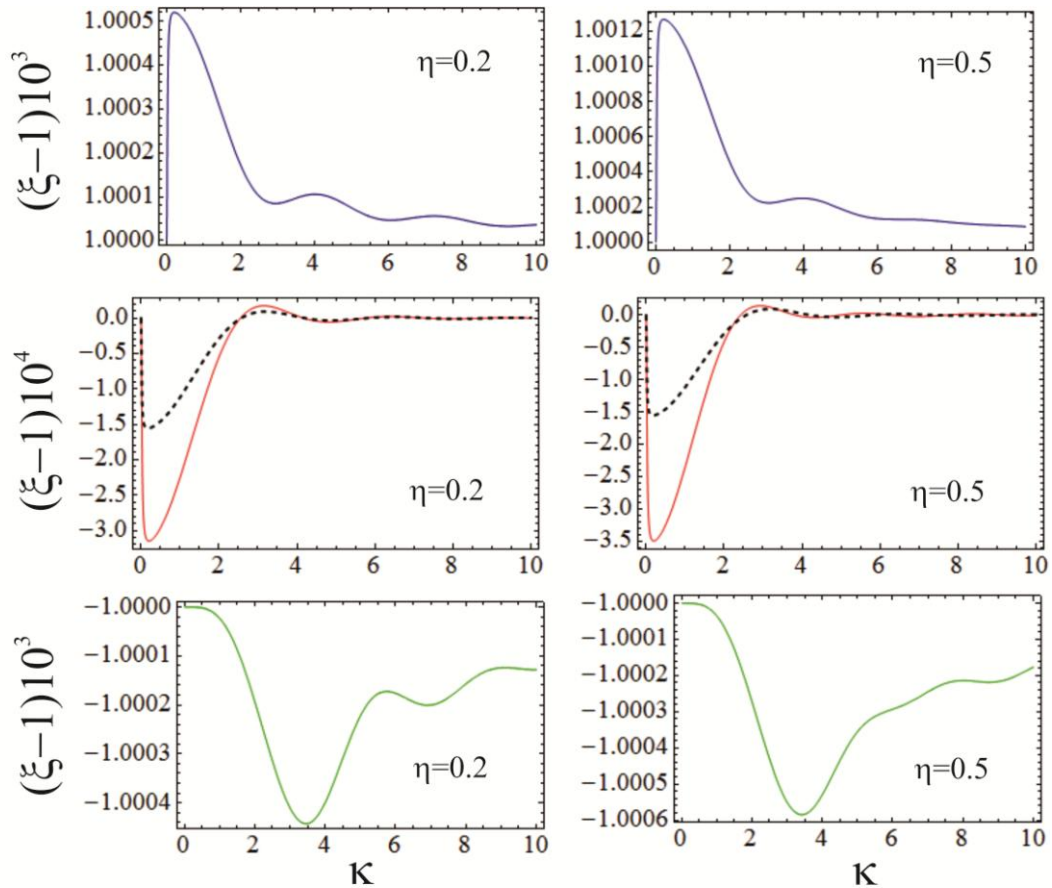


Рис. 3.9.3. Рисунок показывает детали тонкой структуры первой обыкновенной циклотронной волны возникающей в результате спиновой динамики при учете аномальной части магнитного момента для двух значений спиновой поляризации.

Сплошные кривые показывают спектр, возникающий при учете отдельной спиновой эволюции, динамики спина и учета аномальной части магнитного момента электрона. Штриховые кривые присутствующие только на средних рисунках показывают спектр классических циклотронных волн в вырожденном электронном газе без спиновой поляризации.

Для сравнения уравнения (3.9.48) с результатами гидродинамической теории достаточно ограничиться слагаемыми с точностью до первого порядка по $k_z v_{Fs} / (\omega \mp |\Omega_e|)$. В этом случае уравнение (3.9.48) упрощается к следующему виду

$$\frac{k_z^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega(\omega \mp |\Omega_e|)} + \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \frac{\hbar k_z^2}{2mn_{0e}} \frac{n_{0\uparrow} - n_{0\downarrow}}{\omega \mp |\Omega_\mu|}. \quad (3.9.49)$$

Упрощенное дисперсионное уравнение не содержит вклада спинового тока Ферми. Это уравнение соответствует результатам гидродинамической модели представленной в работе [109].

Распространение волн перпендикулярно внешнему магнитному полю.

Этот раздел посвящен свойствам волн, распространяющихся перпендикулярно внешнему магнитному полю, при этом выберем следующую структуру волнового вектора $\mathbf{k} = \{k_x, 0, 0\}$. В этом режиме, тензор диэлектрической проницаемости (3.9.33) упрощается и принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} - \sum_{s=\uparrow,\downarrow} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\int \sin\theta d\theta \Lambda^{\alpha\beta}(n, s)}{\omega - n\Omega_e} + \frac{m^2 v_{Fs}}{\pi \hbar^3} \frac{\mu_e^2 c^2}{2\omega^2} K_{\perp}^{\alpha\beta} \sum_{r=+,-} \frac{n\Omega_e \int \sin\theta d\theta J_n^2}{\omega - n\Omega_e + r\Omega_\mu} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{m^3}{\pi \hbar^3} \frac{\mu_e^2 c^2}{\hbar \omega^2} \sum_{r=+,-} \frac{r K_{\perp}^{\alpha\beta} (-1)^{i_s}}{\omega - n\Omega_e + r\Omega_\mu} \int_0^{v_{Fs}} v^2 dv \int \sin\theta d\theta J_n^2 \left(\frac{k_x v \sin\theta}{\Omega_e} \right) \right] \right. \\ \left. - 2\mu_e^2 \frac{m^2 v_{Fs}}{\pi \hbar^3} \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2} \delta^{\alpha y} \delta^{\beta y} \right\}, \quad (3.9.50) \end{aligned}$$

где использованы следующие свойства функций Бесселя при упрощении последнего слагаемого в тензоре диэлектрической проницаемости: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2 = 1$,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n J_n' = 0.$$

Тензор диэлектрической проницаемости (3.9.50) содержит следующую матрицу

$$\begin{aligned} \Lambda^{\alpha\beta}(n, s) = \frac{3\omega_{Ls}^2}{2\omega v_{Fs}^2} \Pi_{Cl}^{\alpha\beta}(n, s), \\ + m^2 v_{Fs} \frac{\mu_e^2}{\pi \hbar^3} \frac{k_x^2 c^2}{\omega} J_n^2 \delta^{\alpha y} \delta^{\beta y} + \frac{q_e \mu_e}{\pi \hbar^3} \frac{c}{\omega} m^2 v_{Fs} (-1)^{i_s} \Pi_S^{\alpha\beta}(n, s), \quad (3.9.51) \end{aligned}$$

в которую входят матрицы

$$\hat{\Pi}_{Cl}(n, s) = v_{Fs}^2 \begin{pmatrix} \frac{\Omega_e^2}{k_x^2 v_{Fs}^2} n^2 J_n^2 & i \sin \theta \frac{\Omega_e}{k_x v_{Fs}} n J_n J_n' & 0 \\ -i \sin \theta \frac{\Omega_e}{k_x v_{Fs}} n J_n J_n' & \sin^2 \theta (J_n')^2 & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2 \theta J_n^2 \end{pmatrix}, \quad (3.9.52)$$

и

$$\Pi_S^{\alpha\beta}(n, s) = \begin{pmatrix} 0 & i\Omega_e n J_n^2 & 0 \\ -i\Omega_e n J_n^2 & 2k_x v_{Fs} \sin \theta J_n J_n' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.9.53)$$

В этом разделе функции Бесселя J_n имеют следующий аргумент $k_x v_{Fs} \sin \theta / |\Omega_e|$, если не оговорено иное значение аргумента. Тензор $\Pi_S^{\alpha\beta}(n, s)$ описывает вклад спиновых эффектов, который приводит к полюсам на тех же частотах, что и классическая часть тензора диэлектрической проницаемости.

Также, тензор (3.9.50) содержит следующую матрицу:

$$\hat{K}_{\perp} = k_x^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.9.54)$$

В рассматриваемом режиме дисперсионное уравнение разбивается на два уравнения, как и в безспиновом случае.

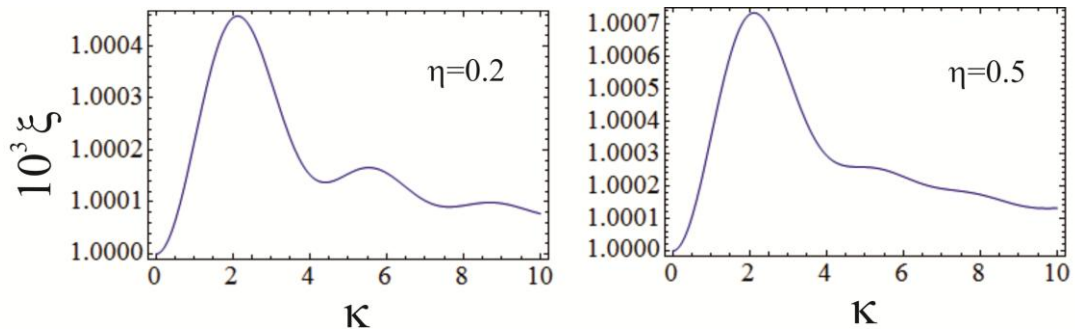


Рис. 3.9.4. Рисунок показывает дисперсионную зависимость нижней (нулевой) обыкновенной циклотронной волны для двух значений спиновой поляризации. Эта волна существует вследствие спиновой эволюции и учета аномальной части магнитного момента электрона. Спектр этой волны расположен в окрестности следующего значения частоты $0.001\Omega_e$.

Одно уравнение описывает строго поперечные волны, у которых вектор возмущения электрического поля направлен вдоль внешнего магнитного поля $\delta\mathbf{E} = \{0, 0, \delta E_z\}$. Такие волны известны как обыкновенные волны в намагниченной плазме. При этом дисперсионное уравнение имеет традиционную структуру

$$\frac{k_x^2 c^2}{\omega^2} = \varepsilon_{zz}. \quad (3.9.55)$$

Все отличия скрыты в явном виде zz -элемента тензора диэлектрической проницаемости.

Далее, запишем второе дисперсионное уравнение, существующее в данном случае:

$$\frac{k_x^2 c^2}{\omega^2} = \frac{\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xy}^2}{\varepsilon_{xx}}. \quad (3.9.56)$$

Уравнения (3.9.55) и (3.9.56) позволяют описать дисперсионные зависимости циклотронных волн и мод Бернштейна в нерелятивистском режиме. Анализ продольных мод Бернштейна в релятивистской и нерелятивистской безспиновой невырожденной плазме выполнен в [326]. Это сделано для режима со сравнимыми значениями циклотронной частоты и ленгмюровской частоты [326].

Линейно-поляризованные волны: обыкновенные волны, циклотронные волны и спиновые волны.

Запишем явный вид дисперсионного уравнения для линейно-поляризованных волн: обыкновенных волн, циклотронных волн и спиновых волн:

$$\begin{aligned} \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2} = 1 - & \sum_{s=\uparrow, \downarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{3\omega_{Ls}^2}{2\omega} \frac{\int \sin\theta \cos^2\theta J_n^2\left(\frac{k_x v \sin\theta}{|\Omega_e|}\right) d\theta}{\omega - n\Omega_e} \right. \\ & + \frac{m^2 v_{Fs}}{\pi \hbar^3} \frac{\mu_e^2 c^2}{2\omega^2} k_x^2 \sum_{r=+,-} \frac{n\Omega_e \int \sin\theta d\theta J_n^2\left(\frac{k_x v \sin\theta}{|\Omega_e|}\right)}{\omega - n\Omega_e + r\Omega_\mu} \\ & \left. - \frac{(-1)^i m^3}{\pi \hbar^3} \frac{\mu_e^2 c^2}{\hbar \omega^2} \times k_x^2 \sum_{r=+,-} r \frac{\int_0^{v_{Fs}} v^2 dv \int \sin\theta d\theta J_n^2\left(\frac{k_x v \sin\theta}{|\Omega_e|}\right)}{\omega - n\Omega_e + r\Omega_\mu} \right]. \quad (3.9.57) \end{aligned}$$

Два последних слагаемых в уравнении (3.9.57) вызваны спиновой эволюцией входящей в уравнения через δS_x и δS_y . Третье слагаемое в правой части уравнения (3.9.57) содержит вклады электронов с различными проекциями спина с одинаковыми знаками. Тогда как, в последнее слагаемое вклады электронов с различными проекциями спина входят с разными знаками. В первом случае имеет место вклад разброса частиц по квантовым состояниям аналогичный давлению. Во втором случае, также имеет место вклад разброса частиц по квантовым состояниям, но аналогичный спиновому току.

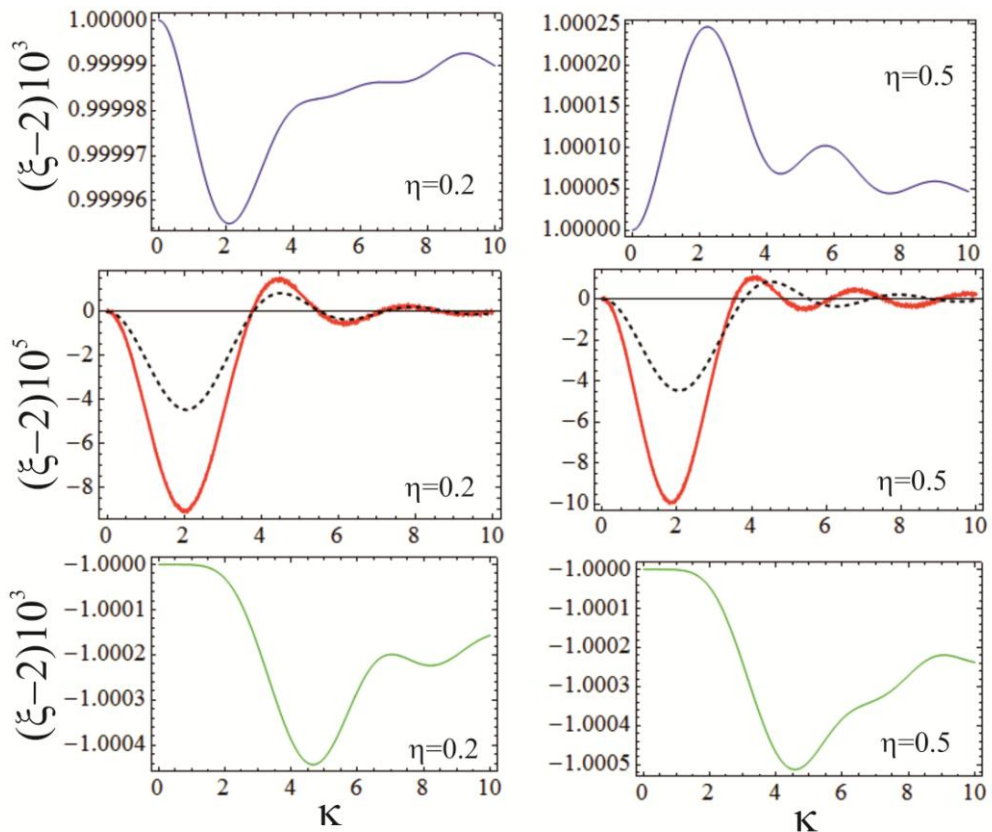


Рис. 3.9.5. Рисунок показывает детали тонкой структуры второй обыкновенной циклотронной волны возникающей в результате спиновой динамики при учете аномальной части магнитного момента для двух значений спиновой поляризации.

Сплошные кривые показывают спектр, возникающий при учете отдельной спиновой эволюции, динамики спина и учета аномальной части магнитного момента электрона. Штриховые кривые присутствующие только на средних рисунках показывают спектр классических циклотронных волн в вырожденном электронном газе без спиновой поляризации.

Все нетривиальные слагаемые в правой части уравнения (3.9.57) содержат эффекты раздельной спиновой эволюции. За исключением раздельной спиновой эволюции, второе слагаемое имеет такую же форму, как и в традиционном бесспиновом случае. Второе слагаемое вызвано динамикой зарядов и имеет полюсы на гармониках электронной циклотронной частоты. Третье и четвертое слагаемые вызваны спиновой динамикой. Полюсы этих слагаемых сдвинуты спиновой циклотронной частотой $\pm\Omega_\mu$, которая, как отмечалось выше, не совпадает с электронной циклотронной частотой. Это приводит к новым полюсам в правой части уравнения (3.9.57). В итоге, спиновая динамика приводит к новым резонансам и формированию тонкой структуры циклотронных волн.

Исследуем решения уравнения (3.9.57) численно в различных режимах.

В качестве первого шага, рассмотрим уравнение (3.9.57) в отсутствии спиновой динамики, т.е. отбросим третье и четвертое слагаемые в правой части. В этом случае исследуем вклад раздельной спиновой эволюции в классические слагаемые. На втором шаге, учтем динамику спинов, т.е. рассмотрим все слагаемые в уравнении (3.9.57), но пренебрежем аномальной частью магнитного момента электронов. Последний шаг это рассмотрение всех слагаемых с учетом аномальной части магнитного момента электрона.

Результаты численного решения уравнения (3.9.57) в первом режиме представлены на Рис. (3.9.1). В первом режиме, находим, что раздельная спиновая эволюция вносит вклад в свойства циклотронных волн. Причем, этот эффект возрастает при увеличении номера моды циклотронных волн. Кроме того, Рис. (3.9.1) показывает, что увеличение приводит к более значительному изменению спектра. В этом разделе численный анализ выполнен для равновесной концентрации $n_0 = 10^{21} \text{ см}^{-3}$ и внешнем магнитном поле $B_0 = 10^7$ Гаусс. Это соответствует режиму плотной плазмы, в которой ленгмюровская частота много больше чем циклотронная частота.

Изменение спектра проявляется в более быстрой осцилляции дисперсионной кривой. Кроме того, отклонение кривых от значения $n|\Omega_e|$ увеличивается. Хорошо известно, что циклотронные волны и моды Бернштейна возникают в кинетической теории из-за учета кинетической моделью деталей эволюции системы в импульсном пространстве. Гидродинамический учет подобных явлений требует

учета эволюции высших моментов функции распределения, таких как давление, которые, к примеру, позволяет учесть моду Бернштейна находящуюся в окрестности частоты $2|\Omega_e|$. Учет спиновой поляризации и отдельной спиновой эволюции деформирует ступеньку Ферми. Это преобразует её в суперпозицию двух ступенек для электронов со спином вверх и электронов со спином вниз. Таким образом, меняется распределение частиц в импульсном пространстве, что сказывается на форме спектра мод Бернштейна.

Второй режим показывает модификацию спектра циклотронных волн. Однако спиновая динамика слабо меняет форму спектра циклотронных волн. Это изменение показано на Рис. (3.9.2). Далее, учет аномальной части магнитного момента электрона приводит к тому, что каждая ветвь спектра циклотронных волн разделяется на три близко расположенных ветви (см. Рис. (3.9.3)). Таким образом, можно утверждать, что спиновая динамика наряду с аномальной частью магнитного момента электрона приводят к тонкой структуре спектра циклотронных волн.

Резонансы при гармониках циклотронной частоты $n|\Omega_e|$, возникают при следующих знаменателях: $\omega - n|\Omega_e|$, $\omega - (n+1)|\Omega_e| + |\Omega_\mu|$ и $\omega - (n-1)|\Omega_e| - |\Omega_\mu|$.

Рассмотрим особый режим, не имеющий аналога в классическом случае при $n = 0$. В этом случае существует только один резонанс при положительной частоте $\omega - (|\Omega_\mu| - |\Omega_e|) = \omega - 0.001|\Omega_e|$. Решение уравнения (3.9.57) подтверждает существование волнового решения при $0.001|\Omega_e|$.

Соответствующий спектр показан на Рис. (3.9.4). Аналогичный эффект продемонстрирован в работе [67] в терминах квантовой кинетики в расширенном фазовом пространстве для квазиклассической плазмы с распределением Максвелла. Более того, применение расширенной гидродинамики учитывающей динамику давления и спинового тока также позволяет промоделировать этот эффект в работе [109]. Таким образом, в этих работах получен спектр который монотонно возрастает, достигает максимума и монотонно спадает при увеличении волнового вектора до бесконечности. Тогда как спектр, полученный для вырожденного электронного газа, представленный на Рис. (3.9.4) осциллирует с изменением волнового вектора. Это соответствует известной структуре

классических циклотронных мод и мод Бернштейна в вырожденном электронном газе.

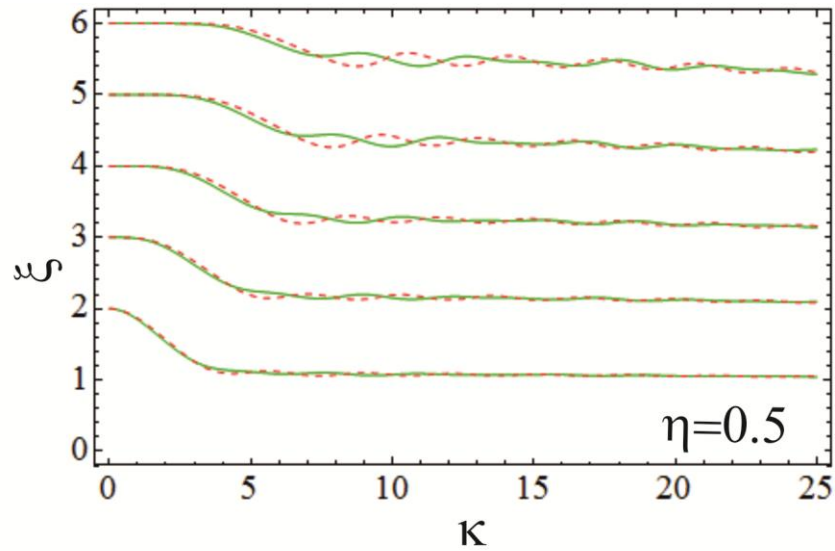


Рис. 3.10.6. Рисунок показывает спектр электростатических мод Бернштейна (с первой по пятую моды) в двух режимах. Штриховые красные линии показывают классический спектр, существующий в неполяризованном вырожденном электронном газе. Непрерывные зеленые линии показывают спектр с учетом отдельной спиновой эволюции. Рисунок получен при концентрации $n_0 = 10^{21} \text{ см}^{-3}$ и внешнем магнитном поле $B_0 = 10^7$ Гаусс.

Вклад спиновой динамики в тензор диэлектрической проницаемости пропорционален одной из двух следующих безразмерных констант: $e^2 n_{0e}^{1/3} / mc^2$ и $mcen_{0e}^{1/3} / \hbar B_0 \sim e^2 n_{0e}^{1/3} / \hbar |\Omega_e|$. Они представляют собой отношение средней энергии кулоновского взаимодействия к энергии покоя электронов, и отношение средней энергии кулоновского взаимодействия к кванту циклотронных колебаний, соответственно.

Существует изменение триплетной структуры при изменении спиновой поляризации. Это показано на Рис. (3.9.3) и (3.9.5). Это также проявляется в изменении спектра нулевой циклотронной моды (см. Рис. (3.9.4)). Изменение спектра классических циклотронных волн (3.9.1) при изменении спиновой поляризации также обнаружено за счет вклада отдельной спиновой эволюции выражающегося в изменении равновесной функции распределения.

Рассмотрим, к примеру, триплет возникший в результате расщепления первой циклотронной моды. Верхняя линия в триплете проявляет отклонение в область больших частот. Средняя и нижняя линии отклоняются в область меньших частот. В итоге дисперсионные кривые получают большее отклонение. Для других мод этот эффект также наблюдается.

В этом параграфе рассмотрена кинетическая теория поперечных спиновых волн в вырожденной плазмopodobной среде. Однако выше, в параграфе 3.1 кратко упоминались эти эффекты, рассмотренные в рамках методов гидродинамики. В гидродинамике показано существование одной поперечной спиновой волны. Её дисперсионная зависимость находится вблизи электронной циклотронной частоты. Её частоты имеют значения немного больше циклотронной частоты. Изначально такой же результат был получен в работе [77], где использован комбинированный гидродинамика-кинетический метод. Отметим соответствие представленной кинетической теории с ранними работами. Анализ структуры дисперсионного уравнения (3.9.57) и входящих в него функций Бесселя показывает, что в длинноволновом пределе, из всей полученной тонкой структуры, остаётся только волна, существующая при гидродинамическом описании спиновых эффектов.

Эллиптически поляризованные волны: Моды Бернштейна и необыкновенные волны.

Этот раздел посвящен продольно-поперечным волнам в спин-поляризованной квантовой плазме. При пренебрежении поперечной составляющей эти волны преобразуются в электростатические волны, а именно в ленгмюровскую (гибридную) волну и моды Бернштейна.

Элементы тензора диэлектрической проницаемости входящие в уравнение (3.9.56) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= 1 - \sum_{s=\uparrow,\downarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \Omega_e^2}{k_x^2 v_{Fs}^2} \frac{3\omega_{Ls}^2}{\omega^2 - n^2 \Omega_e^2} \int \sin\theta J_n^2 d\theta, \quad (3.9.58) \\ \varepsilon_{yy} &= 1 - \sum_{s=\uparrow,\downarrow} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 - n^2 \Omega_e^2} \left[3\omega_{Ls}^2 \int \sin^3\theta (J_n')^2 d\theta + 2 \frac{m^2 \mu_e^2}{\pi \hbar^3} k_x^2 c^2 v_{Fs} \int \sin\theta J_n^2 d\theta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4(-1)^i \frac{q_e \mu_e}{\pi \hbar^3} m^2 v_{Fs}^2 k_x c \int \sin^2\theta J_n J_n' d\theta \right] + 2 \frac{m^2 v_{Fs}}{\pi \hbar^3} \mu_e^2 \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2} + \frac{3\omega_{Ls}^2}{2\omega^2} \int \sin^3\theta (J_0')^2 d\theta \right\} \end{aligned}$$

$$+ \frac{\mu_e^2}{\pi \hbar^3} \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2} m^2 v_{Fs} \int \sin \theta J_0^2 d\theta + 2(-1)^{i_s} \frac{q_e \mu_e}{\pi \hbar^3} m^2 v_{Fs}^2 \frac{k_x c}{\omega^2} \int \sin^2 \theta J_0 J_0' d\theta \left. \right\}, \quad (3.9.59)$$

и

$$\varepsilon_{xy} = - \sum_{s=\uparrow, \downarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 \Omega_e^2}{\omega^2 - n^2 \Omega_e^2} \left[\frac{3\omega_{Ls}^2}{2\omega} \frac{1}{k_x v_{Fs}} \int d\theta \sin^2 \theta J_n J_n' + (-1)^{i_s} \frac{m^2 v_{Fs}}{\omega} \frac{q_e \mu_e c}{\pi \hbar^3} \int d\theta \sin \theta J_n^2 \right]. \quad (3.9.60)$$

Элемент ε_{xx} представляет собой продольную диэлектрическую проницаемость. Формула (3.9.58) показывает, что спиновая динамика не дает вклада в продольную диэлектрическую проницаемость. Раздельная спиновая эволюция связана с равновесной спиновой поляризацией. Она изменяет элемент ε_{xx} по сравнению с классическим случаем.

Элементы ε_{yy} и ε_{xy} модифицированы динамикой спинов. Слагаемые, связанные со спином пропорциональны магнитному моменту частиц μ_e . Спиновая циклотронная частота не входит в знаменатели элементов ε_{xx} , ε_{yy} и ε_{xy} . Таким образом, уравнение (3.9.56) не дает тонкой структуры мод Бернштейна в отличие от поперечных циклотронных волн рассмотренных выше.

В электростатическом пределе, дисперсионное уравнение сводится к $\varepsilon_{xx} = 0$. Известно, что спектр мод Бернштейна в вырожденном электронном газе является немонотонным. Это показано штриховыми линиями на Рис. (3.9.6). Раздельная спиновая эволюция изменяет форму спектра мод Бернштейна. Это изменение показано на Рис. (3.9.6). Видно, что изменение становится более заметным при увеличении номера моды.

Вклад нетривиальной части равновесной спиновой функции распределения в свойства волн и коллективного спинового тока.

Представленный выше в этом разделе анализ основан на тривиальной форме равновесной спиновой функции распределения, в которой существует одна ненулевая проекция представленная уравнением (3.9.32). Однако равновесные кинетические уравнения позволяют получить более общее решение, называемое нетривиальной равновесной спиновой функцией распределения. В этом решении z-проекция S_{0z} , по-прежнему, определена уравнением (3.9.32). Однако, x-проекция S_{0x} и y-проекция S_{0y} не равны нулю, а имеют следующий вид

$$S_{0x} = S_{0z} \cos \varphi \quad (3.9.61)$$

и

$$S_{0y} = S_{0z} \sin \varphi. \quad (3.9.62)$$

Такой вид функции распределения получен в работе [19]. Далее, нетривиальная равновесная спиновая функция распределения с проекциями (3.9.61) и (3.9.62) была использована в работе [14], для исследования динамики коллективного спинового тока в плазмopodobных средах. Ниже представлены некоторые результаты работы [14].

Следующие уравнения получены в длинноволновом пределе $k_z v_{Fs} / |\omega \pm \Omega_e| \ll 1$ для волн, распространяющихся параллельно внешнему магнитному полю:

$$\frac{k_z^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega(\omega \pm |\Omega_e|)} + \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \frac{\hbar k_z^2}{2mn_{0e}} \frac{n_{0\uparrow} - n_{0\downarrow}}{(\omega \pm |\Omega_e|)} \mp \frac{(6\pi^2)^{\frac{2}{3}}}{32\pi} \frac{\omega_{Le}^2}{\omega(\omega \pm |\Omega_e|)} \frac{n_{0\uparrow}^{\frac{2}{3}} - n_{0\downarrow}^{\frac{2}{3}}}{n_{0e}} k_z, \quad (3.9.63)$$

при $\omega \pm \Omega_e > 0$, и уравнение

$$\frac{k_z^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega(\omega - |\Omega_e|)} + \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \frac{\hbar k_z^2}{2mn_{0e}} \frac{n_{0\uparrow} - n_{0\downarrow}}{(\omega - |\Omega_e|)} - \frac{(6\pi^2)^{\frac{2}{3}}}{32\pi} \frac{\omega_{Le}^2}{\omega(\omega - |\Omega_e|)} \frac{n_{0\uparrow}^{\frac{2}{3}} - n_{0\downarrow}^{\frac{2}{3}}}{n_{0e}} k_z, \quad (3.9.64)$$

при $\omega - \Omega_e < 0$.

Последнее слагаемое в каждом из уравнений (3.9.63) и (3.9.64) вызвано нетривиальной частью равновесной функцией распределения, которая дает нетривиальное значение коллективного спинового тока.

Уравнения (3.9.63) и (3.9.64) позволяют поставить обратную задачу, а именно, подобрать возмущение спинового тока в уравнении эволюции спина, чтобы гидродинамическая модель могла воспроизвести результаты (3.9.63) и (3.9.64)

$$\delta J_{M,x} = \mp \frac{(6\pi^2)^{\frac{2}{3}}}{32\pi} \frac{\omega_{Le}^2}{(\omega \pm |\Omega_\mu|)c} \frac{n_{0\uparrow}^{\frac{2}{3}} - n_{0\downarrow}^{\frac{2}{3}}}{n_0^2} (\Omega_\mu \delta E_x + i\omega \delta E_y) \quad (3.9.65)$$

и

$$\delta J_{M,y} = \mp \frac{(6\pi^2)^{\frac{2}{3}}}{32\pi} \frac{\omega_{Le}^2}{(\omega \pm |\Omega_\mu|)c} \frac{n_{0\uparrow}^{\frac{2}{3}} - n_{0\downarrow}^{\frac{2}{3}}}{n_0^2} (i\omega \delta E_x - \Omega_\mu \delta E_y). \quad (3.9.66)$$

Кроме того, отметим, что в этом приближении $\delta J_{M,z} = 0$.

Уравнения (3.9.65) и (3.9.66) дают иной взгляд на уравнения состояния для спинового тока. В отличие от других моделей которые опирались на результаты равновесного приближения, в данном случае выведено непосредственно возмущение спинового тока.

Выводы.

Предмет исследования в этом разделе отличался от основной проблемы, исследованной в других разделах этой главы. Вместо спин-электрон-акустической волны исследованы процессы, связанные с динамикой спиновых компонент перпендикулярных внешнему магнитному полю и наличием у электрона аномального магнитного момента.

Проссумируем результаты, полученные в этом разделе. Одножидкостная кинетическая модель электронов, принимающая во внимание эволюцию спина, использована, для вывода тензора диэлектрической проницаемости спин-поляризованного электронного газа. Эта модель состоит из двух кинетических уравнений для электронов и для каждого сорта частиц входящих в систему. Одно из уравнений это обобщение уравнения Власова содержащее спин-спиновое взаимодействие как дополнительное слагаемое, содержащее спиновую функцию распределения. Второе кинетическое уравнение это векторное уравнение для спиновой функции распределения.

В результате решения кинетических уравнений найден тензор диэлектрической проницаемости для волн, распространяющихся под произвольным углом к внешнему магнитному полю, с учетом спиновых эффектов в частично спин-поляризованной квантовой плазме.

Обнаружено несколько физических эффектов. Один из них связан с поперечными линейно поляризованными (обыкновенными) волнами, распространяющимися перпендикулярно к внешнему магнитному полю и с возмущением электрического поля направленным параллельно внешнему магнитному полю.

Следующие результаты получены в этом режиме. Это изменение спектра циклотронных волн и образование триплетной тонкой структуры каждой циклотронной волны в силу наличия нескольких спиновых эффектов. Показано существование волны с частотой порядка одной тысячной доли циклотронной

частоты и исследован её спектр в частично спин-поляризованном вырожденном электронном газе (нулевой циклотронной моды).

Аномальный магнитный момент электрона приводит к коллективному эффекту формирования тонкой структуры циклотронных волн и появлению нулевой циклотронной моды. Однако несколько эффектов дают вклад в форму дисперсионных кривых. А именно, классические термы модифицированы отдельной спиновой эволюцией. А также существуют новые слагаемые, вызванные спиновой динамикой (они также могут содержать вклад отдельной спиновой эволюции). Эти эффекты дают заметный вклад в форму спектра. Однако, наличие аномального магнитного момента необходимо для существования тонкой структуры. Относительный вклад этих эффектов отслежен аналитически и численно.

Другой эффект связан с продольно-поперечными эллиптически поляризованными (необыкновенными) волнами, распространяющимися перпендикулярно внешнему магнитному полю с возмущениями электрического поля направленными перпендикулярно внешнему магнитному полю.

Этот эффект связан с модами Бернштейна. Обнаружено, что отдельная спиновая эволюция меняет осцилляционную структуру спектра мод Бернштейна, т.к. спектр мод Бернштейна в вырожденном электронном газе не монотонен. Изменение спектра увеличивается при увеличении номера моды. Этот эффект проявляется как в электростатическом пределе, так и при учете поперечном составляющей.

Третий эффект связан с нетривиальной частью спиновой равновесной функции распределения. Соответствующее обобщение дисперсионного уравнения для волн, распространяющихся параллельно внешнему магнитному полю в длинноволновом приближении. Кроме того, это дисперсионное уравнение позволило вывести уравнение состояния для возмущения спинового тока, не используя результаты равновесной теории.

Полученные результаты, прежде всего, важны для магнитоупорядоченных проводников и полупроводников. Эти результаты также могут быть использованы для вырожденной астрофизической плазмы с большой спиновой поляризацией носителей заряда.

3.10 Заключение к главе 3

Выполнено исследование вклада спиновой динамики на волновые процессы в плазмоподобных средах на основе моделей развитых в главе 1. На сегодняшний день выполнено исследование большого числа явлений в этой области. Важной особенностью спиновых эффектов в известных процессах вызванных динамикой заряда это малый вклад спиновых эффектов. Поэтому, такие вклады могут представлять интерес только в определенных ситуациях связанных с прецизионными измерениями. Следовательно, каждый случай исследования требует специальной экспериментальной или основанной на наблюдениях мотивации.

Более общий и фундаментальный интерес представляют процессы вызванные эволюцией спина и полностью исчезающие при пренебрежении спиновыми эффектами.

Одним из таких эффектов является спин-электрон-акустическая волна. Исследованию этой волны в различных режимах посвящена большая часть этой главы. Показано существование объемной и поверхностной спин-электрон-акустических волн. Вычислено затухание Ландау для спин-электрон-акустических волн. Исследовано влияние поперечного электрического поля при распространении спин-электрон-акустических волн под отличным от нуля углом к внешнему магнитному полю. Показано, что нелинейная эволюция спин-электрон-акустических волн приводит к формированию спин-электрон-акустического солитона.

Кроме того, показано существование тонкой структуры циклотронных волн, являющихся поперечными волнами, распространяющимися перпендикулярно внешнему магнитному полю. Обнаружено, что каждая мода циклотронных волн представляет собой три моды с различной формой дисперсионных кривых и отличающихся по частоте приблизительно на сотую долю циклотронной частоты. Тогда как сдвиг циклотронных мод (т.е. одного триплета относительно соседнего) приблизительно равен циклотронной частоте. Это расщепление каждой циклотронной моды на триплет связано с двумя факторами. Это упомянутая выше эволюция спина и существование аномальной части магнитного момента электрона.

Более того, найдена и исследована нулевая циклотронная мода. Её существование полностью связано с динамикой спина и существованием аномальной части магнитного момента электрона.

Исследование спиновых эффектов в квантовой плазме выполнено с акцентом на отслеживание вклада коллективного спинового тока в волновые свойства. Это также соответствует общетеоретическому обсуждению, представленному в Главе 1.

ГЛАВА 4. КОЛЛЕКТИВНЫЕ ЭФФЕКТЫ В СИСТЕМАХ УЛЬТРАХОЛОДНЫХ КВАНТОВЫХ ГАЗОВ

4.1 Спектры коллективных возбуждений в ультрахолодных фермионах и бозон-фермионных смесях

Рассматривая фермионы, в этом параграфе, ограничимся полностью спин поляризованными фермионами со спином 1/2. Сравним спектры фермионов, возникающие в различных моделях следуя работе [6].

Наиболее простой гидродинамической моделью является система уравнения непрерывности и уравнения Эйлера, где взаимодействие между фермионами учитывается в первом порядке по радиусу взаимодействия, а следовательно равно нулю в силу антисимметричности волновой функции.

Представим соответствующие уравнения

$$\partial_t n + \nabla(n\mathbf{v}) = 0, \quad (4.1.1)$$

и

$$m(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla p + n\nabla V_{ext} = 0. \quad (4.1.2)$$

Рассматривая однородную систему частиц в отсутствии внешнего поля. Для вырожденных спин-поляризованных фермионов уравнение состояния для давления имеет вид модифицированного давления Ферми $p = (6\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n^{5/3} / 5m$.

Рассматривая плоские волны в однородной неограниченной среде, которая характеризуется равновесной концентрацией n_0 и нулевым полем скоростей $\mathbf{v}_0 = 0$, представим возмущение в следующем виде $\delta n = N_0 e^{-i\omega t + ikx}$, и $\delta v_x = U_0 e^{-i\omega t + ikx}$, где N_0 и U_0 это постоянные амплитуды. Уравнения (4.1.1) и (4.1.2) приводят к следующему спектру объемных волн

$$\omega^2 = \frac{1}{3} (6\pi^2 n_0)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m^2} \cdot k_x^2. \quad (4.1.3)$$

Представим спектр (4.1.3) в различной форме с целью более удобного последующего сравнения с результатами более общей модели. Прежде всего, запишем спектр (4.1.3) через модифицированную скорость Ферми $\omega^2 = \frac{1}{3} v_{Fe}^2 \cdot k_x^2$, где $v_{Fe}^2 = (6\pi^2 n_0)^{2/3} \hbar^2 / m^2$. Далее, обратим внимание, что в уравнении Эйлера давление

рассмотрено как функция концентрации. Поэтому спектр (4.1.3) можно записать в неявном виде через давление

$$\omega^2 = \frac{1}{m} \frac{\partial p_0}{\partial n_0} \cdot k_x^2. \quad (4.1.4)$$

Также представим выражения (4.1.3) и (4.1.4) через давление $\omega^2 = \frac{5p_0}{3mn_0} \cdot k_x^2$.

Уравнения (4.1.3) и (4.1.4) показывают, что в системе вырожденных нейтральных полностью поляризованных фермионов существует единственное коллективное возбуждение имеющее вид акустической волны.

Модель, заданная уравнениями (4.1.1) и (4.1.2), может быть обобщена двумя способами. Можно дать более точное описание взаимодействия, между фермионами, которое возникает в третьем порядке по радиусу взаимодействия. Однако, неточность основного вклада в скорость звука останется в этой модели. Другой способ обобщения это расширение системы уравнений, включающее уравнение эволюции давления, выведенное в Главе 2. Очевидно, что оптимальным обобщением является учет обоих факторов. Соответствующая модель состоит из уравнения непрерывности (4.1.1) и следующих уравнений

$$mn(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) v^\alpha + \partial^\beta p^{\alpha\beta} + n \partial^\alpha V_{ext} = -g_2 \frac{m^2}{2\hbar^2} I_0^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial^\beta (n p^{\gamma\delta}), \quad (4.1.5)$$

и

$$\begin{aligned} \partial_t p^{\alpha\beta} + v^\gamma \partial_\gamma p^{\alpha\beta} + p^{\alpha\gamma} \partial_\gamma v^\beta + p^{\beta\gamma} \partial_\gamma v^\alpha + p^{\alpha\beta} \partial_\gamma v^\gamma = -\frac{m}{8\hbar^2} g_2 \left\{ I_0^{\alpha\gamma\delta\mu} \left[3n^2 v^\beta v^\delta \partial_\gamma v^\mu \right. \right. \\ \left. \left. + 2np^{\delta\mu} (\partial_\gamma v^\beta - \partial_\beta v^\gamma) \right] + I_0^{\beta\gamma\delta\mu} \left[3n^2 v^\beta v^\delta \partial_\gamma v^\mu + 2np^{\delta\mu} (\partial_\gamma v^\beta - \partial_\beta v^\gamma) \right] \right\}. \quad (4.1.6) \end{aligned}$$

Уравнение (4.1.5) содержит короткодействующее взаимодействие нейтральных фермионов, полученное в третьем порядке по радиусу взаимодействия. Более того, давление записано в виде симметричного тензора вместо скалярного давления, возникающего как скаляр, умноженный на единичный тензор. Уравнение (4.1.6) записано для тензора давления. При изучении линейной динамики малых продольных возмущений нам понадобятся только диагональные элементы тензора давления. Не смотря на то, что равновесное давление имеет одинаковую величину для диагональных элементов давления. Возмущения диагональных элементов давления оказываются различными. Уравнение (4.1.6)

также содержит короткодействующее взаимодействие нейтральных фермионов, полученное в третьем порядке по радиусу взаимодействия. Уравнения (4.1.5) и (4.1.6) содержит константу взаимодействия g_2 , которая является моментом потенциала взаимодействия (см. Главу 2) и тензор $I_0^{\alpha\beta\gamma\delta} = \delta^{\alpha\beta}\delta^{\gamma\delta} + \delta^{\alpha\gamma}\delta^{\beta\delta} + \delta^{\alpha\delta}\delta^{\beta\gamma}$.

Перейдем к рассмотрению волн на основе модели представленной уравнениями (4.1.1), (4.1.5) и (4.1.6). Рассмотрим однородную неограниченную среду для изотропной поверхности Ферми. В этом случае равновесное состояние задается следующими параметрами: равновесной концентрацией n_0 и нулевым полем скоростей $\mathbf{v}_0 = 0$, и диагональным давлением $p_0^{\alpha\beta} = p_0 \cdot \delta^{\alpha\beta}$. Возмущение представим в следующем виде $\delta n = N_0 e^{-i\omega t + ikx}$, и $\delta v_x = U_0 e^{-i\omega t + ikx}$, $\delta p^{\alpha\beta} = P^{\alpha\beta} e^{-i\omega t + ikx}$, где возмущение давления представлено как независимая функция. Отметим, что здесь рассматриваются продольные возмущения $\delta \mathbf{v} \parallel \mathbf{k}$.

Запишем уравнения гидродинамики (4.1.1), (4.1.5) и (4.1.6) в линейном приближении для описанного режима $\delta n = k_x n_0 \delta v_x / \omega$,

$$mn_0 \omega \delta v_x - k_x \delta p^{xx} - \Lambda k_x (n_0 \delta p^{\beta\beta} + 2n_0 \delta p^{xx} + 5p_0 \delta n) / 2n_0 = 0, \quad (4.1.7)$$

$$\omega \delta p^{xx} = 3p_0 k_x \delta v_x, \quad (4.1.8)$$

и

$$\omega \delta p^{yy} = \omega \delta p^{zz} = p_0 k_x \delta v_x. \quad (4.1.9)$$

Уравнения (4.1.7)-(4.1.9) приводят к спектру акустических волн

$$\omega^2 = \frac{3p_0}{mn_0} k_x^2 \left(1 + \frac{8}{3} \Lambda \right), \quad (4.1.10)$$

где $\Lambda \equiv g_2 m n_0 / \hbar^2$ это безразмерная константа взаимодействия.

Этот спектр отличается от спектра представленного формулами (4.1.3) и (4.1.4). Даже без учета взаимодействия коэффициент перед давлением отличается. Причем, результат, полученный при учете эволюции давления (4.1.10), соответствует результату кинетической теории для слабонеидеального вырожденного газа Ферми.

Перейдем к режиму анизотропной поверхности Ферми. Рассмотрим волны, распространяющиеся в однородной неограниченной среде на основе модели представленной уравнениями (4.1.1), (4.1.5) и (4.1.6).

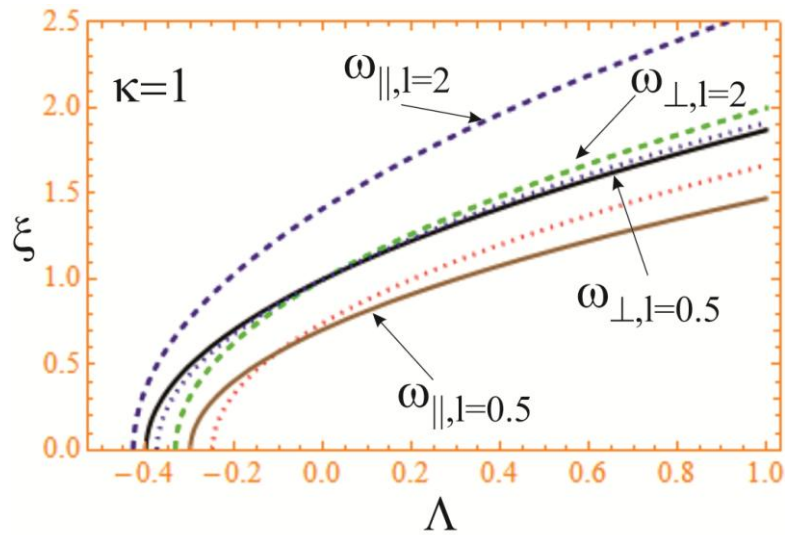


Рис. 4.1.1. Безразмерные частоты звуковых волн, распространяющиеся параллельно и перпендикулярно к оси анизотропии поверхности Ферми показаны как функции безразмерной константы взаимодействия. Безразмерный волновой вектор представлен через отношение волнового вектора и волнового вектора Ферми $k_F = \sqrt[3]{6\pi n_0}$, $\kappa = k_i / k_F$, где $i = x$ или $i = z$ в зависимости от режима. Безразмерная частота определена следующим образом $\xi = \omega / v_p k_F$, где $v_p = \sqrt{3p_0 / mn_0}$. Рисунок представлен для определенного значения волнового вектора. Однако, линейная зависимость частоты от волнового вектора позволяет легко идентифицировать соответствующее изменение частоты. Красная (нижняя пунктирная) линия описывает режим в отсутствии эволюции давления представленный формулой (4.1.3). Нижняя штриховая зеленая линия получена для волны распространяющейся перпендикулярно к оси анизотропии при $l = 2$. Верхняя штриховая синяя линия получена для волны распространяющейся параллельно к оси анизотропии при $l = 2$. Верхняя непрерывная черная линия получена для волны распространяющейся перпендикулярно к оси анизотропии при $l = 0.5$. Нижняя непрерывная коричневая линия получена для волны распространяющейся параллельно к оси анизотропии при $l = 0.5$. Верхняя пунктирная синяя линия соответствует изотропной поверхности Ферми.

В этом случае равновесное состояние задается следующими параметрами: равновесной концентрацией n_0 и нулевым полем скоростей $\mathbf{v}_0 = 0$, и диагональным давлением

$$p_0^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} p_0 & 0 & 0 \\ 0 & p_0 & 0 \\ 0 & 0 & r_0 \end{pmatrix}, \quad (4.1.11)$$

где xx и yy элементы равны друг другу, но отличаются от zz элемента $p_0^{xx} = p_0^{yy} \equiv p_0 \neq p_0^{zz} \equiv r_0$.

Возмущение можно рассматривать двух типов: волн распространяющихся вдоль оси анизотропии и волн распространяющихся перпендикулярно оси анизотропии.

Рассмотрим волны, распространяющиеся перпендикулярно оси анизотропии. Представим возмущения в следующем виде $\delta n = N_0 e^{-i\omega t + ikx}$, и $\delta v_x = U_0 e^{-i\omega t + ikx}$, $\delta p^{\alpha\beta} = P^{\alpha\beta} e^{-i\omega t + ikx}$. Тогда уравнения (4.1.1), (4.1.5) и (4.1.6) преобразуются к следующему виду в линейном приближении по малым возмущениям $\delta n = k_x n_0 \delta v_x / \omega$,

$$mn_0 \omega \delta v_x - k_x \delta p^{xx} - \Lambda k_x (n_0 \delta p^{\beta\beta} + 2n_0 \delta p^{xx} + (4p_0 + r_0) \delta n) / 2n_0 = 0, \quad (4.1.12)$$

$$\omega \delta p^{xx} = 3p_0 k_x \delta v_x, \quad (4.1.13)$$

$$\omega \delta p^{yy} = p_0 k_x \delta v_x, \quad (4.1.14)$$

и

$$\omega \delta p^{zz} = r_0 k_x \delta v_x. \quad (4.1.15)$$

Уравнения (4.1.12)-(4.1.15) дают спектр акустических волн

$$\omega^2 = \frac{3k_x^2}{mn_0} \left(p_0 \left(1 + \frac{7}{3} \Lambda \right) + \frac{1}{3} r_0 \Lambda \right), \quad (4.1.16)$$

который обобщает формулу (4.1.10) на случай анизотропной поверхности Ферми в режиме продольных волн распространяющихся перпендикулярно оси анизотропии. Очевидно, что в пределе изотропии поверхности Ферми $p_0 = r_0$, формула (4.1.16) переходит в формулу (4.1.10).

Отметим, что анизотропия проявляется в том, что элемент равновесного давления xx (при распространении вдоль оси x) определяет спектр в отсутствие взаимодействия. Аналогичная картина получена ниже, в формуле (4.1.20) для элемента равновесного давления zz при распространении волн вдоль оси z , где спектр определен величиной r_0 в отсутствие взаимодействия.

Более явно анизотропия поверхности Ферми проявляется в части спектра зависящего от взаимодействия, т.к. p_0 и r_0 входят ассиметрично в слагаемые пропорциональные безразмерной константе взаимодействия Λ .

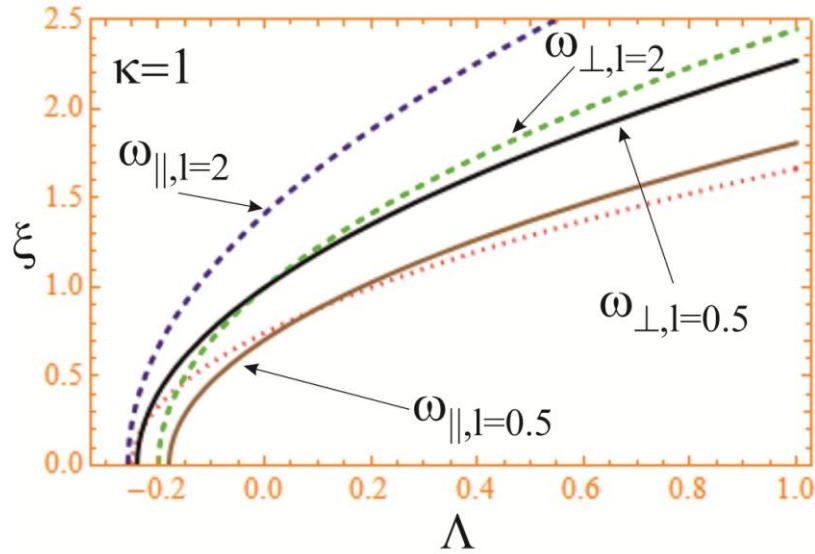


Рис. 4.1.2. Безразмерные частоты звуковых волн, распространяющиеся параллельно и перпендикулярно к оси анизотропии поверхности Ферми показаны как функции безразмерной константы взаимодействия при наличии параболической ловушки. Частота, характеризующая силу удерживающего потенциала, выбрана так чтобы скорость звука газа $\tilde{v}_p = \sqrt{3\tilde{p}_0\gamma_1 / mn_0}$ находящегося в ловушке была равна скорости звука однородного газа v_p . Пунктирная красная линия описывает режим в отсутствии эволюции давления представленный формулой (4.1.3). Остальные линии имеет смысл аналогичный тому, что представлено на Рис. (4.1.1).

Рассмотрим волны, распространяющиеся параллельно оси анизотропии. Представим возмущения в следующем виде $\delta n = N_0 e^{-i\omega t + ikz}$, и $\delta v_z = U_0 e^{-i\omega t + ikz}$, $\delta p^{\alpha\beta} = P^{\alpha\beta} e^{-i\omega t + ikz}$. Следовательно, из уравнении (4.1.1), (4.1.5) и (4.1.6), возникает следующий линейризованный предел $\delta n = k_z n_0 \delta v_z / \omega$,

$$mn_0 \omega \delta v_z - k_z \delta p^{zz} - \Lambda k_z (n_0 \delta p^{\beta\beta} + 2n_0 \delta p^{zz} + (2p_0 + 3r_0) \delta n) / 2n_0 = 0, \quad (4.1.17)$$

$$\omega \delta p^{zz} = 3r_0 k_z \delta v_z, \quad (4.1.18)$$

и

$$\omega \delta p^{xx} = \omega \delta p^{yy} = p_0 k_z \delta v_z. \quad (4.1.19)$$

Уравнения (4.1.17)-(4.1.19) имеют нетривиальные волновые решения при условии, что спектр возмущений имеет следующий вид

$$\omega^2 = \frac{3k_z^2}{mn_0} \left(\frac{2}{3} p_0 \Lambda + r_0 (1 + 2\Lambda) \right). \quad (4.1.20)$$

Комментарии, представленные для формулы (4.1.16), также справедливы для формулы (4.1.20). Однако, отметим, что вид асимметрии вклада различных элементов равновесного тензора давления в спектре (4.1.20) отличается от формулы (4.1.16).

Фермионы в ловушке.

Перейдем к рассмотрению фермионов находящихся в параболической ловушке. Ограничимся рассмотрением квазиодномерной геометрии, когда потенциал удержание в одном направлении значительно слабее потенциала удержания в двух других направлениях. Последние два равны друг другу, что приводит к цилиндрической симметрии задачи.

Начнем обсуждение с рассмотрения состояния равновесия. Отметим, что уравнение эволюции давления не содержит вклад внешнего поля. Поэтому основной вклад во влияние ловушки проявляется через уравнение Эйлера. Кроме того, каждое слагаемое в уравнении эволюции давления содержит либо поле скоростей, либо производную по времени. Поэтому его можно исключить из анализа равновесного состояния для систем, не имеющих макроскопических потоков.

Предположим, что тензор давления является диагональным тензором в равновесном состоянии, т.е. $p_0^{\alpha\beta} = \{p_0^{xx}, p_0^{yy}, p_0^{zz}\}$. Более того, предположим что элементы равновесного тензора давления являются функциями концентрации того же вида, что и давление Ферми: $p_0^{xx} = p_0^{yy} = \alpha_0 n^{5/3}$, $p_0^{zz} = \beta_0 n^{5/3}$. Здесь учтено, что xx и yy элементы отличаются от zz элемента, что соответствует анизотропной поверхности Ферми рассмотренной выше для однородной среды. В этом случае слагаемое описывающее взаимодействие в уравнении Эйлера (правая часть уравнения (4.1.5)) может быть переписано в следующей форме

$$-g_2 \frac{m^2}{2\hbar^2} I_0^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial^\beta (n p^{\gamma\delta}) = -g_2 \frac{4m^2}{5\hbar^2} v_0 n \partial^\alpha n^{5/3}, \quad (4.1.21)$$

где $v_0 = v_{\perp} = 4\alpha_0 + \beta_0$ для x- и y-проекций уравнения Эйлера, $v_0 = v_{\parallel} = 2\alpha_0 + 3\beta_0$ для z-проекции уравнения Эйлера.

Из-за различия коэффициентов v_{\perp} и v_{\parallel} последнее слагаемое в уравнении Эйлера, строго говоря, не является градиентом концентрации. Следовательно, не существует интеграла Коши-Лагранжа в рассматриваемом режиме. Однако, в приближении квазиодномерной ловушки можно выполнить приближенный переход, в котором коэффициент v_{\perp} заменен на v_{\parallel} . Это допустимо, так как для x- и y-проекций уравнения Эйлера ловушка доминирует над взаимодействием. Поэтому слагаемые содержащие коэффициент v_{\perp} пренебрежимо малы. Но сохранение пренебрежимо малого слагаемого с модифицированным коэффициентом позволяет получить структуру уравнения Эйлера, требуемую для существования интеграла Коши-Лагранжа.

Анизотропия поверхности Ферми дает два предельных случая для направления оси анизотропии квазиодномерной ловушки относительно оси анизотропии поверхности Ферми. Рассмотрим оба случая.

Начнем со случая, когда ось анизотропии квазиодномерной ловушки параллельна оси анизотропии поверхности Ферми. Таким образом, волн распространяется параллельно оси z.

Полагаем, что конфаймент в направлении оси z значительно меньше взаимодействия между фермионами. Однако конфаймент в направлении осей x и y преобладает над взаимодействием. В результате, из уравнения Эйлера, находим следующий эффективный потенциал

$$V_{eff} = \frac{m\omega_{\perp}^2}{2} \rho^2 + \frac{5}{2} \beta_0 n^{\frac{2}{3}} + g_2 \frac{4m^2}{5\hbar^2} (2\alpha_0 + 3\beta_0) n^{\frac{5}{3}}. \quad (4.1.22)$$

Введение потенциала (4.1.22) позволяет, как отмечено выше, получить интеграл Коши-Лагранжа для уравнения Эйлера при движении фермионов с потенциальным полем скоростей, что является разумным условием при рассмотрении звуковых волн. В результате получаем

$$m\partial_t \varphi + m \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + V_{eff} = \mu, \quad (4.1.23)$$

где φ это потенциал поля скоростей и μ это химический потенциал.

Интеграл Коши-Лагранжа (4.1.23) вместе с уравнением непрерывности приводят к нелинейному уравнению Шредингера для макроскопической волновой функции определенной через концентрацию и потенциал поля скоростей:

$$\Phi = \sqrt{ne} \frac{im\varphi}{\hbar}. \quad (4.1.24)$$

Дифференцируя функцию (4.1.24) по времени получаем выражение содержащее производную концентрации по времени и производную потенциала поля скоростей, которые берем из уравнения непрерывности (4.1.1) и уравнения (4.1.23). После алгебраических преобразований получаем нелинейное уравнение Шредингера:

$$i\hbar\partial_t\Phi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Phi + V_{eff}\Phi. \quad (4.1.25)$$

Для квазиодномерных ловушек, где поперечная часть волновой функции определяется параболической ловушкой. Поэтому волновая функция принимает очевидную структуру $\Phi = \Phi_0(\rho)\Phi(z)$, где поперечная функция соответствует основному состоянию бозонов в гармоническом потенциале $\Phi_0(\rho) = \exp(-\rho^2/2a^2)/a\sqrt{\pi}$, и $a = \sqrt{\hbar/m\omega}$ это характеристическая длина параболического потенциала ловушку в поперечном направлении.

Интегрируя нелинейное уравнение Шредингера, по поперечным переменным, получим квазиодномерное нелинейное уравнение Шредингера:

$$i\hbar\partial_t\Phi(z) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Phi(z)}{dz^2} + \beta'|\Phi(z)|^4\Phi(z) + g_2\gamma_1V_{||}\frac{4m^2}{5\hbar^2}|\Phi(z)|^{\frac{10}{3}}\Phi(z). \quad (4.1.26)$$

Нелинейность приводит к тому, что появляются нетривиальные коэффициенты перед нелинейными слагаемыми. Эти коэффициенты определены следующими формулами $\beta' = 3\beta\sqrt[3]{\pi a^2}/2$ и $\gamma_1 = 3/(5a\sqrt{\pi}\sqrt[3]{a\sqrt{\pi}})$.

Уравнение (4.1.25) позволило получить равновесную поперечную волновую функцию. Для получения квазиодномерных уравнений гидродинамики выделим поперечную составляющую гидродинамических функции в терминах поперечной волновой функции и проинтегрируем гидродинамические уравнения по поперечным переменным.

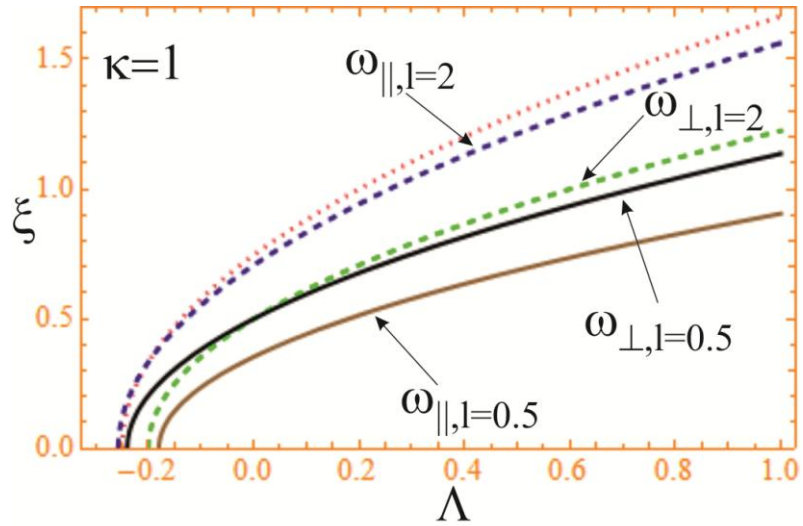


Рис. 4.1.3. Безразмерные частоты звуковых волн, распространяющиеся параллельно и перпендикулярно к оси анизотропии поверхности Ферми показаны как функции безразмерной константы взаимодействия при наличии параболической ловушки.

Рисунок построен в режиме, представленном следующей формулой $\tilde{v}_p = v_p / 2$.

Смысл кривых аналогичен тем, что представлен на рисунках (4.1.1) и (4.1.2).

В результате получим следующие квазиодномерные уравнения гидродинамики: уравнение непрерывности

$$\partial_t \tilde{n}(z) + \partial_z (\tilde{n}(z) v_z(z)) = 0; \quad (4.1.27)$$

уравнение Эйлера

$$\tilde{n}(\partial_t + v_z \partial_z) v_z + \frac{\gamma_1}{m} \partial_z \tilde{p}^{zz} = \frac{3mg_2}{16\hbar^2} \gamma_2^4 \partial_z [\tilde{n}(\tilde{p}^{\gamma\gamma} + 2\tilde{p}^{zz})], \quad (4.1.28)$$

где $\gamma_2 = (a\sqrt{\pi})^{-1/3}$, $\tilde{n} = \tilde{n}(z)$, $\tilde{p}^{\alpha\beta} = \tilde{p}^{\alpha\beta}(z)$, причем $p^{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = n_0^{5/3}(\rho) \cdot \tilde{p}^{\alpha\beta}(z)$. Кроме того, z-проекция поля скоростей является единственной отличной от нуля проекцией поля скоростей $v_z = v_z(z)$; и уравнение эволюции давления

$$\partial_t \tilde{p}^{\alpha\beta} + v_z \partial_z \tilde{p}^{\alpha\beta} + (\tilde{p}^{\alpha z} \delta^{\beta z} + \tilde{p}^{\beta z} \delta^{\alpha z} + \tilde{p}^{\alpha\beta}) \partial_z v_z = -\frac{15m}{8\hbar^2} g_2 \gamma_2^2 \delta^{\alpha z} \delta^{\beta z} \tilde{n}^2 v_z^2 \partial_z v_z. \quad (4.1.29)$$

Уравнения (4.1.27)-(4.1.29) позволяют рассмотреть волны, распространяющиеся вдоль оси квазиодномерной ловушки, которая параллельна оси анизотропии поверхности Ферми. Аналогично вычислениям, представленным для неограниченной среды, представим возмущения в следующем виде $\delta \tilde{n} = \tilde{N}_0 e^{-i\omega t + ikz}$, и $\delta v_z = \tilde{U}_0 e^{-i\omega t + ikz}$, $\delta \tilde{p}^{\alpha\beta} = \tilde{P}^{\alpha\beta} e^{-i\omega t + ikz}$ и получим следующий спектр

$$\omega_{\parallel}^2 = \frac{3k_z^2}{m\tilde{n}_0} \gamma_1 \left(\tilde{r}_0 + \frac{10}{3} \Lambda \left(\tilde{r}_0 + \frac{1}{3} \tilde{p}_0 \right) \right). \quad (4.1.30)$$

Величины \tilde{r}_0 и \tilde{p}_0 это равновесные значения редуцированного квазиодномерного давления $\tilde{p}_0^{zz} = \tilde{r}_0$ и $\tilde{p}_0^{xx} = \tilde{p}_0^{yy} = \tilde{p}_0$. Кроме того, спектр (4.1.30) отличается от безграничного случая (4.1.20) наличием коэффициента $5/3$ перед константой взаимодействия и множителем γ_1 перед большой скобкой.

Рассмотрим другой предельный случай квазиодномерной ловушки, когда ось ловушки перпендикулярна оси анизотропии поверхности Ферми. В этом режиме можно повторить анализ представленный формулами (4.1.22)-(4.1.29) и получить, что результат сводится к ряду простых замен. Очевидно, координату z надо заменить координатой x , а также выполнить замену β' на $\alpha' = (3/2)\sqrt[3]{\pi a^2 \alpha}$ и величины v_{\parallel} на v_{\perp} .

В итоге получим спектр акустических волн для случая квазиодномерной ловушки, когда ось ловушки перпендикулярна оси анизотропии поверхности Ферми:

$$\omega_{\perp}^2 = \frac{3k_x^2}{m\tilde{n}_0} \gamma_1 \left(\tilde{p}_0 + \frac{5}{9} \Lambda(\tilde{r}_0 + 7\tilde{p}_0) \right). \quad (4.1.31)$$

Спектр (4.1.31) обобщает спектр (4.1.16) полученный для неограниченной среды. Обобщение выражается в появлении коэффициента $5/3$ перед константой взаимодействия и множителем γ_1 перед большой скобкой.

Остановимся на численном анализе полученных спектров. Учет уравнения эволюции тензора давления в режиме изотропной поверхности Ферми приводит к увеличению частоты акустических волн по сравнению с результатом традиционной гидродинамики основанной на уравнении непрерывности и уравнении Эйлера (см. рис. (4.1.1)). Распространение волн перпендикулярно оси анизотропии поверхности Ферми приводит к немонотонному отклонению спектра от изотропного режима. Переход к фермионам находящимся в ловушке приводит к сдвигу дисперсионных кривых в область больших констант взаимодействия и уменьшению частоты возбуждения (см. рис. (4.1.2)). Увеличение удерживающего потенциала приводит к уменьшению частоты (см. рис. (4.1.3)).

Бозон-фермионные смеси.

Рассмотрим бозон-фермионные смеси. Следуя работе [5] и частично работе [8] будем полагать, что фермионы, как и выше, находятся в полностью спин поляризованном состоянии. Предполагается, что бозоны обладают отличной от нуля анизотропной частью короткодействующего потенциала бозон-бозонного взаимодействия.

Запишем систему уравнений квантовой гидродинамики, которая описывает динамику бозон-фермионной смеси в описанном режиме. Поэтому запишем уравнения квантовой гидродинамики слабовзаимодействующих бозонов находящихся в состоянии конденсата Бозе-Эйнштейна и взаимодействующих с фермионами

$$\partial_t n_b + \nabla(n_b \mathbf{v}_b) = 0, \quad (4.1.32)$$

и

$$\begin{aligned} m_b n_b \partial_t \mathbf{v}_b + m_b n_b (\mathbf{v}_b \cdot \nabla) \mathbf{v}_b - \frac{\hbar^2}{4m_b} n_b \nabla \left(\frac{\Delta n_b}{n_b} - \frac{(\nabla n_b)^2}{2n_b^2} \right) + g_b n_b \nabla n_b \\ + \frac{1}{2} \tilde{g}_{2,0b} \nabla \Delta n_b^2 - \frac{g_{2,2b}}{2} \hat{\mathbf{L}}_2 n_b^2 = -n_b \nabla V_{ext} - g_{bf} n_b \nabla n_f - \frac{1}{2} g_{2bf} n_b \nabla \Delta n_f, \end{aligned} \quad (4.1.33)$$

где $\hat{\mathbf{L}}_2^\alpha = (1/\sqrt{5}) I_2^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\beta \partial_\gamma \partial_\delta$, а тензор $I_2^{\alpha\beta\gamma\delta}$ удобнее задать покомпонентно. Отметим, что тензор $I_2^{\alpha\beta\gamma\delta}$ является несимметричным тензором, а точнее он симметричен относительно перестановки последних трех индексов. Запишем его компоненты: $I_2^{xxxx} = I_2^{yyyy} = 1$, $I_2^{zzzz} = -2$, $I_2^{xxzz} = I_2^{yyzz} = -2/3$, $I_2^{xxyy} = I_2^{yyxx} = I_2^{zzxx} = I_2^{zzyy} = 1/3$, остальные отличные от нуля компоненты могут быть получены перестановкой последних трех индексов. Также запишем систему уравнений квантовой гидродинамики слабовзаимодействующих фермионов и взаимодействующих с бозонами

$$\partial_t n_f + \nabla(n_f \mathbf{v}_f) = 0, \quad (4.1.34)$$

$$\begin{aligned} m_f n_f (\partial_t + \mathbf{v}_f \cdot \nabla) \mathbf{v}_f^\alpha + \partial^\beta p_f^{\alpha\beta} + n_f \partial^\alpha V_{ext} - \frac{\hbar^2}{4m_f} n_f \nabla \left(\frac{\Delta n_f}{n_f} - \frac{(\nabla n_f)^2}{2n_f^2} \right) \\ = -g_{2f} \frac{m_f^2}{2\hbar^2} I_0^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial^\beta (n_f p_f^{\gamma\delta}) - g_{bf} n_b \nabla n_f - \frac{1}{2} g_{2bf} n_b \nabla \Delta n_f, \end{aligned} \quad (4.1.35)$$

и

$$\partial_t p_f^{\alpha\beta} + \mathbf{v}_f^\gamma \partial_\gamma p_f^{\alpha\beta} + p_f^{\alpha\gamma} \partial_\gamma \mathbf{v}_f^\beta + p_f^{\beta\gamma} \partial_\gamma \mathbf{v}_f^\alpha + p_f^{\alpha\beta} \partial_\gamma \mathbf{v}_f^\gamma = -\frac{m_f}{8\hbar^2} g_{2f} \left\{ I_0^{\alpha\gamma\delta\mu} \left[3n_f^2 \mathbf{v}_f^\beta \mathbf{v}_f^\delta \partial_\gamma \mathbf{v}_f^\mu \right. \right.$$

$$+2n_f p_f^{\delta\mu} \left(\partial_\gamma v_f^\beta - \partial_\beta v_f^\gamma \right) \left] + I_0^{\beta\gamma\delta\mu} \left[3n_f^2 v_f^\alpha v_f^\delta \partial_\gamma v_f^\mu + 2n_f p_f^{\delta\mu} \left(\partial_\gamma v_f^\alpha - \partial_\beta v_f^\gamma \right) \right] \right\}. \quad (4.1.36)$$

Отметим, что уравнение эволюции давления фермионов не содержит взаимодействия с бозонами.

Рассмотрим однородную неограниченную среду. Будем предполагать, что поверхность Ферми сферически симметрична. Так что единственным источником анизотропии в рассматриваемой системе является анизотропная часть бозон-бозонного взаимодействия.

Рассмотрим волны объемные плоские волны, распространяющиеся вдоль оси z в однородной неограниченной бозон-фермионной смеси описываемой уравнениями (4.1.32)-(4.1.36). Рассмотрим равновесное состояние, в котором бозоны и фермионы имеет постоянные концентрации n_{0b} и n_{0f} . Причем, равновесные поля скоростей равны нулю. Равновесное давление фермионов задано изотропным давлением Ферми $p_{0f}^{\alpha\beta} = p_{0f} \cdot \delta^{\alpha\beta}$.

Линейная динамика возмущений малой амплитуды приводит к следующему дисперсионному уравнению

$$\begin{aligned} \omega^4 - \omega^2 \left[\frac{n_{0b} k_z^2}{m_b} \left(g_b - \tilde{g}_{2,0b} k_z^2 - \frac{2}{\sqrt{5}} - \tilde{g}_{2,2b} k_z^2 \right) + \frac{3p_{0f} k_z^2}{m_f n_{0f}} \left(1 + \frac{8}{3} \frac{m_f n_{0f} g_{2f}}{\hbar^2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^4}{4m_b^2} + \frac{\hbar^2 k_z^4}{4m_f^2} \right] \\ + \left[\frac{n_{0b} k_z^2}{m_b} \left(g_b - \tilde{g}_{2,0b} k_z^2 - \frac{2}{\sqrt{5}} \tilde{g}_{2,2b} k_z^2 \right) + \frac{\hbar^2 k_z^4}{4m_b^2} \right] \times \\ \times \left[\frac{3p_{0f} k_z^2}{m_f n_{0f}} \left(1 + \frac{8}{3} \frac{m_f n_{0f} g_{2f}}{\hbar^2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^4}{4m_f^2} \right] - \frac{\hat{g}_{bf}^2 n_{0b} n_{0f} k_z^4}{m_b m_f} = 0. \end{aligned} \quad (4.1.37)$$

Представленное дисперсионное уравнение можно переписать в более компактной и структурированной форме, выделяющей спектры бозонов и фермионов, возникающие в отсутствии взаимодействия между частицами разного сорта.

Таким образом, запишем дисперсионное уравнение в следующем виде

$$\omega^4 - \omega^2 (\omega_b^2 + \omega_f^2) + \omega_b^2 \omega_f^2 - \frac{\hat{g}_{bf}^2 n_{0b} n_{0f} k_z^4}{m_b m_f} = 0, \quad (4.1.38)$$

где $\hat{g}_{bf} = g_{bf} - g_{2bf} k_z^2 / 2$, включая спектр бозонов в отсутствие фермионов

$$\omega_b^2 = \frac{n_{0b} k_z^2}{m_b} \left(g_b - \tilde{g}_{2,0b} k_z^2 - \frac{2}{\sqrt{5}} \tilde{g}_{2,2b} k_z^2 \right) + \frac{\hbar^2 k_z^4}{4m_b^2}, \quad (4.1.39)$$

и спектр фермионов в отсутствие бозонов

$$\omega_f^2 = \frac{3p_{0f}k_z^2}{m_f n_{0f}} \left(1 + \frac{8}{3} \frac{m_f n_{0f} g_{2f}}{\hbar^2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^4}{4m_f^2}. \quad (4.1.40)$$

В итоге получаем спектр бозон-фермионной смеси, состоящий из двух акустических волн

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left[\omega_b^2 + \omega_f^2 \pm \sqrt{(\omega_b^2 - \omega_f^2)^2 + 4 \left(g_{bf} - \frac{1}{2} g_{2bf} k_z^2 \right)^2 \frac{n_{0b} n_{0f} k_z^4}{m_b m_f}} \right]. \quad (4.1.41)$$

Отметим, что взаимодействие фермионов в третьем порядке по радиусу взаимодействия приводит к квадратичной зависимости квадрата частоты от волнового вектора (см. (4.1.40)). Тогда как взаимодействие бозонов в первом порядке по радиусу взаимодействия (приближение Гросса-Питаевского) дает квадратичную зависимость квадрата частоты от волнового вектора (см. первое слагаемое в (4.1.39)), а взаимодействие бозонов в третьем порядке по радиусу взаимодействия дает зависимость квадрата частоты от четвертой степени волнового вектора (см. второе и третье слагаемые в (4.1.39)).

Влияние диполь-дипольного взаимодействия точечных диполей на спектр коллективных возбуждений бозонов и фермионов.

Остановимся на эффектах дальнего действия в системе нейтральных ультрахолодных частиц. В главе II, в разделе 2.6, выведена модель для конденсата Бозе-Эйнштейна точечных частиц с электрическим дипольным моментом взаимодействующих посредством короткодействующего потенциала наряду с дальнедействующим электрическим диполь-дипольным взаимодействием. Используем эту модель для вычисления соответствующего обобщения спектра Боголюбова.

Запишем уравнения гидродинамики в локальной форме (диполь-дипольное взаимодействие может быть представлено в интегральной форме, тогда уравнения поля будут автоматически включены в уравнение Эйлера) [32], [36]

$$\partial_t n_b + \nabla(n_b \mathbf{v}_b) = 0, \quad (4.1.42)$$

и

$$m_b n_b \partial_t \mathbf{v}_b + m_b n_b (\mathbf{v}_b \cdot \nabla) \mathbf{v}_b - \frac{\hbar^2}{4m_b} n_b \nabla \left(\frac{\Delta n_b}{n_b} - \frac{(\nabla n_b)^2}{2n_b^2} \right) + g_b n_b \nabla n_b$$

$$+\frac{1}{2}\tilde{g}_{2,0b}\nabla\Delta n_b^2+n_b\nabla V_{ext}=n_b\cdot d^\beta\nabla E^\beta, \quad (4.1.43)$$

наряду с уравнениями Максвелла

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=-4\pi(\mathbf{d}\cdot\nabla)n_b \quad (4.1.44)$$

и

$$\nabla\times\mathbf{E}=0. \quad (4.1.45)$$

Структура диполь-дипольного взаимодействия остается неизменной при переходе к фермионам. Однако для фермионов нужно учесть вклад градиента давления в уравнении Эйлера и выполнить замену силы короткодействующего взаимодействия.

Если уравнение эволюции давления фермионов также учитывается то оказывается, что диполь-дипольное взаимодействие, рассмотренное в приближении самосогласованного поля не дает вклада в это уравнение.

Решая систему уравнений (4.1.42)-(4.1.44) в линейном приближении для возмущений малой амплитуды в виде плоских волн получаем следующий спектр коллективных возмущений

$$\omega_b^2=\frac{n_{0b}k^2}{m_b}(g_b-\tilde{g}_{2,0b}k^2)+\frac{\hbar^2k^4}{4m_b^2}+\frac{4\pi d^2n_{0b}}{m_b}k^2\cos^2\theta, \quad (4.1.46)$$

где k это модуль волнового вектора, θ угол между направлением распространения волны и направлением поляризации электрических дипольных моментов $\mathbf{d}=d\cdot\mathbf{e}_z$.

Отметим, что вклад диполь-дипольного взаимодействия пропорционален k^2 , как и вклад короткодействия в первом порядке по радиусу взаимодействия. Это отличает диполь-дипольное взаимодействие от анизотропии короткодействующего взаимодействия, которое пропорционально k^4 . Анизотропия в третьем порядке по радиусу взаимодействия имеет угловую зависимость аналогичную диполь-дипольному взаимодействию. Однако различие в зависимости от волнового вектора позволяет различить эти эффекты.

Выводы.

Получены спектры объемных коллективных волновых возбуждений в системе спин-поляризованных вырожденных фермионов и в бозон-фермионных смесях, где бозоны находятся в состоянии конденсата Бозе-Эйнштейна. Изучен вклад короткодействующего взаимодействия между нейтральными фермионами

одинаковой спиновой поляризации, возникающий в третьем порядке по радиусу взаимодействия. Сделан акцент на влиянии уравнения эволюции тензора давления фермионов, на спектры.

При исследовании фермионов рассмотрены различные режимы. Рассмотрен предел изотропной поверхности Ферми (сферы Ферми), а также рассмотрена анизотропная поверхность Ферми с цилиндрической симметрией. Анизотропный режим приводит к анизотропии спектра акустических волн. Рассмотрены предельные случаи волн распространяющихся параллельно и перпендикулярно оси анизотропии. Причем, анализ выполнен для случая неограниченной среды и квазиодномерной среды, где поперечные степени свободы ограничены параболической ловушкой.

Реализация фермионов как часть бозон-фермионной смеси также рассмотрена. В этом случае существуют две акустические волны, которые переходят в акустическую волну фермионов и акустическую волну бозонов в отсутствие бозон-фермионного взаимодействия. При этом бозон-фермионное и бозон-бозонное взаимодействия в третьем порядке по радиусу взаимодействия приводят к отклонению от линейной зависимости частоты от волнового вектора, что связано с нелокальностью соответствующих короткодействующих взаимодействий. Фермион-фермионное взаимодействие возникает, начиная с третьего порядка по радиусу взаимодействия, и является локальным взаимодействием в этом пределе.

Рассмотрены эффекты анизотропии короткодействующего взаимодействия и анизотропного дальнедействующего диполь-дипольного взаимодействия на примере конденсата Бозе-Эйнштейна. Изучен вклад этих эффектов в обобщенный спектр Боголюбова. Отмечено, что, несмотря на одинаковый характер анизотропии этих эффектов, они различаются зависимостью от модуля волнового вектора.

4.2 Ярко-подобный солитон в конденсате Бозе-Эйнштейна и бозон-фермионных смесях при рассмотрении короткодействующего взаимодействия с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия

Ярко-подобный солитон в конденсате Бозе-Эйнштейна с отталкивающим короткодействующим взаимодействием.

Стандартная теория конденсата Бозе-Эйнштейна нейтральных частиц с короткодействующим потенциалом взаимодействия (модель Гросса-Питаевского) приводит к существованию решения в виде яркого солитона (области с повышенной концентрацией) при притяжении между атомами либо темного солитона (области с пониженной концентрацией) при отталкивании между атомами. Более детальное рассмотрение короткодействующего взаимодействия приводит к изменению свойств яркого и темного солитонов. Однако, более важной особенностью взаимодействия частиц в конденсате Бозе-Эйнштейна учтенного с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия является появление нового фундаментального солитона. Это яркий солитон возникающий в конденсате Бозе-Эйнштейна, атомы которого имеют отталкивающий потенциал.

Ограничимся случаем изотропного короткодействующего взаимодействия и запишем гидродинамическую модель конденсата Бозе-Эйнштейна. В этой модели взаимодействие частиц рассмотрено с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия следуя работам [8] и [38]:

$$\partial_t n_b + \nabla(n_b \mathbf{v}_b) = 0, \quad (4.2.1)$$

$$m_b n_b (\partial_t \mathbf{v}_b + (\mathbf{v}_b \cdot \nabla) \mathbf{v}_b) - \frac{\hbar^2}{4m_b} n_b \nabla \left(\frac{\Delta n_b}{n_b} - \frac{(\nabla n_b)^2}{2n_b^2} \right) + g_b n_b \nabla n_b + \frac{1}{2} g_{2b} \nabla \Delta n_b^2 = -n_b \nabla V_{ext}, \quad (4.2.2)$$

где использованы следующие константы взаимодействия

$$g = -\frac{4\pi}{3} \int r^3 \frac{\partial U(r)}{\partial r} dr = \int d\mathbf{r} U(r), \quad (4.2.3)$$

возникающая в первом порядке по радиусу взаимодействия, и

$$\tilde{g}_{2b} = -\frac{\pi}{30} \int dr(r)^5 \frac{\partial U(r)}{\partial r}, \quad (4.2.4)$$

возникающая в третьем порядке по радиусу взаимодействия.

Перед исследованием нелинейной динамики, найдем спектр линейных возбудений с учетом третьего порядка по радиусу взаимодействия. Рассматривая

динамику плоских волн в среде, которая неподвижна в равновесном состоянии и применяя метод Фурье, для решения линеаризованной системы уравнений гидродинамики находим следующую связь частоты и волнового вектора:

$$\omega^2 = \frac{g_b n_{0b} k^2}{m_b} + \frac{\hbar^2 k^4}{4m_b^2} - \frac{n_{0b} \tilde{g}_{2b} k^4}{m_b}. \quad (4.2.5)$$

Первые два слагаемые в правой части формулы (4.2.5) соответствуют модели Гросса-Питаевского и дают спектр Боголюбова. Последнее слагаемое вызвано взаимодействием в третьем порядке по радиусу взаимодействия. Для отталкивающего взаимодействия константы g_{2b} и \tilde{g}_{2b} положительны. Положительность первого слагаемого приводит к стабильности системы частиц в длинноволновом пределе. Последние два слагаемые пропорциональны четвертой степени волнового вектора и имеют разные знаки. Достаточно сильное взаимодействие приводит к тому что вклад пропорциональный четвертой степени волнового вектора уменьшает групповую скорость акустических волн (4.2.5). При этом система частиц остается стабильной так как исходная модель предполагает, что слагаемые более высокого порядка по радиусу взаимодействия меньше слагаемых меньшего порядка.

Перейдем к нелинейной динамике. Решим систему уравнений (4.2.1)-(4.2.4) методом масштабирования переменной. Для этого выберем следующие переменные $\xi = \varepsilon^{1/2}(x-ut)$ и $\tau = \varepsilon^{3/2}ut$, что соответствует следующим выражениям для производных $\partial_x = \varepsilon^{1/2}\partial_\xi$ и $\partial_t = u(\varepsilon^{3/2}\partial_\tau - \varepsilon^{1/2}\partial_\xi)$.

Предположим следующую структуру гидродинамических функций в терминах разложения по различным масштабам

$$n_b = n_{0b} + \varepsilon n_{1b} + \varepsilon^2 n_{2b} + \dots, \quad (4.2.6)$$

и

$$v_b = \varepsilon v_{1b} + \varepsilon^2 v_{2b} + \dots \quad (4.2.7)$$

В младшем порядке по малому параметру уравнения гидродинамики имеют следующий вид:

$$-u\partial_\xi n_{1b} + n_{0b}\partial_\xi v_{1b} = 0, \quad (4.2.8)$$

и

$$m_b u \partial_\xi v_{1b} = g_b \partial_\xi n_{1b}. \quad (4.2.9)$$

Выражая производную скорости $\partial_{\xi} v_{1b}$ через $\partial_{\xi} n_{1b}$, находим уравнение для производной концентрации $\partial_{\xi} n_{1b}$: $m_b u^2 \partial_{\xi} n_{1b} = n_{0b} g_b \partial_{\xi} n_{1b}$. Это уравнение имеет нетривиальное решение при следующем значении квадрата скорости нелинейного возмущения акустических волн

$$u^2 = \frac{g_b n_{0b}}{m_b}. \quad (4.2.10)$$

Это выражение имеет смысл для положительных значений константы взаимодействия g_b : $g_b > 0$, что соответствует отталкиванию между частицами.

Далее проинтегрируем связь между производной скорости и производной концентрации (4.2.8) $\partial_{\xi} n_{1b} = \frac{n_{0b}}{u} \partial_{\xi} v_{1b}$, при условии, что возмущение концентрации и скорости стремятся к нулю на бесконечности: $n_{1b}, v_{1b} \rightarrow 0$, при $\xi \rightarrow \pm\infty$. Это даст связь между возмущениями концентрации и скорости

$$n_{1b} = \frac{n_{0b}}{u} v_{1b}. \quad (4.2.11)$$

В следующем порядке по малому параметру находим уравнения непрерывности и Эйлера для возмущений второго порядка гидродинамических функций

$$-u \partial_{\xi} n_{2b} + u \partial_{\tau} n_{1b} + \partial_{\xi} (n_{0b} v_{2b} + n_{1b} v_{1b}) = 0, \quad (4.2.12)$$

и

$$\begin{aligned} m_b u n_{0b} \partial_{\tau} v_{1b} - m_b u (n_{0b} \partial_{\xi} v_{2b} + n_{1b} \partial_{\xi} v_{1b}) + m_b n_{0b} v_{1b} \partial_{\xi} v_{1b} - \frac{\hbar^2}{4m_b} \partial_{\xi}^3 n_{1b} \\ = -g_b n_{0b} \partial_{\xi} n_{2b} - g_b n_{1b} \partial_{\xi} n_{1b} + \tilde{g}_{2b} n_{0b} \partial_{\xi}^3 n_{1b}. \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

Выразим концентрацию второго порядка n_{2b} из уравнения (4.2.12) как функцию скорости второго порядка v_{2b} и функций первого порядка. Подставляя это в уравнение Эйлера (4.2.13). В полученном уравнении коэффициент перед скоростью второго порядка v_{2b} обращается в ноль при учете явного вида скорости распространения нелинейного возмущения u . Учитывая связь скорости и концентрации первого порядка n_{1b} и v_{1b} , получаем уравнение относительно одной функции, в качестве которой выберем концентрацию первого порядка.

В итоге получаем уравнение Кортевега-де-Фриза для возмущения концентрации

$$\partial_{\tau} n_{1b} + p_{1D} n_{1b} \partial_{\xi} n_{1b} + q_{1D} \partial_{\xi}^3 n_{1b} = 0, \quad (4.2.14)$$

где коэффициент при нелинейном слагаемом

$$p_{1D} = \frac{3}{2n_{0b}}, \quad (4.2.15)$$

и коэффициент перед «дисперсионным» слагаемом

$$q_{1D} = -\frac{\hbar^2 - 2m_b n_{0b} \tilde{g}_{2b}}{2m_b n_{0b} g_b}. \quad (4.2.16)$$

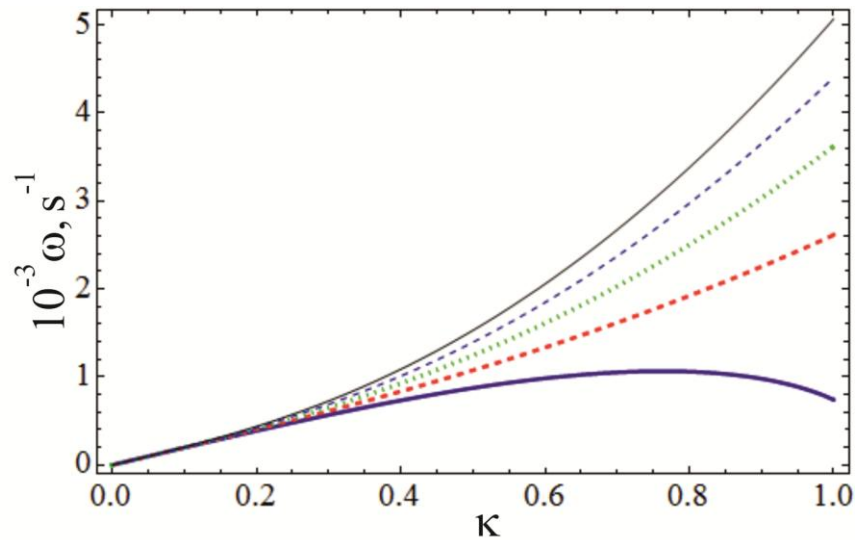


Рис. 4.2.1 Показан спектр Боголюбова, полученный для конденсата Бозе-Эйнштейна с анизотропным потенциалом короткодействующего взаимодействия. Спектр получен для различных направлений распространения волн малой амплитуды относительно выделенного направления сформированным упорядоченным расположением атомов относительно оси анизотропии взаимодействия между ними. Увеличение угла от 0 до $\pi/2$ (на рисунке выбраны следующие значения угла $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$) приводит к увеличению частоты.

Разница частот отчетливо проявляется в коротковолновой области. Рисунок получен для следующих значений параметров: амплитуда рассеяния, определяющая константу взаимодействия в первом порядке по радиусу взаимодействия ($g_b = 4\pi\hbar^2 a / m_b$) $a = 10^{-7}$ см, равновесная концентрация $n_{0b} = 10^{14}$

$$\text{см}^{-3}, \text{ масса } m = 167 \text{ аем, } k = \kappa \sqrt{n_{0b}}, \quad G_{2,0} = 0.2, \quad G_{2,2} = 0.5.$$

Введем переменную $\eta = \xi - V\tau$ для нахождения солитонного решения уравнения Кортевега-де-Фриза (4.2.14). Положим, что возмущение концентрации обращается в ноль на бесконечности $n_{1b} = 0$ наряду с её производными $\partial_\eta n_{1b} = 0$, $\partial_\eta^2 n_{1b} = 0$ (при $\eta \rightarrow \pm\infty$).

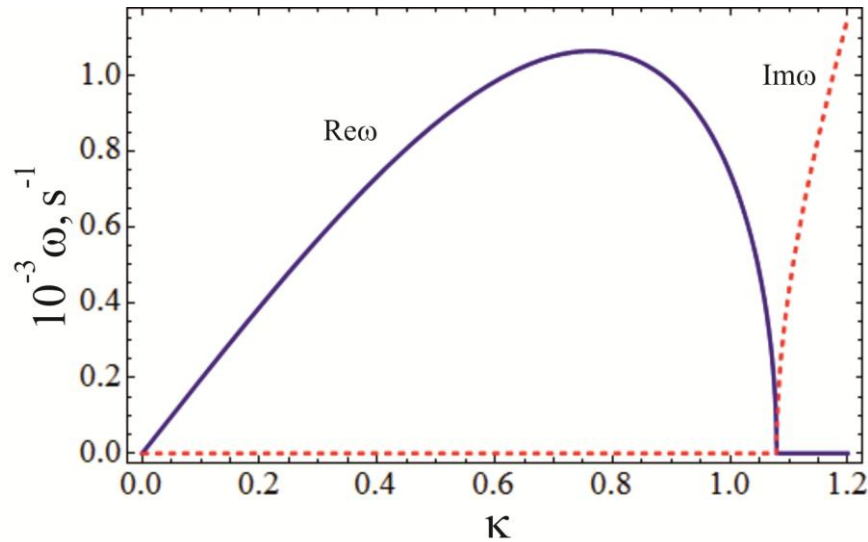


Рис. 4.2.2 Коротковолновая неустойчивость, возникающая при малых углах распространения волн, показана на примере реальной и мнимой частей обобщенного спектра Боголюбова. Рассмотрен случай значительной анизотропии потенциала взаимодействия: $G_{2,0} = 0.2$, $G_{2,2} = 0.5$, и $\theta = 0$.

В результате получаем следующее солитонное решение

$$n_{1b} = \frac{3V}{p_{1D}} \frac{1}{\cosh^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{V}{q_{1D}}} \eta \right)}. \quad (4.2.17)$$

Величина p_{1D} , определяющая амплитуду солитона, положительна как это видно из её определения (4.2.15). Следовательно, полученное решение является ярким солитоном, т.е. солитоном сгущения. Очевидно, что параметр q_1 , определяющий ширину солитона, заданный формулой (4.2.16) должен быть положительным. Однако, в отсутствие взаимодействия в третьем порядке по радиусу взаимодействия формула (4.2.16) дает отрицательную величину для отталкивающего взаимодействие (последнее требование вытекает из формулы (4.2.10)). Таким образом, полученное решение не существует в первом порядке по радиусу взаимодействия. Тем не менее, наличие взаимодействия в третьем порядке

по радиусу взаимодействия меняет ситуацию при достаточно сильном отталкивающем взаимодействии:

$$\hbar^2 - 2m_b n_{0b} \tilde{g}_{2b} < 0. \quad (4.2.18)$$

В нелинейном режиме, критическое значение второй константы взаимодействия отличается от значения, получаемого при анализе спектра Боголюбова (4.2.5).

В итоге получаем, что при отталкивающем взаимодействии, когда вторая константа взаимодействия достаточно велика, чтобы превзойти, вклад квантового потенциала Бома, существует яркий солитон. Очевидно, это решения отличается от яркого солитона существующего в модели Гросса-Питаевского при притягивающем взаимодействии.

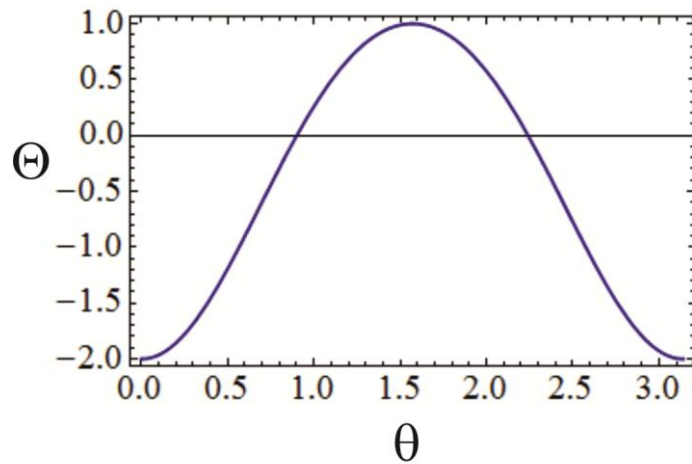


Рис. 4.2.3 Показана функция $\Theta \equiv \sin^4 \theta - \frac{1}{3} \sin^2 \theta \cos^2 \theta - 2 \cos^4 \theta$, которая определяет угловую зависимость эффективной зависящей от направления распространения возмущения константы взаимодействия.

Конденсат Бозе-Эйнштейна с анизотропным потенциалом взаимодействия.

Кратко остановимся на обобщении яркоподобного солитонного решения, на случай когда потенциал взаимодействия между бозонами имеет анизотропную составляющую. Так как мы ограничиваемся слагаемыми, описывающими взаимодействие до третьего порядка по радиусу взаимодействия, то только дипольная часть короткодействующего потенциала дает вклад в рассматриваемую модель. Яркоподобный солитон существует исключительно благодаря части взаимодействия возникающей в третьем порядке по радиусу взаимодействия. И

именно в этой части взаимодействия проявляется анизотропия. То анизотропия оказывает существенное влияние на свойства яркоподобного солитона.

Запишем уравнения гидродинамики для конденсата Бозе-Эйнштейна с анизотропным короткодействующим взаимодействием

$$\partial_t n_b + \nabla(n_b \mathbf{v}_b) = 0, \quad (4.2.19)$$

и

$$m_b n_b \partial_t \mathbf{v}_b + m_b n_b (\mathbf{v}_b \cdot \nabla) \mathbf{v}_b - \frac{\hbar^2}{4m_b} n_b \nabla \left(\frac{\Delta n_b}{n_b} - \frac{(\nabla n_b)^2}{2n_b^2} \right) + g_b n_b \nabla n_b + \frac{1}{2} \tilde{g}_{2,0b} \nabla \Delta n_b^2 - \frac{g_{2,2b}}{2} \hat{\mathbf{L}}_2 n_b^2 = -n_b \nabla V_{ext}, \quad (4.2.20)$$

где $\hat{\mathbf{L}}_2^\alpha = (1/\sqrt{5}) I_2^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\beta \partial_\gamma \partial_\delta$, а тензор $I_2^{\alpha\beta\gamma\delta}$ задан через отдельные компоненты. Отметим, что тензор $I_2^{\alpha\beta\gamma\delta}$ является несимметричным тензором, а точнее он симметричен относительно перестановки последних трех индексов. Запишем его компоненты: $I_2^{xxxx} = I_2^{yyyy} = 1$, $I_2^{zzzz} = -2$, $I_2^{xxzz} = I_2^{yyzz} = -2/3$, $I_2^{xxyy} = I_2^{yyxx} = I_2^{zzxx} = I_2^{zzyy} = 1/3$, остальные отличные от нуля компоненты могут быть получены перестановкой последних трех индексов.

В рассматриваемом режиме, взаимодействие между нейтральными бозонами характеризуется тремя константами взаимодействия. Дополнительные константы взаимодействия возникают в третьем порядке по радиусу взаимодействия для изотропной части потенциала и для части потенциала с дипольной анизотропией. Отметим, что $\tilde{g}_{2,0b} \equiv \tilde{g}_{2b}$.

Выполним дальнейшее обобщение спектра Боголюбова (4.2.5) для конденсата Бозе-Эйнштейна с анизотропным потенциалом короткодействующего взаимодействия. Вычислим спектр для произвольного направления распространения волн малой амплитуды относительно выделенного направления сформированным упорядоченным расположением атомов относительно оси анизотропии взаимодействия между атомами

$$\omega^2 = \frac{n_{0b}}{m_b} \left(g_b k^2 + \frac{\hbar^2 k^4}{4m_b n_{0b}} - \tilde{g}_{2,0b} k^4 - \tilde{g}_{2,2b} k^4 \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{\sqrt{5}} \right). \quad (4.2.21)$$

Спектр (4.2.21) показан на Рис. (4.2.1) для различных направлений распространения волны. Коротковолновая неустойчивость возникающая в спектре

(4.2.21) продемонстрирована на Рис. (4.2.2). В этом случае возмущения были представлены в следующем виде $\delta n_b = N_b \exp(-i\omega t + ik_x x + ik_z z)$ и $\delta \mathbf{v}_b = \mathbf{U}_b \exp(-i\omega t + ik_x x + ik_z z)$. Использовано следующее выражение для проекций волнового вектора $k_x = k \sin \theta$ и $k_z = k \cos \theta$.

Рассматривая динамику плоских нелинейных возмущений, распространяющихся под произвольным углом к оси анизотропии, получим, что нелокальные слагаемые вызванные взаимодействием в третьем порядке по радиусу взаимодействия можно объединить в одно слагаемое с эффективной зависящей от направления распространения возмущения константой взаимодействия

$$\hat{g}_{2b} \equiv \tilde{g}_{2,0b} - \frac{\tilde{g}_{2,2b}}{\sqrt{5}} \left[\sin^4 \theta - \frac{1}{3} \sin^2 \theta \cos^2 \theta - 2 \cos^4 \theta \right]. \quad (4.2.22)$$

Отдельно, угловая зависимость, представленная во втором слагаемом формулы (4.2.22) проиллюстрирована на Рис. (4.2.2). Эффективная константа взаимодействия как функция угла при определенных значениях констант взаимодействия $\tilde{g}_{2,0b}$ и $\tilde{g}_{2,2b}$ представлена на Рис. (4.2.3) и Рис. (4.2.4).

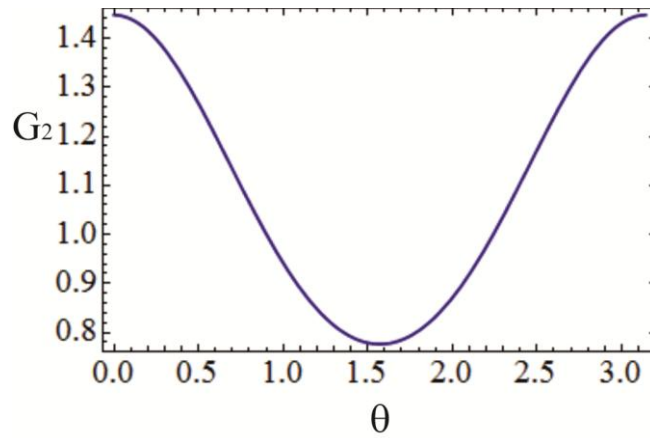


Рис. 4.2.4 Безразмерная эффективная зависящая от направления распространения возмущения константа взаимодействия $G_2 = 4m_b n_{0b} \hat{g}_{2b} / \hbar^2$ представлена как функция угла при следующих значениях констант взаимодействия: $G_{2,0} = 1$, $G_{2,2} = 0.1$.

Получаем обобщение условия существования яркоподобного солитона (4.2.18): $\hbar^2 - 2m_b n_{0b} \hat{g}_{2b} < 0$, или в явном виде

$$G_{2,0} - \frac{1}{\sqrt{5}} G_{2,2} \left[\sin^4 \theta - \frac{1}{3} \sin^2 \theta \cos^2 \theta - 2 \cos^4 \theta \right] > 2, \quad (4.2.23)$$

где $G_{2,0} = 4m_b n_{0b} \tilde{g}_{2,0b} / \hbar^2$, и $G_{2,2} = 4m_b n_{0b} \tilde{g}_{2,2b} / \hbar^2$.

Рассматривая анизотропную часть взаимодействия, мы фактически имеем дело со вторым потенциалом. А константы взаимодействия это моменты потенциалов. Таким образом, разложение для первого потенциала начинается с первого порядка по радиусу взаимодействия, а разложение для второго потенциала начинается с третьего порядка по радиусу взаимодействия. Так как это два независимых разложения, то вклад второго потенциала, может быть сравним с вкладом первого потенциала. Это приводит к коротковолновой неустойчивости спектра (4.2.21) (см. Рис. (4.2.2)).

Достаточно большое значение константы $G_{2,2}$ приводит к тому, что эффективная константа G_2 меняет знак и эффективное притяжение, существующее при отталкивающих потенциалах, связанное с нелокальностью, переходит в притяжение (см. Рис. (4.2.5)).

Изменение знака эффективной константы G_2 , как и вообще уменьшение её значения, приводит к исчезновению яркого солитона (4.2.17). Таким образом, анизотропия короткодействующего взаимодействия ограничивает область существования яркого солитона в отталкивающем конденсате Бозе-Эйнштейна.

Рассмотрим влияние фермионной компоненты на свойства яркого солитона в отталкивающем конденсате Бозе-Эйнштейна, который является частью бозон-фермионной смеси.

Ярко-яркий и ярко-темный солитоны в бозон-фермионной смеси возникающие как обобщения яркоподобного солитона

Рассмотрим бозон-фермионные смеси, следуя работам [5] и [35]. Исследуем влияние фермионов на свойства и область существования яркоподобного солитона полученного для системы бозонов.

Представим систему уравнений квантовой гидродинамики слабовзаимодействующих бозонов взаимодействующих с фермионами (ограничимся изотропным взаимодействием между частицами)

$$\partial_t n_b + \nabla(n_b \mathbf{v}_b) = 0, \quad (4.2.24)$$

и

$$\begin{aligned}
& m_b n_b \partial_t \mathbf{v}_b + m_b n_b (\mathbf{v}_b \cdot \nabla) \mathbf{v}_b - \frac{\hbar^2}{4m_b} n_b \nabla \left(\frac{\Delta n_b}{n_b} - \frac{(\nabla n_b)^2}{2n_b^2} \right) + g_b n_b \nabla n_b \\
& + \frac{1}{2} \tilde{g}_{2,0b} \nabla \Delta n_b^2 = -n_b \nabla V_{ext} - g_{bf} n_b \nabla n_f - \frac{1}{2} g_{2bf} n_b \nabla \Delta n_f,
\end{aligned} \tag{4.2.25}$$

где правая часть уравнения Эйлера (4.2.25) содержит взаимодействие бозонов с фермионами наряду с действием внешнего поля. Также запишем систему уравнений квантовой гидродинамики слабовзаимодействующих полностью спин-поляризованных фермионов взаимодействующих с бозонами

$$\partial_t n_f + \nabla(n_f \mathbf{v}_f) = 0, \tag{4.2.26}$$

$$\begin{aligned}
& m_f n_f (\partial_t + \mathbf{v}_f \cdot \nabla) \mathbf{v}_f^\alpha + \partial^\beta p_f^{\alpha\beta} + n_f \partial^\alpha V_{ext} - \frac{\hbar^2}{4m_f} n_f \nabla \left(\frac{\Delta n_f}{n_f} - \frac{(\nabla n_f)^2}{2n_f^2} \right) \\
& = -g_{2f} \frac{m_f^2}{2\hbar^2} I_0^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial^\beta (n_f p_f^{\gamma\delta}) - g_{bf} n_b \nabla n_f - \frac{1}{2} g_{2bf} n_b \nabla \Delta n_f,
\end{aligned} \tag{4.2.27}$$

и

$$\begin{aligned}
& \partial_t p_f^{\alpha\beta} + v_f^\gamma \partial_\gamma p_f^{\alpha\beta} + p_f^{\alpha\gamma} \partial_\gamma v_f^\beta + p_f^{\beta\gamma} \partial_\gamma v_f^\alpha + p_f^{\alpha\beta} \partial_\gamma v_f^\gamma = -\frac{m_f}{8\hbar^2} g_{2f} \left\{ I_0^{\alpha\gamma\delta\mu} \left[3n_f^2 v_f^\beta v_f^\delta \partial_\gamma v_f^\mu \right. \right. \\
& \left. \left. + 2n_f p_f^{\delta\mu} (\partial_\gamma v_f^\beta - \partial_\beta v_f^\gamma) \right] + I_0^{\beta\gamma\delta\mu} \left[3n_f^2 v_f^\alpha v_f^\delta \partial_\gamma v_f^\mu + 2n_f p_f^{\delta\mu} (\partial_\gamma v_f^\alpha - \partial_\beta v_f^\gamma) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.2.28}$$

Взаимодействие фермионов с бозонами представлено в правой части уравнения Эйлера (4.2.27). Уравнение эволюции давления (4.2.28) содержит только взаимодействие между фермионами одной проекции спина. Представленная модель (4.2.24)-(4.2.28) содержит пять констант взаимодействия: две константы взаимодействия между бозонами, одна константа взаимодействия между фермионами, и две константы бозон-фермионного взаимодействия.

Используем метод масштабирования переменной. Для этого запишем концентрации и поле скоростей (x-проекция) в виде разложения по масштабам. Различие масштабов иллюстрируется параметром ε . Получим следующие выражения:

$$n_b = n_{0b} + \varepsilon n_{1b} + \varepsilon^2 n_{2b} + \dots, \tag{4.2.29}$$

$$n_f = n_{0f} + \varepsilon n_{1f} + \varepsilon^2 n_{2f} + \dots, \tag{4.2.30}$$

$$\mathbf{v}_b = \varepsilon \mathbf{v}_{1b} + \varepsilon^2 \mathbf{v}_{2b} + \dots, \tag{4.2.31}$$

и

$$v_f = \varepsilon v_{1f} + \varepsilon^2 v_{2f} + \dots \quad (4.2.32)$$

Также запишем масштабирование координаты и времени

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(x - Ut); \quad \tau = \varepsilon^{3/2}Ut. \quad (4.2.33)$$

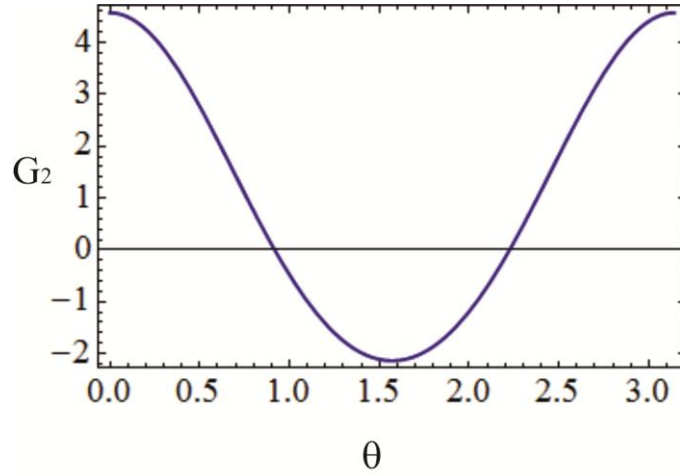


Рис. 4.2.5 Безразмерная эффективная зависящая от направления распространения возмущения константа взаимодействия $G_2 = 4m_b n_{0b} \hat{g}_{2b} / \hbar^2$ представлена как функция угла при следующих значениях констант взаимодействия: $G_{2,0} = 0.1$, $G_{2,2} = 1$. Это соответствует случаю, когда константа взаимодействия, отвечающая анизотропной части взаимодействия преобладает над изотропной константой. Однако, угловая зависимость меняет соотношение между ними, меняя, в частности, знак эффективной константы взаимодействия.

Формулы (4.2.8)-(4.2.14) показывают некоторые детали решения системы уравнений гидродинамики для бозонов. Очевидно, что случай бозон фермионной смеси приведет к большому числу более громоздких формул. Поэтому представим обобщенное выражение для квадрата скорости нелинейного возмущения акустических волн (обобщение формулы (4.2.10)):

$$u^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{n_{0b} g_b}{m_b} + \frac{3p_{0f}}{m_f n_{0f}} + g_{2f} \frac{8p_{0f} m_f}{\hbar^2} \right] \pm \sqrt{\left(\frac{n_{0b} g_b}{m_b} - \frac{3p_{0f}}{m_f n_{0f}} - g_{2f} \frac{8p_{0f} m_f}{\hbar^2} \right)^2 + 4 \frac{n_{0b} n_{0f} g_{bf}^2}{m_b m_f}}. \quad (4.2.34)$$

Уравнение (4.2.34) очевидно соответствует длинноволновому пределу спектра линейных по малым амплитудам возмущений (4.1.41).

Кроме того, первое приближение дает связь возмущений концентрации бозонов и фермионов

$$n_{1f} = \frac{m_b}{n_{0b}} \frac{1}{g_{bf}} \left(u^2 - \frac{n_{0b} g_b}{m_b} \right) n_{1b}. \quad (4.2.35)$$

Используя явный вид скорости возмущения (4.2.34) (решение со знаком плюс соответствующее бозонному решению) перепишем равенство (4.2.35) в следующем виде

$$n_{1f} = \frac{m_b}{2n_{0b}} \frac{1}{g_{bf}} \left(X_u + \sqrt{X_u^2 + 4 \frac{n_{0b} n_{0f} g_{bf}^2}{m_b m_f}} \right) n_{1b}, \quad (4.2.36)$$

где

$$X_u \equiv \frac{n_{0b} g_b}{m_b} - \frac{3p_{0f}}{m_f n_{0f}} - g_{2f} \frac{8p_{0f} m_f}{\hbar^2}. \quad (4.2.37)$$

Таким образом, даже при отрицательном значении X_u (4.2.37), выражение в скобках в формуле (4.2.36) оказывается положительным. Следовательно, для яркого солитона в подсистеме бозонов $n_{1b} > 0$, знак возмущения фермионов n_{1f} определяется знаком константы взаимодействия между бозонами и фермионами g_{bf} , в первом порядке по радиусу взаимодействия.

Рассматривая возмущения второго порядка малости, приходим к нелинейному уравнению для возмущения концентрации бозонов:

$$\begin{aligned} & \partial_\tau n_{1b} \left[2m_b u^2 + 2m_f u^2 \frac{\left(u^2 - \frac{n_{0b} g_b}{m_b} \right)^2}{\frac{n_{0b} g_{bf}}{m_b} \frac{n_{0f} g_{bf}}{m_f}} \right] + \partial_\xi^3 n_{1b} \left\{ g_{2b} n_{0b} - \frac{\hbar^2}{4m_b} + \frac{1}{2} g_{2bf} n_{0b} \frac{\left(u^2 - \frac{n_{0b} g_b}{m_b} \right)}{\frac{g_{bf} n_{0b}}{m_b}} \right. \\ & \left. + \frac{\left(u^2 - \frac{n_{0b} g_b}{m_b} \right)}{\frac{g_{bf} n_{0b}}{m_b}} \left(\frac{1}{2} g_{2bf} n_{0f} - \frac{\hbar^2}{4m_f} \frac{\left(u^2 - \frac{n_{0b} g_b}{m_b} \right)}{\frac{g_{bf} n_{0b}}{m_b}} \right) \right\} + n_{1b} \partial_\xi n_{1b} \left\{ g_b + \frac{2m_b u^2}{n_{0b}} + g_{bf} \frac{\left(u^2 - \frac{n_{0b} g_b}{m_b} \right)}{\frac{g_{bf} n_{0b}}{m_b}} \right. \\ & \left. \frac{\left(u^2 - \frac{n_{0b} g_b}{m_b} \right)^2}{\left(\frac{g_{bf} n_{0b}}{m_b} \right)^2} \left[g_{bf} + \frac{2m_f}{n_{0f}} \frac{\left(u^2 - \frac{n_{0b} g_b}{m_b} \right)}{\frac{g_{bf} n_{0b}}{m_b}} \left(u^2 + \frac{3p_{0f}}{m_f n_{0f}} + \frac{10p_{0f} g_{2f} m_f}{\hbar^2} \right) \right] \right\} = 0. \quad (4.2.38) \end{aligned}$$

Коэффициент перед $\partial_\tau n_{1b}$ всегда положителен, т.к. u^2 для существующих решений. Однако, условие $u^2 > 0$ приводит к ограничениям на параметры системы. К примеру, пренебрегая вкладом фермионов, получим $u^2 = g_b n_{0b} / m_b$. Это приводит к условию, чтобы взаимодействие бозонов происходило через отталкивание $g_b > 0$. Так как коэффициент перед $\partial_\tau n_{1b}$ положителен, то солитонное решение может существовать, если коэффициент перед $\partial_\xi^3 n_{1b}$ также больше нуля. Знак коэффициента перед $n_{1b} \partial_\xi n_{1b}$ определяет тип солитона: яркий солитон для положительного коэффициента и темный солитон для отрицательного коэффициента.

Для бозонов, коэффициент перед $\partial_\xi^3 n_{1b}$ состоит из двух слагаемых $c_b = g_{2b} n_{0b} - \hbar^2 / 4m_b^2$. Эта величина может быть положительной при наличии отталкивающего короткодействующего взаимодействия в третьем порядке по радиусу взаимодействия $g_{2b} > 0$. Это согласуется с условием $u^2 > 0$, приводящим к $g_b > 0$. Для бозонов, коэффициент перед $\partial_\tau n_{1b}$ упрощается к выражению $2m_b u^2 > 0$. Коэффициент перед $n_{1b} \partial_\xi n_{1b}$ в рассматриваемом пределе имеет следующий вид: $b_b = g_b + 2m_b u^2 / n_{0b} > 0$. Это показывает существование солитонного решения, с положительной амплитудой, в подсистеме бозонов, при учете взаимодействия с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия. Влияние фермионов происходит через слагаемые пропорциональные константе g_{bf} . Численный анализ, представленный в работе [5], показывает, что отталкивание (притяжение) между бозонами и фермионами приводит к существованию яркого (тёмного) солитона в фермионной компоненте.

Изменение формы яркого солитона в одномерном БЭК с притягивающим взаимодействием между атомами

Выше рассмотрены солитонные решения обусловленные слагаемыми, возникающими в третьем порядке по радиусу взаимодействия. Они дополняют набор фундаментальных солитонных решений существующих в БЭК и смесях квантовых газов в первом порядке по радиусу взаимодействия. Следуя работе [40] остановимся на изменении свойств яркого солитона в БЭК под влиянием слагаемого возникающего в третьем порядке по радиусу взаимодействия.

Инструментом исследования является система уравнений квантовой гидродинамики, состоящая из уравнения непрерывности и уравнения Эйлера:

$$\partial_t n + \nabla(n\mathbf{v}) = 0, \quad (4.2.39)$$

$$m(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \frac{\nabla p}{n} - \frac{\hbar^2}{4m} \nabla \left(\frac{\Delta n}{n} - \frac{(\nabla n)^2}{2n^2} \right) = -g \nabla n - \frac{1}{2n} g_2 \nabla \Delta n^2. \quad (4.2.40)$$

Решение получается методом итераций, в предположении, что слагаемое, возникающее в третьем порядке по радиусу взаимодействия $-g_2 \nabla \Delta n^2 / 2n$, является малой величиной в сравнении с $-g \nabla n$. В этом случае, пренебрегая слагаемым пропорциональным g_2 , получим уравнение, описывающее яркий солитон в БЭК, при притяжении между атомами [40]:

$$2\Lambda \partial_\xi n + \frac{\hbar^2}{4m^2} \partial_\xi^3 n - \frac{3g}{m} n \partial_\xi n = 0, \quad (4.2.41)$$

где $\Lambda < 0$, и $g < 0$. В предположении, что возмущение исчезает при удалении от центра солитона $n \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$, получаем явный вид солитонного решения:

$$n(\xi) = n_0 \frac{1}{\text{ch}^2 \left(\sqrt{2|\Lambda|} m \xi / \hbar \right)}, \quad (4.2.42)$$

где амплитуда n_0 выражается следующим образом $n_0 = 2m|\Lambda|/|g|$.

Решение (4.2.42) использовано для приближённого вычисления слагаемого возникающего в третьем порядке по радиусу взаимодействия и приводит к обобщению уравнения (4.2.41) [40]:

$$2m\Lambda n + \frac{\hbar^2}{4m} 2\partial_\xi^2 n - \left(\frac{3g}{2} - \frac{48m^2 \Lambda g_2}{\hbar^2} \right) n^2 - \frac{20m \cdot g \cdot g_2}{\hbar^2} n^3 = 0. \quad (4.2.43)$$

Уравнение (4.2.43) показывает, что возникают изменения коэффициента связанного с взаимодействием в первом порядке по радиусу взаимодействия, а также возникает дополнительное слагаемое с нелинейностью более высокой степени. Если слагаемое, возникающее в первом порядке по радиусу взаимодействия, как хорошо известно, из уравнения Гросса-Питаевского, даёт квадратичную нелинейность, то приближенное рассмотрение нелокального взаимодействия может приводить к локальной форме нелинейности в виде кубической нелинейности.

Уравнение (4.2.43) даёт обобщение решения (4.2.42) в следующем виде

$$n(\xi) = \frac{2n_0}{\sqrt{\kappa^2 - 0.5\kappa + 1} \operatorname{ch}(2\alpha) + 1 + \kappa}, \quad (4.2.44)$$

где $\alpha = \sqrt{2|\Lambda|} m\xi / \hbar$, $\kappa = 2^7 |\Lambda|^3 m^2 |g_2| / \hbar^2 n_0^2 |g|^3$.

Чтобы оценить вклад третьего порядка по радиусу взаимодействия, в свойства яркого солитона, выполним разложение решения (4.2.44) в ряд по малому параметру $\kappa \sim g_2$:

$$n(\xi) = \left(1 + \frac{\kappa}{4}\right) n_0 \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\sqrt{2|\Lambda|} m\xi / \hbar\right)} - \frac{5\kappa}{8} n_0 \frac{1}{\operatorname{ch}^4\left(\sqrt{2|\Lambda|} m\xi / \hbar\right)}, \quad (4.2.45)$$

где $n_{\max} = n_0(1 - 3\kappa/8)$. В решении (4.2.45) поправка к солитонному решению получена в линейном приближении по малому параметру. В частности, обнаружено уменьшение амплитуды солитона при более детальном учете взаимодействия.

Выводы.

Слагаемое, возникающее в уравнении Эйлера, в третьем порядке по радиусу взаимодействия, приводит к существованию солитонного оригинального солитонного решения в системе бозонов находящихся в состоянии БЭК. Это решение возникает в виде яркого солитона, т.е. области повышенной концентрации Бозе атомов, при отталкивании частиц в первом порядке по радиусу взаимодействия. Рассмотрено влияние анизотропного короткодействующего взаимодействия на поведение этого солитона. Кроме того, этот солитон исследован в бозон-фермионных смесях. В этом случае, взаимодействие между бозонами рассмотрено в изотропном пределе. Бозон-фермионное взаимодействие рассмотрено с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия, как и бозон-бозонное взаимодействие. Однако взаимодействие, между фермионами, рассмотрено, с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия, с учётом уравнения эволюции тензора давления.

4.3 Равновесное состояние частично поляризованных фермионов при наличии короткодействующего взаимодействия между фермионами с разными проекциями спина

Выше, в этой главе, рассмотрена динамика фермионов с полной спиновой поляризацией. При этом взаимодействие учитывалось до третьего порядка по радиусу взаимодействия. И модель включала уравнение эволюции давления.

Перейдем к рассмотрению спин-1/2 фермионов с частичной спиновой поляризацией и учтем динамику спина в этой системе. Ограничимся взаимодействием в первом порядке по радиусу взаимодействия [10].

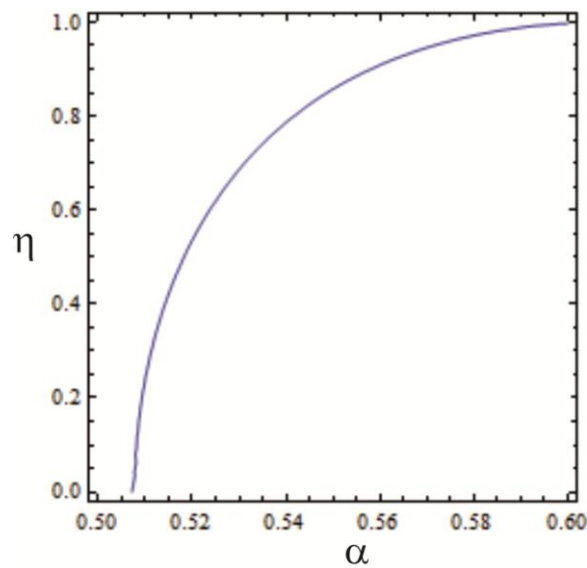


Рис. 4.3.1. Рисунок показывает зависимость спиновой поляризации η от безразмерной амплитуды рассеяния $\alpha = an_0^{1/3}$ при нулевом значении внешнего и эффективного поля и равновесной концентрации $n_0 = 10^{14} \text{ см}^{-3}$. Другие параметры системы не оказывают влияние на представленную зависимость как это видно из уравнения (4.3.12). Дальнейшее увеличение амплитуды рассеяния не меняет спиновой поляризации, оставляя её равной 1.

В этом пределе взаимодействие между фермионами с одинаковой проекцией спина отсутствует. Однако, взаимодействие между фермионами с разными проекциями спина отлично от нуля. Кроме того, будем использовать уравнение состояния для давления в виде давления Ферми, как для равновесного давления, так и для малых отклонений давления от равновесного значения.

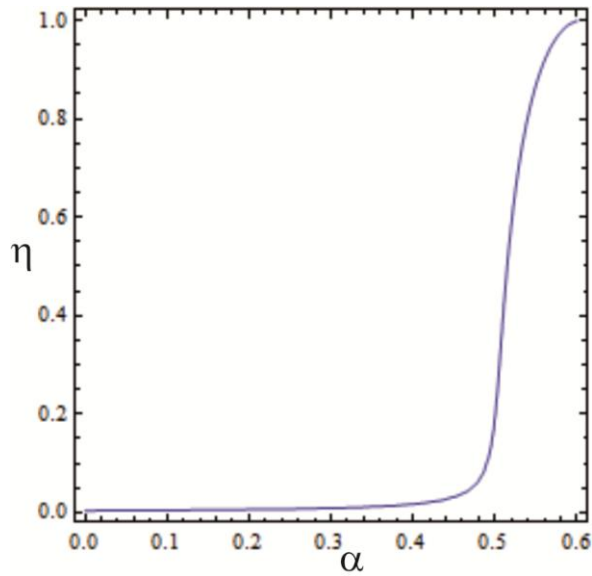


Рис. 4.3.2. Рисунок показывает зависимость спиновой поляризации η от магнитного поля $B_0 = B_{ext} + B_{eff}$ при равной нулю амплитуде рассеяния $\alpha = an_0^{1/3} = 0$, $\mu = 2\mu_B$, $m = 7$ аем.

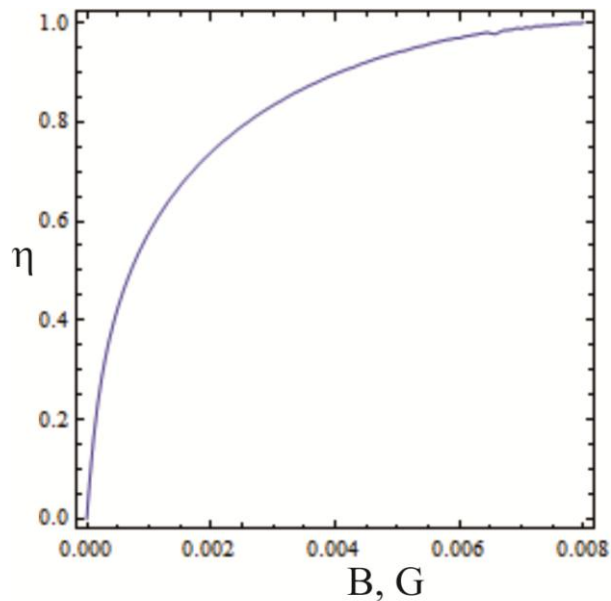


Рис. 4.3.3. Рисунок показывает зависимость спиновой поляризации η от безразмерной амплитуды рассеяния $\alpha = an_0^{1/3}$, при наличии магнитного поля $B_0 = 0.001$ Гаусс, равновесной концентрации $n_0 = 10^{14}$ см⁻³, $\mu = 2\mu_B$, $m = 1$ аем.

Рисунок получен как решения уравнения (4.3.16).

Для исследования равновесного состояния спин поляризованных нейтральных фермионов в модели фермионов с отдельной спиновой эволюцией

воспользуемся введенным выше нелинейным уравнением Паули с спинорным давлением:

$$i\hbar\partial_t\Phi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Phi + \left(V_{ext} + \hat{\pi} + \hat{g}|\Phi|^2 - \mu\hat{\sigma}\mathbf{B}\right)\Phi. \quad (4.3.1)$$

Макроскопическая волновая функция в уравнении является спинором

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_u \\ \Phi_d \end{pmatrix}. \quad (4.3.2)$$

Векторный оператор $\hat{\sigma}$ построен из матриц Паули. Величина $\hat{\pi}$ представляет собой спинорное давление:

$$\hat{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_u & 0 \\ 0 & \pi_d \end{pmatrix}. \quad (4.3.3)$$

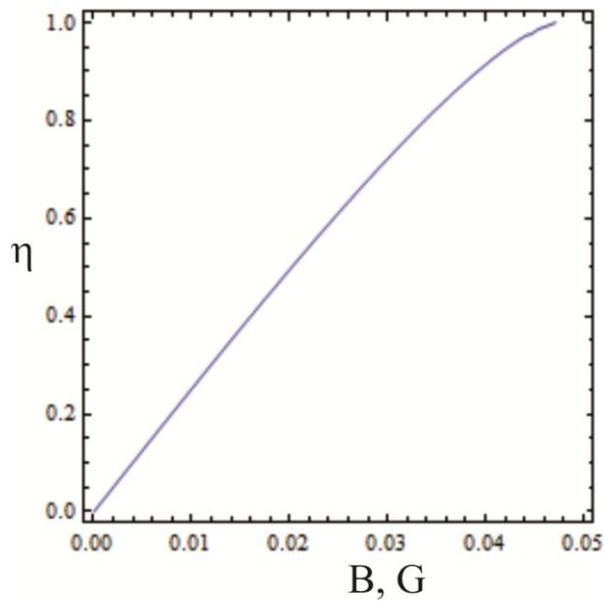


Рис. 4.3.4. Рисунок показывает зависимость спиновой поляризации η от магнитного поля $B_0 = B_{ext} + B_{eff}$ при фиксированном значении амплитуды рассеяния

$$\alpha = an_0^{1/3} = 0.5 \text{ (это соответствует } a = 1.1 \times 10^{-5} \text{ см), } \mu = 2\mu_B, m = 7 \text{ аем.}$$

Это спинор второго ранга, который приводит к различным парциальным давлениям в уравнениях Эйлера. Кроме того, спинорное давление $\hat{\pi}$ приводит к нетривиальному уравнению состояния для спинового тока Ферми. Элементы тензорного давления имеют следующий явный вид $\pi_s = (6\pi^2 n_s)^{2/3} \hbar^2 / 2m$.

Представим разложение спинорного давления $\hat{\pi}$ по матрицам Паули

$$\hat{\pi} = \frac{1}{2} \pi_u (\hat{I} + \hat{\sigma}_z) + \frac{1}{2} \pi_d (\hat{I} - \hat{\sigma}_z), \quad (4.3.4)$$

где \hat{I} это единичная матрица:

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.3.5)$$

Величины \mathbf{B} и μ в нелинейном уравнении Паули (4.3.1) это магнитное поле и магнитный момент Ферми атомов, а последнее слагаемое это энергия взаимодействия магнитных моментов с магнитным полем. Магнитное поле состоит из внешнего равновесного магнитного поля $\mathbf{B}_{ext} = B_{ext} \mathbf{e}_z$, самосогласованного магнитного поля вызванного магнитными моментами фермионов (спин-спиновое взаимодействие), и эффективного магнитного поля \mathbf{B}_{eff} , представляющего радиочастотное поле, формирующее равновесную спиновую поляризацию системы атомов.

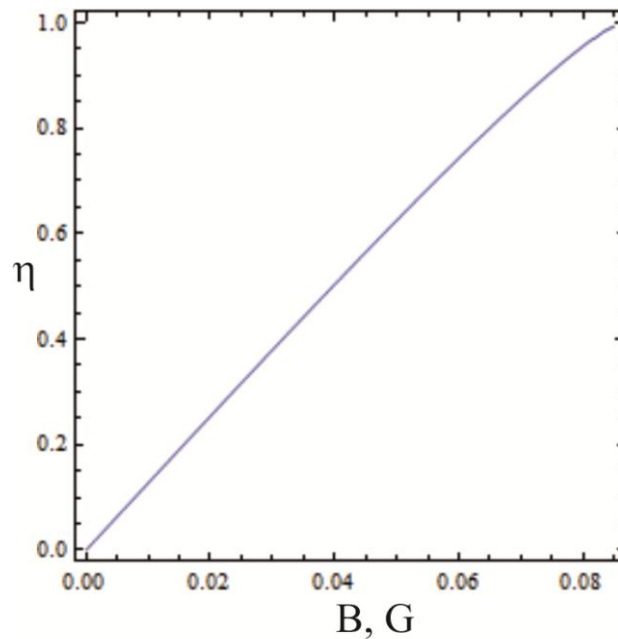


Рис. 4.3.5. Рисунок показывает зависимость спиновой поляризации η от магнитного поля $B_0 = B_{ext} + B_{eff}$ при фиксированном негативном значении амплитуды рассеяния $\alpha = an_0^{1/3} = -0.5$ (это соответствует $a = -1.1 \times 10^{-5}$ см, т.е. притяжению между фермионами с разными проекциями спина), $\mu = 2\mu_B$, $m = 7$ аем.

Система координат выбрана, так что ось z направлена вдоль направления равновесной спиновой поляризации.

Подчеркнем двухжидкостность представленной модели и несохранение числа фермионов с определенной проекцией спина (при сохранении полного числа фермионов) записав соответствующие уравнения непрерывности.

Первое уравнение непрерывности описывает динамику концентрации фермионов со спином вверх

$$\partial_t n_u + \nabla(n_u \mathbf{v}_u) = \frac{\mu}{\hbar}(S_x B_y - S_y B_x), \quad (4.3.6)$$

и второе уравнение непрерывности описывает динамику концентрации фермионов со спином вниз

$$\partial_t n_d + \nabla(n_d \mathbf{v}_d) = -\frac{\mu}{\hbar}(S_x B_y - S_y B_x). \quad (4.3.7)$$

Правые части уравнений непрерывности содержат проекции плотности спина S_x и S_y . Парциальные концентрации частиц n_s и проекции спина S_α имеют следующую связь с элементами макроскопической спинорной волновой функции $n_s = \Phi_s^* \Phi_s$ и $\mathbf{S} = \Phi^\dagger \hat{\mathbf{S}} \Phi$.

Самосогласованная часть магнитного поля удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.3.8)$$

и

$$\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi\mu \nabla \times \mathbf{S}. \quad (4.3.9)$$

Равновесное состояние частично спин-поляризованного газа фермионов.

Рассмотрим равновесное состояние на основе нелинейного уравнения Паули (4.3.1). для этого будем искать элементы макроскопической волновой функции в виде $\Phi_s(\mathbf{r}, t) = \phi_s(\mathbf{r}) e^{-i\mu_{ch} t/\hbar}$, где μ_{ch} это химический потенциал системы фермионов. Для равновесного состояния однородной среды функции $\phi_s(\mathbf{r}) \equiv const$, можно считать константами ϕ_{0s} . Следовательно $\Delta\phi_{0s} = 0$, и Нелинейное уравнение Паули упрощается. Однако оно содержит вклад нескольких эффектов. Рассмотрим их по порядку. Начнем с простейшего случая, когда нет взаимодействия и внешнего магнитного поля. Остаётся только давление Ферми и нелинейное уравнение Паули принимает следующий вид

$$\mu_{ch} \phi_s = \hat{\pi} \phi_s. \quad (4.3.10)$$

Решая уравнение (4.3.10) находим химический потенциал $\mu_{ch} = \pi_u = \pi_d$ и соответствующие значения равновесных концентраций $n_u = n_d = n_0/2$. Это соответствует состоянию с нулевой спиновой поляризацией. Внешнее эффективное магнитное создаёт несбалансированность спинов, так как магнитное поле переедет энергию фермионам со спином вниз, меняя их состояние и переводя их в состояния со спином вверх.

Прежде чем учитывать магнитное поле в нелинейном уравнении Паули, рассмотрим влияние взаимодействия между фермионами с различно проекцией спина. Тогда, вместо уравнения (4.3.10) получим следующие уравнения $\mu_{ch} = \pi_u + gn_d$ и $\mu_{ch} = \pi_d + gn_u$. Приравнивая два выражения для химического потенциала друг другу, получаем уравнение, связывающее равновесные значения

$$\pi_u + gn_d = \pi_d + gn_u. \quad (4.3.11)$$

Перепишем это уравнение в развернутой форме

$$\left(n_u^{\frac{1}{3}} - n_d^{\frac{1}{3}} \right) \left(n_u^{\frac{1}{3}} + n_d^{\frac{1}{3}} - \frac{8\pi a}{(6\pi^2)^{\frac{2}{3}}} \left(n_u^{\frac{2}{3}} + n_u^{\frac{1}{3}} n_d^{\frac{1}{3}} + n_d^{\frac{2}{3}} \right) \right) = 0, \quad (4.3.12)$$

которая дает связь между парциальными концентрациями и амплитудой рассеяния.

Уравнение (4.3.12) дает два решения. Одно из них соответствует полярной фазе, в которой отсутствует спиновая поляризация. Рис. (4.3.1) показывает, что уравнение (4.3.12) имеет нетривиальное решение. Нетривиальное решение существует для отталкивающего взаимодействия $a > 0$. Область существования решения оказывается достаточно узкой. Рассматривая диапазон концентраций доступный в современных экспериментах $n_0 = n_{0u} + n_{0d} \sim 10^{12} \div 10^{14} \text{ см}^{-3}$ получаем, что решение существует для амплитуды рассеяния порядка $a \sim 10^{-6} \text{ см}$.

При наличии внешнего или эффективного магнитного поля компоненты нелинейного уравнения Паули принимают следующий вид при описании состояния равновесия

$$\mu_{ch}\psi_u = (\pi_u + gn_d - \mu B_z)\psi_u, \quad (4.3.13)$$

$$\mu_{ch}\psi_d = (\pi_d + gn_u + \mu B_z)\psi_d. \quad (4.3.14)$$

Очевидно, что наличие магнитного поля формирует спиновую поляризацию или увеличивает спиновую поляризацию, созданную отталкивающим взаимодействием.

Обратно, притяжение между частицами может снизить спиновую поляризацию, созданную магнитным полем. Рассмотрим это последовательно, используя уравнения (4.3.13) и (4.3.14).

Равенство химических потенциалов, в данном случае, приводит к обобщенному условию, связывающему равновесные значения параметров рассматриваемой системы:

$$\pi_u - \pi_d = g(n_u - n_d) + 2\mu B_z. \quad (4.3.15)$$

Развернутая форма этого уравнения имеет следующий вид

$$(1+\eta)^{\frac{2}{3}} - (1-\eta)^{\frac{2}{3}} - \eta \frac{8\pi a n_0^{\frac{1}{3}}}{(3\pi^2)^{\frac{2}{3}}} - \frac{4m\mu B_z}{(3\pi^2)^{\frac{2}{3}} n_0^{\frac{2}{3}} \hbar^2} = 0. \quad (4.3.16)$$

Проанализирует уравнение (4.3.16) численно. Для предварительной оценки параметров обратимся к случаю магнитного поля, описанного уравнением (4.3.12) и представленному на Рис. (4.3.1). Выберем концентрацию равной $n_0 = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$. Получим, что изменение амплитуды рассеяния, в окрестности значения $a = 100 \text{ нм}$, позволяет достичь любого значения спиновой поляризации $\eta \in [0,1]$.

Решение для нулевого значения амплитуды рассеяния $a = 0$ при $m = 7$ аем и $\mu = 2\mu_B$ представлено на Рис. (4.3.2). видно что увеличение эффективного магнитного поля до $B \sim 0.05 \text{ Гс}$ приводит к полной спиновой поляризации. При больших значениях массы и магнитного момента полная спиновая поляризация может быть достигнута при меньших значениях магнитного поля. Зависимость спиновой поляризации от безразмерной амплитуды рассеяния показана на Рис. (4.3.3) при $n_0 = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ и $B \sim 0.001 \text{ Гс}$. Влияние положительной и отрицательной амплитуды рассеяния на зависимость спиновой поляризации от магнитного поля показано на Рис. (4.3.4) и (4.3.5), соответственно.

Выводы.

Нелинейное уравнение Паули использовано для исследования равновесного состояния однородной среды фермионов. Показано как короткодействующее взаимодействие нейтральных фермионов в первом порядке по радиусу взаимодействия формирует спиновую поляризацию. Исследован дополнительный вклад магнитного поля в формирование спиновой поляризации среды.

4.4 Спектр коллективных возбуждений частично поляризованных фермионов при раздельной спиновой эволюции

Рассмотрим коллективные возбуждения, распространяющиеся в виде плоских волн в системе частично спин поляризованных нейтральных фермионов со спином $1/2$. Используем гидродинамическую форму нелинейного уравнения Паули, которая является вариацией гидродинамики, с раздельной спиновой эволюцией, использованной для исследования спин-электрон-акустических волн в электронном газе [10].

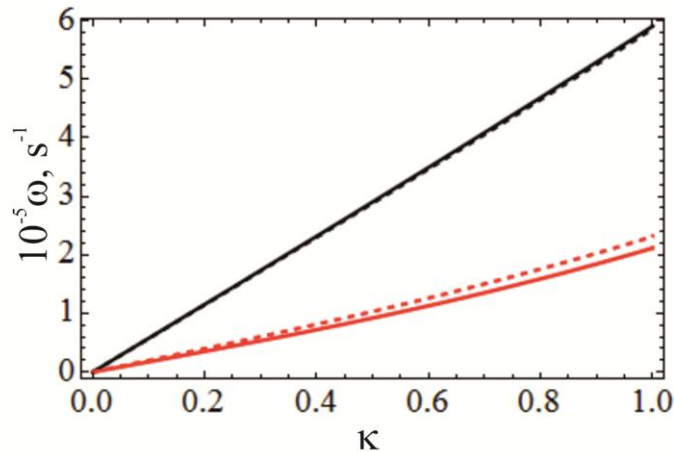


Рис. 4.4.1. Рисунок показывает дисперсионные зависимости двух звуковых волн представленных уравнением (4.4.12). Каждая из них представлена для двух различных значений спиновой поляризации. Непрерывные линии показывают дисперсионные зависимости, полученные для $\eta = 0.3$. Штриховые линии показывают дисперсионные зависимости, полученные для $\eta = 0.1$ (верхняя штриховая линия почти совпадает с верхней непрерывной линией). Рисунок показывает, что расстояние между дисперсионными кривыми возрастает с возрастанием спиновой поляризации. Другие параметры принимают следующие значения: магнитное поле $B_0 = 0.001$ Гаусс для $\eta = 0.1$ и $B_0 = 0.0031$ Гаусс для $\eta = 0.3$, равновесной концентрации $n_0 = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $\mu = 2\mu_B$, $m = 6$ аем,

$$|\alpha| = |a|n_0^{1/3} = 0.4.$$

Фактически в этом разделе рассмотрены возмущения равновесного состояния описанного в разделе 4.3.

Равновесное состояние, в терминах гидродинамических переменных, характеризуется равновесными концентрациями n_{0u} и n_{0d} , которые неравны друг другу, а также эффективным равновесным магнитным полем $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$. Разница равновесных концентраций дает ненулевое значение равновесной z-проекции плотности спина $S_{0z} = n_{0u} - n_{0d}$. Равновесные значения x- и y-проекций плотности спина и поля скоростей равны нулю.

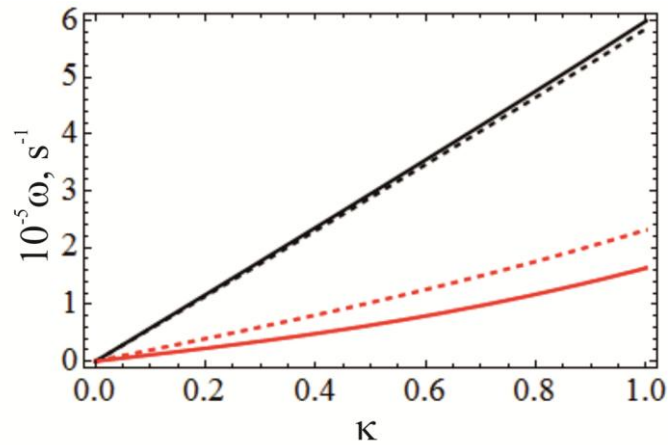


Рис. 4.4.2. Рисунок показывает дисперсионные зависимости двух звуковых волн представленных уравнением (4.4.12). Каждая из них представлена для двух различных значений спиновой поляризации. Отличие от предыдущего рисунка состоит в увеличении верхнего значения спиновой поляризации. Непрерывные линии показывают дисперсионные зависимости, полученные для $\eta = 0.5$. Штриховые линии показывают дисперсионные зависимости, полученные для $\eta = 0.1$. Используются следующие значения других параметров: равновесной концентрации $n_0 = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, массы частиц $m = 6$ аем, и амплитуды рассеяния $|\alpha| = |a|n_0^{1/3} = 0.4$, что соответствует значениям параметров на Рис. 4.4.1.

Представим возмущения гидродинамических переменных в виде постоянных амплитуд умноженных на следующую экспоненту $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$.

Линеаризованное уравнение непрерывности имеет стандартный вид

$$\partial_t \delta n_s + n_{0s} \nabla \delta \mathbf{v}_s = 0. \quad (4.4.1)$$

Представим линеаризованные уравнения для частиц с разными проекциями спина, которые взаимодействуют друг с другом посредством короткодействующего и спин-спинового взаимодействий:

$$m\partial_t\delta\mathbf{v}_s + \frac{\nabla\delta p_s}{n_{0s}} - \frac{\hbar^2}{4m} \frac{\nabla\Delta\delta n_s}{n_{0s}} = -g\nabla\delta n_s \pm \mu\nabla\delta B_z. \quad (4.4.2)$$

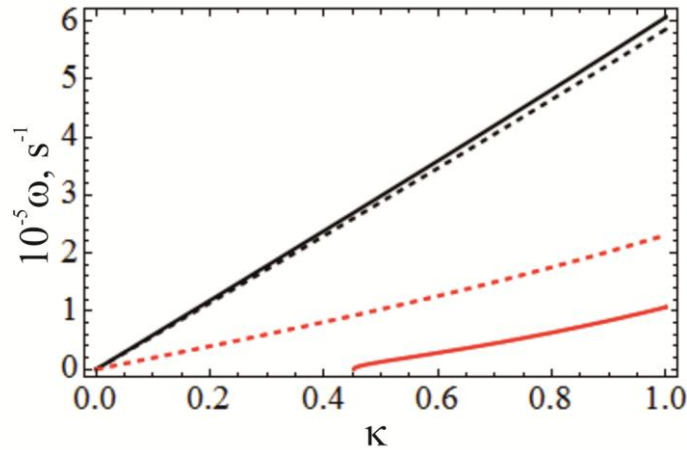


Рис. 4.4.3. Рисунок показывает дисперсионные зависимости двух звуковых волн представленных уравнением (4.4.12) для другого диапазона спиновой поляризации. Каждая из них представлена для двух различных значений спиновой поляризации.

Непрерывные линии показывают дисперсионные зависимости, полученные для $\eta = 0.62$. Штриховые линии показывают дисперсионные зависимости, полученные для $\eta = 0.1$. Здесь использованы следующие значения других параметров: равновесной концентрации $n_0 = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, массы частиц $m = 6 \text{ аем}$, и амплитуды рассеяния $|\alpha| = |a|n_0^{1/3} = 0.4$, что соответствует значениям параметров на Рис. 4.4.1.

Векторная форма линеаризованного уравнения эволюции спина имеет вид:

$$\begin{aligned} \partial_t\delta\mathbf{S} + \frac{(6\pi^2)^{2/3}}{m} \hbar \left(n_{0u}^{2/3} - n_{0d}^{2/3} \right) [\delta\mathbf{S}, \mathbf{e}_z] - \frac{\hbar[\mathbf{S}_0, \Delta\delta\mathbf{S}]}{2mn_0} \\ = \frac{2\mu}{\hbar} ([\delta\mathbf{S}, \mathbf{B}_0] + [\mathbf{S}_0, \delta\mathbf{B}]) + \frac{g}{\hbar} (n_{0u} - n_{0d}) [\delta\mathbf{S}, \mathbf{e}_z]. \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

Перейдем к рассмотрению волн распространяющихся параллельно к внешнему магнитному полю. В этом режиме линеаризованная и Фурье преобразованная система уравнений квантовой гидродинамики принимает следующий вид. Для уравнения непрерывности получим

$$\omega\delta n_s = n_{0s}k\delta v_{sz}. \quad (4.4.4)$$

Для уравнения Эйлера найдём

$$-\omega \delta v_{sz} + \frac{k \delta p_s}{m n_{0s}} + \frac{\hbar^2 k^3}{4m^2} \frac{\delta n_s}{n_{0s}} = -\frac{gk}{m} \delta n_s. \quad (4.4.5)$$

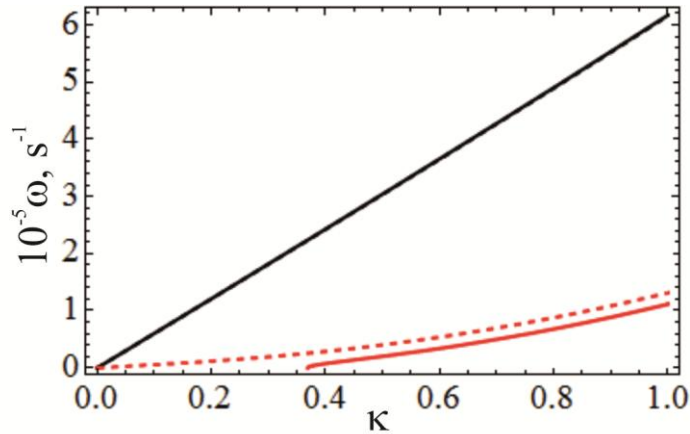


Рис. 4.4.4. Рисунок показывает дисперсионные зависимости двух звуковых волн представленных уравнением (4.4.12) для следующих значений спиновой поляризации $\eta = 0.3$ (непрерывные линии) и $\eta = 0.1$ (штриховые линии, верхняя штриховая линия скрыта верхней сплошной линией). Этот рисунок показывает результаты для более интенсивного короткодействующего взаимодействия $|\alpha| = |a| n_0^{1/3} = 0.5$. Другие параметры имеют следующие значения: $n_0 = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, и

$m = 6 \text{ аем.}$

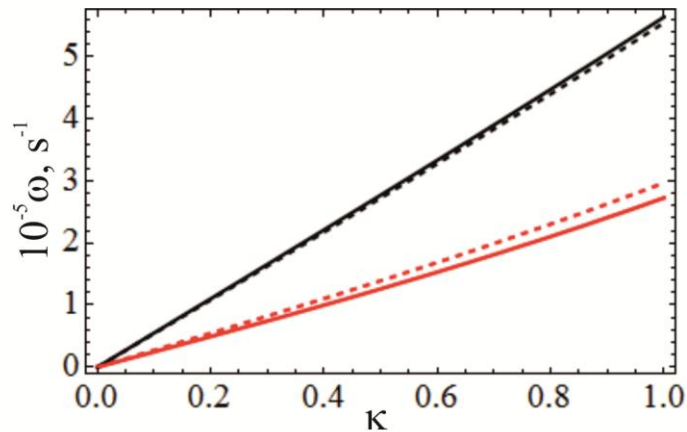


Рис. 4.4.5. Рисунок показывает дисперсионные зависимости двух звуковых волн представленных уравнением (4.4.12) для следующих значений спиновой поляризации $\eta = 0.3$ (непрерывные линии) и $\eta = 0.1$ (штриховые линии, верхняя штриховая линия скрыта верхней сплошной линией). Этот рисунок показывает результаты для сравнительно более малого значения амплитуды рассеяния $|\alpha| = |a| n_0^{1/3} = 0.3$. Другие параметры имеют следующие значения: $n_0 = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, и

$m = 6 \text{ аем.}$

Для проекций плотности спина получаем

$$\begin{aligned}
 & -i\omega\delta S_x + \frac{(6\pi^2)^{\frac{2}{3}}\hbar}{m}(n_{0u}^{\frac{2}{3}} - n_{0d}^{\frac{2}{3}})\delta S_y \\
 & - \frac{\hbar k^2}{2m} \frac{S_0}{n_0} \delta S_y - \frac{2\mu}{\hbar} \delta S_y B_0 - \frac{g}{\hbar} (n_{0u} - n_{0d}) \delta S_y = - \frac{8\pi\mu^2}{\hbar} S_0 \delta S_y, \quad (4.4.6)
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
 & -i\omega\delta S_y - \frac{(6\pi^2)^{\frac{2}{3}}\hbar}{m}(n_{0u}^{\frac{2}{3}} - n_{0d}^{\frac{2}{3}})\delta S_x \\
 & + \frac{\hbar k^2}{2m} \frac{S_0}{n_0} \delta S_x + \frac{2\mu}{\hbar} \delta S_x B_0 + \frac{g}{\hbar} (n_{0u} - n_{0d}) \delta S_x = \frac{8\pi\mu^2}{\hbar} S_0 \delta S_x. \quad (4.4.7)
 \end{aligned}$$

И для уравнений Максвелла находим

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_x(\delta B_y - 4\pi\mu\delta S_y) - \mathbf{e}_y(\delta B_x - 4\pi\mu\delta S_x) &= 0 \\
 \delta B_z &= 0
 \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

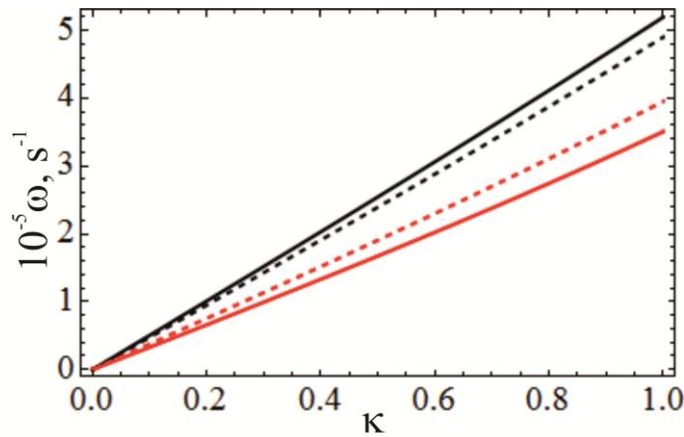


Рис. 4.4.6. Рисунок показывает дисперсионные зависимости двух звуковых волн представленных уравнением (4.4.12) для следующих значений спиновой поляризации $\eta = 0.3$ (непрерывные линии) и $\eta = 0.1$ (штриховые линии, верхняя штриховая линия скрыта верхней сплошной линией). Этот рисунок показывает результаты для еще меньшего значения амплитуды рассеяния $|\alpha| = |a|n_0^{1/3} = 0.1$.

Другие параметры имеют следующие значения: $n_0 = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, и $m = 6$ аем.

Кроме того, из x- и y-проекций уравнений Эйлера следует равенство нулю возмущений соответствующих проекций поля скоростей: $\delta v_{sx} = \delta v_{sy} = 0$, а возмущение давления записано в следующем виде:

$$\delta p_s = (6\pi^2 n_{0s})^{2/3} \delta n_s / 3m. \quad (4.4.9)$$

Линеаризованные уравнения эволюции спиновой плотности (4.4.6) и (4.4.7) оказываются независимыми от уравнений эволюции концентрации (4.4.4) и поля скоростей (4.4.5) и приводят к следующему спектру спиновых волн распространяющихся параллельно к внешнему магнитному полю:

$$\omega = \left| \Omega + \frac{g}{\hbar} \eta_s n_0 - w - \frac{8\pi\mu^2}{\hbar} \eta_s n_0 + \frac{\eta_s \varepsilon_k}{\hbar} \right|, \quad (4.4.10)$$

где

$$w = \frac{(6\pi^2)^{2/3} \hbar}{m} (n_{0u}^{2/3} - n_{0d}^{2/3}). \quad (4.4.11)$$

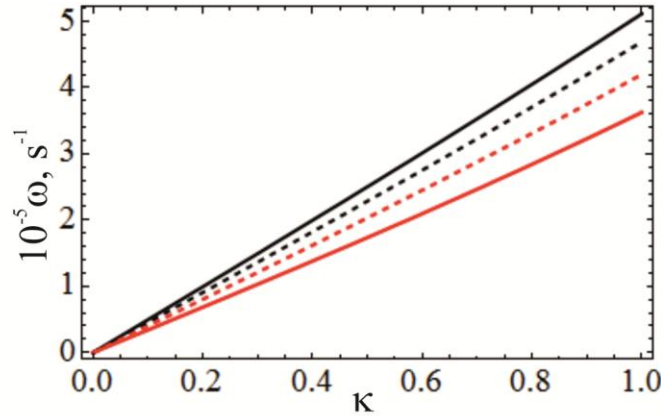


Рис. 4.4.7. Рисунок показывает дисперсионные зависимости двух звуковых волн представленных уравнением (4.4.12) для следующих значений спиновой поляризации $\eta = 0.3$ (непрерывные линии) и $\eta = 0.1$ (штриховые линии, верхняя штриховая линия скрыта верхней сплошной линией). Этот рисунок показывает результаты для амплитуды рассеяния $|\alpha| = |a| n_0^{1/3} = 0.01$, которая в 10 раз меньше значения использованного в предыдущем случае. Другие параметры имеют следующие значения: $n_0 = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, и $m = 6 \text{ аем}$.

это эффективная частота спинового тока Ферми. Кроме того, в формуле (4.4.10) введена циклотронная частота $\Omega = 2\mu B_0 / \hbar$ описывающая прецессию магнитного момента во внешнем магнитном поле B_0 , и кинетическая энергия $\varepsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m$, и спиновая поляризация $\eta_s = (n_{0u} - n_{0d}) / n_0 \in [-1, 1]$.

Спектр звуковых волн возникает из связанных между собой уравнений Эйлера и уравнений непрерывности фермионов с различными проекциями спина и принимает следующий вид:

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left[U_u^2 + U_d^2 \pm \sqrt{(U_u^2 - U_d^2)^2 + 4g^2 \frac{n_{0u}n_{0d}}{m^2}} \right] k^2, \quad (4.4.12)$$

где

$$U_s^2 = (6\pi^2 n_{0s})^{\frac{2}{3}} \hbar^2 / 3m^2 + \varepsilon_k / 2m. \quad (4.4.13)$$

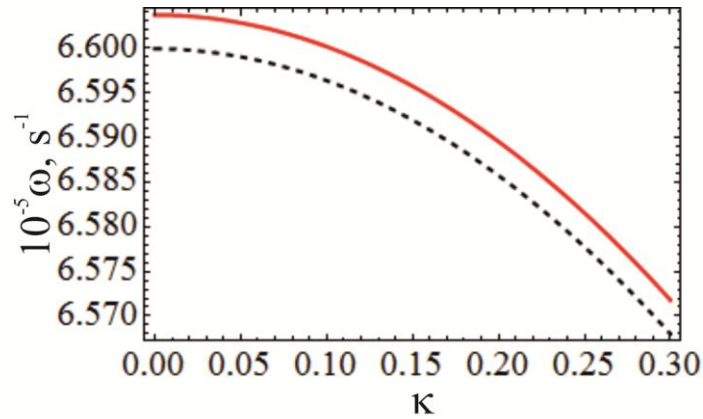


Рис. 4.4.8. Рисунок показывает спектр спиновых волн распространяющихся параллельно внешнему магнитному полю (4.4.10) (верхняя кривая) и перпендикулярно внешнему магнитному полю (4.4.20) (нижняя кривая) при $n_0 = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $\mu = 2\mu_B$, $|\alpha| = |a|n_0^{1/3} = -0.4$, $\eta = 0.3$, $m = 6$ аем.

Полученный спектр можно переписать в более явном виде, выделяя зависимость от полной концентрации и спиновой поляризации:

$$\omega = \frac{\hbar n_0^{\frac{2}{3}}}{m} \kappa \times \sqrt{\frac{(3\pi^2)^{\frac{2}{3}}}{6} \left((1+\eta)^{\frac{2}{3}} + (1-\eta)^{\frac{2}{3}} \right) + \frac{\kappa^2}{4} \pm \frac{\pi}{2} \sqrt{\left(\frac{\pi}{3} \right)^{\frac{2}{3}} \left((1+\eta)^{\frac{2}{3}} - (1-\eta)^{\frac{2}{3}} \right)^2 + 16(1-\eta^2)\alpha^2}}, \quad (4.4.14)$$

где $\alpha = a\sqrt[3]{n_0}$ и $\kappa = k/\sqrt[3]{n_0}$.

Спектр звуковых волн представленных уравнением (4.4.12) показан на Рис. (4.4.1)-(4.4.7). В частности, увеличение магнитного поля приводит к увеличению спиновой поляризации, что приводит к увеличению разности частот двух ветвей звуковых волн, что показано на Рис. (4.4.1). Верхняя ветвь является модификацией

звуковой волны существующей при нулевой спиновой поляризации. Тогда как нижняя ветвь соответствует спин-акустической волне и исчезает в пределе нулевой спиновой поляризации.

Дальнейшее увеличение спиновой поляризации приводит к увеличению разности частот двух ветвей звуковых волн (см. Рис. (4.4.2)).

Рис. (4.4.2) показывает, что спектр спин-акустической волны более модифицирован изменением спиновой поляризации, чем спектр верхней моды. Отметим, что увеличение спиновой поляризации уменьшает частоту спин-акустической волны.

Сравнительно большие значения спиновой поляризации приводит к качественному изменению спектра спин-акустической волны. В этом случае спектр начинается как линейная функция при некотором положительном значении волнового вектора $k_* > 0$, так что $\omega(k_*) = 0$, как это показано на Рис. (4.4.3).

Далее рассмотрим спектр (4.4.12) при двух значениях спиновой поляризации $\eta = 0.1$ и $\eta = 0.3$ при различных значениях амплитуды рассеяния $\alpha = an_0^{1/3}$. При увеличении амплитуды рассеяния до значения $\alpha = 0.5$ получаем, что верхняя звуковая ветвь мало меняется при различных значениях спина. Однако, увеличение амплитуды рассеяния приводит к заметному уменьшению частоты нижней ветви. Это можно увидеть из сравнения нижних штриховых линий на Рис. (4.4.1) и Рис. (4.4.4) для $\eta = 0.1$. Отклонение спектра от линейной зависимости более заметно для больших значений спиновой поляризации. Увеличение амплитуды рассеяния до значения $\alpha = 0.5$ при $\eta = 0.1$ приводит к более значительному изменению спектра. Уменьшение амплитуды рассеяния увеличивает частоту спин-акустической волны и уменьшает частоты верхней звуковой моды (см. Рис. (4.4.5)). Это приводит к уменьшению разности частот верхней и нижней звуковых мод как это показано на Рис. (4.4.6) и Рис. (4.4.7).

Спектр спиновой волны (4.4.10) представлен на Рис. (4.4.8) и Рис. (4.4.9). Формула (4.4.10) показана на верхнем графике в Рис. (4.4.9) для двух значениях равновесной спиновой поляризации ($\eta = 0.1$ и $\eta = 0.3$). При нулевом волновом векторе, частота спиновой волны сдвинута от циклотронной частоты

короткодействующим взаимодействием и спиновыми эффектами. Влияние массы атома на частоту представлено на нижнем графике в Рис. (4.4.9).

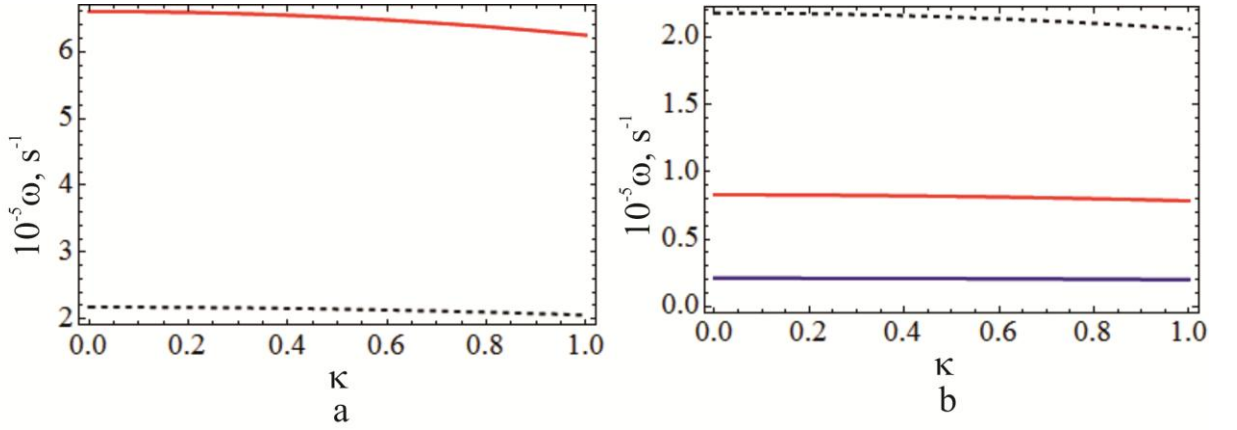


Рис. 4.4.9. Рисунок (а) показывает спектр спиновых волн распространяющихся параллельно внешнему магнитному полю для различных значений спиновой поляризации. Верхняя (нижняя) кривая получена для $\eta = 0.3$ ($\eta = 0.1$). Другие параметры имеют следующие значения $n_0 = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $\mu = 2\mu_B$, $m = 6$ аем, $|\alpha| = |a|n_0^{1/3} = -0.4$. Рисунок (б) показывает спектр спиновых волн для частиц различной массы. Верхняя (средняя, нижняя) кривая получена для $m = 6$ аем ($m = 16$ аем, $m = 66$ аем) при $\eta = 0.1$. Другие параметры имеют следующие значения $n_0 = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $\mu = 2\mu_B$, $|\alpha| = |a|n_0^{1/3} = -0.4$.

Распространение волн перпендикулярно направлению равновесной спиновой поляризации.

При распространении волн перпендикулярно оси анизотропии выберем волновой вектор в следующем виде $\mathbf{k} = \{k, 0, 0\}$. В этом режиме уравнения (4.4.1)-(4.4.3) упрощаются и принимают следующий вид

$$\omega \delta n_s = n_{0s} k \delta v_{sx}, \quad (4.4.15)$$

$$-\omega \delta v_{sx} + \frac{k \delta p_s}{m n_{0s}} + \frac{\hbar^2 k^3}{4m^2} \frac{\delta n_s}{n_{0s}} = -\frac{gk}{m} \delta n_{s'} \pm \frac{\mu}{m} k \delta B_z, \quad (4.4.16)$$

$$-i\omega \delta S_x + \frac{(6\pi^2)^{2/3} \hbar}{m} (n_{0u}^{2/3} - n_{0d}^{2/3}) \delta S_y$$

$$-\frac{\hbar k^2}{2m} \frac{S_0}{n_0} \delta S_y - \frac{2\mu}{\hbar} \delta S_y B_0 - \frac{g}{\hbar} (n_{0u} - n_{0d}) \delta S_y = -\frac{8\pi\mu^2}{\hbar} S_0 \delta S_y, \quad (4.4.17)$$

и

$$\begin{aligned}
& -i\omega\delta S_y - \frac{(6\pi^2)^{\frac{2}{3}}\hbar}{m}(n_{0u}^{\frac{2}{3}} - n_{0d}^{\frac{2}{3}})\delta S_x \\
& + \frac{\hbar k^2}{2m} \frac{S_0}{n_0} \delta S_x + \frac{2\mu}{\hbar} \delta S_x B_0 + \frac{g}{\hbar} (n_{0u} - n_{0d}) \delta S_x = \frac{8\pi\mu^2}{\hbar} S_0 \delta S_x. \quad (4.4.18)
\end{aligned}$$

И соответствующие уравнения Максвелла

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_y [\delta B_z - 4\pi\mu(\delta n_u - \delta n_d)] - \mathbf{e}_z (\delta B_y - 4\pi\mu\delta S_y) = 0 \\
\delta B_x = 0 \quad (4.4.19)
\end{aligned}$$

Уравнение непрерывности (4.4.15) и уравнение Эйлера (4.4.16) связаны с уравнением для z-проекции возмущения магнитного поля. Это приводит к вкладу спин-спинового взаимодействия в свойства звуковых волн, который отсутствовал при распространении волн параллельно оси анизотропии. Эволюция x- и y-проекции плотности спина оказываются независимыми от уравнений для концентрации и поля скоростей и дают спектр спиновых волн.

Спектр спиновых волн возникает в следующем виде

$$\omega^2 = \left(\Omega + \frac{g}{\hbar} \eta_s n_0 - w + \frac{\eta_s \mathcal{E}_k}{\hbar} \right) \left(\Omega + \frac{g}{\hbar} \eta_s n_0 - w - \frac{8\pi\mu^2}{\hbar} \eta_s n_0 + \frac{\eta_s \mathcal{E}_k}{\hbar} \right). \quad (4.4.20)$$

Спектр (4.4.20) отличается от спектра (4.4.10) тем, что в первом сомножителе в формуле (4.4.20) отсутствует вклад спин-спинового взаимодействия $\sim \mu^2$.

Спектр звуковых волн возникает из уравнений (4.4.15) и (4.4.16) в следующем виде

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left[U_u^2 + U_d^2 - \Lambda^2 \pm \sqrt{(U_u^2 - U_d^2 - \eta\Lambda^2)^2 + 4(g + 4\pi\mu^2)^2 \frac{n_{0u}n_{0d}}{m^2}} \right] k^2, \quad (4.4.21)$$

где Λ это характерная частота спин-спинового взаимодействия $\Lambda^2 = 4\pi\mu^2 n_0 / m$. Качественно поведение спектра звуковых волн (4.4.21) аналогично спектру, рассмотренному для распространения звуковых волн параллельно оси анизотропии, но со сдвигом, вызванным спин-спиновым взаимодействием, индикатором которого является квадрат магнитного момента μ^2 .

Спектр спиновой волны (4.4.20) представлен на Рис. (4.4.8) в сравнении со спектром спиновой волны распространяющейся параллельно оси анизотропии.

При исследовании отдельной спиновой эволюции электронного газа было показано существование спин-электрон-акустического солитона. Аналогичный анализ фермионов, с короткодействующим взаимодействием, основанный на режиме уравнениях (4.4.1)-(4.4.3), показывает отсутствие подобного солитонного решения.

Выводы

Квантовая гидродинамика с отдельной спиновой эволюцией для нейтральных частично спин-поляризованных фермионов с короткодействующим взаимодействием, эквивалентная нелинейному уравнению Паули, использована для анализа спектра объемных коллективных возмущений малой амплитуды.

Выведены спектры звуковых и спиновых волн, включая спин-акустическую волну, которая возникает как следствие относительной эволюции парциальных концентраций, что выражается в динамике z-проекции плотности спина. Исследована анизотропия полученных спектров, связанная, прежде всего, со спин-спиновым взаимодействием.

4.5 Солитон обусловленный квантовыми флуктуациями в дипольном БЭК

Применим представленную в разделе 2.5 модель к изучению солитонов в дипольном БЭК. Цель этого исследования — рассмотреть влияние квантовых флуктуаций на возможность существования особых солитонных решений. Более того, ниже аналитически найдено новое солитонное решение, обусловленное дипольной частью квантовых флуктуаций. Солитоны рассмотрены в однородном безграничном БЭК, без ограничений на амплитуду солитона.

Рассмотрим упрощенную форму уравнений гидродинамики, дающую основной вклад в солитонное решение. Уравнение непрерывности не требует упрощения. Упрощение уравнения поля также не требуется. Уравнения непрерывности и Эйлера запишем в следующем виде

$$\partial_t n + \nabla(n\mathbf{v}) = 0, \quad (4.5.1)$$

и

$$m(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla)v^\alpha + \frac{\partial^\beta p^{\alpha\beta}}{n} - \frac{\hbar^2}{4m} \partial^\alpha \left(\frac{\Delta n}{n} - \frac{(\nabla n)^2}{2n^2} \right) = -\partial^\alpha (gn + V_{ext} + \Phi_d), \quad (4.5.2)$$

где квантовый потенциал Бома будет отброшен при выводе солитонного решения. В уравнении (4.5.2) использован потенциал диполь-дипольного взаимодействия для неточечных атомов, в режиме полностью поляризованных диполей

$$\Phi_d = d^2 \int \frac{n(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \left(1 - 3 \frac{(z - z')^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right) d\mathbf{r}', \quad (4.5.3)$$

который удовлетворяет уравнению поля

$$\Delta \Phi_d = 4\pi d^2 (\partial_z^2 n - \Delta n). \quad (4.5.4)$$

Используя модель, разработанную в работах [1], [2], [3] и следуя работе [4] запишем упрощенную форму уравнения эволюции давления

$$\partial_t p^{\alpha\beta} + \partial_\gamma Q^{\alpha\beta\gamma} = 0, \quad (4.5.5)$$

и уравнения эволюции потока давления

$$\partial_t Q^{\alpha\beta\gamma} = \frac{\hbar^2}{4m^2} n \partial^\alpha \partial^\beta \partial^\gamma \Phi_d, \quad (4.5.6)$$

где взаимодействие в правой части представляет собой квантовые флуктуации. Предполагается, что эволюция тензора $Q^{\alpha\beta\gamma}$ обусловлена взаимодействием.

В уравнении эволюции давления нет независимого источника взаимодействия. Следовательно, тензор третьего ранга $Q^{\alpha\beta\gamma}$ является единственным источником взаимодействия в уравнении эволюции давления. Как упоминалось выше, сделан акцент на давлении, вызванном квантовыми флуктуациями. Поэтому, отбрасываем кинематические слагаемые в уравнениях (4.5.5) и (4.5.6).

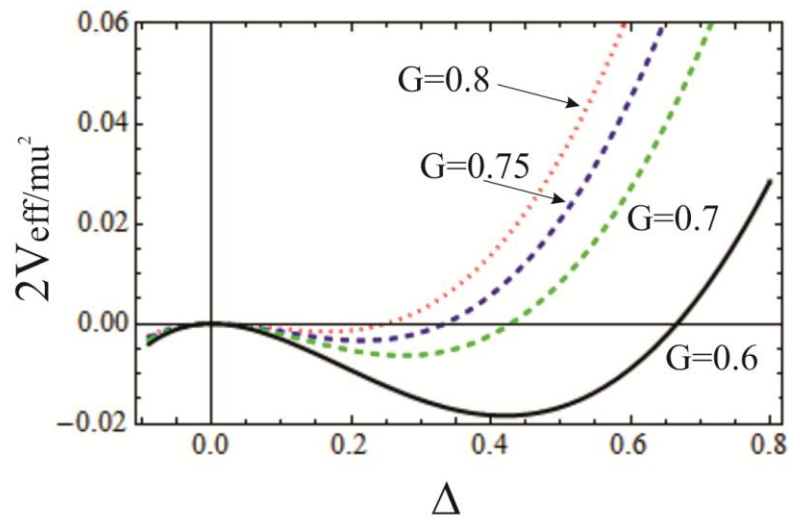


Рис.4.5.1. Потенциал Сагдеева как функция безразмерного отклонения $\Delta = (n - n_0)/n_0$ концентрации n от равновесного значения n_0 (концентрация на бесконечности) демонстрируется для значения Δ меньше 1 в соответствии с областью применимости упрощенных уравнений гидродинамики [4]. Потенциал Сагдеева зависит от одного параметра G , который представляет собой комбинацию констант взаимодействия, включая эффективную константу взаимодействия для диполь-дипольного взаимодействия $g_d = 4\pi d^2$. На рисунке показано, что имеется "потенциальная яма" в области положительных отклонений Δ . Это означает, что существует яркий солитон (область повышенной концентрации).

Рассмотрим одномерное решение. Выберем направление распространения волны, перпендикулярное направлению поляризации диполей. Найдём стационарные решения нелинейных уравнений в сопутствующей системе отсчета. Поэтому зависимость от временных и пространственных координат объединяется в одну переменную $\xi = x - ut$. Параметр u — постоянная скорость движения

нелинейной структуры. Следовательно, все гидродинамические функции зависят от ξ и u . Также предположим, что возмущения исчезают при $\xi \rightarrow \infty$.

Уравнения гидродинамики, в одномерном случае, приводит к «интегралу энергии» [4]:

$$\frac{1}{2}(\partial_{\xi}n)^2 + \frac{m^2 u^2}{\pi d^2 \hbar^2} V_{eff}(n) = 0, \quad (4.5.7)$$

где $V_{eff}(n)$ — потенциал Сагдеева:

$$V_{eff}(n) = \frac{1}{2} \left[g - 4\pi d^2 - \frac{mu^2}{n} \right] (n - n_0)^2. \quad (4.5.8)$$

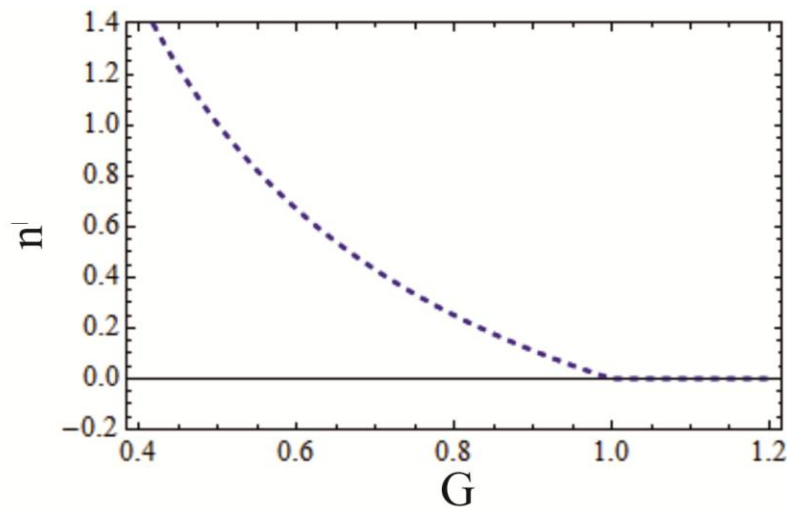


Рис. 4.5.2. Показано безразмерное значение амплитуды солитона для концентрации n'/n_0 в зависимости от эффективной константы взаимодействия. Эта зависимость задается аналитически уравнением (4.5.9). Здесь уменьшение амплитуды n' соответствует уменьшению площади отрицательного потенциала на Рис. 4.5.1. Уменьшение G дает монотонный рост амплитуды n' . Следовательно, область применимости полученного решения может быть нарушена. Поэтому на этом рисунке показаны ограничения на эффективную константу взаимодействия G .

Для существования солитона эффективный потенциал $V_{eff}(n)$ должен иметь локальный максимум в точке $n=0$. Кроме того, уравнение $V_{eff}(n)$ должно иметь хотя бы одно действительное решение $n' \neq 0$. Это значение концентрации n' определяет амплитуду солитона n' как функцию скорости u .

Уравнение $V_{eff}(n) = 0$ может быть решено аналитически для $n \neq n_0$:

$$n' = \frac{mu^2}{g - 4\pi d^2}. \quad (4.5.9)$$

Уравнение (4.5.7) позволяет ввести эффективную безразмерную константу взаимодействия

$$G \equiv \frac{n_0}{mu^2} (g - 4\pi d^2). \quad (4.5.10)$$

Рассмотрим предел малого диполь-дипольного взаимодействия по сравнению с средним полем короткодействующего взаимодействия, представленным константой взаимодействия Гросса-Питаевского g . Следовательно, имеем $G \approx 2g / mu^2$. Имеем солитонное решение для положительной константы взаимодействия $G \sim g > 0$, что соответствует отталкивающему короткодействующему взаимодействию.

Рассмотрим уравнение (4.5.7) более подробно и обоснуем, что солитонное решение появляется при $G > 0$. Первое слагаемое в уравнении (4.5.7) положительно. Следовательно, уравнение (4.5.7) имеет решения при отрицательном эффективном потенциале (4.5.8) $V_{eff}(n) < 0$: $V_{eff}(n \neq n_0) = 0$. Далее находим, что $V_{eff}(n) < 0$ в точке $n > n_0$. Более того, существует точка, где $V_{eff}(n \neq n_0) = 0$. Он создает «ограниченную область движения» эффективной квазичастицы в потенциале $V_{eff}(n)$ при отрицательной эффективной энергии. Концентрация n всегда положительна $n > 0$. Следовательно, мы можем получить $V_{eff}(n \neq n_0) = 0$ для положительного G . Это видно из структуры эффективного потенциала $V_{eff}(n)$ (4.5.8), где последнее слагаемое отрицательно. Следовательно, суперпозиция остальных членов G должна быть положительной.

Солитоны существуют благодаря балансу между нелинейностями, обусловленными короткодействующим взаимодействием в первом порядке по радиусу взаимодействия и диполь-дипольным взаимодействием, а дисперсия индуцированной дипольной частью квантовых флуктуаций. Диполь-дипольное взаимодействие вносит дополнительный отрицательный вклад в константу короткодействующего взаимодействия.

Солитон существует из-за существования первого слагаемого в уравнении (4.5.7) (слагаемое, пропорциональное второй производной концентрации). Это слагаемое обусловлено дипольной частью квантовых флуктуаций.

Потенциал Сагдеева (4.5.8) показан на Рис. 4.5.1 для положительной эффективной константы взаимодействия. Этот режим выбран потому, что он показывает существование солитонного решения. Рисунки 4.5.1 и 4.5.2 показывают, что амплитуда солитона (значение n' , где $V_{eff}(n')=0$) уменьшается с увеличением эффективной константы взаимодействия G . Увеличение скорости солитона u уменьшает постоянную G и, следовательно, уменьшает амплитуду.

Традиционные светлые и темные солитоны в БЭК нейтральных атомов вызваны нелинейностью, создаваемой короткодействующим взаимодействием в приближении Гросса-Питаевского. Существуют различные обобщения модели Гросса-Питаевского, включающие эффекты, выходящие за рамки приближения среднего поля. Здесь представлен пример модели БЭК за пределами среднего поля, где квантовые флуктуации включены через расширенную гидродинамическую модель, которая включает в себя уравнение непрерывности для скалярного поля концентрации, уравнение Эйлера для векторного поля скорости, уравнение эволюции давления для тензора давления второго ранга, а также уравнение эволюции для тензора третьего ранга.

Дипольная часть квантовых флуктуаций представлена слагаемым, пропорциональным третьей производной электростатического потенциала. Для одномерных возмущений потенциал пропорционален отклонению концентрации от равновесного значения. Следовательно, высокие производные концентрации появляются в слагаемом, представляющем дипольную часть квантовых флуктуаций.

Выводы.

Расширенная квантовая гидродинамическая модель была применена для изучения вклада квантовых флуктуаций в свойства солитонов в дипольных БЭК. Расширенная квантовая гидродинамическая модель включает уравнения эволюции давления и потока давления. Поток давления является тензором третьего ранга, но нам нужен один элемент этого тензора для изучения плоских волн и плоских солитонов в однородной среде. Необходимость применения расширенной

квантовой гидродинамики заключается в том, что квантовые флуктуации появляются в уравнении для эволюции тензора третьего ранга.

Было обнаружено, что дипольная часть квантовых флуктуаций приводит к формированию нового солитонного решения. Это решение не имеет предела в режиме среднего поля, где используются уравнения непрерывности и Эйлера без вклада тензоров более высокого ранга. Решение выглядит как яркий солитон, так как является областью повышенной концентрации. Однако он существует при отталкивающем короткодействующем взаимодействии. Дипольная часть квантовых флуктуаций создает аномальную дисперсию, так как он дает отрицательный вклад в дисперсию волн в коротковолновом пределе. Это приводит к сжатию волнового пакета. Это сжатие уравнивается нелинейностью отталкивания, вызванной короткодействующим взаимодействием (часть среднего поля). Солитонное решение большой амплитуды получено из уравнений гидродинамики методом потенциала Сагдеева.

4.6 Заключение к главе 4

Исследованы коллективные возбуждения в системах нейтральных ультрахолодных фермионов со спином-1/2. Рассмотрено влияние бозонов на динамику фермионов в бозон-фермионных смесях. Солитоны и линейные волны малой амплитуды изучены для указанных физических систем.

Прежде всего, рассмотрены собственные моды объемных волн в системе фермионов. Рассмотрены два режима. Первый это режим полной спиновой поляризации, где фермионы рассматриваются как одна жидкость. Вторым режимом получен для частичной спиновой поляризации, когда фермионы с определенной проекцией спина рассматриваются как отдельная жидкость. Поэтому фермионы рассматриваются как две жидкости. Это является примером фермион-фермионной смеси, где частицы разного сорта имеют одинаковую массу и магнитный момент.

При рассмотрении фермионов с полной спиновой поляризацией, основное внимание уделено вкладу взаимодействия, возникающего в третьем порядке по радиусу взаимодействия, в волновые процессы, в квантовых газах. Учитывалась динамика тензора давления как отдельной функции удовлетворяющей отдельному уравнению системы уравнений квантовой гидродинамики, где учтен вклад короткодействующего взаимодействия с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия. Исследование спектра объемных коллективных возбуждений выполнено в системах фермионов и в системах бозонов (обобщение спектра Боголюбова). Исследовано влияние анизотропии потенциала взаимодействия бозонов на спектр Боголюбова. Рассмотрен вклад дальнедействующего анизотропного диполь-дипольного взаимодействия в динамику квантовых газов. Отмечены сходства и различия вкладов короткодействующего и дальнедействующего взаимодействий в спектр коллективных возмущений.

Частично спин-поляризованные фермионы рассмотрены в первом порядке по радиусу взаимодействия. В этом случае отличное от нуля взаимодействие проявляется для взаимодействия фермионов с различной проекцией спина. Спиновые волны наряду с волнами концентрации появляются в этом режиме. Включая спин-акустические волны, аналогичные спин-электрон-акустическим волнам, которые существуют в электронном газе в режиме раздельной спиновой эволюции.

Показано, что взаимодействие в третьем порядке по радиусу взаимодействия приводит к существованию нового типа солитонов в квантовых газах. А именно, в бозонах возникает яркоподобный солитон при отталкивающем взаимодействии между атомами. Динамика яркоподобного солитона исследована в системе бозонов в режиме изотропного взаимодействия и в режиме анизотропного короткодействующего взаимодействия. Рассмотрены свойства яркоподобного солитона в бозон-фермионной смеси. Показано, что при этом формируется солитон концентрации в фермионной компоненте. Знак возмущения в подсистеме фермионов зависит от знака константы бозон-фермионного взаимодействия: яркий солитон для отталкивания и темный солитон для притяжения.

Представленные исследования показывают, что полученные результаты формируют основу для изучения большого числа волновых эффектов в квантовых газах. Сделаны первые шаги по исследованию эффектов возникающих в третьем порядке по радиусу взаимодействия. Показано существование новых солитонных решений, возможность возникновения неустойчивости вызванной анизотропией короткодействующего взаимодействия. Более детальное исследование влияния взаимодействия и эволюции давления на спиновые волны. Третий порядок по радиусу взаимодействия, так же как уравнение эволюции давления может быть важен при исследовании других нелинейных эффектов, таких как вихревые структуры, скирмионы, турбулентность квантовых жидкостей, дисперсионных ударных волн и т.д.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

1. Разработана методика получения макроскопических систем уравнений для квантовых систем в форме уравнений гидродинамики. Микроскопическая квантовая динамика многочастичных систем описывается уравнением Шредингера в координатном представлении в абстрактном многомерном конфигурационном пространстве. Эта модель использована для построения метода перехода к макроскопическому описанию в терминах набора материальных полей различной тензорной размерности, определенных в трехмерном физическом пространстве. Определения строятся как квантовые средние соответствующих операторов через микроскопическую волновую функцию. Основным определением является простейшая функция гидродинамической модели, а именно плотность числа частиц - концентрация. Остальные функции возникают в процессе вывода уравнений гидродинамики. В итоге, была получена цепочка гидродинамических уравнений в рамках предложенного формализма, представляющая собой систему интегро-дифференциальных уравнений для $2N$ элементов тензоров различной тензорной размерности, где N число частиц системы. Интегральными слагаемыми представлено взаимодействие между частицами среды.

2. Разработана процедура разложения по малому параметру для систем нейтральных частиц на примерах нейтральных Бозе атомов и Ферми атомов. Используемый параметр равен отношению радиуса действия потенциала короткодействующего взаимодействия нейтральных атомов, к характерному размеру макроскопических структур или среднему расстоянию между частицами. Разложение выполнено в слагаемых описывающих взаимодействие между частицами. Разложение выполнено с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия в уравнении баланса импульса, уравнении эволюции давления и, в некоторых случаях, уравнении эволюции потока давления. Рассмотрены случаи изотропного и анизотропного потенциалов взаимодействия между частицами. В каждом порядке по радиусу взаимодействия возникает слагаемое в виде произведения двух сомножителей: один множитель содержит вклад потенциала взаимодействия, другой множитель содержит вклад многочастичных волновых функций представленный через многочастичную гидродинамическую функцию. Получен вклад взаимодействия в виде констант взаимодействия представляющих

собой моменты потенциала взаимодействия между частицами. Получено, что константы взаимодействия являются коэффициентами разложения в возникающий ряд динамических функций.

3. Разработана процедура приближенного вычисления многочастичных гидродинамических функций возникающих в интегральных слагаемых. Для системы вырожденных спин-поляризованных фермионов процедура основана на введении малого параметра равного отношению энергии взаимодействия к энергии Ферми. Эта процедура позволяет получить функциональную зависимость многочастичных гидродинамических функций через одночастичные гидродинамические функции. Для систем заряженных квантовых частиц многочастичные волновые функции представлены в мультипликативном виде в приближении самосогласованного поля. Диполь-дипольное взаимодействие в системах нейтральных и заряженных частиц рассмотрено как дальнедействующее взаимодействие. При его описании использовано приближение самосогласованного поля. Эти методы позволили получить набор замкнутых систем уравнений для нейтральных спин-поляризованных вырожденных фермионов, ультрахолодных бозон-фермионных смесей, конденсата Бозе-Эйнштейна нейтральных частиц с анизотропным короткодействующим взаимодействием, точечных нейтральных частиц бозонов и фермионов обладающих дипольным моментом, квантовых плазмopodobных сред заряженных частиц со спином.

4. Предложен метод квантовой гидродинамики с отдельной спиновой эволюцией для систем заряженных частично спин-поляризованных вырожденных фермионов существующих в плазмopodobных средах. Метод основан на системе уравнений эволюции парциальных концентраций и плотностей импульса частиц с определенной проекцией спина с учетом их несохранения, вследствие, переворота спина, и уравнения эволюции плотности спина. Уравнение эволюции импульса содержит поле силы пропорциональное потоку момента силы изменяющее проекцию спина частицы и дающее механизм несохранения парциального импульса. Предложен вывод представленных уравнений.

5. Предложен метод квантовой кинетики для описания коллективных процессов в плазмopodobных средах, где эволюция спина описывается векторной функцией распределения. Показано, что векторная функция распределения входит в

уравнение Власова через слагаемое описывающее действие самосогласованного магнитного поля на магнитный момент частиц. Получено уравнение эволюции векторной функции распределения, которое вместе с уравнением Власова, дает замкнутую систему кинетических уравнений и уравнений поля для систем заряженных частиц со спином. Рассмотрено два варианта квантовой кинетики. Первая основана на рассмотрении каждого сорта частиц как единой системы описываемой функцией распределения. Второй вариант это квантовая кинетика с отдельной спиновой эволюцией, где каждый сорт заряженных спин-1/2 фермионов рассмотрен как две подсистемы, каждая из которых описывается своей скалярной функцией распределения, но одна векторная функция распределения описывает динамику спина всех частиц этого сорта.

6. Обнаружено, что коллективная динамика в системах частично спин-поляризованных заряженных вырожденных фермионов приводит к существованию спин-электрон-акустических волн. Этот результат получен в рамках предложенных методов квантовой гидродинамики с отдельной спиновой эволюцией и квантовой кинетики с отдельной спиновой эволюцией. Это волны концентрации частиц одного сорта с различной проекцией спина. Таким образом, это волны материи, сопровождающиеся динамикой спина в которых происходит относительная динамика частиц одного сорта обладающих различными проекциями спина. Получены спектры для реальной части спектра объемных и поверхностных спин-электрон-акустических волн, которые являются линейными в длинноволновом пределе. Вычислено бесстолкновительное затухание объемных спин-электрон-акустических волн, которое мало в сравнении с действительной частью частоты. Этот результат получен в рамках предложенного метода квантовой кинетики с отдельной спиновой эволюцией. Изучены особенности спектра спин-электрон акустических волн в электрон-позитрон-ионной плазме. Показано существование спин-электрон-акустических солитонов в электрон-ионной и электрон-позитрон-ионной плазме.

7. Показано возникновение тонкой структуры циклотронных волн в вырожденной намагниченной электрон-ионной плазмоподобной среде. Результат получен методом квантовой кинетики с отдельной спиновой эволюцией для системы заряженных спин-поляризованных частиц, где эволюция спинов

электронов в вырожденном электронном газе рассмотрена при учете аномального магнитного момента электрона. Получено, что тонкая структура циклотронных волн состоит из трех ветвей для циклотронной волны каждого порядка. Показано, что возникает одиночная ветвь циклотронной волны нулевого порядка, обусловленная динамикой спина. Эта волна имеет частоту порядка одной тысячной от электронной циклотронной частоты, т.е. обусловлена отклонением аномального магнитного момента электрона от магнетона Бора. Величина расщепления тонкой структуры циклотронных волн имеет тот же порядок и проявляет немонотонную зависимость от волнового вектора в указанном диапазоне частот.

8. Продемонстрировано существование солитонов в квантовых газах возникающих исключительно при учете короткодействия с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия. Это взаимодействие имеет вид нелокального бозон-бозонного и бозон-фермионного взаимодействия в бозон-фермионных смесях нейтральных частиц находящихся при близкой к нулю температуре. При этом получено, что фермион-фермионное взаимодействие в уравнении Эйлера является локальным тензорным взаимодействием, а в уравнении эволюции давления возникают как локальные, так и нелокальные слагаемые. Обнаружено, что нелокальные взаимодействия создают условия для уменьшения скорости звука акустических волн. Показано, что компенсация этой дисперсии нелинейностью обусловленной отталкивающим взаимодействием приводит к условию формирования яркого солитона как области с повышенной концентрацией в бозонной подсистеме находящейся в состоянии конденсата Бозе-Эйнштейна.

ЛИТЕРАТУРА

Список публикаций автора по теме диссертации

Научные статьи, опубликованные в рецензируемых журналах, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus, RSCI, а также в Перечне изданий МГУ.

1. Andreev P. A., Two-fluid hydrodynamics of cold atomic bosons under the influence of quantum fluctuations at non-zero temperatures // *Phys. Scripta.* – 2022. – V. 97. – p. 035206.
2. Andreev P. A., Quantum hydrodynamic theory of quantum fluctuations in dipolar Bose-Einstein condensate // *Chaos.* – 2021. – V. 31. – p. 023120.
3. Andreev P. A., Hydrodynamics of the atomic Bose-Einstein condensate beyond the mean-field // *Laser Physics Letters.* – 2021. – V. 18. – p. 055501.
4. Andreev P. A., Novel soliton in dipolar BEC caused by the quantum fluctuations // *Eur. Phys. J. D.* – 2021. – V. 75. – p. 60.
5. Andreev P. A., K. V. Antipin, M. Iv. Trukhanova, Bosonic bright soliton in the mixture of repulsive Bose-Einstein condensate and polarized ultracold fermions under influence of the pressure evolution // *Laser Physics.* – 2021. – V. 31. – p. 015501.
6. Andreev P. A., Extended hydrodynamics of the degenerate partially spin polarized fermions with the short-range interaction up to the third order by the interaction radius approximation // *Laser Physics.* – 2021. – V. 31. – p. 045501.
7. Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., On the equation of state for the “thermal” part of the spin current: The Pauli principle contribution in the spin wave spectrum in a cold fermion system // *Prog. Theor. Exp. Phys.* – 2019. – V. 2019. – p. 053J01.
8. Andreev P. A., Hydrodynamic model of a Bose-Einstein condensate with anisotropic short-range interaction and the bright solitons in a repulsive Bose-Einstein condensate // *Laser Phys.* – 2019. – V. 29. – p. 035502.
9. Andreev P. A., Trukhanova M. I., Separated spin evolution quantum hydrodynamics of degenerated electrons with spin-orbit interaction and extraordinary wave spectrum // *J. Plasma Phys.* – 2018. – V. 84. – p. 905840504.

10. Andreev P. A., Spin current contribution in the spectrum of collective excitations of degenerate partially polarized spin-1/2 fermions at separate dynamics of spin-up and spin-down fermions // *Laser Phys. Lett.* – 2018. – V. 15. – p. 105501.
11. Andreev P. A., Extraordinary SEAWs under influence of the spin-spin interaction and the quantum Bohm potential // *Phys. Plasmas.* – 2018. – V. 25. – p. 062114.
12. Andreev P. A., Radiative corrections to the Coulomb law and model of dense quantum plasmas: Dispersion of waves in magnetized quantum plasmas // *Phys. Plasmas.* – 2018. – V. 25. – p. 042103.
13. Andreev P. A., Kinetic description of the oblique propagating spin-electron acoustic waves in degenerate plasmas // *Phys. Plasmas.* – 2018. – V. 25. – p. 032116.
14. Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., Dielectric permeability tensor and linear waves in spin-1/2 quantum kinetics with non-trivial equilibrium spin-distribution functions // *Phys. Plasmas.* – 2017. – V. 24. – p. 112108.
15. Andreev P. A., Extraordinary spin-electron acoustic wave // *Phys. Plasmas.* – 2017. – V. 24. – p. 022123.
16. Andreev P. A., Kinetic analysis of spin current contribution to spectrum of electromagnetic waves in spin-1/2 plasma, Part I: Dielectric permeability tensor for magnetized plasmas // *Phys. Plasmas.* – 2017. – V. 24. – p. 022114.
17. Andreev P. A., Kinetic analysis of spin current contribution to spectrum of electromagnetic waves in spin-1/2 plasma, Part II: Dispersion dependencies // *Phys. Plasmas.* – 2017. – V. 24. – p. 022115.
18. Iqbal Z., Andreev P. A., Nonlinear separate spin evolution in degenerate electron-positron-ion plasmas // *Phys. Plasmas.* – 2016. – V. 23. – p. 062320.
19. Andreev P. A., Spin-electron acoustic waves: The Landau damping and ion contribution in the spectrum // *Phys. Plasmas.* – 2016. – V. 23. – p. 062103.
20. Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., Surface spin-electron acoustic waves in magnetically ordered metals // *Appl. Phys. Lett.* – 2016. – V. 108. – p. 191605.
21. Andreev P. A., Iqbal Z., Rich eight-branch spectrum of the oblique propagating longitudinal waves in partially spin-polarized electron-positron-ion plasmas // *Phys. Rev. E.* – 2016. – V. 93. – p. 033209.

22. Andreev P. A., Spin-electron acoustic soliton and exchange interaction in separate spin evolution quantum plasmas // *Phys. Plasmas*. – 2016. – V. 23. – p. 012106.
23. Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., Separated spin-up and spin-down evolution of degenerated electrons in two dimensional systems: Dispersion of longitudinal collective excitations in plane and nanotube geometry // *Eur. Phys. Lett.* – 2016. – V. 113. – p. 17001.
24. Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., Oblique propagation of longitudinal waves in magnetized spin-1/2 plasmas: Independent evolution of spin-up and spin-down electrons // *Annals of Physics*. – 2015. – V. 361. – p. 278.
25. Andreev P. A., Hydrodynamic and kinetic models for spin-1/2 electron-positron quantum plasmas: Annihilation interaction, helicity conservation, and wave dispersion in magnetized plasmas // *Phys. Plasmas*. – 2015. – V. 22. – p. 062113.
26. Ivanov A. Yu., Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., Langmuir wave dispersion in semi-relativistic spinless quantum plasma // *Prog. Theor. Exp. Phys.* – 2015. – V. 2015. – p. 063I02.
27. Andreev P. A., Separated spin-up and spin-down quantum hydrodynamics of degenerated electrons: Spin-electron acoustic wave appearance // *Phys. Rev. E*. – 2015. – V. 91. – p. 033111.
28. Andreev P. A., Quantum kinetics of spinning neutral particles: General theory and Spin wave dispersion // *Physica A*. – 2015. – V. 432. – p. 108.
29. Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., Ion acoustic and dust acoustic waves at finite size of plasma particles // *Phys. Plasmas*. – 2015. – V. 22. – p. 032104.
30. Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., Waves of spin-current in magnetized dielectrics, *Int. J. of Mod. Phys. B*. – 2015. – V. 29. – p. 1550077.
31. Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., Dispersion properties of transverse waves in the electrically polarized BEC // *J. Phys. B: Atomic, Molecular and Optical Physics*. – 2014. – V. 47. – p. 225301.
32. Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., Exact analytical soliton solutions in dipolar Bose-Einstein condensates // *Eur. Phys. J. D*. – 2014. – V. 68. – p. 270.
33. Ivanov A. Yu., Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., Balance equations in semi-relativistic quantum hydrodynamics // *Int. J. of Mod. Phys. B*. – 2014. – V. 28. – p.1450132.

34. Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., Self-consistent field theory of polarised Bose-Einstein condensates: dispersion of collective excitations // *Eur. Phys. J. D.* – 2013. – V. 67. – p. 216.
35. Zezyulin K. V., Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., Soliton appearing in boson-fermion mixture at the third order of the interaction radius // *Eur. Phys. J. D.* – 2013. – V. 67. – p. 140.
36. Andreev P. A., Non-integral form of the Gross-Pitaevskii equation for polarized molecules // *Mod. Phys. Lett. B.* – 2013. – V. 27. – p. 1350096.
37. Andreev P. A., First principles derivation of NLS equation for BEC with cubic and quintic nonlinearities at non zero temperature. Dispersion of linear waves // *Int. J. of Mod. Phys. B.* – 2013. – V. 27. – p. 1350017.
38. Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., Bright-like soliton solution in quasi-one-dimensional BEC in third order by interaction radius // *Mod. Phys. Lett. B.* – 2012. – V. 26. – p. 1250152.
39. Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., Trukhanova M. I., Quantum hydrodynamics approach to the formation of waves in polarized two-dimension systems of charged and neutral particles // *Phys. Rev. B.* – 2011. – V. 84. – p. 245401.
40. Andreev P. A., Trukhanova M. I., On the bright soliton in the Bose–Einstein condensate (to the third order in the interaction radius) // *Russ. Phys. J.* – 2010. – V. 53. – N. 11. – p. 1196. [Андреев П. А., Труханова М. И., Об ярком солитоне в конденсате Бозе-Эйнштейна // *Изв. вузов. Физика.* – 2010. – №. 11. – с. 78.]
41. Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., Problem with the single-particle description and the spectra of intrinsic modes of degenerate boson-fermion systems // *Phys. Rev. A.* – 2008. – V. 78. – p. 053624.

Использованная литература

42. Ахиезер А.И., Ахиезер И.А., Половин Р.В., Ситенко А.Г., Степанов К.Н. Электродинамика плазмы. – М: Наука. 1974. – С. 720.
43. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. – М.: Наука. 1979. – С. 528.

44. Силин В.П. Введение в кинетическую теорию газов. – М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”. 2013. – С. 344.
45. Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. – М.: Наука. 1982. – С. 608.
46. Климонтович Ю.Л. Турбулентное движение и структура хаоса: Новый подход к статистической теории открытых систем. – М.: ЛЕНАРД. 2014. – С. 328.
47. Drofa M. A., Kuzmenkov L. S., Continual approach to multiparticle systems with long-range interaction. Hierarchy of macroscopic fields and physical consequences // *Theor. Math. Phys.* – 1996. – V. 108. – p. 849.
48. Кузьменков Л.С. Теоретическая физика: Классическая механика. – М.: Наука. 2015. – С. 364.
49. Shukla P. K., Eliasson B., Nonlinear collective interactions in quantum plasmas with degenerate electron fluids // *Rev. Mod. Phys.* – 2011. – V. 83. – p. 885.
50. Бобылёв Ю.В., Кузелев М.В., Панин В.А. Электродинамика квантовой плазмы. – Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого. 2017. – С. 301.
51. Ахиезер А.И., Пелетминский С.В. Методы статистической физики. – М.: Наука. 1977. – С. 368.
52. Madelung E., Quantentheorie in Hydrodynamischer Form // *Z. Phys.* – 1926. – V. 40. – p. 332.
53. Rand S., Quantum Effects on the Conductivity of a Dense Plasma // *Phys. Fluids.* – 1964. – V. 7. – p. 64.
54. Takabayasi T., The Vector Representation of Spinning Particle in the Quantum Theory, I // *Progr. Theor. Phys.* – 1955. – V. 14. – p. 283.
55. Takabayasi T., Relativistic Hydrodynamics of Dirac matter. Part I. // *Soryusiron-Kenkyu.* – 1955. – V. 8. – p. 429.
56. Takabayasi T., Relativistic Hydrodynamics Equivalent to the Dirac Equation // *Prog. Theor. Phys.* – 1955. – V. 13. – p. 222.
57. Takabayasi T., Vortex, Spin and Triad for Quantum Mechanics of Spinning Particle. I --- General Theory // *Prog. Theor. Phys.* – 1983. – V. 70. – p. 1.
58. Takabayasi T., Hydrodynamical description of the Dirac equation // *Nuovo Cimento.* – 1956. – V. 3. – p. 233.

59. Takabayasi T., Variational Principle in the Hydrodynamical Formulation of the Dirac Field // *Phys. Rev.* – 1956. – V. 102. – p. 297.
60. Takabayasi T., Relativistic Hydrodynamics of the Dirac Matter – Part I. General Theory // *Progr. Theor. Phys. Supplement.* – 1957. – No. 4. – p. 2.
61. Kuz'menkov L. S., Maksimov S. G., Fedoseev V. V., Microscopic quantum hydrodynamics of systems of fermions: part I // *Theor. Math. Phys.* – 2001. – V. 126. – p. 110.
62. Kuz'menkov L. S., Maksimov S. G., Quantum hydrodynamics of particle systems with Coulomb interaction and quantum Bohm potential // *Theor. Math. Phys.* – 1999. – V. 118. – p. 227.
63. Koide T., Spin-electromagnetic hydrodynamics and magnetization induced by spin-magnetic interaction // *Phys. Rev. C.* – 2013. – V. 87. – p. 034902.
64. Marklund M., Brodin G., Dynamics of Spin-1/2 Quantum Plasmas // *Phys. Rev. Lett.* – 2007. – V. 98. – p. 025001.
65. Brodin G., Marklund M., Spin magnetohydrodynamics // *New J. Phys.* – 2007. – V. 9. – p. 277.
66. Kuz'menkov L. S., Maksimov S. G., Fedoseev V. V., Microscopic quantum hydrodynamics of systems of fermions: part II // *Theor. Math. Phys.* – 2001. – V. 126. – p. 212.
67. Brodin G., Marklund M., Zamanian J., Ericsson B., Mana P. L., Effects of the g Factor in Semiclassical Kinetic Plasma Theory // *Phys. Rev. Lett.* – 2008. – V. 101. – p. 245002.
68. Lundin J., Brodin G., Linearized kinetic theory of spin-1/2 particles in magnetized plasmas // *Phys. Rev. E.* – 2010. – V. 82. – p. 056407.
69. Каган Ю., Максимов Л., Явления переноса в парамагнитном газе // *ЖЭТФ* – 1961. – Т. 41. – с. 842.
70. Oraevsky V. N., Semikoz V. B., Neutrino kinetics in a magnetized dense plasma // *Astroparticle Physics.* – 2002. – V. 18. – p. 261.
71. Oraevsky V. N., Semikoz V. B., Neutrino-driven streaming instability of spin waves in dense magnetized plasma // *Phys. At. Nucl.* – 2003. – V. 66. – p. 466.

72. Hurst J., Morandi O., Manfredi G., Hervieux P.-A., Semiclassical Vlasov and fluid models for an electron gas with spin effects // *Eur. Phys. J. D.* – 2014. – V. 68. – p. 176.
73. Torrey H. C., Bloch Equations with Diffusion Terms // *Phys. Rev.* – 1956. – V. 104. – p. 563.
74. Dyson F. J., Electron Spin Resonance Absorption in Metals. II. Theory of Electron Diffusion and the Skin Effect // *Phys. Rev.* – 1955. – V. 98. – p. 349.
75. Силин В. П., Кинетика парамагнитных явлений // *ЖЭТФ* – 1956. – Т. 30. – с. 421.
76. Азбель М. Я., Герасименко В. И., Лифшиц И. М., Парамагнитный резонанс и поляризация ядер в металлах // *ЖЭТФ* – 1957. – Т. 32. – с. 1212.
77. Вагин Д.В., Ким Н.Е., Поляков П.А., Русаков А.Е., Особенности распространения электромагнитных волн в горячей магнитоактивной плазме с учетом спина электронов // *Известия Российской академии наук. Серия физическая.* – 2006. – Т. 70. – № 3. – с. 443.
78. Brodin G., Marklund M., Manfredi G., Quantum Plasma Effects in the Classical Regime // *Phys. Rev. Lett.* – 2008. – V. 100. – p. 175001.
79. Misra A. P., Brodin G., Marklund M., Shukla P. K., Circularly polarized modes in magnetized spin plasmas // *J. Plasma Physics.* – 2010. – V. 76. – p. 857.
80. Shahid M., Murtaza G., Spin effect on parametric decay of oblique Langmuir wave in degenerate magnetoplasmas // *Phys. Plasmas.* – 2013. – V. 20. – p. 082124.
81. Mushtaq A., Vladimirov S. V., Arbitrary magnetosonic solitary waves in spin 1/2 degenerate quantum plasma // *Eur. Phys. J. D.* – 2011. – V. 64. – p. 419.
82. Trukhanova M. I., Quantum hydrodynamics approach to the research of quantum effects and vorticity evolution in spin quantum plasmas // *Progr. Theor. Exp. Phys.* – 2013. – V. 2013. – p. 111I01.
83. Asenjo F. A., The quantum effects of the spin and the Bohm potential in the oblique propagation of magnetosonic waves // *Phys. Lett. A.* – 2012. – V. 376. – p. 2496.

84. Александров А.Ф., Рухадзе А.А. Лекции по электродинамике плазмоподобных сред. – М: Издательство Московского университета. Физический факультет МГУ. 1999. – С. 336.
85. Силин В.П., Рухадзе А.А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. – М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”. 2013. – С. 248.
86. Trukhanova M. I., Spin current evolution in the separated spin-up and spin-down quantum hydrodynamics // *Phys. Lett. A.* – 2015. – V. 379. – p. 2777.
87. Маргулис А. Д., Маргулис Вл. А., Плазменные колебания и нулевой звук в вырожденной спин-поляризованной электронной системе // *ЖЭТФ.* – 1987. – Т. 93. – с. 1800.
88. Li S.-C., Han J.-N., Magnetosonic waves interactions in a spin-1/2 degenerate quantum plasma // *Phys. Plasmas.* – 2014. – V. 21. – p. 032105.
89. Li C., Wu Z., Ren H., Yang W., Chu P. K., Group velocity of extraordinary waves in superdense magnetized quantum plasma with spin-1/2 effects // *Phys. Plasmas.* – 2012. – V. 19. – p. 122114.
90. Marklund M., Eliasson B., Shukla P. K., Magnetosonic solitons in a fermionic quantum plasma // *Phys. Rev. E.* – 2007. – V. 76. – p. 067401.
91. Misra A. P., Brodin G., Marklund M., Shukla P. K., Localized whistlers in magnetized spin quantum plasmas // *Phys. Rev. E.* – 2010. – V. 82. – p. 056406.
92. Sahu B., Sinha A., Roychoudhury R., Khan M., Arbitrary amplitude magnetosonic solitary and shock structures in spin quantum plasma // *Phys. Plasmas.* – 2013. – V. 20. – p. 112303.
93. Sahu B., Choudhury S., Sinha A., Small and arbitrary shock structures in spin 1/2 magnetohydrodynamic quantum plasma // *Phys. Plasmas.* – 2015. – V. 22. – p. 022304.
94. Han J.-N., Luo J.-H., Li S.-C., Liu S.-W., Yang Y., Duan W.-S., Han J.-F., Li J.-X., Composite nonlinear structure within the magnetosonic soliton interactions in a spin-1/2 degenerate quantum plasma // *Phys. Plasmas.* – 2015. – V. 22. – p. 062101.
95. Misra A. P., Ghosh N. K., Spin magnetosonic shock-like waves in quantum plasmas // *Phys. Lett. A.* – 2008. – V. 372. – p. 6412.

96. Keane A. J., Mushtaq A., Wheatland M. S., Alfvén solitons in a Fermionic quantum plasma // *Phys. Rev. E.* – 2011. – V. 83. – p. 066407.
97. Modestov M., Bychkov V., Marklund M., The Rayleigh–Taylor instability in quantum magnetized plasma with para- and ferromagnetic properties // *Phys. Plasmas.* – 2009. – V. 16. – p. 032106.
98. Misra A. P., Shukla P. K., Modulational instability of magnetosonic waves in a spin 1/2 quantum plasma // *Phys. Plasmas.* – 2008. – V. 15. – p. 052105.
99. Shukla P. K., Eliasson B., Nonlinear aspects of quantum plasma physics // *Phys. Usp.* – 2010. – V. 53. – p. 51.
100. Mahajan S. M., Asenjo F. A., Vortical Dynamics of Spinning Quantum Plasmas: Helicity Conservation // *Phys. Rev. Lett.* – 2011. – V. 107. – p. 195003.
101. Mahajan S. M., Asenjo F. A., Neutron spin quantum plasmas – Ferromagnetism as a relaxed state // *Phys. Lett. A.* – 2013. – V. 377. – p. 1430.
102. Mahajan S. M., Lingam M., Multi-fluid systems – Multi-Beltrami relaxed states and their implications // *Phys. Plasmas.* – 2015. – V. 22. – p. 092123.
103. Braun S., Asenjo F. A., Mahajan S. M., Spin-Gradient-Driven Light Amplification in a Quantum Plasma // *Phys. Rev. Lett.* – 2012. – V. 109. – p. 175003.
104. Haas F., Manfredi G., Feix M., Multistream model for quantum plasmas // *Phys. Rev. E.* – 2000. – V. 62. – p. 2763.
105. Manfredi G., Haas F., Self-consistent fluid model for a quantum electron gas // *Phys. Rev. B.* – 2001. – V. 64. – p. 075316.
106. Brodin G., Misra A. P., Marklund M., Spin Contribution to the Ponderomotive Force in a Plasma // *Phys. Rev. Lett.* – 2010. – V. 105. – p. 105004.
107. Stefan M., Zamanian J., Brodin G., Misra A. P., Marklund M., Ponderomotive force due to the intrinsic spin in extended fluid and kinetic models // *Phys. Rev. E.* – 2011. – V. 83. – p. 036410.
108. Кузьменков Л.С., Харабадзе Д.Э., Волны в системах частиц с собственным магнитным моментом (метод квантовой гидродинамики) // *Известия вузов. Физика.* – 2004. – № 4. – с. 92.
109. Zamanian J., Stefan M., Marklund M., Brodin G., From extended phase space dynamics to fluid theory // *Phys. Plasmas.* – 2010. – V. 17. – p. 102109.

110. Ryan J. C., Collective excitations in a spin-polarized quasi-two-dimensional electron gas // *Phys. Rev. B.* – 1991. – V. 43. – p. 4499.
111. Agarwal A., Polini M., Fazio R., Vignale G., Persistent Spin Oscillations in a Spin-Orbit-Coupled Superconductor // *Phys. Rev. Lett.* – 2011. – V. 107. – p. 077004.
112. Agarwal A., Polini M., Vignale G., Flatte M. E., Long-lived spin plasmons in a spin-polarized two-dimensional electron gas // *Phys. Rev. B.* – 2014. – V. 90. – p. 155409.
113. Perez F., Spin-polarized two-dimensional electron gas embedded in a semimagnetic quantum well: Ground state, spin responses, spin excitations, and Raman spectrum // *Phys. Rev. B.* – 2009. – V. 79. – p. 045306.
114. Hillery M., O'Connell R. F., Scully M. O., Wigner E. P., Distribution functions in physics: Fundamentals // *Phys. Rep.* – 1984. – V. 106. – p. 121.
115. Ekman R., Zamanian J., Brodin G., Exchange corrections in a low-temperature plasma // *Phys. Rev. E.* – 2015. – V. 92. – p. 013104.
116. Zamanian J., Marklund M., Brodin G., Exchange effects in plasmas: The case of low-frequency dynamics // *Phys. Rev. E.* – 2013. – V. 88. – p. 063105.
117. Zutic I., Fabian J., Das Sarma S., Spintronics: Fundamentals and applications // *Rev. Mod. Phys.* – 2004 – V. 76. – p. 323.
118. Sun Q. F., Xie X. C., Definition of the spin current: The angular spin current and its physical consequences // *Phys. Rev. B.* – 2005. – V. 72. – p. 245305.
119. Sun Q. F., Xie X. C., Wang J., Persistent spin current in nanodevices and definition of the spin current // *Phys. Rev. B.* – 2008. – V. 77. – p. 035327.
120. Jin P., Li Y., Zhang F., $SU(2) \times U(1)$ unified theory for charge, orbit and spin currents // *J. Phys. A.* – 2006. – V. 39. – p. 7115.
121. Shi J., Zhang P., Xiao D., Niu Q., Proper definition of spin current in Spin-Orbit coupled systems // *Phys. Rev. Lett.* – 2006. – V. 96. – p. 076604.
122. An Z., Liu F. Q., Lin Y., Liu C., The universal definition of spin current // *Sci. Rep.* – 2012. – V. 2. – p. 388.
123. Zank G. P., Greaves R. G., Linear and nonlinear modes in nonrelativistic electron-positron plasmas // *Phys. Rev. E.* – 1995. – V. 51. – p. 6079.

124. Iwamoto N., Collective modes in nonrelativistic electron-positron plasmas // Phys. Rev. E. – 1993. – V. 47. – p. 604.
125. Asenjo F. A., Zamanian J., Marklund M., Brodin G., Johansson P., Semi-relativistic effects in spin-1/2 quantum plasmas // New J. Phys. – 2012. – V. 14. – p. 073042.
126. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. – М.: Наука. 1989. – С. 728.
127. Ruyer C., Gremillet L., Benisti D., Bonnaud G., Electromagnetic fluctuations and normal modes of a drifting relativistic plasma // Phys. Plasmas. – 2013. – V. 20. – p. 112104.
128. Haas F., Eliasson B., Shukla P. K., Relativistic Klein-Gordon-Maxwell multistream model for quantum plasmas // Phys. Rev. E. – 2012. – V. 85. – p. 056411.
129. Asenjo F. A., Munoz V., Valdivia J. A., Mahajan S. M., A hydrodynamical model for relativistic spin quantum plasmas // Phys. Plasmas. – 2011. – V. 18. – p. 012107.
130. Shah H. A., Masood W., Qureshi M. N. S., Tsintsadze N. L., Effects of trapping and finite temperature in a relativistic degenerate plasma // Phys. Plasmas. – 2011. – V. 18. – p. 102306.
131. Akbari-Moghanjoughi M., Crystallization and collapse in relativistically degenerate matter // Phys. Plasmas. – 2013. – V. 20. – p. 042706.
132. Uzdensky D. A., Rightley S., Plasma Physics of Extreme Astrophysical Environments // Rep. Progr. Phys. – 2014. – V. 77. – p. 036902.
133. Harding A. K., Lai D., Physics of strongly magnetized neutron stars // Rep. Progr. Phys. – 2006. – V. 69. – p. 2631.
134. Baring M. G., Harding A. K., Photon Splitting and Pair Creation in Highly Magnetized Pulsars // The Astrophysical J. – 2001. – V. 547. – p. 929.
135. Han W. B., Ruffini R., Xue S. S., Electron and positron pair production of compact stars // Phys. Rev. D. – 2012. – V. 86. – p. 084004.
136. Lai D., Matter in strong magnetic fields // Rev. Mod. Phys. – 2001. – V. 73. – p. 629.

137. Pedersen T. S., Danielson J. R., Hugenschmidt C., Marx G., Sarasola X., Schauer F., Schweikhard L., Surko C. M., Winkler E., Plans for the creation and studies of electron–positron plasmas in a stellarator // *New J. Phys.* – 2012. – V. 14. – p. 035010.
138. Wang Y., Shukla P. K., Eliasson B., Instability and dynamics of two nonlinearly coupled intense laser beams in a quantum plasma // *Phys. Plasmas.* – 2013. – V. 20. – p. 013103.
139. Sarri G., Poder K., Cole J. M., Schumaker W., Di Piazza A., Reville B., Dzelzainis T., Doria D., Gizzi L. A., Grittani G., Kar S., Keitel C. H., Krushelnick K., Kuschel S., Mangles S. P. D., Najmudin Z., Shukla N., Silva L. O., Symes D., Thomas A. G. R., Vargas M., Vieira J., Zepf M., Generation of neutral and high-density electron–positron pair plasmas in the laboratory // *Nature Communications.* – 2015. – V. 6. – p. 6747.
140. Comisso L., Asenjo F. A., Thermal-inertial effects on magnetic reconnection in relativistic pair plasmas // *Phys. Rev. Lett.* – 2014. – V. 113. – p. 045001.
141. Lopez R. A., Asenjo F. A., Munoz V., Chian A. C.-L., Valdivia J. A., Self-modulation of nonlinear Alfvén waves in a strongly magnetized relativistic electron-positron plasma // *Phys. Rev. E.* – 2013. – V. 88. – p. 023105.
142. Mahajan S. M., Temperature-Transformed "Minimal Coupling": Magnetofluid Unification // *Phys. Rev. Lett.* – 2003. – V. 90. – p. 035001.
143. Bains A. S., Misra A. P., Saini N. S., Gill T. S., Modulational instability of ion-acoustic wave envelopes in magnetized quantum electron-positron-ion plasmas // *Phys. Plasmas.* – 2010. – V. 17. – p. 012103.
144. Khan S. A., Ayub M. K., Ahmad A., Low frequency electromagnetic oscillations in dense degenerate electron-positron pair plasma // *Phys. Plasmas.* – 2012. – V. 19. – p. 102104.
145. Saini N. S., Chahal B. S., Bains A. S., Large amplitude dust ion-acoustic solitary waves in a plasma in the presence of positrons // *Astrophys Space Sci.* – 2013. – V. 347. – p. 129.
146. Chawla J. K., Mishra M. K., Tiwari R. S., Modulational instability of ion-acoustic waves in electron-positron-ion plasmas // *Astrophys Space Sci.* – 2013. – V. 347. – p. 283.

147. Tsintsadze N. L., Tsintsadze L. N., Hussain A., Murtaza G., New longitudinal waves in electron-positron-ion quantum plasmas // *Eur. Phys. J. D.* – 2011. – V. 64. – p. 447.
148. Brodin G., Marklund M., Spin solitons in magnetized pair plasmas // *Phys. Plasmas.* – 2007. – V. 14. – p. 112107.
149. Brodin G., Marklund M., Eliasson B., Shukla P. K., Quantum-Electrodynamical Photon Splitting in Magnetized Nonlinear Pair Plasmas // *Phys. Rev. Lett.* – 2007. – V. 98. – p. 125001.
150. Tsintsadze N. L., Chaudhary R., Rasheed A., Positron sound waves and nonlinear Landau damping of intense transverse EM waves in an isotropic EPI plasma // *J. Plasma Physics.* – 2013. – V. 79. – p. 587.
151. Metref H., Tribeche M., Quantum positron acoustic waves // *Phys. Plasmas.* – 2014. – V. 21. – p. 122117.
152. Tribeche M., Aoutou K., Younsi S., Amour R., Nonlinear positron acoustic solitary waves // *Phys. Plasmas.* – 2009. – V. 16. – p. 072103.
153. Mahajan S. M., Asenjo F. A., Relativistic quantum vorticity of the quadratic form of the Dirac equation // *Phys. Scripta.* – 2015. – V. 90. – p. 015001.
154. Zhu J., Ji P., Dispersion relation and Landau damping of waves in high-energy density plasmas // *Plasma Phys. Control. Fusion.* – 2012. – V. 54. – p. 065004.
155. Ekman R., Asenjo F. A., Zamanian J., Fully relativistic kinetic equation for spin-1/2 particles in the long scale-length approximation // *Phys. Rev. E.* – 2017. – V. 96. – p. 023207.
156. Mahajan S. M., Asenjo F. A., Hot Fluids and Nonlinear Quantum Mechanics // *Int. J. Theor. Phys.* – 2014. – V. 54. – p. 1435.
157. Ruiz D. E., Dodin I. Y., First-principle variational formulation of polarization effects in geometrical optics // *Phys. Rev. A.* – 2015. – V. 92. – p. 043805.
158. Ruiz D. E., Ellison C. L., Dodin I. Y., Relativistic ponderomotive Hamiltonian of a Dirac particle in a vacuum laser field // *Phys. Rev. A.* – 2015. – V. 92. – p. 062124.
159. Ruiz D. E., Dodin I. Y., Ponderomotive dynamics of waves in quasiperiodically modulated media // *Phys. Rev. A.* – 2017. – V. 95. – p. 032114.

160. Ruiz D. E., Dodin I. Y., Extending geometrical optics: A Lagrangian theory for vector waves // *Phys. Plasmas*. – 2017. – V. 24. – p. 055704.
161. Ruiz D. E., Dodin I. Y., Lagrangian geometrical optics of nonadiabatic vector waves and spin particles // *Phys. Lett. A*. – 2015. – V. 379. – p. 2337.
162. Боголюбов (МЛ.) Н.Н., Санкович Л. П., Н.Н. Боголюбов и статистическая механика // *Успехи Математических Наук* – 1994. – Т. 49. – Вып. 5. – с. 21.
163. Ширков Д. В., 60 лет нарушенным симметриям в квантовой теории (от теории сверхтекучести Боголюбова до Стандартной модели) // *УФН* – 2009. – Т. 179. – с. 581.
164. Kuzemsky A. L., Bogoliubov's vision: Quasiaverages and broken symmetry to quantum protectorate and emergence // *Int. J. Mod. Phys. B*. – 2010. – V. 24. – p. 835.
165. Billam T. P., Cornish S. L., Gardiner S. A., Realizing bright-matter-wave-soliton collisions with controlled relative phase // *Phys. Rev. A*. – 2011. – V. 83. – p. 041602(R).
166. Abdullaev J., Desyatnikov A. S., Ostrovskaya E. A., Suppression of collapse for matter waves with orbital angular momentum // *J. Opt.* – 2011. – V. 13. – p. 064023.
167. Khawaja U. Al., Stoof H. T. C., Formation of matter-wave soliton molecules // *New J. Phys.* – 2011. – V. 13. – p. 085003.
168. Cardoso W. B., Avelar A. T., Bazeia D., Modulation of breathers in cigar-shaped Bose–Einstein condensates // *Phys. Lett. A*. – 2010. – V. 374. – p. 2640.
169. Wen L., Zhang Y., Feng J., Structure and stability of quasi-two-dimensional boson–fermion mixtures with vortex–antivortex superposed states // *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* – 2010. – V. 43. – p. 225302 .
170. Filatrella G., Malomed B. A., Salasnich L., Application of the Feshbach-resonance management to a tightly confined Bose-Einstein condensate // *Phys. Rev. A*. – 2009. – V. 79. – p. 045602.
171. Denschlag J., Simsarian J. E., Feder D. L., Clark C. W., Collins L. A., Cubizolles J., Deng L., Hagley E. W., Helmerson K., Reinhardt W. P., Rolston S. L., Schneider B. I., Phillips W. D., Generating Solitons by Phase Engineering of a Bose-Einstein Condensate, *Science*. – 2000. – V. 287. – p. 97.

172. Karpiuk T., Brewczyk M., Ospelkaus-Schwarzer S., Bongs K., Gajda M., Rzazewski K., Soliton Trains in Bose-Fermi Mixtures, *Phys. Rev. Lett.* – 2004. – V. 93. – p. 100401.
173. Tsurumi T., Wadati M., Dynamics of Magnetically Trapped Boson-Fermion Mixtures // *J. Phys. Soc. Jpn.* – 2000. – V. 69. – p. 97.
174. Salerno M., Matter-wave quantum dots and antidots in ultracold atomic Bose-Fermi mixtures // *Phys. Rev. A.* – 2005. – V. 72. – p. 063602.
175. Ramachandran B., Bhongale S. G., Pu H., Finite-temperature study of Bose-Fermi superfluid mixtures // *Phys. Rev. A.* – 2011. – V. 83. – p. 033607.
176. Yu Z.-Q., Zhang S., Zhai H., Stability condition of a strongly interacting boson-fermion mixture across an interspecies Feshbach resonance // *Phys. Rev. A.* – 2011. – V. 83. – p. 041603.
177. Strecker K. E., Partidge G. B., Truscott A. G., Hulet R. G., Formation and propagation of matter-wave soliton trains // *Nature.* 2002. – V. 417. – p. 150.
178. Koberle P., Cartarius H., Fabrice T., Main J., Wunner G., Bifurcations, order and chaos in the Bose–Einstein condensation of dipolar gases // *New J. Phys.* – 2009. – V. 11. – p. 023017.
179. Carr L. D., DeMille D., Krens R. V., Ye J., Cold and ultracold molecules: science, technology and applications // *New J. Phys.* – 2009. – V. 11. – p. 055049.
180. Giamarchi T., Rugg C., Tchernyshyov O., Bose-Einstein condensation in magnetic insulators // *Nature Phys.* – 2008. – V. 4. – p. 198.
181. Ni K.-K., Ospelkaus S., Nesbitt D. J., Ye J., Jin D. S., A dipolar gas of ultracold molecules // *Phys. Chem. Chem. Phys.* – 2009. – V. 11. – p. 9626.
182. Ковалев А. С., Косевич А. М., Связанное состояние N бозонов в одномерной системе с парным и трехчастичным взаимодействием // *Физ. Низких Температур* – 1976. – Т. 2. – с. 913.
183. Barashenkov I. V., Makhankov V. G., Soliton-like “bubbles” in a system of interacting bosons // *Phys. Lett. A.* – 1988. – V. 128. – p. 52.
184. Kohler T., Three-Body Problem in a Dilute Bose-Einstein Condensate // *Phys. Rev. Lett.* – 2002. – V. 89. – p. 210404.
185. Abdullaev F. Kh., Gammal A., Tomio L., Frederico T., Stability of trapped Bose-Einstein condensates // *Phys. Rev. A.* – 2001. – V. 63. – p. 043604.

186. Bedaque P. F., Braaten E., Hammer H.-W., Three-body Recombination in Bose Gases with Large Scattering Length // *Phys. Rev. Lett.* – 2000. – V. 85. – p. 908.
187. Jack M. W., Decoherence due to Three-Body Loss and its Effect on the State of a Bose-Einstein Condensate // *Phys. Rev. Lett.* – 2002. – V. 89. – p. 140402.
188. Yukalov V. I., Basics of Bose-Einstein Condensation // *Physics of Particles and Nuclei.* – 2011. – V. 42. – p. 460.
189. Erdos L., Schlein B., Yau H.-T., Rigorous Derivation of the Gross-Pitaevskii Equation // *Phys. Rev. Lett.* – 2007. – V. 98. – p. 040404.
190. Griffin A., Conserving and gapless approximations for an inhomogeneous Bose gas at finite temperatures // *Phys. Rev. B.* – 1996. – V. 53. – p. 9341.
191. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Гидродинамика. – М.: Наука. 1988. – С. 736.
192. Arahata E., Nikuni T., Griffin A., Single-particle spectral density of a Bose gas in the two-fluid hydrodynamic regime // *Phys. Rev. A.* – 2011. – V. 84. – p. 053612.
193. Griffin A., Zaremba E., First and second sound in a uniform Bose gas // *Phys. Rev. A.* – 1997. – V. 56. – p. 4839.
194. Nikuni T., Griffin A., Hydrodynamic modes and pulse propagation in a cylindrical Bose gas above the Bose-Einstein transition // *Phys. Rev. A.* – 1998. – V. 58. – p. 4044.
195. Zaremba E., Griffin A., Nikuni T., Two-fluid hydrodynamics for a trapped weakly interacting Bose gas // *Phys. Rev. A.* – 1998. – V. 57. – p. 4695.
196. Nikuni T., Griffin A., Frequency and damping of hydrodynamic modes in a trapped Bose-condensed gas // *Phys. Rev. A.* – 2004. – V. 69. – p. 023604.
197. Braaten E., Nieto A., Quantum corrections to the energy density of a homogeneous Bose gas // *Eur. Phys. J. B.* – 1999. – V. 11. – p. 143.
198. Lee T. D., Yang C. N., Many-Body Problem in quantum mechanics and quantum statistical mechanics // *Phys. Rev.* – 1957. – V. 105. – p. 1119.
199. Lee T. D., Huang K., Yang C. N., Eigenvalues and Eigenfunctions of a Bose System of Hard Spheres and Its Low-Temperature Properties // *Phys. Rev.* – 1957. – V. 106. – p. 1135.

200. Abdullaev F. Kh., Salerno M., Gap-Townes solitons and localized excitations in low-dimensional Bose-Einstein condensates in optical lattices // *Phys. Rev. A.* – 2005. – V. 72. – p. 033617.
201. Marklund M., Shukla P. K., Random phases in Bose-Einstein condensates with higher order nonlinearities // *Eur. Phys. J. B.* – 2005. – V. 48. – p. 71.
202. Bloch I., Dalibard J., Zwerger W., Many-body physics with ultracold gases // *Rev. Mod. Phys.* – 2008. – V. 80. – p. 885.
203. Lahaye T., Menotti C., Santos L., Lewenstein M., Pfau T., The physics of dipolar bosonic quantum gases // *Rep. Prog. Phys.* – 2009. – V. 72. – p. 126401.
204. Santos L., Shlyapnikov G. V., Zoller P., Lewenstein M., Bose-Einstein Condensation in Trapped Dipolar Gases // *Phys. Rev. Lett.* – 2000. – V. 85. – p. 1791.
205. Baranov M. A., Theoretical progress in many-body physics with ultracold dipolar gases // *Phys. Rep.* – 2008. – V. 464. – p. 7.
206. Baranov M. A., Dalmonte M., Pupillo G., Zoller P., Condensed Matter Theory of Dipolar Quantum Gases // *Chem. Rev.* – 2012. – V. 112. – p. 5012.
207. Rosanov N. N., Vladimirov A. G., Skryabin D. V., Firth W. J., Internal oscillations of solitons in two-dimensional NLS equation with nonlocal nonlinearity // *Phys. Lett. A.* – 2002. – V. 293. – p. 45.
208. Braaten E., Hammer H.-W., Hermans S., Nonuniversal effects in the homogeneous Bose gas // *Phys. Rev. A.* – 2001. – V. 63. – p. 063609.
209. Fabrocini A., Polis A., Bose-Einstein condensates in the large-gas-parameter regime // *Phys. Rev. A.* – 2001. – V. 64. – p. 063610.
210. Dalfovo F., Giorgini S., Pitaevskii L. P., Stringari S., Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases // *Rev. Mod. Phys.* – 1999. – V. 71. – p. 463.
211. Pu H., Zhang W., Wilkens M., Meystre P., Phonon Spectrum and Dynamical Stability of a Dilute Quantum Degenerate Bose-Fermi Mixture // *Phys. Rev. Lett.* – 2002. – V. 88. – p. 070408.
212. Steinhauer J., Ozeri R., Katz N., Davidson N., Excitation Spectrum of a Bose-Einstein Condensate // *Phys. Rev. Lett.* – 2002. – V. 88. – p. 120407.
213. Menotti C., Stringari S., Collective oscillations of a one-dimensional trapped Bose-Einstein gas // *Phys. Rev. A.* – 2002. – V. 66. – p. 043610.

214. Banerjee A., Singh M. P., Elementary excitations of a trapped Bose gas in the large-gas-parameter regime // *Phys. Rev. A.* – 2002. – V. 66. – p. 043609.
215. Shibata H., Yokoshi N., Kurihara S., Collective modes and stability of Bose-Fermi mixtures with a BCS-BEC crossover // *Phys. Rev. A.* – 2007. – V. 75. – p. 053615.
216. Gupta M., Dastidar K. R., Collective excitations of the hybrid atomic-molecular Bose-Einstein condensates // *Phys. Rev. A.* – 2010. – V. 81. – p. 063631.
217. Stringari S., Collective Excitations of a Trapped Bose-Condensed Gas // *Phys. Rev. Lett.* – 1996. – V. 77. – p. 2360.
218. Falco G. M., Pelster A., Graham R., Collective oscillations in trapped Bose-Einstein-condensed gases in the presence of weak disorder // *Phys. Rev. A.* – 2007. – V. 76. – p. 013624.
219. Santos L., Shlyapnikov G. V., Lewenstein M., Roton-Maxon Spectrum and Stability of Trapped Dipolar Bose-Einstein Condensates // *Phys. Rev. Lett.* – 2003. – V. 90. – p. 250403.
220. O'Dell D. H. J., Giovanazzi S., Kurizki G., Rotons in Gaseous Bose-Einstein Condensates Irradiated by a Laser // *Phys. Rev. Lett.* – 2003. – V. 90. – p. 110402.
221. Giovanazzi S., O'Dell D. H. J., Instabilities and the roton spectrum of a quasi-1D Bose-Einstein condensed gas with dipole-dipole interactions // *Eur. Phys. J. D.* – 2004. – V. 31. – p. 439.
222. Fischer U. R., Stability of quasi-two-dimensional Bose-Einstein condensates with dominant dipole-dipole interactions // *Phys. Rev. A.* – 2006. – V. 73. – p. 031602(R).
223. Ticknor C., Wilson R. M., Bohn J. L., Anisotropic Superfluidity in a Dipolar Bose Gas // *Phys. Rev. Lett.* – 2011. – V. 106. – p. 065301.
224. Carr L. D., Ye J., Focus on Cold and Ultracold Molecules // *New J. Phys.* – 2009. – V. 11. – p. 055009.
225. Li Q., Hwang E. H., Das Sarma S., Collective modes of monolayer, bilayer, and multilayer fermionic dipolar liquid // *Phys. Rev. B.* – 2011. – V. 82. – p. 235126.
226. Yi S., You L., Trapped atomic condensates with anisotropic interactions // *Phys. Rev. A.* – 2000. – V. 61. – p. 041604(R).

227. Goral K., Rzazewski K., Pfau T., Bose-Einstein condensation with magnetic dipole-dipole forces // *Phys. Rev. A.* – 2000. – V. 61. – p. 051601(R).
228. Szankowski P., Trippenbach M., Infeld E., Rowlands G., Oscillating Solitons in a Three-Component Bose-Einstein Condensate // *Phys. Rev. Lett.* – 2010. – V. 105. – p. 125302.
229. Cherng R. W., Demler E., Magneton Softening in Rb Spinor Condensates with Dipolar Interactions // *Phys. Rev. Lett.* – 2009. – V. 103. – p. 185301.
230. Sapina I., Dahm T., Schopohl N., Ground-state and collective modes of a spin-polarized dipolar Bose-Einstein condensate in a harmonic trap // *Phys. Rev. A.* – 2010. – V. 82. – p. 053620.
231. Komineas S., Cooper N. R., Vortex lattices in Bose-Einstein condensates with dipolar interactions beyond the weak-interaction limit // *Phys. Rev. A.* – 2007. – V. 75. – p. 023623.
232. Wilson R. M., Ronen S., Bohn J. L., Critical Superfluid Velocity in a Trapped Dipolar Gas // *Phys. Rev. Lett.* – 2010. – V. 104. – p. 094501.
233. Lahaye T., Koch T., Frohlich B., Fattori M., Metz J., Griesmaier A., Giovanazzi S., Pfau T., Strong dipolar effects in a quantum ferrofluid // *Nature.* – 2007. – V. 448. – p. 672.
234. Jiang T. F., Su W. C., Ground state of the dipolar Bose-Einstein condensate // *Phys. Rev. A.* – 2006. – V. 74. – p. 063602.
235. Gligoric G., Maluckov A., Stepic M., Hadzievski L., Malomed B. A., Two-dimensional discrete solitons in dipolar Bose-Einstein condensates // *Phys. Rev. A.* – 2010. – V. 81. – p. 013633.
236. Yamaguchi Y., Sogo T., Ito T., Miyakawa T., Density-wave instability in a two-dimensional dipolar Fermi gas // *Phys. Rev. A.* – 2010. – V. 82. – p. 013643.
237. Gadsbølle A.-L., Bruun G. M., Dipolar fermions in a two-dimensional square lattice // *Phys. Rev. A.* – 2012. – V. 85. – p. 021604(R).
238. Lu Z.-K., Shlyapnikov G. V., Fermi liquid of two-dimensional polar molecules // *Phys. Rev. A.* – 2012. – V. 85. – p. 023614.
239. Wang D.-W., An effective many-body theory for strongly interacting polar molecules // *New J. Phys.* – 2008. – V. 10. – p. 053005.

240. Власов А. А., О вибрационных свойствах электронного газа // ЖЭТФ. – 1938. – Т. 8. – с. 291.
241. Lima A. R. P., Pelster A., Collective motion of polarized dipolar Fermi gases in the hydrodynamic regime // Phys. Rev. A. – 2010. – V. 81. – p. 021606(R).
242. Lima A. R. P., Pelster A., Dipolar Fermi gases in anisotropic traps // Phys. Rev. A. – 2010. – V. 81. – p. 063629.
243. Gomi H., Imai T., Takahashi A., Aihara M., Purely electronic terahertz polarization in dimer Mott insulators // Phys. Rev. B. – 2010. – V. 82. – p. 035101.
244. Sieberer L. M., Baranov M. A., Collective modes, stability, and superfluid transition of a quasi-two-dimensional dipolar Fermi gas // Phys. Rev. A. – 2011. – V. 84. – p. 063633.
245. Wilson R. M., Rittenhouse S. T., Bohn J. L., A Dielectric Superfluid of Polar Molecules // New J. Phys. – 2012. – V. 14. – p. 043018.
246. Fang B., Englert B.-G., Density functional of a two-dimensional gas of dipolar atoms: Thomas-Fermi-Dirac treatment // Phys. Rev. A. – 2011. – V. 83. – p. 052517.
247. He L., Hofstetter W., Supersolid phase of cold fermionic polar molecules in two-dimensional optical lattices // Phys. Rev. A. – 2011. – V. 83. – p. 053629.
248. Quemener G., Bohn J. L., Dynamics of ultracold molecules in confined geometry and electric field // Phys. Rev. A. – 2011. – V. 83. – p. 012705.
249. Lutchyn R. M., Rossi E., Das Sarma S., Spontaneous interlayer superfluidity in bilayer systems of cold polar molecules // Phys. Rev. A. – 2010. – V. 82. – p. 061604(R).
250. Liao R., Brand J., Anisotropic superfluidity in the two-species polar Fermi gas // Phys. Rev. A. – 2010. – V. 82. – p. 063624.
251. Baillie D., Blakie P. B., Thermodynamics and coherence of a trapped dipolar Fermi gas // Phys. Rev. A. – 2010. – V. 82. – p. 033605.
252. Gillen-Christandl K., Copsey B. D., Polarization-dependent atomic dipole traps behind a circular aperture for neutral-atom quantum computing // Phys. Rev. A. – 2011. – V. 83. – p. 023408.

253. Lima A. R. P., Pelster A., Beyond mean-field low-lying excitations of dipolar Bose gases // *Phys. Rev. A.* – 2012. – V. 86. – p. 063609.
254. Vogl U., Weitz M., Laser cooling by collisional redistribution of radiation // *Nature.* – 2009. – V. 461. – p. 70.
255. Sheik-Bahae M., Seletskiy D., Chilling dense atomic gases // *Nature Photonics.* – 2009. – V. 3. – p. 680.
256. Deng H., Haug H., Yamamoto Y., Exciton-polariton Bose-Einstein condensation // *Rev. Mod. Phys.* – 2010. – V. 82. – p. 1489.
257. Shaukat M. I., Castro E. V., Tercas H., Entanglement sudden death and revival in quantum dark-soliton qubits // *Phys. Rev. A.* – 2018. – V. 98. – p. 022319.
258. Syrwid A., Delande D., Sacha K., Emergence of dark soliton signatures in a one-dimensional unpolarized attractive Fermi gas on a ring // *Phys. Rev. A.* – 2018. – V. 98. – p. 023616.
259. Yefsah T., Sommer A. T., Ku M. J. H., Cheuk L. W., Ji W., Bakr W. S., Zwierlein M. W., Heavy solitons in a fermionic superfluid // *Nature.* – 2013. – V. 499. – p. 426.
260. Boardman A. D., Nikitov S. A., Waby N. A., Existence of spin-wave solitons in an antiferromagnetic film // *Phys. Rev. B.* – 1993. – V. 48. – p. 13602.
261. Bagada A. V., Melkov G. A., Serga A. A., Slavin A. N., Parametric Interaction of Dipolar Spin Wave Solitons with Localized Electromagnetic Pumping // *Phys. Rev. Lett.* – 1997. – V. 79. – p. 2137.
262. Wang Z., Hagerstrom A., Anderson J. Q., Tong W., Wu M., Carr L. D., Eykholt R., Kalinikos B. A., Chaotic Spin-Wave Solitons in Magnetic Film Feedback Rings // *Phys. Rev. Lett.* – 2011. – V. 107. – p. 114102.
263. Rojo-Bravo A., Jacques V. L. R., Le Bolloc'h D., Collective transport of charges in charge density wave systems based on traveling soliton lattices // *Phys. Rev. B.* – 2016. – V. 94. – p. 201120(R).
264. Matsuura T., Hara J., Inagaki K., Tsubota M., Hosokawa T., Tanda S., Charge density wave soliton liquid // *Eur. Phys. Lett.* – 2015. – V. 109. – p. 27005.
265. Latyshev Yu. I., Monceau P., Brazovskii S., Orlov A. P., Fournier T., Observation of Charge Density Wave Solitons in Overlapping Tunnel Junctions // *Phys. Rev. Lett.* – 2005. – V. 95. – p. 266402.

266. Yulin A. V., Inverse Cherenkov effect and control of optical solitons by resonant dispersive waves // *Phys. Rev. A.* – 2018. – V. 98. – p. 023833.
267. Wang Z., Cherkasskii M., Kalinikos B. A., Carr L. D., Wu M., Formation of bright solitons from wave packets with repulsive nonlinearity // *New J. Physics.* – 2014. – V. 16. – p. 053048.
268. Eiermann B., Anker Th., Albiez M., Taglieber M., Treutlein P., Marzlin K.-P., Oberthaler M. K., Bright Bose-Einstein Gap Solitons of Atoms with Repulsive Interaction // *Phys. Rev. Lett.* – 2004. – V. 92. – p. 230401.
269. Khaykovich L., Schreck F., Ferrari G., Bourdel T., Cubizolles J., Carry L. D., Castin Y., Salomon C., Formation of a Matter-Wave Bright Soliton // *Science.* – 2002. – V. 296. – p. 1290.
270. Burger S., Bongs K., Dettmer S., Ertmer W., Sengstock K., Sanpera A., Shlyapnikov G. V., Lewenstein M., Dark Solitons in Bose-Einstein Condensates // *Phys. Rev. Lett.* – 1999. – 83. – p. 5198.
271. Anderson B. P., Haljan P. C., Regal C. A., Feder D. L., Collins L. A., Clark C. W., Cornell E. A., Watching Dark Solitons Decay into Vortex Rings in a Bose-Einstein Condensate // *Phys. Rev. Lett.* – 2001. – V. 86. – p. 2926.
272. Mateo A. M., Delgado V., Malomed B. A., Gap solitons in elongated geometries: The one-dimensional Gross-Pitaevskii equation and beyond // *Phys. Rev. A.* – 2011. – V. 83. – p. 053610 .
273. Cuevas J., Malomed B. A., Kevrekidis P. G., Frantzeskakis D. J., Solitons in quasi-one-dimensional Bose-Einstein condensates with competing dipolar and local interactions // *Phys. Rev. A.* – 2009. – V. 79. – p. 053608.
274. Csire G., Schumayer D., Apagyí B., Effect of scattering lengths on the dynamics of a two-component Bose-Einstein condensate // *Phys. Rev. A.* – 2010. – V. 82. – p. 063608.
275. Truscott A. G., Strecker K. E., McAlexander W. I., Partridge G. B., Hulet R. G., Observation of Fermi Pressure in a Gas of Trapped Atoms // *Science.* – 2001. – V. 291. – p. 2570.
276. Schreck F., Khaykovich L., Corwin K. L., Ferrari G., Bourdel T., Cubizolles J., Salomon C., Quasipure Bose-Einstein Condensate Immersed in a Fermi Sea // *Phys. Rev. Lett.* – 2001. – V. 87. – p. 080403.

277. Hadzibabic Z., Stan C. A., Dieckmann K., Gupta S., Zwierlein M. W., Görlitz A., Ketterle W., Two-Species Mixture of Quantum Degenerate Bose and Fermi Gases // *Phys. Rev. Lett.* – 2002. – V. 88. – p. 160401.
278. Roati G., Riboli F., Modugno G., Inguscio M., Fermi-Bose Quantum Degenerate ^{40}K - ^{87}Rb Mixture with Attractive Interaction // *Phys. Rev. Lett.* – 2002. – V. 89. – p. 150403.
279. Belemuk A. M., Ryzhov V. N., Chui S.-T., Stable and unstable regimes in Bose-Fermi mixtures with attraction between components // *Phys. Rev. A.* – 2007. – V. 76. – p. 013609.
280. Adhikari S. K., Mean-field description of a dynamical collapse of a fermionic condensate in a trapped boson-fermion mixture // *Phys. Rev. A.* – 2004. – V. 70. – p. 043617.
281. Zwierlein M. W., Abo-Shaeer J. R., Schirotzek A., Schunck C. H., Ketterle W., Vortices and superfluidity in a strongly interacting Fermi gas // *Nature.* – 2005. – V. 435. – p. 1047.
282. Liao R., Brand J., Traveling dark solitons in superfluid Fermi gases // *Phys. Rev. A.* – 2011. – V. 83. – p. 041604(R).
283. Scott R. G., Dalfovo F., Pitaevskii L. P., Stringari S., Dynamics of Dark Solitons in a Trapped Superfluid Fermi Gas // *Phys. Rev. Lett.* – 2011. – V. 106. – p. 185301.
284. Santhanam J., Kenkre V. M., Konotop V. V., Solitons of Bose-Fermi mixtures in a strongly elongated trap // *Phys. Rev. A.* – 2006. – V. 73. – p. 013612.
285. Karpiuk T., Brewczyk M., Rzazewski K., Bright solitons in Bose-Fermi mixtures // *Phys. Rev. A.* – 2006. – V. 73. – p. 053602.
286. Adhikari S. K., Salasnich L., Mixing-demixing transition and collapse of a vortex state in a quasi-two-dimensional boson-fermion mixture // *Phys. Rev. A.* – 2007. – V. 75. – p. 053603.
287. Parker N. G., Smith D. A., p-wave stabilization of three-dimensional Bose-Fermi solitons // *Phys. Rev. A.* – 2012. – V. 85. – p. 013604.
288. Adhikari S. K., Free expansion of fermionic dark solitons in a boson-fermion mixture // *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* – 2005. – V. 38. – p. 3607.

289. Washimi H., Taniuti T., Propagation of ion-acoustic solitary waves of small amplitude // *Phys. Rev. Lett.* – 1966. – V. 17. – p. 996.
290. Cai H.-Q., Yang S.-R., Xue J.-K., Weak Nonlinear Matter Waves in a Trapped Spin-1 Condensates // *Commun. Theor. Phys.* – 2011. – V. 55. – p. 583.
291. Kulkarni M., Abanov A. G., Hydrodynamics of cold atomic gases in the limit of weak nonlinearity, dispersion, and dissipation // *Phys. Rev. A.* – 2012. – V. 86. – p. 033614.
292. Nath R., Pedri P., Santos L., Stability of Dark Solitons in Three Dimensional Dipolar Bose-Einstein Condensates // *Phys. Rev. Lett.* – 2008. – V. 101. – p. 210402.
293. Pedri P., Santos L., Two-Dimensional Bright Solitons in Dipolar Bose-Einstein Condensates // *Phys. Rev. Lett.* – 2005. – V. 95. – p. 200404.
294. Stamper-Kurn D. M., Ueda M., Spinor Bose gases: Symmetries, magnetism, and quantum dynamics // *Rev. Mod. Phys.* – 2013. – V. 85. – p. 1191.
295. Blakie P. B., Properties of a dipolar condensate with three-body interactions // *Phys. Rev. A.* – 2016. – V. 93. – p. 033644.
296. Ferrier-Barbut I., Kadau H., Schmitt M., Wenzel M., Pfau T., Observation of Quantum Droplets in a Strongly Dipolar Bose Gas // *Phys. Rev. Lett.* – 2016. – V. 116. – p. 215301.
297. Kadau H., Schmitt M., Wenzel M., Wink C., Maier T., Ferrier-Barbut I., Pfau T., Observing the Rosensweig instability of a quantum ferrofluid // *Nature.* – 2016. – V. 530. – p. 194.
298. Petrov A., Tiesinga E., Kotochigova S., Anisotropy-Induced Feshbach Resonances in a Quantum Dipolar Gas of Highly Magnetic Atoms // *Phys. Rev. Lett.* – 2012. – V. 109. – p. 103002.
299. Baillie D., Wilson R. M., Bisset R. N., Blakie P. B., Self-bound dipolar droplet: a localized matter-wave in free space // *Phys. Rev. A.* – 2016. – V. 94. – p. 021602(R).
300. Wachtler F., Santos L., Quantum filaments in dipolar Bose-Einstein condensates // *Phys. Rev. A.* – 2016. – V. 93. – p. 061603R.

301. Bisset R. N., Wilson R. M., Baillie D., Blakie P. B., Ground-state phase diagram of a dipolar condensate with quantum fluctuations // *Phys. Rev. A.* – 2016. – V. 94. – p. 033619.
302. Wachtler F., Santos L., Ground-state properties and elementary excitations of quantum droplets in dipolar Bose-Einstein condensates // *Phys. Rev. A.* – 2016. – V. 94. – p. 043618.
303. Adhikari S. K., Statics and dynamics of a self-bound dipolar matter-wave droplet // *Laser Phys. Lett.* – 2017. – V. 14. – p. 025501.
304. Lima A. R. P., Pelster A., Quantum fluctuations in dipolar Bose gases // *Phys. Rev. A.* – 2011. – V. 84. – p. 041604.
305. Boudjemaa A., Guebli N., Quantum correlations in dipolar droplets: Time-dependent Hartree-Fock-Bogoliubov theory // *Phys. Rev. A.* – 2020. – V. 102. – p. 023302.
306. Heinonen V., Burns K. J., Dunkel J., Quantum hydrodynamics for supersolid crystals and quasicrystals // *Phys. Rev. A.* – 2019. – V. 99. – p. 063621.
307. Shamriz E., Chen Z., Malomed B. A., Suppression of the quasi-two-dimensional quantum collapse in the attraction field by the Lee-Huang-Yang effect // *Phys. Rev. A.* – 2020. – V. 101. – p. 063628.
308. Li Z., Pan J.-S., Liu W. V., Spontaneous formation of polar superfluid droplets in a p-wave interacting Bose gas // *Phys. Rev. A.* – 2019. – V. 100. – p. 053620.
309. Aybar E., Oktel M. O., Temperature-dependent density profiles of dipolar droplets // *Phys. Rev. A.* – 2019. – V. 99. – p. 013620.
310. Examilioti P., Kavoulakis G. M., Ground state and rotational properties of two-dimensional self-bound quantum droplets // *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* – 2020. – V. 53. – p. 175301.
311. Bisset R. N., Ardila L. A. P., Santos L., Quantum droplets of dipolar mixtures // *Phys. Rev. Lett.* – 2021. – V. 126. – p. 025301.
312. Wang Y., Guo L., Yi S., Shi T., Theory for Self-Bound States of Dipolar Bose-Einstein Condensates // *Phys. Rev. Research.* – 2020. – V. 2. – p. 043074.
313. Hannibal S., Kettmann P., Croitoru M. D., Axt V. M., Kuhn T., Persistent oscillations of the order parameter and interaction quench phase diagram for a

- confined Bardeen-Cooper-Schrieffer Fermi gas // *Phys. Rev. A.* – 2018. – V. 98. – p. 053605.
314. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика (нерелятивистская теория). – М: Наука. 1989. – С. 768.
315. Фок В.А. Начала квантовой механики. – М: Наука. 1976. – С. 376.
316. Tokatly I., Pankratov O., Hydrodynamic theory of an electron gas // *Phys. Rev. B.* – 1999. – V. 60. – p. 15550.
317. Tokatly I. V., Pankratov O., Hydrodynamics beyond local equilibrium: Application to electron gas // *Phys. Rev. B.* – 2000. – V. 62. – p. 2759.
318. Miller S. T., Shumlak U., A multi-species 13-moment model for moderately collisional plasmas // *Phys. Plasmas.* – 2016. – V. 23. – p. 082303.
319. Arendt N. P., Jr., Eilek A. J., Pair Creation in the Pulsar Magnetosphere // *Astrophys. J.* – 2002. – V. 581. – p. 451.
320. Sturrock P. A., A Model of Pulsars // *Astrophys. J.* – 1971. – V. 164. – p. 529.
321. Jensen I., Critical behavior of branching annihilating random walks with an odd number of offsprings // *Phys. Rev. E.* – 1993. – V. 47. – p. R1.
322. Akbari-Moghanjoughi M., Effects of ion-temperature on propagation of the large-amplitude ion-acoustic solitons in degenerate electron-positron-ion plasmas // *Phys. Plasmas.* – 2010. – V. 17. – p. 082315.
323. Sadiq S., Mahmood S., Haque Q., Ali M. Z., Ion acoustic solitons in dense magnetized plasmas with nonrelativistic and ultrarelativistic degenerate electrons and positrons // *Astrophys. J.* – 2014. – V. 793. – p. 27.
324. Svensson R., Electron-Positron Pair Equilibria in Relativistic Plasmas // *Astrophys. J.* – 1982. – V. 258. – p. 335.
325. Iqbal Z., Hussain A., Murtaza G., Ali M., On the damping of right hand circularly polarized waves in spin quantum plasmas // *Phys. Plasmas.* – 2014. – V. 21. – p. 122118.
326. Keston D. A., Laing E. W., Diver D. A., Bernstein modes in a weakly relativistic electron-positron plasma // *Phys. Rev. E.* – 2003. – V. 67. – p. 036403.