ОТЗЫВ НАУЧНОГО РУКОВОДИТЕЛЯ
на диссертацию
Кировой Валерии Орлановны
«Вопросы комбинаторной геометрии и комбинаторики слов»
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности
1.1.5- математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Работа Кировой В.О. содержит исследования темам, стоящим на стыке комбинаторной геометрии и теории графов, а также комбинаторной геометрии и комбинаторики слов.

Первая тема посвящена задаче Нельсона и её обобщениям. Задача берет своё начало в 1950 году, когда Э. Нельсон задался вопросом о нахождении хроматического числа плоскости $\chi(R^2)$ - минимального числа цветов, в которые можно раскрасить евклидову плоскость так, чтобы любые две точки на единичном расстоянии имели разные цвета. В русскоязычной литературе устоялось название проблема Нельсона-Хадвигера. Несмотря на простоту формулировки задачи, точное значение хроматического числа плоскости до сих пор не найдено. На настоящий момент для плоскости установлены оценки $5 \leq \chi(R^2) \leq 7$. Однако зазор между нижней и верхней оценками очень быстро возрастает с ростом размерности. Это можно увидеть уже для трехмерного случая: $6 \leq \chi(R^3) \leq 15$. Что касается случая растущей размерности, то в настоящее время лучшие асимптотические нижние и верхние границы принадлежат А.М. Райгородскому и Ларману и Роджерсу соответственно: $(1.239+o(1))^n \leq \chi(R^n) \leq (3+o(1))^n$

Если в классической постановке задачи запрещается двум точкам на единичном расстоянии быть одноцветными, то в данной работе рассматривается случай более сложных конфигураций, а именно последовательности вещественных чисел $B(\lambda_1,\dots,\lambda_k)=\{0,\lambda_1,\lambda_1+\lambda_2,\dots,\sum_{t=1}^{k}\lambda_t\}\in\mathbb{R}$. В случае, когда все $\lambda_{t=1..k}=1$, то множество является просто единичной арифметической прогрессией и обозначается B_k. Один из основных результатов, полученных Кировой, по этой теме - теорема о существовании раскраски в 2 цвета, при которой пространства с чебышевской метрикой не содержат одноцветных ∞-изометрических копий множеств B_k. В качестве следствия представлено доказательство, что любое нормированное пространство может быть раскрашено в 2 цвета так, что оно не содержит одноцветных множеств B_k. Результат изложен в главе 1.

Также рассмотрены пространства вида $R^n \times [0, e]^h$, называемые слойками, введённые в 2012 г. Беловым А., Вороновым В., Черкашиным Д. В главе 2 представлены последние результаты, содержащие оценки хроматических чисел вещественных и рациональных слоек. Перед Кировой была поставлена задача рассмотреть хроматические числа таких пространств с запрещенными одноцветными арифметическими прогрессиями B_k, которая успешно решена. С применением основного результата главы 1 доказано, что любая слойка может быть 2-раскрашиваема.

Вторая тема связана с изучением относительно нового направления, а именно графов, представимых словами. В работе представлен обзор графов, представимых словами, а также их связь с хроматическим числом. Вторая глава несёт также функцию связи между разделами диссертации – в комбинаторике слов чрезвычайно важным инструментом служат так называемые графы Рози. В терминах таких графов можно сформулировать критерий того, что динамика сверхслова связана с перекладыванием отрезков (см. диссертацию А.Л.Чернятьева, защищенную на мехмате МГУ (Нормальные базисы и символическая динамика). Алгоритмические свойства подстановочных систем выражаются на языке схем Рози, что позволяет получить теоремы типа теоремы Вершика-Лившица а затем решить вопросы, поставленные в обзоре Ан. А. Мучник, Ю. Л. Притыкин, А. Л. Семенов, “Последовательности, близкие к периодическим”, УМ, 64:5(389) (2009), 21–96 (а также в диссертации Ю.Л.Притыкина, защищенной на мехмате МГУ) об алгоритмической разрешимости проверки HDOLL-системы порождать (почти) периодическое слово (см. диссертацию И.В.Митрофанова “Алгоритмические проблемы, связанные с морфическими последовательностями”, защищенную на мехмате МГУ). Представлены примеры применения таких графов в задачах биоинформатики, в том числе, инициированных школой проф. В.А.Любецкого.

Третья тема касается вопросов комбинаторики слов. Была поставлена задача изучить связь теоремы Ван дер Вардена с комбинаторными сложностными характеристиками бесконечных слов, изучить комбинаторную сложность и её модификации, представить обзор имеющихся результатов для класса слов с наименьшей комбинаторной сложностью - слов Штурма. При рассмотрении полиномиальной теоремы Ван дер Вардена, Кировой была введена новая, более обобщенная модификация функции комбинаторной сложности - полиномиальная сложность бесконечных слов. Также перед Кировой была поставлена задача рассмотреть функцию полиномиальной сложности на словах Штурма, и ею установлена верхняя оценка $O(n^{d+2})$, доказательство которой опирается на геометрический двойственный метод, впервые представленный в работе Берстеля в 1992 г.

Последняя глава диссертации посвящена приложениям комбинаторной геометрии в задачах геологии.

По каждой теме изложены вопросы для дальнейшего исследования.

Считаю, что диссертация полностью отвечает всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а автор, Кирова Валерия

Орлановна, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5 - математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры дискретной математики МФТИ
Белов А.Я.