МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 511.48

Тлюстангелов Ибрагим Асланович

Исследование симметрий периодов полиэдров Клейна, соответствующих алгебраическим решеткам

Специальность 1.1.5 – математическая логика, алгебра,
теория чисел и дискретная математика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
Герман Олег Николаевич

Москва — 2022

Оглавление

Введение

Актуальность темы и степень ее разработанности

Цепная дробь сопоставляет каждому действительному числу конечную или бесконечную последовательность неполных частных, первый элемент которой является целым числом, а все последующие — натуральными. Известно, что все иррациональные числа и только они имеют бесконечное разложение в цепную дробь. В 1744 году Эйлер опубликовал свою первую работу про цепные дроби, где он показал, что если разложение числа α в цепную дробь, начиная с некоторого момента, периодично, то α является квадратичной иррациональностью (то есть α является иррациональным корнем многочлена второй степени с целыми коэффициентами). Обратное утверждение доказал в 1770 году Лагранж, завершив таким образом доказательство классической теоремы, носящей его имя.

Настоящая диссертация появилась в результате исследования достаточно простого вопроса о том, в каком случае период $(a_0, a_1, \ldots, a_{t-1}, a_t)$ цепной дроби квадратичной иррациональности α является симметричным, то есть в каком случае последовательность $(a_t, a_{t-1}, \ldots, a_1, a_0)$ также является периодом цепной дроби числа α. Ответ на этот вопрос можно вывести из результатов классиков — Э. Галуа, А. М. Лежандра, М. Крайтчика, О. Перрона. При этом симметричность периода допускает весьма наглядную геометрическую интерпретацию. С точки зрения этой геометрической интерпретации естественно наряду с самой квадратичной иррациональностью α рассматривать сопряженное число α'.

В 1828 году Галуа в своей самой первой работе показал, что период цепной дроби квадратичной иррациональности α совпадает с записанным в обратном порядке периодом цепной дроби сопряженного числа α'. При этом, если α является приведенной квадратичной иррациональностью, то есть $\alpha > 1$ и $-1 < \alpha' < 0$, то цепные дроби чисел α и $-1/\alpha'$ являются чисто периодическими. В этом случае, "склеивая" последовательности неполных частных этих чисел, можно получить бесконечную в обе стороны периодичную последовательность. Такая последовательность имеет тривиальные симметрии, которые являются в точности сдвигами этой последовательности вдоль периодов. Вопрос симметричности периода цепной дроби квадратичной иррациональности α эквивалентен наличию дополнительных симметрий, "переворачивающих" построенную последовательность относительно некоторого элемента или позиции между элементами. Такие дополнительные симметрии мы называем палиндромическими, а соответствующий период — циклическим палиндромом.

В качестве упомянутой выше геометрической точки зрения мы взяли полигоны Клейна — конструкцию, предложенную Ф. Клейном в 1895 году. Данная конструкция допускает естественное многомерное обобщение — полиэдры Клейна. Это многомерное обобщение позволяет работать с алгебраическими числами более высоких степеней. Соответственно, многие классические утверждения про обыкновенные цепные дроби допускают многомерные обобщения в терминах полиэдров Клейна. Ряд такого рода обобщений был получен В. И. Арнольдом, Х. Цушиаши, Е. И. Коркиной, Ж. Лашо, А. Д. Брюно, В. И. Парусниковым, Ж.-О. Муссафиром, О. Н. Германом, О. Н. Карпенковым, М. Л. Концевичем, Ю. М. Суховым, Е. Л. Лакштановым, А. А. Илларионовым, А. В. Быковской, И. А. Макаровым.

Полиэдры Клейна, соответствующие вполне вещественным расширениям поля $\mathbb{Q}$ степени n, обладают $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$-симметриями, гарантируемыми теоремой Дирихле об алгебраических единицах. Но у таких полиэдров Клейна могут быть и дополнительные $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$-симметрии. Такие симметрии мы по аналогии с обыкновенными цепными дробями называем палиндромическими, а соответствующую $(n-1)$-мерную алгебраическую цепную дробь, определенную как объединение границ полиэдров Клейна, мы называем палиндромичной.

Данная диссертация посвящена поиску критериев палиндромичности $(n-1)$-мерной алгебраической цепной дроби при $n \geq 3$.

Цели и задачи диссертации

Настоящая диссертация посвящена построению критериев того, что многомерные алгебраические цепные дроби обладают собственными, собственными циклическими или палиндромическими симметриями в размерностях $n = 2, 3, 4$. Также ставится задача доказательства существования палиндромичных цепных дробей в произвольной размерности.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования являются многомерные алгебраические цепные дроби.

Предметом исследования являются палиндромические симметрии многомерных цепных дробей. В частности — собственные и собственные циклические симметрии.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Для доказательства теорем автором был разработан новый метод исследования палиндромических симметрий при помощи их характеристических многочленов. Также новой является конструкция, использующая циклические расширения Галуа для построения серий палиндромичных цепных дробей в произвольной размерности.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие результаты диссертации:

1. Доказательство критерия того, что одномерная алгебраическая цепная дробь обладает палиндромическими симметриями. Доказательство существования палиндромичной одномерной цепной дроби, не обладающей собственными симметриями (теорема 1, параграф 1.6 и теорема 3, параграф 3.1).

2. Доказательство существования в произвольной размерности алгебраической цепной дроби, обладающей собственной циклической симметрией (теорема 2, параграф 2.4).

3. Доказательство критерия того, что двумерная алгебраическая цепная дробь обладает палиндромическими симметриями (теорема 4, параграф 3.4).

4. Доказательство критерия того, что трехмерная алгебраическая цепная дробь обладает собственными симметриями (теорема 5, параграф 4.5).

5. Доказательство критерия того, что трехмерная алгебраическая цепная дробь обладает собственными циклическими симметриями (теорема 6, параграф 4.5). Доказательство существования трехмерной алгебраической цепной дроби, обладающей собственными симметриями, но не обладающей собственными циклическими симметриями (предложение 7, параграф 4.6).

Методы исследования

В диссертации используются методы геометрии чисел, теории цепных дробей и алгебраической теории чисел.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации представляют интерес для специалистов в области геометрии чисел, теории цепных дробей и алгебраической теории чисел. Разработанная в ходе исследования техника может быть использована для анализа симметрий алгебраических решеток и построения решеток со специальными диофантовыми свойствами.

Апробация результатов

Результаты диссертации опубликованы в 4 статьях [22, 23, 24, 25], в том числе 4 статьях по теме диссертации, из которых 4 опубликованы в рецензируемых научных журналах, входящих в базы данных РИНЦ и Scopus, 3 опубликованы в рецензируемых научных журналах, входящих в базу данных Web of Science. Результаты диссертации были представлены на следующих научных семинарах и конференциях:

- Научно-исследовательский семинар кафедры теории чисел под руководством проф. Ю. В. Нестеренко, проф. Н. Г. Мощевитина, доц. О. Н. Германа, МГУ им. М. В. Ломоносова
- Семинар “Арифметика и геометрия” под руководством проф. Н. Г. Мощевитина, доц. О. Н. Германа, асс. И. П. Рочева, МГУ им. М. В. Ломоносова
- XXVIII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов-2021”, МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 12 – 23 апреля 2021
- Международная конференция математических центров мирового уровня, Сочи, Россия, 9 – 13 августа 2021
- Международная конференция “Осенние математические чтения в Адыгее 2021”, Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия, 12 – 17 октября 2021
- Вторая конференция Математических центров России, Москва, Россия, 7 – 11 ноября 2022

Личный вклад соискателя

Основные теоремы в совместных работах [22, 23] доказаны автором. Соавтором (Германом О.Н.) были доказаны некоторые вспомогательные утверждения и написаны некоторые абзацы, улучшающие подачу материала. Результаты работ [24, 25] получены автором самостоятельно.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Текст работы изложен на 131 странице. Список литературы содержит 21 наименование.

Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук О. Н. Герману за постановки задач, внимание к работе и плодотворные обсуждения. Также автор благодарит доктора физико-математических наук, профессора Н. Г. Мощевитина, доктора физико-математических наук, профессора, чл.-корр. РАН Ю. В. Нестеренко и сотрудников кафедры теории чисел механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова за полезные комментарии.

Глава 1

Геометрия палиндромичности периода цепных дробей квадратичных иррациональностей

1.1 Обыкновенные цепные дроби и палиндромы

Классическая теорема Лагранжа о цепных дробях утверждает, что цепная дробь числа α периодична тогда и только тогда, когда α является квадратичной иррациональностью. В 1744 году Эйлер показал, что если разложение числа α в цепную дробь, начиная с некоторого момента, периодично, то α является квадратичной иррациональностью (см. [1]). Обратное утверждение доказал Лагранж в 1770 году (см. [2]).

Период цепной дроби квадратичной иррациональности, прочитанный в обратном порядке, становится периодом цепной дроби сопряжённого числа. Это следует из теоремы Галуа, которую он доказал в своей самой первой работе [3]. А именно, он показал, что если

$$\alpha = [\overline{a_0; a_1, \ldots, a_t}]$$

и α' — сопряжённая к α квадратичная иррациональность, то

$$-1/\alpha' = [\overline{a_t; a_{t-1}, \ldots, a_0}].$$

В частности, если для такого α слово $(a_0, \ldots, a_t)$ симметрично, то $\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(\alpha) = \alpha\alpha' = -1$. Со времен Лежандра (см. [4]) было известно, что для любого рационального числа $r > 1$, отличного от квадрата рационального числа, выполняется

$$\sqrt{r} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \ldots, a_2, a_1, 2a_0}].$$

Ясно, что у таких чисел существует циклический сдвиг периода, переводящий $2a_0$ на первое место, после которого новый период читается слева направо также, как и исходный справа налево.

Возникает естественный вопрос: *каков критерий того, что период цепной дроби квадратичной иррациональности симметричен?* При этом понятно, что само понятие симметричности периода требует уточнения, ибо, скажем, у последовательности с периодом $(1, 2)$ слово $(2, 1)$ также является периодом, но ни одно из этих слов не симметрично. Введем некоторые необходимые определения.

Определение 1. *Периодом* называется множество слов, образованных всеми циклическими сдвигами слова $a = (a_0, \ldots, a_t)$ и соответствующая этому слову бесконечная в обе стороны последовательность $(\bar{a})$.

Из определения видно, что период — инвариантное множество относительно циклического сдвига образующего слова. Таким образом, в качестве образующего слова этого же периода может быть выбран любой циклический сдвиг исходного образующего слова. Данное определение периода согласуется с естественным разбиением чисел на классы эквивалентности относительно разложения в цепную дробь:

Определение 2. Два числа α и ω называются *эквивалентными* (и пишется $\alpha \sim \omega$), если у разложений α и ω в цепную дробь существуют совпадающие *концы.*

Следующее утверждение устанавливает арифметическую связь между эквивалентными числами:

Предложение 1 (Серре [5])**.** *$\alpha \sim \omega$ тогда и только тогда, когда существуют такие $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, что $ac - bd = \pm 1$ и $\alpha = \frac{a\omega+b}{c\omega+d}$.*

Для уточнения понятия симметричности периода очень уместным оказывается следующее

Определение 3. Конечная последовательность $(a_0, a_1, \ldots, a_{t-1}, a_t)$ называется

а) *регулярным палиндромом*, если $a_k = a_{t-k}$ для любого $k \in \{0, \ldots, t\}$;

б) *циклическим палиндромом*, если существует такой циклический сдвиг индексов σ, что $a_k = a_{\sigma(t-k)}$ для любого $k \in \{0, \ldots, t\}$.

Свойство циклической палиндромичности инвариантно относительно циклических сдвигов слова a, а значит, и верно для всех слов, представленных в соответствующем для a периоде. Таким образом, можно говорить и о *циклической палиндромичности* периода цепной дроби.

Ясно, что период, прочитанный в обратном порядке, является тем же самым периодом в том и только том случае, если данный период является циклическим палиндромом. Кроме того, любой циклический палиндром представим в виде объединения двух регулярных. Если один из них четной длины, то исходный палиндром циклическим сдвигом приводится к регулярному. В противном случае этот палиндром можно циклическим сдвигом привести к объединению регулярного палиндрома нечетной длины и *добавочного элемента*. Соответственно, более строго сформулировать вопрос о симметричности периода можно так: *каков критерий того, что период цепной дроби квадратичной иррациональности является циклическим палиндромом*? Следует отметить отличие сформулированного вопроса от подобного вопроса о регулярных палиндромах. Например, рассмотренный выше циклический палиндром $(1, 2)$ не может быть переведен в регулярный палиндром никаким циклическим сдвигом. Теперь ответ на вопрос о регулярном палиндроме очевидным образом следует из теоремы Галуа:

Предложение 2. *Пусть α - квадратичная иррациональность. Период цепной дроби α является регулярным палиндромом тогда и только тогда, когда*

$$\alpha \sim \omega : \omega\omega' = -1.$$

Ответ на вопрос о циклическом палиндроме следует из утверждений, доказательства которых можно найти в книге О. Перрона [6] .

Предложение 3 (Лежандр [4], Перрон [6]). *Пусть α - квадратичная иррациональность. Период цепной дроби α является регулярным палиндромом с четным добавочным элементом тогда и только тогда, когда*

$$\alpha \sim \sqrt{r}, r \in \mathbb{Q}.$$

Предложение 4 (Крайтчик [7], Перрон [6]). *Пусть α - квадратичная иррациональность. Период цепной дроби α является регулярным палиндромом с нечетным добавочным элементом тогда и только тогда, когда*

$$\alpha \sim 1/2 + \sqrt{r}, r \in \mathbb{Q}.$$

Также стоит отметить, что дополнительные утверждения о симметриях периодов цепной дроби можно найти в работах [8] и [9].

В этой главе диссертации мы исследуем геометрию обыкновенных цепных дробей и доказываем критерий того, что период цепной дроби квадратичной иррациональности является циклическим палиндромом:

Теорема 1. *Пусть α - квадратичная иррациональность. Период цепной дроби α является циклическим палиндромом тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

(а) $\alpha \sim \omega : \ \omega + \omega' = 0 \iff \omega^2 \in \mathbb{Q}$;
(б) $\alpha \sim \omega : \ \omega + \omega' = 1 \iff (\omega - 1/2)^2 \in \mathbb{Q}$;
(в) $\alpha \sim \omega : \ \omega\omega' = 1$;
(г) $\alpha \sim \omega : \ \omega\omega' = -1$.

Более того, (б) *эквивалентно* (в).

Ясно, что теорема 1 следует из предложений 2, 3, 4, кроме части, касающейся эквивалентности между случаями (б) и (в).

1.2 Полигоны Клейна смежных углов

Далее в этой главе мы будем рассматривать прямые l_1 и l_2 на плоскости $\mathbb{R}^2$, проходящие через начало координат $\mathbf{0}$, порождённые двумя различными векторами $(1, \alpha)$ и $(1, \beta)$ соответственно. Так же мы рассматриваем только иррациональные α и β. Прямые l_1 и l_2 разбивают плоскость на четыре угла. Выпуклые оболочки ненулевых целых точек внутри этих углов называются *полигонами Клейна.* Мы будем называть два полигона Клейна *смежными*, если они соответствуют смежным углам. Вершины полигонов Клейна — точки из $\mathbb{Z}^2$, а, значит, можно говорить о целочисленных длинах ребер и целочисленных углах между ними.

Определение 1.2.1. Отрезок на плоскости называется *целым*, если его концы принадлежат решетке $\mathbb{Z}^2$. Целый отрезок называется *пустым*, если он не содержит точек из $\mathbb{Z}^2$, кроме концов. *Целочисленной длиной* целого отрезка называется количество пустых целых отрезков внутри него.

Определение 1.2.2. Для двух пустых целых отрезков с общим концом площадь параллелограмма, натянутого на эти отрезки, называется *целочисленным углом* между этими отрезками. Такой параллелограмм называется *примитивным.* Для произвольных целых отрезков с общим концом эта площадь равна *целочисленному углу* между их пустыми целыми подотрезками, имеющими общий конец.

В общем случае целые точки внутри примитивного параллелограмма могут располагаться произвольно. Однако в случае смежных ребер полигона Клейна верно следующее

Предложение 1.2.1. *Пусть* $\mathbf{v}$ *- вершина полигона Клейна* $\mathcal{K}$*, и пусть* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{w}$ *- ближайшие к* $\mathbf{v}$ *целые точки на ребрах* $\mathcal{K}$*, соответствующих* $\mathbf{v}$ *(см. рис. 1.1). Обозначим через* $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ *примитивный параллелограмм, содержащий в качестве вершин* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$*. Тогда все целые точки внутри* $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$*, отличные от* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{w}$*, получаются растяжением на целое число вершины* $\mathbf{v}$*. В частности, все они лежат на диагонали* $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$*, содержащей* $\mathbf{v}$*.*

Доказательство. Так как $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ лежат на ребрах полигона $\mathcal{K}$, который является выпуклой оболочкой целых точек внутри угла, то треугольники $\mathbf{0vu}$ и $\mathbf{0vw}$ не содержат целых точек, кроме как в вершинах. Тогда обе пары векторов $\{\mathbf{v}, \mathbf{u}\}$ и $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ образуют базис $\mathbb{Z}^2$. Следовательно, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$ лежат на одинаковом расстоянии от прямой содержащей $\mathbf{v}$, их сумма $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ лежит на этой прямой, и все целые точки, расстояние от которых

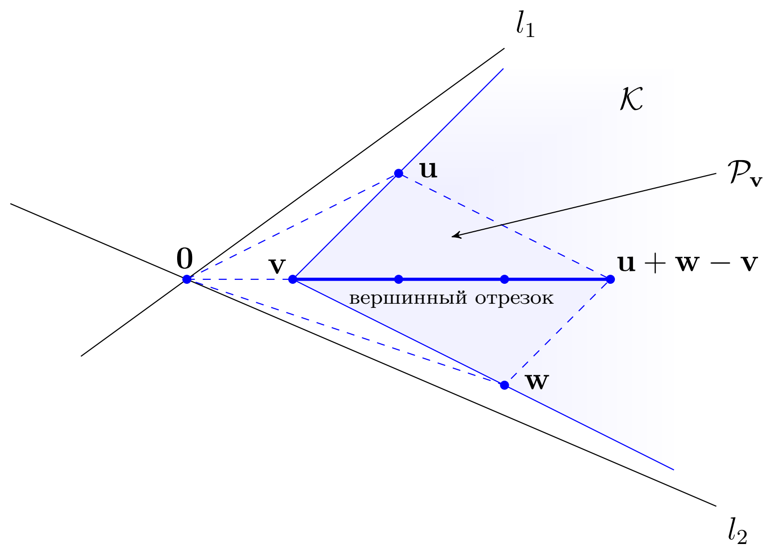

Рисунок 1.1: Вершинный отрезок

до этой прямой меньше, чем у $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$, являются растяжением на целое число вектора $\mathbf{v}$. □

Определение 1.2.3. Пусть $\mathcal{K}$, $\mathbf{v}$ и $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ из предложения 1.2.1. Диагональ примитивного параллелограмма $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$, содержащая $\mathbf{v}$, называется *вершинным отрезком* для $\mathbf{v}$. Второй конец этой диагонали есть $\mathbf{u}+\mathbf{w}-\mathbf{v} = \mathbf{v}+(\mathbf{u}-\mathbf{v})+(\mathbf{w}-\mathbf{v})$.

Таким образом, площадь примитивного параллелограмма $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ на один меньше количества целых точек на вершинном отрезке, соответствующего вершине $\mathbf{v}$. Иначе говоря, целочисленный угол между двумя смежными ребрами полигона Клейна равен целочисленной длине соответствующего вершинного отрезка. Это влечет за собой существование соответствия между ребрами данного полигона Клейна и вершинными отрезками смежного с ним полигона:

Предложение 1.2.2 (Коркина [10])**.** *Пусть $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ - два смежных полигона Клейна. Пусть $\mathbf{E}_1$ — это множество всех ребер $\mathcal{K}_1$, а $\mathbf{S}_1$ — множество всех вершинных отрезков полигона $\mathcal{K}_1$. Аналогично определяются $\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{S}_2$ для полигона $\mathcal{K}_2$. Тогда существует такое взаимно-однозначное соответствие $\varphi : \mathbf{E}_1 \cup \mathbf{S}_1 \to \mathbf{E}_2 \cup \mathbf{S}_2$, что*

(a) $\varphi(\mathbf{E}_1) = \mathbf{S}_2$, $\varphi(\mathbf{S}_1) = \mathbf{E}_2$;

(б) *φ сохраняет целочисленные длины;*

(в) *любой элемент $\mathbf{E}_1 \cup \mathbf{S}_1$ параллелен своему образу под действием φ;*

(г) *если ребро и вершинный отрезок имеют общую точку, то общую точку имеют и их образы при действии φ.*

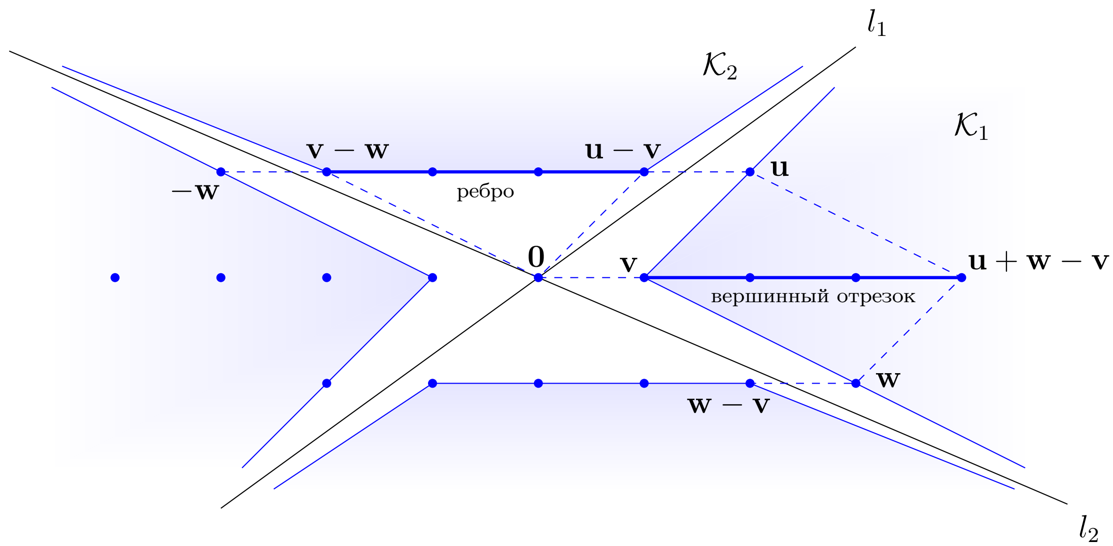

Рисунок 1.2: Биекция φ между ребром и вершинным отрезком

Доказательство. Пусть $\mathbf{v}$ — вершина полигона $\mathcal{K}_1$, а $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$ определены как в предложении 1.2.1. Тогда точки $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}-\mathbf{v}$ не принадлежат углу C_1, но одна из них принадлежит углу C_2, а другая принадлежит углу $-C_2$. Мы можем считать, что $\mathbf{u}-\mathbf{v} \in C_2$. Тогда отрезок $[\mathbf{v}-\mathbf{w}, \mathbf{u}-\mathbf{v}]$ является ребром $\mathcal{K}_2$, так как $-\mathbf{w}$ и $\mathbf{u}$ не принадлежат углу C_2, вектор $\mathbf{v}$ — примитивный и нет целых точек между прямой, содержащей этот отрезок и прямой, порожденной вектором $\mathbf{v}$ (см. рис. 1.2). Очевидно, что вершинный отрезок $[\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{w}-\mathbf{v}]$ является образом этого ребра при параллельном переносе на вектор $\mathbf{w}$.

Итак, для каждой вершины $\mathbf{v}$ полигона $\mathcal{K}_1$ существует ровно одно ребро полигона $\mathcal{K}_2$, параллельное вектору $\mathbf{v}$ и имеющее целочисленную длину равную целочисленной длине вершинного отрезка при $\mathbf{v}$. Рассмотрим концы этого ребра. Как было показано, ими являются векторы $\mathbf{v}-\mathbf{w}$

и $\mathbf{u}-\mathbf{v}$. Для каждого из них существует ровно одно ребро $\mathcal{K}_1$, параллельное им и инцидентное $\mathbf{v}$. Для $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ это ребро, которое начинается с отрезка $[\mathbf{v},\mathbf{w}]$, а для $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ это ребро, которое начинается с отрезка $[\mathbf{v},\mathbf{u}]$.

Для завершения доказательства остается продолжить применять данные рассуждения в обе стороны полигона $\mathcal{K}_1$.

$\square$

Заметим, что каждый вершинный отрезок имеет “корень”, в вершине полигона и “конец”, внутри полигона, при этом “корень”, всегда ближе к l_2 и к l_1, чем “конец”. Это порождает такую ориентацию всех ребер, что “начало”, любого ребра ближе к l_2 и дальше от l_1, чем “конец”, этого ребра (если $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ в одной полуплоскости относительно l_2 и разделены прямой l_1, как на рис. 1.2). Это позволяет пронумеровать все вершины $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ удобным способом:

Следствие 1.2.1. *Пусть $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ - два смежных полигона Клейна, разделенных прямой l_1. Тогда существует такое обозначение всех вершин $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ через $\mathbf{v}_k$, $k\in\mathbb{Z}$, что для любого целого k:*

(а) $\mathbf{v}_{k-1}$, $\mathbf{v}_k$ — *базис $\mathbb{Z}^2$;*

(б) $[\mathbf{v}_{k-2},\mathbf{v}_k]$ *является ребром полигона $\mathcal{K}_1$ при четном k, и ребром $\mathcal{K}_2$ при нечетном k;*

(в) $\mathbf{v}_k$ *ближе к l_1, чем $\mathbf{v}_{k-2}$;*

(г) $\mathbf{v}_k=\mathbf{v}_{k-2}+a_k\mathbf{v}_{k-1}$,

где a_k — целочисленная длина отрезка $[\mathbf{v}_{k-2},\mathbf{v}_k]$ и целочисленный угол, соответствующий $\mathbf{v}_{k-1}$.

Эта нумерация вершин однозначно определяется выбором начальной вершины полигона.

Таким образом, мы получили последовательность $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, записанную дважды вдоль границ $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ (см. рис. 1.3 ниже).

1.3 Лемма Коркиной

Базис $\mathbf{v}_{-2}$, $\mathbf{v}_{-1}$ решеткки $\mathbb{Z}^2$ и последовательность $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ положительных целых чисел определяют последовательность $(\mathbf{v}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ посредством рекуррентного соотношения

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{k-2} + a_k \mathbf{v}_{k-1}. \tag{1.3.1}$$

Лемма 1.3.1 (Коркина [10]). *Пусть $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ — произвольная последовательность положительных целых чисел, и пусть $[\mathbf{v}_{-2}, \mathbf{v}_0]$ — целый отрезок, имеющий целочисленную длину a_0. Положим, что все целые точки, которые расположены ближе, чем начало координат, к прямой, проходящей через $\mathbf{v}_{-2}$ и $\mathbf{v}_0$, лежат на этой прямой. Тогда существует такой единственный полигон Клейна $\mathcal{K}$ с вершинами $\mathbf{v}_{2m}$, $m \in \mathbb{Z}$, что для каждого целого m*

(а) $[\mathbf{v}_{2m-2}, \mathbf{v}_{2m}]$ — *ребро $\mathcal{K}$;*

(б) a_{2m} — *целочисленная длина отрезка $[\mathbf{v}_{2m-2}, \mathbf{v}_{2m}]$;*

(в) a_{2m+1} — *целочисленный угол, соответствующий вершине $\mathbf{v}_{2m}$.*

Доказательство. Если такой полигон $\mathcal{K}$ существует, то его вершины и вершины смежного полигона Клейна удовлетворяют (1.3.1) в силу следствия 1.2.1. В этой связи положим $\mathbf{v}_{-1} = (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{-2})/a_0$ и определим последовательность $(\mathbf{v}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ при помощи (1.3.1). Также обозначим

$$\Delta_k = \operatorname{conv}(\mathbf{0}, \mathbf{v}_{k-2}, \mathbf{v}_k).$$

Векторы $\mathbf{v}_{-2}, \mathbf{v}_{-1}$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^2$. Без ограничения общности мы можем полагать, что $\det(\mathbf{v}_{-2}, \mathbf{v}_{-1}) = 1$. Тогда из (1.3.1) следует, что для каждого целого k выполняется

$$\det(\mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k) = (-1)^{k-1} \quad \text{и} \quad \det(\mathbf{v}_{k-2}, \mathbf{v}_k) = (-1)^k a_k.$$

Таким образом, любые два треуголника Δ_k и Δ_{k+2} имеют общую сторону и не накладываются друг на друга. Более того,

$$\det(\mathbf{v}_{k-2} - \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+2} - \mathbf{v}_k) = -a_k a_{k+2} \det(\mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_{k+1}) = (-1)^k a_k a_{k+1} a_{k+2}.$$

Из этого следует, что любой четырехугольник $\Delta_k \cup \Delta_{k+2}$ невыпуклый, то есть ломаная линия с вершинами $\ldots, \mathbf{v}_{-2}, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_2, \ldots$ является границей выпуклого множества — (обобщенного) выпуклого многоугольника $\mathcal{K}$, который имеет общую сторону с каждым Δ_{2m} и не накладывается на Δ_{2m}. Итак, множество

$$\mathcal{K} \cup \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \Delta_{2m}$$

образует угол C, образованный некоторыми прямыми l_1 и l_2. Остается заметить, что все ненулевые точки решетки $\mathbb{Z}^2$, принадлежащие треугольнику Δ_k, лежат на стороне $[\mathbf{v}_{k-2}, \mathbf{v}_k]$ этого треугольника, а значит,

$$\mathcal{K} = \operatorname{conv}(\mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}).$$

$\square$

Для любых двух отрезков $[\mathbf{v}_{-2}, \mathbf{v}_0]$ и $[\mathbf{v}'_{-2}, \mathbf{v}'_0]$, удовлетворяющих условиям леммы 1.3.1, существует такой единственный оператор $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, что $A\mathbf{v}_{-2} = \mathbf{v}'_{-2}$ и $A\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}'_0$. Тогда, в силу леммы 1.3.1 верно

Следствие 1.3.1. *Пусть для двух полигонов Клейна их 1-скелеты, оснащенные целочисленными длинами и целочисленными углами, изоморфны. Тогда существует* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ *оператор, который отображает один полигон Клейна на другой в соответствии с этим изоморфизмом.*

1.4 Полигоны Клейна и цепные дроби

Предложение 1.4.1. *В соответствии с формулировкой следствия 1.2.1 положим $k, m \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant m$ и определим p и q как коэффициенты разложения по базису: $\mathbf{v}_k = q\mathbf{v}_{m-2} + p\mathbf{v}_{m-1}$. Тогда p и q — взаимно-простые целые числа, и*

$$\frac{p}{q} = [a_m; a_{m+1}, \ldots, a_k].$$

Доказательство. Поскольку $\mathbf{v}_k$ — примитивный вектор, то p и q — взаимно-простые целые числа. Оставшееся докажем с помощью индукции по m, зафиксировав k. Случай $m = k$ повторяет утверждение (г) следствия 1.2.1. Шаг индукции от m к $m-1$ следует из соотношения

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_k = q\mathbf{v}_{m-2} + p\mathbf{v}_{m-1} = \\ = q\mathbf{v}_{m-2} + p(\mathbf{v}_{m-3} + a_{m-1}\mathbf{v}_{m-2}) = \\ = p\big(\mathbf{v}_{m-3} + (a_{m-1} + q/p)\mathbf{v}_{m-2}\big).\end{aligned}$$

$\square$

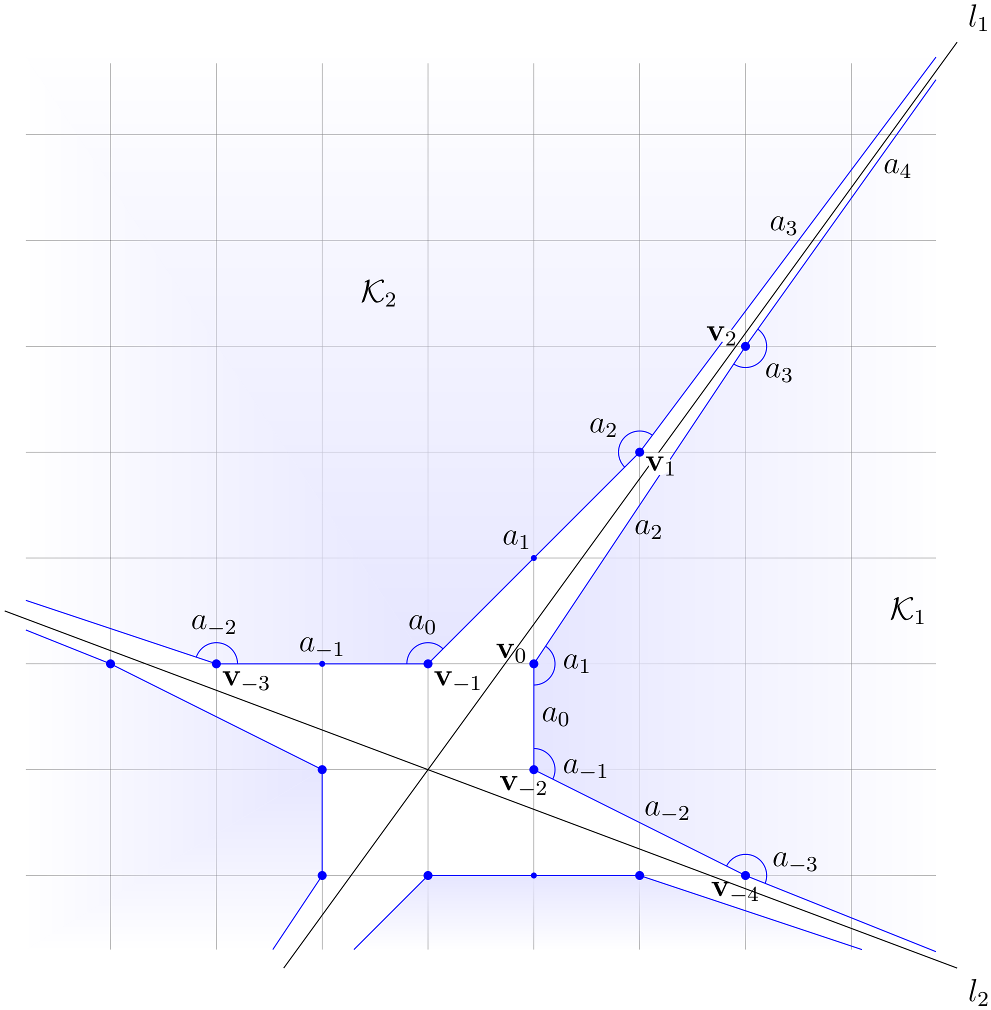

Рис. 1.3: Полигоны Клейна и цепные дроби

Предложение 1.4.1 позволяет называть границы двух смежных полигонов Клейна геометрической версией цепных дробей (см. [11]). Покажем, как последовательность $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ целочисленных длин и целочисленных углов, записанная вдоль границ полигонов Клейна, связана с последовательностью неполных частных чисел α и β. Наиболее явно это можно увидеть, если

$$\alpha > 1, \quad -1 < \beta < 0. \tag{1.4.1}$$

В этом случае точки $(1,0)$ и $(0,1)$ — вершины $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ (см. рис. 1.3), и мы можем положить

$$\mathbf{v}_{-2} = (1,0), \quad \mathbf{v}_{-1} = (0,1). \tag{1.4.2}$$

Предложение 1.4.2. *Пусть α и β удовлетворяют (1.4.1). Пусть последовательность $(\mathbf{v}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, определяется через $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ соотношениями (1.3.1) и (1.4.2). Тогда*

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots] \quad \text{и} \quad -1/\beta = [a_{-1}; a_{-2}, a_{-3}, \ldots].$$

При этом для любого $k \geqslant 0$ имеем $\mathbf{v}_k = (q_k, p_k)$, где p_k и q_k — числитель и знаменатель k-ой подходящей дроби α.

Доказательство. Применяя предложение 1.4.1 в случае $m = 0$ получаем, что $\mathbf{v}_k = (q_k, p_k)$, где p_k и q_k такие взаимно-простые целые числа, что

$$\frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, \ldots, a_k].$$

Далее, точки $\mathbf{v}_k$ стремятся к l_1 при $k \to \infty$, то есть $p_k/q_k \to \alpha$ при $k \to \infty$. Таким образом,

$$\alpha = \lim_{k\to\infty}[a_0; a_1, \ldots, a_k] = [a_0; a_1, a_2, \ldots].$$

Соотношение на $-1/\beta$ получается поворотом конструкции на угол $\pi/2$, при котором прямая l_1 переходит в прямую l'_2, которая порождена вектором $(1, -1/\alpha)$, а прямая l_2 переходит в прямую l'_1, которая порождена вектором $(1, -1/\beta)$. Остается применить для прямых l'_1 и l'_2 те же самые рассуждения, что и для α. При этом $-1/\beta > 1$ и $-1 < -1/\alpha < 0$. □

Если $\alpha > \beta$, но (1.4.1) не выполняется, то соотношения из предложения 1.4.2 более не выполняются, поскольку отрезок с концами $(1, 0)$ и $([\alpha], 0)$ перестает быть ребром соответствующего полигона Клейна. Легко показать следующее

Предложение 1.4.3. *Если $\alpha > \beta$, тогда (1.4.1) эквивалентно любому из следующих утверждений:*

(а) *точки $(1, 0)$ и $(0, 1)$ — вершины смежных полигонов Клейна, соответствующих прямым l_1 и l_2;*

(б) *отрезок с концами $(1, 0)$ и $(1, [\alpha])$ — ребро полигона Клейна, соответствующего прямым l_1 и l_2.*

Так как $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ операторы сохраняют целочисленные углы и целочисленные длины, то для произвольных α и β верно следующее

Предложение 1.4.4. *Пусть $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ - смежные полигоны Клейна, соответствующие прямым l_1 и l_2 и разделенные прямой l_1. Пусть $(\mathbf{v}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ с выбранной вершиной $\mathbf{v}_0$ из обозначений следствия 1.2.1. Тогда существует такой единственный оператор $X \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, что верно следующее:*

(а) *$X\mathbf{v}_{-2} = (1,0)$, $X\mathbf{v}_{-1} = (0,1)$, а, значит, и $X\mathbf{v}_0 = (1, a_0)$;*

(б) *$X(l_1) = \hat{l}_1$, $X(l_2) = \hat{l}_2$, где прямые $\hat{l}_1$ и $\hat{l}_2$ порождены векторами $(1,\hat{\alpha})$ и $(1,\hat{\beta})$ соответственно (в частности, $\alpha \sim \hat{\alpha}$, $\beta \sim \hat{\beta}$);*

(в) *$\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ удовлетворяют (1.4.1);*

(г) *последовательность (a_k) образована склейкой бесконечных вправо и влево последовательностей всех неполных частных цепных дробей $\hat{\alpha}$ и $-1/\hat{\beta}$ соответственно.*

1.5 Квадратичные иррациональности

Теорема Лагранжа. Если цепная дробь числа α периодична, то, $(1,\alpha)$ — собственный вектор оператора из $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ в силу предложения 1.4.2 и следствия 1.2.1. Действительно, мы можем предположить, что $\alpha > 1$ и рассмотреть число β, для которого выполняется (1.4.1). Пусть последовательность $(\mathbf{v}_k)$ определена как в следствии 1.2.1. Тогда, если t — длина периода и s — длина предпериода, то оператор A, определенный соотношением

$$A\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_{s+2t}, \quad A\mathbf{v}_{s+1} = \mathbf{v}_{s+1+2t},$$

отображает всю последовательность $(\mathbf{v}_k)_{k\geqslant s}$ на свою подпоследовательность и сохраняет ориентацию. Поэтому $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ и $A(l_1) = l_1$. Таким образом, α — квадратичная иррациональность, что доказывает простую часть теоремы Лагранжа.

Для доказательства более сложной части теоремы Лагранжа, рассмотрим оператор $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ с положительными иррациональными собственными значениями. Пусть $(1,\alpha)$, $(1,\beta)$ — собственные векторы этого оператора, и $\alpha \neq \beta$. Нетрудно заметить, что α и β — сопряженные квадратичные иррациональности. Обозначим угол между векторами $(1, \alpha)$ и $(1, \beta)$ через C, а соответствующий полигон Клейна через $\mathcal{K}$,

$$\mathcal{K} = \mathrm{conv}(\mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}).$$

Тогда $A(C) = C$, $A(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$, $A(\partial\mathcal{K}) = \partial\mathcal{K}$, где $\partial\mathcal{K}$ — граница полигона Клейна $\mathcal{K}$. Это означает, что последовательность (a_k) целочисленных длин и целочисленных углов, записанная вдоль $\partial\mathcal{K}$ отображается на себя при действии оператора A. Таким образом, данная последовательность периодична. Применяя предложение 1.4.4, получаем, что α и β имеют периодичные цепные дроби.

Осталось показать, что для любой квадратичной иррациональности α существует такой оператор $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, что вектор $(1, \alpha)$ является собственным для A. Один из стандартных способов — показать, что если α является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $ac < 0$, то квадратичная форма

$$f(x, y) = cx^2 + 2bxy + ay^2$$

допускает $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-автоморфизм с неотрицательными элементами. Такой автоморфизм порождает гиперболический сдвиг вдоль прямых, порожденными векторами $(1, \alpha)$ и $(1, \beta)$, где β — сопряженное к α число.

Замечание. Условие $ac < 0$ может быть легко выполнено в силу утверждений (б) и (в) предложения 1.4.4, так как если α и β — сопряженные квадратичные иррациональности, то α' и β' также сопряженные квадратичные иррациональности.

Автоморфизм формы $f(x, y)$ может быть найден с помощью последовательного выполнения следующих замен

$$(x, y) \to (x, x + y) \quad \text{или} \quad (x, y) \to (x + y, y),$$

которые мы выбираем в зависимости от знака $f(1, 1)$. В начале мы имеем

$$f(0, 1)f(1, 0) = ac < 0.$$

Если для текущей формы $f(x,y)$ мы имеем $f(1,1)f(0,1) < 0$, то будем применять первую замену. Если $f(1,1)f(1,0) < 0$, то будем выбирать вторую замену. Рассмотренные произведения ненулевые, поскольку $f(x,y)$ никогда не обращается в ноль на ненулевых точках решетки $\mathbb{Z}^2$. Выбор замены однозначен и, при замене, сохраняется неравенство

$$f(0,1)f(1,0) < 0.$$

Более того, замены не изменяют значения положительного дискриминант $b^2 - ac$. Из этого следует, что существует лишь конечное множество возможных наборов значений коэффициентов. Таким образом, так как данный процесс обратим, начальная тройка (a,b,c) встретится вновь. То есть мы нашли такой неединичный $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ с неотрицательными элементами, что

$$f(x,y) = (x \;\; y)\begin{pmatrix} c & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \;\; y)A^{\mathsf{T}}\begin{pmatrix} c & b \\ b & a \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Итак, $(1,\alpha)$ и $(1,\beta)$ — собственные значения A, что завершает доказательство теоремы Лагранжа.

Теорема Галуа. Пусть α и β — сопряженные квадратичные иррациональности. Тогда, как было только что показано, $(1,\alpha)$ и $(1,\beta)$ — собственные векторы оператора $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Учитывая предложение 1.4.4, можно заметить, что период α является записанным в обратном порядке периодом β. Более того, если α и β удовлетворяют соотношениям (1.4.1), то, в силу предложения 1.4.2 цепные дроби чисел α и $-1/\beta$ не имеют никаких предпериодов. В добавок к этому, если цепная дробь α чисто периодична, то выполняется утверждение (б) предложения 1.4.3, поэтому α и β удовлетворяют (1.4.1), а значит, цепная дробь числа $-1/\beta$ не имеет предпериода в силу предложения 1.4.2.

Это дает нам доказательство теоремы Галуа из введения.

Геометрия квадратичных иррациональностей. Из доказательств теорем Лагранжа и Галуа следует

Предложение 1.5.1. *Пусть α и β — квадратичные иррациональности. Следующие утверждения эквивалентны:*

(а) *α и β — сопряженные числа;*

(б) *$(1, \alpha)$ и $(1, \beta)$ — собственные векторы некоторого $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ оператора;*

(в) *(a_k) — периодичная последовательность целочисленных длин и целочисленных углов, записанная вдоль границы полигона Клейна, соответствующего прямым l_1 и l_2;*

(г) *существует такой $X \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, что $X(l_1) = \hat{l}_1$, $X(l_2) = \hat{l}_2$, где прямые $\hat{l}_1$ и $\hat{l}_2$ порождены векторами $(1, \hat{\alpha})$ и $(1, \hat{\beta})$ соответственно, и*

$$\hat{\alpha} = [\overline{a_0; a_1, \ldots, a_t}], \quad -1/\hat{\beta} = [\overline{a_t; a_{t-1}, \ldots, a_0}].$$

1.6 Доказательство теоремы 1

Пусть α - квадратичная иррациональность. Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ прямые l_1' и l_2', проходящие через начало координат $\mathbf{0}$, порождённые двумя различными векторами $(1, \alpha)$ и $(1, \alpha')$ соответственно. Пусть $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ — последовательность целочисленных длин и целочисленных углов, записанная вдоль границы полигона Клейна, соответствующего прямым l_1' и l_2'. При этом, длину любого фиксированного ребра или вершинного отрезка полигона Клейна можно обозначать за a_0.

Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ прямые l_1 и l_2, проходящие через начало координат $\mathbf{0}$, порождённые двумя различными векторами $(1, \omega)$ и $(1, \omega')$ соответственно. Если $\omega \sim \alpha$, то существует такой $X \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, что $X(l_1') = l_1$ и $X(l_2') = l_2$. В этом случае $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ — последовательность целочисленных длин и целочисленных углов, записанная вдоль границы полигона Клейна, соответствующего прямым l_1 и l_2.

По теореме Лагранжа последовательность (a_k) периодична, и её период a совпадает с периодом цепной дроби α. При этом период a является циклическим палиндромом тогда и только тогда, когда соответствующая бесконечная последовательность $(\bar{a}) = (a_k)$ симметрична. Центром этой симметрии является либо элемент (a_k), и в таком случае период представим в виде объединения регулярного палиндрома и этого центра; либо позиция между элементами (a_k), и в таком случае период представим в виде регулярного палиндрома. Таким образом, центр симметрии может быть *четным*, *нечетным* или *межпозиционным.*

Лемма 1.6.1. *Последовательность* (a_k) *имеет четный центр тогда и только тогда, когда*

$$\alpha \sim \omega : \ \omega + \omega' = 0. \tag{1.6.1}$$

Доказательство. Пусть ω удовлетворяет (1.6.1). В этом случае l_1 и l_2 симметричны относительно координатных осей. Обозначим полигон Клейна, содержащий точку $(1,1)$, через $\mathcal{K}$, и положим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда, если $|\omega| > 1$, то имеет место $A\mathcal{K} = \mathcal{K}$, и a_0 можно сопоставить вертикальному ребру полигона $\mathcal{K}'$ (см. рис. 1.4). Если $|\omega| < 1$, то имеет место $B\mathcal{K} = \mathcal{K}$, и a_0 можно сопоставить вертикальному ребру $\mathcal{K}''$ (см рис. 1.4). Тогда a_0 — четный центр симметрии (a_k).

Обратно, для данного (a_k) с четным центром a_0 положим

$$\mathbf{v}_{-2} = (1, -a_0/2), \quad \mathbf{v}_0 = (1, a_0/2).$$

В силу леммы 1.3.1 для последовательности (a_k) и выбранной начальной пары $(\mathbf{v}_{-2}, \mathbf{v}_0)$ существует единственный полигон $\mathcal{K}$, соответствующий прямым l_1 и l_2 для некоторого $\omega \sim \alpha$. При этом $A\mathbf{v}_{-2} = \mathbf{v}_0$, $A\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_{-2}$. Повторное применение леммы 1.3.1 к паре $(A\mathbf{v}_{-2}, A\mathbf{v}_0)$ и центральная симметрия (a_k) влекут следующие равенства:

$$A\mathcal{K} = \mathcal{K}, \quad A(l_1) = l_2, \quad A(l_2) = l_1.$$

Итак, $\omega' = -\omega$. $\square$

Лемма 1.6.2. *Последовательность* (a_k) *имеет нечетный центр тогда и только тогда, когда*

$$\alpha \sim \omega : \ \omega + \omega' = 1. \tag{1.6.2}$$

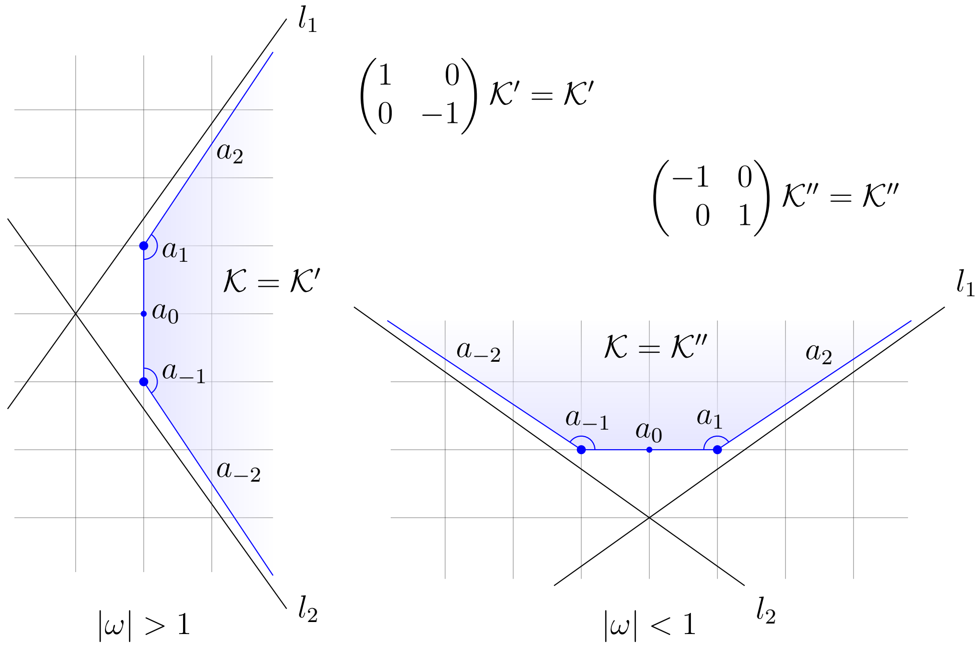

Рисунок 1.4: Симметрии в случае $\omega + \omega' = 0$

Доказательство. Пусть ω удовлетворяет (1.6.2). В этом случае l_1 и l_2 меняются местами при действии операторов

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Обозначим полигон Клейна, содержащий точку $(1,1)$, через $\mathcal{K}$.

Мы можем полагать, что $\omega > \omega'$. В частности, $\omega > 1/2$.

Если $\omega > 1$, то существует ребро полигона $\mathcal{K} = \mathcal{K}'$, содержащее точки $(1,0)$ и $(1,1)$. Тогда этому ребру можно сопоставить a_0 (см. рис. 1.5). Значит, a_0 — нечетный центр симметрии (a_k), так как

$$A\mathcal{K} = \mathcal{K} \quad \text{и} \quad A\begin{pmatrix}1\\ 1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1/2\end{pmatrix}.$$

Если $\omega < 1$, то существует ребро полигона $\mathcal{K} = \mathcal{K}''$, содержащее точки $(-1,0)$ и $(1,1)$. Тогда этому ребру можно сопоставить a_0 (см. рис. 1.5). Значит, a_0 — нечетный центр симметрии (a_k), так как

$$B\mathcal{K} = \mathcal{K} \quad \text{и} \quad B\begin{pmatrix}0\\ 1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1/2\end{pmatrix}.$$

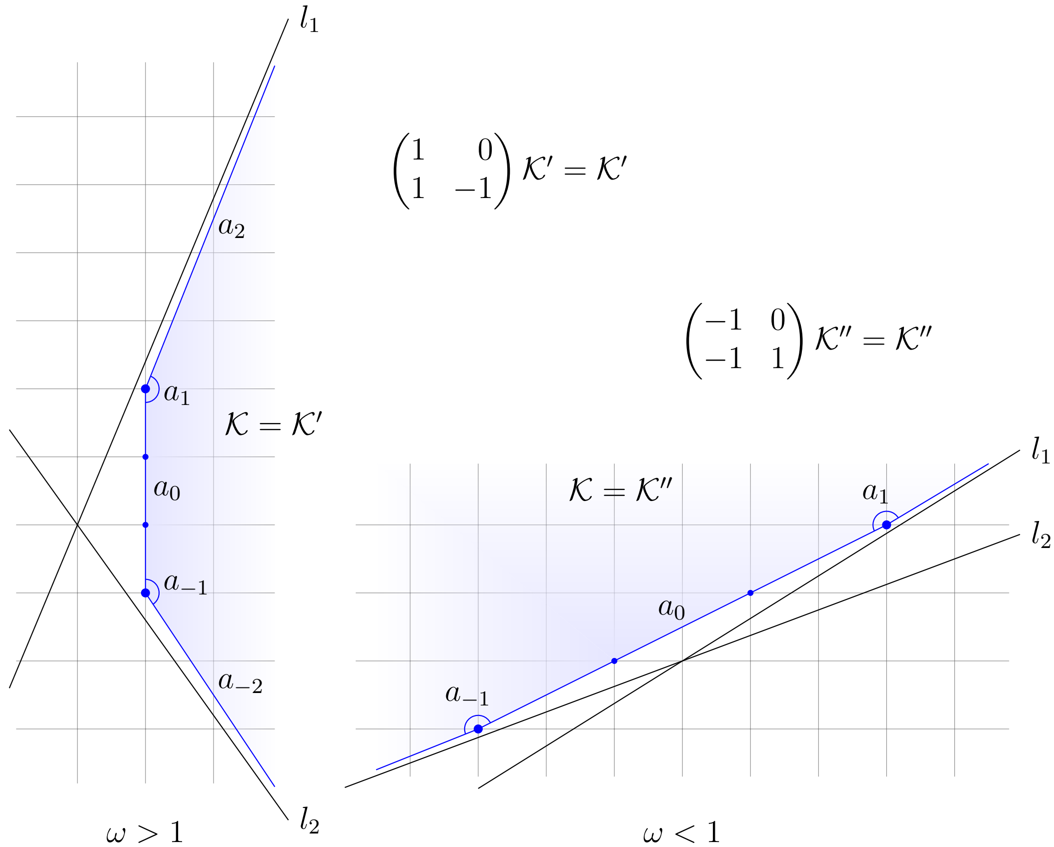

Рисунок 1.5: Симметрии в случае $\omega + \omega' = 1$

Обратно, для данного (a_k) с нечетным центром a_0 положим

$$\mathbf{v}_{-2} = (1, (1 - a_0)/2), \quad \mathbf{v}_0 = (1, (1 + a_0)/2).$$

Рассуждения из обратной части доказательства леммы 1.6.1 аналогичным образом устанавливают соотношения:

$$A\mathcal{K} = \mathcal{K}, \quad A(l_1) = l_2, \quad A(l_2) = l_1.$$

Итак, $\omega' = 1 - \omega$. □

Лемма 1.6.3. *Последовательность (a_k) имеет нечетный центр тогда и только тогда, когда*

$$\alpha \sim \omega : \ \omega\omega' = 1. \tag{1.6.3}$$

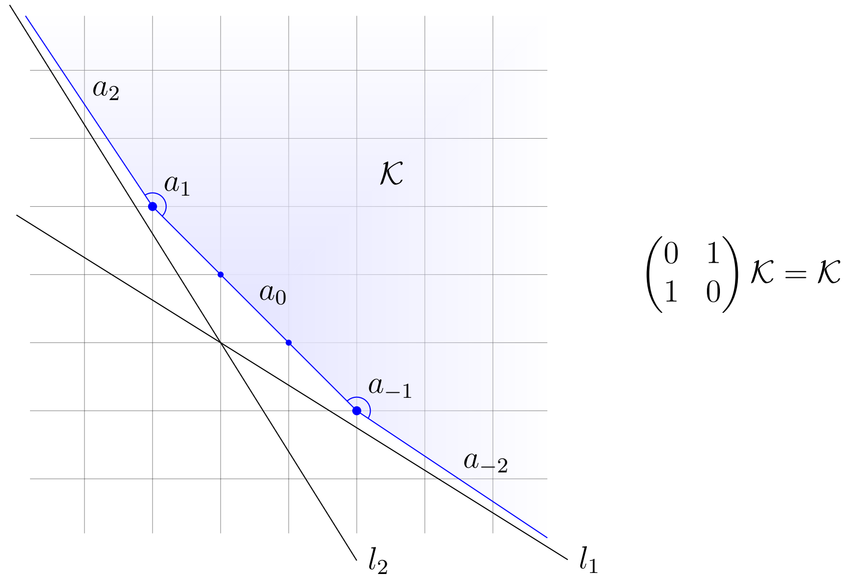

Рисунок 1.6: Симметрии в случае $\omega\omega' = 1$

Доказательство. Пусть ω удовлетворяет (1.6.3). В этом случае l_1 и l_2 меняются местами при действии оператора

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть, для определенности, $\omega < 0$. Обозначим через $\mathcal{K}$ — полигон Клейна, содержащий на своем ребре точки $(1, 0)$ и $(0, 1)$ (см. рис. 1.6). Тогда этому ребру можно сопоставить a_0. Значит, a_0 — нечетный центр симметрии (a_k), так как

$$A\mathcal{K} = \mathcal{K} \quad \text{и} \quad A \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Обратно, для данного (a_k) с нечетным центром a_0 положим

$$\mathbf{v}_{-2} = \left(\frac{1 + a_0}{2}, \frac{1 - a_0}{2} \right), \quad \mathbf{v}_0 = \left(\frac{1 - a_0}{2}, \frac{1 + a_0}{2} \right).$$

Рассуждения из обратной части доказательства леммы 1.6.1 аналогичным образом устанавливают соотношения:

$$A\mathcal{K} = \mathcal{K}, \quad A(l_1) = l_2, \quad A(l_2) = l_1.$$

Итак, $\omega' = 1/\omega$. $\square$

Лемма 1.6.4. *Последовательность* (a_k) *имеет межпозиционный центр тогда и только тогда, когда*

$$\alpha \sim \omega : \ \omega\omega' = -1. \tag{1.6.4}$$

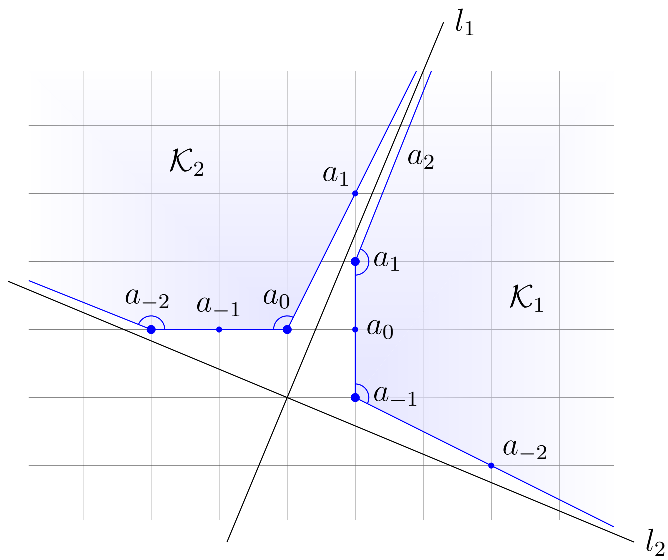

Рисунок 1.7: Симметрии в случае $\omega\omega' = -1$

Доказательство. Пусть ω удовлетворяет (1.6.4). В этом случае l_1 и l_2 ортогональны и меняются местами при действии оператора

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть для определенности $\omega > 1$. Тогда ω и ω' удовлетворяют (1.4.1) и можно положить

$$\mathbf{v}_{-2} = (1, 0), \quad \mathbf{v}_{-1} = (0, 1),$$

сопоставляя a_0 вертикальному ребру полигона Клейна, соответствующему углу между $(1, \omega)$ и $(1, \omega')$ (см. рис. 1.7). Таким образом, для любого четного k верно $A\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{-3-k}$, откуда для любого целого k

$$a_k = a_{-1-k}\,, \tag{1.6.5}$$

что эквивалентно симметрии (a_k) с центром в позиции между a_0 и a_{-1}

Обратно, для данного (a_k) с центром симметрии в позиции между a_0 и a_{-1} положим

$$\mathbf{v}_{-2} = (1,0), \quad \mathbf{v}_0 = (1, a_0).$$

При выполнении (1.6.5) два полигона Клейна $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ с соответствующими вершинами $\mathbf{v}_{2m}$ и $\mathbf{v}_{2m+1}$, $m \in \mathbb{Z}$ являются изоморфными. Тогда, в силу следствия 1.3.1 существует такой $B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, что

$$B\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{-3-k}\,.$$

Но отрезок $[\mathbf{v}_{-1}, \mathbf{v}_{-3}]$ ортогонален $[\mathbf{v}_{-2}, \mathbf{v}_0]$. Итак, $B = A$ и $\omega\omega' = -1$. $\square$

Объединяя леммы 1.6.1 - 1.6.4, получаем доказательство теоремы 1.

Покажем дополнительно эквивалентности внутри условий (а) и (б) теоремы 1. Эквивалентность $\omega + \omega' = 0 \iff \omega^2 \in \mathbb{Q}$ очевидна. Проверим эквивалентность внутри условия (б). Пусть ω - квадратичная иррациональность, удовлетворяющая равенству

$$\omega + \omega' = 1.$$

Тогда $(x-\omega)(x-\omega') = (x-\omega)(x+\omega-1) = x^2 - x + (\omega - \omega^2)$. При этом трехчлен, решением которого является квадратичная иррациональность, имеет рациональные коэффициенты, откуда

$$x^2 - x + (\omega - \omega^2) = x^2 - x + \frac{m}{n}, \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}.$$

Положительное решение этого уравнения имеет вид $\omega_+ = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{n+4m}{4n}}$. Таким образом, это решение является числом вида $\sqrt{\frac{p}{q}} + \frac{1}{2}$, где $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Более того, для любых $p, q \in \mathbb{Q}$ существуют такие рациональные $m = 4p - q, n = 4q$, что

$$\frac{n+4m}{4n} = \frac{4q + 16p - 4q}{16q} = \frac{p}{q}.$$

Глава 2

Симметрии многомерных алгебраических цепных дробей в произвольной размерности

2.1 Паруса Клейна и многомерные цепные дроби

Геометрическая конструкция, рассматриваемая в главе 1, позволяет весьма изящно перейти от классического случая к многомерному (см. [12] и, например, [10], [13], [11]). Для описания такого обобщения рассмотрим $l_1, \ldots, l_n$ — одномерные подпространства пространства $\mathbb{R}^n$, линейная оболочка которых совпадает со всем $\mathbb{R}^n$. Гиперпространства, натянутые на всевозможные $(n-1)$-наборы из этих подпространств, разбивают $\mathbb{R}^n$ на 2^n симплициальных конусов. Будем обозначать множество этих конусов через

$$\mathcal{C}(l_1, \ldots, l_n).$$

Симплициальный конус с вершиной в начале координат $\mathbf{0}$ будем называть *иррациональным*, если линейная оболочка любой его гиперграни не содержит целых точек, кроме начала координат $\mathbf{0}$.

Определение 4. Пусть C — иррациональный конус, $C \in \mathcal{C}(l_1, \ldots, l_n)$. Выпуклая оболочка $\mathcal{K}(C) = \operatorname{conv}(C \cap \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\})$ и его граница $\partial(\mathcal{K}(C))$ называются соответственно *полиэдром Клейна* и *парусом Клейна*, соответствующими конусу C. Объединение всех 2^n парусов

$$\mathrm{CF}(l_1,\ldots,l_n) = \bigcup_{C\in\mathcal{C}(l_1,\ldots,l_n)} \partial(\mathcal{K}(C))$$

называется $(n-1)$-*мерной цепной дробью.*

В иррациональном случае каждый полиэдр Клейна $\mathcal{K}(C)$ является обобщённым многогранником, то есть его пересечение с любым компактным многогранником — также компактный многогранник. В этом случае каждый парус $\partial(\mathcal{K}(C))$ является полиэдральной поверхностью, гомеоморфной $\mathbb{R}^{n-1}$ и состоящей из $(n-1)$-мерных многогранников. Об этом говорит следующее (см. [14])

Предложение 5. *Пусть C — иррациональный конус. Тогда:*

(а) $\mathcal{K}(C)$ *— замкнутое множество;*

(б) $\pi\cap C$ *— компактное множество и* $\pi\cap\partial(\mathcal{K}(C))$ *— выпуклый многогранник для любой опорной гиперплоскости* π *к* $\mathcal{K}(C)$*;*

(в) $\partial(\mathcal{K}(C))$ *является объединением* $(n-1)$*-мерных граней, любая точка из* $\partial(\mathcal{K}(C))$ *лежит лишь в конечном множестве этих граней;*

(г) $\partial(\mathcal{K}(C))$ *гомеоморфен* $\mathbb{R}^{n-1}$.

$(n-1)$-мерные многогранники, из которых состоит парус $\partial(\mathcal{K}(C))$, вообще говоря, могут быть неограниченными (отсутствие неограниченных граней равносильно иррациональности двойственного к C конуса — подробнее см. в [15]). Грани полиэдра Клейна, будучи многомерными аналогами рёбер полигонов Клейна, играют роль неполных частных. Эта аналогия проявилась в результатах, полученных в работах [15], [13], [16] (см. также книгу [11]).

2.2 Алгебраические цепные дроби и их симметрии

Про обыкновенные цепные дроби алгебраических чисел степени $n\geqslant 3$ известно не много, не известно даже, могут ли неполные частные такого числа быть чем-то ограничены. Геометрические же цепные дроби, строящиеся по алгебраическим числам, обладают периодической структурой

— так же, как полигоны Клейна, строящиеся по квадратичным иррациональностям. Дело в том, что алгебраические числа степени n тесно связаны с операторами из $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Напомним, что оператор из $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ с вещественными собственными значениями, характеристический многочлен которого неприводим над $\mathbb{Q}$, называется *гиперболическим*. Все собственные значения гиперболического оператора различны, поскольку иначе характеристический многочлен этого оператора и его производная имели бы в качестве общего множителя многочлен ненулевой степени с рациональными коэффициентами. Известно, что выполняется следующее

Предложение 6. *Числа $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ образуют базис некоторого вполне вещественного расширения K поля $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда вектор $(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ является собственным для некоторого гиперболического оператора $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. При этом векторы $(1, \sigma_i(\alpha_1), \ldots, \sigma_i(\alpha_{n-1}))$, $i = 1, \ldots, n$, где $\sigma_1(= \mathrm{id}), \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ — все вложения K в $\mathbb{R}$, образуют базис $\mathbb{R}^n$, состоящий из собственных векторов оператора A.*

Замечание. Эквивалентность пунктов (а) и (б) предложения 1.5.1 следует также из предложения 6 в размерности $n = 2$.

В размерности $n = 2$ предложение 6 позволяет геометрически проинтерпретировать классическую теорему Лагранжа о периодичности обыкновенной цепной дроби. Геометрически теорема Лагранжа означает, что последовательность целочисленных длин и углов паруса одномерной цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2)$ периодична тогда и только тогда, когда направления l_1 и l_2 являются собственными для некоторого $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ оператора с различными вещественными собственными значениями (см. предложение 1.5.1).

Определение 5. Пусть $l_1, \ldots, l_n$ — собственные подпространства некоторого гиперболического оператора $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Тогда $(n-1)$-мерная цепная дробь $\mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n)$ называется *алгебраической*. Мы будем также говорить, что эта дробь *ассоциирована* с оператором A и писать $\mathrm{CF}(A) = \mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n)$. Множество всех $(n-1)$-мерных алгебраических цепных дробей будем обозначать $\mathfrak{A}_{n-1}$.

Будем называть *группой симметрий* алгебраической цепной дроби $\mathrm{CF}(A) = \mathrm{CF}(l_1, \dots, l_n)$ множество

$$\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big) = \Big\{ G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \;\Big|\; G\big(\mathrm{CF}(A)\big) = \mathrm{CF}(A) \Big\}.$$

Из соображений непрерывности ясно, что для каждого $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$ однозначно определена перестановка σ_G, такая что

$$G(l_i) = l_{\sigma_G(i)}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{1}$$

И обратно, если для $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ существует такая перестановка σ_G, что выполняются соотношения (1), то $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$.

Ясно, что если $\mathrm{CF}(l_1, \dots, l_n) = \mathrm{CF}(A) \in \mathfrak{A}_{n-1}$, то оператор A, а также любая его степень, сохраняет цепную дробь $\mathrm{CF}(l_1, \dots, l_n)$ (то есть отображает объединение всех 2^n парусов на себя). Из теоремы Дирихле об алгебраических единицах следует, что существует подгруппа группы $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$, изоморфная $\mathbb{Z}^{n-1}$, каждый элемент которой коммутирует с A и сохраняет $\mathrm{CF}(l_1, \dots, l_n)$. Стоит отметить, что относительно действия этой подгруппы на любом из 2^n парусов возникает фундаментальная область, которую можно отождествить с $(n-1)$-мерным тором (см. [10]). Для каждого элемента G, принадлежащего этой подгруппе, $\sigma_G = \mathrm{id}$.

Определение 6. Оператор $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$ такой, что $\sigma_G = \mathrm{id}$, будем называть *симметрией Дирихле* дроби $\mathrm{CF}(A) \in \mathfrak{A}_{n-1}$. Группу всех симметрий Дирихле будем называть *группой Дирихле* оператора A и обозначать $\mathrm{Dir}(A)$.

В $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$, вообще говоря, могут существовать такие элементы G, для которых $\sigma_G \neq \mathrm{id}$.

Определение 7. Оператор $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$, не являющийся симметрией Дирихле, будем называть *палиндромической симметрией* дроби $\mathrm{CF}(A)$. Если множество палиндромических симметрией цепной дроби непусто, то такую цепную дробь будем называть *палиндромичной*.

Определение 8. Симметрия $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$ называется *циклической*, если σ_G — циклическая перестановка.

Очевидно, что все циклические симметрии цепной дроби $\mathrm{CF}(A)$ являются палиндромическими симметриями этой цепной дроби.

Определение 9. Палиндромическая симметрия $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$ называется *собственной*, если у оператора G существует неподвижная точка на некотором парусе цепной дроби $\mathrm{CF}(A)$. Палиндромическая симметрия $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$, не являющаяся собственной, называется *несобственной*.

В данной главе диссертации приводится доказательство предложения 6, а также для произвольной алгебраичской цепной дроби $\mathrm{CF}(A) \in \mathfrak{A}_{n-1}$ устанавливается изоморфизм $\mathrm{Dir}(A) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^{n-1}$. Также в этой главе доказывается существование палиндромичных цепных дробей в произвольной размерности:

Теорема 2. *Для любого целого* $n > 1$ *существует* $(n-1)$*-мерная цепная дробь* $\mathrm{CF}(A)$*, обладающая собственной циклической палиндромической симметрией.*

2.3 Симметрии Дирихле

Покажем, что группа $\mathrm{Dir}(A)$ гиперболического оператора $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ совпадает с множеством операторов из $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, представимых как многочлены с рациональными коэффициентами от A (см. [10]).

Предложение 2.3.1. *Пусть матрица* A *— гиперболический оператор. Тогда любая матрица* $B \in \mathrm{Dir}(A)$ *представима в виде многочлена от* A *степени* $n-1$ *с рациональными коэффициентами.*

Доказательство. Для начала покажем, что для любого вектора $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbf{0}$ набор векторов $\mathbf{e}$, $A\mathbf{e}$, $\ldots$, $A^{n-1}\mathbf{e}$ образует базис пространства $\mathbb{R}^n$. Предположим, что это не так. Рассмотрим инвариантное относительно действия A рациональное подпространство $V = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\mathbf{e}, A\mathbf{e}, \ldots, A^{n-1}\mathbf{e})$. Если $\dim V < n$, то, выбрав целочисленные базисы подпространств V и $V^{\perp}$, получаем равенство $\chi_{A|V}\chi_{A|V^{\perp}} = \chi_A$, где слева стоят многочлены ненулевой степени с рациональными коэффициентами, чего не может быть.

Пусть $B \in \mathrm{Dir}(A)$. Выберем некоторый вектор $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbf{0}$. Поскольку набор $\mathbf{e}$, $A\mathbf{e}$, ..., $A^{n-1}\mathbf{e}$ образует базис пространства $\mathbb{R}^n$, то целочисленный вектор $B\mathbf{e}$ в этом базисе имеет рациональные координаты, то есть $B\mathbf{e} = b_0\mathbf{e} + b_1 A\mathbf{e} + \ldots b_{n-1}A^{n-1}\mathbf{e}$, где $b_i \in \mathbb{Q}$ для любого $i = 0, 1, \ldots n-1$. Покажем, что $B = b_0 I_n + b_1 A + \ldots b_{n-1}A^{n-1}$. Действительно, поскольку операторы A и B коммутируют, имеем

$$B(A^k\mathbf{e}) = A^k(B\mathbf{e}) = (b_0 I_n + b_1 A + \ldots b_{n-1}A^{n-1})(A^k\mathbf{e}).$$

Доказательство утверждения в обратную сторону очевидно. □

Замечание. Заметим, что в доказательстве не использовалось условие $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, а значит, факт верен для всех $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z})$, коммутирующих с A.

Более явное, на наш взгляд, описание группы $\mathrm{Dir}(A)$ даёт теорема Дирихле об алгебраических единицах.

Напомним, что модуль M, содержащийся в конечном расширении K поля $\mathbb{Q}$, называется *полным*, если его ранг максимален, то есть равен $[K:\mathbb{Q}]$. Если M — полный модуль в поле K, то группа

$$\mathfrak{U}_M = \left\{ \varepsilon \in K \,\middle|\, \varepsilon M = M \right\}$$

называется *группой единиц* модуля M. Структура группы $\mathfrak{U}_M$ описывается теоремой Дирихле об алгебраических единицах. Нам понадобится следующий её частный случай для вполне вещественных расширений поля $\mathbb{Q}$ (подробнее см., например, в [17]).

Теорема Дирихле. *Пусть K — вполне вещественное расширение поля $\mathbb{Q}$ степени n и пусть M — произвольный полный модуль в K. Тогда существует такой набор единиц $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1} \in \mathfrak{U}_M$, что любая единица $\varepsilon \in \mathfrak{U}_M$ однозначно представляется в виде*

$$\varepsilon = \zeta \varepsilon_1^{z_1} \ldots \varepsilon_{n-1}^{z_{n-1}},$$

где $z_1, \ldots, z_{n-1} \in \mathbb{Z}$ и $\zeta \in \{-1, 1\}$. В частности, $\mathfrak{U}_M \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^{n-1}$.

Замечание. Обычно теорема Дирихле формулируется для групп единиц порядков поля K (*порядком* называется полный модуль поля K, являющийся кольцом и содержащий число 1). Покажем, что приведённая формулировка теоремы Дирихле эквивалентна стандартной. Напомним, что *кольцом множителей* $\mathfrak{O}_M$ модуля M называется кольцо, состоящее из таких чисел $\varepsilon \in K$, что $\varepsilon M \subset M$. Известно (см., например, в [17]), что для произвольного полного модуля M кольцо множителей $\mathfrak{O}_M$ является порядком. Осталось заметить, что $\mathfrak{U}_M = \mathfrak{U}_{\mathfrak{O}_M}$. Действительно, пусть $\varepsilon \in \mathfrak{U}_M$. Поскольку $\varepsilon \in \mathfrak{O}_M$ и $\varepsilon^{-1} \in \mathfrak{O}_M$, то $\varepsilon\mathfrak{O}_M \subset \mathfrak{O}_M$ и $\varepsilon^{-1}\mathfrak{O}_M \subset \mathfrak{O}_M$. Кроме того, для любого $\delta \in \mathfrak{O}_M$, имеем $\varepsilon(\varepsilon^{-1}\delta) = \delta$. Так как $\varepsilon^{-1}\delta \in \mathfrak{O}_M$, то $\varepsilon\mathfrak{O}_M = \mathfrak{O}_M$. И обратно, пусть $\varepsilon \in \mathfrak{U}_{\mathfrak{O}_M}$. Так как $\varepsilon\mathfrak{O}_M = \mathfrak{O}_M$, $\varepsilon^{-1}\mathfrak{O}_M = \mathfrak{O}_M$ и $1 \in \mathfrak{O}_M$, то $\varepsilon \in \mathfrak{O}_M$ и $\varepsilon^{-1} \in \mathfrak{O}_M$. Кроме того, для любого $\delta \in M$ имеем $\varepsilon(\varepsilon^{-1}\delta) = \delta$. Так как $\varepsilon^{-1}\delta \in M$, то $\varepsilon M = M$.

Лемма 2.3.1. *Пусть $(1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ — собственный вектор гиперболического оператора $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, соответствующий собственному значению λ. Тогда числа $1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ образуют базис поля $\mathbb{Q}(\lambda)$ над $\mathbb{Q}$.*

Доказательство. Положим $K = \mathbb{Q}(\lambda)$. Из гиперболичности оператора A следует, что K — вполне вещественное расширение поля $\mathbb{Q}$ степени n. При этом числа $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ содержатся в K, ибо являются решением системы линейных уравнений с коэффициентами из этого поля. Предположим, что набор $1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ не является базисом поля K. Тогда они линейно зависимы над $\mathbb{Q}$. Не ограничивая общности, можно считать, что α_{n-1} — линейная комбинация чисел $1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}$ с рациональными коэффициентами. Тогда существует такая матрица $C \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Q})$ с нулевым последним столбцом, что $\det(C - \lambda I_n) = 0$. Последнее противоречит неприводимости характеристического многочлена оператора A. Следовательно, набор $1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ является базисом поля K. □

Лемма 2.3.2. *Пусть B — произвольный оператор из $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ и пусть вектор $(1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ является собственным вектором B, соответствующим собственному значению λ. Пусть числа $1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Тогда λ является единицей модуля $M = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha_1 + \dots + \mathbb{Z}\alpha_{n-1}$.*

Доказательство. Поскольку числа $1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$, они образуют базис модуля M. Поскольку $B(M^n) = M^n$ и

$(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in M^n$, справедливо $(\lambda, \lambda\alpha_1, \ldots, \lambda\alpha_{n-1}) \in M^n$. В силу обратимости оператора B числа $\lambda, \lambda\alpha_1, \ldots, \lambda\alpha_{n-1}$ также образуют базис M. Стало быть, $\lambda \in \mathfrak{U}_M$. $\square$

Лемма 2.3.3. *Пусть числа $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ образуют базис некоторого расширения K поля $\mathbb{Q}$ и пусть ε — единица модуля $M = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha_1 + \cdots + \mathbb{Z}\alpha_{n-1}$. Тогда существует такой единственный оператор $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, что ε является собственным значением B, а вектор $(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ является собственным вектором оператора B, соответствующим ε. При этом $\det B = \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\varepsilon)$, а векторы $(1, \sigma_i(\alpha_1), \ldots, \sigma_i(\alpha_{n-1}))$, $i = 1, \ldots, n$, где $\sigma_1 (= \mathrm{id}), \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ — все вложения K в $\mathbb{C}$, образуют базис $\mathbb{R}^n$, состоящий из собственных векторов оператора B.*

Доказательство. Модуль M является полным, а числа $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ образуют его базис. Поскольку $\varepsilon \in \mathfrak{U}_M$, числа $\varepsilon, \varepsilon\alpha_1, \ldots, \varepsilon\alpha_{n-1}$ также образуют базис M. Следовательно, существует ровно одна матрица $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, такая что

$$(\varepsilon, \varepsilon\alpha_1, \ldots, \varepsilon\alpha_{n-1})^\top = B(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})^\top.$$

Применяя к обеим частям этого равенства σ_i, получаем

$$\big(\sigma_i(\varepsilon), \sigma_i(\varepsilon)\sigma_i(\alpha_1), \ldots, \sigma_i(\varepsilon)\sigma_i(\alpha_{n-1})\big)^\top = B\big(1, \sigma_i(\alpha_1), \ldots, \sigma_i(\alpha_{n-1})\big)^\top.$$

При этом векторы $(1, \sigma_i(\alpha_1), \ldots, \sigma_i(\alpha_{n-1}))$, $i = 1, \ldots, n$, линейно независимы, поскольку дискриминант $D_{K/\mathbb{Q}}(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ отличен от нуля. Стало быть, они образуют базис $\mathbb{R}^n$, состоящий из собственных векторов оператора B и $\det B = \prod_{i=1}^n \sigma_i(\varepsilon) = \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\varepsilon)$. $\square$

Следствие 2.3.1. *Базис $\mathbb{R}^n$, состоящий из собственных векторов гиперболического оператора из $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, однозначно (с точностью до коэффициентов пропорциональности) определяется любым из его собственных векторов.*

Доказательство предложения 6. Пусть вектор $(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ является собственным для гиперболического оператора $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ и λ — собственное значение, соответствующее этому вектору. Тогда, в силу леммы 2.3.1 набор чисел $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ образует базис вполне вещественного расширения $K = \mathbb{Q}(\lambda)$ поля $\mathbb{Q}$ степени n. Кроме того, в силу леммы 2.3.2 число λ является единицей модуля $M = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha_1 + \dots + \mathbb{Z}\alpha_{n-1}$. Теперь осталось заметить, что векторы $(1, \sigma_i(\alpha_1), \dots, \sigma_i(\alpha_{n-1}))$, $i = 1, \dots, n$, где $\sigma_1(= \mathrm{id}), \sigma_2, \dots, \sigma_n$ — все вложения K в $\mathbb{R}$ в силу леммы 2.3.3 образуют базис $\mathbb{R}^n$, состоящий из собственных векторов оператора A.

Обратно, положим числа $1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ образуют базис некоторого вполне вещественного расширения K поля $\mathbb{Q}$ и $\sigma_1(= \mathrm{id}), \sigma_2, \dots, \sigma_n$ — все вложения K в $\mathbb{R}$. Пусть $M = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha_1 + \dots + \mathbb{Z}\alpha_{n-1}$ и

$$\Lambda = \{\big(\ln|\sigma_1(\varepsilon)|, \ln|\sigma_2(\varepsilon)|, \dots, \ln|\sigma_n(\varepsilon)|\big) \mid \varepsilon \in \mathfrak{U}_M\},$$

$$\Pi = \{\big(x_1, x_2, \dots, x_n\big) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=0}^{n} x_i = 0\}.$$

Из теоремы Дирихле следует, что Λ — решетка ранга $n-1$ в гиперплоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^n$. Значит существует такое $\epsilon \in \mathfrak{U}_M$, что $|\sigma_1(\epsilon)| > 1$ и $|\sigma_i(\epsilon)| < 1$, где $i = 2, \dots, n$. Пусть $\varepsilon = \epsilon^2$. Известно (см., например, в [17]), что если число ε принадлежит порядку $\mathfrak{O}_M$ в поле K, то характеристический многочлен ε относительно $K/\mathbb{Q}$ имеет целые коэффициенты. Таким образом, число ε имеет степень n, а значит, все числа $\sigma_1(\varepsilon), \sigma_2(\varepsilon), \dots, \sigma_n(\varepsilon)$ различны. Пусть $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ — оператор из леммы 2.3.3. Тогда $\det A = \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\varepsilon) = 1$, при этом характеристический многочлен оператора A имеет вид

$$\big(\sigma_1(\varepsilon) - x\big)\big(\sigma_2(\varepsilon) - x\big) \dots \big(\sigma_n(\varepsilon) - x\big),$$

а значит, он неприводим и имеет n различных вещественных корней, то есть оператор A гиперболический. В силу леммы 2.3.3 векторы $(1, \sigma_i(\alpha_1), \dots, \sigma_i(\alpha_{n-1}))$, $i = 1, \dots, n$, образуют базис $\mathbb{R}^n$, состоящий из собственных векторов оператора A. $\square$

Замечание. Найденное в доказательстве число ϵ является числом Пизо (подробнее о таких числах см., например, книгу [18]).

Основной целью данного параграфа является доказательство следующего утверждения о структуре группы $\mathrm{Dir}(A)$. Отметим, что это утверждение уточняет в чисто вещественном случае следствие 17.10 из книги [11] (см. там же предложение 17.11 и предшествующее ему обсуждение).

Предложение 2.3.2. *Для любого гиперболического оператора* $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ *справедливо*

$$\mathrm{Dir}(A) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^{n-1}.$$

Доказательство. Пусть $\mathrm{CF}(A) = \mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n)$ и пусть подпространство l_1 порождается вектором $\mathbf{l}_1 = (1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$. Положим

$$K = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}), \qquad M = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha_1 + \cdots + \mathbb{Z}\alpha_{n-1}.$$

По лемме 2.3.1 числа $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ образуют базис поля K. Следовательно, M — полный модуль в K.

Покажем, что $\mathrm{Dir}(A) \cong \mathfrak{U}_M$. Для любого оператора $B \in \mathrm{Dir}(A)$ вектор $\mathbf{l}_1$ является собственным, стало быть, по лемме 2.3.2 собственное значение $\lambda(B, \mathbf{l}_1)$ оператора B, которому соответствует $\mathbf{l}_1$, принадлежит $\mathfrak{U}_M$. Следовательно, отображение

$$\begin{gathered} \varphi : \mathrm{Dir}(A) \to \mathfrak{U}_M \\ \varphi : B \mapsto \lambda(B, \mathbf{l}_1) \end{gathered}$$

корректно определено. По лемме 2.3.3 оно взаимно однозначно. При этом φ, очевидно, является гомоморфизмом. Стало быть, действительно, $\mathrm{Dir}(A) \cong \mathfrak{U}_M$.

Остаётся применить теорему Дирихле. $\square$

2.4 Существование палиндромических симметрий для конечных вполне вещественных циклических расширений Галуа

В данном параграфе нами будет доказана теорема 2. Если задана цепная дробь $\mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n) = \mathrm{CF}(A) \in \mathfrak{A}_{n-1}$, то будем считать, что подпространство l_1 порождается вектором $\mathbf{l}_1 = (1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ (данное допущение корректно в силу предложения 6). Тогда из предложения 6 следует, что числа $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ над $\mathbb{Q}$ и каждое l_i порождается вектором $\mathbf{l}_i = (1, \sigma_i(\alpha_1), \ldots, \sigma_i(\alpha_{n-1}))$, где $\sigma_1 (= \mathrm{id}), \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ — все вложения K в $\mathbb{R}$.

Рассмотрим матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \mu_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_{n-1} \\ \mu_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.4.1}$$

Лемма 2.4.1. *Пусть G — циклическая симметрия $\mathrm{CF}(l_1,\dots,l_n) \in \mathfrak{A}_{n-1}$ и матрица оператора G в базисе $\mathbf{l}_1,\dots,\mathbf{l}_n$ имеет вид (2.4.1). Тогда G является собственной циклической симметрией дроби $\mathrm{CF}(l_1,\dots,l_n)$ в том и только том случае, если $\mu_1\mu_2\dots\mu_n = 1$.*

Доказательство. Пусть G является собственной циклической симметрией дроби $\mathrm{CF}(l_1,\dots,l_n)$. Тогда существуют такие числа $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$ из множества $\{-1,1\}$, что

$$G(\varepsilon_1\mathbf{l}_1,\varepsilon_2\mathbf{l}_2,\dots,\varepsilon_n\mathbf{l}_n) = \big(\mu_n\varepsilon_1\mathbf{l}_n,\mu_1\varepsilon_2\mathbf{l}_1,\mu_2\varepsilon_3\mathbf{l}_2,\dots,\mu_{n-1}\varepsilon_n\mathbf{l}_{n-1}\big),$$

и выполняются неравенства

$$\mu_1\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} > 0, \qquad \mu_2\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} > 0, \qquad \dots, \qquad \mu_{n-1}\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} > 0, \qquad \mu_n\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_n} > 0.$$

Стало быть, $\mu_1\mu_2\dots\mu_n > 0$, а значит, $\mu_1\mu_2\dots\mu_n = 1$.

Если $\mu_1\mu_2\dots\mu_n = 1$, то оператор G имеет собственное направление, которое соответствует собственному значению 1 и лежит внутри некоторого конуса $C \in \mathcal{C}(l_1,\dots,l_n)$. □

Мы будем обозначать через $\mathfrak{A}'_{n-1}$ множество всех $(n-1)$-мерных алгебраических цепных дробей, для которых поле K из предложения 6 — вполне вещественное циклическое расширение Галуа. Пусть σ — образующая группы Галуа $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Также мы выбираем такую нумерацию прямых $l_1,\dots,l_n$, что если через $\big(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2,\dots,\mathbf{l}_{n-1},\mathbf{l}_n\big)$ обозначить матрицу со столбцами $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_{n-1}, \mathbf{l}_n$, то получим

$$\big(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_{n-1}, \mathbf{l}_n\big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \sigma(\alpha_1) & \ldots & \sigma^{n-2}(\alpha_1) & \sigma^{n-1}(\alpha_1) \\ \alpha_2 & \sigma(\alpha_2) & \ldots & \sigma^{n-2}(\alpha_2) & \sigma^{n-1}(\alpha_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n-1} & \sigma(\alpha_{n-1}) & \ldots & \sigma^{n-2}(\alpha_{n-1}) & \sigma^{n-1}(\alpha_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее будем обозначать через $\mathrm{N}(\alpha)$ и $\mathrm{Tr}(\alpha)$ соответственно норму $\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(\alpha)$ и след $\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(\alpha)$ алгебраического числа α. Определим класс $(n-1)$-мерных алгебраических цепных дробей:

$$\mathbf{CF} = \Big\{\mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n) \in \mathfrak{A}'_{n-1} \,\Big|\, \alpha_j = \prod_{k=0}^{j-1} \sigma^k(\alpha_1),\ \ \mathrm{N}(\alpha_1) = 1\Big\}.$$

Положим

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Лемма 2.4.2. *Пусть* $\mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n) \in \mathfrak{A}_{n-1}$. *Тогда следующие два утверждения эквивалентны:*

(а) $\mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n)$ *принадлежит классу* $\mathbf{CF}$*;*

(б) H *— собственная палиндромическая симметрия* $\mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n)$ *и*

$$\sigma_H = (1, 2, \ldots, n-1, n).$$

Доказательство. В силу леммы 2.4.1 оператор $H \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ является собственной палиндромической симметрией $\mathrm{CF}(A)$ и $\sigma_H = (1, 2, \ldots, n-1, n)$ тогда и только тогда, когда существуют такие действительные числа $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, что $\mu_1\mu_2\ldots\mu_n = 1$ и

$$H\big(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_{n-1}, \mathbf{l}_n\big) = \big(\mu_2\mathbf{l}_2, \mu_3\mathbf{l}_3, \ldots, \mu_n\mathbf{l}_n, \mu_1\mathbf{l}_1\big). \tag{2.4.2}$$

Пусть $\mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n) \in \mathbf{CF}$. Тогда

$$\big(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_{n-1}, \mathbf{l}_n\big) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \sigma(\alpha_1) & \dots & \sigma^{n-2}(\alpha_1) & \sigma^{n-1}(\alpha_1) \\ \alpha_1\sigma(\alpha_1) & \sigma(\alpha_1)\sigma^2(\alpha_1) & \dots & \sigma^{n-2}(\alpha_1)\sigma^{n-1}(\alpha_1) & \sigma^{n-1}(\alpha_1)\alpha_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \prod\limits_{k=1}^{j-1}\sigma^{k-1}(\alpha_1) & \prod\limits_{k=2}^{(j-1)+1}\sigma^{k-1}(\alpha_1) & \dots & \prod\limits_{k=n-1}^{(j-1)+n-2}\sigma^{k-1}(\alpha_1) & \prod\limits_{k=n}^{(j-1)+n-1}\sigma^{k-1}(\alpha_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

То есть

$$\bigl(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \dots, \mathbf{l}_{n-1}, \mathbf{l}_n\bigr) = (a_{ji}),$$

где $a_{ji} = \prod\limits_{k=i}^{(j-1)+i-1} \sigma^{k-1}(\alpha_1)$ при $j = 2, \dots, n$ и $a_{1i} = 1$ для любого $i = 1, \dots, n$. Стало быть,

$$H\bigl(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \dots, \mathbf{l}_{n-1}, \mathbf{l}_n\bigr) = \bigl(\alpha_1\mathbf{l}_2, \sigma(\alpha_1)\mathbf{l}_3, \dots, \sigma^{n-2}(\alpha_1)\mathbf{l}_n, \sigma^{n-1}(\alpha_1)\mathbf{l}_1\bigr).$$

Следовательно, H — собственная палиндромическая симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1, \dots, l_n)$ и $\sigma_H = (1, 2, \dots, n-1, n)$.

Обратно, предположим, что H — собственная палиндромическая симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1, \dots, l_n)$ и $\sigma_H = (1, 2, \dots, n-1, n)$. Тогда поскольку выполняется соотношение (2.4.2), имеем

$$H\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha_1) \\ \dots \\ \sigma_2(\alpha_{n-2}) \\ \sigma_2(\alpha_{n-1}) \end{pmatrix},$$

откуда получаем

$$\mu_2 = \alpha_1, \quad \alpha_2 = \alpha_1\sigma_2(\alpha_1), \quad \alpha_3 = \alpha_1\sigma_2(\alpha_2) = \alpha_1\sigma_2(\alpha_1)\sigma_2^2(\alpha_1), \quad \dots,$$

$$\alpha_{n-1} = \alpha_1\sigma_2(\alpha_1)\cdots\sigma_2^{n-2}(\alpha_1), \quad 1 = \alpha_1\sigma_2(\alpha_1)\cdots\sigma_2^{n-1}(\alpha_1).$$

Для любого $i = 2, \dots, n-1$ в силу соотношения (2.4.2) имеем

$$H\mathbf{l}_i = \begin{pmatrix} \sigma_i(\alpha_1) \\ \sigma_i(\alpha_2) \\ \dots \\ \sigma_i(\alpha_{n-1}) \\ 1 \end{pmatrix} = \mu_{i+1} \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_{i+1}(\alpha_1) \\ \dots \\ \sigma_{i+1}(\alpha_{n-2}) \\ \sigma_{i+1}(\alpha_{n-1}) \end{pmatrix},$$

откуда получаем $\mu_{i+1} = \sigma_i(\alpha_1)$ и

$$\sigma_{i+1}(\alpha_1) = \frac{\sigma_i(\alpha_2)}{\sigma_i(\alpha_1)} = \sigma_i(\sigma_2(\alpha_1)),$$

$$\sigma_{i+1}(\alpha_2) = \frac{\sigma_i(\alpha_3)}{\sigma_i(\alpha_1)} = \sigma_i(\sigma_2(\alpha_2)),$$

$$\dots,$$

$$\sigma_{i+1}(\alpha_{n-1}) = \frac{1}{\sigma_i(\alpha_1)} = \sigma_i(\sigma_2(\alpha_{n-1})).$$

Применяя индукцию, получаем

$$\sigma_{i+1}(\alpha_1) = \sigma_2^i(\alpha_1), \quad \sigma_{i+1}(\alpha_2) = \sigma_2^i(\alpha_2), \quad \dots, \quad \sigma_{i+1}(\alpha_{n-1}) = \sigma_2^i(\alpha_{n-1}).$$

Тогда $\mathrm{CF}(l_1, \dots, l_n) \in \mathbf{CF}$, так как числа $1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ образуют базис поля K. $\square$

Доказательство теоремы 2. Для начала докажем существование конечного вполне вещественного циклического расширения Галуа степени n поля $\mathbb{Q}$. В силу теоремы Дирихле об арифметической прогрессии существует такое простое p, что $p \equiv 1 \pmod{2n}$. Пусть ζ_p — корень степени p из единицы и $E = \mathbb{Q}(\zeta_p)$.

Заметим, что $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$. Рассмотрим поле $K_0 = \mathbb{Q}(\zeta_p + \zeta_p^{-1})$. Тогда K_0 — конечное вполне вещественное расширение поля $\mathbb{Q}$ степени $\frac{p-1}{2}$ (см. [19]) и $[E : K_0] = 2$, поскольку $x^2 - (\zeta_p + \zeta_p^{-1})x + 1$ — минимальный многочлен для ζ_p над K_0. Поскольку группа $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ является циклической, то все ее подгруппы нормальны, более того, все фактор-группы $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ по подгруппам $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ циклические, а значит, K_0 — циклическое расширение Галуа поля $\mathbb{Q}$ в силу основной теоремы теории Галуа. Поскольку n делит $\frac{p-1}{2}$, то циклическая группа $\mathrm{Gal}(K_0/\mathbb{Q})$ содержит подгруппу F индекса n. Пусть $K = K_0^F$. Вновь применяя основную теорему теории Галуа, получаем, что K — циклическое расширение Галуа поля $\mathbb{Q}$, $[K : \mathbb{Q}] = [\mathrm{Gal}(K_0/\mathbb{Q}) : F] = n$. При этом поле $K \subset K_0$ — вполне вещественное расширение поля $\mathbb{Q}$.

Пусть K — конечное вполне вещественное циклическое расширение Галуа степени n поля $\mathbb{Q}$, а σ — порождающий элемент группы Галуа этого расширения. По теореме о нормальном базисе существует набор чисел

$$\omega, \quad \sigma(\omega), \quad \ldots, \quad \sigma^{n-1}(\omega),$$

который является базисом расширения K. Тогда набор чисел

$$1, \quad \frac{\sigma(\omega)}{\omega}, \quad \ldots, \quad \frac{\sigma^{n-1}(\omega)}{\omega}$$

также образует базис расширения K. Стало быть, в силу предложения 6 вектор $(1, \frac{\sigma(\omega)}{\omega}, \ldots, \frac{\sigma^{n-1}(\omega)}{\omega})$ является собственным для некоторого гиперболического оператора $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. Заметим, что для любого $j = 2, \ldots, n-1$

$$\frac{\sigma(\omega)}{\omega}\sigma\Big(\frac{\sigma(\omega)}{\omega}\Big)\sigma^2\Big(\frac{\sigma(\omega)}{\omega}\Big)\cdots\sigma^{j-1}\Big(\frac{\sigma(\omega)}{\omega}\Big) = \frac{\sigma^j(\omega)}{\omega},$$

при этом $\mathrm{N}(\frac{\sigma(\omega)}{\omega}) = 1$. Таким образом, $\mathrm{CF}(A) \in \mathbf{CF}$. Для завершения доказательства достаточно применить лемму 2.4.2. $\square$

Глава 3

Палиндромические симметрии двумерной алгебраической цепной дроби

3.1 Формулировка критерия палиндромичности в размерности $n = 3$

Дадим следующее определение, естественным образом обобщающее понятие эквивалентности (обыкновенных) цепных дробей.

Определение 10. Пусть $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ — векторы в $\mathbb{R}^n$ и пусть их первые координаты равны 1. Будем говорить, что $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ *эквивалентны* и писать $\mathbf{v}_1 \sim \mathbf{v}_2$, если существует такой оператор $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ и такое $\mu \in \mathbb{R}$, что $X\mathbf{v}_1 = \mu\mathbf{v}_2$.

Замечание. В случае $n = 2$ отношение $(1, \alpha) \sim (1, \beta)$ равносильно отношению $\alpha \sim \beta$ из определения 2.

Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа позволяет переформулировать теорему 1 как критерий палиндромичности (одномерной) геометрической цепной дроби. Из доказательства теоремы 1 видно, что $\mathrm{CF}(l_1, l_2) \in \mathfrak{A}_1$ имеет собственную симметрию (или, что тоже самое, собственную циклическую симметрию) в том и только в том случае, если последовательность (a_k) имеет четный или нечетный центр. Последнее позволяет нам установить, что верна следующая

Теорема 3. *Пусть* $\mathrm{CF}(l_1, l_2) \in \mathfrak{A}_1$ *и пусть подпространство* l_1 *порождено вектором* $(1, \alpha)$. *Тогда* $\mathrm{CF}(l_1, l_2)$ *имеет собственную симметрию (или, что тоже самое, собственную циклическую симметрию) в том и только в том случае, если существует такое алгебраическое число* ω *степени 2 со своим сопряжённым* ω', *что выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

(а) $(1, \alpha) \sim (1, \omega): \quad \mathrm{Tr}(\omega) = \omega + \omega' = 0$;

(б) $(1, \alpha) \sim (1, \omega): \quad \mathrm{Tr}(\omega) = \omega + \omega' = 1$.

Более того, существование ω, *удовлетворяющего условию* (б), *равносильно существованию* ω, *удовлетворяющего условию*

(в) $(1, \alpha) \sim (1, \omega): \quad \mathrm{N}(\omega) = \omega\omega' = 1$.

В данной главе настоящей работы доказывается критерий палиндромичности цепной дроби для $n = 3$, аналогичный теореме 3:

Теорема 4. *Пусть* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3) \in \mathfrak{A}_2$ *и пусть подпространство* l_1 *порождено вектором* $(1, \alpha, \beta)$. *Тогда* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3)$ *имеет собственную симметрию (или, что тоже самое, собственную циклическую симметрию) в том и только в том случае, если существует такое алгебраическое число* ω *степени 3 со своими сопряжёнными* ω' *и* ω'', *что выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

(а) $(1, \alpha, \beta) \sim (1, \omega, \omega'): \quad \mathrm{Tr}(\omega) = \omega + \omega' + \omega'' = 0$;

(б) $(1, \alpha, \beta) \sim (1, \omega, \omega'): \quad \mathrm{Tr}(\omega) = \omega + \omega' + \omega'' = 1$.

Более того, существование ω, *удовлетворяющего условию* (б), *равносильно существованию* ω, *удовлетворяющего любому из следующих двух условий:*

(в) $(1, \alpha, \beta) \sim (1, \omega, 1/\omega'): \quad \mathrm{N}(\omega) = \omega\omega'\omega'' = 1$;

(г) $(1, \alpha, \beta) \sim (1, \omega, -1/\omega'): \quad \mathrm{N}(\omega) = \omega\omega'\omega'' = -1$.

Стоит отметить следующее наблюдение, непосредственно вытекающее из теоремы 4:

Следствие 1. *Если дробь* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3) \in \mathfrak{A}_2$ *палиндромична и подпространство* l_1 *порождено вектором* $(1, \alpha, \beta)$, *то (кубическое) расширение* $\mathbb{Q}(\alpha)$ *поля* $\mathbb{Q}$ *является расширением Галуа.*

Также стоит отметить, что в отличии от размерности $n = 2$, при $n = 3$ любая палиндромичная цепная дробь обладает собственной циклической симметрией, что также показывается в этой главе.

3.2 Геометрия палиндромических симметрий в размерности $n = 3$

Напомним, что для каждого $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$ соотношением (1) определена перестановка σ_G.

Лемма 3.2.1. *Пусть G — палиндромическая симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3) \in \mathfrak{A}_2$, ассоциированной с (гиперболическим) оператором A. Тогда*

1) *G — циклическая симметрия $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3)$;*

2) *$G^3 = \pm I_3$ (где I_3 — единичный оператор);*

3) *существуют одномерное и двумерное рациональные подпространства l и π, такие что $Gl = l$, $G\pi = \pi$ и $l + \pi = \mathbb{R}^3$.*

Доказательство. Случай $\mathrm{ord}(\sigma_G) = 1$ невозможен в силу того, что оператор G не является симметрией Дирихле $\mathrm{CF}(A)$.

Предположим, что $\mathrm{ord}(\sigma_G) = 2$. Изменив при необходимости нумерацию подпространств l_1, l_2, l_3, можно считать, что существуют такие вещественные числа μ_1, μ_2, μ_3, что матрица оператора G в базисе $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 \\ 0 & \mu_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда характеристический многочлен оператора G имеет вид

$$\chi_G(x) = (x - \mu_1)(x^2 - \mu_2\mu_3) = x^3 - \mu_1 x^2 - \mu_2\mu_3 x \pm 1 \in \mathbb{Z}[x].$$

Следовательно, μ_1 — целое число, и при этом μ_1 — корень уравнения $\chi_G(x) = 0$, то есть $\mu_1 = \pm 1$. Стало быть, l_1 — собственное подпространство оператора G, соответствующее собственному значению $\mu_1 = \pm 1$. То есть l_1 рационально, что противоречит гиперболичности оператора

A. Таким образом, $\operatorname{ord}(\sigma_G) = 3$, то есть G — циклическая симметрия $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3)$.

Изменив при необходимости нумерацию подпространств l_1, l_2, l_3, можно считать, что существуют такие вещественные числа μ_1, μ_2, μ_3, что матрица оператора G в базисе $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_1 \\ \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда характеристический многочлен имеет вид

$$\chi_G(x) = x^3 - \mu_1\mu_2\mu_3 = x^3 - \det G.$$

По теореме Гамильтона-Кэли $G^3 = (\det G)I_3 = \pm I_3$, что доказывает второе утверждение. Далее, поскольку одно из собственных значений равно $\det G$ (и равно ± 1), а два оставшихся — сопряжённые комплексные числа, у оператора G есть одномерное собственное подпространство l и двумерное инвариантное подпространство π. При этом, поскольку подпространство l соответствует собственному значению ± 1, оно рационально. Кроме того, для любой точки $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^3 \setminus l$ три точки $\mathbf{z}$, $G^2(\mathbf{z})$ и $G^4(\mathbf{z})$ задают плоскость, параллельную π, следовательно, π также рационально. $\square$

Следствие 3.2.1. *Пусть* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3) \in \mathfrak{A}_2$ *и пусть* G *— палиндромическая симметрия* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3)$. *Положим*

$$G_+ = (\det G)G, \qquad G_- = -(\det G)G.$$

Тогда G_+ *и* G_- *— также палиндромические симметрии* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3)$ *и существует такой конус* $C \in \mathcal{C}(l_1, l_2, l_3)$, *что* $G_+(C) = C$ *и* $G_-(C) = -C$.

Доказательство. Палиндромичность G_+ и G_- очевидна. Пусть l — прямая из леммы 3.2.1. Поскольку l не содержится в $l_i + l_j$ для любых i и j, найдётся такой конус $C \in \mathcal{C}(l_1, l_2, l_3)$, что l имеет непустое пересечение с его внутренностью. Поскольку $G(C) \in \mathcal{C}(l_1, l_2, l_3)$, справедливо либо $G(C) = C$, либо $G(C) = -C$, в зависимости от того, $\det G = 1$ или -1. Соответственно, $G_+(C) = C$ и $G_-(C) = -C$. $\square$

Лемма 3.2.2. *Пусть G — палиндромическая симметрия цепной дроби* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3) \in \mathfrak{A}_2$. *Положим* $F = G_+$ *(см. следствие 3.2.1). Тогда существуют* $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3 \in \mathbb{Z}^3$, *такие что*

$$F(\mathbf{z}_1) = \mathbf{z}_2, F(\mathbf{z}_2) = \mathbf{z}_3, F(\mathbf{z}_3) = \mathbf{z}_1$$

и выполняется хотя бы одно из следующих двух утверждений:

(а) *векторы* $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{w}$, *где* $\mathbf{w} = \frac{1}{3}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2+\mathbf{z}_3)$, *образуют базис решётки* $\mathbb{Z}^3$;

(б) *векторы* $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$ *образуют базис решётки* $\mathbb{Z}^3$.

Доказательство. Пусть l и π — одномерное и двумерное подпространства из леммы 3.2.1. Рассмотрим ближайшую к π рациональную плоскость π_1, параллельную π и не совпадающую с π (любую из двух). Тогда $F(\pi_1) = \pi_1$.

Построим точки $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \in \pi_1$ при помощи следующей итерационной процедуры. Возьмём произвольную целочисленную точку $\mathbf{v}_1 \in \pi_1 \setminus l$, и положим $\Delta_1 = \mathrm{conv}\big(\mathbf{v}_1, F(\mathbf{v}_1), F^2(\mathbf{v}_1)\big)$, $\mathbf{w} = \frac{1}{3}\big(\mathbf{v}_1 + F(\mathbf{v}_1) + F^2(\mathbf{v}_1)\big)$. Тогда $F(\Delta_1) = \Delta_1$ и $F\mathbf{w} = \mathbf{w} \in l$.

Предположим, что мы построили треугольник Δ_j. Если в Δ_j есть целочисленная точка, отличная от вершин и $\mathbf{w}$, обозначим её через $\mathbf{v}_{j+1}$ и определим следующий треугольник как $\Delta_{j+1} = \mathrm{conv}\big(\mathbf{v}_{j+1}, F(\mathbf{v}_{j+1}), F^2(\mathbf{v}_{j+1})\big)$. Тогда Δ_{j+1} является собственным подмножеством Δ_j и при этом $\mathbf{w} = \frac{1}{3}\big(\mathbf{v}_{j+1} + F(\mathbf{v}_{j+1}) + F^2(\mathbf{v}_{j+1})\big)$.

Последовательность (Δ_j) конечна. Пусть Δ_k — последний её элемент. Положим $\mathbf{z}_1 = \mathbf{v}_k$, $\mathbf{z}_2 = F(\mathbf{v}_k)$, $\mathbf{z}_3 = F^2(\mathbf{v}_k)$. Напомним, что π_1 — ближайшая к π рациональная плоскость, параллельная π. Стало быть, если $\mathbf{w} \notin \mathbb{Z}^3$, то $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$ — базис $\mathbb{Z}^3$. Если же $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^3$, то $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{w}$ — базис $\mathbb{Z}^3$. □

3.3 Матрицы палиндромических симметрий в размерности $n = 3$

Если задана дробь $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3) = \mathrm{CF}(A) \in \mathfrak{A}_2$, будем считать, что подпространство l_1 порождается вектором $\mathbf{l}_1 = (1, \alpha, \beta)$. Тогда из предложения 6 следует, что числа $1, \alpha, \beta$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ над $\mathbb{Q}$ и каждое l_i порождается вектором $\mathbf{l}_i = (1, \sigma_i(\alpha), \sigma_i(\beta),)$, где $\sigma_1(= \mathrm{id}), \sigma_2, \sigma_3$ — все вложения K в $\mathbb{R}$. То есть, если через $\big(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3\big)$ обозначить матрицу со столбцами $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3$, получим

$$\big(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3\big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \sigma_2(\alpha) & \sigma_3(\alpha) \\ \beta & \sigma_2(\beta) & \sigma_3(\beta) \end{pmatrix}.$$

Определим следующие классы двумерных алгебраических цепных дробей:

$$\begin{aligned}
\mathbf{CF}_1 &= \Big\{\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3) \in \mathfrak{A}_2 \,\Big|\, \beta = \sigma_2(\alpha),\ \mathrm{Tr}(\alpha) = 0\Big\}, \\
\mathbf{CF}_2 &= \Big\{\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3) \in \mathfrak{A}_2 \,\Big|\, \beta = \sigma_2(\alpha),\ \mathrm{Tr}(\alpha) = 1\Big\}, \\
\mathbf{CF}_3 &= \Big\{\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3) \in \mathfrak{A}_2 \,\Big|\, \beta = \sigma_2(\alpha)^{-1},\ \mathrm{N}(\alpha) = 1\Big\}, \\
\mathbf{CF}_4 &= \Big\{\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3) \in \mathfrak{A}_2 \,\Big|\, \beta = -\sigma_2(\alpha)^{-1},\ \mathrm{N}(\alpha) = -1\Big\}.
\end{aligned}$$

Покажем, что все дроби из классов $\mathbf{CF}_1$, $\mathbf{CF}_2$, $\mathbf{CF}_3$, $\mathbf{CF}_4$ палиндромичны. Положим

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$F_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Лемма 3.3.1. *Пусть* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3) \in \mathfrak{A}_2$ *и* $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. *Тогда* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3)$ *принадлежит классу* $\mathbf{CF}_i$ *в том и только в том случае, если* F_i *— её палиндромическая симметрия.*

Доказательство. Из леммы 3.2.1 следует, что оператор $F \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ является палиндромической симметрией дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3)$ тогда и только тогда, когда с точностью до перестановки индексов существуют такие действительные числа μ_1, μ_2, μ_3, что $F\big(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3\big) = \big(\mu_2\mathbf{l}_2, \mu_3\mathbf{l}_3, \mu_1\mathbf{l}_1\big)$.

Пусть $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3)\in\mathbf{CF}_1$. Тогда

$$F_1\mathbf{l}_1=\begin{pmatrix}1\\ \sigma_2(\alpha)\\ -\alpha-\sigma_2(\alpha)\end{pmatrix},\quad F_1\mathbf{l}_2=\begin{pmatrix}1\\ \sigma_3(\alpha)\\ -\sigma_2(\alpha)-\sigma_3(\alpha)\end{pmatrix},$$

$$F_1\mathbf{l}_1=\begin{pmatrix}1\\ \alpha\\ -\sigma_3(\alpha)-\alpha\end{pmatrix},$$

то есть $F_1\big(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2,\mathbf{l}_3\big)=\big(\mathbf{l}_2,\mathbf{l}_3,\mathbf{l}_1\big)$. Следовательно, F_1 — палиндромическая симметрия $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3)$. Обратно, предположим, что F_1 — палиндромическая симметрия $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3)$. Тогда существует такое μ_2, что с точностью до перестановки индексов

$$F_1\mathbf{l}_1=\begin{pmatrix}1\\ \beta\\ -\alpha-\beta\end{pmatrix}=\mu_2\begin{pmatrix}1\\ \sigma_2(\alpha)\\ \sigma_2(\beta)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_2=1$, $\beta=\sigma_2(\alpha)$ и $-\alpha-\beta=\sigma_2(\beta)$. Значит $\sigma_2^2(\alpha)=\sigma_2(\beta)=-\alpha-\beta=-\alpha-\sigma_2(\alpha)$ и $\sigma_2^2(\beta)=\sigma_2(-\alpha-\beta)=-\beta-\sigma_2(\beta)$. Существует такое μ_3, что

$$F_1\mathbf{l}_2=\begin{pmatrix}1\\ -\alpha-\beta\\ \alpha\end{pmatrix}=\mu_3\begin{pmatrix}1\\ \sigma_3(\alpha)\\ \sigma_3(\beta)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3=1,\sigma_3(\alpha)=-\alpha-\beta=\sigma_2^2(\alpha),\sigma_3(\beta)=\alpha=-\beta-\sigma_2(\beta)=\sigma_2^2(\beta)$ и $\mathrm{Tr}(\alpha)=0$. Стало быть, $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3)\in\mathbf{CF}_1$, так как числа $1,\alpha,\beta$ образуют базис поля $K=\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$.

Пусть $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3)\in\mathbf{CF}_2$. Тогда

$$F_2\mathbf{l}_1=\begin{pmatrix}1\\ \sigma_2(\alpha)\\ 1-\alpha-\sigma_2(\alpha)\end{pmatrix},\quad F_2\mathbf{l}_2=\begin{pmatrix}1\\ \sigma_3(\alpha)\\ 1-\sigma_2(\alpha)-\sigma_3(\alpha)\end{pmatrix},$$

$$F_2\mathbf{l}_1=\begin{pmatrix}1\\ \alpha\\ 1-\sigma_3(\alpha)-\alpha\end{pmatrix},$$

то есть $F_2\big(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2,\mathbf{l}_3\big)=\big(\mathbf{l}_2,\mathbf{l}_3,\mathbf{l}_1\big)$. Следовательно, F_2 — палиндромическая симметрия $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3)$. Обратно, предположим, что F_2 — палиндромическая симметрия $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3)$. Тогда существует такое μ_2, что с точностью до перестановки индексов

$$F_2\mathbf{l}_1=\begin{pmatrix}1\\ \beta\\ 1-\alpha-\beta\end{pmatrix}=\mu_2\begin{pmatrix}1\\ \sigma_2(\alpha)\\ \sigma_2(\beta)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_2=1$, $\beta=\sigma_2(\alpha)$ и $1-\alpha-\beta=\sigma_2(\beta)$. Значит $\sigma_2^2(\alpha)=\sigma_2(\beta)=1-\alpha-\beta=1-\alpha-\sigma_2(\alpha)$ и $\sigma_2^2(\beta)=\sigma_2(1-\alpha-\beta)=1-\beta-\sigma_2(\beta)$. Существует такое μ_3, что

$$F_2\mathbf{l}_2=\begin{pmatrix}1\\ 1-\alpha-\beta\\ \alpha\end{pmatrix}=\mu_3\begin{pmatrix}1\\ \sigma_3(\alpha)\\ \sigma_3(\beta)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3=1$, $\sigma_3(\alpha)=1-\alpha-\beta=\sigma_2^2(\alpha)$, $\sigma_3(\beta)=\alpha=1-\beta-\sigma_2(\beta)=\sigma_2^2(\beta)$ и $\mathrm{Tr}(\alpha)=1$. Стало быть, $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3)\in\mathbf{CF}_2$, так как числа $1,\alpha,\beta$ образуют базис поля $K=\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$.

Пусть $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3)\in\mathbf{CF}_3$. Тогда

$$F_3\mathbf{l}_1=\begin{pmatrix}\sigma_2(\alpha)^{-1}\\ 1\\ \alpha\end{pmatrix},\quad F_3\mathbf{l}_2=\begin{pmatrix}\sigma_3(\alpha)^{-1}\\ 1\\ \sigma_2(\alpha)\end{pmatrix},$$

$$F_3\mathbf{l}_1=\begin{pmatrix}\alpha^{-1}\\ 1\\ \sigma_3(\alpha)\end{pmatrix},$$

то есть $F_3\big(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2,\mathbf{l}_3\big)=\Big(\sigma_2(\alpha)^{-1}\mathbf{l}_2,\ \sigma_3(\alpha)^{-1}\mathbf{l}_3,\ \alpha^{-1}\mathbf{l}_1\Big)$. Следовательно, F_3 — палиндромическая симметрия $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3)$. Обратно, предположим, что F_3 — палиндромическая симметрия $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3)$. Тогда существует такое μ_2, что с точностью до перестановки индексов

$$F_3\mathbf{l}_1=\begin{pmatrix}\beta\\ 1\\ \alpha\end{pmatrix}=\mu_2\begin{pmatrix}1\\ \sigma_2(\alpha)\\ \sigma_2(\beta)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_2 = \beta$, $\beta = \sigma_2(\alpha)^{-1}$ и $\alpha = \beta\sigma_2(\beta)$. Значит $\sigma_2^2(\alpha) = \sigma_2(\beta^{-1}) = \beta\alpha^{-1} = \sigma_2(\alpha)^{-1}\alpha^{-1}$ и $\sigma_2^2(\beta) = \sigma_2(\beta^{-1}\alpha) = \sigma_2(\beta)^{-1}\beta^{-1}$. Существует такое μ_3, что

$$F_3\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix}\alpha\beta^{-1}\\ 1\\ \beta^{-1}\end{pmatrix} = \mu_3\begin{pmatrix}1\\ \sigma_3(\alpha)\\ \sigma_3(\beta)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = \alpha\beta^{-1}$, $\sigma_3(\alpha) = \beta\alpha^{-1} = \sigma_2^2(\alpha)$, $\sigma_3(\beta) = \alpha^{-1} = \sigma_2(\beta)^{-1}\beta^{-1} = \sigma_2^2(\beta)$ и $\mathrm{N}(\alpha) = 1$. Стало быть, $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3) \in \mathbf{CF}_3$, так как числа $1, \alpha, \beta$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$.

Пусть $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3) \in \mathbf{CF}_4$. Тогда

$$F_4\mathbf{l}_1 = -\begin{pmatrix}\sigma_2(\alpha)^{-1}\\ 1\\ \alpha\end{pmatrix}, \quad F_4\mathbf{l}_2 = -\begin{pmatrix}\sigma_3(\alpha)^{-1}\\ 1\\ \sigma_2(\alpha)\end{pmatrix},$$

$$F_4\mathbf{l}_1 = -\begin{pmatrix}\alpha^{-1}\\ 1\\ \sigma_3(\alpha)\end{pmatrix},$$

то есть $F_4\big(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3\big) = -\Big(\sigma_2(\alpha)^{-1}\mathbf{l}_2,\ \sigma_3(\alpha)^{-1}\mathbf{l}_3,\ \alpha^{-1}\mathbf{l}_1\Big)$. Следовательно, F_4 — палиндромическая симметрия $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3)$. Обратно, предположим, что F_4 — палиндромическая симметрия $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3)$. Тогда существует такое μ_2, что с точностью до перестановки индексов

$$F_4\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix}\beta\\ -1\\ -\alpha\end{pmatrix} = \mu_2\begin{pmatrix}1\\ \sigma_2(\alpha)\\ \sigma_2(\beta)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_2 = \beta$, $\beta = -\sigma_2(\alpha)^{-1}$ и $\alpha = -\beta\sigma_2(\beta)$. Значит $\sigma_2^2(\alpha) = -\sigma_2(\beta^{-1}) = \beta\alpha^{-1} = -\sigma_2(\alpha)^{-1}\alpha^{-1}$ и $\sigma_2^2(\beta) = \sigma_2(-\beta^{-1}\alpha) = \sigma_2(\beta)^{-1}\beta^{-1}$. Существует такое μ_3, что

$$F_4\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix}-\alpha\beta^{-1}\\ -1\\ \beta^{-1}\end{pmatrix} = \mu_3\begin{pmatrix}1\\ \sigma_3(\alpha)\\ \sigma_3(\beta)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = -\alpha\beta^{-1}$, $\sigma_3(\alpha) = \beta\alpha^{-1} = \sigma_2^2(\alpha)$, $\sigma_3(\beta) = -\alpha^{-1} = \sigma_2(\beta)^{-1}\beta^{-1} = \sigma_2^2(\beta)$ и $\mathrm{N}(\alpha) = -1$. Стало быть, $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3) \in \mathbf{CF}_4$, так как числа $1, \alpha, \beta$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$. $\square$

3.4 Доказательство теоремы 4

Обозначим для каждого $i = 1, 2, 3, 4$ через $\overline{\mathbf{CF}}_i$ образ $\mathbf{CF}_i$ при действии группы $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$:

$$\overline{\mathbf{CF}}_i = \Big\{\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3) \in \mathfrak{A}'_2 \,\Big|\, \exists X \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}) : X\big(\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3)\big) \in \mathbf{CF}_i\Big\}.$$

Лемма 3.4.1. *Для дроби* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3) \in \mathfrak{A}_2$ *выполняется условие* (а), (б), (в) *или* (г) *теоремы 4 тогда и только тогда, когда* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3)$ *принадлежит классу* $\overline{\mathbf{CF}}_1$, $\overline{\mathbf{CF}}_2$, $\overline{\mathbf{CF}}_3$ *или* $\overline{\mathbf{CF}}_4$ *соответственно.*

Доказательство. Для любого $X \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ гиперболичность оператора $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ равносильна гиперболичности оператора XAX^{-1}. При этом собственные подпространства гиперболического оператора однозначно восстанавливаются по любому его собственному вектору (см. следствие 2.3.1). Остаётся воспользоваться определением эквивалентности (см. определение 10). □

При помощи леммы 3.4.1 теорему 4 можно переформулировать следующим образом: *дробь* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3) \in \mathfrak{A}_2$ *палиндромична тогда и только тогда, когда она принадлежит одному из классов* $\overline{\mathbf{CF}}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, *причём* $\overline{\mathbf{CF}}_2 = \overline{\mathbf{CF}}_3 = \overline{\mathbf{CF}}_4$.

Доказательство теоремы 4. Если $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3)$ принадлежит какому-то $\overline{\mathbf{CF}}_i$, то по лемме 3.3.1 она палиндромична, ибо действие оператора из $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ сохраняет палиндромичность.

Обратно, пусть дробь $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3) \in \mathfrak{A}_2$ палиндромична и пусть G — её палиндромическая симметрия. Положим $F = G_+$ и рассмотрим точки $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\mathbf{w}$ из леммы 3.2.2. Обозначим также через $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ стандартный базис $\mathbb{R}^3$. Для точек $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$ выполняется либо утверждение (а), либо утверждение (б) леммы 3.2.2.

Пусть выполняется утверждение (а) леммы 3.2.2. Рассмотрим такой оператор $X_1 \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$, что (см. рисунок 3.1)

$$X_1\big(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{w}\big) = \big(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\big).$$

Тогда $X_1(\mathbf{z}_3) = X_1(3\mathbf{w} - \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ и $X_1 F X_1^{-1} = F_1$, так как по лемме 3.2.2

$$X_1 F X_1^{-1}\big(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\big) = \big(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\big).$$

Стало быть, $X_1\big(\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3)\big) \in \mathbf{CF}_1$, то есть $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3) \in \overline{\mathbf{CF}}_1$.

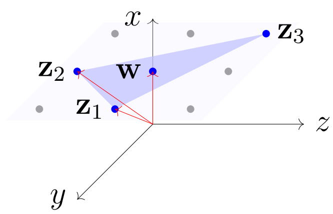

Рис. 3.1: Расположение точек решетки $\mathbb{Z}^3$ в случае (а) леммы 3.2.2

Пусть выполняется утверждение (б) леммы 3.2.2. Рассмотрим такие операторы $X_2, X_3, X_4 \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$, что (см. рисунок 3.2)

$$\begin{aligned}
X_2\big(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\big) &= \big(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\big),\\
X_3\big(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\big) &= \big(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\big),\\
X_4\big(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\big) &= \big(\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\big).
\end{aligned}$$

Тогда $X_i F X_i^{-1} = F_i$, $i = 2, 3, 4$, так как по лемме 3.2.2

$$\begin{aligned}
X_2 F X_2^{-1}\big(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\big) &= \big(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\big),\\
X_3 F X_3^{-1}\big(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\big) &= \big(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\big),\\
X_4 F X_4^{-1}\big(\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\big) &= \big(-\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\big).
\end{aligned}$$

Стало быть, $X_i\big(\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3)\big) \in \mathbf{CF}_i$, $i = 2, 3, 4$, то есть $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3) \in \overline{\mathbf{CF}}_i$, $i = 2, 3, 4$. В частности, отсюда следует, что $\overline{\mathbf{CF}}_2 = \overline{\mathbf{CF}}_3 = \overline{\mathbf{CF}}_4$.

Теорема 4 доказана.

□

3.5 Собственные и несобственные палиндромические симметрии в размерностях $n = 2$ и $n = 3$

Как нетрудно видеть, в теореме 4 лишь два пункта эквивалентны, в то время как в теореме 1 эквивалентны три пункта. То есть фактически при $n = 2$ имеется три типа палиндромических симметрий, а при

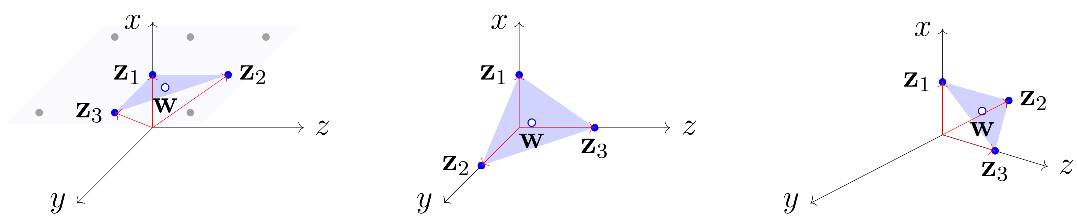

Рис. 3.2: Расположение точек решетки $\mathbb{Z}^3$ в случае (б) леммы 3.2.2

$n = 3$ — всего лишь два. Суть этого отличия в том, что пункт (г) теоремы 1 реализует несобственную симметрию одномерных цепных дробей. Несобственных симметрий у двумерных цепных дробей нет.

Пусть $\mathrm{CF}(l_1, l_2) \in \mathfrak{A}_1$ и пусть подпространства l_1 и l_2 порождаются векторами $\mathbf{l}_1 = (1, \alpha)$ и $\mathbf{l}_2 = (1, \beta)$ соответственно. Пусть G — палиндромическая симметрия $\mathrm{CF}(l_1, l_2)$. Тогда $G(l_1) = l_2$, $G(l_2) = l_1$. Стало быть, существуют такие вещественные числа μ_1, μ_2, что матрица оператора G в базисе $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \mu_1 \\ \mu_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\mu_1\mu_2 = -\det G$, справедливо $G^2 = -(\det G)I_2 = \pm I_2$ (ср. с леммой 3.2.1). Если $\det G = -1$, то есть если μ_1 и μ_2 одного знака, G сохраняет два (противоположных) конуса из $\mathcal{C}(l_1, l_2)$, отображая парус в каждом из них на себя, «переворачивая» его. При этом $-G$ сохраняет другие два противоположных конуса. Если же $\det G = 1$, то G переставляет конусы по кругу, не сохраняя ни один из них. Например, G может просто осуществлять поворот плоскости на 90° (см. рис. 3.3).

Наличие именно таких несобственных симметрий описывается пунктом (г) теоремы 1. При этом собственных симметрий, то есть с определителем -1, у дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2)$ может и не быть. Из доказательства теоремы 1 следует, что все палиндромические симметрии дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2) \in \mathfrak{A}_1$ имеют определитель 1 (то есть никакая из них не сохраняет никакой конус из $\mathcal{C}(l_1, l_2)$) тогда и только тогда, когда у периода цепной дроби числа α нельзя выбрать неполное частное, относительно которого период был бы симметричным (например, если период равен $(1, 2, 2, 1)$).

В случае же $n = 3$ для всякой палиндромичной двумерной цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3)$ найдётся конус из $\mathcal{C}(l_1, l_2, l_3)$, инвариантный относительно

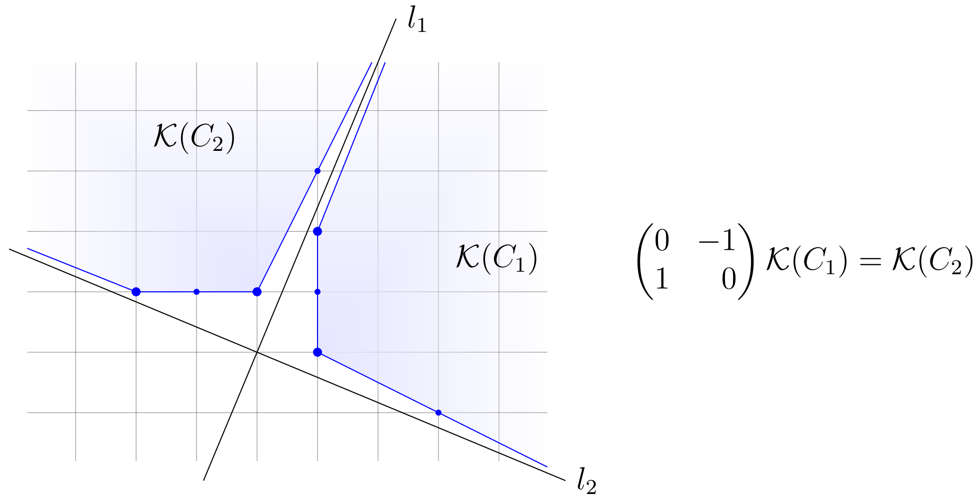

Рис. 3.3: Несобственная симметрия ($n = 2$)

действия некоторой палиндромической симметрии. Более того, если G — произвольная палиндромическая симметрия дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3) \in \mathfrak{A}_2$, то ввиду следствия 3.2.1 существует конус $C \in \mathcal{C}(l_1, l_2, l_3)$, такой что $G_+(C) = C$. При этом у оператора G_+ существует неподвижная точка на парусе $\partial(\mathcal{K}(C))$ (см. рис. 3.4).

При этом $G_-(C) = -C$, а оставшиеся шесть конусов из $\mathcal{C}(l_1, l_2, l_3)$ переставляются оператором G_- по циклу длины 6. В частности, отсюда следует, что паруса в этих шести конусах имеют одинаковую комбинаторно-целочисленную структуру. Если в то же время у дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3)$ найдётся палиндромическая симметрия, сохраняющая какой-нибудь конус из $\mathcal{C}(l_1, l_2, l_3)$, отличный от $\pm C$, то паруса во всех восьми конусах будут иметь одинаковую комбинаторно-целочисленную структуру. Например, такое наблюдается в случае трёхмерного оператора Фибоначчи, подробно разобранном в работе [10].

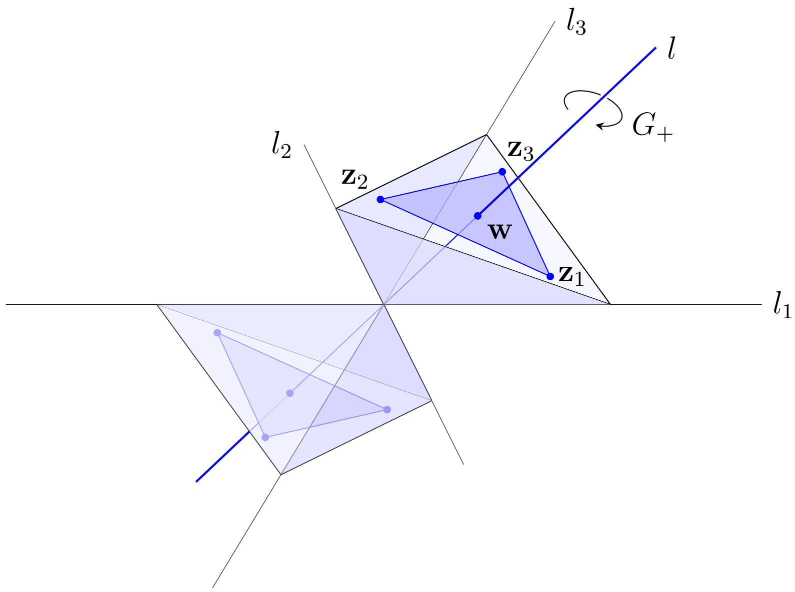

Рис. 3.4: Палиндромическая симметрия G_+ и инвариантные конусы ($n = 3$)
Точки $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\mathbf{w}$ — из леммы 3.2.2

Глава 4

Палиндромические симметрии трёхмерной алгебраической цепной дроби

4.1 Формулировки основных результатов в размерности $n = 4$

В данной главе диссертации доказываются критерии того, что трехмерная алгебраическая цепная дробь обладает собственными или собственными циклическими симметриями:

Теорема 5. *Пусть* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ *и пусть подпространство* l_1 *порождено вектором* $(1, \alpha, \beta, \gamma)$. *Пусть* $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$ *и* $\sigma_1(= \mathrm{id}), \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ *— все вложения поля* K *в* $\mathbb{R}$ *(см. предложение 6). Тогда* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ *имеет собственную палиндромическую симметрию в том и только в том случае, если (с точностью до перестановки индексов) выполняется*

$$\sigma_3(K) = K, \quad \sigma_4(K) = \sigma_2(K), \quad \sigma_3^2 = \sigma_1 = \mathrm{id}, \quad \sigma_4 = \sigma_2\sigma_3$$

и существуют такие алгебраические числа ω *и* ψ *степени* 4, *принадлежащие полю* K, *что выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

(1) $(1, \alpha, \beta, \gamma) \sim (1, \omega, \psi, \omega') :$ $\quad \psi + \psi' = -(\omega + \omega')$;

(2) $(1, \alpha, \beta, \gamma) \sim (1, \omega, \psi, \omega') :$ $\quad \psi + \psi' = 1 - (\omega + \omega')$;

(3) $(1, \alpha, \beta, \gamma) \sim (1, \omega, \psi, \omega') :$ $\quad \psi + \psi' = 2 - (\omega + \omega')$;

(4) $(1,\alpha,\beta,\gamma)\sim(1,\omega,\psi,\frac{\omega+\omega'}{2})$: $\quad \psi+\psi'=-(\omega+\omega')$;

(5) $(1,\alpha,\beta,\gamma)\sim(1,\omega,\psi,\frac{\omega+\omega'}{2})$: $\quad \psi+\psi'=2-(\omega+\omega')$;

(6) $(1,\alpha,\beta,\gamma)\sim(1,\omega,\psi,\frac{\omega+\omega'+1}{2})$: $\quad \psi+\psi'=-(\omega+\omega')$;

(7) $(1,\alpha,\beta,\gamma)\sim(1,\omega,\psi,\frac{\omega+\omega'+1}{2})$: $\quad \psi+\psi'=2-(\omega+\omega')$;

(8) $(1,\alpha,\beta,\gamma)\sim(1,\omega,\psi,\frac{\omega+\omega'}{2})$: $\quad \psi+\psi'=1-\frac{\omega+\omega'}{2}$;

(9) $(1,\alpha,\beta,\gamma)\sim(1,\omega,\psi,\frac{\omega+\omega'}{2})$: $\quad \psi+\psi'=2-\frac{\omega+\omega'}{2}$;

(10) $(1,\alpha,\beta,\gamma)\sim(1,\omega,\psi,\frac{\omega'-\omega}{4})$: $\quad \psi+\psi'=2-\frac{\omega+\omega'}{2}$,

где $\omega'=\sigma_3(\omega),\psi'=\sigma_3(\psi)$.

Теорема 6. *Пусть* $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\mathfrak{A}_3$ *и пусть подпространство* l_1 *порождено вектором* $(1,\alpha,\beta,\gamma)$. *Пусть* $K=\mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)$. *Тогда* $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ *имеет собственную циклическую симметрию в том и только в том случае, если* K *— циклическое расширение Галуа степени* 4, *группа Галуа которого порождается вложением* σ, *и существует такое алгебраическое число* $\omega\in K$ *степени* 4, *что выполнено хотя бы одно из семи условий* (1) - (7) *теоремы* 5 *для* $\psi=\sigma_2(\omega)$.

Замечание. Стоит также отметить, что теоремы 3, 4, 5, 6 представляют собой результаты о симметриях алгебраических конусов. По этой причине аналогичные утверждения справедливы не только для полиэдров Клейна, но и для других геометрических конструкций, обобщающих обыкновенные цепные дроби. Например, для $(n-1)$-*мерной цепной дроби Минковского–Вороного*. При заданных прямых $l_1,l_2,\ldots,l_n$ такая дробь определяется как граница объединения всех $\mathbf{0}$-симметричных параллелепипедов с рёбрами параллельными этим прямым, не содержащих в своей внутренности ненулевых целых точек. Подробнее о таких дробях и о соответствующих *комплексах Минковского–Вороного* см. работы [20], [21].

Следующее утверждение, также доказываемое в этой главе, показывает, что, в отличии от размерностей $n=2$ и $n=3$, в размерности $n=4$ не всякая цепная дробь, обладающая собственными симметриями, обладает собственными циклическими симметриями:

Предложение 7. *Существуют такие вещественные числа* α, β, γ, *что подпространство* l_1 *порождено вектором* $(1,\alpha,\beta,\gamma)$, *вполне веще-*

ственное расширение $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$ поля $\mathbb{Q}$ не является нормальным и $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ — цепная дробь, обладающая собственными симметриями, но не обладающая собственными циклическими симметриями.

4.2 Собственные симметрии и собственные подпространства в размерности $n = 4$

Заметим, что верна следующая

Лемма 4.2.1. *Пусть $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$ и $\mathrm{CF}(A) = \mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n)$. Пусть $G \neq \pm I_n$ и $G(\mathbf{l}_1) = \lambda \mathbf{l}_1$. Тогда $\lambda \notin \mathbb{Q}$.*

Доказательство. Предположим, что $\lambda \in \mathbb{Q}$. Поскольку $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ и $G \neq \pm I_n$, то $\mathrm{rank}(G - \lambda I_n) > 0$. Так как $(G - \lambda I_n)(\mathbf{l}_1) = \mathbf{0}$, то какие-то числа из набора $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ выражаются через оставшиеся числа этого набора в виде некоторой линейной комбинации с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. В силу предложения 6 получаем противоречие.

$\square$

Отныне будем считать, что $n = 4$, то есть будем рассматривать трехмерные цепные дроби. Напомним, что для каждого $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$ соотношением (1) определена перестановка σ_G.

Лемма 4.2.2. *Пусть G — палиндромическая симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$, ассоциированной с (гиперболическим) оператором A. Тогда существует такая нумерация подпространств l_1, l_2, l_3, l_4, что $\sigma_G = (1,2)(3,4)$ или $\sigma_G = (1,2,3,4)$.*

Доказательство. Случай $\sigma_G = \mathrm{id}$ невозможен в силу того, что оператор G не является симметрией Дирихле $\mathrm{CF}(A)$.

Предположим, существует такая нумерация подпространств l_1, l_2, l_3, l_4, что $\sigma_G = (1)(2,3,4)$. Таким образом, существуют такие вещественные числа μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, что матрица оператора G в базисе $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \\ 0 & \mu_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда характеристический многочлен оператора G имеет вид

$$\chi_G(x) = (x - \mu_1)(x^3 - \mu_2\mu_3\mu_4) = x^4 - \mu_1 x^3 - \mu_2\mu_3\mu_4 x \pm 1 \in \mathbb{Z}[x].$$

Следовательно, μ_1 — целое число, и при этом μ_1 — корень уравнения $\chi_G(x) = 0$, то есть $\mu_1 = \pm 1$. Стало быть, l_1 — собственное подпространство оператора G, соответствующее собственному значению $\mu_1 = \pm 1$. То есть l_1 рационально, что противоречит гиперболичности оператора A.

Предположим, существует такая нумерация подпространств l_1, l_2, l_3, l_4, что $\sigma_G = (1)(2)(3,4)$. Таким образом, существуют такие вещественные числа μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, что матрица оператора G в базисе $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_3 \\ 0 & 0 & \mu_4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда характеристический многочлен оператора G, коэффициенты которого целочисленны, имеет вид

$$(x - \mu_1)(x - \mu_2)(x^2 - \mu_3\mu_4) =$$

$$= x^4 - (\mu_1 + \mu_2)x^3 + (\mu_1\mu_2 - \mu_3\mu_4)x^2 + (\mu_1 + \mu_2)\mu_3\mu_4 x - \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4.$$

Так как $\mu_1 + \mu_2 \in \mathbb{Z}$, то $\mu_3\mu_4 \in \mathbb{Q}$. Тогда существуют такие взаимнопростые целые числа $p \geq 1$ и $q \geq 1$, что $|\mu_3\mu_4| = \frac{p}{q}$, $|\mu_1\mu_2| = \frac{q}{p}$, а значит,

$$|\mu_1\mu_2 - \mu_3\mu_4| = \frac{\pm p^2 \pm q^2}{pq}.$$

Итак, p^2 делится на q и q^2 делится на p, то есть $p = q = 1$ и $\mu_3\mu_4 = \pm 1$.

Таким образом, матрица оператора G^2 в базисе $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mu_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Из леммы 4.2.1 следует, что $G^2 = I_4$, то есть $\mu_1 = \pm 1$. Вновь применяя лемму 4.2.1, получаем, что $G = \pm I_4$, чего не может быть.

Таким образом, существует такая нумерация подпространств l_1, l_2, l_3, l_4, что $\sigma_G = (1,2)(3,4)$ или $\sigma_G = (1,2,3,4)$.

$\square$

Следствие 4.2.1. *Пусть G — палиндромическия симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$. Пусть $G' = G^2$, если $\mathrm{ord}(\sigma_G) = 4$, и $G' = G$, если $\mathrm{ord}(\sigma_G) = 2$. Тогда G' — палиндромическия симметрия $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{G'}) = 2$.*

Пусть G — палиндромическия симметрия $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$. Изменив при необходимости нумерацию подпространств l_1, l_2, l_3, l_4, в силу леммы 4.2.2 можно рассмотреть такие вещественные числа μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, что матрица оператора G в базисе $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu_1 \\ \mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_4 & 0 \end{pmatrix} \qquad (4.2.1)$$

или вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \\ \mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (4.2.2)$$

Пусть G — палиндромическая симметрия $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ и матрица оператора G в базисе $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4$ имеет вид (4.2.1). Тогда лемма 2.4.1 в случае $n = 4$ при изменении нумерации подпространств l_1, l_2, l_3, l_4 приобретает следующий вид

Лемма 4.2.3. *Пусть G — палиндромическая симметрия цепной дроби* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ *и матрица оператора G в базисе* $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4$ *имеет вид* (4.2.1)*. Тогда G является собственной симметрией дроби* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ *в том и только том случае, если* $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 = 1$.

Для палиндромических симметрий вида (4.2.2) справедливо аналогичное утверждение:

Лемма 4.2.4. *Пусть G — палиндромическая симметрия цепной дроби* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ *и матрица оператора G в базисе* $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4$ *имеет вид* (4.2.2)*. Тогда G является собственной симметрией дроби* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ *в том и только том случае, если* $\mu_1\mu_3 = \mu_2\mu_4 = 1$.

Доказательство. Пусть G является собственной симметрией цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Тогда существуют такие числа ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 из множества $\{-1, 1\}$, что

$$G(\varepsilon_1\mathbf{l}_1, \varepsilon_2\mathbf{l}_2, \varepsilon_3\mathbf{l}_3, \varepsilon_4\mathbf{l}_4) = \big(\mu_3\varepsilon_1\mathbf{l}_3, \mu_4\varepsilon_2\mathbf{l}_4, \mu_1\varepsilon_3\mathbf{l}_1, \mu_2\varepsilon_4\mathbf{l}_2\big),$$

и выполняются неравенства

$$\mu_1\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} > 0,\ \ \mu_2\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_2} > 0,\ \ \mu_3\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} > 0,\ \ \mu_4\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_4} > 0.$$

Стало быть, $\mu_1\mu_3 > 0$ и $\mu_2\mu_4 > 0$. Так как у оператора G существует неподвижная точка на некотором парусе, то у оператора G существует одномерное собственное подпространство, соответствующее собственному значению 1. Теперь, поскольку характеристический многочлен оператора G имеет вид $(x^2 - \mu_1\mu_3)(x^2 - \mu_2\mu_4)$, то $\mu_1\mu_3 = 1$ или $\mu_2\mu_4 = 1$. Тогда $\mu_1\mu_3 = \mu_2\mu_4 = 1$.

Если $\mu_1\mu_3 = \mu_2\mu_4 = 1$, то, опять же, характеристический многочлен оператора G имеет вид $x^4 - 2x^2 + 1$. Стало быть, у оператора G существует целочисленный собственный вектор, соответствующий собственному значению 1. Этот вектор лежит внутри некоторого конуса $C \in \mathcal{C}(l_1, l_2, l_3, l_4)$, поскольку цепная дробь $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ является алгебраической.

□

Следствие 4.2.2. *Пусть G — палиндромическия симметрия цепной дроби* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$*. Тогда G является собственной симметрией* *в том и только том случае, если G' (см. следствие 4.2.1) является собственной симметрией.*

Доказательство. Если G является собственной симметрией цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$, то, очевидно, оператор G' также является собственной симметрией цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$.

Обратно, предположим, что G' — собственная симметрия $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Случай $\mathrm{ord}(\sigma_G) = 2$, то есть $G' = G$, очевиден. Если $\mathrm{ord}(\sigma_G) = 4$, то, изменив при необходимости нумерацию подпространств l_1, l_2, l_3, l_4, можно считать, что матрица оператора G в базисе $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4$ имеет вид (4.2.2). Тогда матрица оператора $G' = G^2$ в базисе $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_1\mu_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2\mu_1 \\ \mu_3\mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_4\mu_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стало быть, $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 = 1$ в силу леммы 4.2.4, а значит, G — собственная симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ в силу леммы 4.2.3.

□

Лемма 4.2.5. *Пусть G — собственная симметрия $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ и $\mathrm{ord}(\sigma_G) = 2$. Тогда существуют такие одномерные рациональные подпространства l_+^1, l_+^2, l_-^1 и l_-^2, что $Gl_+^1 = l_+^1$, $Gl_+^2 = l_+^2$, $Gl_-^1 = l_-^1$, $Gl_-^2 = l_-^2$ и $l_+^1 + l_+^2 + l_-^1 + l_-^2 = \mathbb{R}^4$. При этом подпространства l_+^1 и l_+^2 соответствуют собственному значению 1, а подпространства l_-^1 и l_-^2 соответствуют собственному значению -1.*

Доказательство. Изменив в случае необходимости нумерацию подпространств l_1, l_2, l_3, l_4, в силу леммы 4.2.4 можно считать, что существуют такие вещественные числа μ_1 и μ_2, что матрица оператора G в базисе $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \\ \frac{1}{\mu_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\chi_G(x) = (x-1)^2(x+1)^2$, то у оператора G есть двумерное инвариантное подпространство L_+, соответствующее собственному значению 1 и двумерное инвариантное подпространство L_-, соответствующее собственному значению -1. Покажем рациональность подпространств L_+ и L_-, из чего будет следовать утверждение леммы.

Поскольку подпространство L_+ совпадает с решением системы линейных уравнений

$$(G - I_4)\mathbf{x}^\top = \mathbf{0},$$

то фундаментальная система решений данной системы линейных уравнений имеет размерность 2. Рассмотрев в качестве значений свободных переменных наборы $(0,1)$ и $(1,0)$, мы определим два линейно-независимых рациональных решения данной системы, из чего следует рациональность L_+. Рациональность подпространства L_- доказывается аналогичным способом.

□

Лемма 4.2.6. *Пусть G — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$. Тогда собственные значения оператора G равны 1, -1, i и $-i$. Более того, собственные подпространства l_+ (соответствующее собственному значению 1), l_- (соответствующее собственному значению -1) и L (соответствующее собственным значениям i и $-i$) являются рациональными. В частности, подпространство L не содержит собственных для G одномерных подпространств и для любого $\mathbf{v} \in L$ верно, что $G^2(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$.*

Доказательство. Изменив в случае необходимости нумерацию подпространств l_1, l_2, l_3, l_4, можно считать, что в силу леммы 4.2.3 существуют такие вещественные числа μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, что $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 = 1$ и матрица оператора G в базисе $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4$ имеет вид (4.2.1). Так как $\chi_G(x) = x^4 - \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4$, то собственные значения оператора G равны 1, -1, i и $-i$, а значит, у G есть ровно два одномерных собственных подпространства и двумерное инвариантное подпространство, которое не содержит собственных для G одномерных подпространств. Обозначим через l_+ рациональное одномерное собственное подпространство оператора G, соответствующее собственному значению 1, через l_- — рациональное одномерное собственное подпространство оператора G, соответствующее собственному значению -1, а через L — двумерное инвариантное подпространство, соответствующее собственным значениям i и $-i$. Покажем, что подпространство L рационально.

Поскольку $l_- + l_+ + L = \mathbb{R}^4$, то для любого вектора $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ существуют такие единственные векторы $\mathbf{p}(\mathbf{v}, l_-) \in l_-$, $\mathbf{p}(\mathbf{v}, l_+) \in l_+$ и $\mathbf{p}(\mathbf{v}, L) \in L$, что выполняется равенство

$$\mathbf{v} = \mathbf{p}(\mathbf{v}, l_-) + \mathbf{p}(\mathbf{v}, l_+) + \mathbf{p}(\mathbf{v}, L).$$

Заметим, что $\mathbf{p}\big(G^2(\mathbf{v}), L\big) = \mathbf{p}(-\mathbf{v}, L)$, $\mathbf{p}\big(G^2(\mathbf{v}), l_-\big) = \mathbf{p}(\mathbf{v}, l_-)$ и $\mathbf{p}\big(G^2(\mathbf{v}), l_+\big) = \mathbf{p}(\mathbf{v}, l_+)$ для любого вектора $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$. Таким образом, для любой точки $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^4 \setminus (l_+ + l_-)$ ненулевые целочисленные векторы $\mathbf{z} - G^2(\mathbf{z})$ и $G(\mathbf{z}) - G^3(\mathbf{z})$ лежат в двумерном подпространстве L. Эти два целочисленных вектора неколлинеарны, поскольку $G(\mathbf{z}) - G^3(\mathbf{z}) = G\big(\mathbf{z} - G^2(\mathbf{z})\big)$ и подпространство L не содержит собственных для оператора G одномерных подпространств. Итак, мы показали, что подпространство L рационально.

□

4.3 Геометрия собственных симметрий в размерности $n = 4$

Лемма 4.3.1. *Пусть G — собственная симметрия дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$. Пусть $F = G'$ (см. следствие 4.2.1) — собственная симметрия $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ (см. следствие 4.2.2). Тогда существуют $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\mathbf{z}_4 \in \mathbb{Z}^4$, такие что*

$$F(\mathbf{z}_1) = \mathbf{z}_3,\ F(\mathbf{z}_2) = \mathbf{z}_4,\ F(\mathbf{z}_3) = \mathbf{z}_1,\ F(\mathbf{z}_4) = \mathbf{z}_2$$

и выполняется хотя бы одно из следующих одиннадцати утверждений:

(1) *векторы $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\frac{1}{4}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4)$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^4$;*

(2) *векторы $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\mathbf{z}_4$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^4$;*

(3) *векторы $\mathbf{z}_1$, $\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2)$, $\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_3)$, $\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_4)$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^4$;*

(4) *векторы* $\mathbf{z}_1,\ \mathbf{z}_2,\ \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_3),\ \frac{1}{4}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2+\mathbf{z}_3+\mathbf{z}_4)$ *образуют базис решетки* $\mathbb{Z}^4$*;*

(5) *векторы* $\mathbf{z}_1,\ \mathbf{z}_2,\ \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_3),\ \frac{1}{2}(\mathbf{z}_2+\mathbf{z}_4)$ *образуют базис решетки* $\mathbb{Z}^4$*;*

(6) *векторы* $\mathbf{z}_1,\ \mathbf{z}_2,\ \mathbf{z}_3,\ \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_3+\mathbf{z}_4-\mathbf{z}_2)$ *образуют базис решетки* $\mathbb{Z}^4$*;*

(7) *векторы* $\mathbf{z}_1,\ \mathbf{z}_2,\ \mathbf{z}_3,\ \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2)+\frac{1}{4}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_4-\mathbf{z}_3-\mathbf{z}_2)$ *образуют базис решетки* $\mathbb{Z}^4$*;*

(8) *векторы* $\mathbf{z}_1,\ \mathbf{z}_2,\ \mathbf{z}_3,\ \frac{1}{2}(\mathbf{z}_2+\mathbf{z}_4)$ *образуют базис решетки* $\mathbb{Z}^4$*;*

(9) *векторы* $\mathbf{z}_1,\ \mathbf{z}_2,\ \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_3),\ \frac{1}{4}\mathbf{z}_1+\frac{1}{2}\mathbf{z}_2-\frac{1}{4}\mathbf{z}_3+\frac{1}{2}\mathbf{z}_4$ *образуют базис решетки* $\mathbb{Z}^4$*;*

(10) *векторы* $\mathbf{z}_1,\ \mathbf{z}_2,\ \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_3),\ \frac{1}{2}\mathbf{z}_1+\frac{1}{4}\mathbf{z}_2+\frac{1}{2}\mathbf{z}_4$ *образуют базис решетки* $\mathbb{Z}^4$*;*

(11) *векторы* $\mathbf{z}_1,\ \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2),\ \mathbf{z}_3,\ \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_3+\mathbf{z}_4-\mathbf{z}_2)$ *образуют базис решетки* $\mathbb{Z}^4$*.*

Доказательство. Будем называть плоскость *рациональной*, если множество содержащихся в нем целых точек является (аффинной) решеткой ранга, равного размерности этой плоскости.

Рассмотрим для собственной симметрии F подпространства l_+^1, l_+^2, l_-^1 и l_-^2 из леммы 4.2.5 и положим $S = l_+^2 + l_-^1 + l_-^2$. Обозначим через S_1 ближайшую к S рациональную гиперплоскость, параллельную S и не совпадающую с S (любую из двух). Тогда $G(S_1) = S_1$. Также обозначим через $\mathbf{p}$ точку пересечения гиперплоскости S_1 и l_+^1, а через l и π — прямую и плоскость, проходящие через точку $\mathbf{p}$ и параллельные l_+^2 и $L_- = l_-^1 + l_-^2$ соответственно. При этом $F(l) = l$, $F(\pi) = \pi$ и $F(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$.

Плоскость π разделяет гиперплоскость S_1 на два множества S_1^+ и S_1^-. Пусть Q и R — рациональные плоскости, ближайшие к π, параллельные π и не совпадающие с π, принадлежащие множествам S_1^+ и S_1^- соответственно. Отметим, что, вообще говоря, расстояния от π до Q и от π до R не обязательно равны. Положим $\mathbf{p}^Q = Q \cap l$ и $\mathbf{p}^R = R \cap l$. Построим точки $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\mathbf{z}_4$ при помощи следующей итерационной процедуры.

Для начала предположим, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ — такая пара точек решетки $\mathbb{Z}^4$, что $\mathbf{v}_1 \in Q, \mathbf{v}_2 \in R$, векторы $\mathbf{v}_1 - \mathbf{p}^Q$ и $\mathbf{v}_2 - \mathbf{p}^R$ неколлинеарны. Тогда можно

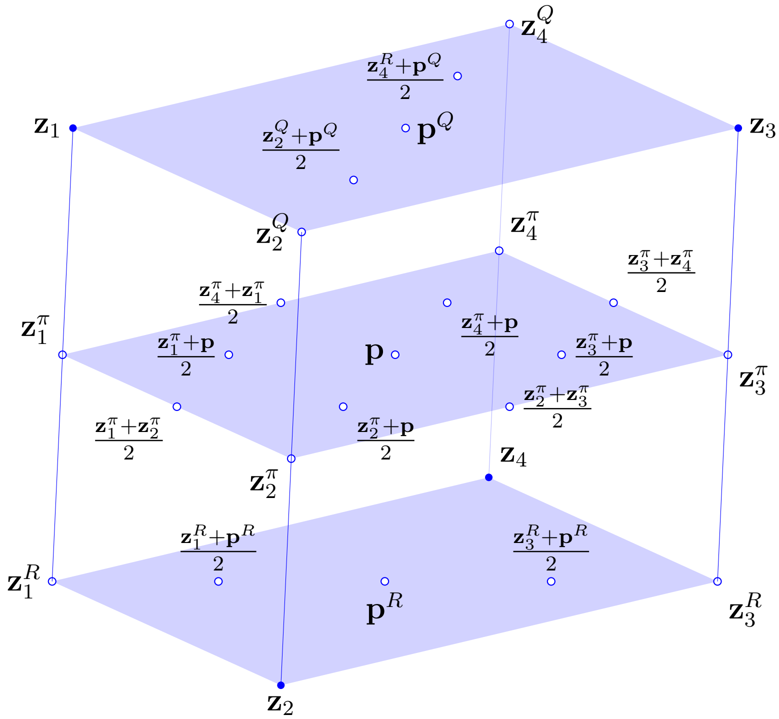

Рис. 4.1: Возможное расположение точек решетки $\mathbb{Z}^4$ в параллелограммах из построенной тройки $(\Delta_k^\pi, \Delta_k^Q, \Delta_k^R)$

построить точки

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_3 &= F(\mathbf{v}_1) \in \mathbb{Z}^4 \cap Q, & \mathbf{v}_4 &= F(\mathbf{v}_2) \in \mathbb{Z}^4 \cap R, \\
\mathbf{v}_1^R &= \mathbf{v}_1 + (\mathbf{p}^R - \mathbf{p}^Q), & \mathbf{v}_3^R &= \mathbf{v}_3 + (\mathbf{p}^R - \mathbf{p}^Q), \\
\mathbf{v}_2^Q &= \mathbf{v}_2 + (\mathbf{p}^Q - \mathbf{p}^R), & \mathbf{v}_4^Q &= \mathbf{v}_4 + (\mathbf{p}^Q - \mathbf{p}^R), \\
\mathbf{v}_1^\pi &= \mathbf{v}_1 + (\mathbf{p} - \mathbf{p}^Q), & \mathbf{v}_3^\pi &= \mathbf{v}_3 + (\mathbf{p} - \mathbf{p}^Q), \\
\mathbf{v}_2^\pi &= \mathbf{v}_2 + (\mathbf{p} - \mathbf{p}^R), & \mathbf{v}_4^\pi &= \mathbf{v}_4 + (\mathbf{p} - \mathbf{p}^R).
\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Построенные точки определяют $(\Delta^\pi, \Delta^Q, \Delta^R)$ — тройку параллелограммов, где

$$\begin{gathered}
\Delta^\pi = \mathrm{conv}(\mathbf{v}_1^\pi, \mathbf{v}_2^\pi, \mathbf{v}_3^\pi, \mathbf{v}_4^\pi) \subset \pi, \\
\Delta^Q = \mathrm{conv}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2^Q, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4^Q) \subset Q, \quad \Delta^R = \mathrm{conv}(\mathbf{v}_1^R, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3^R, \mathbf{v}_4) \subset R.
\end{gathered} \tag{4.3.2}$$

Возьмем произвольную целочисленную точку $\mathbf{v}_{1,1} \in Q \setminus l$. Тогда существует такая целочисленная точка $\mathbf{v}_{1,2} \in R \setminus l$, что вектор $\mathbf{v}_{1,1} - \mathbf{p}^Q$ неколлинеарен вектору $\mathbf{v}_{1,2} - \mathbf{p}^R$.

Теперь предположим, мы построили такую пару точек $(\mathbf{v}_{j,1}, \mathbf{v}_{j,2})$ решетки $\mathbb{Z}^4$, что $\mathbf{v}_{j,1} \in Q, \mathbf{v}_{j,2} \in R$, векторы $\mathbf{v}_{j,1} - \mathbf{p}^Q$ и $\mathbf{v}_{j,2} - \mathbf{p}^R$ неколлинеарны. Положив $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_{j,1}, \mathbf{v}_{j,2})$, определим с помощью (4.3.1) точки $\mathbf{v}_{j,3} = \mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_{j,4} = \mathbf{v}_4$, $\mathbf{v}_{j,1}^R = \mathbf{v}_1^R$, $\mathbf{v}_{j,3}^R = \mathbf{v}_3^R$, $\mathbf{v}_{j,2}^Q = \mathbf{v}_2^Q$, $\mathbf{v}_{j,4}^Q = \mathbf{v}_4^Q$, $\mathbf{v}_{j,1}^\pi = \mathbf{v}_1^\pi$, $\mathbf{v}_{j,2}^\pi = \mathbf{v}_2^\pi$, $\mathbf{v}_{j,3}^\pi = \mathbf{v}_3^\pi$, $\mathbf{v}_{j,4}^\pi = \mathbf{v}_4^\pi$. Также, с помощью (4.3.2) определим параллелограммы $\Delta_j^\pi = \Delta^\pi, \Delta_j^Q = \Delta^Q, \Delta_j^R = \Delta^R$. Кроме того, положим $\mathbf{p}_{j,1}^R = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_{j,1}^R + \mathbf{p}^R)$, $\mathbf{p}_{j,3}^R = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_{j,3}^R + \mathbf{p}^R)$, $\mathbf{p}_{j,2}^Q = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_{j,2}^Q + \mathbf{p}^Q)$ и $\mathbf{p}_{j,4}^Q = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_{j,4}^R + \mathbf{p}^Q)$.

Если на плоскостях Q и R существует целая точка, не совпадающая с точками $\mathbf{p}^Q$, $\mathbf{p}^R$, $\mathbf{p}_{j,1}^R$, $\mathbf{p}_{j,3}^R$, $\mathbf{p}_{j,2}^Q$, $\mathbf{p}_{j,4}^Q$ и не с какой из вершин параллелограммов Δ_j^Q и Δ_j^R, при этом лежащая в одном из этих параллелограммов (без ограничения общности, в Δ_j^Q), то обозначим ее через $\mathbf{v}$. Иначе будем называть пару точек $(\mathbf{v}_{j,1}, \mathbf{v}_{j,2})$ *допустимой парой для оператора* G *и цепной дроби* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$.

Предположим, что вектор $\mathbf{v} - \mathbf{p}^Q$ неколлинеарен вектору $\mathbf{v}_{j,2} - \mathbf{p}^R$. Тогда положим $\mathbf{v}_{j+1,1} = \mathbf{v}$, $\mathbf{v}_{j+1,2} = \mathbf{v}_{j,2}$.

Теперь предположим, что вектор $\mathbf{v}-\mathbf{p}^Q$ коллинеарен вектору $\mathbf{v}_{j,2}-\mathbf{p}^R$. Заметим, что $\mathbf{v} - F(\mathbf{v}) = 2(\mathbf{v} - \mathbf{p}^Q)$, а значит, $|\mathbf{v} - F(\mathbf{v})| < |\mathbf{v}_{j,4} - \mathbf{v}_{j,2}|$ и векторы $\pm\big(\mathbf{v} - F(\mathbf{v})\big)$ не совпадают ни с каким из векторов $\mathbf{v}_{j,4} - \mathbf{v}_{j,2}$ и $\mathbf{p}^R - \mathbf{v}_{j,2} = \mathbf{p}_{j,4}^Q - \mathbf{p}_{j,2}^Q$. Таким образом, либо точка $\mathbf{v}_{j,2} + \big(\mathbf{v} - F(\mathbf{v})\big)$, либо точка $\mathbf{v}_{j,2} - \big(\mathbf{v} - F(\mathbf{v})\big)$ лежит в параллелограмме Δ_j^R и не совпадает с точками $\mathbf{p}^R$, $\mathbf{p}_{j,1}^R$, $\mathbf{p}_{j,3}^R$ и не с какой из вершин параллелограмма Δ_j^R. Обозначим эту точку через $\mathbf{v}_{j+1,2}$ и положим $\mathbf{v}_{j+1,1} = \mathbf{v}_{j,1}$. Заметим, что вектор $\mathbf{v}_{j+1,1} - \mathbf{p}^Q$ неколлинеарен вектору $\mathbf{v}_{j+1,2} - \mathbf{p}^R$.

Последовательность пар $(\mathbf{v}_{j,1}, \mathbf{v}_{j,2})$ конечна, так как, по построению

$$\Delta_j^\pi \subset \Delta_{j+1}^\pi, \quad \Delta_j^Q \subset \Delta_{j+1}^Q, \quad \Delta_j^R \subset \Delta_{j+1}^R.$$

Пусть $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = (\mathbf{v}_{k,1}, \mathbf{v}_{k,2})$ — последний элемент такой последовательности, то есть $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ — допустимая пара для оператора G и цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$. Положив $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$, определим с помощью (4.3.1) точки $\mathbf{z}_3 = \mathbf{v}_3$, $\mathbf{z}_4 = \mathbf{v}_4$, $\mathbf{z}_1^R = \mathbf{v}_1^R$, $\mathbf{z}_3^R = \mathbf{v}_3^R$, $\mathbf{z}_2^Q = \mathbf{v}_2^Q$, $\mathbf{z}_4^Q = \mathbf{v}_4^Q$, $\mathbf{z}_1^\pi = \mathbf{v}_1^\pi$, $\mathbf{z}_2^\pi = \mathbf{v}_2^\pi$, $\mathbf{z}_3^\pi = \mathbf{v}_3^\pi$, $\mathbf{z}_4^\pi = \mathbf{v}_4^\pi$. Также, с помощью (4.3.2) определим параллелограммы $\Delta_k^\pi = \Delta^\pi, \Delta_k^Q = \Delta^Q, \Delta_k^R = \Delta^R$. Кроме того, положим $\mathbf{p}_1^R = \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1^R + \mathbf{p}^R)$, $\mathbf{p}_3^R = \frac{1}{2}(\mathbf{z}_3^R + \mathbf{p}^R)$, $\mathbf{p}_2^Q = \frac{1}{2}(\mathbf{z}_2^Q + \mathbf{p}^Q)$ и $\mathbf{p}_4^Q = \frac{1}{2}(\mathbf{z}_4^R + \mathbf{p}^Q)$.

Покажем, что множество $(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4$ совпадает с одним из множеств (с точностью до перенумерации точек $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4$)

$$\{\mathbf{z}_1,\ \mathbf{z}_2^Q,\ \mathbf{z}_3,\ \mathbf{z}_4^Q,\ \mathbf{z}_1^R,\ \mathbf{z}_2,\ \mathbf{z}_3^R,\ \mathbf{z}_4,\ \mathbf{p}\},$$
$$\{\mathbf{z}_1,\ \mathbf{z}_3,\ \mathbf{z}_2,\ \mathbf{z}_4\},$$
$$\{\mathbf{z}_1,\ \mathbf{z}_3,\ \mathbf{p}^Q,\ \mathbf{z}_2,\ \mathbf{z}_4,\ \mathbf{p}_1^R,\ \mathbf{p}_3^R\},$$
$$\{\mathbf{z}_1,\ \mathbf{z}_2^Q,\ \mathbf{z}_3,\ \mathbf{z}_4^Q,\ \mathbf{z}_1^R,\ \mathbf{z}_2,\ \mathbf{z}_3^R,\ \mathbf{z}_4,$$
$$\mathbf{p}^Q,\ \mathbf{p}^R,\ \frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2},\ \frac{\mathbf{z}_2^\pi+\mathbf{z}_3^\pi}{2},\ \frac{\mathbf{z}_3^\pi+\mathbf{z}_4^\pi}{2},\ \frac{\mathbf{z}_4^\pi+\mathbf{z}_1^\pi}{2}\},$$
$$\{\mathbf{z}_1,\ \mathbf{z}_2^Q,\ \mathbf{z}_3,\ \mathbf{z}_4^Q,\ \mathbf{z}_1^R,\ \mathbf{z}_2,\ \mathbf{z}_3^R,\ \mathbf{z}_4,\ \mathbf{p}^Q,\ \mathbf{p}^R,\ \frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{p}}{2},\ \frac{\mathbf{z}_3^\pi+\mathbf{p}}{2}\},$$
$$\{\mathbf{z}_1,\ \mathbf{z}_2^Q,\ \mathbf{z}_3,\ \mathbf{z}_4^Q,\ \mathbf{z}_1^R,\ \mathbf{z}_2,\ \mathbf{z}_3^R,\ \mathbf{z}_4,\ \frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2},\ \frac{\mathbf{z}_3^\pi+\mathbf{z}_4^\pi}{2}\},$$
$$\{\mathbf{z}_1,\ \mathbf{z}_2^Q,\ \mathbf{z}_3,\ \mathbf{z}_4^Q,\ \mathbf{z}_1^R,\ \mathbf{z}_2,\ \mathbf{z}_3^R,\ \mathbf{z}_4,\ \mathbf{z}_1^\pi,\ \mathbf{z}_2^\pi,\ \mathbf{z}_3^\pi,\ \mathbf{z}_4^\pi\},$$
$$\{\mathbf{z}_1,\ \mathbf{z}_3,\ \mathbf{z}_2,\ \mathbf{z}_4, \mathbf{p}^R\},$$
$$\{\mathbf{z}_1,\ \mathbf{z}_2^Q,\ \mathbf{z}_3,\ \mathbf{z}_4^Q,\ \mathbf{z}_1^R,\ \mathbf{z}_2,\ \mathbf{z}_3^R,\ \mathbf{z}_4\},$$
$$\{\mathbf{p},\ \mathbf{z}_1,\ \mathbf{z}_2^Q,\ \mathbf{z}_3,\ \mathbf{z}_4^Q,\ \mathbf{z}_1^R,\ \mathbf{z}_2,\ \mathbf{z}_3^R,\ \mathbf{z}_4,\ \mathbf{p}^Q,\ \mathbf{p}^R,\ \mathbf{z}_1^\pi,\ \mathbf{z}_2^\pi,\ \mathbf{z}_3^\pi,\ \mathbf{z}_4^\pi\},$$
$$\{\mathbf{z}_1,\ \mathbf{z}_2^Q,\ \mathbf{z}_3,\ \mathbf{z}_4^Q,\ \mathbf{z}_1^R,\ \mathbf{z}_2,\ \mathbf{z}_3^R,\ \mathbf{z}_4,\ \mathbf{p}^Q,\ \mathbf{p}^R\}.$$

Рассмотрим параллелограмм Δ_k^Q. Поскольку $F(\mathbf{p}_2^Q) = \mathbf{p}_4^Q$, $F(\mathbf{p}_4^Q) = \mathbf{p}_2^Q$, $F(\mathbf{z}_2^Q) = \mathbf{z}_4^Q$ и $F(\mathbf{z}_4^Q) = \mathbf{z}_2^Q$, то $\mathbf{p}_2^Q \in \mathbb{Z}^4 \Leftrightarrow \mathbf{p}_4^Q \in \mathbb{Z}^4$ и $\mathbf{z}_2^Q \in \mathbb{Z}^4 \Leftrightarrow \mathbf{z}_4^Q \in \mathbb{Z}^4$. Заметим, что если $\mathbf{p}_2^Q \in \mathbb{Z}^4$ и $\mathbf{p}_4^Q \in \mathbb{Z}^4$, то точки $\mathbf{z}_2^Q, \mathbf{z}_4^Q, \mathbf{p}^Q$ не принадлежат решетке $\mathbb{Z}^4$ в силу способа построения параллелограмма Δ_k^R. Таким образом, множество $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4$ совпадает с одним из множеств

$$\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3\}, \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2^Q, \mathbf{z}_4^Q\}, \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3, \mathbf{p}^Q\}, \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2^Q, \mathbf{z}_4^Q, \mathbf{p}^Q\}, \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3, \mathbf{p}_2^Q, \mathbf{p}_4^Q\}.$$

Аналогично, множество $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4$ совпадает с одним из множеств

$$\{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4\}, \{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_1^R, \mathbf{z}_3^R\}, \{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4, \mathbf{p}^R\}, \{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_1^R, \mathbf{z}_3^R, \mathbf{p}^R\}, \{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4, \mathbf{p}_1^R, \mathbf{p}_3^R\}.$$

Рассмотрим следующие случаи:

A) $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3\}$. Если $\mathbf{z}_1^R \in \mathbb{Z}^4$ и $\mathbf{z}_3^R \in \mathbb{Z}^4$, то $\mathbf{z}_2^Q = \mathbf{z}_1 + (\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1^R) \in \mathbb{Z}^4$ и $\mathbf{z}_4^Q \in \mathbb{Z}^4$, что противоречит рассматриваемому случаю. Если $\mathbf{p}_1^R \in \mathbb{Z}^4$

и $\mathbf{p}_3^R \in \mathbb{Z}^4$, то $\mathbf{p}^Q = \mathbf{z}_1 + (\mathbf{p}_3^R - \mathbf{p}_1^R) \in \mathbb{Z}^4$, что также противоречит рассматриваемому случаю. Таким образом, существует ровно два подслучая:

A.1) $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4\}$. Этот случай, в свою очередь, разбивается на два подсулчая:

A.1.a) Плоскость π рациональная. Тогда, плоскости Q и R равноудалены от π. Покажем, что параллелограмм Δ_k^π не содержит точек решетки $\mathbb{Z}^4$. Пусть это не так. Будем считать, без ограничения общности, что существует точка $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^4$, лежащая в параллелограмме $\mathrm{conv}(\mathbf{z}_1^\pi, \frac{\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{z}_2^\pi}{2}, \mathbf{p}, \frac{\mathbf{z}_4^\pi + \mathbf{z}_1^\pi}{2})$. Если $\mathbf{w} \notin \{\frac{\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{z}_2^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_4^\pi + \mathbf{z}_1^\pi}{2}\}$, то $\mathbf{w} + (\mathbf{w} - \mathbf{z}_1) \in \Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4$ и $\mathbf{w} + (\mathbf{w} - \mathbf{z}_1) \notin \{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4\}$, чего не может быть. Если $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{z}_2^\pi}{2}$, то $\frac{\mathbf{z}_3^\pi + \mathbf{z}_4^\pi}{2} = F(\frac{\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{z}_2^\pi}{2}) \in \mathbb{Z}^4$, а значит, $\mathbf{z}_4^Q = \mathbf{z}_1 + (\frac{\mathbf{z}_3^\pi + \mathbf{z}_4^\pi}{2} - \frac{\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{z}_2^\pi}{2}) \in \mathbb{Z}^4$, чего также не может быть. Аналогично показывается, что случай $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{z}_4^\pi + \mathbf{z}_1^\pi}{2}$ невозможен, а значит, Δ_k^π не содержит точек решетки $\mathbb{Z}^4$. Поскольку $\mathrm{conv}\big(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_3 + (\mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_2)\big) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_3 + (\mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_2)\}$, то в параллелограмме $\mathrm{conv}\big(\mathbf{z}_3^\pi, \mathbf{z}_4^\pi, \mathbf{z}_1^\pi + (\mathbf{z}_1^\pi - \mathbf{z}_4^\pi), \mathbf{z}_2^\pi + (\mathbf{z}_2^\pi - \mathbf{z}_3^\pi)\big)$ должна существовать точка $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^4$, а значит, по доказанному выше, точка $\mathbf{y}$ лежит в параллелограмме $\mathrm{conv}\big(\mathbf{z}_2^\pi, \mathbf{z}_1^\pi, \mathbf{z}_1^\pi + (\mathbf{z}_1^\pi - \mathbf{z}_4^\pi), \mathbf{z}_2^\pi + (\mathbf{z}_2^\pi - \mathbf{z}_3^\pi)\big)$. Но тогда $\mathbf{z}_3 + (\mathbf{z}_3 - \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^4$ и $\mathbf{z}_3 + (\mathbf{z}_3 - \mathbf{y}) \in \Delta_k^\pi$, чего, как мы показали, не может быть.

A.1.б) (будет соответствовать утверждению (2)) Плоскость π не является рациональной плоскостью. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_1,\ \mathbf{z}_3,\ \mathbf{z}_2,\ \mathbf{z}_4\},$$

набор векторов $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\mathbf{z}_4$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (2).

A.2) $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4, \mathbf{p}^R\}$. Этот случай, в свою очередь, разбивается на два подсулчая:

A.2.a) Плоскость π рациональная. Тогда, плоскости Q и R равноудалены от π. Покажем, что параллелограмм Δ_k^π не содержит точек решетки $\mathbb{Z}^4$. Пусть это не так. Можно считать, что существует точка $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^4$, лежащая либо в параллелограмме $\mathrm{conv}(\mathbf{z}_1^\pi, \frac{\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{z}_2^\pi}{2}, \mathbf{p}, \frac{\mathbf{z}_4^\pi + \mathbf{z}_1^\pi}{2})$, либо в параллелограмме $\mathrm{conv}(\mathbf{z}_2^\pi, \frac{\mathbf{z}_2^\pi + \mathbf{z}_3^\pi}{2}, \mathbf{p}, \frac{\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{z}_2^\pi}{2})$. Рассмотрим случай $\mathbf{w} \in \mathrm{conv}(\mathbf{z}_1^\pi, \frac{\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{z}_2^\pi}{2}, \mathbf{p}, \frac{\mathbf{z}_4^\pi + \mathbf{z}_1^\pi}{2})$. Если $\mathbf{w} \notin \{\frac{\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{z}_2^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_4^\pi + \mathbf{z}_1^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{p}}{2}\}$, то $\mathbf{w} + (\mathbf{w} - \mathbf{z}_1) \in \Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4$ и $\mathbf{w} + (\mathbf{w} - \mathbf{z}_1) \notin \{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4, \mathbf{p}^R\}$, чего не может быть. Если $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{p}}{2}$,

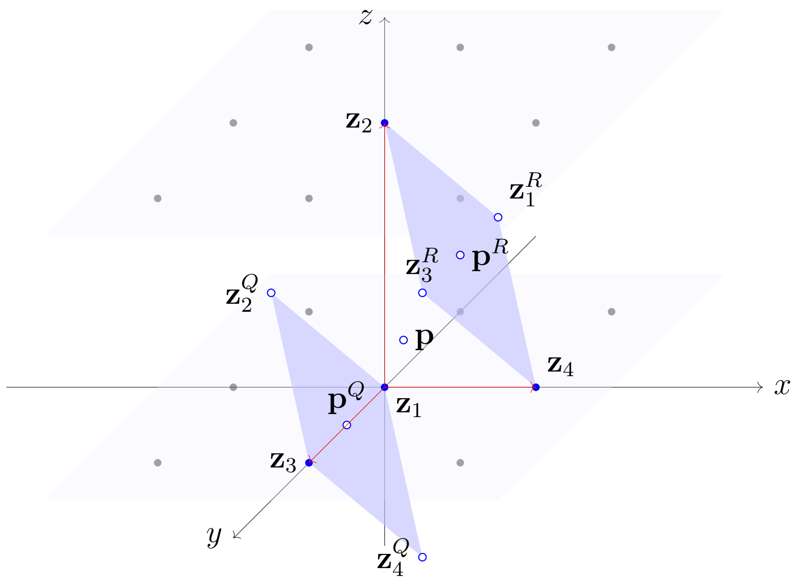

Рис. 4.2: Расположение точек внутри гиперплоскости S_1 из случая **А.1.б** леммы 4.3.1

то $\frac{\mathbf{z}_3^\pi+\mathbf{p}}{2} = F(\frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{p}}{2}) \in \mathbb{Z}^4$, а значит, $\mathbf{p}^Q = \mathbf{z}_1 + (\frac{\mathbf{z}_3^\pi+\mathbf{p}}{2} - \frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{p}}{2}) \in \mathbb{Z}^4$, чего не может быть. Если $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2}$, то $\frac{\mathbf{z}_3^\pi+\mathbf{z}_4^\pi}{2} = F(\frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2}) \in \mathbb{Z}^4$, а значит, $\mathbf{z}_4^Q = \mathbf{z}_1 + (\frac{\mathbf{z}_3^\pi+\mathbf{z}_4^\pi}{2} - \frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2}) \in \mathbb{Z}^4$, чего также не может быть. Аналогично показывается, что случай $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_4^\pi}{2}$ невозможен, а значит, случай $\mathbf{w} \in \operatorname{conv}(\mathbf{z}_1^\pi, \frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2}, \mathbf{p}, \frac{\mathbf{z}_4^\pi+\mathbf{z}_1^\pi}{2})$ невозможен. Теперь рассмотрим случай $\mathbf{w} \in \operatorname{conv}(\mathbf{z}_2^\pi, \frac{\mathbf{z}_2^\pi+\mathbf{z}_3^\pi}{2}, \mathbf{p}, \frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2})$. Если $\mathbf{w} \notin \{\frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_2^\pi+\mathbf{z}_3^\pi}{2}\}$, то $\mathbf{w} + (\mathbf{w} - \mathbf{z}_2) \in \Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4$ и $\mathbf{w} + (\mathbf{w} - \mathbf{z}_2) \notin \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3\}$, чего не может быть. По доказанному выше, случаи $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2}$ и $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{z}_2^\pi+\mathbf{z}_3^\pi}{2}$ также невозможны, а значит, Δ_k^π не содержит точек решетки $\mathbb{Z}^4$. Поскольку $\operatorname{conv}\big(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_3 + (\mathbf{z}_4 - \mathbf{p}^R)\big) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_3 + (\mathbf{z}_4 - \mathbf{p}^R)\}$, то в параллелограмме $\operatorname{conv}\big(\mathbf{z}_3^\pi, \mathbf{z}_4^\pi, \mathbf{z}_1^\pi + (\mathbf{z}_1^\pi - \mathbf{z}_4^\pi), \mathbf{z}_2^\pi + (\mathbf{z}_2^\pi - \mathbf{z}_3^\pi)\big)$ должна существовать точка $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^4$, а значит, по доказанному выше, точка $\mathbf{y}$ лежит в параллелограмме $\operatorname{conv}\big(\mathbf{z}_2^\pi, \mathbf{z}_1^\pi, \mathbf{z}_1^\pi + (\mathbf{z}_1^\pi - \mathbf{z}_4^\pi), \mathbf{z}_2^\pi + (\mathbf{z}_2^\pi - \mathbf{z}_3^\pi)\big)$. Но тогда $\mathbf{z}_3 + (\mathbf{z}_3 - \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^4$ и $\mathbf{z}_3 + (\mathbf{z}_3 - \mathbf{y}) \in \Delta_k^\pi$, чего, как мы показали, не может быть.

А.2.б) (будет соответствовать утверждению (8)) Плоскость π не является рациональной плоскостью. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_1,\, \mathbf{z}_3,\, \mathbf{z}_2,\, \mathbf{z}_4, \mathbf{p}^R\},$$

набор векторов $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\mathbf{p}^R = \frac{1}{2}(\mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_4)$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (8).

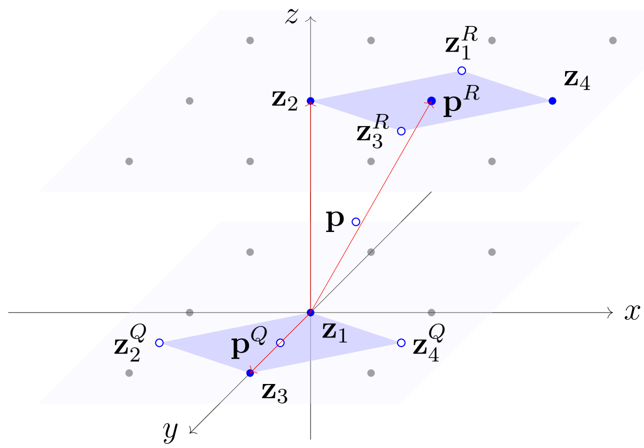

Рис. 4.3: Расположение точек внутри гиперплоскости S_1 из случая **А.2.б** леммы 4.3.1

Б) $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2^Q, \mathbf{z}_4^Q\}$. Заметим, что случай $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4\}$ с точностью до перестановки индексов невозможен в силу пункта **А**. Если $\mathbf{p}^R \in \mathbb{Z}^4$, то $\mathbf{p}^Q = \mathbf{z}_2^Q + (\mathbf{p}^R - \mathbf{z}_2) \in \mathbb{Z}^4$, что противоречит рассматриваемому случаю. Если $\mathbf{p}_1^R \in \mathbb{Z}^4$ и $\mathbf{p}_3^R \in \mathbb{Z}^4$, то $\mathbf{p}^Q = \mathbf{z}_1 + (\mathbf{p}_3^R - \mathbf{p}_1^R) \in \mathbb{Z}^4$, что также противоречит рассматриваемому случаю. Таким образом, существует ровно один подслучай:

Б.1) $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_1^R, \mathbf{z}_3^R\}$. Этот случай, в свою очередь, разбивается на два подслучая:

Б.1.а) Плоскость π рациональная. Тогда, плоскости Q и R равноудалены от π. Поскольку $\operatorname{conv}\big(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_3 + (\mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_3^R)\big) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_3 + (\mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_3^R)\}$, то в параллелограмме Δ_k^π должна существовать хотя бы одна точка решетки $\mathbb{Z}^4$. Пусть $\mathbf{w} \in \Delta_k^\pi \cap \mathbb{Z}^4$. Покажем, что $\mathbf{w} \in \{\mathbf{z}_1^\pi, \mathbf{z}_2^\pi, \mathbf{z}_3^\pi, \mathbf{z}_4^\pi, \mathbf{p}, \frac{\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{z}_2^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_2^\pi + \mathbf{z}_3^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_3^\pi + \mathbf{z}_4^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_4^\pi + \mathbf{z}_1^\pi}{2}\}$. Предположим, что это не так. Можно считать, что либо

$$\mathbf{w} \in \operatorname{conv}(\mathbf{z}_1^\pi, \frac{\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{z}_2^\pi}{2}, \mathbf{p}, \frac{\mathbf{z}_4^\pi + \mathbf{z}_1^\pi}{2}),$$

либо

$$\mathbf{w} \in \operatorname{conv}(\mathbf{z}_2^\pi, \frac{\mathbf{z}_2^\pi + \mathbf{z}_3^\pi}{2}, \mathbf{p}, \frac{\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{z}_2^\pi}{2}).$$

Если $\mathbf{w} \in \operatorname{conv}(\mathbf{z}_1^\pi, \frac{\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{z}_2^\pi}{2}, \mathbf{p}, \frac{\mathbf{z}_4^\pi + \mathbf{z}_1^\pi}{2})$, то $\mathbf{w} + (\mathbf{w} - \mathbf{z}_1) \in \Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4$ и

$\mathbf{w} + (\mathbf{w} - \mathbf{z}_1) \notin \{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_1^R, \mathbf{z}_3^R\}$, чего не может быть. Если $\mathbf{w} \in \mathrm{conv}(\mathbf{z}_2^\pi, \frac{\mathbf{z}_2^\pi + \mathbf{z}_3^\pi}{2}, \mathbf{p}, \frac{\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{z}_2^\pi}{2})$, то $\mathbf{w} + (\mathbf{w} - \mathbf{z}_2) \in \Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4$ и $\mathbf{w} + (\mathbf{w} - \mathbf{z}_2) \notin \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2^Q, \mathbf{z}_4^Q\}$, чего не может быть. Далее рассмотрим подслучаи:

Б.1.а.1) (будет соответствовать утверждению (7)) Предположим, что $\mathbf{w} \in \{\mathbf{z}_1^\pi, \mathbf{z}_2^\pi, \mathbf{z}_3^\pi, \mathbf{z}_4^\pi\}$. В этом случае каждая из точек множества $\{\mathbf{z}_1^\pi, \mathbf{z}_2^\pi, \mathbf{z}_3^\pi, \mathbf{z}_4^\pi\}$ принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. При этом, так как $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2^Q, \mathbf{z}_4^Q\}$, то никакая из точек множества

$$\{\mathbf{p}, \frac{\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{z}_2^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_2^\pi + \mathbf{z}_3^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_3^\pi + \mathbf{z}_4^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_4^\pi + \mathbf{z}_1^\pi}{2}\}$$

не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_1,\ \mathbf{z}_2^Q,\ \mathbf{z}_3,\ \mathbf{z}_4^Q,\ \mathbf{z}_1^R,\ \mathbf{z}_2,\ \mathbf{z}_3^R,\ \mathbf{z}_4,\ \mathbf{z}_1^\pi,\ \mathbf{z}_2^\pi,\ \mathbf{z}_3^\pi,\ \mathbf{z}_4^\pi\}$$

и, так как плоскости Q и R равноудалены от π, набор векторов $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\mathbf{z}_1^\pi = \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2) + \frac{1}{4}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_2)$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (7).

Б.1.а.2) (будет соответствовать утверждению (1)) Предположим, что $\mathbf{w} = \mathbf{p}$. В силу доказательства случая **Б.1.а.1** никакая из точек множества $\{\mathbf{z}_1^\pi, \mathbf{z}_2^\pi, \mathbf{z}_3^\pi, \mathbf{z}_4^\pi\}$ не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Кроме того, так как $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2^Q, \mathbf{z}_4^Q\}$, то никакая из точек множества $\{\frac{\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{z}_2^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_2^\pi + \mathbf{z}_3^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_3^\pi + \mathbf{z}_4^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_4^\pi + \mathbf{z}_1^\pi}{2}\}$ не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_1,\ \mathbf{z}_2^Q,\ \mathbf{z}_3,\ \mathbf{z}_4^Q,\ \mathbf{z}_1^R,\ \mathbf{z}_2,\ \mathbf{z}_3^R,\ \mathbf{z}_4,\ \mathbf{p}\}$$

и, так как плоскости Q и R равноудалены от π, набор векторов $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\mathbf{p} = \frac{1}{4}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4)$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (1).

Б.1.а.3) (будет соответствовать утверждению (11)) Предположим, что $\mathbf{w} \in \{\frac{\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{z}_2^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_3^\pi + \mathbf{z}_4^\pi}{2}\}$. В этом случае каждая из точек множества $\{\frac{\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{z}_2^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_3^\pi + \mathbf{z}_4^\pi}{2}\}$ принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. В силу доказательства случаев **Б.1.а.1** и **Б.1.а.2** никакая из точек множества $\{\mathbf{z}_1^\pi, \mathbf{z}_2^\pi, \mathbf{z}_3^\pi, \mathbf{z}_4^\pi, \mathbf{p}\}$ не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Кроме того, так как $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2^Q, \mathbf{z}_4^Q\}$, то никакая из точек множества $\{\frac{\mathbf{z}_2^\pi + \mathbf{z}_3^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_4^\pi + \mathbf{z}_1^\pi}{2}\}$ не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_1,\ \mathbf{z}_2^Q,\ \mathbf{z}_3,\ \mathbf{z}_4^Q,\ \mathbf{z}_1^R,\ \mathbf{z}_2,\ \mathbf{z}_3^R,\ \mathbf{z}_4,\ \frac{\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{z}_2^\pi}{2},\ \frac{\mathbf{z}_3^\pi + \mathbf{z}_4^\pi}{2}\}$$

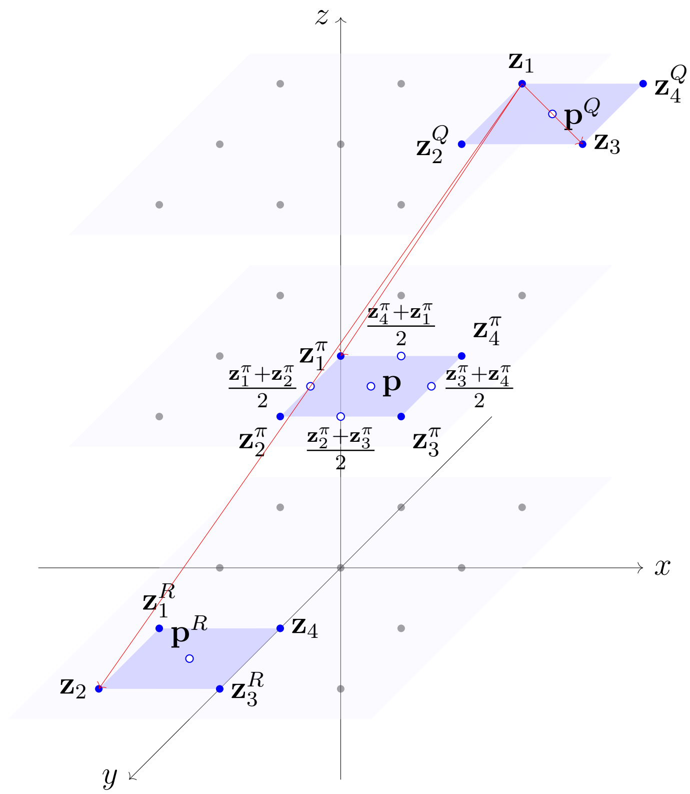

Рис. 4.4: Расположение точек внутри гиперплоскости S_1 из случая **Б.1.а.1** леммы 4.3.1

и, так как плоскости Q и R равноудалены от π, набор векторов $\mathbf{z}_1$, $\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{z}_2^\pi) = \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2)$, $\mathbf{z}_3$, $\mathbf{z}_4^Q = \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_2)$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (11).

Б.1.б) (будет соответствовать утверждению (6)) Плоскость π не является рациональной плоскостью. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_1,\, \mathbf{z}_2^Q,\, \mathbf{z}_3,\, \mathbf{z}_4^Q,\, \mathbf{z}_1^R,\, \mathbf{z}_2,\, \mathbf{z}_3^R,\, \mathbf{z}_4\},$$

набор векторов $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\mathbf{z}_4^Q = \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_2)$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (6).

В) $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3, \mathbf{p}^Q\}$. Заметим, что случай $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4\}$ с точностью до перестановки индексов полностью эквивалентен пункту **А.2**. Кроме того, случай $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_1^R, \mathbf{z}_3^R\}$ с точностью до перестановки индексов невозможен в силу пункта **Б**. Если $\mathbf{p}^R \in \mathbb{Z}^4$, то $\mathbf{z}_2^Q = \mathbf{p}^Q + (\mathbf{z}_2 - \mathbf{p}^R) \in \mathbb{Z}^4$, что противоречит рассматриваемому случаю. Таким образом, существует ровно один подслучай:

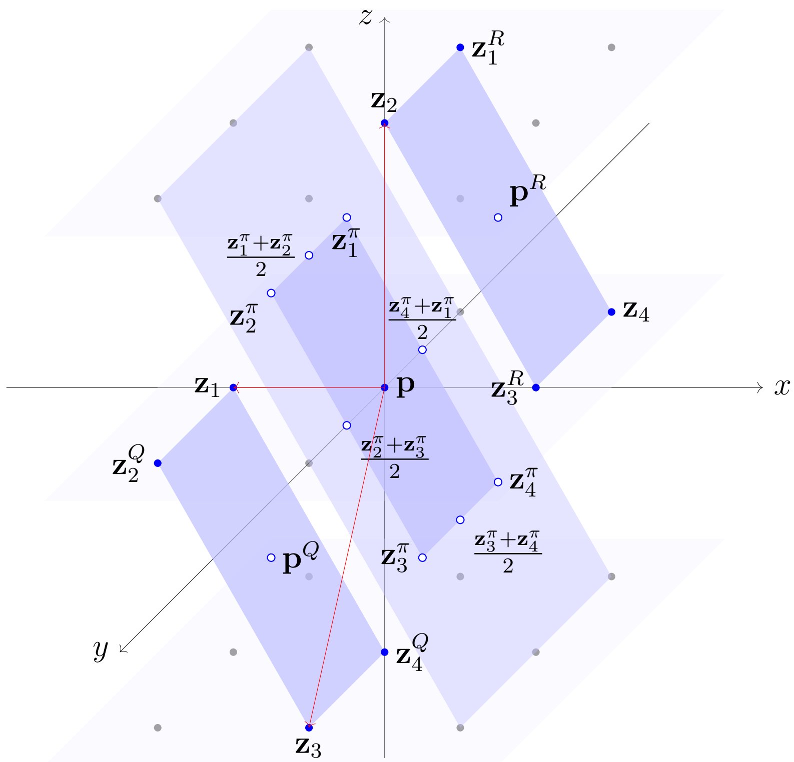

Рис. 4.5: Расположение точек внутри гиперплоскости S_1 из случая **Б.1.а.2** леммы 4.3.1

В.1) $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4, \mathbf{p}_1^R, \mathbf{p}_3^R\}$. Этот случай, в свою очередь, разбивается на два подслучая:

В.1.а) Плоскость π рациональная. Тогда, плоскости Q и R равноудалены от π. Покажем, что параллелограмм Δ_k^π не содержит точек решетки $\mathbb{Z}^4$. Пусть это не так. Можно считать, что существует точка $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^4$, лежащая либо в параллелограмме $\operatorname{conv}(\mathbf{z}_1^\pi, \frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2}, \mathbf{p}, \frac{\mathbf{z}_4^\pi+\mathbf{z}_1^\pi}{2})$, либо в параллелограмме $\operatorname{conv}(\mathbf{z}_2^\pi, \frac{\mathbf{z}_2^\pi+\mathbf{z}_3^\pi}{2}, \mathbf{p}, \frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2})$. Рассмотрим случай $\mathbf{w} \in \operatorname{conv}(\mathbf{z}_1^\pi, \frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2}, \mathbf{p}, \frac{\mathbf{z}_4^\pi+\mathbf{z}_1^\pi}{2})$. Если $\mathbf{w} \notin \{\frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_4^\pi+\mathbf{z}_1^\pi}{2}, \frac{3\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{p}}{4}, \frac{\mathbf{z}_1^\pi+3\mathbf{p}}{4}\}$, то $\mathbf{w} + (\mathbf{w} - \mathbf{z}_1) \in \Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4$ и $\mathbf{w} + (\mathbf{w} - \mathbf{z}_1) \notin \{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4, \mathbf{p}_1^R, \mathbf{p}_3^R\}$, чего не может быть. Если $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2}$, то $\frac{\mathbf{z}_3^\pi+\mathbf{z}_4^\pi}{2} = F(\frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2}) \in \mathbb{Z}^4$, а значит, $\mathbf{z}_4^Q = \mathbf{z}_1 + (\frac{\mathbf{z}_3^\pi+\mathbf{z}_4^\pi}{2} - \frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2}) \in \mathbb{Z}^4$, чего также не может быть. Аналогично показывается, что случай $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_4^\pi}{2}$ невозможен. Если $\mathbf{w} = \frac{3\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{p}}{4}$, то $\frac{\mathbf{z}_3^\pi+3\mathbf{p}}{4} = \frac{3\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{p}}{4} + (\mathbf{p}_3^R - \mathbf{p}_3^R) \in \mathbb{Z}^4$, а значит, $\frac{\mathbf{z}_1^\pi+3\mathbf{p}}{4} = F(\mathbf{w}) \in \mathbb{Z}^4$. Тогда $\mathbf{p}^R = \mathbf{p}_1^R + (\frac{\mathbf{z}_3^\pi+3\mathbf{p}}{4} - \frac{\mathbf{z}_1^\pi+3\mathbf{p}}{4}) \in \mathbb{Z}^4$, чего не может быть. Если $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{z}_1^\pi+3\mathbf{p}}{4}$, то

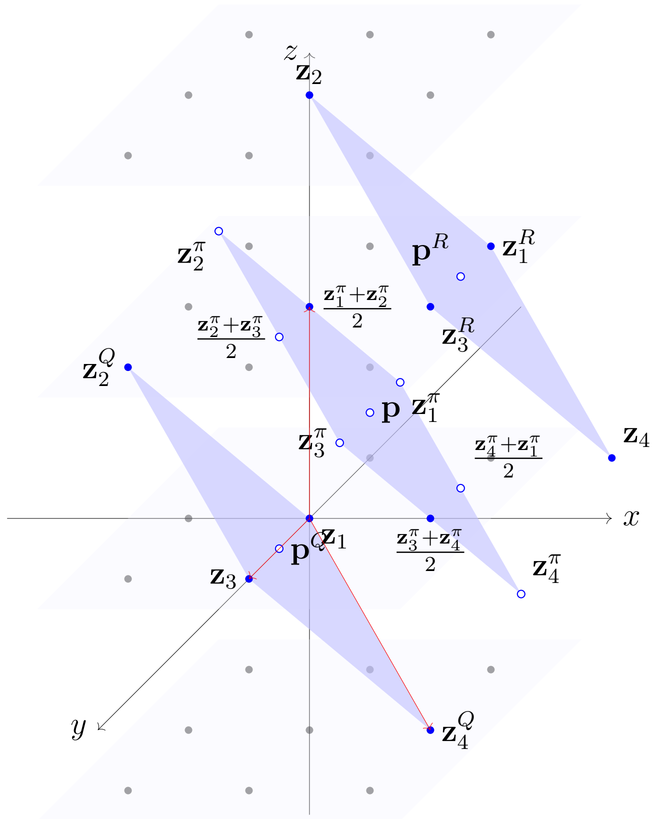

Рис. 4.6: Расположение точек внутри гиперплоскости S_1 из случая **Б.1.а.3** леммы 4.3.1

$\frac{\mathbf{z}_3^\pi+3\mathbf{p}}{4} = F(\mathbf{w}) \in \mathbb{Z}^4$, и вновь получаем $\mathbf{p}^R = \mathbf{p}_1^R + (\frac{\mathbf{z}_3^\pi+3\mathbf{p}}{4} - \frac{\mathbf{z}_1^\pi+3\mathbf{p}}{4}) \in \mathbb{Z}^4$, чего не может быть. Теперь рассмотрим случай $\mathbf{w} \in \operatorname{conv}(\mathbf{z}_2^\pi, \frac{\mathbf{z}_2^\pi+\mathbf{z}_3^\pi}{2}, \mathbf{p}, \frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2})$. Если $\mathbf{w} \notin \{\frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_2^\pi+\mathbf{z}_3^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_2^\pi+\mathbf{p}}{2}\}$, то $\mathbf{w} + (\mathbf{w} - \mathbf{z}_2) \in \Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4$ и $\mathbf{w} + (\mathbf{w} - \mathbf{z}_2) \notin \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3, \mathbf{p}^Q\}$, чего не может быть. По доказанному выше, случаи $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2}$ и $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{z}_2^\pi+\mathbf{z}_3^\pi}{2}$ невозможны. Если $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{z}_2^\pi+\mathbf{p}}{2}$, то $\frac{\mathbf{z}_4^\pi+\mathbf{p}}{2} = F(\mathbf{w}) \in \mathbb{Z}^4$, а значит, $\mathbf{p}^R = \mathbf{z}_2 + (\frac{\mathbf{z}_4^\pi+\mathbf{p}}{2} - \frac{\mathbf{z}_2^\pi+\mathbf{p}}{2}) \in \mathbb{Z}^4$, чего не может быть. И так, параллелограмм Δ_k^π не содержит точек решетки $\mathbb{Z}^4$. С другой стороны, параллелограмм $\operatorname{conv}(\mathbf{z}_2^\pi, \frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{p}}{2}, \mathbf{z}_4^\pi, \frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{p}}{2}) \subset \Delta_k^\pi$ должен содержать хотя бы одну точку решетки $\mathbb{Z}^4$, поскольку $\operatorname{conv}(\mathbf{z}_2, \mathbf{p}_1^R, \mathbf{z}_4, \mathbf{p}_3^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_2, \mathbf{p}_1^R, \mathbf{z}_4, \mathbf{p}_3^R)\}$. Таким образом, данный случай невозможен.

В.1.б) (будет соответствовать утверждению (9)) Плоскость π не является рациональной плоскостью. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_1,\ \mathbf{z}_3,\ \mathbf{p}^Q,\ \mathbf{z}_2,\ \mathbf{z}_4,\ \mathbf{p}_1^R,\ \mathbf{p}_3^R\},$$

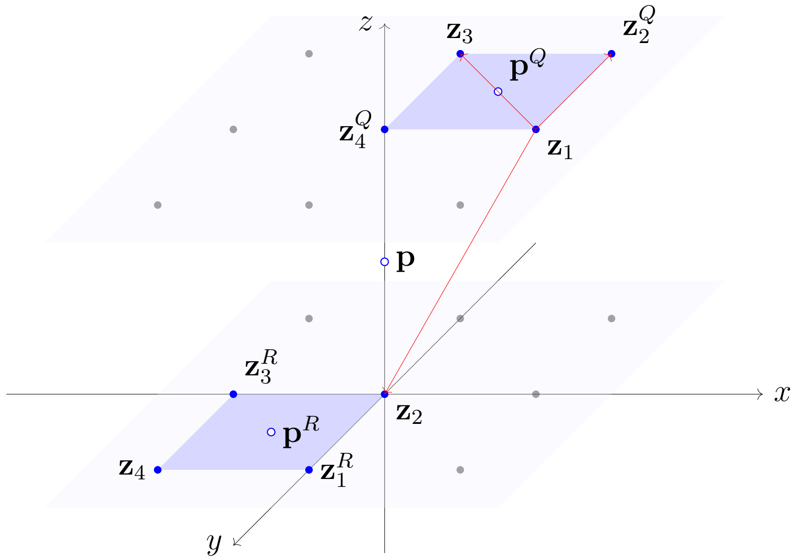

Рис. 4.7: Расположение точек внутри гиперплоскости S_1 из случая **Б.1.б** леммы 4.3.1

набор векторов $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{p}^Q = \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_3)$, $\mathbf{p}_1^R = \mathbf{p}^R + (\frac{1}{2}(\mathbf{p}^Q + \mathbf{z}_3) - \mathbf{z}_3) = \frac{1}{2}(\mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_4) + (\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_3) + \mathbf{z}_3) - \mathbf{z}_3) = \frac{1}{4}\mathbf{z}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{z}_2 - \frac{1}{4}\mathbf{z}_3 + \frac{1}{2}\mathbf{z}_4$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (9).

Г) $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2^Q, \mathbf{z}_4^Q, \mathbf{p}^Q\}$. Заметим, что случай $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4\}$ с точностью до перестановки индексов невозможен в силу пункта **А**. Также случай $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_1^R, \mathbf{z}_3^R\}$ с точностью до перестановки индексов невозможен в силу пункта **Б**. Кроме того, случай $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4, \mathbf{p}^R\}$ с точностью до перестановки индексов невозможен в силу пункта **В**. При этом $\mathbf{z}_1^R = \mathbf{z}_2 + (\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2^Q) \in \mathbb{Z}^4$. Таким образом, существует ровно один подслучай:

Г.1) $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_1^R, \mathbf{z}_3^R, \mathbf{p}^R\}$. Этот случай, в свою очередь, разбивается на два подслучая:

Г.1.а) Плоскость π рациональная. Тогда, плоскости Q и R равноудалены от π. Поскольку $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2^Q, \mathbf{z}_4^Q\} \subset \Delta_k^Q$, то в параллелограмме Δ_k^π должна существовать хотя бы одна точка решетки $\mathbb{Z}^4$. Пусть $\mathbf{w} \in \Delta_k^\pi \cap \mathbb{Z}^4$. Покажем, что точка $\mathbf{w}$ принадлежит множеству

$$\{\mathbf{z}_1^\pi, \mathbf{z}_2^\pi, \mathbf{z}_3^\pi, \mathbf{z}_4^\pi, \mathbf{p}, \frac{\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{z}_2^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_2^\pi + \mathbf{z}_3^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_3^\pi + \mathbf{z}_4^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_4^\pi + \mathbf{z}_1^\pi}{2},$$
$$\frac{\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{p}}{2}, \frac{\mathbf{z}_2^\pi + \mathbf{p}}{2}, \frac{\mathbf{z}_3^\pi + \mathbf{p}}{2}, \frac{\mathbf{z}_4^\pi + \mathbf{p}}{2}\}.$$

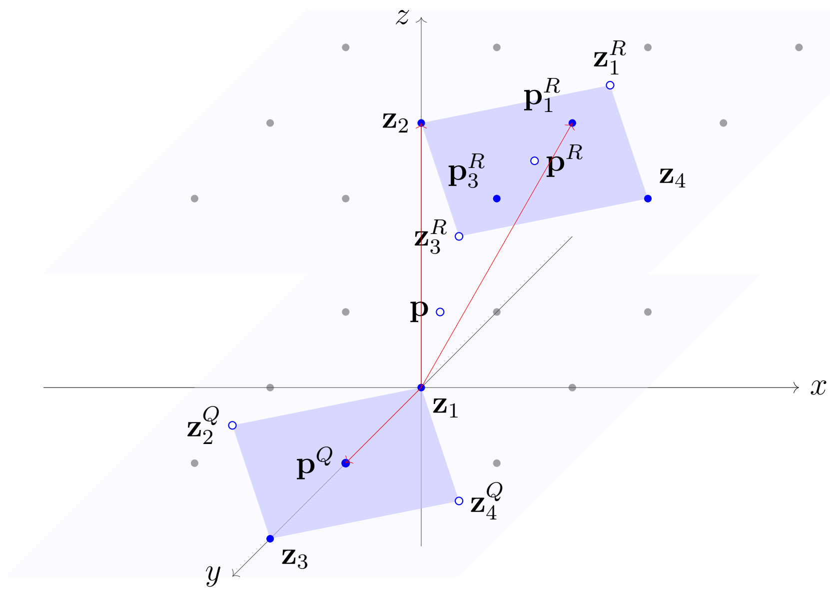

Рис. 4.8: Расположение точек внутри гиперплоскости S_1 из случая **В.1.б** леммы 4.3.1

Предположим, что это не так. Можно считать, что

$$\mathbf{w} \in \operatorname{conv}(\mathbf{z}_1^\pi, \frac{\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{z}_2^\pi}{2}, \mathbf{p}, \frac{\mathbf{z}_4^\pi + \mathbf{z}_1^\pi}{2}).$$

Тогда $\mathbf{w} + (\mathbf{w} - \mathbf{z}_1) \in \Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4$ и $\mathbf{w} + (\mathbf{w} - \mathbf{z}_1) \notin \{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_1^R, \mathbf{z}_3^R, \mathbf{p}^R\}$, чего не может быть. Далее рассмотрим подслучаи:

Г.1.а.1) (будет соответствовать утверждению (3)) Предположим, что

$$\mathbf{w} \in \{\frac{\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{z}_2^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_2^\pi + \mathbf{z}_3^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_3^\pi + \mathbf{z}_4^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_4^\pi + \mathbf{z}_1^\pi}{2}\}.$$

В этом случае каждая из точек множества

$$\{\frac{\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{z}_2^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_2^\pi + \mathbf{z}_3^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_3^\pi + \mathbf{z}_4^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_4^\pi + \mathbf{z}_1^\pi}{2}\}$$

принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Так как $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2^Q, \mathbf{z}_4^Q, \mathbf{p}^Q\}$, то никакая из точек множества

$$\{\mathbf{z}_1^\pi, \mathbf{z}_2^\pi, \mathbf{z}_3^\pi, \mathbf{z}_4^\pi, \mathbf{p}, \frac{\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{p}}{2}, \frac{\mathbf{z}_2^\pi + \mathbf{p}}{2}, \frac{\mathbf{z}_3^\pi + \mathbf{p}}{2}, \frac{\mathbf{z}_4^\pi + \mathbf{p}}{2}\}$$

не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 =$$

$$\{\mathbf{z}_1,\ \mathbf{z}_2^Q,\ \mathbf{z}_3,\ \mathbf{z}_4^Q,\ \mathbf{z}_1^R,\ \mathbf{z}_2,\ \mathbf{z}_3^R,\ \mathbf{z}_4,\ \mathbf{p}^Q,\ \mathbf{p}^R,$$
$$\frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2},\ \frac{\mathbf{z}_2^\pi+\mathbf{z}_3^\pi}{2},\ \frac{\mathbf{z}_3^\pi+\mathbf{z}_4^\pi}{2},\ \frac{\mathbf{z}_4^\pi+\mathbf{z}_1^\pi}{2}\}$$

и, так как плоскости Q и R равноудалены от π, набор векторов $\mathbf{z}_1$, $\frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2}=\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2)$, $\mathbf{p}^Q=\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_3)$, $\frac{\mathbf{z}_4^\pi+\mathbf{z}_1^\pi}{2}=\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_4)$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (3).

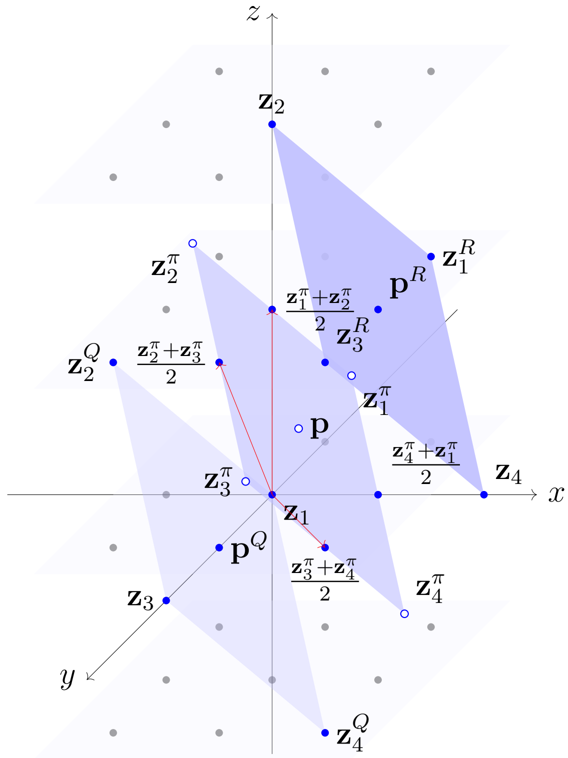

Рис. 4.9: Расположение точек внутри гиперплоскости S_1 из случая **Г.1.а.1** леммы 4.3.1

Г.1.а.2) (будет соответствовать утверждению (4)) Предположим, что

$$\mathbf{w}\in\{\mathbf{z}_1^\pi,\mathbf{z}_2^\pi,\mathbf{z}_3^\pi,\mathbf{z}_4^\pi,\mathbf{p}\}.$$

В этом случае каждая из точек множества $\{\mathbf{z}_1^\pi,\mathbf{z}_2^\pi,\mathbf{z}_3^\pi,\mathbf{z}_4^\pi,\mathbf{p}\}$ принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. В силу доказательства случая **Г.1.а.1** никакая из точек множества $\{\frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2},\frac{\mathbf{z}_2^\pi+\mathbf{z}_3^\pi}{2},\frac{\mathbf{z}_3^\pi+\mathbf{z}_4^\pi}{2},\frac{\mathbf{z}_4^\pi+\mathbf{z}_1^\pi}{2}\}$ не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Кроме того, так как $\Delta_k^Q\cap\mathbb{Z}^4=\{\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_3,\mathbf{z}_2^Q,\mathbf{z}_4^Q,\mathbf{p}^Q\}$, то никакая из точек множества $\{\frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{p}}{2},\frac{\mathbf{z}_2^\pi+\mathbf{p}}{2},\frac{\mathbf{z}_3^\pi+\mathbf{p}}{2},\frac{\mathbf{z}_4^\pi+\mathbf{p}}{2}\}$ не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Тогда

$$(\Delta_k^\pi\cup\Delta_k^Q\cup\Delta_k^R)\cap\mathbb{Z}^4=$$

$$= \{\mathbf{p},\ \mathbf{z}_1,\ \mathbf{z}_2^Q,\ \mathbf{z}_3,\ \mathbf{z}_4^Q,\ \mathbf{z}_1^R,\ \mathbf{z}_2,\ \mathbf{z}_3^R,\ \mathbf{z}_4,\ \mathbf{p}^Q,\ \mathbf{p}^R,\ \mathbf{z}_1^\pi,\ \mathbf{z}_2^\pi,\ \mathbf{z}_3^\pi,\ \mathbf{z}_4^\pi\}$$

и, так как плоскости Q и R равноудалены от π, набор векторов $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{p}^Q = \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_3)$, $\mathbf{p} = \frac{1}{4}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4)$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (4).

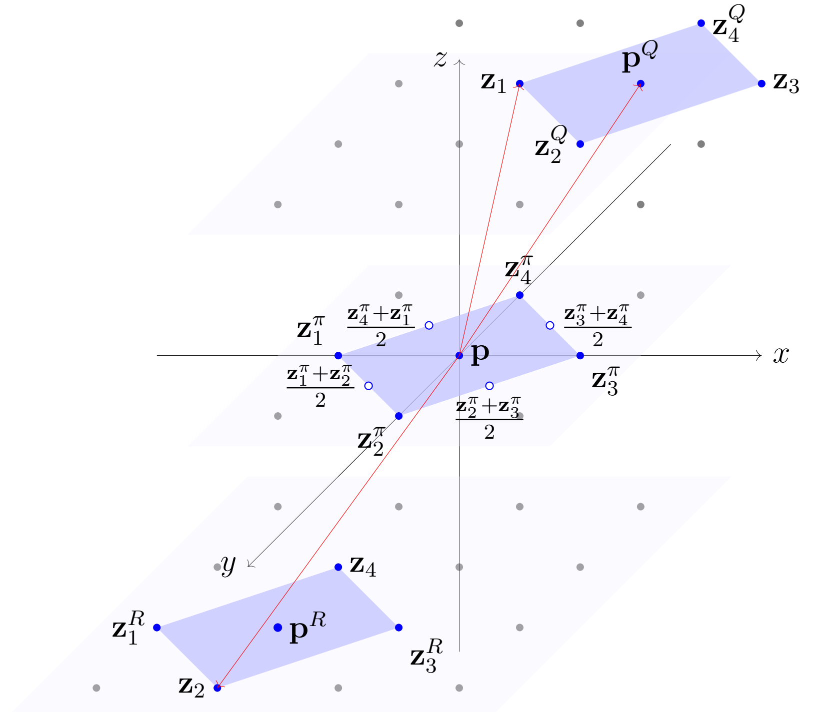

Рис. 4.10: Расположение точек внутри гиперплоскости S_1 из случая **Г.1.а.2** леммы 4.3.1

Г.1.а.3) (будет соответствовать утверждению (10)) Предположим, что $\mathbf{w} \in \{\frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{p}}{2}, \frac{\mathbf{z}_3^\pi+\mathbf{p}}{2}\}$. В силу доказательства случаев **Г.1.а.1** и **Г.1.а.2** никакая из точек множества $\{\frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_2^\pi+\mathbf{z}_3^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_3^\pi+\mathbf{z}_4^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_4^\pi+\mathbf{z}_1^\pi}{2}, \mathbf{z}_1^\pi, \mathbf{z}_2^\pi, \mathbf{z}_3^\pi, \mathbf{z}_4^\pi, \mathbf{p}\}$ не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Кроме того, так как $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2^Q, \mathbf{z}_4^Q, \mathbf{p}^Q\}$, то никакая из точек множества $\{\frac{\mathbf{z}_2^\pi+\mathbf{p}}{2}, \frac{\mathbf{z}_4^\pi+\mathbf{p}}{2}\}$ не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 =$$

$$= \{\mathbf{z}_1,\ \mathbf{z}_2^Q,\ \mathbf{z}_3,\ \mathbf{z}_4^Q,\ \mathbf{z}_1^R,\ \mathbf{z}_2,\ \mathbf{z}_3^R,\ \mathbf{z}_4,\ \mathbf{p}^Q,\ \mathbf{p}^R,\ \frac{\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{p}}{2},\ \frac{\mathbf{z}_3^\pi + \mathbf{p}}{2}\}$$

и, так как плоскости Q и R равноудалены от π, набор векторов $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{p}^Q = \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_3)$, $\frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{p}}{2} = \frac{1}{2}\mathbf{z}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{z}_2 + \frac{1}{4}\mathbf{z}_4$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (10).

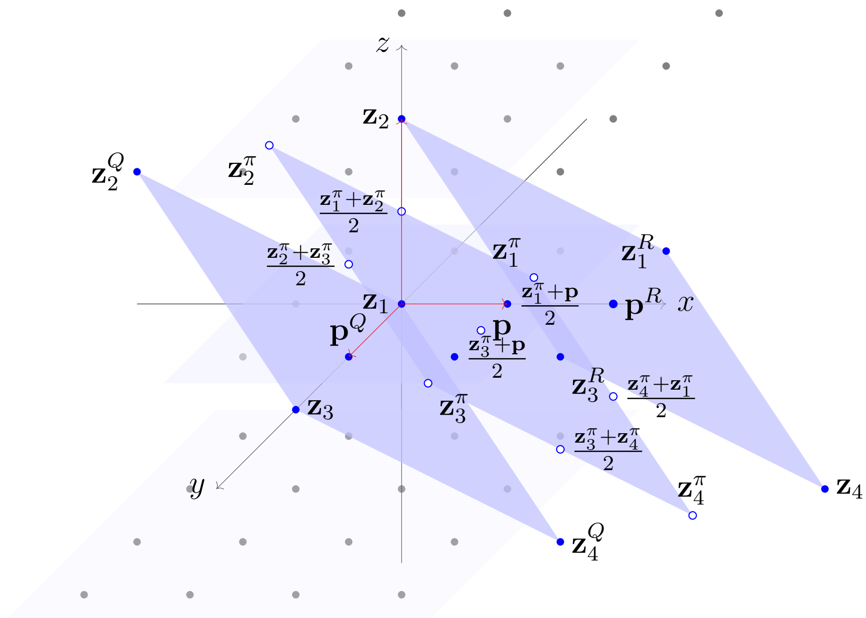

Рис. 4.11: Расположение точек внутри гиперплоскости S_1 из случая **Г.1.а.3** леммы 4.3.1

Г.1.а.4) Пусть $\mathbf{w} \in \{\frac{\mathbf{z}_2^\pi+\mathbf{p}}{2}, \frac{\mathbf{z}_4^\pi+\mathbf{p}}{2}\}$. Заметим, что этот случай с точностью до перестановки индексов полностью эквивалентен пункту **Г.1.а.3**.

Г.1.б) (будет соответствовать утверждению (5)) Плоскость π не является рациональной плоскостью. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_1,\, \mathbf{z}_2^Q,\, \mathbf{z}_3,\, \mathbf{z}_4^Q,\, \mathbf{z}_1^R,\, \mathbf{z}_2,\, \mathbf{z}_3^R,\, \mathbf{z}_4,\, \mathbf{p}^Q,\, \mathbf{p}^R\},$$

набор векторов $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{p}^Q = \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_3)$, $\mathbf{p}^R = \frac{1}{2}(\mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_4)$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (5).

Д) $\Delta_k^Q \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3, \mathbf{p}_2^Q, \mathbf{p}_4^Q\}$. Заметим, что случай $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4\}$ с точностью до перестановки индексов невозможен в силу пункта **А**. Также случай $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_1^R, \mathbf{z}_3^R\}$ с точностью до перестановки индексов невозможен в силу пункта **Б**. Случай $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4, \mathbf{p}^R\}$ с точностью до перестановки индексов полностью эквивалентен пункту **В.1**. Кроме того, случай $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_1^R, \mathbf{z}_3^R, \mathbf{p}^R\}$ с точностью до перестановки индексов невозможен в силу пункта **Г**. Осталось заметить, что если точки $\mathbf{p}_1^R$ и $\mathbf{p}_3^R$ принадлежат решетке $\mathbb{Z}^4$, то $\mathbf{p}^Q \in \mathbb{Z}^4$, чего не может быть. Значит случай $\Delta_k^R \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4, \mathbf{p}_1^R, \mathbf{p}_3^R\}$ также невозможен, что завершает доказательство леммы.

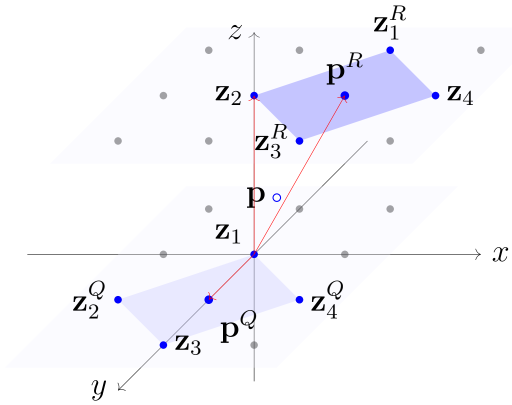

Рис. 4.12: Расположение точек внутри гиперплоскости S_1 из случая **Г.1.б** леммы 4.3.1

□

Следующее утверждение мы докажем двумя способами. Оба способа будут использовать итерационную процедуру построения некоторых параллелограммов, далее первый способ будет использовать доказательство леммы 4.3.1, а во втором способе приводятся рассуждения, независимые от доказательства леммы 4.3.1.

Лемма 4.3.2. *Пусть G — собственная циклическая симметрия $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$. Тогда существуют $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\mathbf{z}_4 \in \mathbb{Z}^4$, такие что*

$$G(\mathbf{z}_1) = \mathbf{z}_2,\ G(\mathbf{z}_2) = \mathbf{z}_3,\ G(\mathbf{z}_3) = \mathbf{z}_4,\ G(\mathbf{z}_4) = \mathbf{z}_1$$

и выполняется хотя бы одно из семи утверждений:

(i) утверждение (i) из формулировки леммы 4.3.1, где $i = 1, 2, \ldots, 7$.

Доказательство. Рассмотрим подпространства l_+, l_- и L из леммы 4.2.6 и положим $S = l_- + L$. Обозначим через S_1 ближайшую к S рациональную гиперплоскость, параллельную S и не совпадающую с S (любую из двух). Тогда $G(S_1) = S_1$. Также обозначим через $\mathbf{p}$ точку пересечения гиперплоскости S_1 и l_+, а через l и π прямую и плоскость, проходящие через точку $\mathbf{p}$ и параллельные l_- и L соответственно. Тогда $G(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$, $G(\mathbf{v} - \mathbf{p}) = \mathbf{p} - \mathbf{v}$ для любого вектора $\mathbf{v} \in l$ и $G^2(\mathbf{v} - \mathbf{p}) = \mathbf{p} - \mathbf{v}$ для любого вектора $\mathbf{v} \in \pi$ в силу леммы 4.2.6.

Поскольку подпространство L не содержит собственных для G одномерных подпространств, то для произвольной точки $\mathbf{v} \in \pi \setminus l$ четырехугольник

$$\mathrm{conv}\big(\mathbf{v}, G(\mathbf{v}), G^2(\mathbf{v}), G^3(\mathbf{v})\big)$$

является параллелограммом, диагонали которого пересекаются в точке $\mathbf{p} = \frac{1}{2}\big(\mathbf{v} + G^2(\mathbf{v})\big) = \frac{1}{2}\big(G(\mathbf{v}) + G^3(\mathbf{v})\big)$.

Обозначим через Q рациональную плоскость, ближайшую к π, лежащую в гиперплоскости S_1, параллельную π и не совпадающую с π. Поскольку $G(\mathbf{v} - \mathbf{p}) = \mathbf{p} - \mathbf{v}$ для любого вектора $\mathbf{v} \in l$, то $R = G(Q)$ и Q — рациональные плоскости, ближайшие к π и равноудаленные от нее, лежащие в гиперплоскости S_1 по разные стороны от π, параллельные π и не совпадающие с π. Положим $\mathbf{p}^Q = Q \cap l$ и $\mathbf{p}^R = R \cap l$. Построим точки $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\mathbf{z}_4$ при помощи следующей итерационной процедуры. Возьмем произвольную целочисленную точку $\mathbf{v}_{1,1} \in Q \setminus l$. Введем обозначения $\mathbf{v}_{1,2} = G(\mathbf{v}_{1,1})$, $\mathbf{v}_{1,3} = G^2(\mathbf{v}_{1,1})$, $\mathbf{v}_{1,4} = G^3(\mathbf{v}_{1,1})$. Пусть точки $\mathbf{v}^\pi_{1,1}$, $\mathbf{v}^\pi_{1,2}$, $\mathbf{v}^\pi_{1,3}$, $\mathbf{v}^\pi_{1,4}$ — проекции, параллельные l, на плоскость π точек $\mathbf{v}_{1,1}$, $\mathbf{v}_{1,2}$, $\mathbf{v}_{1,3}$, $\mathbf{v}_{1,4}$ соответственно. Также обозначим через $\mathbf{v}^R_{1,1}$ и $\mathbf{v}^R_{1,3}$ — проекции, параллельные l, на плоскость R точек $\mathbf{v}_{1,1}$ и $\mathbf{v}_{1,3}$, а через $\mathbf{v}^Q_{1,2}$ и $\mathbf{v}^Q_{1,4}$ — проекции, параллельные l, на плоскость Q точек $\mathbf{v}_{1,2}$ и $\mathbf{v}_{1,4}$. По доказанному выше множество $\Delta^\pi_1 = \mathrm{conv}(\mathbf{v}^\pi_{1,1}, \mathbf{v}^\pi_{1,2}, \mathbf{v}^\pi_{1,3}, \mathbf{v}^\pi_{1,4})$ является параллелограммом, диагонали которого пересекаются в точке $\mathbf{p} = \frac{1}{4}(\mathbf{v}_{1,1} + \mathbf{v}_{1,2} + \mathbf{v}_{1,3} + \mathbf{v}_{1,4})$. Таким образом, множества $\Delta^Q_1 = \mathrm{conv}(\mathbf{v}_{1,1}, \mathbf{v}^Q_{1,2}, \mathbf{v}_{1,3}, \mathbf{v}^Q_{1,4})$ и $\Delta^R_1 = \mathrm{conv}(\mathbf{v}^R_{1,1}, \mathbf{v}_{1,2}, \mathbf{v}^R_{1,3}, \mathbf{v}_{1,4})$ также являются параллелограммами. Заметим, что $\mathbf{p}^Q = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_{1,1} + \mathbf{v}_{1,3})$ и $\mathbf{p}^R = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_{1,2} + \mathbf{v}_{1,4})$.

Предположим, мы построили параллелограммы Δ^π_j, Δ^Q_j и Δ^R_j. Если на плоскостях Q и R существует целая точка, не совпадающая с точками $\mathbf{p}^Q$, $\mathbf{p}^R$ и ни с какой из вершин параллелограммов Δ^Q_j и Δ^R_j и при этом лежащая в одном из этих параллелограммов (без ограничения общности, внутри Δ^Q_j), то обозначим её через $\mathbf{v}_{j+1,1}$. Введем обозначения $\mathbf{v}_{j+1,2} = G(\mathbf{v}_{j+1,1})$, $\mathbf{v}_{j+1,3} = G^2(\mathbf{v}_{j+1,1})$, $\mathbf{v}_{j+1,4} = G^3(\mathbf{v}_{j+1,1})$. Пусть точки $\mathbf{v}^\pi_{j+1,1}$, $\mathbf{v}^\pi_{j+1,2}$, $\mathbf{v}^\pi_{j+1,3}$, $\mathbf{v}^\pi_{j+1,4}$ — проекции, параллельные l, на плоскость π точек $\mathbf{v}_{j+1,1}$, $\mathbf{v}_{j+1,2}$, $\mathbf{v}_{j+1,3}$, $\mathbf{v}_{j+1,4}$ соответственно. Также обозначим через $\mathbf{v}^R_{j+1,1}$ и $\mathbf{v}^R_{j+1,3}$ — проекции, параллельные l, на плоскость R точек $\mathbf{v}_{j+1,1}$ и $\mathbf{v}_{j+1,3}$, а через $\mathbf{v}^Q_{j+1,2}$ и $\mathbf{v}^Q_{j+1,4}$ — проекции, параллельные l, на плоскость Q точек

$\mathbf{v}_{j+1,2}$ и $\mathbf{v}_{j+1,4}$. Определим параллелограммы:

$$\Delta_{j+1}^{\pi} = \mathrm{conv}(\mathbf{v}_{j+1,1}^{\pi}, \mathbf{v}_{j+1,2}^{\pi}, \mathbf{v}_{j+1,3}^{\pi}, \mathbf{v}_{j+1,4}^{\pi}),$$

$$\Delta_{j+1}^{Q} = \mathrm{conv}(\mathbf{v}_{j+1,1}, \mathbf{v}_{j+1,2}^{Q}, \mathbf{v}_{j+1,3}, \mathbf{v}_{j+1,4}^{Q}),$$

$$\Delta_{j+1}^{R} = \mathrm{conv}(\mathbf{v}_{j+1,1}^{R}, \mathbf{v}_{j+1,2}, \mathbf{v}_{j+1,3}^{R}, \mathbf{v}_{j+1,4}).$$

При этом $\mathbf{p} = \frac{1}{4}(\mathbf{v}_{j+1,1} + \mathbf{v}_{j+1,2} + \mathbf{v}_{j+1,3} + \mathbf{v}_{j+1,4})$, $\mathbf{p}^{Q} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_{j+1,1} + \mathbf{v}_{j+1,3})$ и $\mathbf{p}^{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_{j+1,2} + \mathbf{v}_{j+1,4})$.

Последовательность троек $(\Delta_j^{\pi}, \Delta_j^{Q}, \Delta_j^{R})$ конечна. Пусть $(\Delta_k^{\pi}, \Delta_k^{Q}, \Delta_k^{R})$ — последний её элемент. Положим

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{v}_{k,1}, \quad \mathbf{z}_2 = \mathbf{v}_{k,2}, \quad \mathbf{z}_3 = \mathbf{v}_{k,3}, \quad \mathbf{z}_4 = \mathbf{v}_{k,4},$$

$$\mathbf{z}_1^{\pi} = \mathbf{v}_{k,1}^{\pi}, \quad \mathbf{z}_2^{\pi} = \mathbf{v}_{k,2}^{\pi}, \quad \mathbf{z}_3^{\pi} = \mathbf{v}_{k,3}^{\pi}, \quad \mathbf{z}_4^{\pi} = \mathbf{v}_{k,4}^{\pi},$$

$$\mathbf{z}_1^{R} = \mathbf{v}_{k,1}^{R}, \quad \mathbf{z}_3^{R} = \mathbf{v}_{k,3}^{R}, \quad \mathbf{z}_2^{Q} = \mathbf{v}_{k,2}^{Q}, \quad \mathbf{z}_4^{Q} = \mathbf{v}_{k,4}^{Q}.$$

Далее существуют два способа доказательства:

Первый способ доказательства. Обозначим через $\hat{l}^1$ и $\hat{l}^2$ такие одномерные рациональные подпространства, что $\hat{l}^1 + \hat{l}^2 = L$. Заметим, что подпространства $l_+^1 = l_+$, $l_+^2 = l_-$, $l_-^1 = \hat{l}^1$, $l_-^2 = \hat{l}^2$ удовлетворяют условиям леммы 4.2.5 для оператора G^2. Таким образом, пара точек $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ является допустимой (см. доказательство леммы 4.3.1) для оператора G^2 и цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$, поскольку

$$(\Delta_k^{Q} \cup \Delta_k^{R}) \cap \mathbb{Z}^4 \subset \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2^{Q}, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4^{Q}, \mathbf{z}_1^{R}, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3^{R}, \mathbf{z}_4, \mathbf{p}_Q, \mathbf{p}_R\}.$$

Из этого следует, что должно выполняться хотя бы одно из одиннадцати утверждений (1) - (11) леммы 4.3.1.

Заметим, что случай **А.2.б** из доказательства леммы 4.3.1 невозможен, поскольку, в этом случае, $G(\mathbf{p}^R) = \mathbf{p}^Q$, а значит, $\mathbf{p}^Q \in \mathbb{Z}^4$, что противоречит расположению точек решетки $\mathbb{Z}^4$ в этом случае. Случай **Б.1.а.3** из доказательства леммы 4.3.1 невозможен, поскольку, в этом случае, $G(\frac{\mathbf{z}_1^{\pi}+\mathbf{z}_2^{\pi}}{2}) = \frac{\mathbf{z}_2^{\pi}+\mathbf{z}_3^{\pi}}{2}$, а значит, $\frac{\mathbf{z}_2^{\pi}+\mathbf{z}_3^{\pi}}{2} \in \mathbb{Z}^4$, что противоречит расположению точек решетки $\mathbb{Z}^4$ в этом случае. Случай **В.1.б** из доказательства леммы 4.3.1 невозможен, поскольку, в этом случае, $G(\frac{\mathbf{z}_1^{R}+\mathbf{p}_R}{2}) = \frac{\mathbf{z}_2^{Q}+\mathbf{p}_Q}{2}$, а значит, $\frac{\mathbf{z}_2^Q+\mathbf{p}_Q}{2} \in \mathbb{Z}^4$, что противоречит расположению точек решетки $\mathbb{Z}^4$ в этом случае. Случай **Г.1.а.3** из доказательства леммы 4.3.1 невозможен, поскольку, в этом случае, $G(\frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{p}}{2}) = \frac{\mathbf{z}_2^\pi+\mathbf{p}}{2}$, а значит, $\frac{\mathbf{z}_2^\pi+\mathbf{p}}{2} \in \mathbb{Z}^4$ и $\frac{\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2^Q}{2} = \mathbf{z}_1 + (\frac{\mathbf{z}_2^\pi+\mathbf{p}}{2} - \frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{p}}{2}) \in \mathbb{Z}^4$, что противоречит расположению точек решетки $\mathbb{Z}^4$ в этом случае. Итак, мы показали, что должно выполняться хотя бы одно из семи утверждений (1) - (7) из формулировки леммы 4.3.1.

Второй способ доказательства. Покажем, что множество $(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4$ совпадает с одним из множеств

$$\{\mathbf{p},\, \mathbf{z}_1,\, \mathbf{z}_2^Q,\, \mathbf{z}_3,\, \mathbf{z}_4^Q,\, \mathbf{z}_1^R,\, \mathbf{z}_2,\, \mathbf{z}_3^R,\, \mathbf{z}_4\},$$

$$\{\mathbf{z}_1,\, \mathbf{z}_3,\, \mathbf{z}_2,\, \mathbf{z}_4\},$$

$$\{\mathbf{z}_1,\, \mathbf{z}_2^Q,\, \mathbf{z}_3,\, \mathbf{z}_4^Q,\, \mathbf{z}_1^R,\, \mathbf{z}_2,\, \mathbf{z}_3^R,\, \mathbf{z}_4,$$
$$\mathbf{p}^Q,\, \mathbf{p}^R,\, \frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2},\, \frac{\mathbf{z}_2^\pi+\mathbf{z}_3^\pi}{2},\, \frac{\mathbf{z}_3^\pi+\mathbf{z}_4^\pi}{2},\, \frac{\mathbf{z}_4^\pi+\mathbf{z}_1^\pi}{2}\},$$

$$\{\mathbf{p},\, \mathbf{z}_1,\, \mathbf{z}_2^Q,\, \mathbf{z}_3,\, \mathbf{z}_4^Q,\, \mathbf{z}_1^R,\, \mathbf{z}_2,\, \mathbf{z}_3^R,\, \mathbf{z}_4,\, \mathbf{p}^Q,\, \mathbf{p}^R,\, \mathbf{z}_1^\pi,\, \mathbf{z}_2^\pi,\, \mathbf{z}_3^\pi,\, \mathbf{z}_4^\pi\},$$

$$\{\mathbf{z}_1,\, \mathbf{z}_2^Q,\, \mathbf{z}_3,\, \mathbf{z}_4^Q,\, \mathbf{z}_1^R,\, \mathbf{z}_2,\, \mathbf{z}_3^R,\, \mathbf{z}_4,\, \mathbf{p}^Q,\, \mathbf{p}^R\},$$

$$\{\mathbf{z}_1,\, \mathbf{z}_2^Q,\, \mathbf{z}_3,\, \mathbf{z}_4^Q,\, \mathbf{z}_1^R,\, \mathbf{z}_2,\, \mathbf{z}_3^R,\, \mathbf{z}_4\},$$

$$\{\mathbf{z}_1,\, \mathbf{z}_2^Q,\, \mathbf{z}_3,\, \mathbf{z}_4^Q,\, \mathbf{z}_1^R,\, \mathbf{z}_2,\, \mathbf{z}_3^R,\, \mathbf{z}_4,\, \mathbf{z}_1^\pi,\, \mathbf{z}_2^\pi,\, \mathbf{z}_3^\pi,\, \mathbf{z}_4^\pi\}.$$

Для начала покажем, что

$$(\Delta_k^\pi \cap \mathbb{Z}^4) \subset \{\mathbf{p}, \mathbf{z}_1^\pi,\, \mathbf{z}_2^\pi,\, \mathbf{z}_3^\pi,\, \mathbf{z}_4^\pi,\, \frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2},\, \frac{\mathbf{z}_2^\pi+\mathbf{z}_3^\pi}{2},\, \frac{\mathbf{z}_3^\pi+\mathbf{z}_4^\pi}{2},\, \frac{\mathbf{z}_4^\pi+\mathbf{z}_1^\pi}{2}\}.$$

Предположим, что это не так. Без ограничения общности будем считать, что существует целая точка $\mathbf{w}$, лежащая в параллелограмме $\mathrm{conv}(\mathbf{z}_1^\pi, \frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2}, \mathbf{p}, \frac{\mathbf{z}_4^\pi+\mathbf{z}_1^\pi}{2})$ и не совпадающая ни с какой вершиной этого параллелограмма. Если $\mathbf{w}$ является точкой пересечения диагоналей параллелограмма $\mathrm{conv}(\mathbf{z}_1^\pi, \frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2}, \mathbf{p}, \frac{\mathbf{z}_4^\pi+\mathbf{z}_1^\pi}{2})$, то целая точка $\mathbf{z}_1 + \big(G(\mathbf{w}) - \mathbf{w}\big)$, не совпадающая с точкой $\mathbf{p}^Q$ и ни с какой из вершин параллелограмма Δ_k^Q, лежит в параллелограмме Δ_k^Q. Если же $\mathbf{w}$ не является точкой пересечения диагоналей параллелограмма $\mathrm{conv}(\mathbf{z}_1^\pi, \frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2}, \mathbf{p}, \frac{\mathbf{z}_4^\pi+\mathbf{z}_1^\pi}{2})$, то целая точка $\mathbf{z}_1 + \big(G^2(\mathbf{w}) - \mathbf{w}\big)$, не совпадающая с точкой $\mathbf{p}^Q$ и ни с какой из вершин параллелограмма Δ_k^Q, также лежит в параллелограмме Δ_k^Q. В обоих случаях получаем противоречие с построением тройки параллелограммов $(\Delta_k^\pi, \Delta_k^Q, \Delta_k^R)$.

A) Предположим, что плоскость π рациональная. Покажем, что этот случай разбивается на четыре принципиально разных случая.

A.1) Предположим, что $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^4$. В таком случае каждая из точек $\mathbf{z}_1^R$, $\mathbf{z}_3^R$, $\mathbf{z}_2^Q$, $\mathbf{z}_4^Q$ принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Ни одна из точек $\frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2}$, $\frac{\mathbf{z}_2^\pi+\mathbf{z}_3^\pi}{2}$, $\frac{\mathbf{z}_3^\pi+\mathbf{z}_4^\pi}{2}$, $\frac{\mathbf{z}_4^\pi+\mathbf{z}_1^\pi}{2}$ не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$, так как в противном случае середины сторон параллелограммов Δ_k^Q и Δ_k^R принадлежат решетке $\mathbb{Z}^4$. Теперь рассмотрим следующие два случая:

A.1.1) (будет соответствовать утверждению (1)) Пусть $\mathbf{p}^Q \notin \mathbb{Z}^4$, а значит, и $\mathbf{p}^R \notin \mathbb{Z}^4$. Так как $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^4$, то ни какая из точек $\mathbf{z}_1^\pi$, $\mathbf{z}_2^\pi$, $\mathbf{z}_3^\pi$, $\mathbf{z}_4^\pi$ не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{p},\, \mathbf{z}_1,\, \mathbf{z}_2^Q,\, \mathbf{z}_3,\, \mathbf{z}_4^Q,\, \mathbf{z}_1^R,\, \mathbf{z}_2,\, \mathbf{z}_3^R,\, \mathbf{z}_4\},$$

и набор векторов $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\mathbf{p} = \frac{1}{4}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2+\mathbf{z}_3+\mathbf{z}_4)$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (1) (см. рисунок 4.5).

A.1.2) (будет соответствовать утверждению (4)) Пусть $\mathbf{p}^Q \in \mathbb{Z}^4$, а значит, и $\mathbf{p}^R \in \mathbb{Z}^4$. Так как $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^4$, то каждая из точек $\mathbf{z}_1^\pi$, $\mathbf{z}_2^\pi$, $\mathbf{z}_3^\pi$, $\mathbf{z}_4^\pi$ принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 =$$

$$= \{\mathbf{p},\, \mathbf{z}_1,\, \mathbf{z}_2^Q,\, \mathbf{z}_3,\, \mathbf{z}_4^Q,\, \mathbf{z}_1^R,\, \mathbf{z}_2,\, \mathbf{z}_3^R,\, \mathbf{z}_4,\, \mathbf{p}^Q,\, \mathbf{p}^R,\, \mathbf{z}_1^\pi,\, \mathbf{z}_2^\pi,\, \mathbf{z}_3^\pi,\, \mathbf{z}_4^\pi\}$$

и набор векторов $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{p}_Q = \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_3)$, $\mathbf{p} = \frac{1}{4}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2+\mathbf{z}_3+\mathbf{z}_4)$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (4) (см. рисунок 4.10).

A.2) Предположим, что $\mathbf{p} \notin \mathbb{Z}^4$. Теперь рассмотрим следующие два случая:

A.2.1) (будет соответствовать утверждению (3)) Каждая из точек $\frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2}$, $\frac{\mathbf{z}_2^\pi+\mathbf{z}_3^\pi}{2}$, $\frac{\mathbf{z}_3^\pi+\mathbf{z}_4^\pi}{2}$, $\frac{\mathbf{z}_4^\pi+\mathbf{z}_1^\pi}{2}$ принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. В этом случае каждая из точек $\mathbf{p}^Q$, $\mathbf{p}^R$, $\mathbf{z}_1^R$, $\mathbf{z}_3^R$, $\mathbf{z}_2^Q$, $\mathbf{z}_4^Q$ принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$ и никакая из точек $\mathbf{z}_1^\pi$, $\mathbf{z}_2^\pi$, $\mathbf{z}_3^\pi$, $\mathbf{z}_4^\pi$ не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_1,\, \mathbf{z}_2^Q,\, \mathbf{z}_3,\, \mathbf{z}_4^Q,$$

$$\mathbf{z}_1^R,\ \mathbf{z}_2,\ \mathbf{z}_3^R,\ \mathbf{z}_4,\ \mathbf{p}^Q,\ \mathbf{p}^R,\ \frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2},\ \frac{\mathbf{z}_2^\pi+\mathbf{z}_3^\pi}{2},\ \frac{\mathbf{z}_3^\pi+\mathbf{z}_4^\pi}{2},\ \frac{\mathbf{z}_4^\pi+\mathbf{z}_1^\pi}{2}\}$$

и набор векторов

$$\mathbf{z}_1, \quad \frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2}=\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2), \quad \mathbf{p}^Q=\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_3), \quad \frac{\mathbf{z}_4^\pi+\mathbf{z}_1^\pi}{2}=\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_4)$$

образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (3) (см. рисунок 4.9).

А.2.2) (будет соответствовать утверждению (7)) Никакая из точек $\frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2}$, $\frac{\mathbf{z}_2^\pi+\mathbf{z}_3^\pi}{2}$, $\frac{\mathbf{z}_3^\pi+\mathbf{z}_4^\pi}{2}$, $\frac{\mathbf{z}_4^\pi+\mathbf{z}_1^\pi}{2}$ не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$.

Допустим, что никакая из точек $\mathbf{z}_1^R$, $\mathbf{z}_3^R$, $\mathbf{z}_2^Q$, $\mathbf{z}_4^Q$ не принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$. Пусть $\mathbf{r}$ — некоторый вектор, соединяющий две целые точки из плоскостей π и Q соответственно (такой вектор существует, поскольку по предположению плоскость π — рациональная). Рассмотрим набор $\mathbf{z}_3-\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_4-\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{r}$, который является базисом решетки $\mathbb{Z}^4$. При этом, первые две координаты точки $\mathbf{z}_1$ в рассматриваемом базисе имеют вид $(0,0)$, точки $\mathbf{z}_3$ — вид $(1,0)$, точки $\mathbf{z}_4^Q$ — вид $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, а точки $\mathbf{z}_2^Q$ — вид $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$. Предположим, что (z_1,z_2) — первые две координаты точки $\mathbf{z}_4$. Тогда первые две координаты точки $\mathbf{z}_2$ имеют вид (z_1,z_2-1), точки $\mathbf{z}_1^R$ — вид $(z_1-\frac{1}{2},z_2-\frac{1}{2})$, а точки $\mathbf{z}_3^R$ — вид $(z_1+\frac{1}{2},z_2-\frac{1}{2})$. Отсюда следует, что первые две координаты точки $\frac{\mathbf{z}_1^\pi+\mathbf{z}_2^\pi}{2}$ имеют вид $(\frac{z_1}{2},\frac{z_2-1}{2})$, точки $\frac{\mathbf{z}_2^\pi+\mathbf{z}_3^\pi}{2}$ — вид $(\frac{z_1+1}{2},\frac{z_2-1}{2})$, точки $\frac{\mathbf{z}_3^\pi+\mathbf{z}_4^\pi}{2}$ — вид $(\frac{z_1+1}{2},\frac{z_2}{2})$, а точки $\frac{\mathbf{z}_4^\pi+\mathbf{z}_1^\pi}{2}$ — вид $(\frac{z_1}{2},\frac{z_2}{2})$. Из соображений четности получаем противоречие с допущением.

Итак, каждая из точек $\mathbf{z}_1^R$, $\mathbf{z}_3^R$, $\mathbf{z}_2^Q$, $\mathbf{z}_4^Q$ принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$, а значит, каждая из точек $\mathbf{z}_1^\pi$, $\mathbf{z}_2^\pi$, $\mathbf{z}_3^\pi$, $\mathbf{z}_4^\pi$ принадлежит решетке $\mathbb{Z}^4$, а поскольку $\mathbf{p}\notin\mathbb{Z}^4$, то $\mathbf{p}^Q\notin\mathbb{Z}^4$ и $\mathbf{p}^R\notin\mathbb{Z}^4$. Тогда

$$(\Delta_k^\pi\cup\Delta_k^Q\cup\Delta_k^R)\cap\mathbb{Z}^4=\{\mathbf{z}_1,\ \mathbf{z}_2^Q,\ \mathbf{z}_3,\ \mathbf{z}_4^Q,\ \mathbf{z}_1^R,\ \mathbf{z}_2,\ \mathbf{z}_3^R,\ \mathbf{z}_4,\ \mathbf{z}_1^\pi,\ \mathbf{z}_2^\pi,\ \mathbf{z}_3^\pi,\ \mathbf{z}_4^\pi\}$$

и набор векторов $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\mathbf{z}_1^\pi=\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2)+\frac{1}{4}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_4-\mathbf{z}_3-\mathbf{z}_2)$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (7) (см. рисунок 4.4).

Б) Предположим, что π не является рациональной плоскостью. Покажем, что этот случай разбивается на 3 принципиально разных случая.

Б.1) (будет соответствовать утверждению (5)) Предположим, что $\mathbf{p}^Q \in \mathbb{Z}^4$, а значит, и $\mathbf{p}^R \in \mathbb{Z}^4$. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_1,\, \mathbf{z}_2^Q,\, \mathbf{z}_3,\, \mathbf{z}_4^Q,\, \mathbf{z}_1^R,\, \mathbf{z}_2,\, \mathbf{z}_3^R,\, \mathbf{z}_4,\, \mathbf{p}^Q,\, \mathbf{p}^R\}$$

и набор векторов $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{p}^Q = \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_3)$, $\mathbf{p}^R = \frac{1}{2}(\mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_4)$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (5) (см. рисунок 4.12).

Б.2) Предположим, что $\mathbf{p}^Q \notin \mathbb{Z}^4$, а значит, и $\mathbf{p}^R \notin \mathbb{Z}^4$. Это предположение дает два следующих случая.

Б.2.1) (будет соответствовать утверждению (6)) Предположим, что $\mathbf{z}_2^Q \in \mathbb{Z}^4$, $\mathbf{z}_4^Q \in \mathbb{Z}^4$, $\mathbf{z}_1^R \in \mathbb{Z}^4$ и $\mathbf{z}_2^R \in \mathbb{Z}^4$. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_1,\, \mathbf{z}_2^Q,\, \mathbf{z}_3,\, \mathbf{z}_4^Q,\, \mathbf{z}_1^R,\, \mathbf{z}_2,\, \mathbf{z}_3^R,\, \mathbf{z}_4\}$$

и набор векторов $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\mathbf{z}_4^Q = \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_2)$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (6) (см. рисунок 4.7).

Б.2.2) (будет соответствовать утверждению (2)) Предположим, что $\mathbf{z}_2^Q \notin \mathbb{Z}^4$, $\mathbf{z}_4^Q \notin \mathbb{Z}^4$, $\mathbf{z}_1^R \notin \mathbb{Z}^4$ и $\mathbf{z}_2^R \notin \mathbb{Z}^4$. Тогда

$$(\Delta_k^\pi \cup \Delta_k^Q \cup \Delta_k^R) \cap \mathbb{Z}^4 = \{\mathbf{z}_1,\, \mathbf{z}_3,\, \mathbf{z}_2,\, \mathbf{z}_4\}$$

и набор векторов $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\mathbf{z}_4$ образует базис решетки $\mathbb{Z}^4$, а значит, выполняется утверждение (2) (см. рисунок 4.2).

□

4.4 Матрицы собственных симметрий в размерности $n = 4$

Если задана дробь $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) = \mathrm{CF}(A) \in \mathfrak{A}_3$, будем считать, что подпространство l_1 порождается вектором $\mathbf{l}_1 = (1, \alpha, \beta, \gamma)$. Тогда из предложения 6 следует, что числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$ над $\mathbb{Q}$ и каждое l_i порождается вектором $\mathbf{l}_i = (1, \sigma_i(\alpha), \sigma_i(\beta), \sigma_i(\gamma))$, где $\sigma_1 (= \mathrm{id}), \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ — все вложения K в $\mathbb{R}$. То есть, если через $\big(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4\big)$ обозначить матрицу со столбцами $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4$, получим

$$(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \sigma_2(\alpha) & \sigma_3(\alpha) & \sigma_4(\alpha) \\ \beta & \sigma_2(\beta) & \sigma_3(\beta) & \sigma_4(\beta) \\ \gamma & \sigma_2(\gamma) & \sigma_3(\gamma) & \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix}.$$

Мы будем обозначать через $\widetilde{\mathfrak{A}_3}$ множество всех трехмерных алгебраических цепных дробей, для которых

$$\sigma_3(K) = K, \quad \sigma_4(K) = \sigma_2(K), \quad \sigma_3^2 = \mathrm{id}, \quad \sigma_4 = \sigma_2\sigma_3.$$

Для каждого $i = 1, 2, \ldots, 10$ определим $\widetilde{\mathbf{CF}}_i$ как класс дробей из $\widetilde{\mathfrak{A}_3}$, удовлетворяющих паре соотношений $\mathfrak{R}_i$, где

$\mathfrak{R}_1$: $\beta + \sigma_3(\beta) = -\big(\alpha + \sigma_3(\alpha)\big)$, $\gamma = \sigma_3(\alpha)$;
$\mathfrak{R}_2$: $\beta + \sigma_3(\beta) = 1 - \big(\alpha + \sigma_3(\alpha)\big)$, $\gamma = \sigma_3(\alpha)$;
$\mathfrak{R}_3$: $\beta + \sigma_3(\beta) = 2 - \big(\alpha + \sigma_3(\alpha)\big)$, $\gamma = \sigma_3(\alpha)$;
$\mathfrak{R}_4$: $\beta + \sigma_3(\beta) = -\big(\alpha + \sigma_3(\alpha)\big)$, $\gamma = \frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}$;
$\mathfrak{R}_5$: $\beta + \sigma_3(\beta) = 2 - \big(\alpha + \sigma_3(\alpha)\big)$, $\gamma = \frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}$;
$\mathfrak{R}_6$: $\beta + \sigma_3(\beta) = -\big(\alpha + \sigma_3(\alpha)\big)$, $\gamma = \frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2}$;
$\mathfrak{R}_7$: $\beta + \sigma_3(\beta) = 2 - \big(\alpha + \sigma_3(\alpha)\big)$, $\gamma = \frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2}$;
$\mathfrak{R}_8$: $\beta + \sigma_3(\beta) = 1 - \frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\gamma = \frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}$;
$\mathfrak{R}_9$: $\beta + \sigma_3(\beta) = 2 - \frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\gamma = \frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}$;
$\mathfrak{R}_{10}$: $\beta + \sigma_3(\beta) = 2 - \frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\gamma = \frac{\sigma_3(\alpha)-\alpha}{4}$.

Покажем, что все дроби из классов $\widetilde{\mathbf{CF}}_i$, палиндромичны для каждого $i = 1, 2, \ldots, 10$. Положим $\widetilde{G_1}, \widetilde{G_2}, \ldots, \widetilde{G_{10}}$ равными соответственно матрицам

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Лемма 4.4.1. *Пусть* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ *и* $i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$. *Тогда цепная дробь* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ *принадлежит классу* $\widetilde{\mathbf{CF}}_i$ *в том и только в том случае, если* $\widetilde{G_i}$ *— её собственная симметрия и* $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_i}}) = 2$.

Доказательство. В силу леммы 4.2.4 оператор $G \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$ является собственной симметрией дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_G) = 2$ тогда и только тогда, когда с точностью до перестановки индексов существуют такие действительные числа $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, что $G\big(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4\big) = \big(\mu_3\mathbf{l}_3, \mu_4\mathbf{l}_4, \mu_1\mathbf{l}_1, \mu_2\mathbf{l}_2\big)$ и $\mu_1\mu_3 = \mu_2\mu_4 = 1$.

Пусть $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_1$. Заметим, что $\sigma_2 = \sigma_2\sigma_3^2 = \sigma_4\sigma_3$, $\sigma_2(\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_3(\gamma) = \sigma_3^2(\alpha) = \alpha$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_4\sigma_3(\alpha) = \sigma_2(\alpha)$, $\sigma_2(\beta) + \sigma_2\sigma_3(\beta) = \sigma_2\big(\beta + \sigma_3(\beta)\big) = \sigma_2\Big(-\big(\alpha + \sigma_3(\alpha)\big)\Big) = -\big(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)\big)$ и $\sigma_4(\beta) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Тогда

$$\widetilde{G_1}\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ -\beta - \big(\alpha + \sigma_3(\alpha)\big) \\ \alpha \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_1}\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2\sigma_3(\alpha) \\ -\sigma_2(\beta) - \big(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)\big) \\ \sigma_2(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_1}\mathbf{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ -\sigma_3(\beta) - \big(\sigma_3(\alpha) + \alpha\big) \\ \sigma_3(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_1}\mathbf{l}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ -\sigma_2\sigma_3(\beta) - \big(\sigma_2\sigma_3(\alpha) + \sigma_2(\alpha)\big) \\ \sigma_2\sigma_3(\alpha) \end{pmatrix},$$

то есть $\widetilde{G_1}\big(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4\big) = \big(\mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2\big)$. Следовательно, $\widetilde{G_1}$ — собственная симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_1}}) = 2$. Обратно, предположим, что $\widetilde{G_1}$ — собственная симметрия $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_1}}) = 2$.

Тогда существует такое μ_3, что с точностью до перестановки индексов

$$\widetilde{G_1}\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \\ -\beta - (\alpha + \gamma) \\ \alpha \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\gamma = \sigma_3(\alpha)$, $\sigma_3^2(\alpha) = \sigma_3(\gamma) = \alpha$, $\sigma_3^2(\gamma) = \sigma_3(\alpha) = \gamma$, $\beta + \sigma_3(\beta) = -\big(\alpha + \sigma_3(\alpha)\big)$, $\sigma_3^2(\beta) = -\sigma_3(\beta) - \big(\sigma_3(\alpha) + \sigma_3^2(\alpha)\big) = -\sigma_3(\beta) - \big(\alpha + \sigma_3(\alpha)\big) = \beta$. Существует такое μ_4, что

$$\widetilde{G_1}\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\gamma) \\ -\sigma_2(\beta) - \big(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2(\gamma)\big) \\ \sigma_2(\alpha) \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_2(\alpha) = \sigma_2\sigma_3(\gamma)$, $\sigma_4(\beta) = -\sigma_2(\beta) - \big(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2(\gamma)\big) = \sigma_2\big(-\beta - (\alpha + \gamma)\big) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Стало быть, $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}_1}$, так как числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Пусть $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}_2}$. Заметим, что $\sigma_2 = \sigma_2\sigma_3^2 = \sigma_4\sigma_3$, $\sigma_2(\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_3(\gamma) = \sigma_3^2(\alpha) = \alpha$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_4\sigma_3(\alpha) = \sigma_2(\alpha)$, $\sigma_2(\beta) + \sigma_2\sigma_3(\beta) = \sigma_2\big(\beta + \sigma_3(\beta)\big) = \sigma_2\Big(1 - \big(\alpha + \sigma_3(\alpha)\big)\Big) = 1 - \big(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)\big)$ и $\sigma_4(\beta) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Тогда

$$\widetilde{G_2}\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ 1 - \beta - \big(\alpha + \sigma_3(\alpha)\big) \\ \alpha \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_2}\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2\sigma_3(\alpha) \\ 1 - \sigma_2(\beta) - \big(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)\big) \\ \sigma_2(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_2}\mathbf{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1-\sigma_3(\beta)-\bigl(\sigma_3(\alpha)+\alpha\bigr) \\ \sigma_3(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_2}\mathbf{l}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ 1-\sigma_2\sigma_3(\beta)-\bigl(\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)\bigr) \\ \sigma_2\sigma_3(\alpha) \end{pmatrix},$$

то есть $\widetilde{G_2}\bigl(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2,\mathbf{l}_3,\mathbf{l}_4\bigr) = \bigl(\mathbf{l}_3,\mathbf{l}_4,\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2\bigr)$. Следовательно, $\widetilde{G_2}$ — собственная симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_2}})=2$. Обратно, предположим, что $\widetilde{G_2}$ — собственная симметрия $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_2}})=2$. Тогда существует такое μ_3, что с точностью до перестановки индексов

$$\widetilde{G_2}\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \\ 1-\beta-(\alpha+\gamma) \\ \alpha \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3=1$, $\gamma=\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_3^2(\alpha)=\sigma_3(\gamma)=\alpha$, $\sigma_3^2(\gamma)=\sigma_3(\alpha)=\gamma$, $\beta+\sigma_3(\beta)=1-\bigl(\alpha+\sigma_3(\alpha)\bigr)$, $\sigma_3^2(\beta)=-\sigma_3(\beta)+\sigma_3(1)-\bigl(\sigma_3(\alpha)+\sigma_3^2(\alpha)\bigr)=-\sigma_3(\beta)+1-\bigl(\alpha+\sigma_3(\alpha)\bigr)=\beta$. Существует такое μ_4, что

$$\widetilde{G_2}\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\gamma) \\ 1-\sigma_2(\beta)-\bigl(\sigma_2(\alpha)+\sigma_2(\gamma)\bigr) \\ \sigma_2(\alpha) \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4=1$, $\sigma_4(\alpha)=\sigma_2(\gamma)=\sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_4(\gamma)=\sigma_2(\alpha)=\sigma_2\sigma_3(\gamma)$, $\sigma_4(\beta)=1-\sigma_2(\beta)-\bigl(\sigma_2(\alpha)+\sigma_2(\gamma)\bigr)=\sigma_2\bigl(1-\beta-(\alpha+\gamma)\bigr)=\sigma_2\sigma_3(\beta)$. Стало быть, $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\widetilde{\mathbf{CF}}_2$, так как числа $1,\alpha,\beta,\gamma$ образуют базис поля $K=\mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Пусть $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\widetilde{\mathbf{CF}}_3$. Заметим, что $\sigma_2=\sigma_2\sigma_3^2=\sigma_4\sigma_3$, $\sigma_2(\gamma)=\sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_3(\gamma)=\sigma_3^2(\alpha)=\alpha$, $\sigma_4(\gamma)=\sigma_4\sigma_3(\alpha)=\sigma_2(\alpha)$, $\sigma_2(\beta)+\sigma_2\sigma_3(\beta)=\sigma_2\bigl(\beta+\sigma_3(\beta)\bigr)=\sigma_2\Bigl(2-\bigl(\alpha+\sigma_3(\alpha)\bigr)\Bigr)=2-\bigl(\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)\bigr)$ и $\sigma_4(\beta)=\sigma_2\sigma_3(\beta)$. Тогда

$$\widetilde{G_3}\mathbf{l}_1=\begin{pmatrix}1\\ \sigma_3(\alpha)\\ 2-\beta-\bigl(\alpha+\sigma_3(\alpha)\bigr)\\ \alpha\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_3}\mathbf{l}_2=\begin{pmatrix}1\\ \sigma_2\sigma_3(\alpha)\\ 2-\sigma_2(\beta)-\bigl(\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)\bigr)\\ \sigma_2(\alpha)\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_3}\mathbf{l}_3=\begin{pmatrix}1\\ \alpha\\ 2-\sigma_3(\beta)-\bigl(\sigma_3(\alpha)+\alpha\bigr)\\ \sigma_3(\alpha)\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_3}\mathbf{l}_4=\begin{pmatrix}1\\ \sigma_2(\alpha)\\ 2-\sigma_2\sigma_3(\beta)-\bigl(\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)\bigr)\\ \sigma_2\sigma_3(\alpha)\end{pmatrix},$$

то есть $\widetilde{G_3}\bigl(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2,\mathbf{l}_3,\mathbf{l}_4\bigr)=\bigl(\mathbf{l}_3,\mathbf{l}_4,\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2\bigr)$. Следовательно, $\widetilde{G_3}$ — собственная симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_3}})=2$. Обратно, предположим, что $\widetilde{G_3}$ — собственная симметрия $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_3}})=2$. Тогда существует такое μ_3, что с точностью до перестановки индексов

$$\widetilde{G_3}\mathbf{l}_1=\begin{pmatrix}1\\ \gamma\\ 2-\beta-(\alpha+\gamma)\\ \alpha\end{pmatrix}=\mu_3\begin{pmatrix}1\\ \sigma_3(\alpha)\\ \sigma_3(\beta)\\ \sigma_3(\gamma)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3=1$, $\gamma=\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_3^2(\alpha)=\sigma_3(\gamma)=\alpha$, $\sigma_3^2(\gamma)=\sigma_3(\alpha)=\gamma$, $\beta+\sigma_3(\beta)=2-\bigl(\alpha+\sigma_3(\alpha)\bigr)$, $\sigma_3^2(\beta)=-\sigma_3(\beta)+\sigma_3(2)-\bigl(\sigma_3(\alpha)+\sigma_3^2(\alpha)\bigr)=-\sigma_3(\beta)+2-\bigl(\alpha+\sigma_3(\alpha)\bigr)=\beta$. Существует такое μ_4, что

$$\widetilde{G_3}\mathbf{l}_2=\begin{pmatrix}1\\ \sigma_2(\gamma)\\ 2-\sigma_2(\beta)-\bigl(\sigma_2(\alpha)+\sigma_2(\gamma)\bigr)\\ \sigma_2(\alpha)\end{pmatrix}=\mu_4\begin{pmatrix}1\\ \sigma_4(\alpha)\\ \sigma_4(\beta)\\ \sigma_4(\gamma)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_2(\alpha) = \sigma_2\sigma_3(\gamma)$, $\sigma_4(\beta) = 2-\sigma_2(\beta)-\big(\sigma_2(\alpha)+\sigma_2(\gamma)\big) = \sigma_2\big(2-\beta-(\alpha+\gamma)\big) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Стало быть, $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_3$, так как числа $1,\alpha,\beta,\gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Пусть $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_4$. Заметим, что $\sigma_2 = \sigma_2\sigma_3^2 = \sigma_4\sigma_3$, $\sigma_2(\gamma) = \sigma_2(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}) = \frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3(\gamma) = \sigma_3(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}) = \frac{\sigma_3(\alpha)+\alpha}{2}$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_4(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}) = \frac{\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)}{2}$, $\sigma_2(\beta) + \sigma_2\sigma_3(\beta) = \sigma_2\big(\beta+\sigma_3(\beta)\big) = \sigma_2\Big(-\big(\alpha+\sigma_3(\alpha)\big)\Big) = -\big(\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)\big)$ и $\sigma_4(\beta) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Тогда

$$\widetilde{G_4}\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ -\beta - \big(\alpha+\sigma_3(\alpha)\big) \\ \frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_4}\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2\sigma_3(\alpha) \\ -\sigma_2(\beta) - \big(\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)\big) \\ \frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)}{2} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_4}\mathbf{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ -\sigma_3(\beta) - \big(\sigma_3(\alpha)+\alpha\big) \\ \frac{\sigma_3(\alpha)+\alpha}{2} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_4}\mathbf{l}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ -\sigma_2\sigma_3(\beta) - \big(\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)\big) \\ \frac{\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)}{2} \end{pmatrix},$$

то есть $\widetilde{G_4}\big(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2,\mathbf{l}_3,\mathbf{l}_4\big) = \big(\mathbf{l}_3,\mathbf{l}_4,\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2\big)$. Следовательно, $\widetilde{G_4}$ — собственная симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_4}}) = 2$. Обратно, предположим, что $\widetilde{G_4}$ — собственная симметрия $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_4}}) = 2$.

Тогда существует такое μ_3, что с точностью до перестановки индексов

$$\widetilde{G_4}\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha + 2\gamma \\ -\beta - 2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\gamma = \frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3^2(\alpha) = 2\sigma_3(\gamma) - \sigma_3(\alpha) = 2\gamma - \sigma_3(\alpha) = \alpha$, $\sigma_3^2(\gamma) = \sigma_3(\gamma) = \gamma$, $\beta + \sigma_3(\beta) = -2\gamma = -\big(\alpha + \sigma_3(\alpha)\big)$, $\sigma_3^2(\beta) = -\sigma_3(\beta) - 2\sigma_3(\gamma) = -\sigma_3(\beta) - 2\gamma = \beta$. Существует такое μ_4, что

$$\widetilde{G_4}\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sigma_2(\alpha) + 2\sigma_2(\gamma) \\ -\sigma_2(\beta) - 2\sigma_2(\gamma) \\ \sigma_2(\gamma) \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = \sigma_2(2\gamma - \alpha) = \sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\gamma)$, $\sigma_4(\beta) = -\sigma_2(\beta) - 2\sigma_2(\gamma) = \sigma_2(-\beta - 2\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Стало быть, $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_4$, так как числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Пусть $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_5$. Заметим, что $\sigma_2 = \sigma_2\sigma_3^2 = \sigma_4\sigma_3$, $\sigma_2(\gamma) = \sigma_2(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}) = \frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3(\gamma) = \sigma_3(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}) = \frac{\sigma_3(\alpha)+\alpha}{2}$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_4(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}) = \frac{\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)}{2}$, $\sigma_2(\beta) + \sigma_2\sigma_3(\beta) = \sigma_2\big(\beta + \sigma_3(\beta)\big) = \sigma_2\Big(2 - \big(\alpha + \sigma_3(\alpha)\big)\Big) = 2 - \big(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)\big)$ и $\sigma_4(\beta) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Тогда

$$\widetilde{G_5}\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ 2 - \beta - \big(\alpha + \sigma_3(\alpha)\big) \\ \frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_5}\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2\sigma_3(\alpha) \\ 2 - \sigma_2(\beta) - \big(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)\big) \\ \frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)}{2} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_5}\mathbf{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 2-\sigma_3(\beta)-\big(\sigma_3(\alpha)+\alpha\big) \\ \frac{\sigma_3(\alpha)+\alpha}{2} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_5}\mathbf{l}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ 2-\sigma_2\sigma_3(\beta)-\big(\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)\big) \\ \frac{\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)}{2} \end{pmatrix},$$

то есть $\widetilde{G_5}\big(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2,\mathbf{l}_3,\mathbf{l}_4\big) = \big(\mathbf{l}_3,\mathbf{l}_4,\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2\big)$. Следовательно, $\widetilde{G_5}$ — собственная симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_5}})=2$. Обратно, предположим, что $\widetilde{G_5}$ — собственная симметрия $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_5}})=2$. Тогда существует μ_3, что с точностью до перестановки индексов

$$\widetilde{G_5}\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha+2\gamma \\ 2-\beta-2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3=1$, $\gamma=\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3^2(\alpha)=2\sigma_3(\gamma)-\sigma_3(\alpha)=2\gamma-\sigma_3(\alpha)=\alpha$, $\sigma_3^2(\gamma)=\sigma_3(\gamma)=\gamma$, $\beta+\sigma_3(\beta)=2-2\gamma=2-\big(\alpha+\sigma_3(\alpha)\big)$, $\sigma_3^2(\beta)=\sigma_3(2)-\sigma_3(\beta)-2\sigma_3(\gamma)=2-\sigma_3(\beta)-2\gamma=\beta$. Существует такое μ_4, что

$$\widetilde{G_5}\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sigma_2(\alpha)+2\sigma_2(\gamma) \\ 2-\sigma_2(\beta)-2\sigma_2(\gamma) \\ \sigma_2(\gamma) \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4=1$, $\sigma_4(\alpha)=\sigma_2(2\gamma-\alpha)=\sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_4(\gamma)=\sigma_2(\gamma)=\sigma_2\sigma_3(\gamma)$, $\sigma_4(\beta)=2-\sigma_2(\beta)-2\sigma_2(\gamma)=\sigma_2(2-\beta-2\gamma)=\sigma_2\sigma_3(\beta)$. Стало быть, $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\widetilde{\mathbf{CF}}_5$, так как числа $1,\alpha,\beta,\gamma$ образуют базис поля $K=\mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Пусть $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\widetilde{\mathbf{CF}}_6$. Заметим, что $\sigma_2=\sigma_2\sigma_3^2=\sigma_4\sigma_3$, $\sigma_2(\gamma)=\sigma_2(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2})=\frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)+1}{2}$, $\sigma_3(\gamma)=\sigma_3(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2})=\frac{\sigma_3(\alpha)+\alpha+1}{2}$, $\sigma_4(\gamma)=\sigma_4(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2})=\frac{\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)+1}{2}$, $\sigma_2(\beta)+\sigma_2\sigma_3(\beta)=\sigma_2\big(\beta+\sigma_3(\beta)\big)=\sigma_2\big(-(\alpha+\sigma_3(\alpha))\big)=-\big(\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)\big)$ и $\sigma_4(\beta)=\sigma_2\sigma_3(\beta)$. Тогда

$$\widetilde{G_6}\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ -\beta - \big(\alpha + \sigma_3(\alpha)\big) \\ \frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_6}\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2\sigma_3(\alpha) \\ -\sigma_2(\beta) - \big(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)\big) \\ \frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)+1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_6}\mathbf{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ -\sigma_3(\beta) - \big(\sigma_3(\alpha) + \alpha\big) \\ \frac{\sigma_3(\alpha)+\alpha+1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_6}\mathbf{l}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ -\sigma_2\sigma_3(\beta) - \big(\sigma_2\sigma_3(\alpha) + \sigma_2(\alpha)\big) \\ \frac{\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)+1}{2} \end{pmatrix},$$

то есть $\widetilde{G_6}\big(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4\big) = \big(\mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2\big)$. Следовательно, $\widetilde{G_6}$ — собственная симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_6}}) = 2$. Обратно, предположим, что $\widetilde{G_6}$ — собственная симметрия $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_6}}) = 2$. Тогда существует такое μ_3, что с точностью до перестановки индексов

$$\widetilde{G_6}\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \alpha + 2\gamma \\ 1 - \beta - 2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\gamma = \frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2}$, $\sigma_3^2(\alpha) = 2\sigma_3(\gamma) - \sigma_3(\alpha) - 1 = 2\gamma - \sigma_3(\alpha) - 1 = \alpha$, $\sigma_3^2(\gamma) = \sigma_3(\gamma) = \gamma$, $\beta + \sigma_3(\beta) = 1 - 2\gamma = -\big(\alpha + \sigma_3(\alpha)\big)$, $\sigma_3^2(\beta) = -\sigma_3(\beta) + \sigma_3(1) - 2\sigma_3(\gamma) = -\sigma_3(\beta) + 1 - 2\gamma = \beta$. Существует такое μ_4, что

$$\widetilde{G_6}\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \sigma_2(\alpha) + 2\sigma_2(\gamma) \\ 1 - \sigma_2(\beta) - 2\sigma_2(\gamma) \\ \sigma_2(\gamma) \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = \sigma_2(2\gamma - \alpha - 1) = \sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\gamma)$, $\sigma_4(\beta) = 1 - \sigma_2(\beta) - 2\sigma_2(\gamma) = \sigma_2(1 - \beta - 2\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Стало быть, $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_6$, так как числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Пусть $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_7$. Заметим, что $\sigma_2 = \sigma_2\sigma_3^2 = \sigma_4\sigma_3$, $\sigma_2(\gamma) = \sigma_2(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2}) = \frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)+1}{2}$, $\sigma_3(\gamma) = \sigma_3(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2}) = \frac{\sigma_3(\alpha)+\alpha+1}{2}$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_4(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2}) = \frac{\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)+1}{2}$, $\sigma_2(\beta) + \sigma_2\sigma_3(\beta) = \sigma_2\big(\beta + \sigma_3(\beta)\big) = \sigma_2\big(2 - (\alpha + \sigma_3(\alpha))\big) = 2 - \big(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)\big)$ и $\sigma_4(\beta) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Тогда

$$\widetilde{G_7}\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ 2 - \beta - \big(\alpha + \sigma_3(\alpha)\big) \\ \frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_7}\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2\sigma_3(\alpha) \\ 2 - \sigma_2(\beta) - \big(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2\sigma_3(\alpha)\big) \\ \frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)+1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_7}\mathbf{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 2 - \sigma_3(\beta) - \big(\sigma_3(\alpha) + \alpha\big) \\ \frac{\sigma_3(\alpha)+\alpha+1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_7}\mathbf{l}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ 2 - \sigma_2\sigma_3(\beta) - \big(\sigma_2\sigma_3(\alpha) + \sigma_2(\alpha)\big) \\ \frac{\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)+1}{2} \end{pmatrix},$$

то есть $\widetilde{G_7}\big(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4\big) = \big(\mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2\big)$. Следовательно, $\widetilde{G_7}$ — собственная симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_7}}) = 2$. Обратно, предположим, что $\widetilde{G_7}$ — собственная симметрия $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_7}}) = 2$.

Тогда существует такое μ_3, что с точностью до перестановки индексов

$$\widetilde{G_7}\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-\alpha+2\gamma \\ 3-\beta-2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\gamma = \frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2}$, $\sigma_3^2(\alpha) = 2\sigma_3(\gamma) - \sigma_3(\alpha) - 1 = 2\gamma - \sigma_3(\alpha) - 1 = \alpha$, $\sigma_3^2(\gamma) = \sigma_3(\gamma) = \gamma$, $\beta + \sigma_3(\beta) = 3 - 2\gamma = 2 - \bigl(\alpha + \sigma_3(\alpha)\bigr)$, $\sigma_3^2(\beta) = -\sigma_3(\beta) + \sigma_3(3) - 2\sigma_3(\gamma) = -\sigma_3(\beta) + 3 - 2\gamma = \beta$. Существует такое μ_4, что

$$\widetilde{G_7}\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-\sigma_2(\alpha)+2\sigma_2(\gamma) \\ 3-\sigma_2(\beta)-2\sigma_2(\gamma) \\ \sigma_2(\gamma) \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = \sigma_2(2\gamma - \alpha - 1) = \sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\gamma)$, $\sigma_4(\beta) = 3 - \sigma_2(\beta) - 2\sigma_2(\gamma) = \sigma_2(3 - \beta - 2\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Стало быть, $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_7$, так как числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Пусть $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_8$. Заметим, что $\sigma_2 = \sigma_2\sigma_3^2 = \sigma_4\sigma_3$, $\sigma_2(\gamma) = \sigma_2(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}) = \frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3(\gamma) = \sigma_3(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}) = \frac{\sigma_3(\alpha)+\alpha}{2}$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_4(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}) = \frac{\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)}{2}$, $\sigma_2(\beta) + \sigma_2\sigma_3(\beta) = \sigma_2\bigl(\beta + \sigma_3(\beta)\bigr) = \sigma_2\bigl(1 - \frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}\bigr) = 1 - \frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)}{2}$ и $\sigma_4(\beta) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Тогда

$$\widetilde{G_8}\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ 1-\beta-\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2} \\ \frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_8}\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2\sigma_3(\alpha) \\ 1-\sigma_2(\beta)-\frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)}{2} \\ \frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)}{2} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_8}\mathbf{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1-\sigma_3(\beta)-\frac{\sigma_3(\alpha)+\alpha}{2} \\ \frac{\sigma_3(\alpha)+\alpha}{2} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_8}\mathbf{l}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ 1-\sigma_2\sigma_3(\beta)-\frac{\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)}{2} \\ \frac{\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)}{2} \end{pmatrix},$$

то есть $\widetilde{G_8}\big(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2,\mathbf{l}_3,\mathbf{l}_4\big) = \big(\mathbf{l}_3,\mathbf{l}_4,\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2\big)$. Следовательно, $\widetilde{G_8}$ — собственная симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_8}})=2$. Обратно, предположим, что $\widetilde{G_8}$ — собственная симметрия $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_8}})=2$. Тогда существует такое μ_3, что с точностью до перестановки индексов

$$\widetilde{G_8}\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha+2\gamma \\ 1-\beta-\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\gamma = \frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3^2(\alpha) = 2\sigma_3(\gamma)-\sigma_3(\alpha) = 2\gamma-\sigma_3(\alpha) = \alpha$, $\sigma_3^2(\gamma) = \sigma_3(\gamma) = \gamma$, $\beta+\sigma_3(\beta) = 1-\gamma = 1-\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3^2(\beta) = -\sigma_3(\beta)+\sigma_3(1)-\sigma_3(\gamma) = -\sigma_3(\beta)+1-\gamma = \beta$. Существует такое μ_4, что

$$\widetilde{G_8}\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sigma_2(\alpha)+2\sigma_2(\gamma) \\ 1-\sigma_2(\beta)-\sigma_2(\gamma) \\ \sigma_2(\gamma) \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = \sigma_2(2\gamma-\alpha) = \sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\gamma)$, $\sigma_4(\beta) = 1-\sigma_2(\beta)-\sigma_2(\gamma) = \sigma_2(1-\beta-\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Стало быть, $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_8$, так как числа $1,\alpha,\beta,\gamma$ образуют базис поля $K=\mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Пусть $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_9$. Заметим, что $\sigma_2 = \sigma_2\sigma_3^2 = \sigma_4\sigma_3$, $\sigma_2(\gamma) = \sigma_2(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}) = \frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3(\gamma) = \sigma_3(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}) = \frac{\sigma_3(\alpha)+\alpha}{2}$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_4(\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}) = \frac{\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)}{2}$, $\sigma_2(\beta)+\sigma_2\sigma_3(\beta) = \sigma_2\big(\beta+\sigma_3(\beta)\big) = \sigma_2\big(2-\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}\big) = 2-\frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)}{2}$ и $\sigma_4(\beta) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Тогда

$$\widetilde{G_9}\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ 2-\beta-\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2} \\ \frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_9}\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2\sigma_3(\alpha) \\ 2-\sigma_2(\beta)-\frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)}{2} \\ \frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)}{2} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_9}\mathbf{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 2-\sigma_3(\beta)-\frac{\sigma_3(\alpha)+\alpha}{2} \\ \frac{\sigma_3(\alpha)+\alpha}{2} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_9}\mathbf{l}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ 2-\sigma_2\sigma_3(\beta)-\frac{\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)}{2} \\ \frac{\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)}{2} \end{pmatrix},$$

то есть $\widetilde{G_9}\big(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2,\mathbf{l}_3,\mathbf{l}_4\big) = \big(\mathbf{l}_3,\mathbf{l}_4,\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2\big)$. Следовательно, $\widetilde{G_9}$ — собственная симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_9}}) = 2$. Обратно, предположим, что $\widetilde{G_9}$ — собственная симметрия $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_9}}) = 2$. Тогда существует такое μ_3, что с точностью до перестановки индексов

$$\widetilde{G_9}\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha+2\gamma \\ 2-\beta-\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\gamma = \frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3^2(\alpha) = 2\sigma_3(\gamma)-\sigma_3(\alpha) = 2\gamma-\sigma_3(\alpha) = \alpha$, $\sigma_3^2(\gamma) = \sigma_3(\gamma) = \gamma$, $\beta+\sigma_3(\beta) = 2-\gamma = 2-\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3^2(\beta) = -\sigma_3(\beta) +$

$\sigma_3(2)-\sigma_3(\gamma)=-\sigma_3(\beta)+2-\gamma=\beta$. Существует такое μ_4, что

$$\widetilde{G_9}\mathbf{l}_2=\begin{pmatrix}1\\-\sigma_2(\alpha)+2\sigma_2(\gamma)\\2-\sigma_2(\beta)-\sigma_2(\gamma)\\\sigma_2(\gamma)\end{pmatrix}=\mu_4\begin{pmatrix}1\\\sigma_4(\alpha)\\\sigma_4(\beta)\\\sigma_4(\gamma)\end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4=1$, $\sigma_4(\alpha)=\sigma_2(2\gamma-\alpha)=\sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_4(\gamma)=\sigma_2(\gamma)=\sigma_2\sigma_3(\gamma)$, $\sigma_4(\beta)=2-\sigma_2(\beta)-\sigma_2(\gamma)=\sigma_2(2-\beta-\gamma)=\sigma_2\sigma_3(\beta)$. Стало быть, $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\widetilde{\mathbf{CF}_9}$, так как числа $1,\alpha,\beta,\gamma$ образуют базис поля $K=\mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Пусть $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\widetilde{\mathbf{CF}_{10}}$. Заметим, что $\sigma_2=\sigma_2\sigma_3^2=\sigma_4\sigma_3$, $\sigma_2(\gamma)=\sigma_2(\frac{\sigma_3(\alpha)-\alpha}{4})=\frac{\sigma_2\sigma_3(\alpha)-\sigma_2(\alpha)}{4}$, $\sigma_3(\gamma)=\sigma_3(\frac{\sigma_3(\alpha)-\alpha}{4})=\frac{\alpha-\sigma_3(\alpha)}{4}$, $\sigma_4(\gamma)=\sigma_4(\frac{\sigma_3(\alpha)-\alpha}{4})=\frac{\sigma_2(\alpha)-\sigma_2\sigma_3(\alpha)}{4}$, $\sigma_2(\beta)+\sigma_2\sigma_3(\beta)=\sigma_2\big(\beta+\sigma_3(\beta)\big)=\sigma_2\big(2-\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}\big)=2-\frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)}{2}$ и $\sigma_4(\beta)=\sigma_2\sigma_3(\beta)$. Тогда

$$\widetilde{G_{10}}\mathbf{l}_1=\begin{pmatrix}1\\\sigma_3(\alpha)\\2-\beta-\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2}\\\frac{\alpha-\sigma_3(\alpha)}{2}\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_{10}}\mathbf{l}_2=\begin{pmatrix}1\\\sigma_2\sigma_3(\alpha)\\2-\sigma_2(\beta)-\frac{\sigma_2(\alpha)+\sigma_2\sigma_3(\alpha)}{2}\\\frac{\sigma_2(\alpha)-\sigma_2\sigma_3(\alpha)}{2}\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_{10}}\mathbf{l}_3=\begin{pmatrix}1\\\alpha\\2-\sigma_3(\beta)-\frac{\sigma_3(\alpha)+\alpha}{2}\\\frac{\sigma_3(\alpha)-\alpha}{2}\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G_{10}}\mathbf{l}_4=\begin{pmatrix}1\\\sigma_2(\alpha)\\2-\sigma_2\sigma_3(\beta)-\frac{\sigma_2\sigma_3(\alpha)+\sigma_2(\alpha)}{2}\\\frac{\sigma_2\sigma_3(\alpha)-\sigma_2(\alpha)}{2}\end{pmatrix},$$

то есть $\widetilde{G_{10}}\big(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4\big) = \big(\mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2\big)$. Следовательно, $\widetilde{G_{10}}$ — собственная симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_{10}}}) = 2$. Обратно, предположим, что $\widetilde{G_{10}}$ — собственная симметрия $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\mathrm{ord}(\sigma_{\widetilde{G_{10}}}) = 2$. Тогда существует такое μ_3, что с точностью до перестановки индексов

$$\widetilde{G_{10}}\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha + 4\gamma \\ 2 - \beta - (\alpha + 2\gamma) \\ -\gamma \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\gamma = \frac{\sigma_3(\alpha) - \alpha}{4}$, $\sigma_3^2(\alpha) = 4\sigma_3(\gamma) + \sigma_3(\alpha) = -4\gamma + \sigma_3(\alpha) = \alpha$, $\sigma_3^2(\gamma) = \sigma_3(-\gamma) = \gamma$, $\beta + \sigma_3(\beta) = 2 - (\alpha + 2\gamma) = 2 - \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2}$, $\sigma_3^2(\beta) = -\sigma_3(\beta) + \sigma_3(2) - \sigma_3(\alpha + 2\gamma) = -\sigma_3(\beta) + 2 - \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2} = \beta$. Существует такое μ_4, что

$$\widetilde{G_{10}}\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) + 4\sigma_2(\gamma) \\ 2 - \sigma_2(\beta) - \big(\sigma_2(\alpha) + 2\sigma_2(\gamma)\big) \\ -\sigma_2(\gamma) \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = \sigma_2(\alpha + 4\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\alpha)$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_2(-\gamma) = \sigma_2\sigma_3(\gamma)$, $\sigma_4(\beta) = 2 - \sigma_2(\beta) - \big(\sigma_2(\alpha) + 2\sigma_2(\gamma)\big) = \sigma_2\big(2 - \beta - (\alpha + 2\gamma)\big) = \sigma_2\big(2 - \beta - \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2}\big) = \sigma_2\sigma_3(\beta)$. Стало быть, $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_{10}$, так как числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$.

□

Мы будем обозначать через $\mathfrak{A}_3'$ множество всех трехмерных алгебраических цепных дробей, для которых поле K из предложения 6 — вполне вещественное циклическое расширение Галуа. Пусть σ — образующая группы Галуа $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Также мы выбирали такую нумерацию прямых l_1, l_2, l_3, l_4, что если через $\big(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4\big)$ обозначить матрицу со столбцами $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4$, то

$$\big(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4\big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \sigma(\alpha) & \sigma^2(\alpha) & \sigma^3(\alpha) \\ \beta & \sigma(\beta) & \sigma^2(\beta) & \sigma^3(\beta) \\ \gamma & \sigma(\gamma) & \sigma^2(\gamma) & \sigma^3(\gamma) \end{pmatrix}.$$

Для каждого $i = 1, 2, \ldots, 7$ определим $\mathbf{CF}'_i$ как класс дробей из $\mathfrak{A}'_3$, удовлетворяющих тройке соотношений $\mathfrak{Q}_i$, где

$\mathfrak{Q}_1$: $\beta = \sigma(\alpha), \gamma = \sigma^2(\alpha), \mathrm{Tr}(\alpha) = 0$;

$\mathfrak{Q}_2$: $\beta = \sigma(\alpha), \gamma = \sigma^2(\alpha), \mathrm{Tr}(\alpha) = 1$;

$\mathfrak{Q}_3$: $\beta = \sigma(\alpha), \gamma = \sigma^2(\alpha), \mathrm{Tr}(\alpha) = 2$;

$\mathfrak{Q}_4$: $\beta = \sigma(\alpha), \gamma = \frac{\alpha+\sigma^2(\alpha)}{2}, \mathrm{Tr}(\alpha) = 0$;

$\mathfrak{Q}_5$: $\beta = \sigma(\alpha), \gamma = \frac{\alpha+\sigma^2(\alpha)}{2}, \mathrm{Tr}(\alpha) = 2$;

$\mathfrak{Q}_6$: $\beta = \sigma(\alpha), \gamma = \frac{\alpha+\sigma^2(\alpha)+1}{2}, \mathrm{Tr}(\alpha) = 0$;

$\mathfrak{Q}_7$: $\beta = \sigma(\alpha), \gamma = \frac{\alpha+\sigma^2(\alpha)+1}{2}, \mathrm{Tr}(\alpha) = 2$.

Покажем, что все дроби из классов $\mathbf{CF}'_i$, палиндромичны для каждого $i = 1, 2, \ldots, 7$. Положим $G'_1, G'_2, \ldots, G'_7$ равными соответственно матрицам

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Лемма 4.4.2. *Пусть* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ *и* $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. *Тогда цепная дробь* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ *принадлежит классу* $\mathbf{CF}'_i$ *в том и только в том случае, если* G'_i *— её собственная циклическая симметрия.*

Доказательство. В силу леммы 4.2.3 оператор $G \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$ является собственной циклической симметрией дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ тогда и только тогда, когда с точностью до перестановки индексов существуют такие действительные числа $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, что $G\big(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4\big) = \big(\mu_2\mathbf{l}_2, \mu_3\mathbf{l}_3, \mu_4\mathbf{l}_4, \mu_1\mathbf{l}_1\big)$ и $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 = 1$.

Пусть $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}'_1$. Тогда

$$G'_1\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma(\alpha) \\ \sigma^2(\alpha) \\ -\alpha - \sigma(\alpha) - \sigma^2(\alpha) \end{pmatrix}, \quad G'_1\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^2(\alpha) \\ \sigma^3(\alpha) \\ -\sigma(\alpha) - \sigma^2(\alpha) - \sigma^3(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$G_1'\mathbf{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^3(\alpha) \\ \alpha \\ -\sigma^2(\alpha) - \sigma^3(\alpha) - \alpha \end{pmatrix}, \quad G_1'\mathbf{l}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \sigma(\alpha) \\ -\sigma^3(\alpha) - \alpha - \sigma(\alpha) \end{pmatrix},$$

то есть $G_1'\big(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4\big) = \big(\mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4, \mathbf{l}_1\big)$. Следовательно, G_1' — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Обратно, предположим, что G_1' — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Тогда существует такое μ_2, что с точностью до перестановки индексов

$$G_1'\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \gamma \\ -\alpha - \beta - \gamma \end{pmatrix} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ \sigma_2(\beta) \\ \sigma_2(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_2 = 1$, $\beta = \sigma_2(\alpha)$, $\gamma = \sigma_2(\beta)$, $-\alpha - \beta - \gamma = \sigma_2(\gamma)$. Существует такое μ_3, что

$$G_1'\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \\ -\alpha - \beta - \gamma \\ \alpha \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\sigma_3(\alpha) = \gamma = \sigma_2(\beta) = \sigma_2^2(\alpha)$, $\sigma_3(\beta) = -\alpha - \beta - \gamma = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2^2(\beta)$, $\sigma_3(\gamma) = \alpha = -\beta - \gamma - (-\alpha - \beta - \gamma) = \sigma_2(-\alpha - \beta - \gamma) = \sigma_2^2(\gamma)$. Существует такое μ_4, что

$$G_1'\mathbf{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha - \beta - \gamma \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = -\alpha - \beta - \gamma = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2^3(\alpha)$, $\sigma_4(\beta) = \alpha = -\beta - \gamma - (-\alpha - \beta - \gamma) = \sigma_2(-\alpha - \beta - \gamma) = \sigma_2^3(\beta)$, $\sigma_4(\gamma) = \beta = \sigma_2(\alpha) = \sigma_2^3(\gamma)$, $\mathrm{Tr}(\alpha) = 0$. Стало быть, $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}_1'$, так как числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Пусть $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}_2'$. Тогда

$$G_2'\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma(\alpha) \\ \sigma^2(\alpha) \\ 1-\alpha-\sigma(\alpha)-\sigma^2(\alpha) \end{pmatrix}, \quad G_2'\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^2(\alpha) \\ \sigma^3(\alpha) \\ 1-\sigma(\alpha)-\sigma^2(\alpha)-\sigma^3(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$G_2'\mathbf{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^3(\alpha) \\ \alpha \\ 1-\sigma^2(\alpha)-\sigma^3(\alpha)-\alpha \end{pmatrix}, \quad G_2'\mathbf{l}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \sigma(\alpha) \\ 1-\sigma^3(\alpha)-\alpha-\sigma(\alpha) \end{pmatrix},$$

то есть $G_2'\big(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2,\mathbf{l}_3,\mathbf{l}_4\big) = \big(\mathbf{l}_2,\mathbf{l}_3,\mathbf{l}_4,\mathbf{l}_1\big)$. Следовательно, G_2' — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$. Обратно, предположим, что G_2' — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$. Тогда существует такое μ_2, что с точностью до перестановки индексов

$$G_2'\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \gamma \\ 1-\alpha-\beta-\gamma \end{pmatrix} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ \sigma_2(\beta) \\ \sigma_2(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_2 = 1$, $\beta = \sigma_2(\alpha)$, $\gamma = \sigma_2(\beta)$, $1-\alpha-\beta-\gamma = \sigma_2(\gamma)$. Существует такое μ_3, что

$$G_2'\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \\ 1-\alpha-\beta-\gamma \\ \alpha \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\sigma_3(\alpha) = \gamma = \sigma_2(\beta) = \sigma_2^2(\alpha)$, $\sigma_3(\beta) = 1-\alpha-\beta-\gamma = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2^2(\beta)$, $\sigma_3(\gamma) = \alpha = 1-\beta-\gamma-(1-\alpha-\beta-\gamma) = \sigma_2(1-\alpha-\beta-\gamma) = \sigma_2^2(\gamma)$. Существует такое μ_4, что

$$G_2'\mathbf{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\alpha-\beta-\gamma \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = 1 - \alpha - \beta - \gamma = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2^3(\alpha)$, $\sigma_4(\beta) = \alpha = 1 - \beta - \gamma - (1 - \alpha - \beta - \gamma) = \sigma_2(1 - \alpha - \beta - \gamma) = \sigma_2^3(\beta)$, $\sigma_4(\gamma) = \beta = \sigma_2(\alpha) = \sigma_2^3(\gamma)$, $\mathrm{Tr}(\alpha) = 1$. Стало быть, $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}'_2$, так как числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Пусть $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}'_3$. Тогда

$$G'_3\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma(\alpha) \\ \sigma^2(\alpha) \\ 2 - \alpha - \sigma(\alpha) - \sigma^2(\alpha) \end{pmatrix}, \quad G'_3\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^2(\alpha) \\ \sigma^3(\alpha) \\ 2 - \sigma(\alpha) - \sigma^2(\alpha) - \sigma^3(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$G'_3\mathbf{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^3(\alpha) \\ \alpha \\ 2 - \sigma^2(\alpha) - \sigma^3(\alpha) - \alpha \end{pmatrix}, \quad G'_3\mathbf{l}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \sigma(\alpha) \\ 2 - \sigma^3(\alpha) - \alpha - \sigma(\alpha) \end{pmatrix},$$

то есть $G'_3\big(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4\big) = \big(\mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4, \mathbf{l}_1\big)$. Следовательно, G'_3 — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Обратно, предположим, что G'_3 — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Тогда существует такое μ_2, что с точностью до перестановки индексов

$$G'_3\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \gamma \\ 2 - \alpha - \beta - \gamma \end{pmatrix} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ \sigma_2(\beta) \\ \sigma_2(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_2 = 1$, $\beta = \sigma_2(\alpha)$, $\gamma = \sigma_2(\beta)$, $2 - \alpha - \beta - \gamma = \sigma_2(\gamma)$. Существует такое μ_3, что

$$G'_3\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \\ 2 - \alpha - \beta - \gamma \\ \alpha \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\sigma_3(\alpha) = \gamma = \sigma_2(\beta) = \sigma_2^2(\alpha)$, $\sigma_3(\beta) = 2 - \alpha - \beta - \gamma = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2^2(\beta)$, $\sigma_3(\gamma) = \alpha = 2 - \beta - \gamma - (2 - \alpha - \beta - \gamma) = \sigma_2(2 - \alpha - \beta - \gamma) = \sigma_2^2(\gamma)$.

Существует такое μ_4, что

$$G_3'\mathbf{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-\alpha-\beta-\gamma \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = 2-\alpha-\beta-\gamma = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2^3(\alpha)$, $\sigma_4(\beta) = \alpha = 2-\beta-\gamma-(2-\alpha-\beta-\gamma) = \sigma_2(2-\alpha-\beta-\gamma) = \sigma_2^3(\beta)$, $\sigma_4(\gamma) = \beta = \sigma_2(\alpha) = \sigma_2^3(\gamma)$, $\mathrm{Tr}(\alpha) = 2$. Стало быть, $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \mathbf{CF}_3'$, так как числа $1,\alpha,\beta,\gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Пусть $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \mathbf{CF}_4'$. Тогда

$$G_4'\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma(\alpha) \\ \sigma^2(\alpha) \\ -\frac{\alpha+\sigma^2(\alpha)}{2} \end{pmatrix}, \quad G_4'\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^2(\alpha) \\ \sigma^3(\alpha) \\ -\frac{\sigma(\alpha)+\sigma^3(\alpha)}{2} \end{pmatrix},$$

$$G_4'\mathbf{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^3(\alpha) \\ \alpha \\ -\frac{\sigma^2(\alpha)+\alpha}{2} \end{pmatrix}, \quad G_4'\mathbf{l}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \sigma(\alpha) \\ -\frac{\sigma^3(\alpha)+\sigma(\alpha)}{2} \end{pmatrix},$$

то есть $G_4'\big(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2,\mathbf{l}_3,\mathbf{l}_4\big) = \big(\mathbf{l}_2,\mathbf{l}_3,\mathbf{l}_4,\mathbf{l}_1\big)$. Следовательно, G_4' — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$. Обратно, предположим, что G_4' — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$. Тогда существует такое μ_2, что с точностью до перестановки индексов

$$G_4'\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ -\alpha+2\gamma \\ -\gamma \end{pmatrix} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ \sigma_2(\beta) \\ \sigma_2(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_2 = 1$, $\beta = \sigma_2(\alpha)$, $-\alpha+2\gamma = \sigma_2(\beta)$, $-\gamma = \sigma_2(\gamma)$. Существует такое μ_3, что

$$G_4'\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha+2\gamma \\ -\beta-2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2} = \gamma, \sigma_3(\alpha) = -\alpha+2\gamma = \sigma_2(\beta) = \sigma_2^2(\alpha)$, $\sigma_3(\beta) = -\beta-2\gamma = \sigma_2(-\alpha+2\gamma) = \sigma_2^2(\beta), \sigma_3(\gamma) = \gamma = \sigma_2(-\gamma) = \sigma_2^2(\gamma)$. Существует такое μ_4, что

$$G_4'\mathbf{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta-2\gamma \\ \alpha \\ -\gamma \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = -\beta-2\gamma = \sigma_2(-\alpha)+\sigma_2(2\gamma) = \sigma_2(-\alpha+2\gamma) = \sigma_2^3(\alpha)$, $\sigma_4(\beta) = \alpha = 2\gamma-\sigma_2(\beta) = \sigma_2(-2\gamma-\beta) = \sigma_2^3(\beta)$, $\sigma_4(\gamma) = -\gamma = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2^3(\gamma)$, $\mathrm{Tr}(\alpha) = 0$. Стало быть, $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \mathbf{CF}_4'$, так как числа $1,\alpha,\beta,\gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Пусть $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \mathbf{CF}_5'$. Тогда

$$G_5'\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma(\alpha) \\ \sigma^2(\alpha) \\ \frac{2-\alpha-\sigma^2(\alpha)}{2} \end{pmatrix}, \quad G_5'\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^2(\alpha) \\ \sigma^3(\alpha) \\ \frac{2-\sigma(\alpha)-\sigma^3(\alpha)}{2} \end{pmatrix},$$

$$G_5'\mathbf{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^3(\alpha) \\ \alpha \\ \frac{2-\sigma^2(\alpha)-\alpha}{2} \end{pmatrix}, \quad G_5'\mathbf{l}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \sigma(\alpha) \\ \frac{2-\sigma^3(\alpha)-\sigma(\alpha)}{2} \end{pmatrix},$$

то есть $G_5'\big(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2,\mathbf{l}_3,\mathbf{l}_4\big) = \big(\mathbf{l}_2,\mathbf{l}_3,\mathbf{l}_4,\mathbf{l}_1\big)$. Следовательно, G_5' — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$. Обратно, предположим, что G_5' — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$. Тогда существует такое μ_2, что с точностью до перестановки индексов

$$G'_5\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ -\alpha+2\gamma \\ 1-\gamma \end{pmatrix} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ \sigma_2(\beta) \\ \sigma_2(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_2 = 1$, $\beta = \sigma_2(\alpha)$, $-\alpha + 2\gamma = \sigma_2(\beta)$, $1 - \gamma = \sigma_2(\gamma)$. Существует такое μ_3, что

$$G'_5\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha+2\gamma \\ 2-\beta-2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)}{2} = \gamma, \sigma_3(\alpha) = -\alpha + 2\gamma = \sigma_2(\beta) = \sigma_2^2(\alpha)$, $\sigma_3(\beta) = 2 - \beta - 2\gamma = \sigma_2(-\alpha + 2\gamma) = \sigma_2^2(\beta)$, $\sigma_3(\gamma) = \gamma = \sigma_2(1 - \gamma) = \sigma_2^2(\gamma)$. Существует такое μ_4, что

$$G'_5\mathbf{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-\beta-2\gamma \\ \alpha \\ 1-\gamma \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = 2 - \beta - 2\gamma = \sigma_2(-\alpha) + \sigma_2(2\gamma) = \sigma_2(-\alpha + 2\gamma) = \sigma_2^3(\alpha)$, $\sigma_4(\beta) = \alpha = 2\gamma - \sigma_2(\beta) = \sigma_2(2 - 2\gamma - \beta) = \sigma_2^3(\beta)$, $\sigma_4(\gamma) = 1 - \gamma = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2^3(\gamma)$, $\mathrm{Tr}(\alpha) = 2$. Стало быть, $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}'_5$, так как числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Пусть $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}'_6$. Тогда

$$G'_6\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma(\alpha) \\ \sigma^2(\alpha) \\ \frac{1-\alpha-\sigma^2(\alpha)}{2} \end{pmatrix}, \quad G'_6\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^2(\alpha) \\ \sigma^3(\alpha) \\ \frac{1-\sigma(\alpha)-\sigma^3(\alpha)}{2} \end{pmatrix},$$

$$G'_6\mathbf{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^3(\alpha) \\ \alpha \\ \frac{1-\sigma^2(\alpha)-\alpha}{2} \end{pmatrix}, \quad G'_6\mathbf{l}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \sigma(\alpha) \\ \frac{1-\sigma^3(\alpha)-\sigma(\alpha)}{2} \end{pmatrix},$$

то есть $G_6'\big(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2,\mathbf{l}_3,\mathbf{l}_4\big) = \big(\mathbf{l}_2,\mathbf{l}_3,\mathbf{l}_4,\mathbf{l}_1\big)$. Следовательно, G_6' — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$. Обратно, предположим, что G_6' — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$. Тогда существует такое μ_2, что с точностью до перестановки индексов

$$G_6'\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ -1-\alpha+2\gamma \\ 1-\gamma \end{pmatrix} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ \sigma_2(\beta) \\ \sigma_2(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_2 = 1$, $\beta = \sigma_2(\alpha)$, $-1-\alpha+2\gamma = \sigma_2(\beta)$, $1-\gamma = \sigma_2(\gamma)$. Существует такое μ_3, что

$$G_6'\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-\alpha+2\gamma \\ 1-\beta-2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2} = \gamma, \sigma_3(\alpha) = -1-\alpha+2\gamma = \sigma_2(\beta) = \sigma_2^2(\alpha)$, $\sigma_3(\beta) = 1-\beta-2\gamma = -1-\beta+(2-2\gamma) = \sigma_2(-1-\alpha+2\gamma) = \sigma_2^2(\beta)$, $\sigma_3(\gamma) = \gamma = \sigma_2(1-\gamma) = \sigma_2^3(\gamma)$. Существует такое μ_4, что

$$G_6'\mathbf{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\beta-2\gamma \\ \alpha \\ 1-\gamma \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = 1-\beta-2\gamma = -1-\beta+(2-2\gamma) = \sigma_2(-1-\alpha+2\gamma) = \sigma_2^3(\alpha)$, $\sigma_4(\beta) = \alpha = 1-(-1-\alpha+2\gamma)-(2-2\gamma) = \sigma_2(1-\beta-2\gamma) = \sigma_2^3(\beta)$, $\sigma_4(\gamma) = 1-\gamma = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2^3(\gamma)$, $\mathrm{Tr}(\alpha) = 0$. Стало быть, $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \mathbf{CF}_6'$, так как числа $1,\alpha,\beta,\gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Пусть $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \mathbf{CF}_7'$. Тогда

$$G_7'\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma(\alpha) \\ \sigma^2(\alpha) \\ \frac{3-\alpha-\sigma^2(\alpha)}{2} \end{pmatrix}, \quad G_7'\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^2(\alpha) \\ \sigma^3(\alpha) \\ \frac{3-\sigma(\alpha)-\sigma^3(\alpha)}{2} \end{pmatrix},$$

$$G'_7\mathbf{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^3(\alpha) \\ \alpha \\ \frac{3-\sigma^2(\alpha)-\alpha}{2} \end{pmatrix}, \quad G'_7\mathbf{l}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \sigma(\alpha) \\ \frac{3-\sigma^3(\alpha)-\sigma(\alpha)}{2} \end{pmatrix},$$

то есть $G'_7\big(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4\big) = \big(\mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4, \mathbf{l}_1\big)$. Следовательно, G'_7 — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Обратно, предположим, что G'_7 — собственная циклическая симметрия цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Тогда существует такое μ_2, что с точностью до перестановки индексов

$$G'_7\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ -1-\alpha+2\gamma \\ 2-\gamma \end{pmatrix} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ \sigma_2(\beta) \\ \sigma_2(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_2 = 1$, $\beta = \sigma_2(\alpha)$, $-1-\alpha+2\gamma = \sigma_2(\beta)$, $2-\gamma = \sigma_2(\gamma)$. Существует такое μ_3, что

$$G'_7\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-\alpha+2\gamma \\ 3-\beta-2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\frac{\alpha+\sigma_3(\alpha)+1}{2} = \gamma, \sigma_3(\alpha) = -1-\alpha+2\gamma = \sigma_2(\beta) = \sigma_2^2(\alpha)$, $\sigma_3(\beta) = 3-\beta-2\gamma = -1-\beta+(4-2\gamma) = \sigma_2(-1-\alpha+2\gamma) = \sigma_2^2(\beta)$, $\sigma_3(\gamma) = \gamma = \sigma_2(2-\gamma) = \sigma_2^3(\gamma)$. Существует такое μ_4, что

$$G'_7\mathbf{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3-\beta-2\gamma \\ \alpha \\ 2-\gamma \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = 3-\beta-2\gamma = -1-\beta+(4-2\gamma) = \sigma_2(-1-\alpha+2\gamma) = \sigma_2^3(\alpha)$, $\sigma_4(\beta) = \alpha = 3-(-\alpha+2\gamma-1)-(4-2\gamma) = \sigma_2(3-\beta-2\gamma) = \sigma_2^3(\beta)$, $\sigma_4(\gamma) = 2-\gamma = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2^3(\gamma)$, $\mathrm{Tr}(\alpha) = 2$. Стало быть, $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}'_7$, так как числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$. $\square$

4.5 Доказательство теорем 5 и 6

Обозначим для каждого $i = 1, \ldots, 10$ через $\overline{\widetilde{\mathbf{CF}}_i}$ образ $\widetilde{\mathbf{CF}}_i$ при действии группы $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$:

$$\overline{\widetilde{\mathbf{CF}}_i} = \left\{ \mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3 \,\middle|\, \exists X \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z}) : X\big(\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)\big) \in \mathbf{CF}_i \right\}.$$

Также обозначим для каждого $i = 1, \ldots, 7$ через $\overline{\mathbf{CF}'_i}$ образ $\mathbf{CF}'_i$ при действии группы $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$:

$$\overline{\mathbf{CF}'_i} = \left\{ \mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}'_3 \,\middle|\, \exists X \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z}) : X\big(\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)\big) \in \mathbf{CF}_i \right\}.$$

Лемма 4.5.1. *Для дроби* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ *выполняется условие* (i) *теоремы 5 тогда и только тогда, когда* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ *принадлежит классу* $\overline{\widetilde{\mathbf{CF}}_i}$, *где* $i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$.

Лемма 4.5.2. *Для дроби* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ *выполняется условие* (i) *теоремы 6 тогда и только тогда, когда* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ *принадлежит классу* $\overline{\mathbf{CF}'_i}$, *где* $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Доказательство лемм 4.5.1 и 4.5.2. Для любого $X \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$ гиперболичность оператора $A \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$ равносильна гиперболичности оператора XAX^{-1}. При этом собственные подпространства гиперболического оператора однозначно восстанавливаются по любому его собственному вектору (см. следствие 2.3.1). Остаётся воспользоваться определением эквивалентности (см. определение 10).

□

Теорему 5 при помощи леммы 4.5.1 можно переформулировать следующим образом: *дробь* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ *имеет собственную симметрию* G *тогда и только тогда, когда она принадлежит одному из классов* $\overline{\widetilde{\mathbf{CF}}_i}$, *где* $i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$.

Аналогично, теорему 6 при помощи леммы 4.5.2 можно переформулировать следующим образом: *дробь* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ *имеет собственную симметрию* G *тогда и только тогда, когда она принадлежит одному из классов* $\overline{\mathbf{CF}'_i}$, *где* $i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$.

Доказательство теоремы 5. Если $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ принадлежит какому-то $\overline{\widetilde{\mathbf{CF}}_i}$, то по лемме 4.4.1 она имеет собственную симметрию G, ибо действие оператора из $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$ сохраняет свойство существования у алгебраической цепной дроби собственной симметрии.

Обратно, пусть дробь $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ имеет собственную симметрию G. Положим $F = G'$ и рассмотрим точки $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\mathbf{z}_4$ из леммы 4.3.1. Обозначим также через $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ стандартный базис $\mathbb{R}^4$. Для точек $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\mathbf{z}_4$ выполняется хотя бы одно из утверждений (1) - (11) леммы 4.3.1.

Пусть выполняется утверждение (1) леммы 4.3.1. Рассмотрим такой оператор $X_1 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_1\big(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \frac{1}{4}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4)\big) = \big(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1\big).$$

Тогда $X_1(\mathbf{z}_4) = X_1(4 \cdot \frac{1}{4}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4) - \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ и $X_1 G X_1^{-1} = \widetilde{G}_1$, так как по лемме 4.3.1

$$X_1 G X_1^{-1}\big(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\big) =$$

$$\big(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4\big).$$

Стало быть, $X_1\big(\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)\big) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_1$, то есть $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \overline{\widetilde{\mathbf{CF}}_1}$.

Пусть выполняется утверждение (2) леммы 4.3.1. Рассмотрим такой оператор $X_2 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_2\big(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\big) = \big(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\big).$$

Тогда $X_2 G X_2^{-1} = \widetilde{G}_2$, так как по лемме 4.3.1

$$X_2 G X_2^{-1}\big(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\big) =$$

$$\big(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4\big).$$

Стало быть, $X_2\big(\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)\big) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_2$, то есть $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \overline{\widetilde{\mathbf{CF}}_2}$.

Пусть выполняется утверждение (3) леммы 4.3.1. Рассмотрим такой оператор $X_3 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_3\big(\mathbf{z}_1, \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2), \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_3), \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_4)\big) = \big(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\big).$$

Тогда $X_3(\mathbf{z}_2) = X_3(2\cdot\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2)-\mathbf{z}_1) = \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_4$, $X_3(\mathbf{z}_3) = X_3(2\cdot\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_3)-\mathbf{z}_1) = \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_3$, $X_3(\mathbf{z}_4) = X_3(2\cdot\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_4)-\mathbf{z}_1) = \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2$ и $X_3GX_3^{-1} = \widetilde{G}_3$, так как по лемме 4.3.1

$$X_3GX_3^{-1}\big(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2\big) =$$

$$\big(\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_4\big).$$

Стало быть, $X_3\big(\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\big) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_3$, то есть $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \overline{\widetilde{\mathbf{CF}}_3}$.

Пусть выполняется утверждение (4) леммы 4.3.1. Рассмотрим такой оператор $X_4 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_4\big(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_3), \frac{1}{4}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2+\mathbf{z}_3+\mathbf{z}_4)\big) =$$

$$= \big(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1\big).$$

Тогда $X_4(\mathbf{z}_3) = X_4(2\cdot\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_3)-\mathbf{z}_1) = \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4$, $X_4(\mathbf{z}_4) = X_4(4\cdot\frac{1}{4}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2+\mathbf{z}_3+\mathbf{z}_4)-\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2-\mathbf{z}_3) = \mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_4$ и $X_4GX_4^{-1} = \widetilde{G}_4$, так как по лемме 4.3.1

$$X_4GX_4^{-1}\big(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_4\big) =$$

$$\big(\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1-\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_4\big).$$

Стало быть, $X_4\big(\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\big) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_4$, то есть $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \overline{\widetilde{\mathbf{CF}}_4}$.

Пусть выполняется утверждение (5) леммы 4.3.1. Рассмотрим такой оператор $X_5 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_5\big(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_3), \frac{1}{2}(\mathbf{z}_2+\mathbf{z}_4)\big) = \big(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\big).$$

Тогда $X_5(\mathbf{z}_3) = X_5(2\cdot\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_3)-\mathbf{z}_1) = \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_3$, $X_5(\mathbf{z}_4) = X_5(2\cdot\frac{1}{2}(\mathbf{z}_2+\mathbf{z}_4)-\mathbf{z}_2) = \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_4$ и $X_5GX_5^{-1} = \widetilde{G}_5$, так как по лемме 4.3.1

$$X_5GX_5^{-1}\big(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_4\big) =$$

$$\big(\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_4\big).$$

Стало быть, $X_5\big(\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\big) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_5$, то есть $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \overline{\widetilde{\mathbf{CF}}_5}$.

Пусть выполняется утверждение (6) леммы 4.3.1. Рассмотрим такой оператор $X_6 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_6\big(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_2)\big) =$$

$$\big(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4\big).$$

Тогда $X_6(\mathbf{z}_4) = X_6(2 \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_2) - \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ и $X_6 G X_6^{-1} = \widetilde{G}_6$, так как по лемме 4.3.1

$$X_6 G X_6^{-1}\big(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\big) =$$

$$\big(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1\big).$$

Стало быть, $X_6\big(\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)\big) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_6$, то есть $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \overline{\widetilde{\mathbf{CF}}}_6$.

Пусть выполняется утверждение (7) леммы 4.3.1. Рассмотрим такой оператор $X_7 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_7\big(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2) + \frac{1}{4}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_2)\big) =$$

$$\big(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4\big).$$

Тогда $X_7(\mathbf{z}_4) = X_7(4(\frac{3\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4}{4}) - 3\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$ и $X_7 G X_7^{-1} = \widetilde{G}_7$, так как по лемме 4.3.1

$$X_7 G X_7^{-1}\big(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\big) =$$

$$\big(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3\big).$$

Стало быть, $X_7\big(\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)\big) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_7$, то есть $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \overline{\widetilde{\mathbf{CF}}}_7$.

Пусть выполняется утверждение (8) леммы 4.3.1. Рассмотрим такой оператор $X_8 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_8\big(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \frac{1}{2}(\mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_4)\big) = \big(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4\big).$$

Тогда $X_8(\mathbf{z}_4) = X_8(2 \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_4) - \mathbf{z}_2 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4$ и $X_8 G X_8^{-1} = \widetilde{G}_8$, так как по лемме 4.3.1

$$X_8 G X_8^{-1}\big(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4\big) =$$

$$\big(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_4\big).$$

Стало быть, $X_8\big(\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\big) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_8$, то есть $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \overline{\widetilde{\mathbf{CF}}}_8$.

Пусть выполняется утверждение (9) леммы 4.3.1. Рассмотрим такой оператор $X_9 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_9\Big(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1{+}\mathbf{z}_3), \frac{1}{4}\mathbf{z}_1{+}\frac{1}{2}\mathbf{z}_2{-}\frac{1}{4}\mathbf{z}_3{+}\frac{1}{2}\mathbf{z}_4\Big) = \big(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1{+}\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1{+}\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1{+}\mathbf{e}_2{+}\mathbf{e}_4\big).$$

Тогда $X_9(\mathbf{z}_3) = X_9(2\cdot\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_3)-\mathbf{z}_1) = \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_3$, $X_9(\mathbf{z}_4) = X_9(2\cdot(\frac{1}{4}\mathbf{z}_1+\frac{1}{2}\mathbf{z}_2-\frac{1}{4}\mathbf{z}_3+\frac{1}{2}\mathbf{z}_4)-\frac{1}{2}\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2+\frac{1}{2}\mathbf{z}_3 = \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4$ и $X_9GX_9^{-1} = \widetilde{G}_9$, так как по лемме 4.3.1

$$X_9GX_9^{-1}\big(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4\big) =$$
$$\big(\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_4\big).$$

Стало быть, $X_9\big(\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\big) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_9$, то есть $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \overline{\widetilde{\mathbf{CF}}}_9$.

Пусть выполняется утверждение (10) леммы 4.3.1. Рассмотрим такой оператор $X_{10} \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_{10}\Big(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_3), \frac{1}{2}\mathbf{z}_1+\frac{1}{4}\mathbf{z}_2+\frac{1}{4}\mathbf{z}_4\Big) = \big(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\big).$$

Тогда $X_{10}(\mathbf{z}_3) = X_{10}(2\cdot\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_3)-\mathbf{z}_1 = \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_3$, $X_{10}(\mathbf{z}_4) = X_{10}(4\cdot(\frac{1}{2}\mathbf{z}_1+\frac{1}{4}\mathbf{z}_2+\frac{1}{4}\mathbf{z}_4)-2\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2) = \mathbf{e}_1+4\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_4$ и $X_{10}GX_{10}^{-1} = \widetilde{G}_{10}$, так как по лемме 4.3.1

$$X_{10}GX_{10}^{-1}\big(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1+4\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_4\big) =$$
$$\big(\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1+4\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_4\big).$$

Стало быть, $X_{10}\big(\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\big) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_{10}$, то есть $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \overline{\widetilde{\mathbf{CF}}}_{10}$.

Пусть выполняется утверждение (11) леммы 4.3.1. Рассмотрим такой оператор $X_{11} \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_{11}\Big(\mathbf{z}_1, \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1{+}\mathbf{z}_2), \mathbf{z}_3, \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1{-}\mathbf{z}_2{+}\mathbf{z}_3{+}\mathbf{z}_4)\Big) = \big(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1{+}\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1{+}\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1{+}\mathbf{e}_2{-}\mathbf{e}_4\big).$$

Тогда $X_{11}(\mathbf{z}_2) = X_{11}(2\cdot\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2)-\mathbf{z}_1) = \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_4$, $X_{11}(\mathbf{z}_4) = X_{11}(2\cdot\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2+\mathbf{z}_3+\mathbf{z}_4)-\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2-\mathbf{z}_3) = \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3$ и $X_{11}GX_{11}^{-1} = \widetilde{G}_2$, так как по лемме 4.3.1

$$X_{11}GX_{11}^{-1}\big(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3\big) =$$

$$\big(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_4\big).$$

Стало быть, $X_{11}\big(\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\big) \in \widetilde{\mathbf{CF}}_2$, то есть $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \overline{\widetilde{\mathbf{CF}}_2}$.

□

Доказательство теоремы 6. Если $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ принадлежит какому-то $\overline{\mathbf{CF}}_i$, то по лемме 4.4.2 она имеет собственную циклическую симметрию G, ибо действие оператора из $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$ сохраняет свойство существования у алгебраической цепной дроби собственной циклической симметрии.

Обратно, пусть дробь $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \mathfrak{A}_3$ имеет собственную циклическую симметрию G с неподвижной точкой на некотором парусе $\partial(\mathcal{K}(C)) \in \mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$. Рассмотрим точки $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\mathbf{z}_4$ из леммы 4.3.2. Обозначим также через $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ стандартный базис $\mathbb{R}^4$. Для точек $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\mathbf{z}_4$ выполняется хотя бы одно из утверждений (1) - (7) леммы 4.3.2.

Пусть выполняется утверждение (1) леммы 4.3.2. Рассмотрим такой оператор $X_1 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_1\Big(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \frac{1}{4}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2+\mathbf{z}_3+\mathbf{z}_4)\Big) = \big(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1\big).$$

Тогда $X_1(\mathbf{z}_4) = X_1(4\cdot\frac{1}{4}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2+\mathbf{z}_3+\mathbf{z}_4)-\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2-\mathbf{z}_3) = \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3$ и $X_1GX_1^{-1} = G_1'$, так как по лемме 4.3.2

$$X_1GX_1^{-1}\big(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3\big) =$$

$$\big(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2\big).$$

Стало быть, $X_1\big(\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\big) \in \mathbf{CF}_1'$, то есть $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4) \in \overline{\mathbf{CF}_1'}$.

Пусть выполняется утверждение (2) леммы 4.3.2. Рассмотрим такой оператор $X_2 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_2\big(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\big) = \big(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\big).$$

Тогда $X_2GX_2^{-1} = G_2'$, так как по лемме 4.3.2

$$X_2GX_2^{-1}\big(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\big) =$$

$$\big(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1\big).$$

Стало быть, $X_2\big(\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\big)\in\mathbf{CF}'_2$, то есть $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\overline{\mathbf{CF}'_2}$.

Пусть выполняется утверждение (3) леммы 4.3.2. Рассмотрим такой оператор $X_3\in\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_3\big(\mathbf{z}_1,\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2),\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_3),\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_4)\big)=\big(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\big).$$

Тогда $X_3(\mathbf{z}_2)=X_3(2\cdot\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2)-\mathbf{z}_1)=\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_4$, $X_3(\mathbf{z}_3)=X_3(2\cdot\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_3)-\mathbf{z}_1)=\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_3$, $X_3(\mathbf{z}_4)=X_3(2\cdot\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_4)-\mathbf{z}_1)=\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2$ и $X_3GX_3^{-1}=G'_3$, так как по лемме 4.3.2

$$X_3GX_3^{-1}\big(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2\big)=$$

$$\big(\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1\big).$$

Стало быть, $X_3\big(\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\big)\in\mathbf{CF}'_3$, то есть $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\overline{\mathbf{CF}'_3}$.

Пусть выполняется утверждение (4) леммы 4.3.2. Рассмотрим такой оператор $X_4\in\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_4\big(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_3),\frac{1}{4}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2+\mathbf{z}_3+\mathbf{z}_4)\big)=$$

$$\big(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_1\big).$$

Тогда $X_4(\mathbf{z}_3)=X_4(2\cdot\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_3)-\mathbf{z}_1)=\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4$, $X_4(\mathbf{z}_4)=X_4(4\cdot\frac{1}{4}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2+\mathbf{z}_3+\mathbf{z}_4)-\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2-\mathbf{z}_3)=\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_4$ и $X_4GX_4^{-1}=G'_4$, так как по лемме 4.3.2

$$X_4GX_4^{-1}\big(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_4\big)=$$

$$\big(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4\big).$$

Стало быть, $X_4\big(\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\big)\in\mathbf{CF}'_4$, то есть $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\overline{\mathbf{CF}'_4}$.

Пусть выполняется утверждение (5) леммы 4.3.2. Рассмотрим такой оператор $X_5\in\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_5\big(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_3),\frac{1}{2}(\mathbf{z}_2+\mathbf{z}_4)\big)=\big(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\big).$$

Тогда $X_5(\mathbf{z}_3) = X_5(2 \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_3) - \mathbf{z}_1) = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3$, $X_5(\mathbf{z}_4) = X_5(2 \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_4) - \mathbf{z}_2) = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4$ и $X_5 G X_5^{-1} = G'_5$, так как по лемме 4.3.2

$$X_5 G X_5^{-1}\big(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4\big) =$$

$$\big(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1\big).$$

Стало быть, $X_5\big(\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)\big) \in \mathbf{CF}'_5$, то есть $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \overline{\mathbf{CF}'_5}$.

Пусть выполняется утверждение (6) леммы 4.3.2. Рассмотрим такой оператор $X_6 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_6\big(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_2)\big) =$$

$$\big(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4\big).$$

Тогда $X_6(\mathbf{z}_4) = X_6(2 \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_2) - \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ и $X_6 G X_6^{-1} = G'_6$, так как по лемме 4.3.2

$$X_6 G X_6^{-1}\big(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\big) =$$

$$\big(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4\big).$$

Стало быть, $X_6\big(\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)\big) \in \mathbf{CF}'_6$, то есть $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \overline{\mathbf{CF}'_6}$.

Пусть выполняется утверждение (7) леммы 4.3.2. Рассмотрим такой оператор $X_7 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$X_7\big(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2) + \frac{1}{4}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_2)\big) =$$

$$\big(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4\big).$$

Тогда $X_7(\mathbf{z}_4) = X_7(4(\frac{3\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4}{4}) - 3\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$ и $X_7 G X_7^{-1} = G'_7$, так как по лемме 4.3.2

$$X_7 G X_7^{-1}\big(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\big) =$$

$$\big(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_4\big).$$

Стало быть, $X_7\big(\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)\big) \in \mathbf{CF}'_7$, то есть $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \overline{\mathbf{CF}'_7}$.

$\square$

4.6 Пример палиндромичной цепной дроби, не обладающей собственными циклическими симметриями

Доказательство предложения 7. Рассмотрим вещественные числа $\theta_1 = \sqrt{4+\sqrt{2}}$ и $\theta_2 = \sqrt{4-\sqrt{2}}$. Заметим, что $\theta_1^2 = 4+\sqrt{2}$, а значит, θ_1 является корнем уравнения $x^4 - 8x^2 + 14 = 0$. В силу критерия Эйзенштейна для $p = 2$ многочлен $f(x) = x^4 - 8x^2 + 14$ неприводим над $\mathbb{Q}$. Таким образом, $f(x)$ — минимальный многочлен для θ_1 и

$$f(x) = (x-\theta_1)(x-\theta_2)(x+\theta_1)(x+\theta_2).$$

Рассмотрим такие вложения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ вполне вещественного поля $\mathbb{Q}(\theta_1)$, что $\sigma_1(\theta_1) = \theta_1$, $\sigma_2(\theta_1) = \theta_2$, $\sigma_3(\theta_1) = -\theta_1$, $\sigma_4(\theta_1) = -\theta_2$. Пусть $K_1 = \mathbb{Q}(\theta_1)$, $K_2 = \mathbb{Q}(\theta_2)$, $K_3 = \mathbb{Q}(-\theta_1)$, $K_4 = \mathbb{Q}(-\theta_2)$ — сопряженные поля над $\mathbb{Q}$. Ясно, что $K_1 = K_3$, $K_2 = K_4$ и $\sigma_3^2 = \mathrm{id}$, $\sigma_4 = \sigma_2\sigma_3$.

Предположим, что $K_1 = K_2$. Поскольку $(x-\theta_1)(x+\theta_1) = x^2 - 4 - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$, то K_1 — нормальное расширение степени 2 поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. При этом $(x-\theta_2)(x+\theta_2) = x^2 - 4 + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$. Пусть $\varphi \in \mathrm{Gal}\big(K_1/\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)$. Тогда $\varphi(\theta_1\theta_2) = (-\theta_1)(-\theta_2) = \theta_1\theta_2$, а значит, $\theta_1\theta_2 = \sqrt{14} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, чего не может быть. Таким образом, $K_1 \neq K_2$.

Поскольку $\theta = \theta_1$ — примитивный элемент расширения K_1, то набор чисел $1, \theta, \theta^2, \theta^3$ является базисом K_1. Положим $\omega = \theta + \theta^2$ и $\psi = -\theta^2 + \frac{1}{2}\theta^3$. Тогда $\omega'' = \sigma_3(\omega) = -\theta + \theta^2$, $\psi'' = \sigma_3(\psi) = -\theta^2 - \frac{1}{2}\theta^3$. Заметим, что $\psi + \psi'' = -2\theta^2 = -(\omega + \omega'')$ и набор чисел 1, ω, ψ, ω'' является базисом K_1, поскольку

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \\ \theta^2 \\ \theta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \psi \\ \omega'' \end{pmatrix}.$$

Теперь, полагая, что $\alpha = \omega$, $\beta = \psi$, $\gamma = \omega''$, с помощью предложения 6 можно построить алгебраическую цепную дробь $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathfrak{A}_3}$, где подпространство l_1 порождено вектором $(1, \alpha, \beta, \gamma)$. Поскольку выполняется утверждение (1) теоремы 5, то $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ — палиндромичная цепная дробь. При этом, поскольку $K_1 \neq K_2$, то $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ не обладает циклическими симметриями в силу теоремы 6. $\square$

Заключение

В настоящей диссертации рассматриваются многомерные цепные дроби и их симметрии. В работе устанавливается связь между обыкновенными и одномерными цепными дробями. С помощью этой связи геометрически доказывается известный критерий симметричности периода обыкновенной цепной дроби.

Помимо анализа строения группы симметрий $(n-1)$-мерной алгебраической цепной дроби $\mathrm{CF}(A) = \mathrm{CF}(l_1, l_2, \ldots, l_n)$, сохраняющих направления $l_1, l_2, \ldots, l_n$, в диссертации показывается связь векторов, задающих эти направления с базисами вполне вещественных расширений поля $\mathbb{Q}$ степени n. Далее доказывается, что в любой размерности существуют цепные дроби, которые обладают палиндромическими симметриями, то есть симметриями, нетождественно переставляющими направления $l_1, l_2, \ldots, l_n$.

Помимо этого, в диссертации доказывается критерий палиндромичности двумерной цепной дроби. Также доказываются критерии существования собственных и собственных циклических симметрий у трехмерных цепных дробей. В завершении строится пример палиндромичной цепной дроби $\mathrm{CF}(A) = \mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$, не обладающей собственными симметриями, которые переставляют направления l_1, l_2, l_3, l_4 по циклу.

В завершение перечислим некоторые возможные перспективы дальнейших исследований:

1. Задача построения критерия палиндромичности $(n-1)$-мерной цепной дроби в случае $n \geq 4$.

2. Задача построения критериев наличия у $(n-1)$-мерной цепной дроби собственных и собственных циклических симметрий в случае

$n \geq 5$.

3. Построение примера или доказательства отсутствия алгебраической цепной дроби, которая соответствует циклическому расширению Галуа и не обладает собственной циклической симметрией.

Литература

[1] L. Euler *De fractionibus continuis dissertatio.* Comm. Acad. Sci. Petropol., **9** (1744), 98–137.

[2] J. L. Lagrange *Additions au mémoire sur la résolution des équations numériques.* Mém. Acad. royale sc. et belles-lettres, Berlin, **24** (1770), 581–652.

[3] E. Galois *Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques.* Annales de Mathématiques, **19** (1828), 294–301.

[4] A. M. Legendre *Théorie des nombres.* (3 éd.), Paris (1830).

[5] J.-A. Serret *Sur le développement en fraction continue de la racine carrée d'un nombre entier.* J. Math. Pures Appl., **12** (1847), 518–520.

[6] O. Perron *Die Lehre von den Kettenbrüchen. Band I.* (3 Aufl.), Teubner (1954).

[7] M. Kraitchik *Théorie des nombres. Tome II.* Paris (1926).

[8] В. И. Арнольд *Цепные дроби* МЦНМНО (2009)

[9] F. Aikardi *Symmetries of quadratic form classes and of quadratic surd continued fractions. Part II: Classification of the periods' palindromes.* Bull. Braz. Math. Soc., New Series, **41**:1 (2010), 83–124.

[10] Е. И. Коркина *Двумерные цепные дроби. Самые простые примеры.* Тр. МИАН., **209** (1995), 124–144.

[11] O. N. Karpenkov *Geometry of Continued Fractions.* Algorithms and Computation in Mathematics, **26**, Springer-Verlag (2013).

[12] F. Klein *Uber eine geometrische Auffassung der gewohnlichen Kettenbruchentwichlung.* Nachr. Ges. Wiss., Gottingen, **3** (1895), 357–359.

[13] O. N. German *Klein polyhedra and lattices with positive norm minima.* Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, **19** (2007), 157–190.

[14] J.-O. Moussafir *Convex hulls of integral points.* Зап. научн. сем. ПОМИ, **266** (2000), 188–217.

[15] О. Н. Герман *Паруса и норменные минимумы решеток.* Матем. сб., **196**:3 (2005), 31–60.

[16] О. Н. Герман, Е. Л. Лакштанов *О многомерном обобщении теоремы Лагранжа для цепных дробей.* Известия РАН. Сер. матем., **72**:1 (2008), 51–66.

[17] З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич И.Р *Теория чисел.* Наука, (1964).

[18] M. J. Bertin, A. Decomps-Guilloux, M. Grandet-Hugot, M. Pathiaux-Delefosse, J. P. Schreiber *Pisot and Salem numbers.* Birkhäuser Verlag, Basel (1992).

[19] D. H. Lehmer *A note on trigonometric algebraic numbers.* American Mathematical Monthly, **40**:3 (1933), 165–166.

[20] А. В. Устинов *Трёхмерные цепные дроби и суммы Клостермана.* УМН, **70**:3 (2015), 107–180.

[21] O. Karpenkov, A. Ustinov *Geometry and combinatoric of Minkowski–Voronoi 3-dimensional continued fractions.* Journal of Number Theory, **176** (2017), 375–419.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ

[22] O. N. German, I. A. Tlyustangelov *Palindromes and periodic continued fractions.* Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory **6**:2–3 (2016), 354–373. И.А. Тлюстангеловым доказана теорема 1.

Журнал индексируется РИНЦ, Scopus. IF SJR: 0.276.

[23] О. Н. Герман, И. А. Тлюстангелов *Симметрии двумерной цепной дроби.* Изв. РАН. Сер. матем., **85**:4 (2021), 53–68. И.А. Тлюстангеловым доказаны предложение 4 и теорема 1.

Журнал индексируется РИНЦ, Scopus, WoS. IF SJR: 0.726, IF WoS: 0.978.

[24] И. А. Тлюстангелов *Собственные циклические симметрии многомерных цепных дробей.* Матем. сб., **213**:9 (2022), 138–166.

Журнал индексируется РИНЦ, Scopus, WoS. IF SJR: 0.843, IF WoS: 1.274.

[25] И. А. Тлюстангелов *Собственные симметрии трехмерных цепных дробей.* Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр., **506**:1 (2022), 73–82.

Журнал индексируется РИНЦ, Scopus, WoS. IF SJR: 0.385, IF WoS: 0.486.