Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Жилина Светлана Александровна

Комбинаторные свойства бинарных отношений на вещественных алгебрах Кэли-Диксона

1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел
и дискретная математика (01.01.06 Математическая логика, алгебра и теория чисел)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2022

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель: **Гутерман Александр Эмилевич,** доктор физико-математических наук, профессор.

Официальные оппоненты: **Колесников Павел Сергеевич,** доктор физико-математических наук, профессор РАН, Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН, Лаборатория алгебры, ведущий научный сотрудник.

Туганбаев Аскар Аканович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МЭИ», Кафедра высшей математики, профессор.

Адрианов Николай Михайлович, кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Кафедра теоретической информатики, старший научный сотрудник.

Защита диссертации состоится 18 ноября 2022 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4(МГУ.01.17) ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1., ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: *sbgashkov@gmail.com*

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций Фундаментальной библиотеки Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (Москва, Ломоносовский проспект, д. 27) и на сайте ИСА «ИСТИНА»:

`https://istina.msu.ru/dissertations/496390040/`

Автореферат разослан 18 октября 2022 года.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук, **С. Б. Гашков**
профессор

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Важным подходом к визуализации различных алгебраических отношений, таких как ортогональность, коммутативность и т.д., является построение графа рассматриваемого отношения. Вершинам графа $\Gamma_R(S)$ бинарного алгебраического отношения R на заданной алгебраической структуре S соответствуют элементы S или их классы эквивалентности, причём существует ребро из x в y, если и только если xRy. Если отношение R симметрично, то $\Gamma_R(S)$ оказывается неориентированным, в противном случае — ориентированным.

Изучение графов, порождённых отношениями на алгебраических системах, берёт своё начало в теории групп, см. работу Бабая и Сересса[1]. На кольцах и алгебрах эти исследования восходят к работе Бека[2] (1988), где был впервые определён граф делителей нуля коммутативного кольца. В определении Бека множество вершин графа совпадало со множеством всех элементов кольца. Затем Андерсон и Ливингстон[3] дали новое определение, исключающее из графа 0 и элементы, не являющиеся делителями нуля. В определении Мюлэя[4] вершинами графа стали классы эквивалентности делителей нуля. Ориентированные и неориентированные графы делителей нуля некоммутативных колец были впервые введены Редмондом[5]. Акбари, Гандехари, Хадиан и Мохаммадиан[6] дали определение графа коммутативности некоммутативного кольца, а Бахадлы, Гутерман и Маркова в работе[7] положили начало изучению графов ортогональности.

Особый интерес представляют графы отношений матричных колец. Так, Божич и Петрович[8] изучили диаметры графов делителей нуля матричных колец над коммутативными кольцами и их связь с диаметрами графов делителей нуля исходных колец. В работах[9,10,11] разными авторами исследуются связность и диаметры графов коммутативности матричных колец, а также

[1] L. Babai, Á. Seress. On the diameter of permutation groups, *European J. Combin.*, **13(4)**, 231–243 (1992).

[2] I. Beck. Coloring of commutative rings, *J. Algebra*, **116(1)**, 208–226 (1988).

[3] D. F. Anderson, P. S. Livingston. The zero-divisor graph of a commutative ring, *J. Algebra*, **217(2)**, 434–447 (1999).

[4] S. B. Mulay. Cycles and symmetries of zero-divisors, *Comm. Alg.*, **30**, 3533–3558 (2002).

[5] S. P. Redmond. The zero-divisor graph of a noncommutative ring, *Int. J. Commut. Rings*, **1(4)**, 203–211 (2002).

[6] S. Akbari, M. Ghandehari, M. Hadian, A. Mohammadian. On commuting graphs of semisimple rings, *Linear Algebra Appl.*, **390**, 345–355 (2004).

[7] Б. Р. Бахадлы, А. Э. Гутерман, О. В. Маркова. Графы, определённые ортогональностью, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **428**, 49–80 (2014); Переведено в *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **207(5)**, 698–717 (2015).

[8] I. Božić, Z. Petrović. Zero-divisor graphs of matrices over commutative rings, *Comm. Algebra*, **37(4)**, 1186–1192 (2009).

[9] S. Akbari, H. Bidkhori, A. Mohammadian. Commuting graphs of matrix algebras, *Comm. Algebra*, **36(11)**, 4020–4031 (2008).

[10] S. Akbari, A. Mohammadian, H. Radjavi, P. Raja. On the diameters of commuting graphs, *Linear Algebra Appl.*, **418(1)**, 161–176 (2006).

[11] G. Dolinar, A. E. Guterman, B. Kuzma, P. Oblak. Commuting graphs and extremal centralizers, *Ars Math. Contemp.*, **7(2)**, 453–459 (2014).

их зависимость от исходного кольца. В работах[7,12,13] рассматриваются графы ортогональности матричных колец над полями и телами.

Изучение графов отношений является активно развивающейся областью современной математики. Они играют важную роль при изучении различных понятий, связанных с порождающими их отношениями, а также структур, на которых заданы эти отношения. Отметим некоторые из направлений, в которых применение графов отношений оказывается особенно актуальным.

Во-первых, графы отношений, определённые на объектах заданной категории C, несут в себе большое количество информации. В некоторых случаях удаётся даже решить проблему изоморфизма, то есть показать, что объекты $S_1, S_2 \in \mathrm{ob}(C)$ изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их графы отношений $\Gamma_R(S_1)$ и $\Gamma_R(S_2)$. Например, графы коммутативности позволяют выделить неабелевы простые группы среди всех остальных групп[14,15,16], а также различить между собой гильбертовы пространства[17]. Кроме того, в работе[18] было показано, что графы йордановой ортогональности помогают различить между собой конечномерные простые формально действительные йордановы алгебры. Графы отношений играют важную роль и в функциональном анализе: в работе [10], написанной диссертантом совместно с Л. Арамбашич, А. Э. Гутерманом, Б. Кузмой и Р. Райич, была решена проблема изоморфизма для графов ортогональности Биркгофа-Джеймса гладких нормированных пространств.

Во-вторых, графы отношений нередко помогают классифицировать отображения, которые сохраняют порождающие их отношения. Так, в работе[19] с помощью графов ортогональности была получена полная классификация (не обязательно сюръективных) отображений, сохраняющих ортогональность на конечномерных проективных пространствах над вещественными числами, комплексными числами, кватернионами или октонионами. Такое отображение можно рассматривать как (не обязательно сюръективный) гомоморфизм соответствующего графа ортогональности, который обязан отображать любую максимальную клику в другую максимальную клику.

Целью данной работы является исследование графов коммутативности, ортогональности и

---

[12] B. R. Bakhadly. Orthogonality graph of the algebra of upper triangular matrices, *Oper. Matrices*, **11(2)**, 455–463 (2017).

[13] А. Э. Гутерман, О. В. Маркова. Графы ортогональности матриц над телами, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **463**, 81–93 (2017); Переведено в *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **232(6)**, 797–804 (2018).

[14] A. Abdollahi, H. Shahverdi. Characterization of the alternating group by its non-commuting graph, *J. Algebra*, **357**, 203–207 (2012).

[15] Z. Han, G. Chen, X. Guo. A characterization theorem for sporadic simple groups, *Sib. Math. J.*, **49**, 1138–1146 (2008).

[16] R. Solomon, A. Woldar. Simple groups are characterized by their non-commuting graphs, *J. Group Theory*, **16**, 793–824 (2013).

[17] B. Kuzma. Dimensions of complex Hilbert spaces are determined by the commutativity relation, *J. Operator Theory*, **79(1)**, 201–211 (2018).

[18] G. Dolinar, B. Kuzma, N. Stopar. The orthogonality relation classifies formally real simple Jordan algebras, *Comm. Algebra*, **48(6)**, 2274–2292 (2020).

[19] G. Dolinar, B. Kuzma, N. Stopar. Characterization of orthomaps on the Cayley plane, *Aequationes Math.*, **92(2)**, 243–265 (2018).

делителей нуля для конкретного класса неассоциативных алгебр, а именно, вещественных алгебр Кэли-Диксона. Изучение алгебр Кэли-Диксона берёт своё начало в теории композиционных алгебр, которые определяются следующим образом.

Определение. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра над произвольным полем $\mathbb{F}$, возможно, неунитальная и неассоциативная. Предположим, что алгебра $\mathcal{A}$ снабжена строго невырожденной квадратичной формой $n(\cdot)$, то есть симметрическая билинейная форма $n(a,b) = n(a+b) - n(a) - n(b)$ невырождена на $\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A}$ называется *композиционной алгеброй*, если норма $n(\cdot)$ допускает композицию, то есть $n(ab) = n(a)n(b)$ для всех $a, b \in \mathcal{A}$.

В 1898 году Гурвиц показал, что единственные унитальные композиционные алгебры с делением над $\mathbb{R}$ — это вещественные числа $\mathbb{R}$, комплексные числа $\mathbb{C}$, кватернионы $\mathbb{H}$ и октонионы $\mathbb{O}$. Такие алгебры принято называть *гурвицевыми*, и их размерности равны 1, 2, 4 и 8, соответственно. Эта знаменитая теорема играет важную роль в различных областях математики. Например, с ней связан тот факт, что сфера $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ является параллелизуемой, если и только если $n \in \{1, 2, 4, 8\}$. Это утверждение было независимо доказано Боттом и Милнором[20], а также Кервэйром[21]. Гурвицевы алгебры, особенно, кватернионы и октонионы, имеют множество применений в физике элементарных частиц, а также в теории йордановых алгебр и алгебр Ли, см. работу[22] и её библиографию.

Позднее теорема Гурвица была обобщена Джекобсоном на случай произвольных унитальных композиционных алгебр над произвольным полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$. Он показал[23] (стр. 61, теорема 1), что любая такая алгебра $\mathcal{A}$ изоморфна алгебре Кэли-Диксона $\mathcal{A}_n$ размерности 2^n, где $0 \leq n \leq 3$. Этот результат был обобщён Жевлаковым, Слинько, Шестаковым и Ширшовым[24] (стр. 46, теорема 1) на случай поля $\mathbb{F}$ произвольной характеристики.

Как показывает лемма 2.1 из работы[25], элемент a (не обязательно унитальной) конечномерной композиционной алгебры $\mathcal{A}$ является делителем нуля, если и только если $n(a) = 0$. Таким образом, любая конечномерная композиционная алгебра либо является алгеброй с делением, либо имеет делители нуля, в зависимости от того, является ли норма на ней анизотропной или изотропной.

Определение. Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная алгебра над полем $\mathbb{F}$, и $a, b, c \in \mathcal{A}$.

- *Ассоциатором* элементов a, b, c называется элемент $[a, b, c] = (ab)c - a(bc)$.
- Элемент a *альтернирует* с b, если $[a, a, b] = [b, a, a] = 0$.

[20] R. Bott, J. Milnor. On the parallelizability of the spheres, *Bull. Am. Math. Soc.*, **64**, 87–89 (1958).

[21] M. Kervaire. Non-parallelizability of the n-sphere for $n > 7$, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **44(3)**, 280–283 (1958).

[22] J. C. Baez. The octonions, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **39**, 145–205 (2002).

[23] N. Jacobson. Composition algebras and their automorphisms, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **7**, 55–80 (1958).

[24] К. А. Жевлаков, А. М. Слинько, И. П. Шестаков, А. И. Ширшов. *Кольца, близкие к ассоциативным*, Москва, Наука (1978).

[25] A. Elduque, H. Ch. Myung. Flexible composition algebras and Okubo algebras, *Comm. Algebra.*, **19(4)**, 1197–1227 (1991).

- Если a альтернирует со всеми $b \in \mathcal{A}$, то a называется *альтернативным.*
- Элемент a *строго альтернирует* с b, если $[a, a, b] = [b, a, a] = [b, b, a] = [a, b, b] = 0$.
- Если a строго альтернирует со всеми $b \in \mathcal{A}$, то a называется *строго альтернативным.*
- Алгебра $\mathcal{A}$ называется *альтернативной*, если все её элементы альтернативны.

В общем случае, вещественные алгебры Кэли-Диксона — это семейство 2^n-мерных алгебр $\mathcal{A}_n$ над полем $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, которые обобщают алгебры вещественных чисел, комплексных чисел, кватернионов и октонионов. Алгебры Кэли-Диксона определяются индуктивно: на каждом шаге алгебра $\mathcal{A}_{n+1}$ получается из алгебры $\mathcal{A}_n$ с помощью процедуры удвоения Кэли-Диксона с некоторым параметром $\gamma_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Элементами $\mathcal{A}_{n+1}$ являются упорядоченные пары элементов из $\mathcal{A}_n$, то есть элементы вида $(a, b) \in \mathcal{A}_n \times \mathcal{A}_n$. Таким образом, каждую из алгебр $\mathcal{A}_n$ определяют n ненулевых вещественных параметров $\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}$, причём с точностью до изоморфизма можно считать, что $\gamma_k \in \{\pm 1\}$ для всех $k = 0, \ldots, n-1$. При $n \geq 4$ алгебры $\mathcal{A}_n$ неальтернативны, а потому не являются композиционными. Как следствие, в них появляются делители нуля даже в том случае, когда норма на $\mathcal{A}_n$ анизотропна. Классификация этих делителей нуля и описание их аннуляторов оказываются довольно трудной задачей, за исключением, разве что, некоторых частных случаев.

Алгебры Кэли-Диксона являются объектом активного изучения математиков на протяжении уже нескольких десятилетий. Им посвящены частично или полностью такие классические работы, как статья Шафера[26], статья Эакина и Сасайе[27] и фундаментальный труд МакКриммона[28].

В настоящее время большинство авторов ограничиваются изучением алгебр главной последовательности, которые мы обозначаем как $\mathcal{M}_n$. В них все параметры Кэли-Диксона $\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}$ равны -1. Наиболее успешные попытки по изучению и классификации делителей нуля в этих алгебрах были предприняты Морено[29,30,31] и Биссом, Даггером и Исаксеном[32,33]. Однако и сейчас решение этой проблемы далеко от завершения. В частности, работа[32] содержит описание только тех делителей нуля, аннуляторы которых имеют наибольшую возможную размерность.

[26] R. D. Schafer. On the algebras formed by the Cayley-Dickson process, *Amer. J. Math.*, **76(2)**, 435–446 (1954).

[27] P. Eakin, A. Sathaye. On automorphisms and derivations of Cayley-Dickson algebras, *J. Algebra*, **129(2)**, 263–278 (1990).

[28] K. McCrimmon. *A taste of Jordan algebras*, Springer-Verlag New York (2004).

[29] G. Moreno. The zero divisors of the Cayley–Dickson algebras over the real numbers, *Bol. Soc. Mat. Mex. (tercera serie)*, **4(1)**, 13–28 (1998).

[30] G. Moreno. Alternative elements in the Cayley–Dickson algebras, *Topics in Mathematical Physics, General Relativity and Cosmology in Honor of Jerzy Plebański*, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 333–346 (2006).

[31] G. Moreno. Constructing zero divisors in the higher dimensional Cayley-Dickson algebras, `arXiv:math/0512517` (2005).

[32] D. K. Biss, D. Dugger, D. C. Isaksen. Large annihilators in Cayley–Dickson algebras, *Comm. Algebra*, **36(2)**, 632–664 (2008).

[33] D. K. Biss, D. Dugger, D. C. Isaksen. Large Annihilators in Cayley–Dickson Algebras II, *Bol. Soc. Mat. Mex.*, **13(2)**, 269–292 (2007).

Отметим, что Морено был первым, кто начал изучать в алгебрах главной последовательности дважды альтернативные элементы, то есть такие элементы, обе компоненты которых альтернативны в предыдущей алгебре этой последовательности. В работе[29] (стр. 25-27) он установил ряд важных свойств дважды альтернативных делителей нуля. Затем их аннуляторы были описаны в статье[32] (предложение 11.1). Одна из причин успешного изучения дважды альтернативных элементов состоит в том, что, как было показано в работе[30] (стр. 15), композиционное тождество $n(ab) = n(ba) = n(a)n(b)$, хотя и не выполняется во всей алгебре $\mathcal{M}_n$ при $n \geq 4$, продолжает выполняться в том случае, если элементы $a, b \in \mathcal{M}_n$ альтернируют между собой.

В данной диссертационной работе понятие дважды альтернативного элемента обобщается на случай произвольной вещественной алгебры Кэли-Диксона. Рассматривается также и более слабое условие: требуется, чтобы компоненты пары делителей нуля строго альтернировали друг с другом. Это позволяет усилить результаты, полученные ранее в работах Морено и Бисса, Даггера и Исаксена, а также обобщить их на случай произвольных вещественных алгебр Кэли-Диксона. Свойства, наиболее похожие на случай алгебр главной последовательности, наблюдаются в контр-алгебрах Кэли-Диксона, которые мы обозначаем как $\mathcal{H}_n$. В этих алгебрах параметры Кэли-Диксона $\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-2}$ равны -1, а γ_{n-1} равен 1.

В случае, когда $n \leq 4$, все элементы алгебры $\mathcal{A}_n$ являются дважды альтернативными. В частности, это выполнено для контр-алгебр малых размерностей: контркомплексных чисел $\hat{\mathbb{C}}$, контркватернионов $\hat{\mathbb{H}}$ и контроктонионов $\hat{\mathbb{O}}$, подробно рассмотренных в книге МакКриммона[28] (стр. 157-160), а также алгебры контрседенионов $\hat{\mathbb{S}}$. В диссертации описаны графы коммутативности, ортогональности и делителей нуля этих алгебр. Поскольку алгебра контркватернионов изоморфна алгебре вещественных (2×2)–матриц $M_2(\mathbb{R})$, свойства её графов отношений уже хорошо известны, см. работы[8,9,12]. Однако мы приводим свои доказательства этих утверждений, чтобы провести параллель между контркватернионами и контроктонионами.

Ещё одной алгеброй, все элементы которой дважды альтернативны, является алгебра седенионов $\mathbb{S} = \mathcal{M}_4$. Это первая неальтернативная алгебра главной последовательности, поэтому в ней впервые возникают делители нуля. Она также является наиболее изученной из алгебр $\mathcal{M}_n$ при $n \geq 4$, см. работы[29,32,34,35,36,37,38].

Элементы алгебры $\mathbb{S}$ удобнее всего представлять в виде упорядоченных пар октонионов. Можно проверить, что любой автоморфизм φ октонионов можно продолжить до автоморфизма $\widehat{\varphi}$ седенионов по формуле $\widehat{\varphi}((a, b)) = (\varphi(a), \varphi(b))$. Халил и Яо[37] показали, что группа $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O})$

---

[34] R. E. Cawagas. On the structure and zero divisors of the Cayley-Dickson sedenion algebra, *Discuss. Math. Gen. Algebra Appl.*, **24(2)**, 251–265 (2004).

[35] K.-C. Chan, D. Ž. Đoković. Conjugacy classes of subalgebras of the real sedenions, *Canad. Math. Bull.*, **49**, 492–507 (2006).

[36] K. Imaeda, M. Imaeda. Sedenions: Algebra and Analysis, *Appl. Math. Comput.*, **115(2–3)**, 77–88 (2000).

[37] S. H. Khalil, P. Yiu. The Cayley–Dickson algebras, a theorem of A. Hurwitz, and quaternions, *Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź Sér. Rech. Déform.*, **24**, 117–169 (1997).

[38] R. P. C. de Marrais. The 42 assessors and the box-kites they fly: diagonal axis-pair systems of zero-divisors in the sedenions' 16 dimensions, `arXiv:math/0011260` (2000).

действует свободно и транзитивно на множестве

$$\{(x, y) \in \mathbb{S} \times \mathbb{S} \mid n(x) = n(y) = 1,\ xy = 0\}.$$

В частности, любую пару делителей нуля (a, b) и (c, d) всегда можно заменить на (e_1, e_2) и (e_7, e_4) с некоторыми коэффициентами. В работе[35] (предложение 3.4(ii)) было доказано, что, поскольку $e_1 e_2 = e_3 = -e_7 e_4$, из $(a, b)(c, d) = 0$ следует $n(c)ab = -n(a)cd$. Это свойство седенионов особенно важно и позволяет усилить некоторые результаты, полученные для произвольных алгебр главной последовательности. В диссертации полностью описаны компоненты связности графа ортогональности алгебры седенионов, а также получены нижняя и верхняя оценка на диаметр её графа коммутативности.

Частным случаем дважды альтернативных элементов в произвольных вещественных алгебрах Кэли-Диксона являются элементы, обе компоненты которых — стандартные базисные элементы с точностью до умножения на ± 1, то есть элементы вида $(e_i, \pm e_j)$. Де Маре[38,39,40] уже изучал ранее делители нуля такого вида в алгебрах главной последовательности большой размерности ($n = 4, 5, 6$). В случае седенионов, он получил описание структур, которые образуют эти делители нуля в графе ортогональности[39] (стр. 3), и их таблицу умножения[40] (стр. 8). Указанные структуры также уже встречались в работе Брауна[41] (теорема 8.1).

В работе Кавагаса[34], посвящённой классификации подлуп в лупе стандартных базисных седенионов, найдены семь изоморфных копий лупы квазиоктонионов и показано, что к ним сводятся все делители нуля, которые ранее перечислил де Маре.

В диссертационной работе рассматривается граф ортогональности на парах базисных элементов для произвольной вещественной алгебры Кэли-Диксона. Устанавливаются критерии ортогональности таких делителей нуля и описывается индуктивный алгоритм построения этого графа, что позволяет обобщить результаты Брауна и де Маре. Кроме того, в диссертации решена проблема изоморфизма для этих графов, то есть показано, что две вещественные алгебры Кэли-Диксона размерности не менее 16 изоморфны, если и только если изоморфны их графы ортогональности на парах базисных элементов. Ключевым вспомогательным результатом при доказательстве этого утверждения является критерий изоморфности алгебр Кэли-Диксона, полученный в работе Эакина и Сасайе[27].

---

[39] R. P. C. de Marrais. Flying higher than a box-kite: kite-chain middens, sand mandalas, and zero-divisor patterns in the 2^n-ions beyond the sedenions, `arXiv:math/0207003` (2002).

[40] R. P. C. de Marrais. Box-kites III: quizzical quaternions, mock octonions, and other zero-divisor-suppressing "sleeper cell" structures in the sedenions and 2^n-ions, `arXiv:math/0403113` (2004).

[41] H. C. Brown. *Structure of zero divisors, and other algebraic structures, in higher dimensional real Cayley-Dickson algebras,* Ph. D. Dissertations, University of Missouri–Rolla (1972).

Цели и задачи работы

- Исследовать отношения коммутативности и ортогональности, а также пары делителей нуля в вещественных алгебрах Кэли-Диксона.
- Изучить общие закономерности и структуры в графах отношений вещественных алгебр Кэли-Диксона.
- Описать графы коммутативности, ортогональности и делителей нуля вещественных алгебр Кэли-Диксона малых размерностей.
- Решить проблему изоморфизма для графов ортогональности вещественных алгебр Кэли-Диксона.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие результаты диссертации:

- Свойства подграфов, образованных в графах ортогональности и делителей нуля произвольной вещественной алгебры Кэли-Диксона такими делителями нуля, что нормы компонент каждого элемента отличны от нуля, а компоненты разных элементов строго альтернируют между собой.
- Явный вид аннуляторов, ортогонализаторов и централизаторов для дважды альтернативных делителей нуля в вещественных алгебрах Кэли-Диксона, нормы компонент которых отличны от нуля.
- Структура и числовые характеристики, в частности, диаметры и клики, графов коммутативности, ортогональности и делителей нуля для вещественных алгебр Кэли-Диксона малых размерностей: контроктонионов, контрседенионов и седенионов.
- Критерий ортогональности чисто мнимых делителей нуля, являющихся парами базисных элементов. Решение проблемы изоморфизма для графов ортогональности вещественных алгебр Кэли-Диксона на парах базисных элементов.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования являются отношения между элементами неассоциативных алгебр и индуцированные ими графы.

Предметом исследования являются графы коммутативности, ортогональности и делителей нуля вещественных алгебр Кэли-Диксона.

Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми. Среди них:

- Описаны структуры, образованные в графах ортогональности и делителей нуля произвольной вещественной алгебры Кэли-Диксона такими делителями нуля, компоненты которых удовлетворяют дополнительным условиям на норму и альтернативность. Получен явный вид таблицы умножения вершин двойного шестиугольника в графе ортогональности произвольной алгебры главной последовательности.

- Полностью описаны компоненты связности графа ортогональности алгебры седенионов. Доказано, что в графе коммутативности седенионов делители нуля образуют компоненту связности, диаметр которой заключён между 3 и 4.

- Описаны свойства таких дважды альтернативных делителей нуля в вещественных алгебрах Кэли-Диксона, компоненты которых имеют ненулевую норму. Получен явный вид их аннуляторов и ортогонализатора, соотношение между централизатором и ортогонализатором.

- Установлена взаимосвязь между графами коммутативности и графами ортогональности контр-алгебр Кэли-Диксона малых размерностей, описаны графы ортогональности и делителей нуля этих алгебр в терминах диаметров и клик.

- Решена проблема изоморфизма для графов ортогональности вещественных алгебр Кэли-Диксона на парах базисных элементов.

Методы исследования

В исследовании используются классические методы линейной и общей алгебры, комбинаторики и теории графов. Предложенные в диссертации методы позволяют доказывать некоторые известные результаты неассоциативной алгебры в большей общности и в качестве частных проявлений объемлющей их теории.

Теоретическая и практическая значимость

Работа имеет теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, представляют интерес для специалистов в абстрактной и линейной алгебре, комбинаторике, теории графов и их приложениях.

Степень достоверности и апробация результатов

Соискатель имеет 12 опубликованных работ, в том числе 6 статей по теме диссертации [1–6], которые опубликованы в научных журналах, входящих в базы данных Scopus, Web of Science и RSCI.

Автор неоднократно выступала с докладами по результатам работы на спецсеминарах «Кольца, модули и матрицы» и «Избранные вопросы алгебры», а также на Научно-исследовательском семинаре кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова. Кроме того, автором были сделаны доклады по теме диссертации на следующих конференциях:

- XXV Международная научная конференция «Ломоносов – 2018», МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 2018 (устный доклад, отмечен грамотой).
- Международная алгебраическая конференция, посвященная 110-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша, МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 2018 (устный доклад, совместно с Александром Эмилевичем Гутерманом).
- XXVI Международная научная конференция «Ломоносов – 2019», МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 2019 (устный доклад, отмечен грамотой).
- 8th European Congress of Mathematics, Порторож, Словения, 2021 (дистанционный устный доклад).
- Конференция международных математических центров мирового уровня, Сочи, Россия, 2021 (два устных доклада и постерный доклад).
- CIMPA school «Non-associative Algebras and their Applications», Антананариву, Мадагаскар, 2021 (дистанционный пленарный доклад).
- The Fifth Workshop «New Trends in Quaternions and Octonions», Вила-Реал, Португалия, 2021 (дистанционный устный доклад).
- XXIX Международная научная конференция «Ломоносов – 2022», МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 2022 (устный доклад, отмечен грамотой).

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и списка публикаций автора. Общий объём работы составляет 135 страниц. Список литературы включает 58 наименований.

Содержание работы

Введение посвящено актуальности рассматриваемой темы, краткой истории вопроса, изложению цели работы, методов и основных результатов.

В **главе 1** собраны основные понятия теории неассоциативных алгебр и теории графов отношений, а также приводятся некоторые известные результаты этих теорий.

В разделе 1.1 мы вводим основные определения и обозначения, используемые на протяжении всего текста. Ниже перечислены наиболее важные из них.

Пусть $\mathcal{A}$ — некоторая алгебра над произвольным полем $\mathbb{F}$. Множество делителей нуля в $\mathcal{A}$ (левых, правых и двусторонних) мы будем обозначать как $Z(\mathcal{A})$, множество двусторонних делителей нуля в $\mathcal{A}$ — как $Z_{LR}(\mathcal{A})$, а центр $\mathcal{A}$ — как $C_{\mathcal{A}}$.

Определение. Пусть a — произвольный элемент алгебры $\mathcal{A}$.

- *Централизатором a* называется $C_{\mathcal{A}}(a) = \big\{b \in \mathcal{A} \mid ab = ba\big\}$ — множество элементов $\mathcal{A}$, коммутирующих с a.
- *Ортогонализатором a* называется $O_{\mathcal{A}}(a) = \big\{b \in \mathcal{A} \mid ab = ba = 0\big\}$ — множество элементов $\mathcal{A}$, ортогональных к a.
- *Левым аннулятором a* называется множество $l.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}}(a) = \big\{b \in \mathcal{A} \mid ba = 0\big\}$.
- Аналогично *правым аннулятором a* называется $r.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}}(a) = \big\{b \in \mathcal{A} \mid ab = 0\big\}$.

Для любого подмножества X линейного пространства W над $\mathbb{F}$ обозначим множество прямых, проходящих через элементы X, как $\mathbb{P}(X) = \{[x] = \mathbb{F}x \mid x \in X \setminus \{0\}\}$. Тогда графы отношений, изучению которых посвящена данная работа, определяются следующим образом.

Определение (1.1.2)**.** Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная алгебра.

- *Граф коммутативности* $\Gamma_C(\mathcal{A})$: вершины — элементы $\mathbb{P}(\mathcal{A}/C_{\mathcal{A}})$, причём различные вершины $[a + C_{\mathcal{A}}]$ и $[b + C_{\mathcal{A}}]$ соединены ребром, если и только если $ab = ba$.
- *Граф ортогональности* $\Gamma_O(\mathcal{A})$: вершины — элементы $\mathbb{P}(Z_{LR}(\mathcal{A}))$, причём различные вершины $[a]$ и $[b]$ соединены ребром, если и только если $ab = ba = 0$.
- *Ориентированный граф делителей нуля* $\Gamma_Z(\mathcal{A})$: вершины — элементы $\mathbb{P}(Z(\mathcal{A}))$, причём различные вершины $[a]$ и $[b]$ соединены направленным ребром от $[a]$ к $[b]$, если и только если $ab = 0$.

Мы подробно описываем процедуру Кэли-Диксона в разделе 1.2 и напоминаем некоторые свойства вещественных алгебр Кэли-Диксона в разделе 1.3. Отметим, что для любого элемента a вещественной алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_n$ определены *норма* $n(a)$, *вещественная часть* $\mathfrak{Re}(a)$ и *мнимая часть* $\mathfrak{Im}(a)$, причём $a = \mathfrak{Re}(a) + \mathfrak{Im}(a)$. Элемент a называется *чисто мнимым*, если и только если $\mathfrak{Re}(a) = 0$. В работе [26] (стр. 438) было показано, что при $n \geq 2$ имеет место равенство $C_{\mathcal{A}_n} = \mathbb{R}$, поэтому $\Gamma_C(\mathcal{A}_n)$ изоморфен графу, вершинами которого являются элементы $\mathbb{P}(\mathcal{A}'_n)$, где $\mathcal{A}'_n = \{a \in \mathcal{A}_n \mid \mathfrak{Re}(a) = 0\}$ — множество чисто мнимых элементов $\mathcal{A}_n$.

После этого в разделе 1.4 мы приводим явные определения вещественных алгебр Кэли-Диксона малых размерностей: кватернионов, октонионов и седенионов, а также контркомплексных чисел, контркватернионов, контроктонионов и контрседенионов.

В **главе 2** рассматриваются дважды альтернативные делители нуля в произвольных вещественных алгебрах Кэли-Диксона. Целью данной главы является решение следующих двух задач:

- Описание структур, которые образуют в графе делителей нуля произвольной вещественной алгебры Кэли-Диксона такие элементы, компоненты которых удовлетворяют дополнительным условиям на норму и альтернативность.

- Изучение свойств таких дважды альтернативных делителей нуля, компоненты которых имеют ненулевую норму.

В разделе 2.1 получено обобщение некоторых известных результатов о подалгебрах в алгебрах главной последовательности на случай произвольных вещественных алгебр Кэли-Диксона. А именно, в леммах 2.1.3, 2.1.6, 2.1.7 и 2.1.9 и следствии 2.1.8 мы устанавливаем достаточное условие того, что два или три элемента порождают ассоциативную или альтернативную подалгебру. Основным методом доказательства этих утверждений является построение гомоморфизма из $\mathcal{A}_2$ или $\mathcal{A}_3$ в рассматриваемую подалгебру. Однако, в отличие от случая алгебр главной последовательности, построенный гомоморфизм может иметь нетривиальное ядро. Эти результаты являются вспомогательными и активно используются на протяжении всей диссертации.

В разделе 2.2 рассматриваются такие делители нуля $(a, b) \in \mathcal{A}_{n+1}$, которые удовлетворяют условию $(*)$:

$$\begin{cases} (n(a))^2 = (n(b))^2 \neq 0; \\ \chi = \dfrac{n(a)}{\gamma_n n(b)} = \dfrac{\gamma_n n(b)}{n(a)} = \pm 1. \end{cases} \tag{$*$}$$

Ключевую роль при их изучении играет следующая лемма:

Лемма (2.2.1)**.** Пусть $(a, b), (c, d) \in \mathcal{A}_{n+1}$, и элементы $c, d \in \mathcal{A}_n$ (нестрого) альтернируют с элементами $a, b \in \mathcal{A}_n$. Предположим также, что $n(c) - \chi\gamma_n n(d) = \chi n(c) - \gamma_n n(d) = 0$ для некоторого $\chi \in \mathbb{R}$. Тогда

(1) если $(a, b)(c, d) = 0$, то $(c, d)(\overline{ac}, -\chi da) = 0$;

(2) если $(c, d)(a, b) = 0$, то $(\overline{ca}, -\chi d\bar{a})(c, d) = 0$.

Основным результатом этого раздела является следующая теорема, показывающая, что такие делители нуля образуют шестиугольные структуры в графе делителей нуля произвольной вещественной алгебры Кэли-Диксона:

Теорема (2.2.12)**.** Пусть элементы $a, b \in \mathcal{A}_n$ строго альтернируют с элементами $c, d \in \mathcal{A}_n$, и $(a,b)(c,d) = 0$ в $\mathcal{A}_{n+1}$. Тогда

(1) Элементы ac, da строго альтернируют с элементами a, b, c, d.

(2) Пусть $n(a) \neq 0$ или $n(b) \neq 0$, а также $n(c) \neq 0$ или $n(d) \neq 0$. Тогда (a,b), (c,d) и $(\overline{ac}, -\chi da)$ удовлетворяют условию $(*)$ с одним и тем же значением χ.

(3) В этом случае существуют следующие циклы длины 6 в $\Gamma_Z(\mathcal{A}_{n+1})$:

$$(a,b) \to (c,d) \to (\overline{ac}, -\chi da) \to (a,-b) \to (c,-d) \to (\overline{ac}, \chi da) \to (a,b),$$
$$(\bar{a},\bar{b}) \to (\gamma_n \bar{d}, \bar{c}) \to (-\chi\gamma_n da, \overline{ac}) \to (\bar{a}, -\bar{b}) \to (\gamma_n \bar{d}, -\bar{c}) \to (\chi\gamma_n da, \overline{ac}) \to (\bar{a},\bar{b}),$$
$$(\gamma_n b, a) \to (\bar{c}, \bar{d}) \to (-\chi\gamma_n \overline{da}, ac) \to (\gamma_n b, -a) \to (\bar{c}, -\bar{d}) \to (\chi\gamma_n \overline{da}, ac) \to (\gamma_n b, a),$$
$$(\gamma_n \bar{b}, \bar{a}) \to (\gamma_n d, c) \to (ac, -\chi\overline{da}) \to (\gamma_n \bar{b}, -\bar{a}) \to (\gamma_n d, -c) \to (ac, \chi\overline{da}) \to (\gamma_n \bar{b}, \bar{a}).$$

(4) Имеют место равенства $(\overline{ac}, -\chi da) = -(\gamma_n \bar{b} d, -\chi b\bar{c})$ и $(\overline{ac}, \chi da) = -(\gamma_n \bar{b} d, \chi b\bar{c})$.

Раздел 2.3 начинается с описания взаимосвязи между графом ортогональности и графом делителей нуля произвольной вещественной алгебры Кэли-Диксона. Так, согласно следствию 2.3.3, в случае вещественных алгебр Кэли-Диксона все делители нуля оказываются двусторонними делителями нуля, поэтому множества вершин этих графов совпадают. Предложение 2.3.4 описывает те рёбра, которые являются общими у этих графов. Из него следует, что в контексте графов ортогональности наибольший интерес представляют чисто мнимые делители нуля, в связи с чем удобно ввести следующее определение:

Определение (2.3.5)**.** Граф $\Gamma'_O(\mathcal{A}_n)$ — подграф $\Gamma_O(\mathcal{A}_n)$ на множестве вершин $\mathbb{P}(Z'(\mathcal{A}_n))$, где $Z'(\mathcal{A}_n) = \{x \in Z(\mathcal{A}_n) \mid \mathfrak{Re}(x) = 0\}$ — множество чисто мнимых делителей нуля в $\mathcal{A}_n$.

Затем вводится определение дважды альтернативных элементов в произвольной вещественной алгебре Кэли-Диксона.

Определение (2.3.6)**.** Множество *дважды альтернативных элементов* $\mathcal{A}_{n+1}$ определяется как $DA(\mathcal{A}_{n+1}) = \{(a,b) \in \mathcal{A}_{n+1} \mid$ оба элемента a и b являются альтернативными в $\mathcal{A}_n\}$.

В леммах 2.3.8 и 2.3.9 описывается явный вид аннуляторов и ортогонализаторов дважды альтернативных делителей нуля. Эти леммы играют особо важную роль в главах 4 и 5.

Лемма (2.3.8)**.** Пусть $(a,b) \in DA(\mathcal{A}_{n+1})$ таково, что $n(a) \neq 0$, и пусть $\chi = \gamma_n \frac{n(b)}{n(a)}$. В частности, это выполнено, если (a,b) удовлетворяет условию $(*)$. Тогда

$$l.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}_{n+1}}((a,b)) = \left\{ \left(c, -\frac{(bc)a}{n(a)} \right) \;\middle|\; b(ca) = \chi(bc)a \right\},$$
$$r.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}_{n+1}}((a,b)) = \left\{ \left(c, -\frac{(b\bar{c})\bar{a}}{n(a)} \right) \;\middle|\; (ac)\bar{b} = \chi a(c\bar{b}) \right\}.$$

Лемма (2.3.9)**.** Пусть $(a,b) \in DA(\mathcal{A}_{n+1})$ — такой чисто мнимый элемент, что $n(a) \neq 0$, и пусть $\chi = \gamma_n \frac{n(b)}{n(a)} \neq 0$. В частности, это выполнено, если (a,b) удовлетворяет условию $(*)$. Тогда

$$O_{\mathcal{A}_{n+1}}((a,b)) = \left\{ \left(c, -\frac{(bc)a}{n(a)} \right) \;\middle|\; \mathfrak{Re}(c) = 0,\ b(ca) = \chi(bc)a \right\} =$$
$$= \left\{ \left(\frac{(a\bar{d})b}{n(b)}, d \right) \;\middle|\; \langle d, ba \rangle = 0,\ (a\bar{d})b = \chi a(\bar{d}b) \right\}.$$

В разделе 2.4 изучается взаимосвязь между централизатором и ортогонализатором произвольного элемента вещественной алгебры Кэли-Диксона. Лемма 2.4.1 показывает, что мнимая часть централизатора всегда совпадает с ортогонализатором с точностью до сложения с не более чем одномерным подпространством V. Лемма 2.4.2 устанавливает явный вид этого подпространства V в некоторых частных случаях.

Лемма (2.4.1)**.** Пусть $x \in \mathcal{A}_n$, $x \neq 0$, $\mathfrak{Re}(x) = 0$. Тогда $C_{\mathcal{A}_n}(x) = \mathbb{R} \oplus O_{\mathcal{A}_n}(x) \oplus V$, где $\dim(V) \leq 1$.

Лемма (2.4.2)**.** Пусть $x \in \mathcal{A}_n \setminus \{0\}$, $\mathfrak{Re}(x) = 0$. Тогда

(1) если $n(x) = 0$ и $n \leq 3$, то $C_{\mathcal{A}_n}(x) = \mathbb{R} \oplus O_{\mathcal{A}_n}(x)$;

(2) если $n(x) \neq 0$, то $C_{\mathcal{A}_n}(x) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus O_{\mathcal{A}_n}(x)$.

В частности, если $\mathcal{A}_n = \mathcal{M}_n$ — алгебра главной последовательности, то любой элемент $x \in \mathcal{M}_n \setminus \{0\}$, $\mathfrak{Re}(x) = 0$, всегда удовлетворяет условию леммы 2.4.2(2).

Как показывают предложение 2.4.6 и пример 2.4.7, дополнительное условие на n в пункте (1) леммы 2.4.2 является существенным. Однако, согласно теореме 2.4.9, лемма 2.4.2(1) может быть обобщена на случай дважды альтернативных делителей нуля, удовлетворяющих условию $(*)$ с $\chi = 1$. Если же $\chi = \gamma_n \frac{n(b)}{n(a)} \neq 1$, то норма такого элемента отлична от нуля, поэтому применима лемма 2.4.2(2). Таким образом, для дважды альтернативных делителей нуля, удовлетворяющих условию $(*)$, мы также можем получить явный вид централизатора.

Теорема (2.4.9)**.** Пусть $(a,b) \in DA(\mathcal{A}_{n+1})$ — чисто мнимый элемент, удовлетворяющий условию $(*)$ с $\chi = 1$. Тогда $C_{\mathcal{A}_{n+1}}((a,b)) = \mathbb{R} \oplus O_{\mathcal{A}_{n+1}}((a,b))$.

В **главе 3** результаты предыдущей главы применяются для описания графов ортогональности алгебр главной последовательности, в частности, алгебры седенионов. Для этого используется следствие 1.6 из работы[29], согласно которому в алгебрах главной последовательности любая пара делителей нуля является также парой ортогональных элементов.

В разделе 3.1 показано, что в случае алгебр главной последовательности ориентированные шестиугольники в графе делителей нуля из теоремы 2.2.12 могут быть продолжены до неориентированного двойного шестиугольника в графе ортогональности. Кроме того, согласно теореме 3.1.11, таблица умножения вершин двойного шестиугольника имеет блочную структуру. Основным результатом данного раздела является теорема 3.1.14.

Теорема (3.1.14)**.** Пусть $a, b \in \mathcal{M}_n$ строго альтернируют с элементами $c, d \in \mathcal{M}_n$, (a, b), $(c, d) \in Z(\mathcal{M}_{n+1})$, $(a, b)(c, d) = 0$. По лемме 3.1.3, без ограничения общности можно считать, что $n(a) = n(b) = n(c) = n(d) = 1$. Тогда

(1) Элементы ac, ad строго альтернируют с элементами a, b, c, d.

(2) Элементы e_0, a, b, c, d, ac, ad образуют ортонормированную систему относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(3) Существует подграф $\Gamma_O(\mathcal{M}_{n+1})$, изображённый на рисунке 3.1 и называемый *двойным шестиугольником*.

(4) Все элементы в вершинах двойного шестиугольника линейно независимы.

(5) В обозначениях теоремы 3.1.11, вершины двойного шестиугольника удовлетворяют таблице умножения 3.2.

Раздел 3.2 посвящён изучению графов ортогональности и коммутативности алгебры седенионов $\mathbb{S}$.

Хорошо известно, что алгебра октонионов альтернативна, см. статью[22] (стр. 10), и любой седенион может быть представлен в виде пары октонионов. Следовательно, в случае седенионов любой делитель нуля дважды альтернативнен, поэтому мы можем применить теорему 3.1.14 и получить, что любая пара делителей нуля порождает двойной шестиугольник в $\Gamma_O(\mathbb{S})$.

В подразделе 3.2.1 приводятся известные результаты о свойствах делителей нуля алгебры седенионов. Как уже было сказано ранее, в случае алгебры седенионов из $(a, b)(c, d) = 0$ следует $n(c)ab = -n(a)cd$. Это свойство седенионов особенно важно и отличает их от остальных алгебр главной последовательности. В частности, благодаря ему множество вершин двойного шестиугольника можно дополнить до базиса, имеющего удобную таблицу умножения, см. теорему 3.2.18 подраздела 3.2.4.

В подразделе 3.2.2 изучены компоненты связности $\Gamma_O(\mathbb{S})$. Ясно, что для любых двух делителей нуля (a, b) и (c, d), принадлежащих одной компоненте связности, элементы ab и cd линейно зависимы. Из работы[29] (стр. 25-27) также следует, что ab и cd чисто мнимые. Значит, каждой компоненте связности $\Gamma_O(\mathbb{S})$ можно поставить в соответствие некоторую прямую из мнимой части алгебры октонионов. По теореме 3.2.12, это соответствие биективно. Диаметр каждой компоненты связности равен 3, см. теорему 3.2.10.

В подразделе 3.2.3 описывается подграф $\Gamma_O(\mathbb{S})$ на множестве тех вершин, обе компоненты которых с точностью до знака являются стандартными базисными элементами, то есть имеют вид $(e_i, \pm e_j)$.

Наконец, в подразделе 3.2.5 мы рассматриваем граф коммутативности $\mathbb{S}$. В предложениях 3.2.23 и 3.2.24 показано, что все делители нуля содержатся в одной компоненте связности $\Gamma_C(\mathbb{S})$, и значение её диаметра заключено между 3 и 4.

Объединение полученных в разделе 3.2 результатов приводит нас к следующей теореме.

Теорема (3.2.26)**.**

(1) $\Gamma_O(\mathbb{S})$ не содержит циклов нечётной длины.

(2) Пусть $(a,b)(c,d) = 0$ в $\mathbb{S}$, $n(a) = n(b) = n(c) = n(d) = 1$. Тогда существует подграф $\Gamma_O(\mathbb{S})$, изображённый на рисунке 3.1 и называемый двойным шестиугольником. В обозначениях теоремы 3.2.18, вершины двойного шестиугольника удовлетворяют таблице умножения 3.4.

(3) Множество вершин компоненты связности графа $\Gamma_O(\mathbb{S})$, содержащей (a,b), совпадает с $\mathbb{P}(\Lambda_{(a,b)})$, где $\Lambda_{(a,b)}$ — это множество всех нетривиальных линейных комбинаций элементов, стоящих в углах двойного шестиугольника через один.

(4) Диаметр каждой компоненты связности $\Gamma_O(\mathbb{S})$ равен 3.

(5) Пусть $\mathcal{C}(\Gamma_O(\mathbb{S}))$ обозначает множество всех компонент связности графа $\Gamma_O(\mathbb{S})$. Тогда существует корректно определённая биекция $\psi : \mathcal{C}(\Gamma_O(\mathbb{S})) \to \mathbb{P}(\mathfrak{Im}(\mathbb{O}))$, действующая следующим образом. Если $C \in \mathcal{C}(\Gamma_O(\mathbb{S}))$ и $(a,b) \in C$, то $\psi(C) = \mathrm{Lin}(ab)$.

(6) Пусть $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O})$ порождает $\widehat{\varphi} \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{S})$ по формуле $\widehat{\varphi}((x,y)) = (\varphi(x), \varphi(y))$ для всех $(x,y) \in \mathbb{S}$. Тогда $\widehat{\varphi}$ действует естественным образом на $\mathcal{C}(\Gamma_O(\mathbb{S}))$, причём $\psi \circ \widehat{\varphi} = \varphi \circ \psi$.

(7) Пусть $\Gamma_C^Z(\mathbb{S})$ — подграф $\Gamma_C(\mathbb{S})$ на множестве вершин $\mathbb{P}(Z(\mathbb{S}))$. Тогда $\Gamma_C^Z(\mathbb{S})$ — компонента связности $\Gamma_C(\mathbb{S})$, причём значение её диаметра заключёно между 3 и 4.

В **главе 4** мы описываем графы коммутативности, ортогональности и делителей нуля для контр-алгебр Кэли-Диксона малых размерностей.

В разделе 4.1 мы применяем полученные в разделе 2.3 результаты для изучения дважды альтернативных делителей нуля в контр-алгебрах произвольной размерности. Важную роль здесь играет лемма 4.1.1, согласно которой дважды альтернативные элементы в контр-алгебрах являются делителями нуля тогда и только тогда, когда они имеют нулевую норму.

Лемма (4.1.1)**.** Пусть $(a, b) \in DA(\mathcal{H}_n) \setminus \{0\}$. Тогда $(a, b) \in Z(\mathcal{H}_n)$, если и только если $n((a, b)) = n(a) - n(b) = 0$.

Пример 4.1.6 показывает, что в лемме 4.1.1 алгебру $\mathcal{H}_n$ нельзя заменить произвольной алгеброй Кэли-Диксона $\mathcal{A}_n$ с условием $\gamma_{n-1} = 1$. Кроме того, он даёт пример дважды альтернативного делителя нуля, не удовлетворяющего условию $(*)$.

Затем с помощью теоремы 2.4.9 устанавливается взаимосвязь между графами коммутативности и графами ортогональности контр-алгебр малых размерностей.

Теорема (4.1.10)**.** Пусть $2 \leq n \leq 4$. Обозначим как $\Gamma_C^Z(\mathcal{H}_n)$ подграф $\Gamma_C(\mathcal{H}_n)$ на множестве вершин $\mathbb{P}(Z'(\mathcal{H}_n))$, где $Z'(\mathcal{H}_n) = \{x \in \mathcal{H}_n \setminus \{0\} \mid \mathfrak{Re}(x) = n(x) = 0\}$. Тогда $\Gamma_C^Z(\mathcal{H}_n)$ изоморфен $\Gamma'_O(\mathcal{H}_n)$.

В разделах 4.2–4.5 описываются графы ортогональности и графы делителей нуля контр-алгебр малых размерностей: контркомплексных чисел, контркватернионов, контроктонионов и контрседенионов. В этих алгебрах все элементы являются дважды альтернативными, а потому применимы результаты раздела 4.1. Наибольшее внимание уделяется компонентам связности рассматриваемых графов и их диаметрам, а также максимальным кликам.

Раздел 4.2 содержит элементарные сведения о графах отношений алгебры контркомплексных чисел. В разделе 4.3, посвящённом графам отношений алгебры контркватернионов, мы приводим свои доказательства некоторых известных результатов, чтобы продемонстрировать аналогию между контркватернионами и контроктонионами. В следствии 4.4.11 раздела 4.4 мы получаем аналог вещественной жордановой нормальной формы для контроктонионов, что позволяет описать их графы ортогональности и делителей нуля. И наконец, в разделе 4.5 мы подробно описываем графы ортогональности и делителей нуля алгебры контрседенионов.

Теорема (4.2.1)**.**

(1) $\Gamma_O(\hat{\mathbb{C}})$ — полный граф на двух вершинах $[1+\ell]$ и $[1-\ell]$. $\Gamma_Z(\hat{\mathbb{C}})$ получается из $\Gamma_O(\hat{\mathbb{C}})$ заменой неориентированного ребра на пару ориентированных рёбер.

(2) Диаметр $\Gamma_Z(\hat{\mathbb{H}})$ равен 2. Граф $\Gamma'_O(\hat{\mathbb{H}})$ состоит из изолированных вершин вида $[a]$, где $n(a) = \mathrm{tr}(a) = 0$.

(3) Диаметр $\Gamma_Z(\hat{\mathbb{O}})$ равен 2, диаметр $\Gamma'_O(\hat{\mathbb{O}})$ равен 3.

(4) Диаметр $\Gamma_Z(\hat{\mathbb{S}})$ равен 4, диаметр $\Gamma'_O(\hat{\mathbb{S}})$ равен 5.

Глава 5 посвящена решению проблемы изоморфизма для графов ортогональности на парах базисных элементов произвольных вещественных алгебр Кэли-Диксона.

Определение (5.1.4)**.** Пусть $\mathcal{E}_n = \left\{e_0^{(n)}, e_1^{(n)}, \dots, e_{2^n-1}^{(n)}\right\}$ обозначает множество стандартных базисных элементов, а $\mathcal{E}'_n = \mathcal{E}_n \setminus \{e_0^{(n)}\}$ — множество чисто мнимых стандартных базисных элементов в $\mathcal{A}_n$. Рассмотрим следующее подмножество в $Z(\mathcal{A}_{n+1})$:

$$Z'_e(\mathcal{A}_{n+1}) = \left\{\left(e_i^{(n)}, \pm e_j^{(n)}\right) \in Z(\mathcal{A}_{n+1}) \;\middle|\; i \neq 0\right\} = (\mathcal{E}'_n \times (\pm\mathcal{E}_n)) \cap Z(\mathcal{A}_{n+1}).$$

Тогда $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$ обозначает подграф $\Gamma'_O(\mathcal{A}_{n+1})$ на множестве вершин $\mathbb{P}(Z'_e(\mathcal{A}_{n+1}))$.

В разделе 5.1 изучаются чисто мнимые делители нуля, являющиеся парами базисных элементов, то есть элементы из $Z'_e(\mathcal{A}_{n+1})$. Теорема 5.1.20 устанавливает критерий того, что пара базисных элементов является делителем нуля, а в теореме 5.1.21 описаны условия, при которых два элемента из $Z'_e(\mathcal{A}_{n+1})$ ортогональны. Ключевым утверждением для классификации таких делителей нуля является лемма 5.1.5 — ослабленный вариант равенства произведения компонент у пары делителей нуля в алгебре седенионов.

Лемма (5.1.5)**.** Пусть $(a, b), (c, d) \in Z_e(\mathcal{A}_{n+1})$, $(a, b)(c, d) = 0$. Тогда $ab = \pm cd$.

С помощью этих результатов в теореме 5.2.6 раздела 5.2 получен алгоритм индуктивного построения графа $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$ для произвольной вещественной алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_{n+1}$. Следствие 5.2.9 позволяет установить число компонент связности графа $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$ при $n \geq 3$, а также их найти мощности и диаметры.

Следствие (5.2.9)**.** Если $n \geq 3$, то $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$ содержит 2^n компонент связности при $\gamma_n = 1$ и $2^n - 1$ компоненту связности при $\gamma_n = -1$. Пусть C — произвольная компонента связности графа $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$. Тогда диаметр C равен 3. Кроме того, мы можем найти число вершин в C по формуле

$$|V(C)| = \begin{cases} 2^{n+1} - 2, & \chi(C) = 1; \\ 2^{n+1} - 4, & \chi(C) = -1. \end{cases}$$

Раздел 5.3 посвящён решению обратной задачи, а именно, по графу $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$ требуется восстановить параметры Кэли-Диксона алгебры $\mathcal{A}_{n+1}$. Её решение разбивается на следующие шаги:

- Если $n \geq 3$, то следствие 5.2.9 сразу позволяет получить значения n и γ_n.
- Если $n = 3$, то требуемое утверждение вытекает из следствия 5.3.7.
- Если $n \geq 4$, то, по лемме 5.3.2, можно также найти γ_{n-1}.
- Затем можно воспользоваться теоремой 5.3.12 и по графу $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$ построить графы $\Gamma_e(\mathcal{A}_n^\circ)$ и $\Gamma_e(\mathcal{A}_n^\bullet)$, где первые $n-1$ параметров у алгебр $\mathcal{A}_n^\circ$ и $\mathcal{A}_n^\bullet$ те же, что и у алгебры $\mathcal{A}_{n+1}$, а их последние параметры равны γ_n и $\gamma_{n-1}\gamma_n$, соответственно.

- Продолжая процесс рекурсивно, мы получаем импликацию слева направо в теореме 5.3.16. Импликация справа налево доказывается с помощью критерия изоморфности алгебр Кэли-Диксона, полученного Эакином и Сасайе[27] (следствие 2.6).

Теорема (5.3.16)**.** Пусть $n, m \geq 3$, $\gamma = \{\gamma_0, \ldots, \gamma_n\}$ и $\lambda = \{\lambda_0, \ldots, \lambda_m\}$ — две последовательности параметров. Тогда графы $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1}^{\gamma})$ и $\Gamma_e(\mathcal{A}_{m+1}^{\lambda})$ изоморфны, если и только если алгебры $\mathcal{A}_{n+1}^{\gamma}$ и $\mathcal{A}_{m+1}^{\lambda}$ изоморфны.

В подразделе 5.3.2 показано, что при $n, m \leq 2$ импликация справа налево в теореме 5.3.16 неверна. Это связано с тем, что при $n \leq 2$ изоморфизм между $\mathcal{A}_{n+1}^{\gamma}$ и $\mathcal{A}_{n+1}^{\lambda}$ может переводить базисные элементы из первой половины во вторую половину, и наоборот. В разделе 5.4 предложен другой подход к определению графа ортогональности на парах базисных элементов, который может позволить решить эту проблему.

Благодарность

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю доктору физико-математических наук профессору Александру Эмилевичу Гутерману за постановку задач, неоценимую поддержку и постоянное внимание к работе, а также всем сотрудникам кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова за тёплую доброжелательную атмосферу.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ

[1] А. Э. Гутерман, С. А. Жилина. Графы отношений вещественных алгебр Кэли–Диксона, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **472**, 44–75 (2018).

English transl.: A. E. Guterman, S. A. Zhilina. Relationship graphs of real Cayley–Dickson algebras, *J. Math. Sci.*, **240(6)**, 733–753 (2019).

С. А. Жилиной доказаны леммы 5.8, 8.10 и 8.11.

DOI: 10.1007/s10958-019-04390-y

Журнал индексируется в **Scopus, RSCI**. IF[42]: SJR 0.357.

[2] А. Э. Гутерман, С. А. Жилина. Графы отношений алгебры седенионов, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **496**, 61–86 (2020).

[42] Указаны импакт-факторы WoS за 2020 год и SJR за 2021 год.

English transl.: A. E. Guterman, S. A. Zhilina. Relation graphs of the sedenion algebra, *J. Math. Sci.*, **255(3)**, 254–270 (2021).

С. А. Жилиной доказаны теоремы 4.11, 4.15 и 5.2, следствия 4.10 и 4.16.

DOI: 10.1007/s10958-021-05367-6

Журнал индексируется в **Scopus, RSCI**. IF: SJR 0.357.

[3] А. Э. Гутерман, С. А. Жилина. Контр-алгебры Кэли–Диксона: дважды альтернативные делители нуля и графы отношений, *Фундам. и прикл. мат.*, **23(3)**, 95–129 (2020).

С. А. Жилиной доказаны леммы 4.11, 4.16, 4.21 и 5.20, теоремы 4.23, 4.30, 5.30 и 5.32.

http://mi.mathnet.ru/fpm1900

Журнал индексируется в **RSCI**.

[4] С. А. Жилина. Графы отношений алгебры контрседенионов, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **482**, 87–113 (2019).

English transl.: S. A. Zhilina. Relation graphs of the split-sedenion algebra, *J. Math. Sci.*, **249(2)**, 167–184 (2020).

DOI: 10.1007/s10958-020-04930-x

Журнал индексируется в **Scopus, RSCI**. IF: SJR 0.357.

[5] S. Zhilina. Orthogonality graphs of real Cayley–Dickson algebras. Part I: Doubly alternative zero divisors and their hexagons, *Int. J. Algebra Comput.*, **31(4)**, 663–689 (2021).

DOI: 10.1142/s0218196721500326

Журнал индексируется в **WoS, Scopus**. IF: WoS 0.719, SJR 0.648 (Q2).

[6] S. Zhilina. Orthogonality graphs of real Cayley–Dickson algebras. Part II: The subgraph on pairs of basis elements, *Int. J. Algebra Comput.*, **31(4)**, 691–725 (2021).

DOI: 10.1142/s0218196721500338

Журнал индексируется в **WoS, Scopus**. IF: WoS 0.719, SJR 0.648 (Q2).

Другие публикации автора

[7] Lj. Arambašić, A. Guterman, B. Kuzma, R. Rajić, S. Zhilina. Orthograph related to mutual strong Birkhoff–James orthogonality in C^*-algebras, *Banach J. Math. Anal.*, **14(4)**, 1751–1772 (2020).

DOI: 10.1007/s43037-020-00074-x

Журнал индексируется в **WoS, Scopus**. IF: WoS 0.99, SJR 0.554 (Q2).

[8] Lj. Arambašić, A. Guterman, B. Kuzma, R. Rajić, S. Zhilina. Symmetrized Birkhoff–James orthogonality in arbitrary normed spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **502(1)**, 125203 (2021).

DOI: 10.1016/j.jmaa.2021.125203

Журнал индексируется в **WoS, Scopus**. IF: WoS 1.583 (Q1), SJR 0.859 (Q1).

[9] Lj. Arambašić, A. Guterman, B. Kuzma, R. Rajić, S. Zhilina. Operators preserving mutual strong Birkhoff–James orthogonality on B(H), *Linear Algebra Appl.*, **624**, 27–43 (2021).

DOI: 10.1016/j.laa.2021.04.003

Журнал индексируется в **WoS, Scopus**. IF: WoS 1.401 (Q2), SJR 0.884 (Q1).

[10] Lj. Arambašić, A. Guterman, B. Kuzma, R. Rajić, S. Zhilina. What does Birkhoff–James orthogonality know about the norm?, *Publ. Math. Debr.*, Accepted (2022).

Журнал индексируется в **WoS, Scopus**. IF: WoS 0.636, SJR 0.475 (Q2).

[11] Lj. Arambašić, A. Guterman, B. Kuzma, S. Zhilina. Birkhoff–James orthogonality: characterizations, preservers, and orthogonality graphs, in: *Operator and Norm Inequalities and Related Topics*, Trends in Mathematics, Springer International Publishing AG (2022).

DOI: 10.1007/978-3-031-02104-6_8

Серия книг индексируется в **Scopus**. IF: SJR 0.217.

[12] A. E. Guterman, S. A. Zhilina. On the lengths of standard composition algebras, *Comm. Algebra*, **50(3)**, 1092–1105 (2022).

DOI: 10.1080/00927872.2021.1977945

Журнал индексируется в **WoS, Scopus**. IF: WoS 0.762, SJR 0.579 (Q2).