

**ФГБОУ ВПО «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА»  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

На правах рукописи



**ГАРАЖА АЛЕКСАНДРА АНДРЕЕВНА**

УДК 512.815.4+514.154

**ИНВАРИАНТЫ ЖОРДАНА–КРОНЕКЕРА ПАРЫ ЭЛЕМЕНТОВ АЛГЕБРЫ ЛИ**

Специальность 1.1.5 — «Математическая логика, алгебра,  
теория чисел и дискретная математика»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:  
к.ф.-м.н., доцент Д. А. Тимашёв,  
к.ф.-м.н. О. С. Якимова

Москва – 2023

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1 Предварительные сведения</b>	<b>14</b>
1.1 Обозначения . . . . .	14
1.1.1 Общий случай . . . . .	14
1.1.2 Случай редуктивной алгебры Ли . . . . .	16
1.2 Алгебраический подход к построению полных систем функций в биинволюции . . . . .	17
1.2.1 Полные системы функций в биинволюции . . . . .	17
1.2.2 Теорема Жордана–Кронекера . . . . .	19
1.2.3 Метод Кронекера . . . . .	20
1.3 Случай регулярного элемента . . . . .	22
1.3.1 Метод сдвига аргумента Мищенко–Фоменко . . . . .	22
1.3.2 Индексы Кронекера классических простых алгебр Ли . . . . .	23
1.4 Индексы Кронекера пары форм на алгебре Ли . . . . .	25
<b>2 Кронекерова часть полной системы функций в биинволюции на алгебре Ли <math>\mathfrak{gl}_n</math></b>	<b>26</b>
2.1 Формулировка результатов . . . . .	26
2.2 Доказательство результатов . . . . .	28
2.2.1 Сумма индексов Кронекера пары $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$ . . . . .	28
2.2.2 Сведение к полупростым матрицам . . . . .	29
2.2.3 Оценка степеней по $t$ многочленов $r_k(t)$ . . . . .	30
2.2.4 Явный вид $r_k$ и $q_k(X - tA)$ и связь $dr_k = -q_k(X - tA)$ . . . . .	31
2.3 Случай нильпотентной матрицы . . . . .	33
2.4 Пример . . . . .	33

<b>3</b>	<b>Кронекерова часть полной системы функций в биинволюции на классических простых алгебрах Ли</b>	<b>35</b>
3.1	Обозначения . . . . .	35
3.2	Результаты, которые переносятся с алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$ . . . . .	36
3.2.1	Произвольные элементы алгебр Ли $\mathfrak{sl}_n$ и $\mathfrak{sp}_{2n}$ . . . . .	36
3.2.2	Хорошие элементы алгебр Ли $\mathfrak{so}_{2n+1}$ и $\mathfrak{so}_{2n}$ . . . . .	38
3.2.3	Примеры . . . . .	41
3.3	Кронекерова часть для исправимых элементов из $\mathfrak{so}_{2n+1}$ и $\mathfrak{so}_{2n}$ . . . . .	42
3.3.1	Случай $\mathfrak{so}_{2n+1}$ . . . . .	44
3.3.2	Случай $\mathfrak{so}_{2n}$ . . . . .	46
3.3.3	Примеры . . . . .	48
3.4	Индексы Кронекера внутри пластов . . . . .	49
3.4.1	Предварительные сведения и формулировка результатов . . . . .	49
3.4.2	Постоянство индексов Кронекера внутри всех пластов $\mathfrak{sl}_n$ и $\mathfrak{sp}_{2n}$ . . . . .	49
3.4.3	Постоянство индексов Кронекера внутри пластов $\mathfrak{so}_N$ , содержащих хороший полупростой элемент . . . . .	50
3.4.4	Разные индексы Кронекера внутри пластов $\mathfrak{so}_{2n+1}$ и $\mathfrak{so}_{2n}$ . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Жорданова часть полной системы функций в биинволюции</b>	<b>54</b>
4.1	Жорданова часть для всех элементов из $\mathfrak{sl}_n$ и $\mathfrak{sp}_{2n}$ . . . . .	54
4.1.1	Формулировка результатов . . . . .	54
4.1.2	Доказательство результатов . . . . .	55
4.1.3	Пример . . . . .	58
4.2	Жорданова часть для полупростых хороших элементов из $\mathfrak{so}_{2n+1}$ и $\mathfrak{so}_{2n}$ . . . . .	59
4.2.1	Формулировка результатов . . . . .	59
4.2.2	Доказательство результатов . . . . .	59
4.2.3	Пример . . . . .	60
4.3	Пределы подалгебр Мищенко-Фоменко и построенные полные системы функций в биинволюции . . . . .	61
4.3.1	Предварительные сведения . . . . .	61
4.3.2	Порождающие предельных подалгебр Мищенко-Фоменко . . . . .	62
	<b>Заключение</b>	<b>65</b>
	<b>Литература</b>	<b>67</b>

# Введение

## Актуальность темы и степень ее разработанности

Работа посвящена исследованию вполне интегрируемых бигамильтоновых систем на классических простых алгебрах Ли.

Одной из важных проблем гамильтоновой механики является поиск вполне интегрируемых гамильтоновых систем или, что то же самое, полных систем функций в инволюции. Полнота системы значит, что функции в ней алгебраически независимы и что их максимально возможное число.

Благодаря работе Магри [13] и последующим работам [22, 2], стало понятно, что интегрируемость гамильтоновых систем тесно связана с их бигамильтоновой природой. Бигамильтоновость системы означает, что функции находятся в инволюции относительно не просто одной скобки Пуассона, а относительно целого пучка скобок (или, что тоже самое, относительно пары согласованных скобок Пуассона). Бигамильтоновы структуры удалось обнаружить в большинстве известных интегрируемых гамильтоновых систем.

И хотя вопрос построения биинтегрируемых систем по заданной паре согласованных скобок Пуассона активно исследуется, он до сих открыт. В некоторых частных случаях (если пучок скобок кронекеров или, наоборот, полупрост) поставленный вопрос решается довольно легко, но в общем случае — эффективного метода построения биинтегрируемой системы пока нет [3].

Более того, даже если линеаризовать пучок, то есть приблизить его парой скобок, где одна линейная, а вторая — постоянная, задача все еще будет сложной. Именно такую ситуацию мы и будем изучать. В таком случае можно считать, что одна из скобок — это скобка Ли-Пуассона на дуальном пространстве к алгебре Ли  $\mathfrak{g}$ , а вторая скобка — постоянная. В качестве постоянной скобки мы будем рассматривать скобку с замороженным аргументом  $\{, \}_A$ , которую можно построить по каждому элементу

$A \in \mathfrak{g}^*$  (см. определение 1.2).

В 1978 году Мищенко и Фоменко предложили замечательный и универсальный способ построения интегрируемых систем на алгебрах Ли — метод сдвига аргумента [25], являющийся обобщением конструкции Манакова [24]. Он заключается в том, что рассматривают инварианты коприсоединенного представления алгебры Ли, но подставляют в качестве аргумента не  $X$ , а  $X - tA$  (то есть «сдвигают аргумент»), и рассматривают коэффициенты по  $t$  получившихся многочленов. Все полученные функции будут находиться в биинволюции, и в случае редуктивной алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  и регулярного элемента  $A \in \mathfrak{g}^*$  полученная система функций будет полна. Подалгебра, порожденная всеми такими функциями, называется подалгеброй Мищенко-Фоменко и обозначается  $F_A$ .

Многие годы велась активная работа по поиску методов интегрирования бигамильтоновых систем. Перечислим несколько подходов к обобщению метода сдвига аргумента Мищенко-Фоменко.

*Локальный метод сдвига аргумента.* Браиловым была предложена конструкция, для которой достаточно иметь лишь локальные инварианты [1, Thm 3.1]. В этом методе в качестве аргумента подставляют  $A - tX$  и разлагают в ряд Тейлора по  $t$ . Подалгебра  $H_A$ , порожденная коэффициентами ряда Тейлора, содержит в себе подалгебру Мищенко-Фоменко  $F_A$ .

*Формальный метод сдвига аргумента.* Можно заметить, что функции, полученные локальным методом сдвига аргумента, образуют бигамильтоновы цепочки, то есть удовлетворяют линейным рекуррентным соотношениям с некоторым начальным условием [16]. Формальный метод сдвига аргумента заключается в итеративном нахождении таких функций. Подалгебра, порожденная этими функциями, совпадает с подалгеброй  $H_A$ .

Ещё одним способом построения полных систем функций в биинволюции является рассмотрение *предельных подалгебр Мищенко-Фоменко*. А именно, рассматривается предел  $F_{A(t)}$  при  $t \rightarrow 0$ , где  $A(t)$  регулярно при  $t \neq 0$ . В работах Винберга и Шувалова [8, 27, 18] показано, что подалгебры, построенные таким способом, также коммутативны в смысле скобки Ли-Пуассона и имеют максимально возможную степень трансцендентности при некоторых условиях на  $A(t)$ .

Наконец, Садэтовым [26] была доказана гипотеза Мищенко-Фоменко о том, что на любой алгебре Ли существует полная система функций в инволюции относительно скобки Ли-Пуассона. Но конструкция, используемая в доказательстве, далека от алгебр Мищенко-Фоменко. Поэтому интересной оказывается следующая открытая гипотеза:

для любого регулярного элемента  $A \in \mathfrak{g}^*$  можно построить полную систему функций в биинволюции относительно скобок  $\{, \}$  и  $\{, \}_A$ . Эта гипотеза до сих пор не опровергнута и проверена для многих типов алгебр Ли [19, 20].

Одним из перспективных подходов к работе с бигамильтоновыми системами является алгебраический подход, описанный в работе Болсинова и Чжан [4]. Согласно этому подходу, скобки Пуассона  $\{, \}$  и  $\{, \}_A$  можно рассматривать как кососимметрические билинейные формы  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{B}_A$  над полем рациональных функций  $\mathbb{K} = \mathbb{C}(\mathfrak{g})$  на пространстве  $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}$  рациональных векторных полей на  $\mathfrak{g}$ . Тогда оказывается, что многочлены  $\varphi_1, \dots, \varphi_s$  задают полное семейство функций в биинволюции относительно  $\{, \}$  и  $\{, \}_A$  тогда и только тогда, когда их дифференциалы  $d\varphi_1, \dots, d\varphi_s$  составляют базис билагранжева подпространства (т.е. максимального биизотропного подпространства) относительно обеих билинейных форм  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{B}_A$ . Значит, чтобы получить полное семейство функций в биинволюции на  $\mathfrak{g}^*$ , достаточно найти базис билагранжева подпространства и «проинтегрировать» его по независимой переменной  $X$ .

Для этого можно воспользоваться классической теоремой Жордана-Кронекера о каноническом виде пары кососимметрических билинейных форм (см. раздел 1.2.2). Эта теорема говорит о том, что для любой пары кососимметрических билинейных форм  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{G}$  можно найти базис (мы будем называть его *каноническим*), в котором пара форм приводится к блочно-диагональному виду с блоками двух типов: жордановыми и кронекеровыми. Из явного вида блоков следует, что вторые половины базисов каждого блока составляют базис билагранжева подпространства (такой базис билагранжева подпространства тоже будем называть каноническим). Таким образом, искомым базис распадается на две части: жорданову и кронекерову.

Для того, чтобы найти кронекерову часть канонического базиса можно воспользоваться классическим методом Кронекера (см. раздел 1.2.3). Согласно этому методу, рассматривается подмодуль  $\mathcal{Z} = \text{Ker}(\mathcal{B} - t\mathcal{B}_A)$  модуля  $\mathfrak{g}[t] = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}[t]$  над кольцом  $\mathbb{K}[t]$  и находится его *минимальный базис* — базис, старшие коэффициенты элементов которого линейно независимы.

Таким образом, задача поиска полной системы функций в биинволюции сводится к чисто алгебраической задаче поиска канонического базиса (и последующему интегрированию).

Если применить этот подход в случае редуктивной алгебры Ли и регулярного элемента  $A$ , то мы придем к методу сдвига аргумента (см. 1.3.1). Напомним, что редуктивная алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  может быть отождествлена с дуальным пространством  $\mathfrak{g}^*$  при помощи

инвариантного скалярного умножения. Поэтому можно считать, что  $A \in \mathfrak{g}$ . Если элемент  $A$  сингулярен, то вопрос о каноническом виде пары форм  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{B}_A$  открыт даже в случае простых алгебр Ли. В настоящей работе мы применим описанный подход в случае классической простой алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  и сингулярного элемента  $A \in \mathfrak{g}$ . Таким образом, можно считать, что настоящая работа посвящена обобщению метода сдвига аргумента на случай сингулярного элемента  $A$ .

Наконец, опишем известные результаты, касающиеся интересующего нас подхода. В работах [9, 14] для алгебр Ли  $\mathfrak{sl}_n$  и  $\mathfrak{sp}_{2n}$  уже были построены некоторый базис подпространства, натянутого на кронекерову часть канонического базиса, и соответствующие функции в биинволюции. Однако построенный базис не является каноническим. В работе [14] также было показано, что некоторые элементы полученного базиса порождают  $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_A)^{\mathfrak{g}_A}$ , что тесно связано с построением жордановой части полной системы функций в биинволюции. Аналогичные результаты были получены и для некоторых элементов  $A$  из алгебр Ли  $\mathfrak{so}_{2n+1}$  и  $\mathfrak{so}_{2n}$ .

## Цели и задачи диссертации

Целью данной работы является построение полной системы функций в биинволюции, соответствующей каноническому базису билагранжева подпространства, на классических простых алгебрах Ли.

Для достижения этой цели были поставлены следующие задачи:

1. Найти кронекерову часть канонического базиса пары форм  $\mathcal{B}, \mathcal{B}_A$ , где  $A$  — произвольный элемент классической простой алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ .
2. Построить полную систему функций в биинволюции относительно скобок  $\{, \}$  и  $\{, \}_A$ , где  $A$  — произвольный элемент классической простой алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ .
3. Исследовать связь полученных полных систем функций в биинволюции с предельными подалгебрами Мищенко-Фоменко.

## Положения, выносимые на защиту

1. Полная система функций в биинволюции, соответствующая каноническому базису билагранжева подпространства, относительно скобок  $\{, \}$  и  $\{, \}_A$  для произвольного элемента  $A$  из алгебр Ли  $\mathfrak{sl}_n$  и  $\mathfrak{sp}_{2n}$ .

2. Кронекерова часть полной системы функций в биинволюции, соответствующей каноническому базису билагранжева подпространства, относительно скобок  $\{, \}$  и  $\{, \}_A$  для «хороших» и «исправимых» элементов  $A$  алгебр Ли  $\mathfrak{so}_{2n}$  и  $\mathfrak{so}_{2n+1}$  (см. определения 3.1, 3.2 и 3.3).
3. Полная система функций в биинволюции, соответствующая каноническому базису билагранжева подпространства, относительно пары скобок  $\{, \}, \{, \}_A$  для «хороших» полупростых элементов  $A$  алгебр Ли  $\mathfrak{so}_{2n+1}$  и  $\mathfrak{so}_{2n}$ .
4. Взаимосвязь индексов Кронекера скобок  $\{, \}$  и  $\{, \}_A$  с пластами алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ . Доказательство независимости индексов Кронекера для всех элементов  $A$  внутри пласта в случае алгебр  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$  и  $\mathfrak{sp}_{2n}$ . Построение примеров пластов, для которых это неверно, в случае алгебр Ли  $\mathfrak{so}_{2n+1}$  и  $\mathfrak{so}_{2n}$ .
5. Доказательство того факта, что для полупростых элементов  $A \in \mathfrak{g}$  построенные полные системы функций в биинволюции свободно порождают некоторые предельные подалгебры  $\lim F_{A(s)}$ . (В случае  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$  на элемент  $A$  накладывается дополнительное условие:  $A$  — «хороший».)

## Научная новизна

Результаты работы являются новыми и получены автором самостоятельно.

## Методы исследования

В работе используются методы теории групп и алгебр Ли, теории инвариантов, линейной алгебры.

## Теоретическая и практическая ценность работы

Работа носит теоретический характер.

Полученные результаты могут быть использованы для решения аналогичных задач на других алгебрах Ли. Например, можно получить интересную дополнительную информацию об исключительных алгебрах Ли, так как изучение канонического вида пары форм  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{B}_A$  является естественным методом исследования структуры редуцированных алгебр Ли (см. 1.4).

Кроме того, полученные результаты могут быть интересны с точки зрения квантования коммутативных алгебр и поиска формальных предельных подалгебр Мищенко–Фоменко.

## Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгими математическими доказательствами. Результаты работы находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Результаты работы докладывались на следующих конференциях:

- Международная конференция «58th Seminar Sophus Lie», Эрланген, Германия (устный доклад, 9.03.2023);
- Девятая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», Самара, Россия (устный доклад, 24.08.2021);
- Конференция международных математических центров мирового уровня, Сочи, Россия (постерная сессия, 9.08.2021 – 13.08.2021);
- Mini-workshop «Algebraic groups: the White Nights season», Петербург, Россия (устный доклад, 15.07.2021);
- Международная конференция «Algebraic transformation groups», Рим, Италия (постерный доклад, 29.10.2019);
- Шестая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», Москва, Россия (устный доклад, 2.02.2017);
- Конференция «Ломоносовские чтения», Москва, Россия (устный доклад, 20.04.2017).

Результаты работы докладывались и обсуждались на заседаниях следующих научных семинаров:

- Семинар «Группы Ли и теория инвариантов» под руководством Д.И. Панюшева, Д.А. Тимашёва и О.С. Якимовой, МГУ (неоднократные устные доклады: 7.12.2016, 3.05.2017, 29.09.2021);
- Семинар «Современные геометрические методы» под руководством акад. А.Т. Фоменко и проф. А.С. Мищенко, МГУ (устный доклад, 15.05.2019);

- Семинар «Современная математика», МФТИ (устный доклад, 22.10.2019).

## Публикации автора

Основные результаты по теме диссертации изложены в 5 работах [28, 29, 30, 31, 32], 3 из которых опубликованы в рецензируемых научных изданиях, индексируемых Web of Science, Scopus и RSCI, 2 — в тезисах докладов.

## Объём и структура работы

Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы. Полный объём работы составляет 70 страниц, включая 3 рисунка. Список литературы содержит 32 наименования.

Во **введении** описываются цели работы, кратко формулируются основные результаты, а также освещается место данных результатов в современной теории интегрируемых систем и алгебр Ли.

В разделе 1.1 **первой главы** вводятся необходимые обозначения и определения. Далее формулируются классические результаты линейной алгебры: теорема Жордана–Кронекера и метод Кронекера поиска канонического базиса. В разделе 1.2.3 доказано, что в случае кососимметрических билинейных форм  $\mathcal{B}, \mathcal{B}_A$  можно явно выписать порождающие модуля, исследуемого в методе Кронекера. Далее, в разделе 1.3 показано, как в случае редуцированной алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  и регулярного элемента  $A \in \mathfrak{g}$  из описанных классических теорем следует метод сдвига аргумента. В том же разделе сформулированы известные результаты, касающиеся регулярных элементов классических алгебр Ли. Наконец, в разделе 1.4 показана связь между индексами Кронекера пары форм  $\mathcal{B}, \mathcal{B}_A$  и пары кососимметрических билинейных форм  $b_B, b_A$  на алгебре Ли  $\mathfrak{g}$ , которые соответствуют присоединённым операторам  $\text{ad}(B), \text{ad}(A)$ , где элемент  $A$  фиксирован, а элемент  $B$  — общего положения.

**Вторая глава** посвящена построению кронекеровой части канонического базиса билагранжева подпространства и соответствующей полной системы функций для алгебры Ли  $\mathfrak{gl}_n$ .

В начале главы индуктивно определяются многочлены  $q_n, \dots, q_0 \in \mathbb{C}[\mathfrak{gl}_n][t, z]$  и  $r_k \in \mathbb{C}[\mathfrak{gl}_n][t]$  с помощью формул

$$\begin{aligned} q_n(z) &:= \chi_{X-tA}(z), \\ q_{k+1}(z) &= (z + \mu_k t)q_k(z) + r_k, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\chi_X(z)$  обозначает характеристический многочлен матрицы  $X$ , а  $\mu_0, \dots, \mu_{n-1}$  — собственные числа матрицы  $A$ , упорядоченные специальным образом. Также для матрицы  $A$  комбинаторно определяются числа  $m_0, \dots, m_{n-1}$ . А именно, построим диаграмму Юнга, длины строк которой равны степеням инвариантных множителей матрицы  $A$ . Пронумеруем клетки диаграммы числами от 0 до  $n-1$  слева направо и сверху вниз и обозначим через  $p_i$  количество строк над клеткой с номером  $i$ . Тогда положим

$$m_i = i - p_i \quad (2)$$

Для краткости обозначим через  $I$  следующий набор индексов:

$$I = \begin{cases} \{0, 1, 2, \dots, n-1\}, & \text{при } \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n \\ \{1, 2, 3, \dots, n-1\}, & \text{при } \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n \\ \{1, 3, 5, \dots, 2n-1\}, & \text{при } \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}, \mathfrak{so}_{2n}, \mathfrak{so}_{2n+1} \end{cases}$$

Далее доказываются следующие утверждения:

**Теорема 0.1.** Пусть многочлены  $q_i, r_i$  и числа  $m_i$  определены по формулам (1) и (2). Тогда для любой матрицы  $A \in \mathfrak{gl}_n$  выполнено:

- (i) Индексы Кронекера пары форм  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$  равны  $\{m_i \mid i \in I\}$ .
- (ii) Многочлены  $\{q_i(X - tA) \mid i \in I\}$  составляют минимальный базис модуля  $\mathcal{Z}$ .
- (iii) Коэффициенты многочленов  $\{q_i(X - tA) \mid i \in I\}$  по переменной  $t$  составляют кронекерову часть канонического базиса пары форм  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$ .
- (iv) Коэффициенты многочленов  $\{r_i(t) \mid i \in I\}$  составляют кронекерову часть полной системы функций в бивольюции, причем  $dr_k = -q_k(X - tA)$ .

Первые два утверждения следуют из комбинаторной леммы (которая доказана там же в разделе 2.2.1) и предложения о степенях многочленов  $\deg_t q_k(X - tA)$ . В разделе 2.2.2 задача сводится к случаю полупростого элемента  $A$ , и в разделе 2.2.3 доказывается предложение о степенях многочленов  $\deg_t r_k(t)$ . Наконец, в разделе 2.2.4 дается явный вид многочленов  $r_k(t)$  и  $q_k(X - tA)$ , и доказывается, что  $dr_k = -q_k(X - tA)$ . Таким образом, предложение о степенях многочленов  $q_k(X - tA)$  также оказывается верным, и все четыре утверждения доказаны.

В конце главы (раздел 2.3) рассматривается частный случай нильпотентного элемента  $A$  и полученные результаты формулируются в терминах метода сдвига аргумента. А

именно, если в качестве базисных инвариантов взять коэффициенты характеристического многочлена, то все ненулевые многочлены, полученные методом сдвига аргумента, составляют кронекерову часть полной системы функций в биинволюции.

Наконец, в разделе 2.4 приведен пример построения кронекеровой части полной системы функций в биинволюции для конкретной матрицы  $A \in \mathfrak{gl}_n$ .

**Третья глава** посвящена построению кронекеровой части канонического базиса билагранжева подпространства и соответствующей полной системы функций для простых классических алгебр Ли. В разделе 3.1 вводятся необходимые обозначения, а в разделе 3.2 результаты предыдущей главы переносятся на случай классических алгебр Ли. А именно, так же как и в случае  $\mathfrak{gl}_n$  для каждой матрицы  $A$  можно определить многочлены  $q_k$  и  $r_k$  и подставить матрицу  $X - tA$  в многочлены  $q_k(z)$  в качестве аргумента  $z$ . Обозначим через  $N$  размер матриц в  $\mathfrak{g}$ , тогда  $q_k(X - tA) \in \mathfrak{gl}_N \otimes \mathbb{K}[t]$ . Таким образом,  $q_k(X - tA)$  могут не лежать в  $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}[t]$ . Поэтому обозначим через  $\pi$  ортогональную проекцию  $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{K})$  на  $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}$  и положим

$$h_i(X - tA) = \pi(q_i(X - tA)). \quad (3)$$

Тогда для любых элементов  $A \in \mathfrak{g}$ , где  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$  или  $\mathfrak{sp}_{2n}$ , выполнены все утверждения теоремы 0.1, если в них заменить многочлены  $q_i$  на  $h_i$ .

На алгебры Ли  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$  и  $\mathfrak{so}_{2n}$  полученные результаты можно перенести только для некоторых элементов  $A \in \mathfrak{g}$ . Назовем элемент  $A$  *хорошим*, если в соответствующей диаграмме Юнга верхняя строка нечетной длины, а все остальные строки (кроме, быть может, последней) разбиваются на пары одинаковой четности. Тогда для хороших элементов из алгебры Ли  $\mathfrak{so}_{2n+1}$  тоже верен аналог теоремы 0.1.

В случае алгебры Ли  $\mathfrak{so}_{2n}$  одним из базисных инвариантов является пфаффиан, поэтому многочлен  $r_{2n-1}$  не подходит, так как его степень в 2 раза больше необходимой. Но несложно проверить, что для хороших элементов из многочлена  $r_{2n-1}$  можно извлечь корень и получить пфаффиан матрицы  $X - tA$ . Итак, в случае  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$  переопределим элементы с индексом  $2n - 1$ :

$$r_{2n-1}(t) = \text{Pf}(X - tA), \quad h_{2n-1}(X - tA) = -dr_{2n-1}, \quad m_{2n-1} = n - 1. \quad (4)$$

Тогда для многочленов  $h_i, r_i$  и чисел  $m_i$ , определенных по формулам (1)-(4), и для хороших элементов  $A \in \mathfrak{so}_{2n}$  выполнены все утверждения теоремы 0.1, если в них заменить многочлены  $q_i$  на  $h_i$ .

В разделе 3.3 рассматриваются «исправимые» элементы алгебр Ли — это такие нильпотентные элементы, диаграмма Юнга которых получается из хорошей диаграммы добавлением сверху четного прямоугольника. Для таких элементов удалось построить полную систему функций в бинволюции, подправив коэффициенты характеристического многочлена, и доказать аналог теоремы 0.1 (теоремы 3.4 и 3.5).

Наконец, в разделе 3.4 исследуется зависимость индексов Кронекера от элемента  $A$ . А именно, для алгебр Ли  $\mathfrak{sl}_n$  и  $\mathfrak{sp}_{2n}$  показано, что индексы Кронекера пары  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$  одинаковы для всех элементов  $A$  из одного пласта. Для алгебр  $\mathfrak{so}_{2n}$  и  $\mathfrak{so}_{2n+1}$  показано, что, с одной стороны, внутри пластов, содержащих хороший полупростой элемент, индексы Кронекера одинаковы, а с другой стороны — приведены примеры пластов, на которых индексы Кронекера не постоянны.

**Четвертая глава** посвящена построению жордановой части канонического базиса билагранжева подпространства и соответствующей полной системы функций.

В разделе 4.1 доказывается, что для алгебр Ли  $\mathfrak{sl}_n$  и  $\mathfrak{sp}_{2n}$  некоторые из многочленов, построенных в предыдущей главе (а именно, старшие коэффициенты многочленов  $r_k$ ) являются базисными инвариантами централизатора  $\mathfrak{z}(A)$  элемента  $A$  (лемма 4.3). Далее доказывается, что для построения жордановой части полной системы функций в бинволюции достаточно применить метод сдвига аргумента к описанным базисным инвариантам. Более формально, определим многочлены  $f_{k,i}$  и  $g_{k,i}$  по формулам:

$$r_k(t) = f_{k,0}(X) + f_{k,1}(X)t + \dots + f_{k,m_k}(X)t^{m_k}. \quad (5)$$

$$f_{k,m_k}(X - sB) = g_{k,0}(X) + g_{k,1}(X)s + \dots + g_{k,d_k}(X)s^{d_k}, \quad (6)$$

Тогда основная теорема о полной системе функций в бинволюции заключается в следующем:

**Теорема 0.2.** *Функции  $\{f_{k,l} | k \in I, l = 0, \dots, m_k\}$ , определенные в (5), и функции  $\{g_{i,j} | i \in I, j = 1, \dots, d_i - 1\}$ , определенные в (6), составляют соответственно кронекерову и жорданову части полной системы функций в бинволюции относительно скобок  $\{, \}$  и  $\{, \}_A$  для любого элемента  $A \in \mathfrak{g}$  для  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$  или  $\mathfrak{sp}_{2n}$ .*

В разделе 4.2 все полученные результаты переносятся на случай хороших полупростых элементов алгебр Ли  $\mathfrak{so}_{2n+1}$  и  $\mathfrak{so}_{2n}$ .

Наконец, в разделе 4.3 исследуется связь построенных полных систем функций в бинволюции и предельных подалгебр Мищенко-Фоменко. А именно, в разделе 4.3.1

вводятся необходимые определения и формулируется теорема Шувалова [27]: если элемент  $A(s) = A_0 + A_1s + \dots + A_r s^r$  регулярен при достаточно малых  $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  и все  $A_i$  принадлежат одной фиксированной картановской подалгебре  $\mathfrak{h}$ , то алгебра  $\lim_{s \rightarrow 0} F_{A(s)}$  свободна. В качестве ее свободных порождающих можно взять объединение некоторых наборов производных базисных инвариантов алгебр  $\mathfrak{z}(A_0) \cap \dots \cap \mathfrak{z}(A_{k-1})$  вдоль  $A_k$  ( $k = 0, \dots, r$ ) и произвольного базиса подпространства  $\mathfrak{h}$ .

Далее рассматривается линейный случай  $A(s) = A + Bs$  и доказывается (теорема 4.10), что если элемент  $A + Bs$  регулярен при достаточно малых  $s \neq 0$  и элементы  $A, B$  лежат в одной картановской подалгебре, то наборы функций, построенные ранее, свободно порождают подалгебру  $\lim_{s \rightarrow 0} F_{A+Bs}$ .

## Благодарности

Автор выражает глубокую признательность Эрнесту Борисовичу Винбергу за постановку интересных задач, многочисленные обсуждения, воодушевляющие беседы и доброе и внимательное отношение. Также автор благодарен своим научным руководителям Дмитрию Андреевичу Тимашёву и Оксане Сергеевне Якимовой за постоянное внимание к работе, неоценимую помощь и поддержку. Автор признателен сотрудникам кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ за доброжелательную и творческую атмосферу.

# Глава 1

## Предварительные сведения

### 1.1 Обозначения

В качестве основной алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  у нас будет выступать одна из классических простых комплексных алгебр Ли. Тем не менее, в рассматриваемых ниже конструкциях возникнут подалгебры, которые могут не быть редуktивными. Поэтому вначале мы дадим основные определения в терминах произвольной комплексной алгебры Ли, а затем уточним их в случае редуktивной алгебры Ли.

#### 1.1.1 Общий случай

Пусть  $\mathfrak{g}$  — комплексная алгебра Ли. Обозначим через  $G$  связную группу Ли, для которой  $\text{Lie } G = \mathfrak{g}$ .

**Определение 1.1.** На симметрической алгебре  $\mathcal{S}(\mathfrak{g}) \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$  определена каноническая пуассонова структура  $\{ , \}$ , называемая также скобкой Ли-Пуассона. Для любых двух элементов  $X, Y \in \mathfrak{g} \subset \mathcal{S}(\mathfrak{g})$  их скобка Ли-Пуассона совпадает с коммутатором:  $\{X, Y\} = [X, Y]$ . И дальше скобка продолжается на  $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$  по правилу Лейбница.

Помимо канонической пуассоновой структуры, для каждого элемента  $\gamma \in \mathfrak{g}^*$  на алгебре  $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$  можно определить еще одну пуассонову структуру.

**Определение 1.2.** Для каждого элемента  $\gamma \in \mathfrak{g}^*$  определена пуассонова структура «с замороженным аргументом»  $\{ , \}_\gamma$ : для  $X, Y \in \mathfrak{g}$  по определению  $\{X, Y\}_\gamma$  постоянна как функция на  $\mathfrak{g}^*$  и равна  $\gamma([X, Y])$ , а дальше скобка  $\{ , \}_\gamma$  продолжается на  $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$  по правилу Лейбница.

В координатном виде описанные пуассоновы структуры задаются следующими формулами:

$$\{\varphi, \psi\}(x) = c_{ij}^k x_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j}, \quad (1.1)$$

$$\{\varphi, \psi\}_\gamma(x) = c_{ij}^k \gamma_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j}, \quad (1.2)$$

где  $\varphi, \psi \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ ,  $x, \gamma \in \mathfrak{g}^*$ , а  $c_{ij}^k$  — структурные константы алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ . Обратим внимание, что в данных формулах  $x$  рассматривается как переменная, а  $\gamma$  как фиксированный элемент из  $\mathfrak{g}^*$ . Таким образом, скобка  $\{, \}$  является линейной, а  $\{, \}_A$  — постоянной.

Несложно заметить, что скобки  $\{, \}$  и  $\{, \}_\gamma$  являются *согласованными*, то есть любая их линейная комбинация  $\lambda\{, \} + \mu\{, \}_\gamma$ , где  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ , тоже является скобкой Пуассона на  $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ .

Обозначим через  $\mathfrak{g}_\gamma$  стабилизатор элемента  $\gamma \in \mathfrak{g}^*$  в алгебре Ли  $\mathfrak{g}$  в смысле коприсоединенного представления:

$$\mathfrak{g}_\gamma = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \text{ad}^*(\xi)\gamma = 0\}. \quad (1.3)$$

*Индексом* алгебры Ли называется минимальная размерность таких стабилизаторов:

$$\text{ind } \mathfrak{g} = \min_{\gamma \in \mathfrak{g}^*} \dim \mathfrak{g}_\gamma. \quad (1.4)$$

Иначе говоря, индекс равен коразмерности коприсоединенной орбиты общего положения в  $\mathfrak{g}^*$ .

Через  $G_\gamma$  обозначим стабилизатор элемента  $\gamma$  в группе  $G$  в смысле коприсоединенного действия:

$$G_\gamma = \{X \in G \mid \text{Ad}^*(X)\gamma = \gamma\}. \quad (1.5)$$

Тогда  $\mathfrak{g}_\gamma = \text{Lie } G_\gamma$ .

Элементы  $\gamma \in \mathfrak{g}^*$ , для которых размерность стабилизатора минимальна ( $\dim \mathfrak{g}_\gamma = \text{ind } \mathfrak{g}$ ), называются *регулярными*. Они образуют плотное открытое подмножество в  $\mathfrak{g}^*$ . Остальные элементы называются *сингулярными*, обозначим их множество через  $\mathfrak{g}_{\text{sing}}^*$ :

$$\mathfrak{g}_{\text{sing}}^* = \{\gamma \in \mathfrak{g}^* \mid \dim \mathfrak{g}_\gamma > \text{ind } \mathfrak{g}\}. \quad (1.6)$$

Для всякой подалгебры Ли  $\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{g}$  обозначим через  $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^\mathfrak{l}$  пуассонов центральный идеал  $\mathfrak{l}$ :

$$\mathcal{S}(\mathfrak{g})^\mathfrak{l} = \{F \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}) \mid \{\xi, F\} = 0 \text{ для всех } \xi \in \mathfrak{l}\}. \quad (1.7)$$

Аналогично, для всякой связной подгруппы Ли  $L \subseteq G$  обозначим через  $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^L$  подалгебру  $L$ -инвариантов:

$$\mathcal{S}(\mathfrak{g})^L = \{F \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}) \mid gF = F \text{ для всех } g \in L\}. \quad (1.8)$$

Если подалгебра  $\mathfrak{l}$  является алгеброй Ли связной подгруппы  $L \subseteq G$ , то  $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{l}} = \mathcal{S}(\mathfrak{g})^L$ .

Обозначим через  $F_\gamma \subseteq \mathcal{S}(\mathfrak{g})$  подалгебру Мищенко-Фоменко, т.е. подалгебру, порожденную всеми производными (всех порядков) от всех инвариантов вдоль элемента  $\gamma$ :

$$F_\gamma = \mathbb{C}[\partial_\gamma^k f \mid f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}, k = 0, \dots, \deg f - 1]. \quad (1.9)$$

Построенная таким образом алгебра всегда коммутативна относительно обеих скобок Пуассона  $\{, \}$  и  $\{, \}_\gamma$  [25]. Но она не всегда полна: например, при  $\gamma = 0$  алгебра  $F_\gamma$  совпадает с  $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ .

В случае, когда  $\text{trdeg } \mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = \text{ind } \mathfrak{g}$  и элемент  $\gamma$  регулярен, критерий полноты алгебры  $F_\gamma$  указан в работе [1]: алгебра  $F_\gamma$  полна тогда и только тогда, когда  $\text{codim}(\mathfrak{g}_\gamma)_{\text{sing}}^* \geq 2$ .

### 1.1.2 Случай редуکتивной алгебры Ли

Пусть теперь алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  редуکتивна. Тогда ее можно отождествить с дуальным пространством  $\mathfrak{g}^*$  при помощи невырожденного инвариантного скалярного умножения  $(, )$ . Также примем отождествления  $\mathcal{S}(\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$  и  $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$ . Теперь пуассоновы структуры можно определить на  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ . Обозначим через  $d_X \varphi$  дифференциал многочлена  $\varphi \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}]$  в точке  $X \in \mathfrak{g}$ . Тогда для произвольного элемента  $X \in \mathfrak{g}$  имеем:

$$\{\varphi, \psi\}(X) = (X, [d_X \varphi, d_X \psi]), \quad (1.10)$$

$$\{\varphi, \psi\}_A(X) = (A, [d_X \varphi, d_X \psi]), \quad (1.11)$$

где  $A \in \mathfrak{g}$ ,  $\varphi$  и  $\psi$  — многочлены на  $\mathfrak{g}$ , а  $d_X \varphi$  и  $d_X \psi$  рассматриваются как элементы алгебры Ли  $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$ .

Как отмечалось во введении, скобки Пуассона  $\{, \}$  и  $\{, \}_A$  можно рассматривать как кососимметрические билинейные формы  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{B}_A$  над полем  $\mathbb{C}(\mathfrak{g})$  на пространстве рациональных векторных полей на  $\mathfrak{g}$ . А именно, если  $\varphi, \psi \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ , то  $d\varphi$  и  $d\psi$  можно рассматривать как элементы пространства  $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}(\mathfrak{g})$ , и тогда

$$\{\varphi, \psi\} = \mathcal{B}(d\varphi, d\psi) \quad \text{и} \quad \{\varphi, \psi\}_A = \mathcal{B}_A(d\varphi, d\psi). \quad (1.12)$$

Введем соответствующие обозначения. Далее везде через  $\mathbb{K}$  будем обозначать поле рациональных функций на алгебре Ли  $\mathfrak{g}$ , то есть  $\mathbb{K} = \mathbb{C}(\mathfrak{g})$ .

Через  $X$  будем обозначать общий элемент из  $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}$ , то есть такой элемент, что для всех  $C \in \mathfrak{g}$  выполнено  $(X, C) = (C, \cdot) \in \mathfrak{g}^* \subseteq \mathbb{K}$ . В случае классических простых матричных алгебр Ли, матрица  $X$  составлена из элементов  $\mathbb{K}$ , которые задают координаты на пространстве  $\mathfrak{g}$ .

Тогда кососимметрические формы  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{B}_A$  выражаются следующим образом:

$$\mathcal{B}(B, C) = (X, [B, C]), \quad \mathcal{B}_A(B, C) = (A, [B, C]), \quad (1.13)$$

где  $B, C \in \mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}$  и через  $(, )$  обозначено продолжение скалярного произведения на  $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}$ .

В случае редуктивной алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  ее индекс совпадает с рангом:  $\text{ind } \mathfrak{g} = \text{rk } \mathfrak{g}$ , а для всех  $A \in \mathfrak{g}$  подалгебра  $\mathfrak{g}_A$  совпадает с централизатором  $\mathfrak{z}(A)$  в  $\mathfrak{g}$ , то есть:

$$\mathfrak{g}_A = \mathfrak{z}(A) = \{B \in \mathfrak{g} \mid [A, B] = 0\}. \quad (1.14)$$

Хорошо известно [11, Thm. 9], что алгебра инвариантов редуктивной алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  свободно порождена некоторыми однородными многочленами  $f_1, \dots, f_n$ , где  $n = \text{rk } \mathfrak{g}$  (такие многочлены будем называть *базисными инвариантами*). Поэтому в случае редуктивной алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  подалгебра Мищенко-Фоменко  $F_A$  порождается кратными производными от базисных инвариантов вдоль элемента  $A$ :

$$F_A = \mathbb{C}[\partial_A^k f_i \mid i = 1, \dots, n, k = 0, \dots, \deg f_i - 1]. \quad (1.15)$$

## 1.2 Алгебраический подход к построению полных систем функций в биинволюции

В этом разделе мы введем понятие полной системы функций в биинволюции на  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$  и опишем алгебраический подход к построению таких систем для редуктивных алгебр Ли  $\mathfrak{g}$ .

### 1.2.1 Полные системы функций в биинволюции

Говорят, что многочлены  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathfrak{g})$  *коммутируют* или *находятся в инволюции* относительно скобки  $\{, \}$ , если  $\{\varphi, \psi\} = 0$ . Семейство функций в биинволюции называется *полным* [4], если все функции в нем алгебраически независимы и их количество максимально, то есть равно  $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \text{ind } \mathfrak{g})$ .

Поиск полных семейств функций в биинволюции является одной из важных задач гамильтоновой механики, так как такие семейства отвечают вполне интегрируемым по Лиувиллю гамильтоновым системам на алгебрах Ли. Для большинства известных интегрируемых гамильтоновых систем их интегрируемость связана с наличием бигамильтоновой структуры (то есть с наличием пары согласованных скобок Пуассона).

Если многочлены  $\varphi$  и  $\psi$  Пуассон-коммутируют относительно двух согласованных скобок  $\{, \}$  и  $\{, \}_A$ , то говорят, что они находятся в *биинволюции*. Семейство функций в биинволюции называется *полным*, если все функции в нем алгебраически независимы и их количество максимально, то есть также равно  $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \text{ind } \mathfrak{g})$ .

Таким образом, если какие-то функции составляют полное семейство функций в биинволюции, то они также составляют полное семейство функций в инволюции (так как количество функций в таких семействах одинаково).

Пусть заданы две кососимметрические билинейные формы  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{G}$  на векторном пространстве  $V$ . Тогда подпространство  $U \subseteq V$  называется *изотропным* относительно  $\mathcal{F}$ , если для любых элементов  $u, v \in U$  выполнено  $\mathcal{F}(u, v) = 0$ . Изотропное подпространство называется *лагранжевым* относительно формы  $\mathcal{F}$ , если его размерность максимальна, то есть равна  $\frac{1}{2}(\dim V + \text{corank } \mathcal{F})$ . *Биизотропным* называется подпространство, изотропное относительно обеих форм  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{G}$ . Аналогично, *билагранжевым* называется биизотропное подпространство размерности  $\frac{1}{2}(\dim V + \min_{\lambda \in \mathbb{C}} \text{corank}(\mathcal{F} - \lambda \mathcal{G}))$ , где под  $\text{corank}(\mathcal{F} - \lambda \mathcal{G})$  при  $\lambda = \infty$  понимается  $\text{corank } \mathcal{G}$ . Если в качестве форм  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{G}$  рассматривать формы  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{B}_A$ , то размерности лагранжева подпространства (относительно  $\mathcal{B}$ ) и билагранжева подпространства (относительно  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{B}_A$ ) совпадают и равны  $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \text{ind } \mathfrak{g})$  (см. [4, Sect. 3]).

Из формул (1.12) получаем следующую связь между полными системами функций в биинволюции и билагранжевыми подпространствами: многочлены  $\varphi_1, \dots, \varphi_s$  задают полное семейство функций в биинволюции относительно  $\{, \}$  и  $\{, \}_A$  тогда и только тогда, когда их дифференциалы  $d\varphi_1, \dots, d\varphi_s$  составляют базис билагранжева подпространства относительно форм  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{B}_A$ .

Таким образом, чтобы получить полное семейство функций в биинволюции, достаточно найти базис билагранжева подпространства и «проинтегрировать» его.

Для нахождения базиса билагранжева пространства, достаточно найти базис, в котором пара форм  $\mathcal{B}, \mathcal{B}_A$  приводится к каноническому виду Жордана-Кронекера.



Канонический вид пары кососимметрических билинейных форм определен однозначно (с точностью до перестановки блоков). Любой базис, в котором пара форм имеет канонический вид, будем называть *каноническим*.

Из теоремы 1.1 видно, что кронекеровы блоки имеют нечетный размер, а жордановы — четный. Если пара форм  $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  приведена к каноническому виду, то базис билагранжева подпространства составляют вторые половины базисов каждого блока (для кронекеровых блоков это будут «бóльшие половины»).

Таким образом, чтобы построить полную систему функций в биинволюции, достаточно найти часть канонического базиса пары форм  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$  и «проинтегрировать ее по  $X$ ». Базис билагранжева подпространства, построенный таким образом, распадается на две части: жорданову и кронекерову. Будем так же называть и соответствующие части полной системы функций в биинволюции.

Для редутивных алгебр Ли  $\mathfrak{g}$  про жордановы блоки пары форм  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$  известно (см. [4, п. 10]) следующее: они могут быть только размера  $2 \times 2$  и с собственным значением  $\lambda = \infty$ . Другими словами, жорданова часть канонического вида формы  $\mathcal{B}_A$  — это нулевая матрица, а формы  $\mathcal{B}$  — это канонический вид кососимметрической билинейной формы.

Если размеры кронекеровых блоков равны  $2m_0 + 1, \dots, 2m_k + 1$ , то числа  $m_0, \dots, m_k$  называются *индексами Кронекера* пары форм  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$ . Из канонического вида формы  $\mathcal{B}_A$  вытекает следующее утверждение:

**Замечание 1.1.** *Для любого элемента  $A$  редутивной алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  сумма индексов Кронекера пары форм  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$  равна половине ранга формы  $\mathcal{B}_A$ :*

$$m_0 + \dots + m_k = \frac{1}{2} \operatorname{rk} \mathcal{B}_A. \quad (1.16)$$

Наконец, отметим, что теорема Жордана–Кронекера используется в работе для пары форм  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$  над незамкнутым полем  $\mathbb{K} = \mathbb{C}(\mathfrak{g})$ . Тем не менее в рассматриваемом случае она верна, так как для всех жордановых блоков их собственные значения равны бесконечности:  $\lambda = \infty$ .

### 1.2.3 Метод Кронекера

Для нахождения канонического базиса для кронекеровых блоков (а точнее, второй его половины) можно воспользоваться методом Кронекера, который заключается в следующем. Для пары кососимметрических билинейных форм  $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  в пространстве

$V$  над полем  $\mathbb{k}$  рассматривается подмодуль  $\mathcal{Z} = \text{Ker}(\mathcal{F} - t\mathcal{G})$  модуля  $V[t] := V \otimes \mathbb{k}[t]$  над кольцом  $\mathbb{k}[t]$  и находится его *минимальный базис* — базис, старшие коэффициенты элементов которого линейно независимы.

**Теорема 1.2** (Кронекер; см. [21], гл.12, §5). *Степени многочленов минимального базиса подмодуля  $\mathcal{Z}$  — это индексы Кронекера пары  $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ , а коэффициенты этих многочленов составляют кронекерову часть базиса билагранжсева подпространства.*

В нашем случае  $\mathcal{Z} = \text{Ker}(\mathcal{B} - t\mathcal{B}_A) \subset \mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}[t]$ . Покажем, что в этом случае можно сразу выписать некоторые порождающие модуля  $\mathcal{Z}$ . Обозначим через  $f_1, \dots, f_n$  базисные инварианты алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ . Продолжим их на  $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}[t]$  и будем рассматривать их дифференциалы в точке  $Y \in \mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}[t]$  как элементы из  $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}[t]$ .

**Теорема 1.3.** *Пусть  $\mathfrak{g}$  — одна из классических простых алгебр Ли. Тогда подмодуль  $\mathcal{Z}$  порождается дифференциалами базисных инвариантов в точке  $X - tA$  как  $\mathbb{K}[t]$ -модуль:*

$$\mathcal{Z} = \langle d_{X-tA}f_1, d_{X-tA}f_2, \dots, d_{X-tA}f_n \rangle_{\mathbb{K}[t]}. \quad (1.17)$$

*Доказательство.* Для краткости, положим  $\mathfrak{g}[t] = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}[t]$  и  $\mathfrak{g}(t) = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}(t)$ .

Из формул (1.13) и инвариантности скалярного произведения следует, что

$$\mathcal{B}(B, C) - t\mathcal{B}_A(B, C) = (X - tA, [B, C]) = (C, [X - tA, B]). \quad (1.18)$$

Скалярное произведение также невырождено, значит,  $\text{Ker}(\mathcal{B} - t\mathcal{B}_A) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}[t]}(X - tA)$ , то есть модуль  $\mathcal{Z}$  совпадает с централизатором элемента  $X - tA$  в  $\mathfrak{g}[t]$ . Производные в точке  $Y$  от базисных инвариантов всегда лежат в централизаторе элемента  $Y$ , поэтому  $d_{X-tA}f_i \in \mathcal{Z}$  при  $i = 1, \dots, n$ . Обозначим через  $\tilde{\mathcal{Z}}$  подмодуль, порожденный дифференциалами базисных инвариантов:  $\tilde{\mathcal{Z}} = \langle d_{X-tA}f_1, d_{X-tA}f_2, \dots, d_{X-tA}f_n \rangle_{\mathbb{K}[t]}$ . Тогда  $\tilde{\mathcal{Z}} \subseteq \mathcal{Z}$ , причем модули  $\mathcal{Z}$  и  $\tilde{\mathcal{Z}}$  свободны как подмодули свободного модуля  $\mathfrak{g}[t]$ . Таким образом, достаточно доказать, что их ранги совпадают и что подмодуль  $\tilde{\mathcal{Z}}$  примитивен в  $\mathfrak{g}[t]$ , т.е. фактор по нему не имеет кручения.

Алгебра  $\mathfrak{g}$  редуکتивна, и по критерию Костанта (см. [11, Thm. 9]) элемент  $Y$  регулярен тогда и только тогда, когда дифференциалы базисных инвариантов в точке  $Y$  составляют базис централизатора  $\mathfrak{z}(Y)$ . Покажем, что элемент  $X - tA \in \mathfrak{g}(t)$  является регулярным для любого  $A \in \mathfrak{g}$ . Действительно, элемент  $X \in \mathfrak{g}(t)$  регулярен, а сдвигу элемента  $X$  с координатами  $\{x_i\}$  на фиксированный элемент  $tA$  с координатами  $\{ta_i\}$

соответствует автоморфизм  $x_i \mapsto x_i - ta_i$  поля  $\mathbb{K} = \mathbb{C}(\{x_i\})$ . Следовательно, дифференциалы базисных инвариантов остаются линейно независимыми над  $\mathbb{K}(t)$  при замене  $X$  на  $X - tA$ . Следовательно,  $\dim \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}(t)}(X - tA) = n$ . Поэтому

$$\mathrm{rk} \mathcal{Z} = \mathrm{rk} \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}[t]}(X - tA) = \dim \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}(t)}(X - tA) = n = \mathrm{rk} \tilde{\mathcal{Z}},$$

где последнее равенство следует из того, что элементы  $d_{X-tA}f_1, \dots, d_{X-tA}f_n$  линейно независимы над  $\mathbb{K}(t)$ .

Подмодуль  $\tilde{\mathcal{Z}}$  примитивен в  $\mathfrak{g}[t]$  тогда и только тогда, когда все его инвариантные множители равны 1 (с точностью до обратимого элемента кольца). Это равносильно тому, что НОД всех миноров порядка  $n$  матрицы размера  $n \times \dim \mathfrak{g}$ , составленной из элементов матриц  $d_{X-tA}f_1, \dots, d_{X-tA}f_n$ , равен 1.

Предположим противное: пусть НОД миноров порядка  $n$  равен  $f(X, t) \in \mathbb{K}[t]$ , причем  $\deg_t f \geq 1$ . Положим

$$M = \{(X, t) \in \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C} : f(X, t) = 0 \text{ и все коэффициенты по } t \text{ определены в } X\},$$

$$\tilde{M} = \{(X, t) \in \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C} : \text{элемент } X - tA \text{ сингулярен}\}.$$

Заметим, что для всех  $(X, t) \in M$  дифференциалы базисных инвариантов линейно зависимы в точке  $X - tA$ ; следовательно,  $M \subseteq \tilde{M}$ . Хорошо известно (см. [4, Sect. 7]), что для редуktивных алгебр Ли  $\mathrm{codim} \mathfrak{g}_{\mathrm{sing}} = 3$ , поэтому  $\mathrm{codim} \tilde{M} \geq 3$ , т.к.  $\tilde{M}$  — образ  $\mathfrak{g}_{\mathrm{sing}} \times \mathbb{C}$  при автоморфизме  $(Y, t) \mapsto (Y + tA, t)$  многообразия  $\mathfrak{g} \times \mathbb{C}$ . Но  $\mathrm{codim} M = 1$ , таким образом, мы получили противоречие, и утверждение доказано.  $\square$

## 1.3 Случай регулярного элемента

### 1.3.1 Метод сдвига аргумента Мищенко-Фоменко

Пусть алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  по-прежнему редуktивна, а элемент  $A \in \mathfrak{g}$  регулярен. Тогда в разложении Жордана-Кронекера пары форм  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$  нет жордановых блоков. Значит, чтобы построить полную систему функций в биинволюции достаточно найти минимальный базис модуля  $\mathcal{Z} = \mathrm{Ker}(\mathcal{B} - t\mathcal{B}_A)$  и проинтегрировать его коэффициенты. По теореме 1.3 модуль  $\mathcal{Z}$  порожден дифференциалами базисных инвариантов в точке  $X - tA$ . Покажем, что этот базис является минимальным. Действительно, его старшие коэффициенты по переменной  $t$  равны дифференциалам базисных инвариантов в точке

$A$ , то есть  $d_A f_1, d_A f_2, \dots, d_A f_n$ . Но эти элементы линейно независимы, так как элемент  $A$  регулярен.

Таким образом, чтобы получить полную систему функций в бинволюции, достаточно взять дифференциалы базисных инвариантов, разложить их по переменной  $t$  и проинтегрировать по переменной  $X$ . Но переменные  $t$  и  $X$  независимы, значит, можно сначала проинтегрировать дифференциалы базисных инвариантов в точке  $X - tA$ , а потом разложить их по переменной  $t$ . Таким образом мы пришли к классическому методу сдвига аргумента Мищенко-Фоменко:

**Теорема 1.4** (Мищенко–Фоменко, см. [25]). *Пусть элемент  $A$  редуکتивной алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  регулярен,  $f_1, \dots, f_n$  – базисные инварианты со степенями  $d_i = \deg f_i$ . Обозначим через  $f_{k,i}$  коэффициенты функций  $f_k(X - tA)$ :*

$$f_k(X - tA) = f_{k,0}(X) + f_{k,1}(X)t + \dots + f_{k,d_k}(X)t^{d_k}. \quad (1.19)$$

Тогда функции  $\{f_{k,i} \mid k = 1, \dots, n, i = 0, \dots, d_k - 1\}$  составляют полную систему функций в бинволюции относительно скобок  $\{, \}$  и  $\{, \}_A$ .

**Следствие 1.5.** *Пусть элемент  $A$  редуکتивной алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  регулярен. Тогда индексы Кронекера пары  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$  равны степеням базисных инвариантов, уменьшенным на единицу.*

### 1.3.2 Индексы Кронекера классических простых алгебр Ли

В качестве основной алгебры Ли мы будем рассматривать одну из четырех классических простых комплексных алгебр Ли:  $\mathfrak{sl}_n$ ,  $\mathfrak{so}_{2n+1}$ ,  $\mathfrak{sp}_{2n}$  и  $\mathfrak{so}_{2n}$ . Также нам понадобится редуکتивная алгебра Ли  $\mathfrak{gl}_n$ .

Алгебры Ли  $\mathfrak{gl}_n$ ,  $\mathfrak{sl}_n$ ,  $\mathfrak{so}_n$  и  $\mathfrak{sp}_{2n}$  задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathfrak{gl}_n &= \{X, X \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})\}, \\ \mathfrak{sl}_n &= \{X \in \mathfrak{gl}_n, \text{tr } X = 0\}, \\ \mathfrak{so}_n &= \{X \in \mathfrak{gl}_n, X^T + X = 0\}, \\ \mathfrak{sp}_{2n} &= \{X \in \mathfrak{gl}_{2n}, (\Omega X)^T = \Omega X\}, \end{aligned}$$

где  $\Omega$  обозначает матрицу размера  $2n \times 2n$ , задающую стандартную кососимметрическую билинейную форму:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

Коммутатор и скалярное произведение двух элементов задаются на всех перечисленных алгебрах Ли следующими формулами:

$$[X, Y] = XY - YX, \quad (X, Y) = \operatorname{tr} XY. \quad (1.20)$$

Хорошо известно, что в качестве базисных инвариантов простой классической алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  можно взять ненулевые следы степеней матрицы  $X \in \mathfrak{g}$ , а в случае  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$  многочлен  $\operatorname{tr} X^{2n}$  необходимо заменить на пфаффиан  $\operatorname{pf}(X)$ . Таким образом:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n : & \quad \operatorname{rk} \mathfrak{g} = n - 1, \text{ инварианты: } \operatorname{tr} X^2, \operatorname{tr} X^3, \dots, \operatorname{tr} X^n; \\ \mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1} : & \quad \operatorname{rk} \mathfrak{g} = n, \text{ инварианты: } \operatorname{tr} X^2, \operatorname{tr} X^4, \dots, \operatorname{tr} X^{2n}; \\ \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n} : & \quad \operatorname{rk} \mathfrak{g} = n, \text{ инварианты: } \operatorname{tr} X^2, \operatorname{tr} X^4, \dots, \operatorname{tr} X^{2n}; \\ \mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n} : & \quad \operatorname{rk} \mathfrak{g} = n, \text{ инварианты: } \operatorname{tr} X^2, \operatorname{tr} X^4, \dots, \operatorname{tr} X^{2n-2}, \operatorname{pf}(X). \end{aligned}$$

Матрица  $A \in \mathfrak{g}$  является регулярным элементом алгебры Ли  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ ,  $\mathfrak{sp}_{2n}$  или  $\mathfrak{so}_{2n+1}$  тогда и только тогда, когда ее характеристический многочлен совпадает с минимальным или, что то же самое, когда каждому собственному значению соответствует ровно одна жорданова клетка. В случае  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$  регулярными являются матрицы, у которых ненулевым собственным значениям соответствует ровно одна жорданова клетка, а собственному значению  $\lambda = 0$  соответствуют две клетки размеров  $n_0 - 1$  и 1. Сингулярные матрицы — это все остальные, причем коразмерность многообразия всех сингулярных матриц равна 3.

По следствию 1.5 получаем, что для регулярных элементов  $A \in \mathfrak{g}$  индексы Кронекера пары форм  $(\mathcal{B}_A, \mathcal{B})$  равны:

- 1, 2, 3, ...,  $n - 1$ , при  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ ,
- 1, 3, 5, ...,  $2n - 1$ , при  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$ ,
- 1, 3, 5, ...,  $2n - 1$ , при  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$ ,
- 1, 3, 5, ...,  $2n - 3$ ,  $n - 1$ , при  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$ .

В работах [14, 15] найдены индексы Кронекера пары форм  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$  для всех сингулярных элементов  $A$  из алгебр Ли  $\mathfrak{sl}_n$  и  $\mathfrak{sp}_{2n}$  и для некоторых элементов  $A$  из  $\mathfrak{so}_n$ . Мы не будем приводить эти результаты в этом разделе, так как они совпадают с результатами теорем 3.1 и 3.2, доказанных в главе 3.

## 1.4 Индексы Кронекера пары форм на алгебре Ли

В этом разделе мы покажем, как изучение канонического вида пары форм  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$  связано с исследованием структуры редутивных алгебр Ли.

С каждым элементом  $A$  редутивной алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  связана кососимметрическая билинейная форма  $b_A$  на  $\mathfrak{g}$ , задаваемая формулой  $b_A(X, Y) = (A, [X, Y])$ , где  $(, )$  — инвариантное скалярное умножение на  $\mathfrak{g}$ . Если отождествить пространства  $\mathfrak{g}$  и  $\mathfrak{g}^*$  с помощью  $(, )$ , то форме  $b_A$  соответствует оператор  $\text{ad}(A)$ . Поэтому изучение инвариантов билинейных форм  $b_A$  представляет собой естественный способ исследования структуры редутивной алгебры Ли.

В отличие от оператора  $\text{ad}(A)$  форма  $b_A$  никакими инвариантами не обладает (за исключением ранга), однако нетривиальные инварианты появятся как только мы рассмотрим не одну, а две такие формы  $b_A$  и  $b_B$ . Если элемент  $A$  регулярен, а элемент  $B$  общего положения (из открытого плотного множества), то канонический вид пары форм  $b_B, b_A$  известен: жордановых блоков нет, а индексы Кронекера совпадают с экспонентами алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  (то есть со степенями базисных инвариантов, уменьшенными на единицу). Вопрос об инвариантах Жордана-Кронекера пары  $(b_B, b_A)$ , где элемент  $A$  сингулярный, а элемент  $B$  общего положения, в общем случае остается открытым.

Покажем, что изучение индексов Кронекера пары форм  $\mathcal{B}, \mathcal{B}_A$  решает поставленную задачу:

**Лемма 1.6.** *Пусть алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  редутивна, элемент  $A \in \mathfrak{g}$  фиксирован, а элемент  $B \in \mathfrak{g}$  общего положения. Тогда индексы Кронекера пары форм  $(b_B, b_A)$  равны индексам Кронекера пары форм  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$*

*Доказательство.* Индексы Кронекера могут быть выражены через ранги некоторых матриц над полем определения рассматриваемых форм (см. [23, утв. 8]), а ранг матрицы над  $\mathbb{K}$  такой же, как у ее значения в точке общего положения. Поэтому для элемента  $B$  общего положения индексы Кронекера пары форм  $(b_B, b_A)$  на  $\mathfrak{g}$  над  $\mathbb{C}$  равны индексам Кронекера пары форм  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$  на  $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}$  над  $\mathbb{K}$ .  $\square$

## Глава 2

# Кронекерова часть полной системы функций в биинволюции на алгебре Ли $\mathfrak{gl}_n$

Настоящая глава посвящена построению кронекеровой части полной системы функций в биинволюции относительно пары скобок  $\{, \}$  и  $\{, \}_A$  на алгебре Ли  $\mathfrak{gl}_n$  с помощью метода Кронекера. Для каждого  $A \in \mathfrak{gl}_n$  мы предъявим многочлены, составляющие кронекерова часть полной системы функций в биинволюции.

### 2.1 Формулировка результатов

Пусть  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$  — различные собственные значения матрицы  $A \in \mathfrak{gl}_n$ , и собственному значению  $\lambda_k$  соответствуют жордановы клетки порядков  $n_{k,1} \geq \dots \geq n_{k,i_k}$ . Обозначим через  $m$  максимум среди всех  $i_k$ :

$$m = \max\{i_k, k = 1, \dots, s\}, \quad (2.1)$$

и для каждого  $i$  от 1 до  $m$  положим

$$l_i = \sum_{j=1}^s n_{j,i}, \text{ где } n_{j,i} = 0 \text{ при } i > i_j. \quad (2.2)$$

Сопоставим матрице  $A$  диаграмму Юнга со строками длин  $l_1 \geq \dots \geq l_m$ . Если матрица  $A$  регулярна, то ее диаграмма Юнга будет состоять из одной строки длины  $n$  (напомним, что  $l_1$  — это степень минимального многочлена), а для скалярных матриц —

из одного столбца высоты  $n$ . Заполним клетки этой диаграммы числами от 0 до  $N - 1$  слева направо и сверху вниз. Обозначим через  $p_i$  количество строк, которые находятся над клеткой с номером  $i$ .

Пусть  $\{\mu_0, \dots, \mu_{N-1}\}$  — собственные числа матрицы  $A$ , упорядоченные следующим образом: сначала последовательно идут собственные числа в клетках размеров  $n_{1,1}, n_{2,1}, \dots$ , затем — в клетках размеров  $n_{1,2}, n_{2,2}, \dots$  и т.д.

$$\{\mu_0, \dots, \mu_{n-1}\} = \underbrace{\{\lambda_1, \dots, \lambda_1\}}_{n_{1,1}}, \dots, \underbrace{\{\lambda_s, \dots, \lambda_s\}}_{n_{s,1}}, \dots, \underbrace{\{\lambda_1, \dots, \lambda_1\}}_{n_{1,m}}, \dots, \underbrace{\{\lambda_s, \dots, \lambda_s\}}_{n_{s,m}}. \quad (2.3)$$

**Пример 1.** Рассмотрим матрицу  $A \in \mathfrak{gl}_7$  с тремя собственными значениями  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , причем значению  $\lambda_1$  соответствует одна жорданова клетка порядка  $n_{1,1} = 2$ , значению  $\lambda_2$  соответствуют две жордановы клетки порядков  $n_{2,1} = n_{2,2} = 1$ , а значению  $\lambda_3$  — три клетки порядков  $n_{3,1} = n_{3,2} = n_{3,3} = 1$ . Тогда  $l_1 = 4, l_2 = 2, l_3 = 1$ , соответствующая диаграмма Юнга изображена на рисунке 2.1, а  $\{\mu_0, \dots, \mu_{n-1}\} = \{\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_3\}$ .

0	1	2	3
4	5		
6			

Рис. 2.1: Диаграмма Юнга, соответствующая матрице  $A$  из примера 1.

Наконец, определим многочлены  $q_N, \dots, q_0 \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}][t, z]$  и многочлены  $r_{N-1}, \dots, r_0 \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}][t]$  с помощью формул

$$q_N(z) = \chi_{X-tA}(z), \quad q_{k+1}(z) = (z + \mu_k t)q_k(z) + r_k, \quad (2.4)$$

где  $\chi_C$  обозначает характеристический многочлен матрицы  $C$ . Таким образом,  $q_k(z)$  — это неполное частное при делении многочлена  $\chi_{X-tA}(z)$  на  $(z + \mu_k t) \cdot \dots \cdot (z + \mu_{N-1} t)$ . В случае нильпотентного элемента  $A$  элементы  $r_k(t)$  — это просто коэффициенты характеристического многочлена матрицы  $X - tA$ .

Далее, подставим в многочлены  $q_k(z)$  матрицу  $X - tA$  в качестве аргумента  $z$ . Отметим, что многочлены  $q_i$  и  $r_i$  зависят от упорядочения собственных значений матрицы  $A$ .

Следующая теорема описывает кронекерову часть полной системы функций в бивольюции относительно пары скобок  $\{, \}$  и  $\{, \}_A$ , а также соответствующий канонический базис билагранжева подпространства и индексы Кронекера пары форм  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$ .

**Теорема 2.1.** Для любой матрицы  $A \in \mathfrak{gl}_n$  выполнено:

- (i) Индексы Кронекера пары форм  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$  равны  $\{i - p_i \mid i = 0, \dots, n - 1\}$ .
- (ii) Многочлены  $\{q_i(X - tA) \mid i = 0, \dots, n - 1\}$  составляют минимальный базис модуля  $\mathcal{Z}$ .
- (iii) Коэффициенты многочленов  $\{q_i(X - tA) \mid i = 0, \dots, n - 1\}$  по переменной  $t$  составляют кронекерову часть канонического базиса пары форм  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$ .
- (iv) Коэффициенты многочленов  $\{r_i(t) \mid i = 0, \dots, n - 1\}$  составляют кронекерову часть полной системы функций в бинволюции, причем  $dr_k = -q_k(X - tA)$ .

## 2.2 Доказательство результатов

### 2.2.1 Сумма индексов Кронекера пары $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$

Заметим, что многочлены  $q_k(x)$  являются приведенными многочленами степени  $k$  от  $x$ . Значит, элементы  $q_0(X - tA), \dots, q_{n-1}(X - tA)$  составляют базис модуля  $\mathcal{Z}$ . Проверку минимальности этого базиса можно явно не проводить, а воспользоваться тем, что из любого базиса можно получить минимальный с помощью преобразований, при которых степени одного из многочленов уменьшаются, а у остальных остаются такими же. А именно, при наличии линейной зависимости между старшими коэффициентами достаточно из базисного элемента наибольшей степени вычитать элементы меньших степеней с подходящими коэффициентами.

По замечанию 1.2.2 имеем  $m_0 + \dots + m_{n-1} = \frac{1}{2} \operatorname{rk} \mathcal{B}_A$ , где  $m_0, \dots, m_{n-1}$  — индексы Кронекера. Значит, если сумма степеней какого-то базиса модуля  $\mathcal{Z}$  равна половине ранга формы  $\mathcal{B}_A$ , то этот базис является минимальным. Таким образом, доказательство пунктов (i) — (iii) теоремы 2.1 сводится к доказательству следующих предложения и леммы:

**Предложение 2.2.** Степени многочленов  $q_0(X - tA), \dots, q_{n-1}(X - tA)$  удовлетворяют неравенствам  $\deg_t q_i(X - tA) \leq m_i$ , где  $m_i = i - p_i$ .

**Лемма 2.3.** Пусть числа  $m_i$  выражаются по формуле  $m_i = i - p_i$ . Тогда

$$m_0 + \dots + m_{n-1} = \frac{1}{2} \operatorname{rk} \mathcal{B}_A. \quad (2.5)$$

*Доказательство леммы 2.3.* Хорошо известно (см., например, [8]), что  $\dim \mathfrak{z}(A) = \sum (l_j^*)^2 - 1$ , где  $l_j^*$  — высоты столбцов диаграммы  $\Lambda$  со строками длин  $l_1, \dots, l_m$ . Таким образом, надо доказать, что

$$2(m_0 + \dots + m_{n-1}) = n^2 - \sum_j (l_j^*)^2. \quad (2.6)$$

По определению чисел  $m_i$  имеем:

$$2(m_0 + \dots + m_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} (i - p_i) = n^2 - n - 2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} p_i. \quad (2.7)$$

Заметим, что если записать числа  $p_i$  в соответствующие клетки диаграммы Юнга, то в  $k$ -том столбце будут стоять числа  $0, 1, \dots, l_k^* - 1$ . Значит, просуммировав по столбцам, получим:

$$2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} p_i = l_1^*(l_1^* - 1) + \dots + l_q^*(l_q^* - 1) = \sum_j (l_j^*)^2 - n. \quad (2.8)$$

Из уравнений (2.7) и (2.8) следует требуемое равенство.  $\square$

Доказательство предложения 2.2 дано в конце параграфа 2.2.4.

## 2.2.2 Сведение к полупростым матрицам

Покажем, что предложение 2.2 достаточно доказать только для полупростых матриц  $A$ .

**Предложение 2.4.** *Для каждой матрицы  $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  со степенями инвариантных множителей  $l_1, \dots, l_m$  найдется такое семейство полупростых матриц  $\{A_s, s \in \mathbb{C}^*\}$  с такими же степенями инвариантных множителей, что  $A_s \xrightarrow{s \rightarrow 0} A$ .*

Предложение 2 следует из хорошо известного утверждения о пластах в  $\mathfrak{gl}_n$ . А именно, полупростые элементы пласта образуют в нем плотное открытое подмножество (см. [12]). Для полноты изложения приведём элементарное доказательство этого предложения.

*Доказательство.* Пусть сначала  $A$  — матрица с единственным собственным значением  $\lambda$  и с жордановыми клетками размеров  $l_1 \geq \dots \geq l_m$ . Определим матрицы  $A_s$  следующим образом:

$$A_s := A + s \cdot \text{diag}\{1, 2, \dots, l_1, 1, 2, \dots, l_2, \dots, 1, 2, \dots, l_m\}. \quad (2.9)$$

Тогда собственные значения матрицы  $A_s$  — это числа  $\lambda + s, \dots, \lambda + sl_1$ , причем при  $s \neq 0$  кратность собственного значения  $\lambda + sj$  равна  $l_j^*$ , а соответствующее корневое подпространство является собственным. Значит, семейство матриц  $\{A_s, s \in \mathbb{C}^*\}$  — ис- комое.

Пусть теперь  $A$  — произвольная матрица. Для каждого собственного значения  $\lambda_k$  построим матрицу  $(A_k)_s$ , как описано выше, и объединим их в блочно-диагональную матрицу  $A_s$ . Тогда при  $0 < s < \varepsilon$  все собственные значения  $\lambda_k + sj$  различны и имеют кратность  $(n_k)_j^*$ , где  $(n_k)_j^*$  — высота  $j$ -го столбца диаграммы Юнга со строками длин  $n_{k,1}, \dots, n_{k,i_k}$ . Значит, полученное семейство будет искомым. Предложение доказано.  $\square$

Очевидно, что при предельном переходе числа  $m_i$  не изменяются, т.к. зависят только от степеней инвариантных множителей, а числа  $\deg_t q_k(X - tA_s)$  не увеличиваются. Таким образом, предложение 2.2 достаточно доказать только для полупростых матриц.

### 2.2.3 Оценка степеней по $t$ многочленов $r_k(t)$

**Предложение 2.5.** Пусть матрица  $A$  полупроста. Тогда  $\deg_t r_k \leq m_k$ .

*Доказательство.* Заметим, что алгоритм (2.4) последовательного деления с остатком на  $z + \mu_k t$  можно применить к любому многочлену  $f \in \mathbb{K}[z][t]$ , причем он будет линеен над  $\mathbb{K}$ . Считая, что  $A = \text{diag}\{\mu_0, \dots, \mu_{n-1}\}$ , перепишем многочлен  $\chi_{X-tA}(z) = \det(X - (tA + zE))$  в следующем виде:

$$\chi_{X-tA}(z) = \sum_{I \subseteq \{0, \dots, n-1\}} \alpha_I \cdot f_I(z), \quad \text{где } f_I = \prod_{k \in I} (z + \mu_k t) \quad \text{и } \alpha_I \in \mathbb{K}. \quad (2.10)$$

Поэтому лемму достаточно доказать для остатков, полученных при последовательном делении многочленов  $f_I$ ,  $I \subseteq \{0, \dots, n-1\}$ . Далее  $q_k$  и  $r_k$  обозначают те неполные частные и остатки, которые при этом получаются.

Отметим на диаграмме Юнга матрицы  $A$  все клетки, соответствующие элементам  $I$ . Многочлен  $f_I$  зависит только от количества клеток, отмеченных в каждом столбце, поэтому можно считать, что в каждом столбце отмечены только несколько нижних клеток.

Положим  $s = \max\{i : i \notin I\}$ . Тогда  $r_k = 0$  при  $k > s$ , т.к.

$$f_I = q_{s+1} \prod_{k=s+1}^{n-1} (z + \mu_k t). \quad (2.11)$$

По построению клетка с номером  $s$  и все клетки строго над ней (в количестве  $p_s$ ) не отмечены, следовательно,  $\deg f_I \leq n - (p_s + 1)$ . А значит,

$$\deg_t r_s \leq \deg_t q_{s+1} = \deg_t f_I - (n - s - 1) \leq n - (p_s + 1) - (n - s - 1) = s - p_s = m_s.$$

Таким образом, для  $k \geq s$  утверждение леммы доказано. При следующих делениях с остатком степени неполных частных каждый раз будут уменьшаться на 1, тогда как числа  $m_k$  будут уменьшаться на 1 или 0. Значит, неравенство  $\deg r_k \leq m_k$  сохранится.  $\square$

## 2.2.4 Явный вид $r_k$ и $q_k(X - tA)$ и связь $dr_k = -q_k(X - tA)$

**Лемма 2.6.** *При делении многочленов с остатком степенные суммы их корней с показателями, не превышающими степень неполного частного, вычитаются.*

Пусть  $M = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$  — корни делимого (с учетом кратностей), а  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}\}$  и  $N = \{\nu_1, \dots, \nu_k\}$  — корни делителя и неполного частного соответственно. Обозначим через  $p_i(L)$  сумму  $i$ -ых степеней элементов множества  $L$ . Тогда лемма утверждает, что  $p_i(N) = p_i(M) - p_i(\Lambda)$  при  $i = 1, \dots, k$ .

*Доказательство.* При умножении неполного частного на делитель степенные суммы их корней складываются, а добавление остатка не влияет на степенные суммы с номерами, не превосходящими степени неполного частного. Следовательно, получаем

$$p_i(M) = p_i(\Lambda) + p_i(N) \text{ при } i = 1, \dots, k, \quad (2.12)$$

и тем самым лемма доказана.  $\square$

Выразим элементарные симметрические многочлены  $e_1, \dots, e_n$  от  $n$  переменных через степенные суммы  $p_1, \dots, p_n$ :  $e_i = E_i(p_1, \dots, p_i)$ .

Отметим, что многочлены  $E_i \in \mathbb{C}[y_1, \dots, y_i]$  не зависят от  $n$ , как следует из тождеств Ньютона. Учитывая, что  $q_k(x)$  — неполное частное при делении многочлена  $\chi_{X-tA}(x)$  на  $(x + \mu_k t) \cdot \dots \cdot (x + \mu_{n-1} t)$ , из леммы 2.6 получим, что

$$q_k(x) = x^k - E_1(y_1)x^{k-1} + \dots + (-1)^k E_k(y_1, \dots, y_k), \quad (2.13)$$

где  $y_i = \text{tr}(X - tA)^i - (\mu_k^i + \dots + \mu_{n-1}^i)(-t)^i$ .

**Лемма 2.7.** *Многочлен  $r_k(x)$  в явном виде записывается следующим образом:  $r_k(x) = (-1)^{k+1} E_{k+1}(y_1, \dots, y_k)$ , где  $y_i = \text{tr}(X - tA)^i - (\mu_k^i + \dots + \mu_{n-1}^i)(-t)^i$ .*

*Доказательство.* Домножим  $q_{k+1}(x)$  на  $x$  и разделим полученное произведение с остатком на  $x + \mu_k t$ . Получим  $xq_{k+1}(x) = (x + \mu_k t)b_k(x) + c_k$ . По лемме 2.6 степенные суммы корней многочлена  $b_k$  равны

$$p_i = \operatorname{tr}(X - tA)^i - (\mu_{k+1}^i + \dots + \mu_{n-1}^i)(-t)^i - (-\mu_k t)^i. \quad (2.14)$$

С другой стороны, очевидно, что  $b_k(x) = xq_k(x) + r_k$ , т.е.  $r_k$  — свободный член многочлена  $b_k$ , а значит, является произведением его корней с точностью до знака.  $\square$

**Лемма 2.8.**  $\frac{\partial E_k}{\partial y_j} = \frac{(-1)^{j+1}}{j} E_{k-j}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим многочлен степени  $k$  со степенными суммами корней  $p_1, \dots, p_k$ . При умножении данного многочлена на  $x^j - t$  степенные суммы с номерами, не кратными  $j$ , не меняются, а к степенной сумме с номером  $m_j$  добавляется  $jt^m$ . Приравняем коэффициенты при степени  $x^j$  полученных многочленов, получим

$$(-1)^k E_k - (-1)^{k-j} E_{k-j} t = (-1)^k E_k(p_1, \dots, p_{j-1}, p_j + jt, p_{j+1}, \dots, p_{2j} + jt^2, \dots).$$

Для доказательства леммы достаточно продифференцировать полученное равенство по  $t$  при  $t = 0$ .  $\square$

**Предложение 2.9.** *Многочлены  $r_k$  и  $q_k(X - tA)$  связаны следующим соотношением:*

$$dr_k = -q_k(X - tA). \quad (2.15)$$

*Доказательство.* Положим  $y_i = \operatorname{tr}(X - tA)^i - (\mu_k^i + \dots + \mu_{n-1}^i)(-t)^i$ . Учитывая, что  $dy_i = i \operatorname{tr}(X - tA)^{i-1}$  и лемму 2.8, получим

$$\begin{aligned} dE_{k+1}(y_1, \dots, y_{k+1}) &= \sum \frac{\partial E_{k+1}}{\partial y_j} dy_j = \sum \frac{\partial E_{k+1}}{\partial y_j} j (X - tA)^{j-1} = \\ &= \sum (-1)^{j+1} E_{k+1-j}(y_1, \dots, y_{k+1-j}) (X - tA)^{j-1} = (-1)^k q_k(X - tA). \end{aligned}$$

$\square$

*Доказательство предложения 2.2.* Напомним, что по предложению 2.4 утверждение достаточно доказать только для полупростых матриц  $A$ . По предложению 2.9 имеем  $q_k(X - tA) = -dr_k$ , а по предложению 2.5 получаем  $\deg_t r_k \leq m_k$ . Но переменные  $X$  и  $t$  независимы, поэтому  $\deg_t q_k(X - tA) \leq m_k$ .  $\square$

Значит, многочлены  $q_0(X - tA), \dots, q_{n-1}(X - tA)$  составляют минимальный базис модуля  $\mathcal{Z}$ , их коэффициенты составляют кронекерову часть билагранжева подпространства, а коэффициенты по  $t$  многочленов  $r_k(t)$  составляют кронекерову часть полной системы функций в биинволюции.

## 2.3 Случай нильпотентной матрицы

Если матрица  $A$  нильпотентна, то теорема 2.1 может быть переформулирована в терминах метода сдвига аргумента, т.к. многочлены  $r_k(t)$  в этом случае совпадают с коэффициентами характеристического многочлена матрицы  $X - tA$ . Таким образом, верна следующая теорема.

**Теорема 2.10.** *Пусть  $A$  — произвольный нильпотентный элемент  $\mathfrak{gl}_n$ , в качестве базисных инвариантов рассматриваются коэффициенты характеристического многочлена. Тогда все ненулевые функции, полученные методом сдвига аргумента, составляют кронекерову часть полной системы функций в бинволюции.*

Доказательство предложения 2.5 в случае нильпотентной матрицы  $A$  особенно просто. Верхний главный минор порядка  $k$  матрицы  $X - tA$  имеет степень  $m_{k-1}$  по  $t$ , а все остальные миноры — не больше, поэтому  $\deg_t r_k(X - tA) \leq m_{k-1}$ .

## 2.4 Пример

Пусть  $A = \text{diag}\{\lambda, \lambda, \mu\}$ . Упорядочим собственные значения в соответствии с (2.3):  $\{\mu_0, \mu_1, \mu_2\} = \{\lambda, \mu, \lambda\}$ . По теореме 2.1 индексы Кронекера пары  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$  равны 0, 1, 1. Обозначим через  $f_{k,i}$  коэффициенты многочленов  $r_k(t)$ :

$$r_k(t) = f_{k,0}(X) + f_{k,1}(X)t + \dots + f_{k,m_k}(X)t^{m_k}. \quad (2.16)$$

Построим кронекерову часть полной системы функций в бинволюции  $f_{0,0}, f_{1,0}, f_{1,1}, f_{2,0}, f_{2,1}$ . Сначала построим  $f_{2,0}$  и  $f_{2,1}$ , для этого выпишем многочлен  $E_3(y_1, y_2, y_3)$ :

$$E_3(y_1, y_2, y_3) = \frac{y_1^3}{6} - \frac{y_2 y_1}{2} + \frac{y_3}{3}.$$

Теперь заменим  $y_j$  на  $\text{tr}(X - tA)^j - p_j(-t\Lambda_2)$ , где  $\Lambda_2 = \{\lambda\}$ . Учитывая, что  $f_2 = -E_3(y_1, y_2, y_3)$  и сгруппировав слагаемые по переменной  $t$ , выпишем многочлены  $f_{2,i}$ :

$$\begin{aligned} -f_{2,0} &= \frac{\text{tr}^3 X}{6} - \frac{\text{tr} X^2 \text{tr} X}{2} + \frac{\text{tr} X^3}{3}, \\ -f_{2,1} &= -\frac{(\lambda + \mu) \text{tr}^2 X}{2} + \left( \text{tr} AX \text{tr} X + \frac{(\lambda + \mu) \text{tr} X^2}{2} \right) - \text{tr} X^2 A, \\ -f_{2,2} &= \frac{(\lambda + \mu)^2 \text{tr} X}{2} - \left( \frac{(\lambda^2 + \mu^2) \text{tr} X}{2} + (\lambda + \mu) \text{tr} AX \right) + \text{tr} A^2 X = 0, \\ -f_{2,3} &= \frac{(\lambda + \mu)^3}{6} - \frac{(\lambda^2 + \mu^2)(\lambda + \mu)}{2} + \frac{\lambda^3 + \mu^3}{3} = 0. \end{aligned}$$

Аналогично можно получить оставшиеся элементы:

$$f_{1,0} = \frac{\operatorname{tr}^2 X - \operatorname{tr} X^2}{2},$$

$$f_{1,1} = -\operatorname{tr} X \cdot \lambda + \operatorname{tr} AX,$$

$$-f_{0,0} = \operatorname{tr} X.$$

Наконец, выпишем коэффициенты многочленов  $q_k(X - tA)$ , то есть (с точностью до знака) дифференциалы описанных многочленов:

$$q_{2,0} = X^2 - X \operatorname{tr} X + E\left(\frac{\operatorname{tr}^2 X - \operatorname{tr} X^2}{2}\right),$$

$$q_{2,1} = -(AX + XA) + (\lambda + \mu)(X - E \operatorname{tr} X) + E \operatorname{tr} AX + A \operatorname{tr} X,$$

$$q_{1,0} = X - E \operatorname{tr} X,$$

$$q_{1,1} = -A + E\lambda,$$

$$q_{0,0} = E.$$

## Глава 3

# Кронекерова часть полной системы функций в биинволюции на классических простых алгебрах Ли

В этой главе мы перенесем результаты предыдущей главы на простые классические алгебры Ли. На алгебры Ли  $\mathfrak{sl}_n$  и  $\mathfrak{sp}_{2n}$  переносятся все полученные результаты. А именно, для каждого элемента  $A \in \mathfrak{g}$ , где  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$  или  $\mathfrak{sp}_{2n}$ , будет построена кронекерова часть полной системы функций в биинволюции.

К сожалению, для алгебр Ли  $\mathfrak{so}_{2n}$  и  $\mathfrak{so}_{2n+1}$  построенные ранее многочлены не всегда составляют кронекерову часть полной системы функций в биинволюции. Сперва мы опишем те элементы  $A$ , для которых кронекерова часть может быть построена так же как и в случае  $\mathfrak{gl}_n$  (такие элементы мы будем называть «хорошими»). А затем мы опишем некоторые нильпотентные элементы  $A$  из алгебр Ли  $\mathfrak{so}_{2n}$  и  $\mathfrak{so}_{2n+1}$ , для которых можно «подправить» многочлены для случая  $\mathfrak{gl}_n$  и получить кронекерову часть полной системы функций в биинволюции (такие элементы  $A$  мы будем называть «исправимыми»).

### 3.1 Обозначения

Пусть теперь  $\mathfrak{g}$  — это простая комплексная алгебра Ли, то есть одна из четырех следующих алгебр:  $\mathfrak{sl}_n$ ,  $\mathfrak{so}_{2n+1}$ ,  $\mathfrak{sp}_{2n}$  или  $\mathfrak{so}_{2n}$ . Обозначим через  $N$  размер матриц из  $\mathfrak{g}$ ,

то есть

$$N = \begin{cases} n, & \text{для } \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n, \\ 2n, & \text{для } \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n} \text{ или } \mathfrak{so}_{2n}, \\ 2n + 1, & \text{для } \mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Для краткости обозначим через  $I$  следующий набор индексов:

$$I = \begin{cases} \{1, 2, 3, \dots, n-1\}, & \text{при } \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n \\ \{1, 3, 5, \dots, 2n-1\}, & \text{при } \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}, \mathfrak{so}_{2n}, \mathfrak{so}_{2n+1} \end{cases} \quad (3.2)$$

Так же как и в разделе 2.1, построим диаграмму Юнга  $\Lambda$ , соответствующую матрице  $A \in \mathfrak{so}_N$ , и положим

$$m_i = i - p_i. \quad (3.3)$$

По формулам (2.4) из того же раздела построим многочлены  $q_i \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}][t, z]$  и  $r_k(t) \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}][t]$ , а затем подставим матрицу  $X - tA$  в многочлены  $q_i(z)$  в качестве аргумента  $z$ . Заметим, что  $q_i(X - tA) \in \mathfrak{gl}_N \otimes \mathbb{K}[t] \simeq \mathfrak{gl}_N(\mathbb{K})$ , то есть  $q_i(X - tA)$  могут не лежать в  $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}[t]$ .

Обозначим через  $\pi$  ортогональную проекцию  $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{K})$  на  $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}$ , в смысле скалярного произведения заданного по формуле  $(A, B) = \text{tr } AB$  для  $A, B \in \mathfrak{gl}_N(\mathbb{K})$ . Таким образом:

$$\pi(X^k) = \begin{cases} X^k - \frac{\text{tr } X^k}{n} E, & \text{при } \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n, \\ X^k, & \text{при нечетных } k \text{ и } \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n} \text{ или } \mathfrak{so}_N, \\ 0, & \text{при четных } k \text{ и } \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n} \text{ или } \mathfrak{so}_N. \end{cases} \quad (3.4)$$

Обозначим через  $h_i(X - tA)$  ортогональную проекцию многочленов  $q_i(X - tA)$  на  $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}$ :

$$h_i(X - tA) = \pi(q_i(X - tA)). \quad (3.5)$$

Таким образом,  $h_i(X - tA) \in \mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}[t]$ . Очевидно, что при взятии проекции степени многочленов не увеличиваются, поэтому из предложения 2.2 следует, что

$$\deg_t h_i(X - tA) \leq \deg_t q_i(X - tA) \leq m_i = i - p_i. \quad (3.6)$$

## 3.2 Результаты, которые переносятся с алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$

### 3.2.1 Произвольные элементы алгебр Ли $\mathfrak{sl}_n$ и $\mathfrak{sp}_{2n}$

Следующая теорема показывает, что все результаты, полученные в теореме 2.1 для алгебры Ли  $\mathfrak{gl}_n$  переносятся на случаи алгебр Ли  $\mathfrak{sl}_n$  и  $\mathfrak{sp}_{2n}$ .

**Теорема 3.1.** *Рассмотрим многочлены  $h_i(X-tA)$ ,  $r_i(X-tA)$  и числа  $m_i$ , определенные по формулам (3.5), (2.4) и (3.3). Тогда для любых матриц  $A \in \mathfrak{g}$  при  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$  или  $\mathfrak{sp}_{2n}$  выполнено:*

- Числа  $\{m_i, i \in I\}$  являются индексами Кронекера пары форм  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$ .
- Многочлены  $\{h_i(X-tA), i \in I\}$  составляют минимальный базис модуля  $\mathcal{Z}$ .
- Коэффициенты многочленов  $\{h_i(X-tA), i \in I\}$  по переменной  $t$  составляют кронекерову часть канонического базиса пары форм  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$ .
- Коэффициенты многочленов  $\{r_i(t), i \in I\}$  составляют кронекерову часть полной системы функций в бинволюции, причем  $dr_k = -h_k(X-tA)$ .

*Доказательство.* Заметим, что как и в разделе 2.2.1, многочлены  $h_i(x)$  при  $i \in I$  являются приведенными многочленами степени  $i$  от  $x$ , а значит, элементы  $\{h_i(X-tA), i \in I\}$  составляют базис модуля  $\mathcal{Z}$ . Напомним, что  $m_i = i - p_i$  и по формуле (3.6) имеем  $\deg_t h_i(X-tA) \leq m_i$ . Значит, достаточно доказать, что

$$\sum_{i \in I} m_i = \frac{1}{2} \operatorname{rk} \mathcal{B}_A. \quad (3.7)$$

**Случай  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ .** В этом случае доказательство очевидно из леммы 2.3. Действительно,  $m_0 = 0$ , а ранг формы  $\mathcal{B}_A$  на  $\mathfrak{sl}_n$  равен рангу формы  $\mathcal{B}_A$  на  $\mathfrak{gl}_n$ .

**Случай  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$ .** Напомним, что через  $\Lambda$  обозначена диаграмма Юнга, соответствующая матрице  $A$ , а клетки этой диаграммы пронумерованы числами от 0 до  $2n-1$  слева направо сверху вниз. Клетки с нечетными номерами будем называть *отмеченными*.

Как и раньше,  $\operatorname{cor}k \mathcal{B}_A = \dim \mathfrak{g}_A$ , а из [8] известно, что

$$2 \dim \mathfrak{g}_A = \sum (l_i^*)^2 + n_{\text{odd}}, \quad (3.8)$$

где  $n_{\text{odd}}$  — количество строк нечетной длины в диаграмме  $\Lambda$ . Таким образом, осталось проверить что

$$2(m_1 + m_3 + \dots + m_{2n-1}) = 2n^2 + n - \frac{1}{2} \left( \sum_j (l_j^*)^2 + n_{\text{odd}} \right). \quad (3.9)$$

Покроем диаграмму  $\Lambda$  плитками домино следующим способом: каждую строку покроем плитками слева направо. Непокрытыми останутся самые правые клетки в строках нечетной длины.

Хорошо известно, что на жорданову структуру матриц  $A \in \mathfrak{sp}_{2n}$  накладываются некоторые условия. А именно, ненулевые собственные значения матрицы  $A \in \mathfrak{sp}_{2n}$  разбиваются на пары противоположных  $\{\lambda, -\lambda\}$  с одинаковой блочной структурой, а на блоки с собственным значением  $\lambda = 0$  накладывается дополнительное условие: количество блоков каждого нечетного размера четно. Значит, непокрытые клетки можно покрыть вертикальными плитками. Несложно заметить, что каждая плитка покрывает ровно одну отмеченную клетку, причем в вертикальных плитках отмечена именно нижняя клетка.

Отсюда получаем, что

$$2 \sum_{i \in I} p_i = \sum_{i \in \Lambda} p_i + \frac{n_{\text{odd}}}{2} \quad (3.10)$$

Далее, вычисляя сумму по столбцам, получаем, что

$$\begin{aligned} 2(m_1 + m_3 + \dots + m_{2n-1}) &= 2 \sum_{i \in I} (i - p_i) = 2n^2 - \sum_{i \in \Lambda} p_i - \frac{n_{\text{odd}}}{2} = \\ &= 2n^2 - \sum_j \frac{l_j^*(l_j^* - 1)}{2} - \frac{n_{\text{odd}}}{2} = 2n^2 - \frac{1}{2} \sum_j (l_j^*)^2 + n - \frac{n_{\text{odd}}}{2}. \end{aligned}$$

□

### 3.2.2 Хорошие элементы алгебр Ли $\mathfrak{so}_{2n+1}$ и $\mathfrak{so}_{2n}$

Для алгебр Ли  $\mathfrak{so}_{2n}$  и  $\mathfrak{so}_{2n+1}$  аналогичные результаты можно получить только для некоторых элементов. Напомним, что через  $l_i$  обозначены длины строк диаграммы Юнга, соответствующей матрице  $A$ .

**Определение 3.1** (см. [15], Lemma 4.5). *Назовем элемент  $A$  из  $\mathfrak{so}_N$  хорошим, если выполнены следующие условия:*

- 1)  $l_1$  нечетно; (3.11)
- 2) если  $l_{i-1}$  нечетно при нечетном  $i \leq m$ , то  $l_i$  нечетно.

Отметим, что в случае  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_N$ , как и в случае  $\mathfrak{sp}_{2n}$ , ненулевые собственные значения матрицы  $A \in \mathfrak{g}$  разбиваются на пары противоположных  $\{\lambda, -\lambda\}$  с одинаковой блочной структурой. Но на блоки с собственным значением  $\lambda = 0$  накладывается другое дополнительное условие: количество блоков каждого четного размера четно.

Покажем, что если в диаграмме  $\Lambda$ , соответствующей матрице  $A \in \mathfrak{so}_N$ , идут подряд ровно  $r$  строк четной длины, то  $r$  четно. Действительно, для нильпотентных элементов

это очевидно, так как количество блоков каждого четного размера должно быть четно. Но добавление жордановых блоков с ненулевыми собственными значениями не меняет четности длин строк, так как такие блоки разбиваются на пары с противоположными собственными значениями.

Значит, диаграмма Юнга хорошего элемента выглядит так: первая строка имеет нечетную длину, а все следующие строки, кроме, быть может, последней, разбиваются на пары строк длин одинаковой четности. То есть  $l_1 \equiv 1$ ,  $l_2 \equiv l_3$ ,  $l_4 \equiv l_5, \dots$ , где  $\equiv$  обозначается сравнимость по модулю 2. В случае  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$  последняя строка имеет нечетную длину,  $l_m \equiv 1$ , а в случае  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$  имеем  $l_{m-1} \equiv l_m$ .

Примеры хороших и не хороших диаграмм приведены на рисунках 3.1 и 3.2.

В случае алгебры Ли  $\mathfrak{so}_{2n}$ , одним из базисных инвариантов является пфаффиан. Поэтому многочлены  $h_1(X - tA), \dots, h_{2n-1}(X - tA)$  не могут быть минимальным базисом даже в случае регулярного элемента  $A$ , так как степень последнего многочлена в два раза больше необходимой. Покажем, что для хороших элементов  $A$  всегда можно извлечь корень из многочлена  $r_{2n-1}(t)$ .

Как уже было отмечено, последняя строка диаграммы  $\Lambda$  имеет нечетную длину. Таким образом, можно считать, что  $\mu_{2n-1} = 0$ , так как среди собственных значений, вносящих вклад в  $l_m$ , есть 0 (иначе бы  $l_m$  было бы четным). Тогда по формуле (2.4) получаем, что  $r_{2n-1}$  — это свободный член характеристического многочлена матрицы  $X - tA$ . Таким образом,  $r_{2n-1}$  — это определитель кососимметрической матрицы и из него можно извлечь корень — пфаффиан матрицы  $X - tA$ . Тогда в случае алгебры Ли  $\mathfrak{so}_{2n}$  переобозначим элементы с индексом  $2n - 1$ :

$$r_{2n-1}(t) = \text{Pf}(X - tA), \quad h_{2n-1}(X - tA) = -dr_{2n-1}, \quad m_{2n-1} = n - 1. \quad (3.12)$$

**Теорема 3.2.** *Рассмотрим многочлены  $h_i(X - tA)$ ,  $r_i(X - tA)$  и числа  $m_i$ , определенные по формулам (3.5), (2.4), (3.3) и (3.12). Тогда для хороших матриц  $A \in \mathfrak{g}$  при  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$  или  $\mathfrak{so}_{2n+1}$  выполнено:*

- Числа  $\{m_i, i \in I\}$  являются индексами Кронекера пары форм  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$ .
- Многочлены  $\{h_i(X - tA), i \in I\}$  составляют минимальный базис модуля  $\mathcal{Z}$ .
- Коэффициенты многочленов  $\{h_i(X - tA), i \in I\}$  по переменной  $t$  составляют кронекерову часть канонического базиса пары форм  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$ .
- Коэффициенты многочленов  $\{r_i(t), i \in I\}$  составляют кронекерову часть полной системы функций в бинволюции, причем  $dr_k = -h_k(X - tA)$ .

*Доказательство.* Покажем, что как и в предыдущих случаях, элементы  $\{h_i(X-tA), i \in I\}$  составляют базис модуля  $\mathcal{Z}$ . Действительно, в случае  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$ , многочлены  $h_i(x)$  при  $i \in I$  являются приведенными многочленами степени  $i$  от  $x$ . В случае же  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$  многочлен  $h_{2i-1}(X-tA) = -d \text{Pf}(X-tA)$  совпадает с дифференциалом базисного инварианта, а остальные многочлены  $h_i(x)$  по-прежнему являются приведенными многочленами степени  $i$  от  $x$ . Значит, снова достаточно доказать, что

$$\sum_{i \in I} m_i = \frac{1}{2} \text{rk } \mathcal{B}_A, \quad (3.13)$$

**Случай  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$ .** В работе [15, Lemma 4.5] для хороших нильпотентных элементов  $A \in \mathfrak{so}_{2n+1}$  было проверено, что

$$\sum (p_i + 1) = \frac{1}{2} (\dim \mathfrak{g}_A + \text{rk } \mathfrak{g}). \quad (3.14)$$

Числа  $p_i$  зависят только от диаграммы Юнга, поэтому это равенство верно для произвольных (а не только нильпотентных) хороших элементов  $A \in \mathfrak{so}_{2n+1}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \deg_t h_i(X-tA) &= \sum_{i \in I} (i - p_i) = n^2 - \sum_{i \in I} (p_i + 1) + n = \\ &= n^2 - \frac{1}{2} (\dim \mathfrak{g}_A + n) + n = \frac{1}{2} (\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_A) = \frac{1}{2} \text{rk } \mathcal{B}_A. \end{aligned}$$

**Случай  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$ .** В той же лемме [15, Lemma 4.5] для хороших нильпотентных элементов  $A \in \mathfrak{so}_{2n}$  было проверено, что

$$\sum_{i=1}^{2n-3} (p_i + 1) + \frac{1}{2} (p_{2n-1} + 1) = \frac{1}{2} (\dim \mathfrak{g}_A + \text{rk } \mathfrak{g}), \quad (3.15)$$

где суммирование ведется только по нечетным индексам  $i$ . Как и в предыдущем случае условие нильпотентности элемента  $A$  можно отбросить. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \deg_t h_i(X-tA) &= \sum_{i=1}^{2n-3} (i - p_i) + \frac{1}{2} (2n - 1 - p_{2n-1}) = \\ &= n^2 - n - \sum_{i=1}^{2n-3} (p_i + 1) + n - \frac{1}{2} (p_{2n-1} + 1) = n^2 - \sum_{i=1}^{2n-3} (p_i + 1) - \frac{1}{2} (p_{2n-1} + 1) = \\ &= n^2 - \frac{1}{2} (\dim \mathfrak{g}_A + n) = \frac{1}{2} (\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_A) = \frac{1}{2} \text{rk } \mathcal{B}_A. \end{aligned}$$

□

**Замечание 3.1.** Отметим, что из доказательства леммы [15, Лемма 4.5] следует, что уравнения (3.14) и (3.15) на суммы индексов Кронекера выполняются только для хороших элементов алгебр Ли  $\mathfrak{so}_N$ . Таким образом, результаты, полученные для алгебры Ли  $\mathfrak{gl}_n$ , дословно можно перенести только на хорошие элементы алгебр Ли  $\mathfrak{so}_N$ .

В следующем разделе мы рассмотрим такие элементы алгебр Ли  $\mathfrak{so}_N$ , для которых построенные функции можно «подправить» и снова получить кронекерову часть полной системы функций в биинволюции. Но вначале рассмотрим примеры построенных полных систем функций в биинволюции.

### 3.2.3 Примеры

Построим кронекерову часть полной системы функций в биинволюции для каждого типа классических простых алгебр Ли. Напомним, что через  $f_{k,i}$  обозначены коэффициенты многочленов  $r_k(t)$  (см. (2.16)).

**Случай  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ .** Чтобы получить ответ для матрицы  $A \in \mathfrak{sl}_n$ , достаточно найти кронекерову часть полной системы функций в биинволюции для  $A \in \mathfrak{gl}_n$ , отбросить многочлен  $f_{0,0}$  и учесть, что  $\text{tr } X = \text{tr } A = 0$ . Например, пусть  $A = \text{diag}\{\lambda, \lambda, \mu\} \in \mathfrak{sl}_3$  (при этом,  $2\lambda + \mu = 0$ ). Тогда используя пример 2.4, получаем, что индексы Кронекера пары  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$  равны  $\{1, 1\}$ , а многочлены  $f_{k,i}$  выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} f_{2,0} &= \frac{\text{tr } X^3}{3}, \\ f_{2,1} &= -\frac{(\lambda + \mu) \text{tr } X^2}{2} + \text{tr } X^2 A, \\ f_{1,0} &= \frac{-\text{tr } X^2}{2}, \\ f_{1,1} &= -\text{tr } AX. \end{aligned}$$

**Случай  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$ .** Рассмотрим теперь матрицу  $A \in \mathfrak{sp}_4$ , сопряженную матрице  $\text{diag}\{\lambda, -\lambda, 0, 0\}$ . В систему функций в биинволюции будут включаться только многочлены  $f_{k,i}$  с нечетными индексами  $k$ . По теореме 3.1 получаем, что индексы Кронекера пары  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$  равны  $\{1, 2\}$ , а многочлены  $f_{k,i}$  выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
f_{1,0} &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} X^2, \\
f_{1,1} &= -\operatorname{tr} AX, \\
f_{3,0} &= \frac{1}{8} \operatorname{tr}^2 X^2 - \frac{1}{4} \operatorname{tr} X^4, \\
f_{3,1} &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr} X^2 \operatorname{tr} AX + \operatorname{tr} AX^3, \\
f_{3,2} &= \frac{\lambda^2}{2} \operatorname{tr} X^2 + \frac{1}{2} \operatorname{tr}^2 AX - \operatorname{tr} A^2 X^2 - \frac{1}{2} \operatorname{tr}(AX)^2.
\end{aligned}$$

**Случай  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$ .** Рассмотрим теперь матрицу  $A \in \mathfrak{so}_5$ , сопряженную матрице  $\operatorname{diag}\{\lambda, -\lambda, 0, 0, 0\}$ . Эта матрица является хорошей. Поэтому, по теореме 3.2 индексы Кронекера пары  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$  равны  $\{1, 2\}$ . Значит, многочлены  $f_{k,i}$  совпадают с многочленами, построенными в случае  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_4$ .

**Случай  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$ .** Рассмотрим теперь матрицу  $A \in \mathfrak{so}_6$ , сопряженную матрице  $\operatorname{diag}\{\lambda, -\lambda, 0, 0, 0, 0\}$ . Эта матрица является хорошей. Поэтому, по теореме 3.2 индексы Кронекера пары  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$  равны  $\{1, 2, 1\}$ , причем  $r_5 = \operatorname{Pf}(X - tA)$ . Значит, многочлены  $f_{k,i}$  при  $k = 1$  и 3 совпадают с многочленами, построенными в случае  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_4$ , а многочлены  $f_{5,0}$  и  $f_{5,1}$  выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
f_{5,0} &= \operatorname{Pf}(X), \\
f_{5,1} &= \frac{\operatorname{Pf}(X - tA) - \operatorname{Pf}(X)}{t}.
\end{aligned}$$

### 3.3 Кронекерова часть для исправимых элементов из $\mathfrak{so}_{2n+1}$ и $\mathfrak{so}_{2n}$

Из предыдущего раздела следует, что для хороших нильпотентных элементов  $A \in \mathfrak{so}_N$  дифференциалы коэффициентов характеристического многочлена составляют минимальный базис подмодуля  $\mathcal{Z}$ . В этом разделе мы опишем нильпотентные элементы  $A \in \mathfrak{so}_N$ , которые не являются хорошими, но для которых можно «подправить» некоторые из коэффициентов характеристического многочлена так, чтобы получить минимальный базис модуля  $\mathcal{Z}$ . Будем называть такие элементы *исправимыми*.

В работе Шарбоннеля и Моро [7] изучался следующий вопрос: при каких  $A$  алгебра инвариантов  $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_A)^{\mathfrak{g}_A}$  является алгеброй многочленов от нескольких переменных (см. обозначения в разделе 1.1). В частности, для некоторых нильпотентных элементов  $A \in \mathfrak{so}_N$  были неявно построены такие базисные инварианты  $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n$  алгебры Ли  $\mathfrak{so}_N$ , что

многочлены  $\tilde{a}_i(X - tA)$  имеют достаточно малые степени по  $t$ .

В этом разделе мы явно выпишем многочлены  $\tilde{a}_i$ , опираясь на доказательство из указанной работы. И таким образом построим кронекерову часть полной системы функций в биинволюции для еще одного типа нильпотентных элементов.

Обозначим через  $e_1, \dots, e_n$  элементарные симметрические многочлены, а через  $p_1, \dots, p_n$  — степенные суммы. Напомним, что по тождествам Ньютона  $ke_k = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} p_i e_{k-i}$  (считаем  $e_0 = 1$ ). Далее, обозначим через  $P_k$  и  $E_k$  многочлены, выражающие степенные суммы через элементарные симметрические многочлены и наоборот:

$$p_k = P_k(e_1, \dots, e_k), \quad e_k = E_k(p_1, \dots, p_k). \quad (3.16)$$

Определим симметрические многочлены  $\tilde{e}_i := E_i(2p_1, \dots, 2p_i)$  при  $1 \leq i \leq n$ , а также  $\tilde{e}_0 = 2$ , и докажем техническую лемму.

**Лемма 3.3.** *Имеем  $\tilde{e}_k = e_0 e_k + e_1 e_{k-1} + \dots + e_k e_0 = \sum_{i=0}^k e_i e_{k-i}$ .*

*Доказательство.* Докажем утверждение индукцией по индексу  $k$ . Для  $k = 1$  имеем  $\tilde{e}_1 = 2e_1 = e_0 e_1 + e_1 e_0$ . Пусть теперь для всех  $i < k$  утверждение леммы верно, докажем для  $k$ . Положим  $\tilde{p}_i = 2p_i$ . Тогда, применив тождества Ньютона к многочленам  $\tilde{e}_k$ , получим

$$k\tilde{e}_k = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \tilde{p}_i \tilde{e}_{k-i} = 2 \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} p_i \tilde{e}_{k-i}. \quad (3.17)$$

Применим предположение индукции, поменяем порядок суммирования, снова применим тождества Ньютона и приведем подобные члены:

$$\begin{aligned} k\tilde{e}_k &= 2 \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} p_i \sum_{j=0}^{k-i} e_j e_{k-i-j} = 2 \sum_{j=0}^{k-1} e_j \sum_{i=1}^{k-j} (-1)^{i-1} p_i e_{k-i-j} = \\ &= 2 \sum_{j=0}^{k-1} e_j \cdot (k-j) e_{k-j} = k \sum_{j=0}^k e_j e_{k-j}. \end{aligned}$$

□

Наконец, обозначим через  $a_i$  ненулевые коэффициенты характеристического многочлена матрицы  $X - tA$ :

$$\chi_{X-tA}(z) = z^m + a_1 z^{m-2} + \dots + a_n z^{m-2n}. \quad (3.18)$$

В случае алгебры Ли  $\mathfrak{so}_{2n}$  переопределим элемент  $a_n$  и положим его равным пфаффиану матрицы  $X - tA$ , то есть

$$a_n = \text{Pf}(X - tA), \quad \text{при } \mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}. \quad (3.19)$$

Рассмотрим отдельно случаи  $\mathfrak{so}_{2n+1}$  и  $\mathfrak{so}_{2n}$ .

### 3.3.1 Случай $\mathfrak{so}_{2n+1}$

**Определение 3.2.** Нильпотентный элемент  $A \in \mathfrak{so}_{2n+1}$ , соответствующий разбиению  $l_1, \dots, l_s$ , назовем исправимым, если для некоторого  $k > 0$  выполнено:

- 1)  $l_1 = \dots = l_{2k} = 2l$ , где  $l > 0$  целое, (3.20)
- 2)  $l_{2k+1}$  нечетно,
- 3) для всех  $i > k$  если  $l_{2i}$  нечетно, то  $l_{2i+1}$  тоже нечетно.

Другими словами, разбиения, соответствующие исправимым элементам, получают-ся, если к хорошему разбиению добавить «сверху» четный прямоугольник.

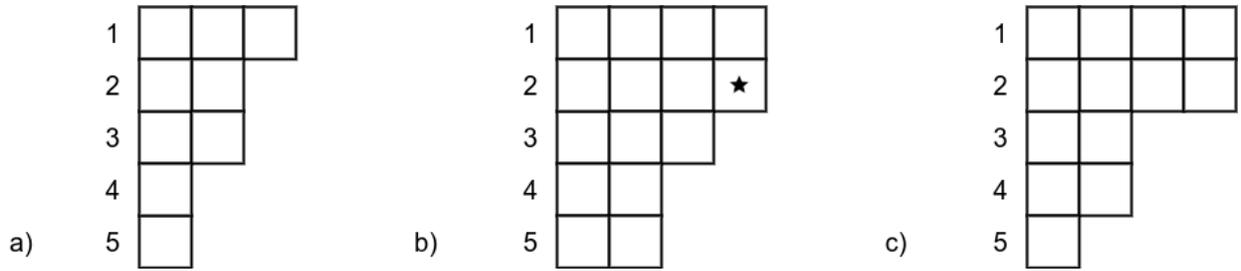


Рис. 3.1: а) хороший элемент; б) исправимый (но не хороший) элемент; в) ни хороший, ни исправимый элемент. На рисунке б) звездочкой отмечена клетка, в которой надо «подправлять» коэффициент характеристического многочлена.

Для исправимого нильпотента  $A$  положим

$$\begin{cases} \tilde{a}_{il} = E_i \left( \frac{P_1(a_l)}{2}, \frac{P_2(a_l, a_{2l})}{2}, \dots, \frac{P_i(a_l, \dots, a_{il})}{2} \right), & k < i \leq 2k, \\ \tilde{a}_j = a_j, & \text{если } j \notin \{(k+1)l, \dots, 2kl\}. \end{cases} \quad (3.21)$$

Определим числа  $m_i$  как и раньше:  $m_i = i - p_i$ , и положим

$$\begin{cases} \tilde{m}_j = m_j - 1, & \text{если } j = 2il - 1 \text{ и } k < i \leq 2k, \\ \tilde{m}_j = m_j, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3.22)$$

**Теорема 3.4.** Рассмотрим многочлены  $\tilde{a}_i(X - tA)$  и числа  $\tilde{m}_i$ , определенные по формулам (3.21) и (3.22). Тогда для исправимых матриц  $A \in \mathfrak{so}_{2n+1}$  выполнено:

- Числа  $\{\tilde{m}_i, i \in I\}$  являются индексами Кронекера пары форм  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$ .
- Дифференциалы  $\{d\tilde{a}_i(t), i \in I\}$  составляют минимальный базис модуля  $\mathcal{Z}$ .

- Коэффициенты многочленов  $\{d\tilde{a}_i(t), i \in I\}$  по переменной  $t$  составляют кронекерову часть канонического базиса пары форм  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$ .
- Коэффициенты многочленов  $\{\tilde{a}_i(t), i \in I\}$  по переменной  $t$  составляют кронекерову часть полной системы функций в бинволюции относительно  $\{, \}$  и  $\{, \}_A$ .

*Доказательство.* Обозначим через  $c_i$  старший коэффициент по  $t$  многочлена  $a_{li}$  для  $i = 1, \dots, n$  (в [7, Sect. 5.3] он обозначается через  $p_i$ ). Далее в работе [7] вводятся многочлены  $\bar{c}_i$  — ограничение многочленов  $c_i$  на некоторую подалгебру  $\bar{\mathfrak{g}}_A \subseteq \mathfrak{g}$ . И в лемме 5.14 цитированной работы доказывается, что из алгебраической зависимости между  $\bar{c}_i$  следует та же алгебраическая зависимость между  $c_i$ .

Не будем подробно описывать построение многочленов  $\bar{c}_i$ , так как в предложении 5.18 той же работы приводится явное их описание. А именно, для  $i = 1, \dots, 2k$ , где число  $k$  имеет тот же смысл, что и в определении 3.2, имеем:

$$\begin{cases} -\bar{c}_1 = e_0 e_1 + e_1 e_0, \\ \dots \\ (-1)^i \bar{c}_i = e_0 e_i + e_1 e_{i-1} + \dots + e_i e_0, \\ \dots \\ \bar{c}_{2k} = e_0 e_{2k} + e_1 e_{2k-1} + \dots + e_{2k} e_0, \end{cases} \quad (3.23)$$

где  $e_i$  — элементарные симметрические многочлены от  $k$  переменных, причем  $e_i = 0$  при  $i > k$ .

Несложно заметить, что многочлены  $e_i$  можно выразить через  $\bar{c}_i$  с помощью некоторых многочленов  $R_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_i]$ :

$$\begin{cases} e_1 = -\frac{1}{2}\bar{c}_1 = R_1(\bar{c}_1), \\ e_2 = \frac{1}{2}\bar{c}_2 - \frac{1}{8}\bar{c}_1^2 = R_2(\bar{c}_1, \bar{c}_2), \\ \dots \\ e_{2k} = R_{2k}(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_{2k}). \end{cases} \quad (3.24)$$

Приведем явные формулы многочленов  $R_i$ . Из леммы 3.3 следует, что  $\bar{c}_i = (-1)^i \tilde{e}_i$ , а значит

$$R_i(x_1, \dots, x_i) = E_i \left( \frac{P_1(-x_1)}{2}, \frac{P_2(-x_1, x_2)}{2}, \dots, \frac{P_i(-x_1, x_2, \dots, (-1)^i x_i)}{2} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= E_i \left( \frac{-P_1(x_1)}{2}, \frac{P_2(x_1, x_2)}{2}, \dots, \frac{(-1)^i P_i(x_1, \dots, x_i)}{2} \right) = \\
&= (-1)^i E_i \left( \frac{P_1(x_1)}{2}, \dots, \frac{P_i(x_1, \dots, x_i)}{2} \right).
\end{aligned}$$

Учитывая, что  $e_i = 0$  при  $i > k$  получаем, что при  $i = k + 1, \dots, 2k$  выполнено  $R_i(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_i) = 0$ , и значит,  $R_i(c_1, \dots, c_i) = 0$ . Из этого следует, что для многочленов  $\tilde{a}_{jl}$ , определенных по формулам (3.21), «старшие коэффициенты сокращаются», то есть  $\deg_t \tilde{a}_{jl} < \deg_t a_{jl}$  при  $j = k + 1, \dots, 2k$ .

В [7, Rem. 5.24] показано, что

$$2 \sum_{i=1}^n (2i - \deg_t a_i) = \dim \mathfrak{g}_A + n - 2k. \quad (3.25)$$

Значит, для многочленов  $\tilde{a}_i$  имеем

$$2 \sum_{i=1}^n \deg_t \tilde{a}_i \leq 2 \cdot \left( \sum_{i=1}^n \deg_t a_i - k \right) = 2 \sum_{i=1}^n 2i - \dim \mathfrak{g}_A - n + 2k - 2k = \quad (3.26)$$

$$= \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_A = \operatorname{rk} \mathcal{B}_A. \quad (3.27)$$

Очевидно, что  $\deg_t d\tilde{a}_i(t) \leq \deg_t \tilde{a}_i$ . Значит, дифференциалы многочленов  $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n$  составляют минимальный базис модуля  $\mathcal{Z}$  и утверждение теоремы доказано.  $\square$

### 3.3.2 Случай $\mathfrak{so}_{2n}$

**Определение 3.3.** *Нильпотентный элемент  $A \in \mathfrak{so}_{2n}$ , соответствующий разбиению  $l_1, \dots, l_s$ , назовем исправимым, если выполнено одно из следующих условий:*

a) *выполнено условие (3.20) для некоторого  $k$  (возможно,  $k = n$ )* (3.28)

b)  *$s = 4$ , все  $l_i$  четные.*

Для исправимого элемента  $A \in \mathfrak{so}_{2n}$  типа a) определим многочлены  $\tilde{a}_i$  как в (3.21), а числа  $\tilde{m}_i$  как в (3.22). Как уже отмечалось, в случае  $\mathfrak{so}_{2n}$  базисным инвариантом вместо определителя является пфаффиан, поэтому переопределим многочлен  $\tilde{a}_n$ . Положим,

$$\tilde{a}_n = \begin{cases} a_n - (-1)^k E_k \left( \frac{P_1(a_l)}{2}, \frac{P_2(a_l, a_{2l})}{2}, \dots, \frac{P_k(a_l, \dots, a_{kl})}{2} \right), & \text{если } k = n \\ a_n, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3.29)$$

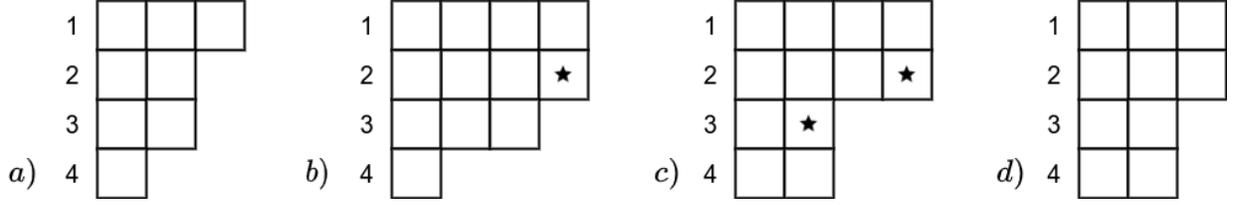


Рис. 3.2: a) хороший элемент; b) исправимый элемент типа a; c) исправимый элемент типа b; d) ни хороший, ни исправимый элемент. На рисунках b) и c) звездочками отмечены клетки, в которых надо «подправлять» коэффициенты характеристического многочлена.

Здесь число  $k$  имеет тот же смысл, что и в определении 3.3. Также положим

$$\tilde{m}_{2n-1} = \begin{cases} \frac{1}{2}m_{2n-1} - 1, & \text{при } k = n, \\ \frac{1}{2}m_{2n-1}, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3.30)$$

Для исправимых элементов типа b) все четыре строки диаграммы Юнга имеют четную длину, то есть  $l_1 = l_2 = 2d_1$  и  $l_3 = l_4 = 2d_2$ . Положим

$$\begin{cases} \tilde{a}_{2d_1} = a_{2d_1} - \frac{1}{4}a_{d_1}^2, \\ \tilde{a}_{2d_1+d_2} = a_{2d_1+d_2} - a_{d_1}a_n, \\ \tilde{a}_i = a_i \text{ для остальных } i. \end{cases} \quad (3.31)$$

И положим в этом случае

$$\tilde{m}_{2d_1-1} = m_{2d_1-1} - 1 \quad \text{и} \quad \tilde{m}_{2d_2+d_1-1} = m_{2d_2+d_1-1} - 1. \quad (3.32)$$

**Теорема 3.5.** *Рассмотрим многочлены  $\tilde{a}_i(X - tA)$  и числа  $\tilde{m}_i$ , определенные по формулам (3.21), (3.22) и (3.29)-(3.32). Тогда для исправимых матриц  $A \in \mathfrak{so}_{2n}$  выполнено:*

- Числа  $\{\tilde{m}_i, i \in I\}$  являются индексами Кронекера пары форм  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$ .
- Дифференциалы  $\{d\tilde{a}_i(t), i \in I\}$  составляют минимальный базис модуля  $\mathcal{Z}$ .
- Коэффициенты многочленов  $\{d\tilde{a}_i(t), i \in I\}$  по переменной  $t$  составляют кронекерову часть канонического базиса пары форм  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$ .
- Коэффициенты многочленов  $\{\tilde{a}_i(t), i \in I\}$  по переменной  $t$  составляют кронекерову часть полной системы функций в бинволюции относительно  $\{, \}$  и  $\{, \}_A$ .

*Доказательство.* Пусть сначала  $A \in \mathfrak{so}_{2n}$  — исправимый нильпотентный элемент типа  $a$ ). Из нижней строки системы (3.23) видно, что  $\bar{c}_{2k} = e_k^2$ , а значит,  $\bar{c}_{2k} = R_k^2(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_k)$ . Таким образом получаем, что при  $k = n$  имеем  $\deg_t \tilde{a}_n < \deg_t a_n$  и снова

$$\sum_{i=1}^n \deg_t \tilde{a}_i \leq \sum_{i=1}^n \deg_t a_i - k. \quad (3.33)$$

Как и в доказательстве теоремы 3.4, утверждение в случае  $a$ ) следует из [7, Rem. 5.24].

Для элементов типа  $b$ ) неравенство (3.33) было доказано в [7, Thm. 5.23] (в этом случае  $k = 2$ ). Доказательство теоремы снова следует из [7, Rem. 5.24] и неравенства (3.33).  $\square$

### 3.3.3 Примеры

Рассмотрим исправимую нильпотентную матрицу  $A \in \mathfrak{so}_{2n+1}$ , для которой  $l_1 = \dots = l_{2k} = 2$ . Очевидно, что все ненулевые собственные значения матрицы  $X - tA$  разбиваются на пары противоположных  $\pm \nu_i, i = 1, \dots, n$ . И поэтому коэффициенты характеристического многочлена выражаются следующим образом:

$$a_i = (-1)^i e_i(\nu_1^2, \dots, \nu_n^2). \quad (3.34)$$

Значит,

$$(-1)^i P_i(a_1, \dots, a_i) = p_i(\nu_1^2, \dots, \nu_n^2) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} X^{2i}. \quad (3.35)$$

Например, для нильпотентной матрицы  $A \in \mathfrak{so}_9$ , соответствующей разбиению  $(2, 2, 2, 2, 1)$ , имеем следующую систему функций:

$$\tilde{a}_1 = a_1 = \operatorname{tr} X^2,$$

$$\tilde{a}_2 = a_2 = \frac{1}{2}(\operatorname{tr}^2 X^2 - \operatorname{tr} X^4),$$

$$\tilde{a}_3 = E_3 \left( \frac{\operatorname{tr} X^2}{4}, \frac{\operatorname{tr} X^4}{4}, \frac{\operatorname{tr} X^6}{4} \right) = \frac{1}{12} \left( \operatorname{tr} X^6 - \frac{3}{8} \operatorname{tr} X^4 \operatorname{tr} X^2 + \frac{1}{32} \operatorname{tr}^3 X^2 \right),$$

$$\tilde{a}_4 = -\frac{1}{16} \left( \operatorname{tr} X^8 - \frac{1}{3} \operatorname{tr} X^6 \operatorname{tr} X^2 - \frac{1}{8} \operatorname{tr}^2 X^4 + \frac{1}{16} \operatorname{tr} X \operatorname{tr}^2 X^2 - \frac{1}{384} \operatorname{tr}^4 X^2 \right).$$

При этом индексы Кронекера пары  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$  равны  $\{1, 2, 2, 3\}$ , а чтобы получить кронекеру часть полной системы функций в биинволюции, достаточно подставить в функции  $\tilde{a}_i$  матрицу  $X - tA$  в качестве аргумента и рассмотреть коэффициенты по переменной  $t$ .

## 3.4 Индексы Кронекера внутри пластов

### 3.4.1 Предварительные сведения и формулировка результатов

**Определение 3.4.** Пластами алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  называются неприводимые компоненты множеств  $X^{(d)} = \{x \in \mathfrak{g} : \dim Gx = d\}$  или, что то же самое, максимальные неприводимые множества, состоящие из  $G$ -орбит фиксированной размерности.

Известно [5, Sect.5.8 Кор.(а)], что в каждом пласте содержится ровно одна нильпотентная орбита. Пласты, содержащие полупростую орбиту, называются *пластами Диксмье*. Если в пласте есть полупростые элементы, то они заполняют плотное подмножество пласта.

Например, в случае алгебры Ли  $\mathfrak{sl}_n$  пласты не пересекаются и каждый пласт задается разбиением  $l_1, \dots, l_s$  (то есть пласты состоят из матриц с одинаковыми диаграммами Юнга, определенными в разделе 2.1), поэтому все пласты являются пластами Диксмье.

Для алгебр Ли  $\mathfrak{sl}_n$  и  $\mathfrak{sp}_{2n}$  мы покажем, что индексы Кронекера пары  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$  одинаковы для всех элементов  $A$  из одного пласта. Для алгебр  $\mathfrak{so}_{2n}$  и  $\mathfrak{so}_{2n+1}$  докажем, что с одной стороны, внутри пластов, содержащих хороший полупростой элемент, индексы Кронекера одинаковы, а с другой — приведем примеры пластов, на которых индексы Кронекера не постоянны.

### 3.4.2 Постоянство индексов Кронекера внутри всех пластов $\mathfrak{sl}_n$ и $\mathfrak{sp}_{2n}$

Опишем вначале, как по данной матрице  $A \in \mathfrak{g}$  найти нильпотентный элемент  $A_n$  из того же пласта.

В случае  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$  пласты задаются диаграммами Юнга, поэтому по данной матрице  $A \in \mathfrak{sl}_n$  достаточно построить диаграмму Юнга  $\Lambda$  и взять нильпотентную матрицу  $A_n \in \mathfrak{sl}_n$ , соответствующую  $\Lambda$ .

В случае  $\mathfrak{sp}_{2n}$  снова построим диаграмму Юнга  $\Lambda$ , соответствующую матрице  $A \in \mathfrak{sp}_{2n}$ . В диаграмме  $\Lambda$  некоторые строки нечетной длины могут встречаться нечетное число раз, поэтому не каждой диаграмме соответствует нильпотентный элемент. Построим по данной диаграмме  $\Lambda$  диаграмму  $\Lambda'$ , соответствующую некоторой нильпотентной орбите в  $\mathfrak{sp}_{2n}$ .

Рассмотрим первую (начиная сверху) строчку нечетной длины  $q$ , которая встречается нечетное число раз. Переместим одну клетку из нижней строки длины  $q$  на

следующую строчку. Это возможно, так как следующая строчка тоже имеет нечетную длину. Продолжая применять описанную процедуру (назовем ее *осыпанием*), получим диаграмму  $\Lambda'$ , отвечающую некоторой нильпотентной орбите. В работе [10, §2] было показано, что описанная нильпотентная орбита содержится в пласте, содержащем элемент  $A$ .

**Лемма 3.6.** *Для алгебр Ли  $\mathfrak{sl}_n$  и  $\mathfrak{sp}_{2n}$  индексы Кронекера пары  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$  одинаковы для всех элементов  $A$  из одного пласта.*

*Доказательство.* Для алгебры Ли  $\mathfrak{sl}_n$  утверждение очевидно, так как пласт задается диаграммой Юнга  $\Lambda$ , а индексы Кронекера зависят только от  $\Lambda$ .

Для алгебры Ли  $\mathfrak{sp}_{2n}$  внутри пласта могут встречаться разные диаграммы Юнга, тем не менее, достаточно доказать, что при осыпаниях индексы Кронекера не меняются. Действительно, осыпаются только клетки с четными порядковыми номерами, так как по определению осыпаний над ними находится четное число строк нечетной длины. Значит, клетки с нечетными номерами остаются в тех же строках (хоть и сдвигаются вдоль строки) и поэтому индексы Кронекера не меняются при осыпаниях.  $\square$

### 3.4.3 Постоянство индексов Кронекера внутри пластов $\mathfrak{so}_N$ , содержащих хороший полупростой элемент

Далее в этом разделе мы будем рассматривать пласты в  $\mathfrak{so}_N$ , содержащие хороший полупростой элемент. Опишем вначале хорошие полупростые элементы алгебр Ли  $\mathfrak{so}_N$ .

Пусть матрица  $A \in \mathfrak{so}_N$  полупроста и имеет собственные значения  $\{0, \pm\lambda_1, \dots, \pm\lambda_s\}$ . Обозначим через  $n_i$  кратность собственных значений  $\pm\lambda_i$ , а через  $n_0$  — кратность собственного значения  $\lambda = 0$ .

Первые  $n_0$  строк диаграммы Юнга  $\Lambda$  имеют нечетную длину, а все последующие — четную. Значит, в случае  $\mathfrak{so}_{2n+1}$  условие (3.11) выполнено (так как  $n_0$  нечетно) и элемент  $A$  является хорошим.

В случае  $\mathfrak{so}_{2n}$ , поскольку  $n_0$  четно, хорошими являются те полупростые элементы, для которых в диаграмме  $\Lambda$  ровно  $n_0$  строк. Другими словами, кратность 0 должна быть не меньше кратностей всех остальных собственных значений, то есть  $n_0 \geq n_i$  для любого  $i \neq 0$ . Таким образом, доказана следующая лемма:

**Лемма 3.7.** *Хорошие полупростые элементы в  $\mathfrak{so}_N$  описываются следующим образом:*

- В случае  $\mathfrak{so}_{2n+1}$  все полупростые элементы являются хорошими.

- В случае  $\mathfrak{so}_{2n}$  полупростой элемент является хорошим, если  $n_0 \geq n_i$  для любого  $i \neq 0$ .

Напомним, что полупростые элементы плотны в пласте, а значит, любой элемент  $A$  из пласта может быть получен как предел полупростых элементов:  $A = \lim_{s \rightarrow 0} A_s$ , где  $A_s$  полупросты и лежат в том же пласте. Из [10] известно, что диаграммы Юнга, отвечающие всем полупростым элементам пласта, одинаковы, обозначим их через  $\Lambda$ .

Докажем сначала, что при предельном переходе диаграммы Юнга уменьшаются или не изменяются.  $\Lambda$  именно, на множестве диаграмм Юнга определен частичный порядок.

**Определение 3.5.** Пусть даны две диаграммы Юнга:  $\Lambda$  со строками длин  $l_1, \dots, l_s$  и  $M$  со строками длин  $m_1, \dots, m_t$ , причем  $l_1 + \dots + l_s = m_1 + \dots + m_t$ . Тогда

$$\Lambda \geq M \iff l_1 + \dots + l_k \geq m_1 + \dots + m_k \text{ при } k = 1, \dots, s. \quad (3.36)$$

**Лемма 3.8.** Пусть  $A = \lim_{s \rightarrow 0} A_s$  и диаграммы Юнга, соответствующие матрицам  $A_s$ , совпадают и равны  $\Lambda$ . Тогда диаграмма Юнга  $M$ , соответствующая матрице  $A$ , меньше или равна диаграмме  $\Lambda$ ,  $M \leq \Lambda$ .

*Доказательство.* Обозначим через  $l_1, \dots, l_m$  длины строк диаграммы Юнга, соответствующей некоторой матрице  $C$ . Заметим, что тогда числа  $l_1, \dots, l_m$  являются степенями инвариантных множителей конечно порожденного модуля  $\mathbb{C}^N$  (с умножением, задаваемым матрицей  $C$ ) над кольцом главных идеалов  $\mathbb{C}[t]$ . При этом  $l_k = \deg(\Delta_{n-k+1}/\Delta_{n-k})$ , где через  $\Delta_k$  обозначен наибольший общий делитель миноров порядка  $k$  матрицы  $C - tE$ , а через  $E$  обозначена единичная матрица. Таким образом,  $l_1 + \dots + l_k = \deg \Delta_n/\Delta_{n-k} = n - \deg \Delta_{n-k}$ . Значит, достаточно доказать, что степени многочленов  $\Delta_{n-k}$  не уменьшаются при предельном переходе.

Зафиксируем число  $k$  и обозначим через  $q_s$  многочлен  $\Delta_s$ , соответствующий матрице  $A_s - tE$  при  $s \neq 0$ . Будем считать, что многочлен  $q_s$  приведен. Кроме того,  $\deg q_s$  не зависит от  $s$  при  $s \neq 0$ , так как диаграммы Юнга матриц  $A_s$  совпадают по условию. Далее, для всех  $s$  обозначим через  $p_s$  главный минор, полученный удалением последних  $n - k$  строк и столбцов матрицы  $A_s - tE$ . Заметим, что многочлен  $p_s$  также приведен, причем  $\deg p_s = k$ . Хорошо известно, что корни приведенного многочлена непрерывно зависят от его коэффициентов, значит, корни многочленов  $p_s$  стремятся к корням многочлена  $p_0$  при  $s$  стремящемся к 0.

Очевидно, что каждый корень многочлена  $q_s$  является корнем многочлена  $p_s$ , и что существует лишь конечное число способов выбрать  $\deg q_s$  элементов из  $k$ -элементного

множества. Таким образом, один из этих способов соответствует всюду плотному подмножеству  $U \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Значит, существует предел  $\lim_{s \in U, s \rightarrow 0} q_s = q$ , причем  $\deg q = \deg q_s$ . Но многочлен  $q$  является общим делителем всех миноров порядка  $k$  матрицы  $A - tE$ , значит, его степень не больше, чем степень их наибольшего общего делителя. Таким образом, степени многочленов  $\Delta_k$  действительно не уменьшаются при предельном переходе.  $\square$

**Лемма 3.9.** *Все элементы пласта, содержащего хороший полупростой элемент, являются хорошими.*

*Доказательство.* Обозначим через  $N$  диаграмму Юнга, соответствующую нильпотентному элементу пласта. В случае алгебры Ли  $\mathfrak{so}_N$  нильпотентный элемент внутри пласта можно получить с помощью осыпаний, аналогичных осыпаниям в случае  $\mathfrak{sp}_{2n}$ , только в этот раз осыпают строки четной длины. Несложно заметить, что при осыпаниях диаграммы Юнга уменьшаются, поэтому для любого элемента пласта верно, что соответствующая ему диаграмма Юнга  $M$  больше или равна диаграмме  $N$ . Учитывая лемму 3.8, получаем что  $\Lambda \geq M \geq N$ .

Заметим, что диаграмма  $\Lambda$  является хорошей тогда и только тогда, когда суммы  $s_k(\Lambda) = l_1 + \dots + l_k$  нечетны при всех нечетных  $k$ . Покажем, что  $s_k(\Lambda) = s_k(N)$ , из этого будет следовать, что всем элементам пласта соответствуют хорошие диаграммы Юнга, так как  $s_k(\Lambda) \geq s_k(M) \geq s_k(N)$ .

В случае  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$  все строки диаграммы  $\Lambda$  имеют нечетную длину, поэтому диаграмма не требует осыпаний, и значит,  $\Lambda = N$ .

В случае  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$  в диаграмме  $\Lambda$  сверху расположено нечетное число строк нечетной длины, а затем строки четной длины. Осыпаться могут только строки четной длины с четным номером  $2k$ , причем при  $l_{2k} = l_{2k+1}$  осыпания не происходит, а при  $l_{2k} \neq l_{2k+1}$  эти строки заменяются на строки длин  $l_{2k} - 1$  и  $l_{2k+1} + 1$ . Значит,  $s_{2k+1}(\Lambda) = s_{2k+1}(N)$  при всех  $k$ .  $\square$

**Теорема 3.10.** *Индексы Кронекера пары  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$  одинаковы для всех элементов  $A$  внутри пласта, содержащего хороший полупростой элемент.*

*Доказательство.* В случае  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$  все элементы пласта хорошие и их диаграммы Юнга совпадают. Поэтому индексы Кронекера постоянны внутри пласта.

В случае  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$  достаточно проверить, что индексы Кронекера не меняются при осыпаниях. Доказательство аналогично доказательству леммы 3.6. В нашем случае, осыпаются только клетки с четными порядковыми номерами, так как над ними

находится нечетное число строк нечетной длины, а сами строки имеют четную длину. Значит, клетки с нечетными номерами остаются в тех же строках (хоть и сдвигаются вдоль строки), поэтому индексы Кронекера не меняются.  $\square$

### 3.4.4 Разные индексы Кронекера внутри пластов $\mathfrak{so}_{2n+1}$ и $\mathfrak{so}_{2n}$

**Случай  $\mathfrak{so}_{2n+1}$ .** Рассмотрим пласт в  $\mathfrak{so}_7$ , содержащий смешанный элемент  $A_m$  со следующей жордановой структурой: собственные значения  $\lambda = \pm 1$  кратности 1 и  $\lambda = 0$  с клетками размеров 2, 2, 1. В этом пласте лежит нильпотентный элемент  $A_n \in \mathfrak{so}_7$ , с жордановыми клетками размеров 3, 3, 1. Индексы Кронекера пары  $(\mathcal{B}_{A_n}, \mathcal{B})$  равны 1, 2, 4, так как элемент  $A_n$  хороший.

Докажем, что индексы Кронекера пары  $(\mathcal{B}_{A_m}, \mathcal{B})$  равны 1, 3, 3. Действительно, модуль  $\mathcal{Z} = \text{Ker}(\mathcal{B} - t\mathcal{B}_A)$  порожден элементами  $X - tA, (X - tA)^3, (X - tA)^5$ , а старшие коэффициенты базисных элементов равны  $A, A^3, A^5$ . Матрицы  $A$  и  $A^3$  линейно независимы и из замечания 1.2.2 следует, что  $m_1 + m_3 + m_5 = 7$ , поэтому  $m_1 = 1$  и  $m_3 = 3$  и  $m_5 = 3$ .

**Случай  $\mathfrak{so}_{2n}$ .** Рассмотрим пласт в  $\mathfrak{so}_8$ , соответствующий полупростому элементу  $A_s$  со следующими собственными значениями:  $\lambda = \pm 1$  кратности 3 и  $\lambda = \pm 2$  кратности 1. В этом пласте лежит нильпотентный элемент  $A_n \in \mathfrak{so}_8$  с жордановыми клетками размеров 3, 3, 1, 1. Индексы Кронекера пары  $(\mathcal{B}_{A_n}, \mathcal{B})$  равны 1, 2, 2, 4, так как элемент  $A_n$  — хороший.

Проверим, что для пары  $(\mathcal{B}_{A_s}, \mathcal{B})$  индексы Кронекера равны 1, 2, 3, 3. Действительно, модуль  $\mathcal{Z}$  порождается элементами

$$f_1 = X - tA, f_3 = (X - tA)^3, f_5 = (X - tA)^5, f_7 = d \text{ pf}(X - tA), \quad (3.37)$$

и старшие коэффициенты равны  $A, A^3, A^5, 5A - A^3$  (последний коэффициент получен с помощью компьютерных вычислений). Таким образом, «подправив» многочлен  $f_7$ , соответствующий пфаффиану:

$$\tilde{f}_7 = f_7 + 5t^2(X - tA) - (X - tA)^3, \quad (3.38)$$

получим, что для многочленов  $f_1, f_3, \tilde{f}_7$  старшие коэффициенты линейно независимы (также проверяется с помощью вычислений), а их степени равны 1, 3, 2. Учитывая, что по замечанию 1.2.2  $m_1 + m_3 + m_5 + m_7 = 9$ , получаем  $m_1 = 1, m_3 = 3, m_5 = 3, m_7 = 2$ .

В частности, получили, что для  $\mathfrak{so}_{2n}$  даже в пластах Диксмье могут быть разные индексы Кронекера.

# Глава 4

## Жорданова часть полной системы функций в биинволюции

### 4.1 Жорданова часть для всех элементов из $\mathfrak{sl}_n$ и $\mathfrak{sp}_{2n}$ .

В этом разделе мы построим жорданову часть полной системы функций в биинволюции для алгебр Ли  $\mathfrak{sl}_n$  и  $\mathfrak{sp}_{2n}$ . И тем самым, учитывая результат предыдущей главы, для каждого элемента  $A$  из  $\mathfrak{sl}_n$  или  $\mathfrak{sp}_{2n}$  получим полный набор функций в биинволюции относительно скобок  $\{, \}_A$  и  $\{, \}$ .

#### 4.1.1 Формулировка результатов

Далее мы будем работать с алгеброй Ли  $\mathfrak{g}_A \subseteq \mathfrak{g}$ , которая может не быть редуктивной. Поэтому в данном разделе отождествим  $\mathcal{S}(\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{S}(\mathfrak{g}^*) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}]$  и будем считать, что многочлены  $r_k(t)$ , определенные в (2.4), принадлежат  $\mathcal{S}(\mathfrak{g})[t]$ .

Напомним обозначения из предыдущей главы:

$$I = \begin{cases} 1, 2, \dots, n-1, & \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n \\ 1, 3, \dots, 2n-1, & \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n} \end{cases}$$

Напомним что через  $f_{k,i} \in \mathcal{S}(\mathfrak{g})$  ( $k \in I, i = 0, \dots, m_k$ ) обозначены коэффициенты по  $t$  многочленов  $r_k(t)$ , используемых в теоремах 3.1 и 3.2:

$$r_k(t) = f_{k,0}(X) + f_{k,1}(X)t + \dots + f_{k,m_k}(X)t^{m_k}. \quad (4.1)$$

По теореме 3.1 многочлены  $f_{k,i}$  составляют кронекерову часть полной системы в функций в биинволюции относительно пары скобок  $\{, \}$  и  $\{, \}_A$ .

В следующем разделе мы покажем, что многочлены  $f_{k,m_k}$  порождают алгебру инвариантов  $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_A)^{\mathfrak{g}_A}$ . Затем мы применим метод сдвига аргумента к элементам  $f_{k,m_k}$ ,  $k \in I$  и докажем теорему, описывающую полную систему функций в бинволюции относительно скобок  $\{, \}$  и  $\{, \}_A$  для любого элемента  $A \in \mathfrak{g}$  для  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$  или  $\mathfrak{sp}_{2n}$ .

Определим многочлены  $g_{k,j} \in \mathcal{S}(\mathfrak{g})$  следующим образом:

$$f_{k,m_k}(X - sB) = g_{k,0}(X) + g_{k,1}(X)s + \dots + g_{k,l_k}(X)s^{d_k}, \quad (4.2)$$

где элемент  $B \in \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$  такой, что  $B|_{\mathfrak{g}_A^*}$  регулярен в  $\mathfrak{g}_A^*$ . В работе [15] приведены примеры подходящих элементов  $B$ .

**Теорема 4.1.** *Функции  $\{f_{k,l} | k \in I, l = 0, \dots, m_k\}$ , определенные в (4.1), и функции  $\{g_{i,j} | i \in I, j = 1, \dots, d_i - 1\}$ , определенные в (4.2), составляют соответственно кронекерову и жорданову части полной системы функций в бинволюции относительно скобок  $\{, \}$  и  $\{, \}_A$  для любого элемента  $A \in \mathfrak{g}$  для  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$  или  $\mathfrak{sp}_{2n}$ .*

## 4.1.2 Доказательство результатов

Напомним, что через  $G_A$  обозначается стабилизатор элемента  $A$  в группе  $G$ . Докажем утверждение, аналогичное лемме 1.5 работы [14].

**Лемма 4.2.** *Для каждого  $k$  имеем  $f_{k,m_k} \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_A)^{\mathfrak{g}_A}$ .*

*Доказательство.* Можно заметить, что многочлены  $f_{k,m_k}$  являются  $G_A$ -инвариантными, так как многочлены  $r_k(t)$  являются  $G_A$ -инвариантными по построению, а значит,  $f_{k,m_k} \in \mathcal{S}(\mathfrak{g})^{G_A} \subseteq \mathcal{S}(\mathfrak{g}_A)^{\mathfrak{g}_A}$ .

Теперь покажем, что  $f_{k,m_k} \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_A)$ . Для любого элемента  $B \notin \mathfrak{g}_A$  выберем базис в ортогональном дополнении к элементу  $[A, B]$ :  $[A, B]^\perp = \langle Y_1, \dots, Y_{d-1} \rangle$ , где  $d = \dim \mathfrak{g}$ . Тогда для любого  $Y \notin [A, B]^\perp$  элементы  $Y, Y_1, \dots, Y_{d-1}$  составляют базис пространства  $\mathfrak{g}$ . Пусть

$$f_{k,m_k} = Y^s u_s + Y^{s-1} u_{s-1} + \dots + u_0, \text{ где } u_i \in \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_{d-1}], u_s \neq 0.$$

По построению имеем  $\{B, Y_i\}_A = (A, [B, Y_i]) = ([A, B], Y_i) = 0$  и  $\{B, Y\}_A \neq 0$ . Без ограничения общности будем считать, что  $\{B, Y\}_A = 1$ . Значит,

$$\{B, f_{k,m_k}\}_A = (A, [B, df_{k,m_k}]) = sY^{s-1}u_s + \dots + u_1.$$

Из теоремы 3.1 следует, что  $dr_k(t) \in \mathcal{Z} = \text{Ker}(\mathcal{B} - t\mathcal{B}_A)$ . Рассмотрев коэффициент при наибольшей степени  $t$ , получаем, что  $df_{k,m_k} \in \text{Ker } \mathcal{B}_A$ . Значит, для любой функции  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathfrak{g})$  верно, что  $\{\varphi, f_{k,m_k}\}_A = 0$ . Тогда для любого  $B \notin \mathfrak{g}_A$  и  $Y \notin [A, B]^\perp$  многочлен  $f_{k,m_k}$  не зависит от  $Y$ . Значит, для любого  $B \notin \mathfrak{g}_A$  имеем  $f_{k,m_k} \in \mathcal{S}([A, B]^\perp)$ . Но  $\bigcap_{B \notin \mathfrak{g}_A} [A, B]^\perp = \mathfrak{g}_A$ , значит,  $f_{k,m_k} \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_A)$ .  $\square$

**Лемма 4.3.** *Многочлены  $f_{k,m_k}$  порождают алгебру инвариантов  $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_A)^{\mathfrak{g}_A}$ .*

*Доказательство.* В работе [15, Thms 4.2, 4.4] было показано, что алгебра  $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_A)^{\mathfrak{g}_A}$  свободно порождается однородными многочленами  $G_i, i \in I$ , причем  $\deg G_k = p_k + 1$  (числа  $p_i$  вводились в разделе 2.1, в частности,  $m_i = i - p_i$ ). Заметим, что многочлены  $f_{k,m_k} \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_A)^{\mathfrak{g}_A}$  алгебраически независимы, так как их дифференциалы — это старшие коэффициенты элементов минимального базиса (а значит, линейно независимы). Кроме того, несложно заметить, что  $\deg f_{k,m_k} = k + 1 - m_k = \deg G_k$ . Таким образом, многочлены  $f_{k,m_k}$  алгебраически независимы, однородны и имеют «правильные» степени, значит, являются базисными инвариантами алгебры  $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_A)^{\mathfrak{g}_A}$ .  $\square$

Обозначим через  $b(\mathfrak{g}_A)$  максимально возможную степень трансцендентности пуассон-коммутативной подалгебры в  $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_A)$ , то есть  $b(\mathfrak{g}_A) = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g}_A + \text{ind } \mathfrak{g}_A)$ , подробнее см. [17, п. 0.2]. Кроме того, напомним что согласно гипотезе Элашвили (доказанной в [6]), для полупростых алгебр Ли выполнено  $\text{ind } \mathfrak{g}_A = \text{ind } \mathfrak{g} = \text{rk } \mathfrak{g}$ .

Наконец, докажем теорему 4.1.

*Доказательство теоремы 4.1.* Многочлены  $f_{k,m_k}$  порождают  $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_A)^{\mathfrak{g}_A}$ , а значит  $\{g_{i,j} | i \in I, j = 0, \dots, d_i - 1\}$  порождают подалгебру Мищенко-Фоменко  $F_B \subseteq \mathcal{S}(\mathfrak{g}_A)$ .

Из работы [1, Thm 3.1] следует, что алгебра  $F_B$  полна (т.е.  $\text{trdeg } F_B = b(\mathfrak{g}_A)$ ), если выполнено два условия:  $\text{codim}(\mathfrak{g}_A^*_{\text{sing}}) \geq 2$  и  $\text{ind } \mathfrak{g}_A = \text{trdeg } \mathcal{S}(\mathfrak{g}_A)^{\mathfrak{g}_A}$ . В [15, Thm 3.4, 3.11] было показано, что  $\text{codim}(\mathfrak{g}_A^*_{\text{sing}}) \geq 2$  для любых элементов  $A$  из алгебр Ли  $\mathfrak{sl}_n$  и  $\mathfrak{sp}_{2n}$ . Там же [15, Thms 4.2, 4.4] было показано, что  $\text{trdeg } \mathcal{S}(\mathfrak{g}_A)^{\mathfrak{g}_A} = \text{ind } \mathfrak{g}_A$ .

С другой стороны, из [15, Thm 4.2, 4.4] следует, что  $\sum \deg G_i = b(\mathfrak{g}_A)$ . А значит,  $\sum \deg f_{k,m_k} = b(\mathfrak{g}_A)$  и многочлены  $g_{i,j}$  алгебраически независимы. Кроме того, они лежат в ядре скобки  $\{, \}_A$  и находятся в биинволюции относительно скобок  $\{, \}$  и  $\{, \}_B$ .

Из канонического вида пары кососимметрических билинейных форм следует, что ядро  $\text{Ker } \mathcal{B}_A$  формы  $\mathcal{B}_A$  натянута на базис жордановых блоков и элементы  $df_{k,m_k}, k \in I$ . Значит,  $\text{Ker } \mathcal{B}_A$  косоортогонально относительно обеих форм  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{B}_A$  кронекеровой части базиса билагранжева подпространства. Поэтому многочлены  $g_{i,j} \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_A)$  коммутируют со всеми многочленами  $f_{i,j}$  в смысле обеих пуассоновых структур  $\{, \}$  и  $\{, \}_A$ . Но

многочлены  $\{g_{i,0} | i \in I\}$  уже лежат в кронекеровой части. Значит, оставшиеся многочлены дополняют кронекерову часть полной системы функций в биинволюции до полной системы функций в биинволюции.  $\square$

Осталось проверить, что полученный базис билагранжева подпространства дополняется до канонического базиса пары кососимметрических билинейных форм.

**Лемма 4.4.** *Элементы  $\{df_{k,l} | k \in I, l = 0, \dots, m_k\}$  и  $\{dg_{i,j} | i \in I, j = 1, \dots, d_i - 1\}$  можно дополнить до канонического базиса пары форм  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_A)$ .*

*Доказательство.* Для краткости положим  $v_{k,l} = df_{k,l}$ ,  $u_{i,j} = dg_{i,j}$ . И будем строить элементы  $\{\tilde{v}_{k,l} | k \in I, l = 1, \dots, m_k\}$  и  $\{\tilde{u}_{i,j} | i \in I, j = 1, \dots, d_i - 1\}$ , дополняющие до базиса кронекеровых и жордановых блоков соответственно.

Дополним сначала  $\{v_{k,l}\}$  до базиса кронекеровых блоков как описано в [21], то есть построим элементы  $\{\tilde{v}_{k,l} | k \in I, l = 1, \dots, m_k\}$ . Далее, мы будем строить элементы  $\tilde{u}_{i,j} \in \text{Кег } \mathcal{B}_A$ , которые дополняли бы  $u_{i,j}$  до канонического базиса жордановых блоков. Заметим, что если  $\tilde{u}_{i,j} \in \text{Кег } \mathcal{B}_A$ , то форма  $\mathcal{B}_A$  будет иметь канонический вид в построенном базисе. Для формы  $\mathcal{B}$  мы будем добиваться выполнения следующих 10 условий:

$$\begin{aligned}
(c1) \mathcal{B}(\tilde{u}_{i,j}, \tilde{u}_{k,l}) &= 0, \\
(c2) \mathcal{B}(\tilde{u}_{i,j}, u_{k,l}) &= \delta_{ij}^{kl}, & (c3) \mathcal{B}(u_{i,j}, u_{k,l}) &= 0, \\
(c4) \mathcal{B}(\tilde{u}_{i,j}, \tilde{v}_{k,l}) &= 0, & (c5) \mathcal{B}(u_{i,j}, \tilde{v}_{k,l}) &= 0, & (c6) \mathcal{B}(\tilde{v}_{i,j}, \tilde{v}_{k,l}) &= 0, \\
(c7) \mathcal{B}(\tilde{u}_{i,j}, v_{k,l}) &= 0, & (c8) \mathcal{B}(u_{i,j}, v_{k,l}) &= 0, & (c9) \mathcal{B}(\tilde{v}_{i,j}, v_{k,l}) &= \delta_{ij}^{kl}, \\
(c10) \mathcal{B}(v_{i,j}, v_{k,l}) &= 0,
\end{aligned}$$

где  $\delta_{ij}^{kl} = \delta_i^k \delta_j^l$  и  $\delta_i^j$  — дельта Кронекера.

Из предыдущего следует, что выполнены условия (c3), (c6), (c8) – (c10). Обозначим через  $W$  ядро формы  $\mathcal{B}_A$ ,  $W = \text{Кег } \mathcal{B}_A$ . Заметим, что  $W$  натянута на все базисные векторы жордановой части и на векторы  $\{v_{k,m_k}, k \in I\}$ . Значит,

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(W, v_{k,l}) &= 0, \quad \text{при } k \in I, l = 0, \dots, m_k, \\
\mathcal{B}(W, \tilde{v}_{k,l}) &= 0, \quad \text{при } k \in I, l = 1, \dots, m_k - 1.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Положим  $V = \langle v_{k,m_k}, k \in I \rangle \subseteq W$  и рассмотрим подпространство  $U \subseteq W$  такое, что

$$W = V \oplus U, \quad u_{i,j} \in U, \quad \text{для всех } i \in I, j = 1, \dots, d_i - 1. \tag{4.4}$$

Из канонического вида пары кососимметрических билинейных форм следует, что  $\text{Ker } \mathcal{B}|_W = V$ , поэтому форма  $\mathcal{B}|_U$  невырождена. Значит, элементы  $u_{i,j}$  можно дополнить до канонического базиса кососимметрической билинейной формы, обозначим элементы построенной части базиса через  $\{\tilde{u}_{i,j}, i \in I, j = 1 \dots, d_i - 1\}$ . Тогда будут выполнены условия (c1) и (c2). Учитывая, что  $u_{i,j}, \tilde{u}_{i,j} \in W$ , получаем, что выполнено условие (c7), а также при  $l \neq m_k$  выполнены условия (c4) и (c5). Таким образом, осталось добиться, чтобы  $\mathcal{B}(u_{i,j}, \tilde{v}_{k,m_k}) = 0$  и  $\mathcal{B}(\tilde{u}_{i,j}, \tilde{v}_{k,m_k}) = 0$ . Вычтем из  $\tilde{u}_{i,j}$  элементы  $v_{k,m_k}$  с подходящими коэффициентами, тогда  $\mathcal{B}(\tilde{u}_{i,j}, \tilde{v}_{k,m_k}) = 0$ . Теперь вычтем из  $\tilde{v}_{i,j}$  элементы  $\tilde{u}_{k,l}$  с подходящими коэффициентами, и тогда  $\mathcal{B}(u_{i,j}, \tilde{v}_{k,m_k}) = 0$ . Заметим, что мы каждый раз вычитали элементы из  $\text{Ker } \mathcal{B}_A$ , поэтому матрица формы  $\mathcal{B}_A$  не изменилась.  $\square$

### 4.1.3 Пример

Построим полную систему функций в биинволюции для матрицы  $A = \text{diag}\{\lambda, \lambda, \mu\} \in \mathfrak{sl}_3$ , где  $2\lambda + \mu = 0$ . В разделе 3.2.3 была построена кронекерова часть полной системы функций в биинволюции для матрицы  $\text{diag}\{\lambda, \lambda, \mu\} \in \mathfrak{sl}_3$ :

$$\begin{aligned} f_{2,0} &= \frac{\text{tr } X^3}{3}, \\ f_{2,1} &= -\frac{(\lambda + \mu) \text{tr } X^2}{2} + \text{tr } X^2 A, \\ f_{1,0} &= \frac{-\text{tr } X^2}{2}, \\ f_{1,1} &= -\text{tr } AX. \end{aligned}$$

Чтобы построить жорданову часть, нам потребуются многочлены  $f_{1,1}, f_{2,1}$ . Как видно, многочлен  $f_{1,1}$  имеет степень 1, поэтому он не внесет вклада в жорданову часть. А чтобы получить единственный многочлен, попадающий в жорданову часть, достаточно взять матрицу  $B$  такую, что  $B|_{\mathfrak{g}_A}$  будет регулярным элементом и взять коэффициент при  $s$  многочлена  $f_{2,1}(X - sB)$ . Получим

$$g_{2,1} = (\lambda + \mu) \text{tr } XB - \text{tr } XBA - \text{tr } BXA.$$

Таким образом, получили  $5 = \frac{1}{2}(\text{ind } \mathfrak{sl}_3 + \dim \mathfrak{sl}_3)$  алгебраически независимых функций в биинволюции.

## 4.2 Жорданова часть для полупростых хороших элементов из $\mathfrak{so}_{2n+1}$ и $\mathfrak{so}_{2n}$ .

### 4.2.1 Формулировка результатов

Напомним, что в лемме 3.7 утверждается, что в случае  $\mathfrak{so}_{2n+1}$  все полупростые элементы являются хорошими, а в случае  $\mathfrak{so}_{2n}$  полупростой элемент является хорошим, если кратность собственного значения  $\lambda = 0$  не меньше кратности остальных собственных значений.

В этом разделе мы покажем, что для полупростых хороших элементов  $A$  полная система функций в бинволюции может быть построена так же, как и в случаях  $\mathfrak{sl}_n$  и  $\mathfrak{sp}_{2n}$ : кронекерова часть системы составляют коэффициенты многочленов, полученных по формулам (2.4) и (3.12), а жорданова часть может быть получена применением метода сдвига аргумента к некоторым многочленам из кронекеровой части.

Следующая теорема описывает полную систему функций в бинволюции относительно скобок  $\{, \}$  и  $\{, \}_A$  для полупростых хороших элементов  $A \in \mathfrak{g}$  для  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$  или  $\mathfrak{so}_{2n+1}$ .

**Теорема 4.5.** *Функции  $\{f_{k,l} | k \in I, l = 0, \dots, t_k\}$ , определенные в (4.1), и функции  $\{g_{i,j} | i \in I, j = 1, \dots, d_i - 1\}$ , определенные в (4.2), составляют соответственно кронекерову и жорданову части полной системы функций в бинволюции относительно скобок  $\{, \}$  и  $\{, \}_A$  для хорошего полупростого элемента  $A \in \mathfrak{g}$  для  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$  или  $\mathfrak{so}_{2n}$ .*

### 4.2.2 Доказательство результатов

**Лемма 4.6.** *Для хороших полупростых элементов  $A \in \mathfrak{so}_N$  алгебра инвариантов  $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_A)^{\mathfrak{g}_A}$  свободно порождается однородными многочленами со степенями:*

- $p_i + 1$ , где  $i = 1, 3, 5, \dots, 2n - 1$  в случае  $\mathfrak{so}_{2n+1}$ ,
- $p_i + 1$ , где  $i = 1, 3, 5, \dots, 2n - 3$ , и  $\frac{1}{2}(p_{2n-1} + 1)$  в случае  $\mathfrak{so}_{2n}$ .

*Доказательство.* Для полупростых  $A \in \mathfrak{so}_N$  выполнено

$$\mathfrak{g}_A \approx \mathfrak{gl}_{n_1} \oplus \dots \oplus \mathfrak{gl}_{n_s} \oplus \mathfrak{so}_{n_0}. \quad (4.5)$$

Пронумеруем клетки диаграммы Юнга  $\Lambda$ , соответствующей матрице  $A$ , числами от 0 до  $N - 1$  слева направо, сверху вниз. Клетки с нечетными номерами назовем

отмеченными. Запишем в отмеченной клетке с номером  $i$  число  $p_i + 1$ , то есть номер строки, в которой эта клетка находится.

Рассмотрим сначала случай  $\mathfrak{so}_{2n+1}$ . Тогда  $n_0$  нечетно и алгебра  $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_A)^{\mathfrak{g}_A}$  свободно порождается однородными многочленами со степенями

$$1, 2, \dots, n_1, 1, 2, \dots, n_2, \dots, 1, 2, \dots, n_s, 2, 4, 6, \dots, n_0 - 1. \quad (4.6)$$

Для доказательства леммы в случае  $\mathfrak{so}_{2n+1}$  достаточно проверить, что числа, записанные в  $\Lambda$ , совпадают с (4.6) с точностью до перестановки. Но это несложно: диаграмма  $\Lambda$  состоит из сдвоенных столбцов высоты  $n_i$  и одинарного столбца высоты  $n_0$ . В сдвоенном столбце высоты  $n_i$  записаны числа  $1, 2, \dots, n_i$ , так как в каждой строке отмечена ровно одна клетка. А в столбце высоты  $n_0$  записаны числа  $2, 4, \dots, n_0 - 1$ , так как слева и справа от этого столбца находится четное число столбцов.

В случае  $\mathfrak{so}_{2n}$  алгебра  $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_A)^{\mathfrak{g}_A}$  свободно порождается однородными многочленами со степенями

$$1, 2, \dots, n_1, 1, 2, \dots, n_2, \dots, 1, 2, \dots, n_s, 2, 4, 6, \dots, n_0 - 2, \frac{n_0}{2}. \quad (4.7)$$

Для доказательства леммы в случае  $\mathfrak{so}_{2n}$  достаточно проверить, что числа, записанные в  $\Lambda$ , совпадают с (4.7), если разделить одно из чисел, записанных в нижней строке диаграммы, на 2. Элемент  $A$  хороший, поэтому в нижней строке диаграммы есть элемент из одинарного столбца. Значит, разделив на 2 последнее число одинарного столбца, получим необходимое равенство.  $\square$

*Доказательство теоремы 4.5.* В лемме 4.2 доказано, что  $f_{k,m_k} \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_A)^{\mathfrak{g}_A}$ . Доказательство того, что элементы  $f_{k,m_k}$  являются базисными инвариантами, полностью повторяет доказательство леммы 4.3, если учесть, что степени свободных порождающих алгебры  $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_A)^{\mathfrak{g}_A}$  описаны в лемме 4.6.

Алгебра  $\mathfrak{g}_A$  в этом случае редуцируема, поэтому функции, полученные методом сдвига аргумента вдоль регулярного элемента, автоматически задают полную систему функций в инволюции на  $\mathfrak{g}_A$ . И значит, элементы  $\{g_{i,j} \mid i \in I, j = 1 \dots d_i - 1\}$  снова составляют жорданову часть полной системы функций в биинволюции.  $\square$

### 4.2.3 Пример

Построим полную систему функций в биинволюции для матрицы  $A = \text{diag}\{\lambda, -\lambda, 0, 0, 0\} \in \mathfrak{sl}_5$ . В разделе 3.2.3 была построена кронекерова часть полной системы функций:

$$f_{1,0} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} X^2,$$

$$f_{1,1} = -\operatorname{tr} AX,$$

$$f_{3,0} = \frac{1}{8} \operatorname{tr}^2 X^2 - \frac{1}{4} \operatorname{tr} X^4,$$

$$f_{3,1} = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} X^2 \operatorname{tr} AX + \operatorname{tr} AX^3,$$

$$f_{3,2} = \frac{\lambda^2}{2} \operatorname{tr} X^2 + \frac{1}{2} \operatorname{tr}^2 AX - \operatorname{tr} A^2 X^2 - \frac{1}{2} \operatorname{tr}(AX)^2.$$

Чтобы построить жорданову часть, нам потребуются многочлены  $f_{1,1}, f_{3,2}$ . Как видно, многочлен  $f_{1,1}$  имеет степень 1, поэтому он не внесет вклада в жорданову часть. А чтобы получить единственный многочлен, попадающий в жорданову часть, достаточно взять матрицу  $B$  такую, что  $B|_{\mathfrak{g}_A}$  будет регулярным элементом и взять коэффициент при  $s$  многочлена  $f_{3,2}(X - sB)$ . Получим

$$g_{3,1} = -\lambda^2 \operatorname{tr} XB - \operatorname{tr} AX \operatorname{tr} AB + \operatorname{tr} A^2 XB + \operatorname{tr} A^2 BX + \operatorname{tr} AXAB.$$

Таким образом, получили  $6 = \frac{1}{2}(\operatorname{ind} \mathfrak{so}_5 + \dim \mathfrak{so}_5)$  алгебраически независимых функций в биинволюции.

## 4.3 Пределы подалгебр Мищенко-Фоменко и построенные полные системы функций в биинволюции

В этом разделе мы определим формальные предельные подалгебры Мищенко-Фоменко и явно предъявим систему порождающих для некоторых предельных подалгебр.

### 4.3.1 Предварительные сведения

Напомним, что если алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  редуктивна, то подалгебра Мищенко-Фоменко  $F_A$  порождается всеми кратными производными вдоль элемента  $A$  от всех базисных инвариантов. В случае регулярного элемента  $A$  эта алгебра свободна и полна, то есть имеет максимальную степень трансцендентности  $\frac{1}{2}(\operatorname{ind} \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g})$  [1].

С помощью предельного перехода из подалгебр Мищенко-Фоменко можно получать другие коммутативные (относительно скобки Пуассона) подалгебры. В работе Шувалова [27] изучаются пределы подалгебр  $\lim_{s \rightarrow 0} F_{A(s)}$ , где элемент  $A(s) = A_0 + A_1 s + \dots + A_r s^r$

регулярен при достаточно малых  $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  и все  $A_i$  принадлежат одной фиксированной картановской подалгебре  $\mathfrak{h}$ . В работе [18] было показано, что алгебры, построенные таким образом, имеют максимальную степень трансцендентности.

Уточним, что понимается под пределом  $\lim_{s \rightarrow 0} F_{A(s)}$ . При всех  $s$  подалгебра  $F_{A(s)}$  является градуированной:  $F_{A(s)} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} (F_{A(s)})_k$ , где  $k$  отвечает за степень однородного многочлена,  $(F_{A(s)})_k = F_{A(s)} \cap \mathcal{S}^k(\mathfrak{g})$ . При этом размерность градуирующего подпространства  $(F_{A(s)})_k$  не зависит от  $s$ , так как элемент  $A(s)$  регулярен. Значит, в каждом соответствующем грассмановом многообразии существует предел  $F_k = \lim_{s \rightarrow 0} (F_{A(s)})_k$ . Сложив все полученные пределы получим предельную подалгебру:  $\lim_{s \rightarrow 0} F_{A(s)} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} F_k$ .

Положим  $\mathfrak{z}_{-1} = \mathfrak{g}$  и  $\mathfrak{z}_k = \mathfrak{z}(A_0) \cap \dots \cap \mathfrak{z}(A_k)$  для всех  $k = 0, \dots, r$ . Из условия регулярности  $A(s)$  при малых  $s \neq 0$  следует, что  $\mathfrak{z}_r = \mathfrak{h}$ .

**Теорема 4.7** ([27], Теор.1). *Алгебра  $\lim_{s \rightarrow 0} F_{A(s)}$  свободна. В качестве ее свободных порождающих можно взять объединение некоторых наборов производных базисных инвариантов алгебр  $\mathfrak{z}_{k-1}$  вдоль  $A_k$  ( $k = 0, \dots, r$ ) и произвольного базиса подпространства  $\mathfrak{h}$ .*

В настоящей работе мы явно построим свободные порождающие для линейного случая  $A(s) = A + Bs$ , где  $A, B \in \mathfrak{h}$  для классических простых алгебр Ли  $\mathfrak{g}$  (в случае  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$  элемент  $A$  должен быть хорошим).

### 4.3.2 Порождающие предельных подалгебр Миценко-Фоменко

Заметим, что элемент  $A + Bs$  регулярен при достаточно малых  $s \neq 0$  в точности тогда, когда  $\bar{B} = B|_{\mathfrak{g}_A}$  регулярен в  $\mathfrak{g}_A^* \simeq \mathfrak{g}_A$ . Обозначим через  $f_1, \dots, f_n$  базисные инварианты алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , а через  $g_1, \dots, g_n$  — базисные инварианты алгебры Ли  $\mathfrak{g}_A = \mathfrak{z}(A)$ . Тогда в нашем случае теорему 4.7 можно переформулировать следующим образом:

**Следствие 4.8.** *Предельная подалгебра  $\lim_{s \rightarrow 0} F_{A+Bs}$  свободно порождается некоторыми из кратных производных от  $f_i$  вдоль  $A$  и кратных производных от  $g_i$  вдоль  $B$ .*

*Доказательство.* Достаточно показать, что элементы  $\{\partial_B^{\deg g_i - 1} g_i \mid i = 1, \dots, n\}$  — последние (не являющиеся константами) частные производные базисных инвариантов алгебры  $\mathfrak{g}_A$  — являются базисом картановской подалгебры  $\mathfrak{h}$ . Действительно, эти элементы являются дифференциалами базисных инвариантов в точке  $\bar{B}$ :  $\partial_B^{\deg g_i - 1} g_i =$

$(\deg g_i - 1)! \cdot d_{\bar{B}} g_i$ . Подалгебра  $\mathfrak{g}_A$  редуکتивна, и значит, дифференциалы ее базисных инвариантов в регулярной точке порождают централизатор этой точки (по критерию Костанта, см [14, Def. 1.6]). Но элемент  $\bar{B}$  регулярен в  $\mathfrak{g}_A$  и поэтому элементы  $\{\partial_B^{\deg g_i - 1} g_i \mid i = 1, \dots, n\}$  порождают  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}_A}(\bar{B}) = \mathfrak{z}(A) \cap \mathfrak{z}(B) = \mathfrak{h}$  и являются базисом  $\mathfrak{h}$ , так как  $\dim \mathfrak{h} = n$ .

□

Элемент  $B|_{\mathfrak{g}_A}$  регулярен в  $\mathfrak{g}_A$ , значит, при построении жордановой части полной системы функций в биинволюции относительно пары скобок  $\{, \}, \{, \}_A$  в качестве регулярного элемента из  $\mathfrak{g}_A$  можно использовать  $B|_{\mathfrak{g}_A}$ . Докажем, что полученные таким образом полные системы функций в биинволюции и являются свободными порождающими предельной алгебры  $\lim_{s \rightarrow 0} F_{A+B_s}$ .

**Лемма 4.9.** *Кронекерова часть полной системы функций в биинволюции  $\{f_{i,j}\}$ , построенная в теоремах 3.1 и 3.2, порождает подалгебру Миценко-Фоменко  $F_A$ .*

*Доказательство.* В лемме 2.7 были получены явные формулы для многочленов  $r_k(t)$ , а именно

$$r_k(t) = (-1)^k E_{k+1}(y_1, \dots, y_{k+1}), \quad \text{где } y_i = \operatorname{tr}(X - tA)^i - (\mu_k^i + \dots + \mu_{n-1}^i)(-t)^i. \quad (4.8)$$

Учитывая, что

$$(-1)^k E_{k+1}(y_1, \dots, y_{k+1}) = \frac{1}{k+1} y_{k+1} + \tilde{E}_{k+1}(y_1, \dots, y_k), \quad (4.9)$$

получаем, что для всех  $k$  многочлены  $\operatorname{tr}(X - tA)^k$  выражаются как многочлены от  $r_0(t), \dots, r_{k-1}(t)$  с коэффициентами в  $\mathbb{C}[t]$ .

Таким образом, коэффициенты по  $t$  многочленов  $\operatorname{tr}(X - tA)^k$  алгебраически выражаются через коэффициенты по  $t$  многочленов  $r_k(t)$ . Осталось заметить, что коэффициенты многочленов  $\operatorname{tr}(X - tA)^k$  порождают подалгебру  $F_A$ , так как следы степеней являются базисными инвариантами алгебр  $\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{sp}_{2n}, \mathfrak{so}_{2n+1}$ . В случае алгебры Ли  $\mathfrak{so}_{2n}$  одним из базисных инвариантов является пфаффиан, но элемент  $A$  является хорошим, а значит, пфаффиан совпадает с многочленом  $r_{2n-1}$ , используемым в теореме 4.5.

Таким образом проверили, что  $F_A \subseteq \mathbb{C}[f_{i,j} \mid i \in I, j = 0, \dots, m_k]$ . Обратное включение очевидно, так как многочлены  $f_{i,j}$  выражаются через коэффициенты  $\operatorname{tr}(X - tA)^k$  с помощью формул (4.8). □

**Теорема 4.10.** Пусть  $\mathfrak{g}$  — классическая простая алгебра Ли, элементы  $A, B \in \mathfrak{g}$  лежат в картановской подалгебре  $\mathfrak{h}$ , причем элемент  $A + Bs$  регулярен при достаточно малых  $s \neq 0$ . В случае  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$  на элемент  $A$  накладывается дополнительное условие:  $A$  — хороший. Тогда наборы функций, построенные в теоремах 4.1 и 4.5, свободно порождают предельную подалгебру  $\lim_{s \rightarrow 0} F_{A+B_s}$ .

*Доказательство.* Напомним, что через  $f_1, \dots, f_n$  обозначены базисные инварианты алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , а через  $g_1, \dots, g_n$  — базисные инварианты алгебры Ли  $\mathfrak{g}_A = \mathfrak{z}(A)$ . По следствию 4.8 предельная подалгебра  $\lim_{s \rightarrow 0} F_{A+B_s}$  свободно порождается некоторыми из кратных производных  $\{\partial_A^k f_i \mid i = 1, \dots, n, k = 0, \dots, \deg f_i\} \cup \{\partial_B^k g_i \mid i = 1, \dots, n, k = 0, \dots, \deg g_i\}$ .

Заметим, что элементы  $\{\partial_A^k f_i\}$  порождают  $F_A \subseteq \mathcal{S}(\mathfrak{g})$ , а элементы  $\{\partial_B^k g_i\}$  порождают  $F_B \subseteq \mathcal{S}(\mathfrak{g}_A)$ . Из леммы 4.9 мы знаем, что кронекерова часть полной системы функций в биинволюции  $\{f_{i,j}\}$  свободно порождает подалгебру  $F_A \subseteq \mathcal{S}(\mathfrak{g})$ , а из леммы 4.3 — что жорданова часть полной системы функций в биинволюции  $\{g_{i,j}\}$  вместе с элементами  $f_{k,m_k}$  свободно порождает подалгебру  $F_B \subseteq \mathcal{S}(\mathfrak{g}_A)$ . Кроме того, все элементы полной системы функций в биинволюции алгебраически независимы по построению. Значит, построенная полная системы функций в биинволюции свободно порождает предельную подалгебру Мищенко-Фоменко.  $\square$

# Заключение

Работа посвящена исследованию вполне интегрируемых бигамильтоновых систем на классических простых алгебрах Ли. А именно, в ней изучается вопрос построения полных систем функций в биинволюции, соответствующих каноническому базису билагранжева подпространства, на классических простых алгебрах Ли.

В случае алгебр Ли  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$  и  $\mathfrak{sp}_{2n}$  поставленную задачу удалось решить полностью: для произвольного элемента  $A \in \mathfrak{g}$  найдена искомая полная система функций в биинволюции. Кронекерова часть этой системы построена в разделе 3.2.1, а жорданова — в разделе 4.1.

В случае алгебры Ли  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$  поставленная задача полностью решена для всех полупростых элементов  $A \in \mathfrak{g}$ , а в случае  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$  — для всех полупростых «хороших» (см. определение 3.11) элементов  $A \in \mathfrak{g}$ . Кронекеровы и жордановы части этих систем построены в разделах 3.2.2 и 4.2 соответственно.

В разделе 4.3 показано, что в случае полупростого элемента  $A$  построенные полные системы функций в биинволюции свободно порождают некоторые предельные подалгебры Мищенко–Фоменко. (В случае  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$  на элемент  $A$  накладывается дополнительное условие:  $A$  — «хороший».)

Кроме того, для некоторых типов элементов  $A \in \mathfrak{g}$ , где  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$  или  $\mathfrak{so}_{2n}$  была найдена кронекерова часть полной системы функций в биинволюции. А именно, в разделе 3.2.2 кронекерова часть построена для «хороших» элементов  $A \in \mathfrak{g}$ , а в разделе 3.3 — для «исправимых» элементов  $A \in \mathfrak{g}$  (см. определения 3.2 и 3.3).

Из описанных результатов видно, что случаи алгебр Ли  $\mathfrak{so}_{2n+1}$  и  $\mathfrak{so}_{2n}$  оказались сложнее, чем случаи  $\mathfrak{sl}_n$  и  $\mathfrak{sp}_{2n}$ . Это подтверждается и результатами раздела 3.4, в котором доказано, что для алгебр Ли  $\mathfrak{sl}_n$  и  $\mathfrak{sp}_{2n}$  индексы Кронекера постоянны для всех элементов  $A$  внутри пласта, а для случаев  $\mathfrak{so}_{2n+1}$  и  $\mathfrak{so}_{2n}$  это неверно.

Кроме того, можно заметить, что случай  $\mathfrak{so}_{2n}$  оказался сложнее, чем  $\mathfrak{so}_{2n+1}$ . Это также согласуется с результатами раздела 3.4 в котором показано что для  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$

индексы Кронекера постоянны внутри пластов содержащих полупростой элемент, а в случае  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$  это не так.

В качестве направлений дальнейших исследований можно выделить следующие:

- Исследовать, возможно ли построить кронекерову часть для произвольных элементов  $A$  из алгебр Ли  $\mathfrak{so}_{2n+1}$  и  $\mathfrak{so}_{2n}$ .
- Исследовать, возможно ли дополнить построенную кронекерову часть до полной системы функций в биинволюции.
- Исследовать поставленную задачу для исключительных простых алгебр Ли  $\mathfrak{g}$ .

# Литература

- [1] Bolsinov A.V. Commutative families of functions related to consistent Poisson brackets // Acta Appl. Math. — 1991. — Vol. 24, no. 3. — P. 253-274.
- [2] Bolsinov A.V. Complete commutative subalgebras in polynomial Poisson algebras: a proof of the Mischenko–Fomenko conjecture // Theoretical and Applied Mechanics — 2016. — Vol. 43, no. 2. — P. 145–168.
- [3] Bolsinov A.V., Matveev V.S., Miranda E., Tabachnikov S. Open problems, questions and challenges in finite-dimensional integrable systems // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2018. — Vol. 376, no. 2131. — P. 1–40.
- [4] Bolsinov A.V., Zhang P. Jordan-Kronecker invariants of finite-dimensional Lie algebras // Transformation Groups. — 2016. — Vol. 21, no. 1. — P. 51–86.
- [5] Borho W., Kraft H. Über Bahnen und deren Deformationen bei linearen Aktionen reductiver Gruppen // Commentarii Mathematici Helvetici — 1979. — Vol. 54 — P. 61-104.
- [6] Charbonnel J.-Y., Moreau A. The index of centralizers of elements of reductive Lie algebras // Documenta Mathematica — 2010. — Vol. 15 — P. 387-421.
- [7] Charbonnel J.-Y., Moreau A. The symmetric invariants of centralizers and Slodowy grading // Math. Zeitsch. — 2016. — Vol. 282, no. 1-2. — P. 273-339.
- [8] Elashvili A. G., Kac V. G., Vinberg E. B. On Exceptional Nilpotents in Semisimple Lie Algebras // J. Lie Theory — 2009. — Vol. 19 — P. 371-390.
- [9] Futorny V., Molev A. Quantization of the shift of argument subalgebras in type A // Advances in Mathematics — 2015. — Vol. 285. — P. 1358-1375.

- [10] Kempken G. Induced conjugacy classes in classical Lie algebras // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg — 1983. — Vol. 58. — P. 53-83.
- [11] Kostant B. Lie Group Representations on Polynomial Rings // American Journal of Mathematics — 1963. — Vol. 85, no. 3. — P. 327-404.
- [12] Kraft H. Parametrisierung von Konjugationsklassen in  $\mathfrak{sl}_n$  // Mathematische Annalen — 1978. — Vol. 234, no. 3. — P. 209-220.
- [13] Magri F. A simple model of the integrable Hamiltonian equation // J. Math. Phys. — 1978. — Vol. 19, no. 5. — P. 1156–1162.
- [14] Molev A., Yakimova O. Quantisation and nilpotent limits of Mishchenko–Fomenko subalgebras // Represent. Theory — 2019. — Vol. 23. — P. 350-379.
- [15] Panyushev D., Premet A., Yakimova O. On symmetric invariants of centralisers in reductive Lie algebras // Journal of Algebra — 2007. — Vol. 313, no. 1. — P. 343-391.
- [16] Болсинов А. В., Зуев К. М. Формальная теорема Фробениуса и метод сдвига аргумента // Матем. заметки. — 2009. — Т. 86, № 1. — С. 3–13.
- [17] Винберг Э. Б. О некоторых коммутативных подалгебрах универсальной обертывающей алгебры // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1990. — Т. 54, № 1. — С. 3–25.
- [18] Винберг Э. Б. Пределы интегрируемых гамильтонианов на полупростых алгебрах Ли // Функц. анализ и его прил. — 2014. — Т. 48, № 2. — С. 39–50.
- [19] Ворушилов К. С. Полные наборы полиномов в бинволюции на нильпотентных семимерных алгебрах Ли // Математический сборник — 2021. — Т. 212, № 9. — С. 3–17.
- [20] Ворушилов К. С. Инварианты Жордана–Кронекера борелевских подалгебр полупростых алгебр Ли // Чебышевский сборник — 2021. — Т. 22, № 3. — С. 32–56.
- [21] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука. — 1967.
- [22] Гельфанд И. М., Дорфман И. Я. Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры // Функц. анализ и его прил. — 1979. — Т. 13, № 4. — С. 13–30.

- [23] Козлов И. К. Элементарное доказательство теоремы Жордана–Кронекера // Матем. заметки — 2013. — Т. 94, № 6. — С. 857-870.
- [24] Манаков С. В. Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики  $n$ -мерного твердого тела // Функц. анализ и его прил. — 1976. — Т. 10, № 4. — С. 93-94.
- [25] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли // Известия АН СССР. — 1978. — Т. 42, № 2. — С. 396–415.
- [26] Садэтов С. Е. Доказательство гипотезы Мищенко–Фоменко // ДАН СССР — 2004. — Т. 397, № 6. — С. 751-754.
- [27] Шувалов В. В. О пределах подалгебр Мищенко–Фоменко в алгебрах Пуассона полупростых алгебр Ли // Функц. анализ и его прил. — 2002. — Т. 36, № 4. — С. 55–64.

### Публикации автора по теме диссертации

**Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5 «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика» и входящих в базы цитирования Scopus, Web of Science и RSCI**

- [28] Гаража А. А. О каноническом базисе пары согласованных скобок Пуассона на алгебре матриц // Математический сборник — 2020. — Т. 211, № 6. — С. 95-106.  
DOI: <https://doi.org/10.4213/sm9282>  
Входит в перечень ВАК РФ, двухлетний импакт-фактор РИНЦ 2022 – 0,860.  
Английская версия: Garazha A. A. A canonical basis of a pair of compatible poisson brackets on a matrix algebra // Sbornik Mathematics. — 2020. — Vol. 211, no. 6. — P. 838–849.  
DOI: <https://doi.org/10.1070/SM9282>  
Журнал индексируется в WOS, Scopus. IF: WOS 2022 — 1,274, SJR 2022 — 0,571.
- [29] Гаража А. А. О каноническом базисе пары согласованных скобок Пуассона на симплектической алгебре Ли // Успехи математических наук. — 2022. — Т. 77, № 2. —

С. 199-200.

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm10035>

Входит в перечень ВАК РФ, двухлетний импакт-фактор РИНЦ 2022 – 0,554.

Английская версия: Garazha A. A. On a canonical basis of a pair of compatible poisson brackets on a symplectic lie algebra // Russian Mathematical Surveys. — 2022. — Vol. 77, no. 2. — P. 375–377.

DOI: <https://doi.org/10.1070/RM10035>

Журнал индексируется в WOS, Scopus. IF: WOS 2022 — 1,21, SJR 2022 — 0,45.

- [30] Garazha A. Kronecker’s method and complete systems of functions in bi-involution on classical Lie algebras // Journal of Lie Theory. — 2023. — Vol. 33, no. 2. — P. 663-686. Журнал индексируется в WOS, Scopus. IF: WOS 2022 — 0,376, SJR 2022 — 0,353.

### **Тезисы докладов**

- [31] Гаража А. А. Об индексах Кронекера присоединённых операторов пары матриц // Шестая школа-конференция Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов. Москва, Россия, 30 января – 4 февраля 2017 г. Тезисы докладов. — 96 с. — Москва: Москва, 2017. — С. 22–23.
- [32] Гаража А. А. О полных системах функций в биинволюции на алгебрах Ли // Девятая школа-конференция Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов. Самара, Россия, 21-26 августа 2021 г.: тезисы докладов. — 66 с. — Самара: Издательство Самарского университета, 2021. — С. 20–21.