МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Гарманова Татьяна Алексеевна

КОНСТАНТЫ ВЛОЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент Игорь Анатольевич Шейпак

Москва — 2025

Оглавление

Введение

Актуальность темы. Пусть X, Y — банаховы пространства и имеет место непрерывное вложение $X \hookrightarrow Y$. Константой вложения (иногда точной константой вложения) пространства X в пространство Y называют норму оператора вложения $J : X \to Y$, $Jx = x$, $\forall x \in X$.

В качестве пространств X и Y часто рассматривают пространства Соболева $W_p^n(\Omega, U)$ с параметрами $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $n \in \mathbb{N}$ и $\Omega \subset \mathbb{R}$, состоящие из вещественнозначных функций, все производные которых до $n-1$ порядка включительно абсолютно непрерывны на Ω, $f^{(n)} \in L_p(\Omega)$ и функции f удовлетворяют краевым условиям U. В качестве множества Ω обычно рассматривают следующие множества:

$$\Omega \in \{\mathbb{R}, \quad [0, +\infty), \quad [-1, 1], \quad [0, 1]\}.$$

Задача о нахождении констант вложения пространств $W_p^n(\Omega, U)$ в пространства $W_q^k(\Omega, U)$ имеет достаточно долгую историю и многие результаты были получены еще до возникновения понятия пространств Соболева. Одним из предшественников теории вложений в пространствах Соболева является вопрос об оценке норм промежуточных производных функций через их нормы и нормы их старших производных, а именно неравенства типа Колмогорова.

Согласно работе [12], под неравенствами для производных колмогоровского типа традиционно понимают мультипликативные неравенства вида

$$\left\| f^{(k)} \right\|_{L_q(\Omega)} \leqslant K \left\| f \right\|_{L_p(\Omega)}^{\alpha} \left\| f^{(n)} \right\|_{L_r(\Omega)}^{\beta}, \tag{0.0.1}$$

выполненные для всех функций $f \in L_p(\Omega)$, у которых $(n-1)$-ая производная локально абсолютно непрерывна на Ω и $f^{(n)} \in L_r(\Omega)$. Здесь $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, параметры $p, q, r \in [1, \infty]$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, а множество Ω как правило выбирают равным $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}_+$. При этом, для заданного множества Ω, неравенство (0.0.1) зависит от пяти параметров: n, k, p, q и r, а величины α и β однозначно ими определяются по формулам

$$\alpha = \frac{n - k - 1/r + 1/q}{n - 1/r + 1/p}, \quad \beta = 1 - \alpha.$$

Первые точные константы в неравенствах типа Колмогорова были получены в 1913–1914 годах в работах Э. Ландау [26] ($\Omega{=}\mathbb{R}_+$, $n = 2$, $k = 1$, $p = q = r = \infty$) и Ж. Адамара [24] ($\Omega = \mathbb{R}$, $n = 2$, $k = 1$, $p = q = r = \infty$). В 1939 г. в работе А. Н. Колмогорова [9] были найдены точные константы K в неравенстве (0.0.1) при $\Omega = \mathbb{R}$, $p = q = r = \infty$ и при любых $n \geqslant 2$, $k = 1, \ldots, n-1$. На сегодняшний день этот результат остается одним из наиболее выдающихся в данной тематике, и именно поэтому неравенства вида (0.0.1) и их обобщения называют неравенствами колмогоровского типа.

Для бесконечных интервалов обобщенные неравенства типа Колмогорова изучались во многих работах. Упомянем, например, работу [33], в которой были получены наилучшие константы в неравенствах

$$\|f^{(k)}\|^2_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leqslant C \sum_{j=0}^{n} \|f^{(j)}\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}, \quad f \in W_2^n(\mathbb{R}_+),$$

и работу [11], в которой были найдены наилучшие константы в неравенствах

$$\left| f^{(k)}(0) \right|^2 \leqslant C_{n,k} \sum_{j=0}^{n} a_j \|f^{(j)}\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}, \quad f \in W_2^n(\mathbb{R}_+),$$

при $a_0 > 0$, $a_n > 0$ и $a_j \geqslant 0$, $0 < j < n$.

Нахождение норм операторов вложения в некоторых пространствах Соболева эквивалентно нахождению наилучших констант в неравенствах колмогоровского типа при $\alpha = 0$. При этом множество $\Omega \subset \mathbb{R}$ обычно имеет конечную меру Лебега, а краевые условия таковы, что «усечённая» норма $\|f\| := \|f^{(n)}\|_{L_r(\Omega)}$ эквивалентна стандартной норме в $W_r^n(\Omega)$.

В пространствах Соболева на отрезке можно рассматривать достаточно широкий класс краевых условий, для которых выполнено условие эквивалентности норм, указанное выше (см. например [35], [36], [22]). Также существуют исследования констант вложения для весовых пространств Соболева (см. [8]). Однако, привести все работы по точным константам вложения, охватывающие различные краевые условия и различные весовые функции в пространствах Соболева, не представляется возможным. Одними из наиболее сложных для исследований краевых условий в пространстве $W_p^n[0,1]$ являются краевые условия Дирихле:

$$f^{(j)}(0) = f^{(j)}(1) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

и именно они будут рассмотрены в данной работе.

Обозначим через $\mathring{W}_p^n[0,1]$ пространство вещественнозначных функций $W_p^n[0,1]$, для которых выполнены краевые условия Дирихле. Это пространство снабжено нормой

$$\|f\|_{\mathring{W}_p^n[0,1]} := \|f^{(n)}\|_{L_p[0,1]} = \left(\int\limits_0^1 |f^{(n)}(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\|f\|_{\mathring{W}_\infty^n[0,1]} := \|f^{(n)}\|_{L_\infty[0,1]} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in [0,1]} \left| f^{(n)}(x) \right|,$$

которая для указанных краевых условий эквивалентна стандартной (см. [19, §4]).

Рассмотрим оператор вложения $J_{n,k,p,q} : \mathring{W}_p^n[0,1] \hookrightarrow \mathring{W}_q^k[0,1]$, при $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, \dots, n-1$. Константы вложения в пространствах Соболева с краевыми условиями Дирихле определяются по формуле

$$\|J_{n,k,p,q}\| = \Lambda_{n,k,p,q} := \sup_{\substack{f \in \mathring{W}_p^n[0,1], \\ f \neq 0}} \frac{\|f^{(k)}\|_{L_q[0,1]}}{\|f^{(n)}\|_{L_p[0,1]}}.$$

Решение задачи о нахождении $\Lambda_{n,k,p,q}$ даже в случае $n = 1$, $k = 0$ заняло почти 40 лет. При $p = q = 2$ константа вложения была получена в 1901 году В. А. Стекловым [32], при $p = q = 2l$ в 1934 г. Г. Х. Харди [25], при $p = q$ в 1938 г. В. И. Левиным [10], и, наконец, при произвольных p и q, Э. Шмидтом в 1940 году [31]. Результат Э. Шмидта заключается в следующем:

Теорема (Шмидт, 1940 [31]). Константы $\Lambda_{1,0,p,q}$ равны

$$\Lambda_{1,0,p,q} = \frac{F(\frac{1}{q} + \frac{1}{p'})}{2F(\frac{1}{q})F(\frac{1}{p'})}, \quad F(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s^s}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Формула, полученная Э. Шмидтом, позволяет понять, насколько изучаемая задача сложна для произвольных p и q, а также объясняет большой временной интервал между первыми и дальнейшими результатами.

Следующее существенное продвижение в данной задаче было получено в работе А. И. Назарова ([27], 2002 г.), в которой было доказано, что при $q \leqslant 3p$ справедливо соотношение

$$\Lambda_{2,1,p,q} = \frac{\Lambda_{1,0,p,q}}{2}, \quad q \leqslant 3p.$$

Дальнейшие продвижения связаны, как правило, с выбором конкретных значений параметров p, q, n и k. Исследования в гильбертовых пространствах $p = 2$ или $q = 2$ чаще всего оказываются легче других случаев, но и они значительно усложняются при увеличении значений параметров n и k.

В 2008 г. в работе [15] в терминах нулей функций Бесселя были получены точные константы $\Lambda_{n,n-1,2,2}$ (на отрезке $[-1,1]$). Отметим, что специальные функции оказались важным и весьма мощным инструментом при изучении констант вложения.

В 2009 г. в работе [23] были получены двусторонние несходящиеся оценки для констант $\Lambda_{n,0,2,2}$ при $n \to \infty$. Данная работа также интересна тем, что в ней приведен ряд задач, эквивалентных нахождению констант $\Lambda_{n,0,2,2}$ (неравенства Вертингера–Соболева, спектральные свойства Теплицевых матриц, оценки норм функции Грина и др.).

Работа [23] дала толчок развитию исследований по крайней мере по двум направлениям. В работе [16], задача о нахождении констант $\Lambda_{n,k,2,2}$

была решена полностью. Результат оказался весьма нетривиален, константы вложения выражаются через определители, построенные по значениям функций Бесселя полуцелого порядка в специально выбранных точках.

В 2010 г. в работе [7] результаты [23] получили другое развитие. В частности в указанной работе изучалась задача о получении констант вложения $\Lambda_{n,k,2,\infty}$. С помощью методов, развитых в этой статье, Г. А. Калябину удалось получить двусторонние сходящиеся оценки для констант $\Lambda_{n,0,2,2}$ при $n \to \infty$.

Необходимо заметить, что при $q = \infty$ возникает дополнительная задача об оценке значений производных промежуточного порядка. Определим для функций $f \in \mathring{W}_p^n[0,1]$ и произвольного числа $a \in [0,1]$ величины $A_{n,k,p}(a)$, являющиеся наилучшими в неравенствах

$$|f^{(k)}(a)| \leqslant A_{n,k,p}(a) \|f^{(n)}\|_{L_p[0,1]}.$$

Другими словами, оценочные функции $A_{n,k,p}$ определяются как

$$A_{n,k,p}(a) := \sup\{|f^{(k)}(a)| : \ \|f^{(n)}\|_{L_p[0,1]} = 1, \ f \in \mathring{W}_p^n[0,1]\}.$$

Тогда константы вложения $\Lambda_{n,k,p,\infty}$ связаны с функциями $A_{n,k,p}$ по формуле

$$\Lambda_{n,k,p,\infty} = \max_{a \in [0,1]} A_{n,k,p}(a).$$

В работе [7] были детально изучены величины $A_{n,k,2}$ и получены константы вложения $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ для произвольных $n \in \mathbb{N}$ и $k = 0, 1, 2$ (на отрезке $[-1, 1]$). Для отрезка $[0, 1]$ и $k = 0$ этот результат формулируется следующим образом:

Теорема (Калябин, 2010 [7]). Функции $A^2_{n,0,2}(a)$, $a \in [0,1]$ и константы вложения $\Lambda_{n,0,2,\infty}$ имеют вид:

$$A^2_{n,0,2}(a) = \frac{(a-a^2)^{2n-1}}{(2n-1)((n-1)!)^2},$$

$$\Lambda^2_{n,0,2,\infty} = \frac{1}{2^{4n-2}\,(2n-1)\,((n-1)!)^2}.$$

На основе изучения свойств функций $A_{n,k,2}$ в этих случаях, Г. А. Калябиным была высказана следующая гипотеза о глобальном максимуме оценочных функций: при четных k глобальный максимум функций $A_{n,k,2}$ находится в середине отрезка и, соответственно, $\Lambda_{n,k,2,\infty} = A_{n,k,2}(1/2)$, а при нечетных k середина отрезка является точкой локального минимума функций $A_{n,k,2}$. Кроме того, был поставлен вопрос об описании экстремальных функций $g_{n,k}$, для которых достигается равенство

$$|g_{n,k}^{(k)}(a)| = A_{n,k,p}(a)\|g_{n,k}^{(n)}\|_{L_p[0,1]}.$$

В работе [13] (2014 г.) была доказана ослабленная гипотеза Г. А. Калябина, а именно, было показано, что при четных k середина отрезка является точкой локального максимума функции $A_{n,k,2}$, а при нечетных k — точкой локального минимума. Также в этой статье были вычислены (с арифметической ошибкой) $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ при $k = 4, 6$. Исправления даны в [14].

Отметим, что помимо задачи о нахождении точных констант вложения, часто рассматривается вопрос о свойствах экстремальных функций задачи. В частности большой интерес представляет вопрос о симметрии (относительно середины отрезка) экстремальной функции. Достаточно полный на данный момент обзор по точным константам вложения в пространствах Соболева с краевыми условиями Дирихле и симметричности экстремалей данной задачи содержится в [28].

Константы вложения $\Lambda_{n,k,p,\infty}$ с показателем $p \neq 2$ изучены гораздо меньше. В работе [34] были получены точные константы вложения пространств $\mathring{W}_p^n[0,1]$ в пространства $\mathring{W}_\infty^k[0,1]$ при $k = 0$, $n = 1, 2, 3$ и $1 < p < \infty$. Также некоторые продвижения получены в работе [21], в которой в предположении симметричности экстремальной функции при $k = 0$ получены константы вложения $\mathring{W}_1^n[0,1]$ в пространство $L_\infty[0,1]$ при $n = \overline{1,6}$.

Цель работы. Целью данной работы является исследование констант вложения $\Lambda_{n,k,p,\infty}$ пространств $\mathring{W}_p^n[0,1]$ в пространства $\mathring{W}_\infty^k[0,1]$, при $p \in [1,\infty]$ и $n > k \geqslant 0$, а также связанных с ними оценочных функций $A_{n,k,p}(a)$. В частности, целями работы являются:

- Нахождение и описание экстремальных функций задачи, для которых выполнено
$$\left|g_{n,k}^{(k)}(a)\right| = A_{n,k,2}(a)\left\|g_{n,k}^{(n)}\right\|_{L_2[0,1]}.$$

- Описание функций $A_{n,k,2}(a)$ и их свойств при всех $n \geqslant k > 0$, а также нахождение точных значений констант $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ при всех четных k и получение сходящихся двусторонних оценок для $\Lambda_{n,k,2,\infty}$, при нечетных k.

- Установление эквивалентности задачи о нахождении констант вложения $\Lambda_{n,k,p,\infty}$ с некоторой задачей теории приближений.

- Вычисление констант $\Lambda_{n,n-1,1,\infty}$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

- Вычисление скалярных произведений от первообразных многочленов Лежандра и применение полученных результатов к некоторым спектральным задачам и константам вложения $\Lambda_{n,k,2,2}$.

Научная новизна. Основные результаты, представленные в диссертации, являются новыми и состоят в следующем:

1. Получено явное описание экстремальных сплайнов задачи в случае, когда исходное пространство Соболева $\mathring{W}_p^n[0,1]$ является гильбертовым ($p = 2$). Доказано соответствие между симметрией экстремали и четностью параметра k.

2. Получено явное описание величин $A_{n,k,2}^2(a)$ при всех $n > k \geqslant 0$ в терминах гипергеометрических функций и описана структура их максимумов и минимумов. Доказана усиленная гипотеза Г. А. Калябина о глобальном максимуме.

3. Найдены точные константы вложения пространства $\mathring{W}_2^n[0,1]$ в пространство $\mathring{W}_\infty^k[0,1]$ при всех четных $k \geqslant 0$ и получены сходящиеся двусторонние оценки констант вложения при всех нечетных $k \geqslant 1$.

4. В случае произвольного интегрального параметра $p \in [1,\infty]$, доказана эквивалентность задачи о нахождении константы вложения $\Lambda_{n,k,p,\infty}$ и задачи о приближении сплайнов специального вида многочленами по норме $L_{p'}[0,1]$, где $1/p + 1/p' = 1$.

5. Найдены точные константы вложения $\Lambda_{n,n-1,1,\infty}$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

6. Вычислены скалярные произведения между первообразными смещенных многочленов Лежандра в пространстве $L_2[0,1]$, в том числе вычислены нормы $\|P_m^{(-j)}\|_{L_2[0,1]}$, при всех $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leqslant j \leqslant m$.

Методы исследования. В диссертации используются методы математического и функционального анализа, теории специальных функций, спектральной теории дифференциальных операторов, теории приближений и теории дифференциальных уравнений, а также ряд оригинальных конструкций.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы для дальнейшего развития теории вложений в пространствах Соболева, а также в различных вопросах теории функций, теории гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром, теории приближений и спектральной теории операторов.

Соответствие паспорту научной специальности. В диссертации изучаются константы вложения в пространствах Соболева и связанные с ними специальные функции, поэтому тема диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ по направлениям исследований:
3. Теория функциональных пространств; исследования классов функций,

возникающих в математике и ее приложениях.
9. Функциональный анализ, линейные отображения бесконечномерных пространств (функционалы, операторы).
13. Специальные функции и интегральные преобразования.

Положения, выносимые на защиту:

1. В гильбертовом случае ($p = 2$) получено явное описание экстремальных сплайнов задачи, на которых достигается равенство в неравенстве
$$\left|f^{(k)}(a)\right| \leqslant A_{n,k,2}(a) \left\|f^{(n)}\right\|_{L_2[0,1]}.$$

2. Для функций $A_{n,k,2}(a)$ доказана усиленная гипотеза о глобальном максимуме, а именно, что при всех четных k точка $a = 1/2$ является точкой глобального максимума функции $A_{n,k,2}(a)$, а при нечетных k, точкой глобального максимума $A_{n,k,2}(a)$ является точка локального максимума, ближайшая к $a = 1/2$.

3. Для функций $A_{n,k,2}(a)$ получено их явное описание в терминах гипергеометрических функций при всех $n > k \geqslant 0$, а также получены точные константы вложения $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ при всех четных k и сходящиеся двусторонние оценки для констант $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ при всех нечетных k.

4. В случае произвольного параметра $p \in [1, \infty]$ доказана эквивалентность задачи о нахождении оценочных функций $A_{n,k,p}(a)$ задаче о приближении сплайнов специального вида многочленами по норме $L_{p'}[0, 1]$, где $1/p + 1/p' = 1$.

5. При всех $n \in \mathbb{N}$ в случае $p = 1$, $k = n - 1$ найдены точные значения констант вложения $\Lambda_{n,n-1,1,\infty}$.

6. Для первообразных многочленов Лежандра $P_m^{(-j)}(x)$ фиксированного порядка $j \geqslant 0$ вычислены скалярные произведения при всех $m \geqslant j$.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались автором на следующих научных конференциях:

1. Международная научная конференция «Современные проблемы математики и механики», посвященная 80–летию академика В. А. Садовничего, МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия, 13–15 мая 2019.

2. Международная конференция «Spectral Theory and Mathematical Physics», Международный математический центр «Сириус», Сочи, Россия, 3–7 февраля 2020.

3. Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, Россия, 3–8 июля 2020.

4. Научная конференция «Ломоносовские чтения», МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия, 7–30 октября 2020.

5. Международная конференция «Spectral Theory and Mathematical Physics», посвященная М. Ш. Бирману, Санкт-Петербург, Россия, 22–26 июня 2021.

6. Международная научная конференция «Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis – X», Ростов-на-Дону, Россия, 22–27 августа 2021.

7. Международная конференция «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования, XVII: Теория операторов и дифференциальные уравнения», Владикавказ, Россия, 29 июня – 5 июля 2023.

А также на научно-исследовательских семинарах:

1. «Операторные модели в математической физике» под руководством чл.-корр. РАН А. А. Шкаликова, проф. И. А. Шейпака и проф. К. А. Мирзоева, механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова (многократно, 2019–2024).

2. «Геометрическая теория приближений» под руководством проф. П. А. Бородина, механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова (октябрь 2019).

3. Семинар по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики (семинар Никольского) под руководством чл.-корр. РАН О. В. Бесова, Математический институт имени В. А. Стеклова РАН (октябрь 2019).

4. Научно-исследовательский семинар по теории функций под руководством академика РАН Б. С. Кашина, академика РАН С. В. Конягина, проф. Б. И. Голубова, проф. М. И. Дьяченко, механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова (февраль 2024).

5. Научный семинар отдела теории приближения функций и отдела аппроксимаций и приложений, Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН (март 2024).

6. «Методы решения задач математической физики» под руководством академика РАН Ю.Г. Евтушенко, чл.-корр. РАН С.И. Безродных, д.ф.-м.н. В.И. Власова, д.ф.-м.н. С.Я. Степанова, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук (апрель 2024).

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации изложены в 7 публикациях автора. Все 7 публикаций [37–43] опубликованы в рецензируемых научных журналах, входящих в базы SCOPUS, Web of Science, RSCI.

Работы [37,38] выполнены совместно с И. А. Шейпаком, которому принадлежат постановка задачи и результаты нахождения констант вложения $\Lambda_{n,3,2,\infty}$ и $\Lambda_{n,5,2,\infty}$, которые не приводятся в данной диссертации. Все остальные доказательства результатов этих совместных работ получены автором диссертации лично. Работы [39, 41–43] также выполнены совместно с И. А. Шейпаком, которому принадлежат постановка задачи и формулировки теорем, обозначенных в тексте как Теорема 1.4.1 и Теорема 2.3.2, а также идея применения соотношений для первообразных многочленов Лежандра к спектральным задачам. Все доказательства полученных результатов проведены автором диссертации лично. Работа [40] выполнена автором диссертации самостоятельно.

Также, автор имеет 5 публикаций в материалах международных конференций [44–48].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, основной части, состоящей из трех глав, заключения и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 78 страниц. Список литературы содержит 48 наименований.

Краткое содержание диссертации. Нумерация приводимых здесь результатов соответствует нумерации в основном тексте работы.

В **первой главе** подробно исследуется гильбертова ситуация, а именно константы вложения $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ пространств $\mathring{W}_2^n[0,1]$ в пространства $\mathring{W}_\infty^k[0,1]$, при $n \in \mathbb{N}$ и $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Для каждого $a \in [0,1]$ вводятся и изучаются величины $A_{n,k,2}(a)$, являющиеся наименьшими возможными в неравенствах вида

$$|f^{(k)}(a)| \leqslant A_{n,k,2}(a)\|f^{(n)}\|_{L_2[0,1]}, \quad f \in \mathring{W}_2^n[0,1], \tag{0.0.2}$$

и связанные с константами вложения по формуле

$$\Lambda_{n,k,2,\infty} = \max_{a\in[0,1]} A_{n,k,2}(a).$$

При этом, поскольку в первой главе изучается только случай $p = 2$, то, чтобы упростить обозначения, иногда последний индекс у функций $A_{n,k,2}$ будет опускаться ($A_{n,k} := A_{n,k,2}$).

В первом разделе первой главы явно найдены экстремальные сплайны $g_{n,k}(x,a)$, для которых неравенство (0.0.2) обращается в равенство. А именно, если многочлены $h_{n,k}(x,a)$ определены следующим образом,

$$h_{n,k}(x,a) = \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^{n-1-l}C_{2n-1-k}^{n-1-l}x^{n-1-l}a^l\sum_{m=0}^{l}C_{n-1+m}^{m}x^m,$$

то выполнена теорема.

Теорема 1.1.1 *Функции $g_{n,k}$ определяются формулами:*

$$g_{n,k}(x,a) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n-k-1}}{(2n-k-1)!}(1-a)^{n-k}x^n h_{n,k}(1-x,1-a), & x\in[0,a] \\ \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-k-1)!}a^{n-k}(1-x)^n h_{n,k}(x,a), & x\in[a,1] \end{cases}$$

Далее, во втором разделе первой главы получены рекуррентные соотношения между функциями $A^2_{n,k,2}(a)$ и первообразными смещенных (то есть определенных на отрезке $[0,1]$) многочленов Лежандра порядка $n-k$. Первообразные многочленов Лежандра порядка $0 \leqslant j \leqslant m$ определяются по формуле Родрига

$$P_m^{(-j)}(x) = \left(\frac{(x^2-x)^m}{m!}\right)^{(m-j)}.$$

На основе этих соотношений получены ключевые утверждения о структуре производной функции $A^2_{n,k,2}$ и ее точках локального экстремума.

Лемма 1.2.5 *Для функций $A^2_{n,k}(a)$ справедливо соотношение*

$$\frac{d}{da}(A^2_{n,k})(a) = -P_{n-1}^{(k-n+1)}(a)\cdot P_n^{(k-n+1)}(a).$$

Лемма 1.2.6 *Нули полиномов $P_{n-1}^{(k-n+1)}$ и $P_n^{(k-n+1)}$ на интервале $(0,1)$ чередуются. Нули $P_{n-1}^{(k-n+1)}$ являются точками локального минимума, а нули $P_n^{(k-n+1)}$ — точками локального максимума функции $A^2_{n,k}(a)$.*

Основной результат второго раздела первой главы состоит в описании структуры точек локальных экстремумов функции $A^2_{n,k,2}$, которое позволяет установить какая из точек локальных экстремумов функции $A_{n,k,2}$ является её точкой глобального максимума.

Теорема 1.2.7 *При фиксированных n и k, значения функций $A^2_{n,k}(x)$ в точках локальных максимумов, лежащих на отрезке $[0,\frac{1}{2}]$, образуют* *неубывающую последовательность, а в точках локальных максимумов, лежащих на отрезке $[\frac{1}{2}, 1]$ — невозрастающую последовательность.*

Следствие 1.2.9 *Из теоремы 1.2.7 и леммы 1.2.6 непосредственно вытекает, что при любых $n \in \mathbb{N}$ и всех четных $k \geqslant 0$, точка $x = 1/2$ является точкой глобального максимума функции $A^2_{n,k}(x)$. Для нечетных k — точкой глобального максимума функции $A^2_{n,k}(x)$ является ноль многочлена $P_n^{(k-n+1)}(x)$, ближайший к середине отрезка.*

В третьем разделе первой главы вводится понятие гипергеометрического ряда, в терминах которого выражаются первообразные и производные многочленов Лежандра, а также соответсвующие рекуррентные соотношения, полученные во втором разделе первой главы. С использованием теории специальных функций удается получить явное описание функций $A_{n,k,2}$ в терминах гипергеометрических функций типа $(3, 2)$.

Теорема 1.3.7 *При всех $n > k \geqslant 0$, функции $A^2_{n,k}(x)$ имеют вид*

$$A^2_{n,k}(x) = \frac{-t^{2n-2k-1}}{(2n-2k-1)((n-k-1)!)^2}\, {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -k,\, n-k-\frac{1}{2},\, 2n-k \\ n-k,\, 2n-2k \end{matrix} ; -4t \right],$$

где $t = x^2 - x$.

В четвертом разделе первой главы явно найдены константы вложения $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ при всех четных $k \geqslant 0$. Так как при четных k точкой глобального максимума функции $A_{n,k}$ является точка $a = 1/2$, то на основе свойств функций $A_{n,k}$ получен следующий результат.

Теорема 1.4.1 *Точные значения констант вложения $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ при всех четных $k \geqslant 0$ имеют вид*

$$\Lambda_{n,k,2,\infty} = A_{n,k}\left(1/2\right) = \frac{(k-1)!!}{2^{2n-3k/2-1}\left(n-k/2-1\right)!\,\sqrt{(2n-2k-1)}}.$$

В пятом разделе первой главы изучаются константы вложения при нечетных $k \geqslant 1$. Так как при нечетных k точка глобального максимума функции $A_{n,k,2}$ зависит от параметров n и k, то явные формулы для $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ при больших k получить не удается. Тем не менее, найдены двусторонние сходящиеся оценки для $\Lambda_{n,k,2,\infty}$.

Теорема 1.5.3 *Для любого нечетного $k \geqslant 1$, константы вложения $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ удовлетворяют соотношению*

$$C(n,k) \leqslant \Lambda_{n,k,2,\infty} \leqslant \sqrt{\frac{2n-k}{k+1}} C(n,k),$$

где

$$C(n,k) = \frac{k!!}{2^{2n-\frac{3k+1}{2}}(n-\frac{k+1}{2})!\sqrt{2n-2k-1}}.$$

Вторая глава посвящена описанию функций $A_{n,k,p}$ и нахождению констант вложения $\Lambda_{n,k,p,\infty}$ для произвольных значений интегрального параметра $p \in [1,\infty]$.

Аналогично определению в первой главе, для произвольного числа $a \in [0,1]$ функции $A_{n,k,p}(a)$ определяются как наименьшие возможные величины в неравенствах

$$|f^{(k)}(a)| \leqslant A_{n,k,p}(a) \|f^{(n)}\|_{L_p[0,1]}.$$

В первом разделе второй главы доказывается ряд вспомогательных утверждений. В частности, описан класс функций $\mathcal{Q}_{n,k}$, такой что для всех $q^{(n)}_{n,k}(x,a) \in \mathcal{Q}_{n,k}$ выполнено

$$f^{(k)}(a) = \int\limits_0^1 f^{(n)}(x) q^{(n)}_{n,k}(x,a)\,dx.$$

Обозначим через p' гёльдерово сопряженное к p, то есть $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Основной результат первого раздела второй главы состоит в следующем.

Теорема 2.1.4 *При всех $p \in (1,\infty)$, $0 \leqslant k < n$, выполнено*

$$A_{n,k,p}(a) = \inf_{q^{(n)}_{n,k} \in \mathcal{Q}_{n,k}} \|q^{(n)}_{n,k}(\,\cdot\,,a)\|_{L_{p'}[0,1]}.$$

Во втором разделе второй главы показана связь функций $A_{n,k,p}$ с задачей о наилучшем приближении сплайнов специального вида многочленами по норме $L_{p'}[0,1]$. Доказано, что достаточно искать наилучшее приближение для функций $g_{n,k}$, описанных в теореме 1.1.1 и являющихся экстремальными в случае $p = 2$.

Теорема 2.2.3 *При* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *справедливо равенство*

$$A_{n,k,p}(a) = \inf_{u \in \mathcal{P}_{n-1}} \|g_{n,k}^{(n)}(\,\cdot\,, a) - u\|_{L_{p'}[0,1]}.$$

Из свойств сплайнов $g_{n,k}$ также следует следующий результат.

Следствие 2.2.4 *При* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *выполнено равенство*

$$A_{n,k,p}(a) = \inf_{u \in \mathcal{P}_{n-1}} \left\|S_{n,k}(\,\cdot\,, a) - u\right\|_{L_{p'}[0,1]},$$

где $S_{n,k}(x,a) := \frac{(a-x)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \cdot \chi_{[0,a]}(x)$ *и* $\chi_{[0,a]}$ *— характеристическая функция отрезка* $[0, a]$*.*

В третьем разделе второй главы рассматривается случай $k = n - 1$, когда задача о нахождении констант вложения $\Lambda_{n,n-1,p,\infty}$ сводится к задаче о наилучшем приближении характеристической функции отрезка многочленами по норме $L_{p'}[0, 1]$. В данном случае явно найдены константы вложения при $p = 1$.

Теорема 2.3.1 *Константа вложения пространства* $\mathring{W}_1^n[0,1]$ *в пространство* $\mathring{W}_\infty^{n-1}[0,1]$ *равна*

$$\Lambda_{n,n-1,1,\infty} = \frac{1}{2}.$$

В **третьей главе** исследуются свойства первообразных смещенных многочленов Лежандра фиксированного порядка. А именно, указывается, какие первообразные многочленов Лежандра не ортогональны в пространстве $L_2[0, 1]$ и явно находятся значения их скалярных произведений. В том числе явно вычислены нормы первообразных смещенных многочленов Лежандра фиксированного порядка в пространстве $L_2[0, 1]$.

Эти свойства применяются для установления эквивалентности спектральных задач для некоторого класса дифференциальных операторов со спектральными задачами, порожденными обобщенными матрицами Якоби.

Основной результат третьей главы состоит в следующем.

Лемма 3.1.1 *Для любого фиксированного целого числа* $j \geqslant 0$ *и всех* $l > m \geqslant j$*, многочлены* $P_m^{(-j)}(x)$ *и* $P_l^{(-j)}(x)$ *могут быть не ортогональны друг другу только при* $l = m + 2i$*,* $i = 0, 1, \ldots, j$*.*

Теорема 3.1.2 *Для любых* $0 \leqslant j \leqslant m$ *и* $l = 0, 1, \ldots, j$*, справедливы соотношения*

$$\int\limits_0^1 P_m^{(-j)}(x) P_{m+2l}^{(-j)}(x) dx = (-1)^l C_{2j}^{j-l} \frac{(m-j+l+1)_{2j}}{(2m-2j+2l+1)_{4j+1}},$$

где $(x)_n := x(x+1)\ldots(x+n-1) = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$ *— символ Похгаммера.*

Благодарности. Автор диссертации выражает признательность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Игорю Анатольевичу Шейпаку за постановку задач, их обсуждение и постоянную поддержку в работе, а также всему коллективу кафедры теории функций и функционального анализа за плодотворные дискуссии.

Глава 1

Константы вложения в случае $p = 2$

В этой главе мы изучаем вещественные пространства

$$\mathcal{H} := \mathring{W}_2^n[0,1] = \{f \in W_2^n[0,1] \mid f^{(j)}(0) = f^{(j)}(1) = 0,\ j = 0, \ldots, n-1\},$$

где $W_2^n[0,1] = \{f : f^{(j)} \in AC[0,1],\ j = 0, \ldots, n-1,\ f^{(n)} \in L_2[0,1]\}$ — классические пространства Соболева и $AC[0,1]$ обозначает класс абсолютно непрерывных функций на отрезке $[0,1]$. Пространство $\mathcal{H}$ является гильбертовым относительно скалярного произведения

$$(f,g)_{\mathcal{H}} = \int\limits_0^1 f^{(n)}(x) g^{(n)}(x)\,dx,$$

которое порождает норму $\|f\|_{\mathcal{H}} = \|f^{(n)}\|_{L_2[0,1]}$.

Как уже было сказано во введении, при изучении констант вложения пространства $\mathcal{H}$ в пространство $\mathring{W}_\infty^k[0,1]$ для каждой точки $a \in [0,1]$ естественным образом возникают величины $A_{n,k,2}(a)$, являющиеся наименьшими возможными константами в неравенствах вида

$$|f^{(k)}(a)| \leqslant A_{n,k,2}(a) \|f^{(n)}\|_{L_2[0,1]}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Поскольку в первой главе будет изучаться только случай $p = 2$ то, чтобы упростить обозначения, будем писать $A_{n,k} := A_{n,k,2}$.

В силу краевых условий очевидно, что $A_{n,k}(0) = A_{n,k}(1) = 0$.

Соответствующие константы вложения вычисляются по формуле

$$\Lambda_{n,k,2,\infty} = \max_{a \in [0,1]} A_{n,k}(a).$$

1.1 Экстремальные сплайны задачи [1]

Для функций $f \in \mathcal{H}$ и некоторого фиксированного числа $a \in [0,1]$ рассмотрим функционалы $F_{k,a}(f) = f^{(k)}(a)$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Из определения величин $A_{n,k}^2$ следует равенство

$$\|F_{k,a}\|^2 = A_{n,k}^2(a).$$

Данные функционалы непрерывны в $\mathcal{H}$, поэтому, согласно теореме Рисса, существует единственная функция $g_{n,k} = g_{n,k}(\cdot, a) \in \mathcal{H}$, такая, что $F_{k,a}(f) = (f, g_{n,k})_{\mathcal{H}}$.

При этом выполнено соотношение

$$\|F_{k,a}\|^2 = \|g_{n,k}\|_{\mathcal{H}}^2 = A_{n,k}^2(a).$$

Таким образом имеем:

$$f^{(k)}(a) = \int\limits_0^1 f^{(n)}(x)\, g_{n,k}^{(n)}(x)\, dx.$$

Разбивая интеграл в сумму

$$\int\limits_0^1 f^{(n)}(x)\, g_{n,k}^{(n)}(x)\, dx = \int\limits_0^a f^{(n)}(x)\, g_{n,k}^{(n)}(x)\, dx + \int\limits_a^1 f^{(n)}(x)\, g_{n,k}^{(n)}(x)\, dx$$

[1]При подготовке данного раздела диссертации использованы следующие публикации, выполненные автором лично или в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования:

Гарманова Т. А., Шейпак И. А. Свойства экстремумов оценок промежуточных производных нечетного порядка в классах Соболева // Доклады Академии наук. – 2019. – Т. 487, № 5. – С. 11–15.

Гарманова Т. А., Шейпак И. А. Явный вид экстремалей в задаче о константах вложения в пространствах Соболева // Труды Московского математического общества. – 2019. – Т. 80, № 2. – С. 221–246.

Эти работы выполнены совместно с И. А. Шейпаком, которому принадлежат постановка задачи и результаты нахождения констант вложения $\Lambda_{n,3,2,\infty}$ и $\Lambda_{n,5,2,\infty}$, которые не приводятся в данной диссертации. Все остальные доказательства результатов этих совместных работ получены автором диссертации лично.

и интегрируя по частям с учетом краевых условий, получаем:

$$
\begin{aligned}
f^{(k)}(a) = f^{(n-1)}(a)\left(g_{n,k}^{(n)}(a-0) - g_{n,k}^{(n)}(a+0)\right) - \\
- f^{(n-2)}(a)\left(g_{n,k}^{(n+1)}(a-0) - g_{n,k}^{(n+1)}(a+0)\right) + \ldots + \\
+ (-1)^{n-k-1} f^{(k)}(a)\left(g_{n,k}^{(2n-k-1)}(a-0) - g_{n,k}^{(2n-k-1)}(a+0)\right) + \ldots + \\
+ (-1)^{n-1} f(a)\left(g_{n,k}^{(2n-1)}(a-0) - g_{n,k}^{(2n-1)}(a+0)\right) + \\
+ (-1)^{n}\int\limits_0^1 f(x)\, g_{n,k}^{(2n)}(x)\, dx.
\end{aligned}
$$

Отсюда получаем следующие условия на функцию $g_{n,k}$:

$$g_{n,k}^{(2n)}\Big|_{[0,a)} = g_{n,k}^{(2n)}\Big|_{(a,1]} \equiv 0, \tag{1.1.1}$$

$$g_{n,k}^{(i)}(a-0) = g_{n,k}^{(i)}(a+0), \quad i \neq 2n-k-1, \tag{1.1.2}$$

$$g_{n,k}^{(i)}(a-0) = g^{(i)}(a+0) + (-1)^{n-k-1}, \quad i = 2n-k-1 \tag{1.1.3}$$

Рассмотрим следующие многочлены:

$$h_{n,k}(x,a) = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{n-1-l} C_{2n-1-k}^{n-1-l} x^{n-1-l} a^l \sum_{m=0}^{l} C_{n-1+m}^{m} x^m.$$

Теорема 1.1.1. *Функции $g_{n,k}$ определяются формулами:*

$$g_{n,k}(x,a) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n-k-1}}{(2n-k-1)!}(1-a)^{n-k} x^n h_{n,k}(1-x, 1-a), & x \in [0,a] \\ \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-k-1)!} a^{n-k}(1-x)^n h_{n,k}(x,a), & x \in [a,1] \end{cases}$$

Доказательство. Очевидно, что $g_{n,k}$ удовлетворяет краевым условиям и на каждом из подотрезков $[0,a]$ и $[a,1]$ является многочленом степени $2n-1$ по переменной x.

Покажем, что $g_{n,k}|_{[0,a)} - g_{n,k}|_{(a,1]} = (-1)^{n-k-1}\dfrac{(x-a)^{2n-k-1}}{(2n-k-1)!}$.

Тогда из всего вышеперечисленного получим, что $g_{n,k} \in \mathcal{H}$ и выполнены условия (1.1.1) – (1.1.3).

Обозначим

$$g_1(x) := (-1)^{n-k-1}(2n-k-1)! g_{n,k}|_{[0,a)}$$
$$g_2(x) := (-1)^{n-1}(2n-k-1)! g_{n,k}|_{(a,1]}$$

и покажем, что $g_1(x) - (-1)^k g_2(x) = (x-a)^{2n-k-1}$. Перепишем $h_{n,k}$ в другом виде:

$$h_{n,k}(x,a) = \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^{n-1-l}C_{2n-1-k}^{n-1-l}x^{n-1-l}a^l \sum_{m=0}^{l} C_{n-1+m}^m x^m =$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{n-1-j}(-1)^j x^{j+m}a^{n-1-j}C_{2n-1-k}^j C_{n-1+m}^m =$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j}^{n-1}(-1)^j x^i a^{n-1-j}C_{2n-1-k}^j C_{n-1+i-j}^{i-j} =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} x^i \sum_{j=0}^{i}(-1)^j a^{n-1-j}C_{2n-1-k}^j C_{n-1+i-j}^{i-j}.$$

1. Рассмотрим представление функции g_2:

$$g_2(x,a) = a^{n-k}(1-x)^n h_{n,k}(x,a) =$$
$$= \left(\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_n^m x^m\right)\sum_{i=0}^{n-1} x^i \sum_{j=0}^{i}(-1)^j a^{2n-1-k-j}C_{2n-1-k}^j C_{n-1+i-j}^{i-j}.$$

Раскрыв суммы в последнем равенстве, получим, что коэффициент при x^m, $m = 0, \ldots, n-1$ в функции $g_2(x,a)$ равен

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}C_n^{m-i}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j C_{2n-1-k}^j C_{n-1+i-j}^{i-j}a^{2n-1-k-j} =$$
$$= \sum_{j=0}^{m}(-1)^j a^{2n-1-k-j}C_{2n-1-k}^j \sum_{i=j}^{m}(-1)^{m-i}C_n^{m-i}C_{n-1+i-j}^{i-j} \quad (1.1.4)$$

Тогда коэффициент при $x^m a^{2n-1-k-j}$, $j = 0, \ldots, m-1$ в $g_2(x,a)$ равен

$$(-1)^j C_{2n-1-k}^j \sum_{i=j}^{m}(-1)^{m-i}C_n^{m-i}C_{n-1+i-j}^{i-j} = \sum_{u=0}^{m-j}(-1)^u C_n^u C_{n-1+m-j-u}^{m-j-u} =$$
$$= \sum_{u=0}^{v}(-1)^u C_n^u C_{n-1+v-u}^{v-u} = \sum_{u=0}^{v}(-1)^v C_n^u C_{-n}^{v-u} = (-1)^v C_0^v = 0,$$

где последние равенства получены из свойства биномиальных коэффициентов $(-1)^u C_{n-1+v-u}^{v-u} = (-1)^v C_{-n}^{v-u}$ и с использованием формулы свертки Вандермонда:

$$\sum_{u=0}^{v} C_p^u C_q^{v-u} = C_{p+q}^v. \tag{1.1.5}$$

Таким образом, коэффициент при $x^m a^{2n-1-k-j}$, $m = 0, \ldots, n-1$, в $g_2(x,a)$ отличен от нуля только при $j = m$. Следовательно, коэффициент при x^m в функции $g_2(x,a)$ равен $(-1)^m a^{2n-1-k-m} C_{2n-1-k}^m$.

2. Теперь рассмотрим функцию $g_1(x,a)$. После преобразований

$$\begin{aligned}
&(1-a)^{n-k} x^n h_{n,k}(1-x, 1-a) = \\
&= (1-a)^{n-k} x^n \sum_{i=0}^{n-1} (1-a)^i \sum_{j=0}^{i} (-1)^{n-1-i} C_{2n-1-k}^{n-1-i} (1-x)^{n-1-i+j} C_{n-1+j}^j = \\
&= \left(\sum_{m=0}^{n-k} (-1)^m C_{n-k}^m a^m \right) x^n \times \\
&\times \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{i} C_i^l (-1)^l a^l \sum_{j=0}^{i} (-1)^{n-1-i} C_{2n-1-k}^{n-1-i} (1-x)^{n-1-i+j} C_{n-1+j}^j = \\
&= \left(\sum_{m=0}^{n-k} (-1)^m C_{n-k}^m a^m \right) x^n \times \\
&\times \sum_{l=0}^{n-1} a^l \sum_{i=l}^{n-1} \sum_{j=0}^{i} C_i^l (-1)^l (-1)^{n-1-i} C_{2n-1-k}^{n-1-i} (1-x)^{n-1-i+j} C_{n-1+j}^j
\end{aligned}$$

получаем, что коэффициент при a^m, $m = 0, \ldots, n-k-1$ в g_1 равен

$$\begin{aligned}
&x^n \sum_{l=0}^{m} (-1)^{m-l} C_{n-k}^{m-l} \times \\
&\times \sum_{i=l}^{n-1} \sum_{j=0}^{i} C_i^l (-1)^l (-1)^{n-1-i} C_{2n-1-k}^{n-1-i} (1-x)^{n-1-i+j} C_{n-1+j}^j = \\
&= (-1)^m x^n \sum_{l=0}^{m} \sum_{i=l}^{n-1} \sum_{j=0}^{i} C_{n-k}^{m-l} C_i^l (-1)^{n-1-i} C_{2n-1-k}^{n-1-i} (1-x)^{n-1-i+j} C_{n-1+j}^j = \\
&= (-1)^m x^n \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{\min(i,m)} C_{n-k}^{m-l} C_i^l \sum_{j=0}^{i} (-1)^{n-1-i} C_{2n-1-k}^{n-1-i} (1-x)^{n-1-i+j} C_{n-1+j}^j.
\end{aligned}$$

Воспользуемся формулой свертки Вандермонда (1.1.5) для внутренней суммы. Тогда коэффициент при a^m в функции $g_1(x,a)$ равен

$$(-1)^m x^n \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{i} C_{n+i-k}^{m} (-1)^{n-1-i} C_{2n-1-k}^{n-1-i} (1-x)^{n-1-i+j} C_{n-1+j}^{j}.$$

Сделаем замены $v = n-1-i$ и $u = v+j$. После преобразований коэффициент при a^m в g_1 примет вид

$$(-1)^m x^n \sum_{v=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1-v} C_{2n-1-k-v}^{m} (-1)^v C_{2n-1-k}^{v} (1-x)^{v+j} C_{n-1+j}^{j} =$$

$$= (-1)^m x^n \sum_{v=0}^{n-1} \sum_{u=v}^{n-1} C_{2n-1-k-v}^{m} (-1)^v C_{2n-1-k}^{v} (1-x)^{u} C_{n-1+u-v}^{u-v} =$$

$$= (-1)^m x^n \sum_{u=0}^{n-1} (1-x)^u \sum_{v=0}^{u} C_{2n-1-k-v}^{m} (-1)^v C_{2n-1-k}^{v} C_{n-1+u-v}^{u-v}.$$

Заметим, что $C_{2n-1-k-v}^{m} C_{2n-1-k}^{v} = C_{2n-1-k}^{m} C_{2n-1-k-m}^{v}$. С учетом этого равенства коэффициент при a^m примет вид

$$(-1)^m C_{2n-1-k}^{m} x^n \sum_{u=0}^{n-1} (1-x)^u \sum_{v=0}^{u} (-1)^v C_{2n-1-k-m}^{v} C_{n-1+u-v}^{u-v} =$$

$$= (-1)^m C_{2n-1-k}^{m} x^n \sum_{u=0}^{n-1} (1-x)^u \sum_{v=0}^{u} (-1)^v C_{2n-1-k-m}^{v} C_{n-1+u-v}^{u-v} =$$

$$= (-1)^m C_{2n-1-k}^{m} \sum_{u=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{u} (-1)^p C_u^p x^{n+p} \sum_{v=0}^{u} (-1)^v C_{2n-1-k-m}^{v} C_{n-1+u-v}^{u-v} =$$

$$= (-1)^m C_{2n-1-k}^{m} \sum_{p=0}^{n-1} x^{n+p} \sum_{u=p}^{n-1} (-1)^p C_u^p \sum_{v=0}^{u} (-1)^v C_{2n-1-k-m}^{v} C_{n-1+u-v}^{u-v}.$$

Так как $(-1)^v C_{n-1+u-v}^{u-v} = (-1)^u C_{-n}^{u-v}$, то по формуле свертки Вандермонда (1.1.5) имеем

$$\sum_{v=0}^{u} (-1)^v C_{2n-1-k-m}^{v} C_{n-1+u-v}^{u-v} = (-1)^u C_{n-k-m-1}^{u}.$$

Тогда коэффициент при $a^m x^{n+p}$, $0 \leqslant p \leqslant n-1$ равен

$$(-1)^m C_{2n-1-k}^{m} \sum_{u=p}^{n-1} (-1)^{p+u} C_u^p C_{n-k-m-1}^{u}. \tag{1.1.6}$$

При $p > n-1-k-m$ один из множителей C_u^p или $C_{n-k-m-1}^u$ всегда равен нулю, и, следовательно, равна нулю и вся сумма. При $p \leqslant n-1-k-m$ воспользуемся тождеством

$$C_u^p C_{n-k-m-1}^u = C_{n-k-m-1}^p C_{n-k-1-m-p}^{u-p}.$$

Тогда

$$\sum_{u=p}^{n-1} (-1)^{p+u} C_u^p C_{n-k-m-1}^u = C_{n-k-m-1}^p \sum_{u=p}^{n-1-k-m} (-1)^{p+u} C_{n-k-1-m-p}^{u-p} =$$

$$= C_{n-k-m-1}^p \sum_{l=0}^{n-1-k-m-p} (-1)^l C_{n-k-1-m-p}^l,$$

где последнее выражение равно 1 при $p = n-1-k-m$ и равно 0 в остальных случаях.

Таким образом, коэффициент при $a^m x^{2n-1-k-m}$, $m = 0, \ldots, n-k-1$, равен $(-1)^m C_{2n-1-k}^m$, а коэффициенты при остальных степенях $a^m x^{n+p}$ при данных m равны 0.

3. Рассмотрим коэффициенты в $g_1(x, a)$ и $g_2(x, a)$ при оставшихся степенях $x^m a^l$, где $m = n, ..., 2n-1$, $l = n-k, ..., 2n-1-k$.

Действуя аналогично выводу формулы (1.1.4), получаем, что коэффициент при $x^m a^{2n-1-k-j}$, $j = 0, \ldots, n-1$, в функции $g_2(x, a)$ равен

$$(-1)^{m+j} C_{2n-1-k}^j \sum_{i=m-n}^{n-1} (-1)^i C_n^{m-i} C_{n-1+i-j}^{i-j}.$$

Докажем по индукции, что для любого $u = m-n, \ldots, n-1$ выполнено

$$\sum_{i=m-n}^{u} (-1)^i C_n^{m-i} C_{n-1+i-j}^{n-1} = \frac{(-1)^u (u-j+1)}{(m-j)} C_{n-1}^{m-u-1} C_{n-j+u}^{n-1}.$$

При $u = m-n$, $(-1)^{m-n} C_n^n C_{m-1-j}^{n-1} = (-1)^{m-n} \dfrac{(m-n-j+1)}{(m-j)} C_{n-1}^{n-1} C_{m-j}^{n-1}$, и следовательно выполнена база индукции. Пусть утверждение выполнено для $u-1$, тогда, по предположению индукции,

$$\sum_{i=m-n}^{u-1} (-1)^i C_n^{m-i} C_{n-1+i-j}^{n-1} + (-1)^u C_n^{m-u} C_{n-1+u-j}^{n-1} =$$

$$= \frac{(-1)^{u-1}(u-j)}{(m-j)} C_{n-1}^{m-u} C_{n-j+u-1}^{n-1} + (-1)^u C_n^{m-u} C_{n-1+u-j}^{n-1} =$$

$$= (-1)^u C_{n-1+u-j}^{n-1} C_{n-1}^{m-u} \left(\frac{n}{n-m+u} - \frac{u-j}{m-j} \right) =$$

$$= (-1)^u C_{n-1+u-j}^{n-1} C_{n-1}^{m-u} \frac{(n+u-j)(m-u)}{(n-m+u)(m-j)}.$$

Применяя элементарные преобразования к биномиальным коэффициентам в последнем выражении, получаем требуемое утверждение.

Таким образом, коэффициент при $x^m a^{2n-1-k-j}$, $m = n, \ldots, 2n-1$, $j = 0, \ldots, n-1$, в функции $g_2(x,a)$ равен

$$(-1)^{m+n+j-1} \frac{n-j}{m-j} C_{2n-k-1}^{j} C_{n-1}^{m-n} C_{2n-j-1}^{n-1}. \tag{1.1.7}$$

Далее, действуя аналогично выводу формулы (1.1.6), получаем, что коэффициент при $a^m x^{n+p}$, $p = 0, \ldots, n-1$, в функции $g_1(x,a)$ равен

$$(-1)^m C_{2n-1-k}^{m} \sum_{u=p}^{n-1} (-1)^{p+u} C_u^p C_{n-k-m-1}^{u},$$

и, соответственно, коэффициент при $x^m a^{2n-1-k-j}$ равен

$$(-1)^{m-n-k+j+1} C_{2n-k-1}^{j} \sum_{i=m-n}^{n-1} C_i^{m-n} C_{n-1+i-j}^{i}.$$

Аналогично доказанному выше, по индукции доказывется, что для любого $u = m-n, \ldots, n-1$ выполнено равенство

$$\sum_{i=m-n}^{u} C_i^{m-n} C_{n-1+i-j}^{i} = \frac{n-j}{m-j} C_u^{m-n} C_{n+u-j}^{u}.$$

Таким образом, коэффициент при $x^m a^{2n-1-k-j}$, $m = n, \ldots, 2n-1$, $j = 0, \ldots, n-1$, в функции $g_1(x,a)$ равен:

$$(-1)^{m-n-k+j+1} \frac{n-j}{m-j} C_{2n-k-1}^{j} C_{n-1}^{m-n} C_{2n-j-1}^{n-1}. \tag{1.1.8}$$

Сравнивая (1.1.7) и (1.1.8), получаем, что коэффициенты при $x^m a^l$, при $m = n, \ldots, 2n-1$, $l = n-k, \ldots, 2n-1-k$ в $g_1(x,a)$ и $(-1)^k g_2(x,a)$ равны.

Итого:

$$g_1(x) - (-1)^k g_2(x) =$$
$$= \sum_{m=0}^{n-k-1} a^m x^{2n-1-k-m} (-1)^m C_{2n-1-k}^m -$$
$$- (-1)^k \sum_{m=0}^{n-1} x^m (-1)^m a^{2n-1-k-m} C_{2n-1-k}^m =$$
$$= \sum_{m=0}^{n-k-1} a^m x^{2n-1-k-m} (-1)^m C_{2n-1-k}^m + \sum_{m=n-k}^{2n-k-1} (-1)^m x^{2n-1-k-m} a^m C_{2n-1-k}^m =$$
$$= (x-a)^{2n-k-1},$$

откуда и следует утверждение теоремы. □

Замечание 1.1.2. *Из определения функций $g_{n,k}(x,a)$ следует равенство*

$$A_{n,k}^2(a) = \|g_{n,k}(\,\cdot\,,a)\|_{\mathcal{H}}^2 = g_{n,k}^{(k)}(a,a).$$

Тогда, константы вложения можно искать по формуле

$$\Lambda_{n,k,2,\infty} = \max_{a\in[0,1]} g_{n,k}^{(k)}(a,a),$$

однако при больших значениях n и k этот подход не имеет практической ценности ввиду громоздкости формул для $g_{n,k}$ и соответственно для $g_{n,k}^{(k)}(a,a)$.

1.2 Свойства оценочных функций $A_{n,k}$ [2]

Рассмотрим ортогональную на отрезке $[0,1]$ систему смещенных многочленов Лежандра $\{P_m\}_{m=0}^{\infty}$, определяемых формулой

[2]При подготовке данного раздела диссертации использованы следующие публикации, выполненные автором лично или в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования:

Гарманова Т. А., Шейпак И. А. О точных оценках производных четного порядка в пространствах Соболева // Функциональный анализ и его приложения. – 2021. – Т. 55, № 1. – С. 43–55.

Эта работа выполнена совместно с И. А. Шейпаком, которому принадлежат постановка задачи и формулировка теоремы, обозначенной в тексте как Теорема 1.4.1. Все доказательства результатов этой совместной работы получены автором диссертации лично.

$$P_m(x) = \frac{1}{m!}\big((x^2-x)^m\big)^{(m)}, \quad m = 0, 1, \ldots$$

На протяжении всей работы, если не указано обратное, под полиномами Лежандра $P_m(x)$ будем понимать смещенные многочлены Лежандра, определенные по формуле выше. Классические многочлены Лежандра, образующие ортогональную систему на отрезке $[-1, 1]$, будем обозначать $\tilde{P}_m(x)$.

Первообразные порядка $0 \leqslant l \leqslant m$ многочленов Лежандра будем понимать следующим образом:

$$P_m^{(-l)}(x) = \frac{1}{m!}\big((x^2-x)^m\big)^{(m-l)}.$$

В работе [7] были получены явные выражения для функций $A^2_{n,0}(a)$, $A^2_{n,1}(a)$ и $A^2_{n,2}(a)$, а также формула, связывающая функции $A^2_{n,k}$ и $A^2_{n-k,0}$ при помощи первообразных многочленов Лежандра. Для отрезка $[0, 1]$ она выглядит следующим образом:

$$A^2_{n,k}(a) = A^2_{n-k,0}(a) - \sum_{m=n-k}^{n-1} (2m+1)\big(P_m^{(k-n)}(a)\big)^2, \tag{1.2.1}$$

Нетрудно заметить, что данная формула практически инвариантна относительно замены пары (n, k) на пару $(n-1, k-1)$. Поэтому, записав ее для $A^2_{n-1,k-1}$,

$$A^2_{n-1,k-1}(a) = A^2_{n-k,0}(a) - \sum_{m=n-k}^{n-2} (2m+1)\big(P_m^{(k-n)}(a)\big)^2 \tag{1.2.2}$$

и, расссмотрев разность (1.2.1) и (1.2.2), получим важнейшее рекуррентное соотношение для функций $A^2_{n,k}$:

$$A^2_{n,k}(a) = A^2_{n-1,k-1}(a) - (2n-1)\big(P_{n-1}^{(k-n)}(a)\big)^2.$$

Таким образом, данное рекуррентное соотношение и найденное в [7] явное выражение для $A^2_{n,0}$:

$$A^2_{n,0}(a) = \frac{(a-a^2)^{2n-1}}{(2n-1)\big((n-1)!\big)^2}$$

позволяют последовательно вычислять $A^2_{n,k}$ с использованием первообразной одного полинома Лежандра порядка $n-k$:

$$P_{n-1}^{(k-n)}(a) = \frac{1}{(n-1)!}\left(\left(a^2-a\right)^{n-1}\right)^{(k-1)}.$$

Однако, с ростом параметра k, сложность вычислений значительно увеличивается.

В дальнейшем будет показано, что решение задачи о нахождении точных констант вложения существенно зависит от четности/нечетности параметра k. Поэтому, важным также является получение рекуррентной формулы для $A^2_{n,k}$, сохраняющей четность k. Действуя аналогично, можно получить соотношение между $A^2_{n,k}(a)$ и $A^2_{n-2,k-2}(a)$. Действительно, из соотношения

$$A^2_{n-1,k-1}(a) - A^2_{n-2,k-2}(a) = -(2n-3)\big(P_{n-2}^{(k-n)}(a)\big)^2,$$

получаем следующее утверждение

Теорема 1.2.1. *Для любых допустимых n и k, выполнены соотношения:*

$$A^2_{n,k}(a) = A^2_{n-1,k-1}(a) - (2n-1)\big(P_{n-1}^{(k-n)}(a)\big)^2 \tag{1.2.3}$$

$$A^2_{n,k}(a) = A^2_{n-2,k-2}(a) - (2n-3)\big(P_{n-2}^{(k-n)}(a)\big)^2 - (2n-1)\big(P_{n-1}^{(k-n)}(a)\big)^2 \tag{1.2.4}$$

1.2.1 Рекуррентные соотношения для первообразных многочленов Лежандра

В дальнейшем мы будем работать с многочленами Лежандра и их первообразными не только по переменной x, но и по переменной $t := x^2 - x$. Однако все производные будут пониматься по x.

Лемма 1.2.2. *Для любых $1 \leqslant m \leqslant n$, первообразные многочленов Лежандра удовлетворяют соотношению*

$$P_{n+1}^{(-m+1)}(x) = (2x-1)P_n^{(-m+1)}(x) + 2(n-m+1)P_n^{(-m)}(x).$$

Доказательство. Так как $t = x^2 - x$ и $\dfrac{d}{dx} = (2x-1)\dfrac{d}{dt}$, то, согласно определению первообразной полинома Лежандра,

$$P_{n+1}^{(-m+1)}(x) = \left(\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right)^{(n-m+2)} = \left(\frac{t^n}{n!}(2x-1)\right)^{(n-m+1)} =$$

$$= (2x-1)\left(\frac{t^n}{n!}\right)^{(n-m+1)} + 2(n-m+1)\left(\frac{t^n}{n!}\right)^{(n-m)}. \qquad (1.2.5)$$

С другой стороны,

$$P_n^{(-m)}(x) = \left(\frac{t^n}{n!}\right)^{(n-m)}, \qquad P_n^{(-m+1)}(x) = \left(\frac{t^n}{n!}\right)^{(n-m+1)}. \qquad (1.2.6)$$

Из соотношений (1.2.5) и (1.2.6) сразу же следует утверждение леммы.

□

В частности, при $m = n - k$ получаем

$$P_{n+1}^{(k-n+1)}(x) = (2x-1)P_n^{(k-n+1)}(x) + 2(k+1)P_n^{(k-n)}(x). \qquad (1.2.7)$$

Заметим, что данное соотношение может быть использовано при любых $0 \leqslant k < n$, так как $1 \leqslant n - k \leqslant n$.

Лемма 1.2.3. *При любых $1 \leqslant m \leqslant n$, для первообразных полиномов Лежандра справедливо соотношение*

$$2(2n+1)P_n^{(-m)}(x) = P_{n+1}^{(-m+1)}(x) - P_{n-1}^{(-m+1)}(x).$$

Доказательство. Действуя аналогично доказательству леммы 1.2.2, получаем

$$P_{n+1}^{(-m+1)} = \left(\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right)^{(n-m+2)} = \frac{1}{n!}(t^n(2x-1))^{(n-m+1)} =$$

$$= \frac{1}{n!}(nt^{n-1}(4t+1) + 2t^n)^{(n-m)},$$

что после упрощения приводится к виду

$$P_{n+1}^{(-m+1)}(x) = 2(2n+1)\left(\frac{t^n}{n!}\right)^{(n-m)} + \left(\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right)^{(n-m)}_. \qquad (1.2.8)$$

С другой стороны, получаем

$$P_{n-1}^{(-m+1)}(x) = \left(\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right)^{(n-m)}, \quad P_n^{(-m)}(x) = \left(\frac{t^n}{n!}\right)^{(n-m)}_. \qquad (1.2.9)$$

Из соотношений (1.2.8), (1.2.9) следует утверждение леммы. □

В частности, для используемых в константах вложения первообразных порядка $m = n - k$, получаем

$$2(2n+1)P_n^{(k-n)}(x) = P_{n+1}^{(k-n+1)}(x) - P_{n-1}^{(k-n+1)}(x). \qquad (1.2.10)$$

Нам понадобится дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют первообразные сдвинутых полиномов Лежандра. Дифференциальное уравнение, решением которого являются первообразные классических многочленов Лежандра (на отрезке $[-1,1]$), получено в работе [20].

Лемма 1.2.4. *Функция* $P_n^{(-m)}(x)$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$(x - x^2)y'' + (2x-1)(m-1)y' + (n+m)(n-m+1)y = 0. \qquad (1.2.11)$$

Доказательство. 1. Известно, что при $m = 0$, смещенные многочлены Лежандра P_n удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(x - x^2)y'' - (2x-1)y' + n(n+1)y = 0.$$

2. Для функции $P_n^{(-m)}$ $(m \geqslant 1)$ будем искать соответствующее дифференциальное уравнение в виде

$$(x - x^2)y'' + c_{n,m}(2x-1)y' + d_{n,m}y = 0 \qquad (1.2.12)$$

и найдем рекуррентные соотношения для коэффициентов $c_{n,m}$ и $d_{n,m}$. Из пункта 1 следует, что $c_{n,0} = -1$, $d_{n,0} = n(n+1)$.

Продифференцировав уравнение (1.2.12), получим, что многочлен $(P_n^{(-m)})' = P_n^{(-(m-1))}$ удовлетворяет уравнению

$$(x - x^2)y'' + (2x - 1)(c_{n,m} - 1)y' + (d_{n,m} + 2c_{n,m})y = 0,$$

откуда $c_{n,m} = c_{n,m-1} + 1$, $d_{n,m} = d_{n,m-1} - 2c_{n,m}$. Решив эти рекуррентные соотношения, получим

$$c_{n,m} = m - 1, \qquad d_{n,m} = (n + m)(n - m + 1).$$

□

1.2.2 Соотношения между многочленами Лежандра и функциями $A^2_{n,k}$

Напомним, что в теореме 1.2.1 было получено соотношение (1.2.3)

$$A^2_{n,k}(a) = A^2_{n-1,k-1}(a) - (2n - 1)\left(P_{n-1}^{(k-n)}(a)\right)^2.$$

Лемма 1.2.5. *Для функций $A^2_{n,k}(a)$ справедливо соотношение*

$$\frac{d}{da}(A^2_{n,k})(a) = -P_{n-1}^{(k-n+1)}(a) \cdot P_n^{(k-n+1)}(a).$$

Доказательство. Проведем доказательство, опираясь на метод математической индукции.

1. Напомним, что в работе [7] была получена формула для $A^2_{n,0}(a)$:

$$A^2_{n,0}(a) = -\frac{(a^2 - a)^{2n-1}}{((n - 1)!)^2(2n - 1)}.$$

Тогда

$$\frac{d}{da}(A^2_{n,0}) = -\frac{(a^2 - a)^{2n-2}(2a - 1)}{((n - 1)!)^2}.$$

С другой стороны, при $k = 0$ соответствующие первообразные полиномов Лежандра имеют следующий вид:

$$P_{n-1}^{(-n+1)}(a) = \frac{(a^2 - a)^{n-1}}{(n - 1)!},$$

$$P_n^{(-n+1)}(a) = \frac{d}{da}\left(\frac{(a^2-a)^n}{n!}\right) = \frac{(a^2-a)^{n-1}}{(n-1)!}(2a-1).$$

Перемножая два последних равенства, получаем, что утверждение верно при $k = 0$ и любом n.

2. Пусть утверждение верно при некотором k и любом n. Так как из рекуррентного соотношения (1.2.3) следует, что

$$A^2_{n+1,k+1}(a) = A^2_{n,k}(a) - (2n+1)\left(P_n^{(k-n)}(a)\right)^2,$$

то, дифференцируя по a, получаем

$$(A^2_{n+1,k+1}(a))' = (A^2_{n,k}(a))' - 2(2n+1)P_n^{(k-n)}(a)\cdot P_n^{(k-n+1)}(a).$$

Заменяя $(A^2_{n,k}(a))'$ на верное по предположению индукции выражение $(A^2_{n,k}(a))' = -P_{n-1}^{(k-n+1)}(a)\cdot P_n^{(k-n+1)}(a)$, а множитель $2(2n+1)P_n^{(k-n)}(a)$, в соответствии с формулой (1.2.10), на разность $P_{n+1}^{(k-n+1)}(a) - P_{n-1}^{(k-n+1)}(a)$, получаем требуемое соотношение. $\square$

Лемма 1.2.6. *Нули полиномов $P_{n-1}^{(k-n+1)}$ и $P_n^{(k-n+1)}$ на интервале $(0,1)$ чередуются. Нули $P_{n-1}^{(k-n+1)}$ являются точками локального минимума, а нули $P_n^{(k-n+1)}$ — точками локального максимума функции $A^2_{n,k}(a)$.*

Доказательство. Так как $P_n^{(-m)}(a) = \frac{1}{n!}((a^2-a)^n)^{(n-m)}$, то, по теореме Ролля, $P_n^{(-m)}$ имеет как минимум $n-m$ нулей внутри интервала $(0,1)$, а также нули кратности m в нуле и единице. Так как $P_n^{(-m)}$ — многочлен степени $n+m$, то он имеет ровно $n-m$ нулей внутри интервала $(0,1)$.

Тогда, $P_{n-1}^{(k-n)}$ и $P_{n-1}^{(k-n+1)}$ имеют соответственно $k-1$ и k нулей внутри интервала $(0,1)$ и, по теореме Ролля, они чередуются. Следовательно, в соседних нулях $P_{n-1}^{(k-n+1)}$, многочлен $P_{n-1}^{(k-n)}$ имеет различные знаки.

Из рекуррентного соотношения (1.2.7) для пары $(n-1, k+1)$ видно, что в нулях $P_{n-1}^{(k-n+1)}$ выполнено равенство $\mathrm{sign}(P_n^{(k-n+1)}) = \mathrm{sign}(P_{n-1}^{(k-n)})$. Таким образом, между любыми двумя нулями многочлена $P_{n-1}^{(k-n+1)}$ лежит хотя бы один ноль $P_n^{(k-n+1)}$. Так как $P_n^{(k-n+1)}$ имеет всего $k+1$ ноль внутри интервала $(0,1)$, а $P_{n-1}^{(k-n+1)}$ — k нулей, то они чередуются.

Так как $A_{n,k}^2(0) = A_{n,k}^2(1) = 0$, то ближайшие к концам отрезка точки локального экстремума $A_{n,k}^2$ — это точки локального максимума. Таким образом, точек локального максимума больше, а поскольку точки локального максимума чередуются с точками локального минимума, получаем второе утверждение леммы. $\square$

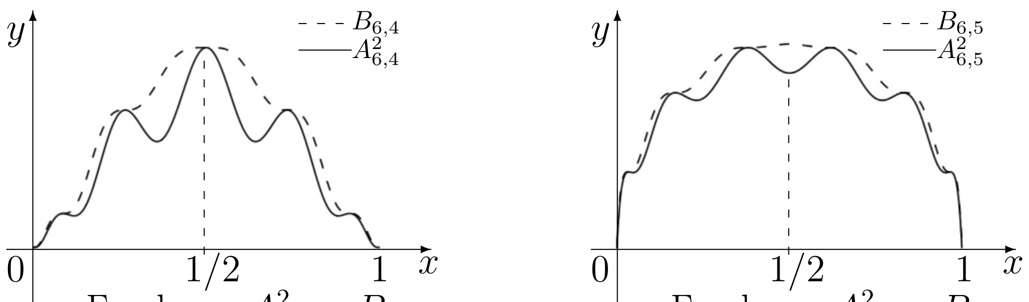
В работе [13] было показано, что при любых n и четных k середина отрезка является точкой локального максимума функции $A_{n,k}^2$, а при нечетных k — точкой локального минимума. Это же утверждение теперь можно установить из леммы 1.2.6. Непосредственно проверяется, что $a = 1/2$ является нулем $P_{n-1}^{(k-n+1)}$ при всех нечетных k и нулем $P_n^{(k-n+1)}$ при всех четных k.

1.2.3 Глобальный максимум функций $A_{n,k}^2$

Напомним, что задача о нахождении констант вложения связана с функциями $A_{n,k}(x)$ следующим образом:

$$\Lambda_{n,k,2,\infty}^2 = \max_{x\in[0,1]} A_{n,k}^2(x).$$

Теорема 1.2.7. *При фиксированных n и k, значения функций $A_{n,k}^2(x)$ в точках локальных максимумов, лежащих на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$, образуют неубывающую последовательность, а в точках локальных максимумов, лежащих на отрезке $[\frac{1}{2}, 1]$ — невозрастающую последовательность (см. рис. 1).*



Графики $A_{6,4}^2$ и $B_{6,4}$ Графики $A_{6,5}^2$ и $B_{6,5}$

Рис. 1

Доказательство. Для каждых фиксированных n и k рассмотрим функцию

$$B_{n,k}(x) = A_{n,k}^2(x) + (f(x) + g(x))(P_n^{(k-n+1)}(x))^2$$

с некоторыми, пока произвольными, дифференцируемыми функциями f и g. Конкретный вид этих функций мы укажем позже.

Основная идея доказательства заключется в том, чтобы показать, что функция $B_{n,k}(x)$ неубывает на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$ и невозрастает на отрезке $[\frac{1}{2}, 1]$. Тогда, по лемме 1.2.6, в точках локальных максимумов функции $A_{n,k}^2(x)$ выполнены равенства $B_{n,k}(x_m) = A_{n,k}^2(x_m)$ и утверждение теоремы выполнено.

Продифференцируем

$$\begin{aligned}B'_{n,k}(x) = \left(A_{n,k}^2(x)\right)' + (f'(x) + g'(x))(P_n^{(k-n+1)}(x))^2 &+ \\ + 2(f(x) + g(x))P_n^{(k-n+1)}(x)P_n^{(k-n+2)}(x) &= \\ = -P_{n-1}^{(k-n+1)}(x)P_n^{(k-n+1)}(x) + (f'(x) + g'(x))(P_n^{(k-n+1)}(x))^2 &+ \\ + 2(f(x) + g(x))P_n^{(k-n+1)}(x)P_n^{(k-n+2)}(x) &= \\ = P_n^{(k-n+1)}(x)\left(-P_{n-1}^{(k-n+1)}(x) + g'(x)P_n^{(k-n+1)}(x) + 2(f+g)P_n^{(k-n+2)}(x)\right) &+ \\ + f'(x)(P_n^{(k-n+1)}(x))^2.\end{aligned}$$

Последовательно применяя соотношения (1.2.10) и (1.2.7), получаем:

$$\begin{aligned}-P_{n-1}^{(k-n+1)} = 2(2n+1)P_n^{(k-n)} - P_{n+1}^{(k-n+1)} &= \\ = 2(2n+1)P_n^{(k-n)} - 2(k+1)P_n^{(k-n)} - (2x-1)P_n^{(k-n+1)}.\end{aligned}$$

Таким образом, $B'_{n,k}(x) =$

$$\begin{aligned}= P_n^{(k-n+1)}\left[2(2n-k)P_n^{(k-n)} + g'(x)P_n^{(k-n+1)} + 2(f(x) + g(x))P_n^{(k-n+2)}\right] &+ \\ + f'(x)(P_n^{(k-n+1)})^2 + (1-2x)(P_n^{(k-n+1)})^2.\end{aligned}$$

Выберем $f(x)$ и $g(x)$ так, чтобы выражение в квадратных скобках равнялось нулю. Принимая во внимание дифференциальное уравнение (1.2.11) при $m = n - k$, получим систему:

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \dfrac{(x - x^2)}{k+1} \\ g'(x) = (2x - 1)\dfrac{2(n-k-1)}{k+1}. \end{cases}$$

Следовательно, выполнено равенство

$$f'(x) = (1 - 2x)\frac{2(n-k)}{k+1}.$$

Тогда получаем, что

$$B'_{n,k}(x) = (1-2x)\frac{2(n-k)}{k+1}(P_n^{(k-n+1)}(x))^2 + (1-2x)(P_n^{(k-n+1)}(x))^2 = \\ = (1-2x)\frac{2n-k+1}{k+1}(P_n^{(k-n+1)}(x))^2.$$

Итак, функция $B_{n,k}(x)$ не убывает на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$ и не возрастает на отрезке $[\frac{1}{2}, 1]$, откуда и следует утверждение теоремы. $\square$

Замечание 1.2.8. *Таким же свойством обладают значения функций $A^2_{n,k}(x)$ в точках локальных минимумов. Для аналогичного доказательства может быть использована функция*

$$R_{n,k}(x) = A^2_{n,k}(x) + \frac{x^2 - x}{2n - k - 1}\left(P_{n-1}^{(k-n+1)}(x)\right)^2,$$

которая совпадает с функцией $A^2_{n,k}(x)$ в ее точках локальных минимумов, не убывает на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$ и не возрастает на отрезке $[\frac{1}{2}, 1]$ при $k \geqslant 1$. При $k = 0$ точки минимума у функции $A^2_{n,k}(x)$ отсутствуют.

Следствие 1.2.9. *Из теоремы 1.2.7 и леммы 1.2.6 непосредственно вытекает, что при любых $n \in \mathbb{N}$ и всех четных $k \geqslant 0$, точка $x = 1/2$ является точкой глобального максимума функции $A^2_{n,k}(x)$. Для нечетных k — точкой глобального максимума функции $A^2_{n,k}(x)$ является ноль многочлена $P_n^{(k-n+1)}(x)$, ближайший к середине отрезка.*

Следствие 1.2.10. *Экстремальная функция задачи, на которой достигается равенство в неравенстве*

$$\left\| f^{(k)} \right\|_{L_\infty[0,1]} \leqslant \Lambda_{n,k,2,\infty} \left\| f^{(n)} \right\|_{L_2[0,1]}, \quad \forall f \in \mathring{W}^n_2[0,1],$$

является симметричной (относительно середины отрезка) при четных k и не обладает симметрией при нечетных k.

Доказательство. Так как $\Lambda_{n,k,2,\infty} = \max\limits_{a\in[0,1]} A_{n,k,2}(a)$, то экстремальной функцей задачи является экстремальный сплайн $g_{n,k}(x,a^*)$, где a^* – точка глобального максимума функции $A_{n,k,2}(a)$. Поэтому данное утверждение непосредственно вытекает из явного вида экстремальных сплайнов $g_{n,k}(x,a)$, найденного в теореме 1.1.1, и следствия 1.2.9. $\square$

Замечание 1.2.11. *Свойства значений функций $A^2_{n,k}(x)$ в точках локальных максимумов и локальных минимумов, показанные в теореме 1.2.7 и замечании 1.2.8, схожи со свойствами значений $|y(x)|$ в точках локальных экстремумов решения $y(x)$ уравнения $-y'' + p(x)y = 0$ при условии знакопостоянства $p'(x)$ (см. теорема Сонина–Пойа, [18, §19] или [1, теорема 6.2.2]). Отличие заключается в том, что в теореме Сонина–Пойа монотонную последовательность образуют абсолютные значения во всех точках локальных экстремумов функции $y(x)$.*

1.3 Представление оценочных функций в терминах гипергеометрических функций [3]

Гипергеометрический ряд ${}_pF_q\left[\begin{matrix} a_1,\, a_2,\, \dots\, a_p \\ b_1,\, b_2,\, \dots\, b_q\end{matrix};\, z\right]$ определяется как формальный степенной ряд вида

$$ {}_pF_q\left[\begin{matrix} a_1,\, a_2,\, \dots\, a_p \\ b_1,\, b_2,\, \dots\, b_q\end{matrix};\, z\right] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a_1)_m (a_2)_m \dots (a_p)_m}{(b_1)_m (b_2)_m \dots (b_q)_m} \frac{z^m}{m!}, $$

где $(a)_m := a(a+1)\dots(a+m-1) = \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)}$, $(a)_0 = 1$ — символ Похгаммера.

[3]При подготовке данного раздела диссертации использованы следующие публикации, выполненные автором лично или в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования:

Гарманова Т. А. Оценки производных в пространствах Соболева в терминах гипергеометрических функций // Математические заметки. – 2021. – Т. 109, № 4. – С. 500–507.

Подробное изложение свойств гипергеометрических функций можно найти в [4] или [2]. Отметим, что при $a_i = -m$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $b_j \notin \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$ для всех $j = 1, \ldots, q$, функция ${}_pF_q(z)$ есть многочлен степени m.

1.3.1 Первообразные многочленов Лежандра в терминах гипергеометрических функций

Лемма 1.3.1. *На отрезке* $[0,1]$ *первообразные многочленов Лежандра порядка* $0 \leqslant j \leqslant m$ *удовлетворяют тождеству*

$$P_m^{(-j)}(x) = (-1)^{m-j} \frac{(x^2-x)^j}{j!} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} j-m,\ m+j+1 \\ j+1 \end{matrix} ;\, x \right].$$

Доказательство. По определению

$$P_m^{(-j)}(x) = \left(\frac{(x^2-x)^m}{m!} \right)^{(m-j)}.$$

Применяя к данной формуле правую часть тождества (см. [4, 2.1.2, (9)])

$$(c)_i\, x^{c-1}(1-x)^{a+b-c} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a,\ b \\ c \end{matrix} ;\, x \right] = \\ = \frac{d^i}{dx^i} \left(x^{i+c-1}(1-x)^{i+a+b-c} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a+i,\ b+i \\ c+i \end{matrix} ;\, x \right] \right)$$

при $i = m-j$, $a = j-m$, $b = m+j+1$ и $c = j+1$, получаем утверждение леммы. □

В частности, при $j = 0$ получаем соотношение для полиномов Лежандра:

$$P_m(x) = (-1)^m {}_2F_1 \left[\begin{matrix} -m,\ m+1 \\ 1 \end{matrix} ;\, x \right]. \tag{1.3.1}$$

Как и в разделе 1.2.1 мы будем работать с многочленами Лежандра от переменной $t := x^2 - x$, но все производные будут пониматься по переменной x, если не указано обратное.

Следствие 1.3.2. *Первообразные многочленов Лежандра удовлетворяют тождеству*

$$P_m^{(-j)}(t) = \frac{t^j}{j!}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}-\frac{m-j}{2},\ \frac{m+j+1}{2} \\ j+1\end{matrix};\,-4t\right].$$

Доказательство. Применяя к утверждению леммы 1.3.1 тождество (см. [4, 2.11, (2)])

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}2a,\ 2b \\ a+b+\frac{1}{2}\end{matrix};\,x\right] = {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,\ b \\ a+b+\frac{1}{2}\end{matrix};\,4x(1-x)\right]$$

при $a = -\frac{m-j}{2}$, $b = \frac{m+j+1}{2}$, получаем требуемое утверждение. □

Лемма 1.3.3. *Для производных порядка* $0 \leqslant j \leqslant m$ *многочленов Лежандра выполнено*

$$P_m^{(j)}(x) = (-1)^{m-j}\frac{(m+j)!}{(m-j)!\,j!}{}_2F_1\left[\begin{matrix}j-m,\ m+j+1 \\ j+1\end{matrix};\,x\right].$$

Доказательство. Применим тождество (см. [4, 2.1.2, (7)])

$$\frac{d^j}{dx^j}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,\ b \\ c\end{matrix};\,x\right] = \frac{(a)_j(b)_j}{(c)_j}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}a+j,\ b+j \\ c+j\end{matrix};\,x\right]$$

к представлению (1.3.1) для $P_m(x)$:

$$P_m^{(j)}(x) = (-1)^m\frac{d^j}{dx^j}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}-m,\ m+1 \\ 1\end{matrix};\,x\right] =$$

$$= (-1)^m\frac{(-m)_j(m+1)_j}{(1)_j}{}_2F_1\left[\begin{matrix}j-m,\ m+j+1 \\ j+1\end{matrix};\,x\right].$$

Так как $(1)_j = j!$ и $(-m)_j = (-1)^j(m-j+1)_j$, то

$$(-1)^m\frac{(-m)_j(m+1)_j}{(1)_j} = (-1)^{m-j}\frac{(m+j)!}{(m-j)!\,j!}$$

откуда и следует утверждение леммы. □

Из лемм 1.3.1 и 1.3.3 сразу следует

Теорема 1.3.4. *Для любого целого* $0 \leqslant j \leqslant m$ *справедливо соотношение*

$$P_m^{(-j)}(x) = (x^2 - x)^j \frac{(m-j)!}{(m+j)!} P_m^{(j)}(x). \tag{1.3.2}$$

Замечание 1.3.5. *Соотношение* (1.3.2) *является определяющим для многочленов Лежандра. Действительно, достаточно его выполнения при* $j = 1$. *Тогда, дифференцируя, получаем*

$$m(m+1)P_m(x) = (x^2 - x)P_m''(x) + (2x - 1)P_m'(x),$$

— определяющее дифференциальное уравнение для смещенных многочленов Лежандра.

Замечание 1.3.6. *Непосредственным вычислением проверяется, что для классических многочленов Лежандра, образующих ортогональную систему на отрезке* $[-1, 1]$, *соотношение* (1.3.2) *имеет вид*

$$\tilde{P}_m^{(-j)}(x) = (x^2 - 1)^j \frac{(m-j)!}{(m+j)!} \tilde{P}_m^{(j)}(x).$$

1.3.2 Явный вид оценочных функций $A_{n,k}$

В теореме 1.2.1 было получено рекуррентное соотношение (1.2.3) для $A_{n,k}^2$, которое имеет вид

$$A_{n+1,k+1}^2(x) = A_{n,k}^2(x) - (2n+1)\left(P_n^{(k-n)}(x)\right)^2.$$

Перепишем данное равенство в терминах гипергеометрических функций и переменной $t = x^2 - x$. Используя следствие 1.3.2 при $m = n$ и $j = n-k$ получаем

$$A_{n+1,k+1}^2(t) = A_{n,k}^2(t) - (2n+1)\frac{t^{2n-2k}}{((n-k)!)^2}\left({}_2F_1\left[\begin{matrix}-\frac{k}{2},\, n-\frac{k}{2}+\frac{1}{2} \\ n-k+1\end{matrix};\, -4t\right]\right)^2. \tag{1.3.3}$$

Теорема 1.3.7. *При всех* $n > k \geqslant 0$, *функции* $A_{n,k}^2(x)$ *имеют вид*

$$A_{n,k}^2(x) = \frac{-t^{2n-2k-1}}{(2n-2k-1)((n-k-1)!)^2}\, {}_3F_2\left[\begin{matrix}-k,\, n-k-\frac{1}{2},\, 2n-k \\ n-k,\, 2n-2k\end{matrix};\, -4t\right], \tag{1.3.4}$$

где $t = x^2 - x$.

Доказательство. Проведем доказательство с помощью метода математической индукции. В работе [7] был найден общий вид функций

$$A^2_{n,0}(t) = \frac{-t^{2n-1}}{(2n-1)((n-1)!)^2},$$

который является базой индукции для произвольного n и $k=0$, так как ${}_3F_2\left[\begin{matrix}0,\, n-\frac{1}{2},\, 2n \\ n,\, 2n\end{matrix};\, -4t\right] = 1.$

Пусть утверждение теоремы верно для $A^2_{n,k}(x)$, докажем, что оно верно и для $A^2_{n+1,k+1}(x)$. Согласно рекуррентному соотношению (1.3.3) и предположению индукции

$$A^2_{n+1,k+1}(t) =$$
$$= \frac{-t^{2n-2k-1}}{(2n-2k-1)((n-k-1)!)^2}\, {}_3F_2\left[\begin{matrix}-k,\, n-k-\frac{1}{2},\, 2n-k \\ n-k,\, 2n-2k\end{matrix};\, -4t\right] -$$
$$-(2n+1)\frac{t^{2n-2k}}{((n-k)!)^2}\left({}_2F_1\left[\begin{matrix}-\frac{k}{2},\, n-\frac{k}{2}+\frac{1}{2} \\ n-k+1\end{matrix};\, -4t\right]\right)^2.$$

По теореме Клаузена (см. [4, 4.3, (1)]) получаем

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}-\frac{k}{2},\, n-\frac{k}{2}+\frac{1}{2} \\ n-k+1\end{matrix};\, -4t\right]^2 = {}_3F_2\left[\begin{matrix}-k,\, n-k+\frac{1}{2},\, 2n-k+1 \\ n-k+1,\, 2n-2k+1\end{matrix};\, -4t\right]$$

Таким образом,

$$A^2_{n+1,k+1}(t) =$$
$$= \frac{-t^{2n-2k-1}}{((n-k-1)!)^2(2n-2k-1)}\left({}_3F_2\left[\begin{matrix}-k,\, n-k-\frac{1}{2},\, 2n-k \\ n-k,\, 2n-2k\end{matrix};\, -4t\right] +\right.$$
$$\left.+\frac{(2n+1)(2n-2k-1)t}{(n-k)^2}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}-k,\, n-k+\frac{1}{2},\, 2n-k+1 \\ n-k+1,\, 2n-2k+1\end{matrix};\, -4t\right]\right).$$

Выражение в больших скобках представляет собой многочлен степени $k+1$ по t. Коэффициент при t^0 равен единице. Рассмотрим в этом выражении коэффициент при t^j $(1 \leqslant j \leqslant k)$:

$$\frac{(-k)_j \left(n-k-\frac{1}{2}\right)_j (2n-k)_j (-4)^j}{(n-k)_j (2n-2k)_j\, j!} +$$
$$+\frac{(2n+1)(2n-2k-1)(-k)_{j-1}\left(n-k+\frac{1}{2}\right)_{j-1}(2n-k+1)_{j-1}(-4)^{j-1}}{(n-k)^2\,(n-k+1)_{j-1}(2n-2k+1)_{j-1}(j-1)!}.$$

Используя определение символа Похгаммера, после упрощения получаем, что этот коэффициент равен

$$\frac{(-k)_{j-1}\left(n-k+\frac{1}{2}\right)_{j-1}(2n-k+1)_{j-1}(-4)^{j-1}}{(n-k+1)_{j-1}(2n-2k+1)_{j-1}\, j!\,(n-k)^2}(2n-2k-1)(k+1)(2n-k+j) \tag{1.3.5}$$

С другой стороны, коэффициент при t^j в гипергеометрической функции в представлении для $A^2_{n+1,k+1}$ должен быть равен

$$\frac{(-k-1)_j\left(n-k-\frac{1}{2}\right)_j(2n-k+1)_j(-4)^j}{(n-k)_j(2n-2k)_j\, j!}.$$

Учитывая общее свойство символа Похгаммера $a\cdot(a+1)_{j-1} = (a)_j$, получаем, что это в точности равно выражению (1.3.5).

Множитель t^{k+1} присутствует только во втором слагаемом и коэффициент при нем равен:

$$\frac{(2n+1)(2n-2k-1)(-k)_k\left(n-k+\frac{1}{2}\right)_k(2n-k+1)_k(-4)^k}{(n-k)^2\,(n-k+1)_k(2n-2k+1)_k\, k!} =$$
$$= \frac{(-k-1)_{k+1}\left(n-k-\frac{1}{2}\right)_{k+1}(2n-k+1)_{k+1}(-4)^{k+1}}{(n-k)_{k+1}(2n-2k)_{k+1}(k+1)!}.$$

$\square$

1.4 Точные константы вложения при четных k [4]

[4] При подготовке данного раздела диссертации использованы следующие публикации, выполненные автором лично или в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования:

Гарманова Т. А., Шейпак И. А. О точных оценках производных четного порядка в пространствах Соболева // Функциональный анализ и его приложения. – 2021. – Т. 55, № 1. – С. 43–55.

Эта работа выполнена совместно с И. А. Шейпаком, которому принадлежат постановка задачи и формулировка теоремы, обозначенной в тексте как Теорема 1.4.1. Все доказательства результатов этой совместной работы получены автором диссертации лично.

Теорема 1.4.1. *Точные значения констант вложения* $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ *при всех четных* $k \geqslant 0$ *имеют вид*

$$\Lambda_{n,k,2,\infty} = A_{n,k}\left(1/2\right) = \frac{(k-1)!!}{2^{2n-3k/2-1}\,(n-k/2-1)!\,\sqrt{(2n-2k-1)}}.$$

Доказательство. По теореме 1.2.7 и следствию 1.2.9, максимум функции $A^2_{n,k}(a)$ достигается в середине отрезка $[0,1]$. Следовательно,

$$\Lambda^2_{n,k,2,\infty} = A^2_{n,k}(1/2).$$

Пусть $t = a^2 - a$, тогда $t(1/2) = -1/4$.

Будем проводить доказательство при помощи метода математической индукции с учетом четности k. База для $A^2_{n,0}$ проверена в работе [7]. Пусть утверждение верно для $A^2_{n-2,k-2}$, тогда, по формуле (1.2.4),

$$A^2_{n,k}(1/2) = A^2_{n-2,k-2}(1/2) - (2n-3)\big(P^{(k-n)}_{n-2}(1/2)\big)^2 - (2n-1)\big(P^{(k-n)}_{n-1}(1/2)\big)^2.$$

Так как k — четное, то $P^{(k-n)}_{n-1}(1/2) = 0$. Из следствия 1.3.2 имеем

$$P^{(k-n)}_{n-2}(1/2) = \frac{(-1/4)^{n-k}}{(n-k)!}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}1-k/2,\ n-k/2-1/2 \\ n-k+1\end{matrix};\ 1\right].$$

Так как (см. [4, 2.1.3])

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,\ b \\ c\end{matrix};\ 1\right] = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \qquad \operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0,\ \operatorname{Re}(c-a-b) > 0, \tag{1.4.1}$$

то $P^{(k-n)}_{n-2}(1/2) =$

$$= \frac{(-1)^{n-k}\,\Gamma(n-k+1)\Gamma(1/2)}{2^{2n-2k}\,(n-k)!\,\Gamma(n-k/2)\Gamma(3/2-k/2)} = \frac{(-1)^{n-k/2-1}(k-3)!!}{2^{2n-3k/2-1}\,(n-k/2-1)!}.$$

Откуда, по предположению индукции, $A^2_{n,k}(1/2) =$

$$= \frac{((k-3)!!)^2}{2^{4n-3k-4}((n-k/2-2)!)^2(2n-2k-1)} - \frac{(2n-3)((k-3)!!)^2}{2^{4n-3k-2}\,((n-k/2-1)!)^2} =$$

$$= \frac{((k-3)!!)^2}{2^{4n-3k-2}((n-k/2-1)!)^2}\left(\frac{(2n-k-2)^2}{2n-2k-1} - (2n-3)\right) =$$

$$= \frac{((k-1)!!)^2}{2^{4n-3k-2}((n-k/2-1)!)^2(2n-2k-1)}.$$

$\square$

Лемма 1.4.2. *Пусть k нечетно, тогда*

$$A^2_{n,k}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(k!!)^2}{2^{4n-3k-1}((n-\frac{k+1}{2})!)^2(2n-2k-1)}$$

Доказательство. Заметим, что в случае нечетного k, $P_n^{(k-n)}(1/2) = 0$, и, следовательно, согласно рекуррентному соотношению (1.2.3),

$$A^2_{n,k}\left(\frac{1}{2}\right) = A^2_{n+1,k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = \Lambda^2_{n+1,k+1,2,\infty}.$$

Применив к данному тождеству теорему 1.4.1, получим требуемое утверждение. □

1.5 Двусторонние оценки для констант вложения в случае нечетных k [5]

В случае когда показатель k — нечётый, точки глобального максимума функции $A^2_{n,k}(x)$ изменяются в зависимости от n и k. Поэтому для нечетных k явное описание точек глобального максимума $A^2_{n,k}(x)$ и представление $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ отсутствуют.

Лемма 1.5.1. *Пусть $x_0 > 1/2$ — точка локального экстремума функции $P_m^{(-j)}(x)$, ближайшая к середине отрезка справа, а $y_0 > 1/2$ точка локального экстремума функции $P_m^{(j)}(x)$, ближайшая к середине отрезка справа. Тогда $x_0 < y_0$.*

Доказательство. Для краткости введем обозначение $C := \frac{(m-j)!}{(m+j)!}$. В силу тождества (1.3.2) выполнено равенство

$$\frac{d}{dx}P_m^{(-j)}(x) = Cj(x^2-x)^{j-1}(2x-1)P_m^{(j)}(x) + C(x^2-x)^j P_m^{(j+1)}(x).$$

[5] При подготовке данного раздела диссертации использованы следующие публикации, выполненные автором лично или в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования:

Гарманова Т. А. Оценки производных в пространствах Соболева в терминах гипергеометрических функций // Математические заметки. – 2021. – Т. 109, № 4. – С. 500–507.

Так как x_0 — точка локального экстремума многочлена $P_m^{(-j)}(x)$, то $P_m^{(-j+1)}(x_0) = 0$. Тогда из равенства выше получаем, что

$$Cj(x_0^2 - x_0)^{j-1}(2x_0 - 1)P_m^{(j)}(x_0) + C(x_0^2 - x_0)^j P_m^{(j+1)}(x_0) = 0,$$

и, следовательно, используя снова формулу (1.3.2), получаем

$$\frac{j(2x_0 - 1)}{x_0^2 - x_0} P_m^{(-j)}(x_0) = -C(x_0^2 - x_0)^j P_m^{(j+1)}(x_0)$$

или

$$P_m^{(-j)}(x_0) = (-1)^j R(x_0) P_m^{(j+1)}(x_0), \tag{1.5.1}$$

где $R(x_0) := \frac{C(x_0 - x_0^2)^{j+1}}{j(2x_0 - 1)} > 0$, при $x_0 \in (1/2, 1)$.

Рассмотрим случай когда j — четное. Тогда по формуле (1.3.2), знаки $\operatorname{sign}\left(P_m^{(-j)}(x)\right)$ и $\operatorname{sign}\left(P_m^{(-j)}(x)\right)$ совпадают при всех $x \in [0, 1]$. Поэтому, если x_0 — точка локального максимума полинома $P_m^{(-j)}(x)$, то y_0 — также точка локального максимума $P_m^{(j)}(x)$. Тогда $P_m^{(-j)}(x_0) > 0$ и, следовательно, из (1.5.1), $P_m^{(j+1)}(x_0) > 0$ и $P_m^{(j)}(x)$ строго возрастает в точке x_0, а следовательно ее точка локального максимума y_0 находится правее точки x_0.

Если же x_0 — точка локального минимума многочлена $P_m^{(-j)}(x)$, то y_0 — точка локального минимума многочлена $P_m^{(j)}(x)$. Тогда $P_m^{(-j)}(x_0) < 0$, и из (1.5.1), полином $P_m^{(j)}(x)$ убывает в точке x_0, а значит его точка минимума y_0 лежит правее x_0.

Случай нечетного j рассматриваются аналогично, с учетом того, что $\operatorname{sign}\left(P_m^{(-j)}(x)\right) = -\operatorname{sign}\left(P_m^{(-j)}(x)\right)$ и $P_m^{(-j)}(x_0) = -R(x_0)P_m^{(j+1)}(x_0)$. $\square$

Везде далее будем считать, что $t := x^2 - x$, $t \in [-1/4, 0]$ при $x \in [0, 1]$. При этом, если не указано обратное, все производные функций будем понимать по переменной x.

Обозначим $t_k(n) \in (-1/4, 0)$ — точку глобального максимума $A_{n,k}^2(t)$. В работе [38] был найден явный вид для точек глобального максимума функций $A_{n,k}^2(t)$ при $k = 1, 3, 5$. В частности,

$$t_1(n) = -\frac{n-1}{2(2n-1)} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4(2n-1)},$$

$$t_3(n) = \frac{-(n-2)(2n-3) - \sqrt{3(n-2)(2n-3)}}{2(2n-1)(2n-3)} =$$
$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4(2n-1)}\left(3 - \sqrt{6 - \frac{1}{(2n-3)}}\right).$$

Теорема 1.5.2. *При всех нечетных $k \geqslant 1$, точка глобального максимума $A^2_{n,k}(t)$ может быть представлена в виде $t_k(n) = -\frac{1}{4} + \varepsilon_k(n)$, где $\varepsilon_k(n) < \varepsilon_j(n)$ при $j < k$, и для всех $1 \leqslant k \leqslant n-1$ выполнено $\varepsilon_k = O(\frac{1}{n})$.*

Доказательство. По теореме 1.2.7 и лемме 1.2.6, при нечетных k, точка $x = 1/2$ является точкой локального минимума функции $A^2_{n,k}(x)$, а точкой глобального максимума является ноль $P_n^{(k-n+1)}(x)$, ближайший к середине отрезка.

Рассмотрим нули многочленов $P_n^{(k-n+1)}(x)$ и $P_n^{(k-n+3)}(x)$, ближайшие к точке $x = 1/2$ справа. Обозначим их y_0 и x_0, соответственно. По формуле (1.3.2), нули $P_n^{(k-n+1)}(x)$ и $P_n^{(n-k-1)}(x)$ совпадают на интервале $(0,1)$. Тогда нули $P_n^{(k-n+1)}(x)$ — это точки локального экстремума многочлена $P_n^{(n-k-2)}(x)$. Итого, x_0 — это точка локального экстремума $P_n^{(k-n+2)}(x)$ ближайшая к точке $x = 1/2$ справа, а y_0 — точка локального экстремума $P_n^{(n-k-2)}(x)$, ближайшая к середине отрезка справа. По лемме 1.5.1 выполнено неравенство $x_0 < y_0$.

Если перейти к переменной t, то мы показали, что $t_{k+2}(n) < t_k(n)$. Соответственно, если $t_k(n) = -\frac{1}{4} + \varepsilon_k(n)$, то $\varepsilon_{k+2}(n) < \varepsilon_k(n)$, откуда по индукции следует первое утверждение теоремы.

Так как
$$\varepsilon_1(n) = \frac{1}{4(2n-1)} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$
и $\varepsilon_k(n) < \varepsilon_1(n)$ при $k > 1$, то $\varepsilon_k(n) = O(\frac{1}{n})$. □

В работе [38] были явно вычислены константы вложения $\Lambda_{n,1,2,\infty}$. Однако с ростом k точное вычисление $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ в случае нечетных k существенно усложняется. Тем не менее, могут быть получены сходящиеся двусторонние оценки для $\Lambda_{n,k,2,\infty}$.

Теорема 1.5.3. *Для любого нечетного* $k \geqslant 1$, *константы вложения* $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ *удовлетворяют соотношению*

$$C(n,k) \leqslant \Lambda_{n,k,2,\infty} \leqslant \sqrt{\frac{2n-k}{k+1}}C(n,k),$$

где

$$C(n,k) = \frac{k!!}{2^{2n-\frac{3k+1}{2}}\,(n-\frac{k+1}{2})!\,\sqrt{2n-2k-1}}.$$

Доказательство. По лемме 1.4.2 и так как t_k — точка глобального максимума $A_{n,k}(t)$ получаем, что

$$A^2_{n,k}(t_k) \geqslant A^2_{n,k}\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{(k!!)^2}{2^{4n-3k-1}((n-\frac{k+1}{2})!)^2(2n-2k-1)}.$$

С другой стороны, из доказательства теоремы 1.2.7, функция

$$B_{n,k}(x) = A^2_{n,k}(x) + \frac{x-x^2}{k+1}\left(P_n^{(k-n+1)}(x)\right)^2$$

огибает функцию $A^2_{n,k}(x)$ и при этом не убывает на отрезке $[0,\frac{1}{2}]$ и не возрастает на отрезке $[\frac{1}{2},1]$. Следовательно, точка $x=1/2$ является точкой глобального максимума функции $B_{n,k}(x)$. Переходя к переменной $t = x^2 - x$, получаем что $B_{n,k}(-1/4) \geqslant A^2_{n,k}(t_k)$.

По следствию 1.3.2 и формуле (1.4.1),

$$P_n^{(k-n+1)}(-1/4) = \frac{(-1)^{n-k-1}}{4^{n-k-1}(n-k-1)!}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}-\frac{k+1}{2},\ \frac{2n-k}{2} \\ n-k\end{matrix};1\right] =$$

$$= \frac{(-1)^{n-k-1}\,\Gamma(n-k)\,\Gamma(\frac{1}{2})}{4^{n-k-1}\,(n-k-1)!\,\Gamma(n-\frac{k-1}{2})\,\Gamma(-\frac{k}{2})} = \frac{(-1)^{n-\frac{k+1}{2}}\,k!!}{2^{2n-\frac{3k+3}{2}}(n-\frac{k+1}{2})!},$$

где последнее равенство получено с учетом нечетности k. Итого,

$$A^2_{n,k}(t_k) \leqslant A^2_{n,k}(-1/4) + \frac{1}{4(k+1)}\left(P_n^{(k-n+1)}(-1/4)\right)^2 =$$

$$= \frac{(k!!)^2}{2^{4n-3k-1}((n-\frac{k+1}{2})!)^2(2n-2k-1)} + \frac{(k!!)^2}{2^{4n-3k-1}((n-\frac{k+1}{2})!)^2(k+1)} =$$

$$= \frac{(k!!)^2\,(2n-k)}{2^{4n-3k-1}((n-\frac{k+1}{2})!)^2(2n-2k-1)(k+1)}.$$

□

Глава 2

Константы вложения с произвольным интегральным параметром [6]

В первой главе были подробно рассмотрены вложения гильбертовых пространства $\mathring{W}_2^n[0,1]$ в пространства $\mathring{W}_\infty^k[0,1]$. Вложения пространств Соболева $\mathring{W}_p^n[0,1]$ с показателем $p \neq 2$ в $\mathring{W}_\infty^k[0,1]$ $(0 \leqslant k < n)$ изучены гораздо меньше по сравнению с вложениями пространства $\mathring{W}_2^n[0,1]$. Здесь можно упомянуть работу [34], в которой были получены точные константы вложения пространства $\mathring{W}_p^n[0,1]$ в пространство $\mathring{W}_\infty^k[0,1]$ при $k = 0$, $n = 1, 2, 3$, $1 < p < \infty$. В этой работе было показано, что $\Lambda_{1,0,p,\infty} = \frac{1}{2}$ при всех $p \in [1, +\infty]$ (это также следует из работы Э. Шмидта [31]). Для $n = 2$ константа вложения уже зависит от p: $\Lambda_{2,0,p,\infty} = \frac{1}{p'(1+p')^{1/p'}}$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, а при $p = 3$ формула для $\Lambda_{3,0,p,\infty}$ уже неявная.

При $n = 4$ предложенный в работе [34] метод перестает работать. Также можно упомянуть работу [21], в которой в предположении сим-

[6] При подготовке данной главы диссертации использованы следующие публикации, выполненные автором лично или в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования:

Гарманова Т. А., Шейпак И. А. Связь наилучших L_p приближений сплайнов многочленами с оценками значений промежуточных производных в пространствах Соболева // Математические заметки. – 2023. – Т. 114, № 4. – С. 623–627.

Гарманова Т. А., Шейпак И. А. Точные оценки производных высокого порядка в пространствах Соболева // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2024. – № 1. – С. 3–10.

Эти работы выполнены совместно с И. А. Шейпаком, которому принадлежат постановка задачи и формулировка теоремы, обозначенной в тексте как Теорема 2.3.2. Все доказательства результатов этих совместных работ получены автором диссертации лично.

метричности экстремальной функции при $k = 0$ получены константы вложения $\mathring{W}_1^n[0,1]$ в пространство $L_\infty[0,1]$ при $n = \overline{1,6}$.

Напомним, что функции $A_{n,k,p}(a)$ при $a \in [0,1]$ определяются как наилучшие константы в неравенствах

$$\left| f^{(k)}(a) \right| \leqslant A_{n,k,p}(a) \| f^{(n)} \|_{L_p[0,1]}.$$

В таком случае, константы вложения пространства $\mathring{W}_p^n[0,1]$ в пространство $\mathring{W}_\infty^k[0,1]$ равны

$$\Lambda_{n,k,p,\infty} = \max_{a \in [0,1]} A_{n,k,p}(a).$$

На протяжении всей главы через p' будем обозначать гёльдерово сопряженное к p, то есть такое число, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

2.1 Функционалы означивания

Рассмотрим функции

$$q_{n,k}^{(n)}(x,a) := \begin{cases} \sum\limits_{l=0}^{n-1} \dfrac{(-1)^{n-l-1} \nu_l (x-a)^{n-l-1}}{(n-l-1)!} + \\ \quad + \dfrac{(-1)^{n-k-1}(x-a)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}, & x \in [0,a]; \\ \sum\limits_{l=0}^{n-1} \dfrac{(-1)^{n-l-1} \nu_l (x-a)^{n-l-1}}{(n-l-1)!}, & x \in (a,1], \end{cases} \tag{2.1.1}$$

где $\nu_l = \nu_l(a)$ — некоторые коэффициенты зависящие от a. Обозначим через $\mathcal{Q}_{n,k}$ множество функций вида (2.1.1) с произвольными коэффициентами $\vec{\nu} = (\nu_0, \ldots, \nu_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, при фиксированных $0 \leqslant k < n$.

Теорема 2.1.1. *Для произвольной функции* $f \in \mathring{W}_p^n[0,1]$, $a \in [0,1]$ *и* $q_{n,k}^{(n)}(x,a) \in \mathcal{Q}_{n,k}$ *выполнено равенство*

$$f^{(k)}(a) = \int\limits_0^1 f^{(n)}(x) q_{n,k}^{(n)}(x,a)\, dx. \tag{2.1.2}$$

Доказательство. Проинтегрируем по частям с учетом краевых условий и формулы (2.1.1):

$$\int\limits_0^1 f^{(n)}(x)q_{n,k}^{(n)}(x,a)\,dx = \int\limits_0^a f^{(n)}(x)q_{n,k}^{(n)}(x,a)\,dx + \int\limits_a^1 f^{(n)}(x)q_{n,k}^{(n)}(x,a)\,dx =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j f^{(n-j-1)}(a)\left(q_{n,k}^{(n+j)}(a-0,a) - q_{n,k}^{(n+j)}(a+0,a)\right) +$$

$$+ \int\limits_0^1 f(x)q_{n,k}^{(2n)}(x,a)\,dx = f^{(k)}(a)$$

□

Пользуясь представлением (2.1.2), оценим $|f^{(k)}(a)|$ при помощи неравенства Гёльдера:

$$\left|f^{(k)}(a)\right| \leqslant \|f^{(n)}\|_{L_p[0,1]} \cdot \|q_{n,k}^{(n)}\|_{L_{p'}[0,1]}.$$

Данное неравенство выполнено для любых $q_{n,k}^{(n)}(x,a) \in \mathcal{Q}_{n,k}$, поэтому также выполнено неравенство

$$\left|f^{(k)}(a)\right| \leqslant \inf_{q_{n,k}^{(n)} \in \mathcal{Q}_{n,k}} \|q_{n,k}^{(n)}\|_{L_{p'}[0,1]} \cdot \|f^{(n)}\|_{L_p[0,1]}. \qquad (2.1.3)$$

Лемма 2.1.2. *Пусть* $p \in (1,\infty)$. *Тогда для функции* $\hat{q}_{n,k}^{(n)} \in \mathcal{Q}_{n,k}$ *выполнено*

$$\|\hat{q}_{n,k}^{(n)}\|_{L_{p'}[0,1]} = \inf_{q_{n,k}^{(n)} \in \mathcal{Q}_{n,k}} \|q_{n,k}^{(n)}\|_{L_{p'}[0,1]}$$

тогда и только тогда, когда она удовлетворяет соотношениям

$$\int\limits_0^1 x^j |\hat{q}_{n,k}^{(n)}(x,a)|^{p'-1} \operatorname{sign}\left(\hat{q}_{n,k}^{(n)}(x,a)\right) dx = 0, \quad j = 0,1,\ldots,n-1. \qquad (2.1.4)$$

Доказательство. Для того чтобы минимизировать норму на множестве $\mathcal{Q}_{n,k}$, необходимо минимизировать её по параметрам ν_0, ν_1, …, ν_{n-1}, то есть должны быть выполнены условия

$$\frac{\partial}{\partial \nu_j}\|\hat{q}_{n,k}^{(n)}\|_{L_{p'}[0,1]} = 0, \quad j = 0,1,\ldots,n-1.$$

Таким образом, необходимые условия минимума имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial \nu_j} \|\hat{q}_{n,k}^{(n)}\|_{L_{p'}[0,1]}^{p'} = \frac{p'(-1)^{n-1-j}}{(n-j-1)!} \int\limits_0^1 (x-a)^j |\hat{q}_{n,k}^{(n)}|^{p'-1} \operatorname{sign} \hat{q}_{n,k}^{(n)} dx = 0,$$

откуда непосредственно следуют условия (2.1.4).

Данные условия являются и достаточными, так как минимизируемый функционал нормы является выпуклым (см. [5, 4.3.]). $\square$

Лемма 2.1.3. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *и функция* $h \in L_p[0,1]$ *удовлетворяет соотношениям*

$$\int\limits_0^1 x^j h(x)\, dx = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Тогда существует решение уравнения $f^{(n)}(x) = h(x)$*, принадлежащее пространству* $\mathring{W}_p^n[0,1]$*.*

Доказательство. Положим

$$f(x) = \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} h(t)\, dt,$$

тогда $f^{(j)}(x) \in AC[0,1]$ при всех $0 \leqslant j \leqslant n-1$ и краевые условия в нуле выполнены очевидным образом. Кроме того, краевые условия в единице выполнены для всех $0 \leqslant j \leqslant n-1$ в силу ортогональности $h(x)$ многочленам степени не выше $n-1$. $\square$

Теорема 2.1.4. *При всех* $p \in (1, \infty)$, $0 \leqslant k < n$*, выполнено*

$$A_{n,k,p}(a) = \inf_{q_{n,k}^{(n)} \in \mathcal{Q}_{n,k}} \|q_{n,k}^{(n)}(\,\cdot\,, a)\|_{L_{p'}[0,1]}$$

Доказательство. Из неравенства (2.1.3) следует, что

$$A_{n,k,p}(a) \leqslant \inf_{q_{n,k}^{(n)} \in \mathcal{Q}_{n,k}} \|q_{n,k}^{(n)}(\,\cdot\,, a)\|_{L_{p'}[0,1]}. \tag{2.1.5}$$

Кроме того, так как

$$\inf_{\vec{\nu} \in \mathbb{R}^n} \|q_{n,k}^{(n)}(\,\cdot\,, a)\|_{L_{p'}[0,1]} = \inf_{P \in \mathcal{P}_{n-1}} \|S_{n,k}(\,\cdot\,, a) + P(\,\cdot\, - a)\|_{L_{p'}[0,1]}\,,$$

где $S_{n,k}(x,a) = \frac{(a-x)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \cdot \chi_{[0,a]}(x)$ и $\mathcal{P}_{n-1}$ — конечномерное пространство многочленов степени не выше $n-1$, то (см. [30, Corollary 1.3.]) существует функция $\hat{q}_{n,k}^{(n)}(x,a)$, такая что

$$\|\hat{q}_{n,k}^{(n)}(\,\cdot\,,a)\|_{L_{p'}[0,1]} \;=\; \inf_{q_{n,k}^{(n)}\in\mathcal{Q}_{n,k}} \|q_{n,k}^{(n)}(\,\cdot\,,a)\|_{L_{p'}[0,1]}.$$

Тогда равенство в неравенстве (2.1.3) достигается на функции

$$w_{n,k}^{(n)}(x,a) := \left|\hat{q}_{n,k}^{(n)}(x,a)\right|^{p'-1} \cdot \operatorname{sign}\left(\hat{q}_{n,k}^{(n)}(x,a)\right).$$

Так как функция $\hat{q}_{n,k}^{(n)}(x,a)$ является сплайном, то $w_{n,k}^{(n)}(\,\cdot\,,a) \in L_p[0,1]$ и из лемм 2.1.2 и 2.1.3 следует, что существует ее первообразная, такая что $w_{n,k}(\,\cdot\,,a) \in \mathring{W}_p^n[0,1]$ при каждом фиксированном $a \in [0,1]$.

Таким обазом, равенство в неравенстве (2.1.5) достигается на функции $w_{n,k}(x,a) \in \mathring{W}_p^n[0,1]$, для которой выполнено

$$w_{n,k}^{(k)}(a,a) = \inf_{\vec{\nu}\in\mathbb{R}^n} \|q_{n,k}^{(n)}(\,\cdot\,,a)\|_{L_{p'}[0,1]} \cdot \|w_{n,k}^{(n)}(\,\cdot\,,a)\|_{L_p[0,1]},$$

откуда и следует утверждение теоремы. □

2.2 Эквивалентность задаче теории приближений

Напомним, что под многочленами Лежандра мы понимаем смещённые многочлены Лежандра, образующие ортогональную систему на отрезке $[0,1]$. В этом случае они определяются по формуле Родрига вида

$$P_m(x) := \left(\frac{(x^2-x)^m}{m!}\right)^{(m)},$$

а их первообразные порядка $0 \leqslant j \leqslant m$ по формуле

$$P_m^{(-j)}(x) := \left(\frac{(x^2-x)^m}{m!}\right)^{(m-j)}.$$

В главе 1 были найдены функции $g_{n,k}(x,a) \in \mathring{W}_2^n[0,1]$, такие что

$$f^{(k)}(a) = \int_0^1 f^{(n)}(x) g_{n,k}^{(n)}(x,a)dx, \quad \forall f \in \mathring{W}_2^n[0,1],$$

и $A_{n,k,2}(a) = \|g_{n,k}^{(n)}(\,\cdot\,,a)\|_{L_2[0,1]}$. Их явный вид описан в теореме 1.1.1.

Лемма 2.2.1. *Для любой функции* $q_{n,k}^{(n)} \in \mathcal{Q}_{n,k}$, $q_{n,k}^{(n)}(x,a)$ *и* $g_{n,k}^{(n)}(x,a)$ *отличаются на многочлен степени не выше* $n-1$ *по* x, *то есть*

$$q_{n,k}^{(n)}(x,a) - g_{n,k}^{(n)}(x,a) = \sum_{l=0}^{n-1} c_l(a)\, x^l.$$

Доказательство. 1. Из формулы (2.1.1) следует, что $q_{n,k}^{(n)} \in L_2[0,1]$, поэтому $q_{n,k}^{(n)}$ можно разложить в ряд по ортогональной системе многочленов Лежандра:

$$q_{n,k}^{(n)}(x,a) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m(a) P_m(x). \tag{2.2.1}$$

Заметим, что при $0 < n \leqslant m$ выполнено $P_m^{(-n)}(x) \in \mathring{W}_p^n[0,1]$. Поэтому, в соответствии с теоремой 2.1.1, получаем

$$\int\limits_0^1 q_{n,k}^{(n)}(x,a) P_m(x) dx = \int\limits_0^1 q_{n,k}^{(n)}(x,a) \left(P_m^{(-n)}(x)\right)^{(n)} dx = P_m^{(k-n)}(a),$$

при всех $0 < n \leqslant m$.

С другой стороны, из представления (2.2.1) следует, что

$$\int\limits_0^1 q_{n,k}^{(n)}(x,a) P_m(x) dx = \frac{\alpha_m(a)}{2m+1}, \quad m = 0, 1, \ldots,$$

откуда получаем равенство

$$q_{n,k}^{(n)}(x,a) = \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m(a) P_m(x) + \sum_{m=n}^{\infty} (2m+1) P_m^{(k-n)}(a) P_m(x).$$

2. Функции $g_{n,k}$ удовлетворяют краевым условиям Дирихле, поэтому разложение $g_{n,k}^{(n)}(x,a)$ в ряд по полиномам Лежандра имеет вид

$$g_{n,k}^{(n)}(x,a) = \sum_{m=n}^{\infty} \beta_m(a) P_m(x).$$

Аналогично п. 1 доказательства, получаем, что

$$\beta_m(a) = (2m+1) P_m^{(k-n)}(a),$$

откуда и следует утверждение теоремы. □

Следствие 2.2.2. *Из доказательства леммы 2.2.1 следует, что любые две функции из $\mathcal{Q}_{n,k}$ отличаются на многочлен степени не выше $n-1$.*

Определим пространство многочленов степени не выше m:

$$\mathcal{P}_m = \left\{ \sum_{j=0}^{m} c_j x^j, \;\; c_j \in \mathbb{R}, 0 \leqslant j \leqslant m \right\}.$$

Таким образом, из леммы 2.2.1 следует, что

$$\inf_{\vec{\nu}\in\mathbb{R}^n} \|q_{n,k}^{(n)}(\,\cdot\,,a)\|_{L_{p'}[0,1]} = \inf_{u\in\mathcal{P}_{n-1}} \|g_{n,k}^{(n)}(\,\cdot\,,a) - u\|_{L_{p'}[0,1]}.$$

Объединив утверждение выше с теоремой 2.1.4 и сделав предельный переход при $p \to 1$ и $p \to \infty$, получаем следующий результат.

Теорема 2.2.3. *При $1 \leqslant p \leqslant \infty$ справедливо равенство*

$$A_{n,k,p}(a) = \inf_{u\in\mathcal{P}_{n-1}} \|g_{n,k}^{(n)}(\,\cdot\,,a) - u\|_{L_{p'}[0,1]}.$$

Следствие 2.2.4. *При $1 \leqslant p \leqslant \infty$ выполнено равенство*

$$A_{n,k,p}(a) = \inf_{u\in\mathcal{P}_{n-1}} \|S_{n,k}(\,\cdot\,,a) - u\|_{L_{p'}[0,1]}\,,$$

где $S_{n,k}(x,a) := \frac{(a-x)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \cdot \chi_{[0,a]}(x)$ и $\chi_{[0,a]}$ — характеристическая функция отрезка $[0,a]$.

Доказательство. Так как

$$\frac{(a-x)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \cdot \chi_{[0,a]}(x) = S_{n,k}(x,a) \in \mathcal{Q}_{n,k}$$

при $\vec{\nu} = \vec{0}$, то, по лемме 2.2.1, $S_{n,k}(x,a)$ и $g_{n,k}^{(n)}(x,a)$ отличаются на многочлен степени не выше $n-1$ по x. Откуда следует, что

$$\inf_{u\in\mathcal{P}_{n-1}} \|g_{n,k}^{(n)}(\,\cdot\,,a) - u\|_{L_{p'}[0,1]} = \inf_{u\in\mathcal{P}_{n-1}} \|S_{n,k}(\,\cdot\,,a) - u\|_{L_{p'}[0,1]}.$$

$\square$

2.3 Константы вложения в случае $k = n - 1$

В случае когда $k = n - 1$, по следствию 2.2.4, задача о нахождении констант вложения сводится к задаче о приближении характеристической функции $\chi_{[0,a]}$ многочленами не выше степени $n - 1$ по норме пространства $L_{p'}[0, 1]$. То есть выполнены равенства

$$A_{n,n-1,p}(a) = \inf_{u \in \mathcal{P}_{n-1}} \left\| \chi_{[0,a]} - u \right\|_{L_{p'}[0,1]},$$

$$\Lambda_{n,n-1,p,\infty} = \sup_{a \in [0,1]} \inf_{u \in \mathcal{P}_{n-1}} \left\| \chi_{[0,a]} - u \right\|_{L_{p'}[0,1]}.$$

Теорема 2.3.1. *Константа вложения пространства* $\mathring{W}_1^n[0, 1]$ *в пространство* $\mathring{W}_\infty^{n-1}[0, 1]$ *равна*

$$\Lambda_{n,n-1,1,\infty} = \frac{1}{2}.$$

Доказательство. 1. Для функции $f \in \mathring{W}_1^n[0, 1]$ и $0 \leqslant k < n$ выполнены соотношения

$$f^{(k)}(a) = \int\limits_0^a \frac{f^{(n)}(t)(a-t)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\, dt,$$

$$f^{(k)}(a) = (-1)^{n-k} \int\limits_a^1 \frac{f^{(n)}(t)(t-a)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\, dt.$$

Сложив эти два равенства, получаем

$$2\left|f^{(k)}(a)\right| \leqslant \frac{1}{(n-k-1)!} \int\limits_0^1 |f^{(n)}(t)| dt = \frac{1}{(n-k-1)!} \|f^{(n)}\|_{L_1[0,1]},$$

откуда следует, что

$$\Lambda_{n,k,1,\infty} \leqslant \frac{1}{2(n-k-1)!}.$$

В частности,

$$\Lambda_{n,n-1,1,\infty} \leqslant \frac{1}{2}.$$

2. Так как

$$\Lambda_{n,n-1,1,\infty} = \sup_{a \in [0,1]} \inf_{u \in \mathcal{P}_{n-1}} \left\| \chi_{[0,a]} - u \right\|_{L_\infty[0,1]},$$

покажем, что для некоторого многочлена $u \in \mathcal{P}_{n-1}$, выполнено

$$\sup_{a\in[0,1]} \left\|\chi_{[0,a]} - u\right\|_{L_\infty[0,1]} = \frac{1}{2}.$$

Действительно, для $\hat{u}(x,a) \equiv 1/2$,

$$\chi_{[0,a]}(x) - \hat{u}(x,a) = \begin{cases} \quad \dfrac{1}{2}, & x \in [0,a]; \\ -\dfrac{1}{2}, & x \in (a,1], \end{cases}$$

и $\|\chi_{[0,a]} - u\|_{L_\infty[0,1]} = 1/2$, при всех $a \in [0,1]$. □

Теорема 2.3.2. *Константа вложения пространства* $\mathring{W}^n_\infty[0,1]$ *в пространство* $\mathring{W}^{n-1}_\infty[0,1]$ *удовлетворяет соотношениям*

$$\Lambda_{n,n-1,\infty,\infty} \geqslant \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2(n+1)}, \quad \text{если } n \text{ нечетно};$$

$$\Lambda_{n,n-1,\infty,\infty} \geqslant \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2(n+1)}\sin\frac{\pi n}{2(n+1)}, \quad \text{если } n \text{ четно.}$$

Доказательство. По следствию 2.2.4,

$$\Lambda_{n,n-1,\infty,\infty} = \sup_{a\in[0,1]}\inf_{u\in\mathcal{P}_{n-1}} \left\|\chi_{[0,a]} - u\right\|_{L_1[0,1]}.$$

В работе [6] были описаны наилучшие приближения в $L_1[-1,1]$ характеристической функции отрезка $\chi_{[a,1]}$ многочленами и введено обозначение

$$E_{n-1}(a) := \inf_{u\in\mathcal{P}_{n-1}} \|\chi_{[a,1]} - u\|_{L_1[-1,1]}.$$

для наилучшего приближения характеристической функции $\chi_{[a,1]}$ на отрезке $[-1,1]$. Тогда функция $A_{n,n-1,\infty}(a) = \inf_{u\in\mathcal{P}_{n-1}} \left\|\chi_{[0,a]} - u\right\|_{L_1[0,1]}$ получается из функции $E_{n-1}(a)$ заменой переменных $[-1,1] \to [0,1]$.

В работе [6] были установлены следующие свойства функции $E_{n-1}(a)$:

1. Значения $E_{n-1}\left(\cos\frac{j\pi}{n+1}\right)$, $0 \leqslant j \leqslant n+1$, лежат на графике функции

$$G_n(a) := \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\sqrt{1-a^2}.$$

2. Функция $E_{n-1}(a)$ является четной, а при $\cos\frac{\pi}{n+1} \leqslant |a| \leqslant 1$ справедлива формула
$$E_{n-1}(a) = 1 - |a|.$$

Так как функция $G_n(a)$ четна и строго возрастает на отрезке $[-1,0]$, то при четном $k = n-1$ точка $0 = \cos\frac{\pi j}{n+1}$ при $j = \frac{n+1}{2}$ доставляет наибольшее из известных значений функции $E_{n-1}(a)$, а при нечетном $k = n-1$ наибольшим из известных является значение функции $E_{n-1}(a)$ в точках $\cos\frac{\pi n}{2(n+1)}$ и $\cos\frac{\pi(n+2)}{2(n+1)}$.

Так как $A_{n,n-1,\infty}(a) =$
$$= \inf_{u\in\mathcal{P}_{n-1}} \int\limits_0^1 \left|\chi_{[0,a]}(x) - u(x)\right| dx = \inf_{u\in\mathcal{P}_{n-1}} \int\limits_0^1 \left|\chi_{[1-a,1]}(x) - u(x)\right| dx =$$
$$= \frac{1}{2} \inf_{u\in\mathcal{P}_{n-1}} \int\limits_{-1}^1 \left|\chi_{[1-2a,1]}(x) - u(x)\right| dx = \frac{1}{2} E_{n-1}(1-2a),$$
то функция $A_{n,n-1,\infty}(a)$ обладает свойствами, аналогичными $E_{n-1}(a)$. При замене переменных $[-1,1] \to [0,1]$, точки $\left\{\cos\frac{j\pi}{n+1}\right\}_{j=0}^{n+1}$ переходят в точки $\left\{\sin^2\frac{\pi j}{2(n+1)}\right\}_{j=0}^{n+1}$. Таким образом, при четных $k = n-1$, значение функции $A_{n,n-1,\infty}(a)$ в точке $a = 1/2$ является наибольшим из известных, а при нечетных $k = n-1$, наибольшим является значение $A_{n,n-1,\infty}(a)$ в точках $\sin^2\frac{\pi n}{4(n+1)}$ и $\sin^2\frac{\pi(n+2)}{4(n+1)}$.

Так как $\Lambda_{n,n-1,\infty,\infty} = \max\limits_{a\in[0,1]} A_{n,n-1,\infty}(a)$, то подставляя соответствующие значения в функцию $A_{n,n-1,\infty}(a)$, получаем для нечетных n
$$\Lambda_{n,n-1,\infty,\infty} \geqslant A_{n,n-1,\infty}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}E_{n-1}(0) = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2(n+1)},$$
и для четных n
$$\Lambda_{n,n-1,\infty,\infty} \geqslant A_{n,n-1,\infty}\left(\sin^2\frac{\pi n}{4(n+1)}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}E_{n-1}\left(\cos\frac{\pi n}{2(n+1)}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2(n+1)}\sin\frac{\pi n}{2(n+1)}.$$

$\square$

Замечание 2.3.3. *В работе [6] был описан численный метод построения функций $E_{n-1}(a)$ и построены графики $E_{n-1}(a)$ при некоторых n. Из численных построений можно выдвинуть гипотезу, что функция $E_{n-1}(a)$ является выпуклой вниз между точкми $\left\{\cos\frac{j\pi}{n+1}\right\}_{j=1}^{n}$. Тогда функция $G_n(a)$ будет являться огибающей для функции $E_{n-1}(a)$ и, соответственно, неравенства в теореме 2.3.2 превратятся в равенства.*

Замечание 2.3.4. *Так как, по определению $\Lambda_{n,k,p,\infty}$, для любых $p_1 \leqslant p_2$ выполнено $\Lambda_{n,k,p_2,\infty} \leqslant \Lambda_{n,k,p_1,\infty}$, то из теорем 2.3.1 и 2.3.2 могут быть получены двусторонние оценки:*

$$\Lambda_{n,n-1,\infty,\infty} \leqslant \Lambda_{n,n-1,p,\infty} \leqslant \frac{1}{2}.$$

При этом

$$\Lambda_{n,n-1,2,\infty} \leqslant \Lambda_{n,n-1,p,\infty} \leqslant \frac{1}{2}, \quad p \in [1,2];$$
$$\Lambda_{n,n-1,\infty,\infty} \leqslant \Lambda_{n,n-1,p,\infty} \leqslant \Lambda_{n,n-1,2,\infty}, \quad p \in [2,\infty],$$

и для получения более точных промежуточных оценок могут быть использованы теоремы 1.2.7, 1.5.3 (в зависимости от четности $n-1$).

Глава 3

Дополнительные свойства первообразных многочленов Лежандра [7]

В первой главе было показано, что многочлены Лежандра и их первообразные играют важную роль при изучении вложений пространств $\mathring{W}_2^n[0,1]$ в пространства $\mathring{W}_\infty^k[0,1]$. В этой главе изучаются дополнительные свойства первообразных многочленов Лежандра, а также их применение к спектральной задаче для дифференциальных операторов и константам вложения $\Lambda_{n,k,2,2}$ пространств $\mathring{W}_2^n[0,1]$ в пространства $\mathring{W}_2^k[0,1]$

Как и в главах 1, 2, будем называть многочленами Лежандра не классические, а смещенные многочлены, образующие ортогональную систему в пространстве $L_2[0,1]$ и определяемые формулой Родрига:

$$P_m(x) := \left(\frac{(x^2-x)^m}{m!}\right)^{(m)}, \quad m = 0, 1, \ldots$$

Первообразной порядка $0 \leqslant j \leqslant m$ многочлена Лежандра будем назы-

[7] При подготовке данной главы диссертации использованы следующие публикации, выполненные автором лично или в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования:

Гарманова Т. А., Шейпак И. А. О соотношениях ортогональности первообразных многочленов Лежандра и их приложениях к некоторым спектральным задачам для дифференциальных операторов // Математические заметки. – 2021. – Т. 110, № 4. – С. 498–506.

Эта работа выполнена совместно с И. А. Шейпаком, которому принадлежат постановка задачи и идея применения соотношений для первообразных многочленов Лежандра к спектральным задачам. Все доказательства результатов этих совместных работ получены автором диссертации лично.

вать многочлен

$$P_m^{(-j)}(x) := \left(\frac{(x^2-x)^m}{m!}\right)^{(m-j)}.$$

3.1 Скалярные произведения первообразных многочленов Лежандра фиксированного порядка

Лемма 3.1.1. *Для любого фиксированного целого числа $j \geqslant 0$ и всех $l > m \geqslant j$, многочлены $P_m^{(-j)}(x)$ и $P_l^{(-j)}(x)$ могут быть не ортогональны друг другу только при $l = m + 2i$, $i = 0, 1, \ldots, j$.*

Доказательство. Интегрированием по частям непосредственно проверяется справедливость соотношения

$$\int\limits_0^1 P_m^{(j)}(x) P_l^{(-j)}(x)\, dx = (-1)^j \int\limits_0^1 P_m(x) P_l(x)\, dx = 0$$

при всех $l > m \geqslant j$. Так как при $m = j, j+1, \ldots, l-1$ степени многочленов $P_m^{(j)}(x)$ принимают значения $0, 1, \ldots, l-j-1$, получаем, что многочлен $P_l^{(-j)}(x)$ ортогонален всем многочленам, степени которых не превосходят $l-j-1$.

По теореме 1.3.4 выполнено соотношение

$$P_m^{(-j)}(x) = (x^2-x)^j \frac{(m-j)!}{(m+j)!} P_m^{(j)}(x), \quad 0 \leqslant j \leqslant m.$$

Подставив эту формулу в выражение выше, получаем, что

$$\int\limits_0^1 P_m^{(-j)}(x) P_l^{(-j)}(x) dx = \frac{(m-j)!}{(m+j)!} \int\limits_0^1 (x^2-x)^j P_m^{(j)}(x) P_l^{(-j)}(x) dx.$$

Так как степень многочлена $(x^2-x)^j P_m^{(j)}(x)$ равна $2j + m - j = m + j$, то интеграл в правой части равен нулю, если выполнено соотношение $m + j \leqslant l - j - 1$, то есть при $l \geqslant m + 2j + 1$.

Также, так как выполнено $P_m^{(-j)}(x) = (-1)^{m-j} P_m^{(-j)}(1-x)$, то многочлен $P_m^{(-j)}(x)$ ортогонален всем многочленам $P_{m+2i-1}^{(-j)}$ при $i \geqslant 1$. Таким образом, ортогональность многочленов $P_m^{(-j)}(x)$ и $P_l^{(-j)}(x)$ может нарушаться только при $l = m + 2i$, $i = 0, 1, \ldots, j$. $\square$

Теорема 3.1.2. *Для любых* $0 \leqslant j \leqslant m$ *и* $l = 0, 1, \ldots, j$, *справедливы соотношения*

$$\int\limits_0^1 P_m^{(-j)}(x) P_{m+2l}^{(-j)}(x) dx = (-1)^l C_{2j}^{j-l} \frac{(m-j+l+1)_{2j}}{(2m-2j+2l+1)_{4j+1}},$$

где $(x)_n := x(x+1)\ldots(x+n-1) = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$ *— символ Похгаммера.*

Доказательство. 1. Проинтегрируем по частям

$$\int\limits_0^1 P_m^{(-j)}(x) P_{m+2l}^{(-j)}(x)\, dx = (-1)^{m+2l-j} \int\limits_0^1 P_m^{(m-2j+2l)}(x) P_{m+2l}^{(-m-2l)}(x)\, dx,$$

откуда следует, что

$$m!\,(m+2l)! \int\limits_0^1 P_m^{(-j)}(x) P_{m+2l}^{(-j)}(x)\, dx =$$

$$= (-1)^{m-j} \int\limits_0^1 \left((x^2-x)^m\right)^{(2m-2j+2l)} (x^2-x)^{m+2l}\, dx =$$

$$= (-1)^j \int\limits_0^1 \sum_{v=0}^{m} \left((-1)^v C_m^v (x^{2m-v})^{(2m-2j+2l)}\right) x^{m+2l}(1-x)^{m+2l}\, dx =$$

$$= (-1)^j \sum_{v=0}^{2j-2l} (-1)^v \frac{(2m-v)!}{(2j-2l-v)!} C_m^v \int\limits_0^1 x^{m+2j-v}(1-x)^{m+2l}\, dx.$$

Используя определение бета-функции и ее свойство $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, получаем, что

$$\int\limits_0^1 P_m^{(-j)}(x) P_{m+2l}^{(-j)}(x)\, dx =$$

$$= (-1)^j \sum_{v=0}^{2j-2l} \frac{(-1)^v}{v!} \frac{(2m-v)!(m+2j-v)!}{(2j-2l-v)!(m-v)!(2m+2j+2l-v+1)!}. \quad (3.1.1)$$

2. Заметим, что при $m = 0$ по условию также выполнено $j = l = 0$ и утверждение теоремы выполнено. Далее будем считать, что $m \neq 0$.

Учитывая свойство символа Похгаммера $(-x)_n = (-1)^n(x - n + 1)_n$, заметим, что правую часть равенства (3.1.1) можно представить в терминах гипергеометрической функции

$$\int_0^1 P_m^{(-j)}(x)P_{m+2l}^{(-j)}(x)dx = \frac{(-1)^j\,(2m)!\,(m+2j)!}{m!\,(2j-2l)!\,(2m+2j+2l+1)!}\times$$
$$\times\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}-(2j-2l),\ -m,\ -(2m+2j+2l+1)\\ -2m,\ -(m+2j)\end{matrix};\,1\right].$$

Применяя соотношение (см. [17, формула 99, стр. 455])

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}-n,\ a,\ b\\ 2a,\ \frac{1+b-n}{2}\end{matrix};\,1\right] = \frac{\left(\dfrac{1-b}{2}+a\right)_{\frac{n}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)_{\frac{n}{2}}}{\left(\dfrac{1}{2}+a\right)_{\frac{n}{2}}\left(\dfrac{1-b}{2}\right)_{\frac{n}{2}}},\quad a\neq 0,\ n = 0,2,4,\ldots$$

при $n = 2j - 2l$, $a = -m$, $b = -2j$, получим

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}-(2j-2l),\ -m,\ -(2m+2j+2l+1)\\ -2m,\ -(m+2j)\end{matrix};\,1\right] =$$
$$= \frac{(l+j+1)_{j-l}\left(\frac{1}{2}\right)_{j-l}}{\left(-m+\frac{1}{2}\right)_{j-l}(m+j+l+1)_{j-l}}. \quad (3.1.2)$$

Так как $(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$, то, используя свойства гамма-функции, после преобразований получаем

$$\left(\frac{1}{2}\right)_{j-l} = \frac{(2j-2l)!}{2^{2j-2l}\,(j-l)!},$$

$$\left(-m+\frac{1}{2}\right)_{j-l} = (-1)^{j-l}\frac{(2m)!\,(m-j+l)!}{2^{2j-2l}\,(2m-2j+2l)!\,m!}.$$

Итого, после подстановки данных равенств в правую часть выражения (3.1.2) получаем, что

$$\int\limits_0^1 P_m^{(-j)}(x)P_{m+2l}^{(-j)}(x)dx =$$

$$= \frac{(-1)^l\,(m+2j)!\,(l+j+1)_{j-l}\,(2m-2j+2l)!}{(j-l)!\,(2m+2j+2l+1)!\,(m+j+l+1)_{j-l}\,(m-j+l)!} =$$

$$= (-1)^l C_{2j}^{j-l}\frac{(m-j+l+1)_{2j}}{(2m-2j+2l+1)_{4j+1}}.$$

□

Замечание 3.1.3. *Для первообразных классических многочленов Лежандра, образующих ортогональную систему на отрезке* $[-1,1]$, *выполнено*

$$\int\limits_{-1}^1 \widetilde{P}_m^{(-j)}(x)\widetilde{P}_{m+2l}^{(-j)}(x)dx = (-1)^l\,2^{2j+1}\,C_{2j}^{j-l}\frac{(m-j+l+1)_{2j}}{(2m-2j+2l+1)_{4j+1}}$$

при $l=0,1,\ldots,j$, *и*

$$\int\limits_{-1}^1 \widetilde{P}_m^{(-j)}(x)\widetilde{P}_\nu^{(-j)}(x)dx = 0$$

при $\nu > m$, $\nu \neq m+2l$, $l=0,1,\ldots,j$.

Приведем несколько примеров:

1. При $j=0$ получаем стандартную нормировку многочленов Лежандра в $L_2[0,1]$:

$$\|P_m\|^2_{L_2[0,1]} = (P_m,P_m)_{L_2[0,1]} = \frac{1}{2m+1}.$$

2. При $j=1$ имеем

$$\|P_m^{(-1)}\|^2_{L_2[0,1]} = (P_m^{(-1)},P_m^{(-1)})_{L_2[0,1]} = \frac{1}{2(2m-1)(2m+1)(2m+3)},$$

$$(P_m^{(-1)},P_{m+2}^{(-1)})_{L_2[0,1]} = -\frac{1}{4(2m+1)(2m+3)(2m+5)}.$$

3.2 Приложения свойств первообразных многочленов Лежандра к спектральным задачам

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Рассмотрим спектральную задачу

$$(-1)^n y^{(2n)} = \lambda (-1)^k y^{(2k)} \tag{3.2.1}$$

с областью определения $\overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1]$. В терминах соответствующей квадратичной формы эту задачу можно переписать в виде

$$\mathfrak{b}(y) := \int\limits_0^1 |y^{(n)}(x)|^2\, dx - \lambda \int\limits_0^1 |y^{(k)}(x)|^2\, dx = 0.$$

Заметим, что функции $\{e_m := \sqrt{2m+1} P_m\}_{m=0}^{\infty}$ образуют ортонормированный базис в $L_2[0,1]$, где P_m – смещенные многочлены Лежандра, образующие ортогональную систему на отрезке $[0,1]$.

Так как для $y \in \overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1]$ справедливо представление

$$y^{(k)}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} y^{(n)}(t) dt,$$

то, учитывая краевые условия $y^{(j)}(1) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, получаем, что $y^{(n)}(x)$ ортогональна функциям x^j при $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Поэтому в разложении $y^{(n)}(x)$ в ряд по ортогональной системе многочленов Лежандра суммирование будет по индексам $m \geqslant n$:

$$y^{(n)}(x) = \sum_{m \geqslant n} b_m e_m(x), \quad \{b_m\} \in l_2.$$

Также, данное представление можно записать в виде

$$y^{(n)}(x) = \sum_{m \geqslant n} c_m P_m(x),$$

где $c_m = b_m \sqrt{2m+1}$.

Тогда

$$y^{(k)}(x) = \sum_{m \geqslant n} c_m P_m^{(k-n)}(x) = \sum_{m \geqslant n} \sqrt{2m+1}\, b_m P_m^{(k-n)}(x).$$

Подставляя разложения $y^{(n)}(x)$ и $y^{(k)}(x)$ в форму $\mathfrak{b}(y)$, получаем, что задача (3.2.1) равносильна следующей спектральной задаче в l_2

$$(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{A})u = 0, \quad u \in l_2, \tag{3.2.2}$$

где $u = (b_n, b_{n+1}, \ldots)$, $\mathbf{I}$ – единичная матрица, а из леммы 3.1.1 и теоремы 3.1.2 следует, что в матрице оператора $\mathbf{A}$ от нуля отличны лишь матричные элементы

$$\alpha^{n,k}_{m,m+2l} := \sqrt{2m+1}\sqrt{2(m+2l)+1}\left(P^{(k-n)}_m, P^{(k-n)}_{m+2l}\right)_{L_2[0,1]} =$$
$$= (-1)^l\sqrt{2m+1}\sqrt{2(m+2l)+1}\,C^{m-k-l}_{2n-2k}\frac{(m-n+k+l+1)_{2n-2k}}{(2m-2n+2k+2l+1)_{4n-4k+1}},$$

где $m \geqslant n$, $l = 0, 1, \ldots, n-k$.

Матрица оператора $\mathbf{A}$ является обобщенной якобиевой матрицей, отличными от нуля в ней являются только те элементы α_{ij}, индексы которых удовлетворяют соотношениям

$$|i-j| = 2l, \quad l = 0, 1, \ldots, n-k,$$

при этом элементы, стоящие на m-ом месте на каждой из ненулевых диагоналях, согласно теореме 3.1.2, ведут себя как $O\left(\frac{1}{m^{2n-2k}}\right)$. Поэтому из [3, п.31] следует, что оператор $\mathbf{A}$ является компактным. Также очевидно, что оператор $\mathbf{A}$ является самосопряженным.

Таким образом справедлива

Теорема 3.2.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ — фиксированные числа. Тогда задача* (3.2.1) *равносильна задаче на собственные значения самосопряженного компактного в l_2 оператора $\mathbf{A}$. При этом, если $0 < \lambda^{(n,k)}_1 < \lambda^{(n,k)}_2 < \ldots < \lambda^{(n,k)}_j < \ldots$ — собственные значения задачи* (3.2.1), *то $\mu^{(n,k)}_j := \frac{1}{\lambda^{(n,k)}_j}$, $j = 1, 2, \ldots$ — соответствующие собственные значения оператора $\mathbf{A}$. При этом собственный вектор $\{b_m\}_{m=n}^{\infty} \in l_2$ оператора $\mathbf{A}$ совпадает с коэффициентами разложения $y^{(n)}(x)$ в ряд по ортонормированной системе $\{e_m := \sqrt{2m+1}P_m\}_{m=0}^{\infty}$, где $y(x)$ – соответствующая собственная функция задачи* (3.2.1).

В частности, при $k = n-1$ матрица оператора $\mathbf{A}$ имеет три ненулевых диагонали:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{n,n} & 0 & \alpha_{n,n+2} & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \alpha_{n+1,n+1} & 0 & \alpha_{n+1,n+3} & 0 & \dots & \dots \\ \alpha_{n,n+2} & 0 & \alpha_{n+2,n+2} & 0 & \alpha_{n+2,n+4} & \dots & \dots \\ 0 & \alpha_{n+1,n+3} & 0 & \alpha_{n+3,n+3} & 0 & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 & \ddots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \ddots & \dots \end{pmatrix},$$

где $\alpha_{m,m} = \frac{1}{2(2m-1)(2m+3)}$, $\alpha_{m,m+2} = -\frac{1}{4\sqrt{2m+1}(2m+3)\sqrt{2m+5}}$, $m = n, n+1, \dots$.

3.3 Приложения к константам вложения $\Lambda_{n,k,2,2}$

Известно (см. [15], [16]), что константы вложения $\Lambda_{n,k,2,2}$ совпадают с наименьшим собственным значением задачи (3.2.1). То есть, выполнено равенство

$$\Lambda_{n,k,2,2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^{(n,k)}}} = \sqrt{\mu_1^{(n,k)}},$$

где $\lambda_1^{(n,k)}$ — наименьшее собственное значение задачи (3.2.1), а $\mu_1^{(n,k)}$ — наибольшее собственное значение оператора $\mathbf{A}$.

Если не ставить целью нахождение всех собственных значений задачи (3.2.1) с помощью обобщенных матриц Якоби, а искать только первое собственное значение (константу вложения), то можно перейти к операторам с более простой матрицей, нежели $\mathbf{A}$.

В работе [15] было показано, что при $k = n-1$ экстремаль задачи $f(x)$ – четная функция (относительно середины отрезка), а в работе [16], что при произвольных n и k достаточно рассматривать либо четные, либо нечетные решения задачи (3.2.1). Откуда следует, что в разложении

$$f^{(n)}(x) = \sum_{m\geqslant n} c_m P_m(x) = \sum_{m\geqslant n} b_m e_m(x),$$

выполнены равенства $b_{n+1} = b_{n+3} = \ldots = 0$. Для таких функций задача (3.2.1) примет вид

$$(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{B})u=0,\quad u\in l_2, \tag{3.3.1}$$

где $u=(b_n,b_{n+1},\ldots)$ и в матрице оператора $\mathbf{B}$ отличны от нуля только главная диагональ и по $n-k$ диагоналей, непосредственно примыкающих к ней сверху и снизу:

$$\beta_{i,j}^{(n,k)}=$$
$$=\sqrt{2(n+2(i-1))+1}\sqrt{2(n+2(j-1))+1}\left(P_{n+2(i-1)}^{(n-k)},P_{n+2(j-1)}^{(n-k)}\right)_{L_2[0;1]},$$
$$i,j=1,2,\ldots,n-k+1.$$

Таким образом, если $\mu_1^{(n,k)}$ — наибольшее собственное значение оператора $\mathbf{B}$, то

$$\Lambda_{n,k,2,2}=\sqrt{\mu_1^{(n,k)}}.$$

В частности, при $k=n-1$ матрица оператора $\mathbf{B}$ имеет вид

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\beta_{n,n} & \beta_{n,n+2} & 0 & 0 & 0 & \ldots\\ \beta_{n,n+2} & \beta_{n+2,n+2} & \beta_{n+2,n+4} & 0 & 0 & \ldots\\ 0 & \beta_{n+2,n+4} & \beta_{n+4,n+4} & \beta_{n+4,n+6} & 0 & \ldots\\ 0 & 0 & \beta_{n+4,n+6} & \beta_{n+6,n+6} & \beta_{n+6,n+8} & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ddots & \ddots\end{pmatrix},$$

где $\beta_{m,m}=\frac{1}{2(2m-1)(2m+3)}$, $\beta_{m,m+2}=-\frac{1}{4\sqrt{2m+1}(2m+3)\sqrt{2m+5}}$, $m=n,n+2,\ldots$.

Используя конечные матрицы, можно получать приближения для собственных значений и для констант вложения. Например, при $n=2$, $k=1$ матрица третьего порядка оператора $\mathbf{B}$ имеет вид

$$\mathbf{B}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{42} & -\frac{1}{84\sqrt{5}} & 0\\ -\frac{1}{84\sqrt{5}} & \frac{1}{154} & -\frac{1}{132\sqrt{13}}\\ 0 & -\frac{1}{132\sqrt{13}} & \frac{1}{330}\end{pmatrix},$$

а её соответствующий характеристический многочлен равен

$$p(\lambda)=-\lambda^3+\frac{\lambda^2}{30}-\frac{\lambda}{4680}+\frac{1}{3603600}.$$

Если вычислить приближенное значение наибольшего корня этого многочлена, то получим $\lambda_1 = 0,025330260114\ldots$. С другой стороны, для точной константы вложения получаем $\Lambda^2_{2,1,2,2} = \frac{1}{4\pi^2} = 0,02533029591\ldots$, то есть приближение дает семь верных знаков для квадрата константы вложения $\Lambda^2_{2,1,2,2}$. Заметим, что матрице третьего порядка оператора $\mathbf{B}$ соответствует матрица шестого порядка оператора $\mathbf{A}$. Остается открытой задача о получении аналитических оценок для наибольшего собственного значения операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в терминах матричных элементов.

Также существет связь между наибольшими собственными значениями матриц Якоби $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ и нулями функций Бесселя. Из работы [15] следует, что при $k = n-1$ квадратный корень из наименьшего собственного значения задачи (3.2.1) совпадает с наименьшим положительным нулем функции $J_{n-3/2}$, где J_ν — функции Бесселя. Следовательно, наименьший положительный нуль функции $J_{n-3/2}$ совпадает с квадратным корнем из наибольшего собственного значения матриц Якоби $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. При произвольном $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ квадратный корень из наибольшего собственного значения обобщенных матриц Якоби $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ совпадает с наименьшим нулем определителя специального вида, составленного из функций Бесселя (см. [16]).

Заключение

Обзор проведённого исследования. В диссертации рассмотрены различные вопросы, касающиеся получения точных констант вложения в пространствах Соболева на отрезке. Основной акцент уделен получению констант вложения $\Lambda_{n,k,p,\infty}$ пространств $\mathring{W}_p^n[0,1]$ в пространства $\mathring{W}_\infty^k[0,1]$, при $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Основные результаты диссертации состоят в следующем.

1. Полностью изучен гильбертов случай $p = 2$ вложения пространства $\mathring{W}_2^n[0,1]$ в пространство $\mathring{W}_\infty^k[0,1]$ ($n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k < n$). Явно описаны экстремальные сплайны задачи. Доказано, что экстремаль задачи, для которой выполнено

$$\left\|\hat{f}^{(k)}\right\|_{L_\infty[0,1]} = \Lambda_{n,k,2,\infty} \left\|\hat{f}^{(n)}\right\|_{L_2[0,1]},$$

   является симметричной относительно середины отрезка при четных k, а при нечетных k симметрией не обладает.

2. Получено явное описание оценочных функций $A_{n,k,2}^2(a)$, являющихся наименьшими возможными в неравенствах

$$\left|f^{(k)}(a)\right| \leqslant A_{n,k,2}(a) \left\|f^{(n)}\right\|_{L_2[0,1]}, \quad \forall f \in \mathring{W}_2^n[0,1],$$

   в терминах гипергеометрических функций. Описана структура их максимумов и минимумов, и доказана усиленная гипотеза о глобальном максимуме функций $A_{n,k,2}(a)$.

3. Найдены точные значения констант вложения $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ при всех четных $k \geqslant 0$ и сходящиеся двусторонние оценки для констант $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ при всех нечетных $k \geqslant 1$.

4. Для произвольных значений параметра $p \in [1, \infty]$, доказано, что задача о нахождении функций $A_{n,k,p}(a)$ равносильна нахождению наилучшего приближения сплайна $\dfrac{(a-x)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\chi_{[0,a]}(x)$ многочленами степени не выше $n-1$ по норме пространства $L_{p'}[0,1]$, где $1/p + 1/p' = 1$.

5. Найдены точные константы вложения $\Lambda_{n,n-1,1,\infty}$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

6. Получены тождества для скалярных произведений первообразных многочленов Лежандра фиксированного порядка $j \geqslant 0$ в пространстве $L_2[0,1]$. Показана их связь со спектральными задачами для дифференциальных операторов определенного вида и с задачей о нахождении констант вложения $\Lambda_{n,k,2,2}$.

Рекомендации и перспективы по дальнейшей разработке темы диссертации.

- Исследовать функции $A_{n,n-1,p}(a)$ и константы $\Lambda_{n,n-1,p,\infty}$ с произвольным интегральным параметром $p \in (1, \infty)$, с помощью решения задачи о наилучшем приближении характеристической функции отрезка $[0, a]$ многочленами.

- Исследовать функции $A_{n,k,p}(a)$ и константы $\Lambda_{n,k,p,\infty}$ с некоторыми параметрами $p \in [1, \infty]$, с помощью решения задачи о налучшем приближении функции $\dfrac{(a-x)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\chi_{[0,a]}(x)$ многочленами по норме $L_{p'}[0,1]$.

- Исследовать константы вложения $\Lambda_{n,k,p,q}$ при других интегральных параметрах $q \in [1, \infty)$.

- Исследовать константы вложения пространств $W^n_{p,\mathcal{U}_1}[0,1]$ в пространства $W^k_{q,\mathcal{U}_2}[0,1]$ с другими классами краевых условий $\{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2\}$, отличными от краевых условий Дирихле.

Литература

[1] Адрианова Л. Я. Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений // СПб.: Изд-во СПбГУ. – 1992. – 239 С.

[2] Аски Р., Рой Р., Эндрюс Дж. Специальные функции // М.: МЦНМО. – 2013. – 652 С.

[3] Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовых пространствах // М.: Наука. – 1966. – 544 С.

[4] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра // М.: Наука – 1965. – 296 С.

[5] Галеев Э. М. Оптимизация: теория, примеры, задачи // М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ». – 2010. – 336 С.

[6] Дейкалова М. В. Интегральное приближение характеристической функции сферической шапочки алгебраическими многочленами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 4. – С. 144–155.

[7] Калябин Г. А. Точные оценки для производных функций из классов Соболева $\mathring{W}_2^r(-1,1)$ // Труды МИАН. – 2010. – Т. 269. – С. 143–149.

[8] Калябин Г. А. О двусторонних и асимптотических оценках норм операторов вложения пространств $\mathring{W}_2^n(-1,1)$ в $L_q(d\mu)$ // Труды математического института им. В. А. Стеклова. – 2014. – Т. 284 – С. 169–175.

[9] Колмогоров А. Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном

интервале // Уч. зап. МГУ. Математика. – 1939. – Т. 30, Кн. 3. – С. 3–16.

[10] Левин В. И. О неравенствах. II. Об одном классе интегральных неравенств. // Математический сборник. – 1938. – Т. 4, № 2. – С. 309–324.

[11] Лунёв А. А., Оридорога Л. Л. Точные константы в обобщенных неравенствах для промежуточных производных // Математические заметки. – 2009. – Т. 85, № 5. – С. 737–744.

[12] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. О неравенствах для производных колмогоровского типа // Математический сборник. – 1997. – Т. 188, № 12. – С. 73–106.

[13] Мукосеева Е. В., Назаров А. И. О симметрии экстремали в некоторых теоремах вложения // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2014. – Т. 425. – С. 35–45.

[14] Мукосеева Е. В., Назаров А. И. Corrigendum // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2020. – Т. 489. – С. 225.

[15] Назаров А. И., Петрова А. Н. О точных константах в некоторых теоремах вложения высокого порядка // Вестн. Санкт-Петербургского ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. Астрон. – 2008. – № 4. – С. 16–20.

[16] Петрова Ю. П. Спектральные асимптотики для задач с интегральными ограничениями // Математические заметки. – 2017. – Т. 102, № 3. – С. 405–414.

[17] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Т. 3. Специальные функции. Дополнительные главы // М.: Физматлит. – 2003. – 688 С.

[18] Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения // М.: Изд-во иностранной литературы. – 1962. – 351 С.

[19] Фаддеев Д. К., Вулих Б. З., Уральцева Н. Н. Избранные главы анализа и высшей алгебры // Л: Издательство Ленинградского университета – 1981 – 200 С.

[20] Холшевников К. В., Шайдулин В. Ш. О свойствах интегралов от многочлена Лежандра // Вестн. Санкт-Петербургского ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. Астрон. – 2014. – Т. 1, № 1. – С. 55–67.

[21] Шейпак И. А. Многочлены чебышевского типа, возникающие в предельных неравенствах Пуанкаре // Математические заметки. – 2022. – Т. 112, № 4. – С. 153–157.

[22] Шейпак И. А. Числа Бернулли в константах вложения пространств Соболева с различными краевыми условиями // Алгебра и анализ. – 2023. – Т. 35, № 2. – С. 226–245.

[23] Böttcher A., Widom H. From Toeplitz eigenvalues through Green's kernels to higher-order Wirtinger–Sobolev inequalities // Operator Theory: Advances and Applications, Birkhäuser Basel. – 2006. – Vol. 171. – P. 73–87.

[24] Hadamard J. Sur le module maximum d'une fonction et de ses dérivées // Bull. Soc. Math. France. – 1914. – Vol. 42. – P. 68–72.

[25] Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G. Inequalities // Cambridge University Press. – 1934. – 314 P.

[26] Landau E. Einige Ungleichungen für zweimal differenzierbare Funktionen // Proc. London. Math. Soc. – 1913. – Vol. 2, No. 13. – P. 43–49.

[27] Nazarov A. I. On Exact Constant in the Generalized Poincare Inequality // Journal of Mathematical Sciences. – 2002. – Vol. 112. – P. 4029–4047.

[28] Nazarov A. I., Shcheglova A. P. Steklov-type 1D inequalities (a survey) // arXiv:2101.10752 [math.CA]. – 2021. – P. 1–13.

[29] Nurnberger G. Approximation by Spline Functions // Springer–Verlag. – 1989. – 243 P.

[30] Pinkus A. M. On L^1 – approximation // Cambridge University Press. – 1989. – 239 P.

[31] Shmidt E. Über die Ungleichung, welche die Integrale über eine Potenz einer Function und über eine andere Potenz ihrer Ableitung verbindet. // Math. Ann. – 1940. – Vol. 117. – P. 301–326.

[32] Stekloff W. Problème de refroidissement d'une barre hétérogène // Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques. – 1901. – Vol. 3, No. 3. – P. 281–313.

[33] Watanabe K., Kametaka Y., Nagai A., Takemura K., Yamagishi H. The best constant of Sobolev inequality on a bounded interval // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – Vol. 340, No. 1. – P. 699–706.

[34] Watanabe K., Kametaka Y., Nagai A., Yamagishi H., Takemura K. Symmetrization of Functions and the Best Constant of 1-DIM L_p Sobolev Inequality // Journal of Inequalities and Applications. – 2009. – Vol. 2009. – P. 1–12.

[35] Yamagishi H. The best constant of Sobolev inequality corresponding to Dirichlet–Neumann boundary value problem for $(-1)^M(d/dx)^{2M}$ // Hiroshima Math. J. – 2009. – Vol. 39, No. 3. – P. 421–442.

[36] Yamagishi H., Kametaka Y., Nagai A., Watanabe K., Takemura K. Riemann zeta function and the best constants of five series of Sobolev inequalities // RIMS Kôkyûroku Bessatsu. – 2009. – Vol. 13. – P. 125–139.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ.011.3 по специальности 1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ и входящих в базы цитирования Web of Science, Scopus и RSCI.

[37] Гарманова Т. А., Шейпак И. А. Свойства экстремумов оценок промежуточных производных нечетного порядка в классах Соболева // Доклады Академии наук. – 2019. – Т. 487, № 5. – С. 11–15.

[38] Гарманова Т. А., Шейпак И. А. Явный вид экстремалей в задаче о константах вложения в пространствах Соболева // Труды Московского математического общества. – 2019. – Т. 80, № 2. – С. 221–246.

[39] Гарманова Т. А., Шейпак И. А. О точных оценках производных четного порядка в пространствах Соболева // Функциональный анализ и его приложения. – 2021. – Т. 55, № 1. – С. 43–55.

[40] Гарманова Т. А. Оценки производных в пространствах Соболева в терминах гипергеометрических функций // Математические заметки. – 2021. – Т. 109, № 4. – С. 500–507.

[41] Гарманова Т. А., Шейпак И. А. О соотношениях ортогональности первообразных многочленов Лежандра и их приложениях к некоторым спектральным задачам для дифференциальных операторов // Математические заметки. – 2021. – Т. 110, № 4. – С. 498–506.

[42] Гарманова Т. А., Шейпак И. А. Связь наилучших L_p приближений сплайнов многочленами с оценками значений промежуточных производных в пространствах Соболева // Математические заметки. – 2023. – Т. 114, № 4. – С. 623–627.

[43] Гарманова Т. А., Шейпак И. А. Точные оценки производных высокого порядка в пространствах Соболева // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2024. – № 1. – С. 3–10.

Тезисы докладов в материалах научных конференций

[44] Гарманова Т. А. Явный вид точных констант в неравенствах типа Маркова – Фридрихса – Колмогорова // Современные проблемы математики и механики. — Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика В. А. Садовничего. – МАКС Пресс Москва. – 2019. – С. 43–45.

[45] Garmanova T. A. Properties of estimation functions in inequalities of Friedrichs – Markov – Kolmogorov type // Spectral Theory and Mathematical Physics. Proceedings of the conference. – Sirius Mathematical Centre. – 2020. – P. 11.

[46] Garmanova T. A. Embedding constants in Sobolev spaces // Spectral Theory and Mathematical Physics. 12th St. Petersburg conference in Spectral Theory (Birman conference). Program and abstracts. – Euler International Mathematical Institute, St. Petersburg. – 2021. – P. 33.

[47] Гарманова Т. А. О задачах минимизации, возникающих в неравенствах для производных в пространствах Соболева // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. – Владимир: ООО «Аркаим». – 2022. – С. 107.

[48] Гарманова Т. А., Казимиров Д. Д., Шейпак И. А. Точные оценки функций и производных высокого порядка в пространствах Соболева // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции. – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН. – 2023. – С. 24–25.