

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Жилина Светлана Александровна

**КОМБИНАТОРНЫЕ СВОЙСТВА БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ  
НА ВЕЩЕСТВЕННЫХ АЛГЕБРАХ КЭЛИ-ДИКСОНА**

1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел  
и дискретная математика (01.01.06 Математическая логика, алгебра и теория чисел)

диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук,  
профессор Гутерман Александр Эмилевич

Москва, 2022

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1 Основные определения и обозначения</b>	<b>19</b>
1.1 Алгебраические отношения и их графы . . . . .	19
1.2 Построение алгебр Кэли-Диксона . . . . .	21
1.3 Свойства вещественных алгебр Кэли-Диксона . . . . .	23
1.4 Примеры вещественных алгебр Кэли-Диксона . . . . .	26
<b>2 Дважды альтернативные делители нуля в вещественных алгебрах Кэли-Диксона</b>	<b>30</b>
2.1 Альтернативные подалгебры . . . . .	30
2.2 Шестиугольники в графах делителей нуля . . . . .	35
2.3 Дважды альтернативные делители нуля . . . . .	40
2.4 Связь централизаторов и ортогонализаторов . . . . .	43
<b>3 Графы отношений алгебр главной последовательности</b>	<b>47</b>
3.1 Двойные шестиугольники в графах ортогональности . . . . .	47
3.2 Седенионы . . . . .	53
3.2.1 Делители нуля и их свойства . . . . .	53
3.2.2 Компоненты связности графа ортогональности . . . . .	54
3.2.3 Граф ортогональности на парах базисных элементов . . . . .	57
3.2.4 Таблица умножения вершин двойного шестиугольника . . . . .	59
3.2.5 Граф коммутативности . . . . .	62
<b>4 Графы отношений контр-алгебр малых размерностей</b>	<b>66</b>
4.1 Дважды альтернативные делители нуля в контр-алгебрах . . . . .	66
4.2 Контркомплексные числа . . . . .	69
4.3 Контркватернионы . . . . .	70
4.3.1 Матричное представление . . . . .	70
4.3.2 Вещественная жорданова нормальная форма . . . . .	71
4.3.3 Граф ортогональности . . . . .	72
4.3.4 Граф делителей нуля . . . . .	72
4.4 Контроктонионы . . . . .	74

4.4.1	Матричное представление . . . . .	74
4.4.2	Вещественная жорданова нормальная форма . . . . .	75
4.4.3	Граф ортогональности . . . . .	78
4.4.4	Граф делителей нуля . . . . .	80
4.5	Контрседенионы . . . . .	81
4.5.1	Основные свойства . . . . .	81
4.5.2	Нижние оценки диаметров графов . . . . .	82
4.5.3	Граф делителей нуля . . . . .	87
4.5.4	Граф ортогональности . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Решение проблемы изоморфизма для графов ортогональности на парах базисных элементов</b>	<b>93</b>
5.1	Делители нуля из пар базисных элементов . . . . .	93
5.1.1	Классификация делителей нуля . . . . .	93
5.1.2	Изучение условий ортогональности . . . . .	97
5.2	Граф ортогональности на парах базисных элементов . . . . .	104
5.2.1	Примеры в случае малых размерностей . . . . .	104
5.2.2	Структура графа ортогональности . . . . .	110
5.3	Восстановление параметров по графу $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$ . . . . .	115
5.3.1	Нахождение $\gamma_{n-1}$ и $\gamma_n$ при $n \geq 4$ . . . . .	115
5.3.2	Различение алгебр при $n \leq 3$ . . . . .	117
5.3.3	Рекурсивный поиск параметров алгебры . . . . .	120
5.3.4	Изоморфные графы и изоморфные алгебры . . . . .	126
5.4	Другой возможный подход . . . . .	127
	<b>Заключение</b>	<b>129</b>
	Литература . . . . .	131

# Введение

## Общая характеристика работы

Диссертация подготовлена на кафедре высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. В диссертации исследуются отношения между элементами неассоциативных алгебр и индуцированные ими графы.

## Актуальность темы исследования

Важным подходом к визуализации различных алгебраических отношений, таких как ортогональность, коммутативность и т.д., является построение графа рассматриваемого отношения. Вершинам графа  $\Gamma_R(S)$  бинарного алгебраического отношения  $R$  на заданной алгебраической структуре  $S$  соответствуют элементы  $S$  или их классы эквивалентности, причём существует ребро из  $x$  в  $y$ , если и только если  $xRy$ . Если отношение  $R$  симметрично, то  $\Gamma_R(S)$  оказывается неориентированным, в противном случае — ориентированным.

Изучение графов, порождённых отношениями на алгебраических системах, берёт своё начало в теории групп, см. работу Бабая и Сересса [6]. На кольцах и алгебрах эти исследования восходят к работе Бека [10] (1988), где был впервые определён граф делителей нуля коммутативного кольца. В определении Бека множество вершин графа совпадало со множеством всех элементов кольца. Затем Андерсон и Ливингстон [5] дали новое определение, исключаящее из графа 0 и элементы, не являющиеся делителями нуля. В определении Мюлэя [42] вершинами графа стали классы эквивалентности делителей нуля. Ориентированные и неориентированные графы делителей нуля некоммутативных колец были впервые введены Редмондом [43]. Акбари, Гандехари, Хадриан и Мохаммадиан дали определение графа коммутативности некоммутативного кольца в работе [3], а Бахадлы, Гутерман и Маркова в работе [9] положили начало изучению графов ортогональности.

Особый интерес представляют графы отношений матричных колец. Так, Божич и Петрович в работе [15] изучили диаметры графов делителей нуля матричных колец над коммутативными кольцами и их связь с диаметрами графов делителей нуля исходных колец. В работах [2, 4, 20] разными авторами исследуются связность и диаметры графов коммутативности матричных колец, а также их зависимость от исходного кольца. В работах [8, 9, 26] рассматриваются графы ортогональности матричных колец над полями и телами.

Изучение графов отношений является активно развивающейся областью современной ма-

тематики. Они играют важную роль при изучении различных понятий, связанных с порождающими их отношениями, а также структур, на которых заданы эти отношения. Отметим некоторые из направлений, в которых применение графов отношений оказывается особенно актуальным.

Во-первых, графы отношений, определённые на объектах заданной категории  $C$ , несут в себе большое количество информации. В некоторых случаях удаётся даже решить проблему изоморфизма, то есть показать, что объекты  $S_1, S_2 \in \text{ob}(C)$  изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их графы отношений  $\Gamma_R(S_1)$  и  $\Gamma_R(S_2)$ . Например, графы коммутативности позволяют выделить неабелевы простые группы среди всех остальных групп, см. [1, 28, 45], а также различить между собой гильбертовы пространства, см. [33]. Кроме того, в [22] было показано, что графы йордановой ортогональности помогают различить между собой конечномерные простые формально действительные йордановы алгебры. Графы отношений играют важную роль и в функциональном анализе: в работе [56], написанной диссертантом совместно с Л. Арамбашич, А. Э. Гутерманом, Б. Кузмой и Р. Райич, была решена проблема изоморфизма для графов ортогональности Биркгофа-Джеймса гладких нормированных пространств.

Во-вторых, графы отношений нередко помогают классифицировать отображения, которые сохраняют порождающие их отношения. Так, в работе [21] с помощью графов ортогональности была получена полная классификация (не обязательно сюръективных) отображений, сохраняющих ортогональность на конечномерных проективных пространствах над вещественными числами, комплексными числами, кватернионами или октонионами. Такое отображение можно рассматривать как (не обязательно сюръективный) гомоморфизм соответствующего графа ортогональности, который обязан отображать любую максимальную клику в другую максимальную клику.

Целью данной работы является исследование графов коммутативности, ортогональности и делителей нуля для конкретного класса неассоциативных алгебр, а именно, вещественных алгебр Кэли-Диксона. Изучение алгебр Кэли-Диксона берёт своё начало в теории композиционных алгебр, которые определяются следующим образом.

**Определение.** Пусть  $\mathcal{A}$  — алгебра над произвольным полем  $\mathbb{F}$ , возможно, неунитальная и неассоциативная. Предположим, что алгебра  $\mathcal{A}$  снабжена строго невырожденной квадратичной формой  $n(\cdot)$ , то есть симметрическая билинейная форма  $n(a, b) = n(a + b) - n(a) - n(b)$  невырождена на  $\mathcal{A}$ . Тогда  $\mathcal{A}$  называется *композиционной алгеброй*, если норма  $n(\cdot)$  допускает композицию, то есть  $n(ab) = n(a)n(b)$  для всех  $a, b \in \mathcal{A}$ .

В 1898 году Гурвиц показал, что единственные унитарные композиционные алгебры с делением над  $\mathbb{R}$  — это вещественные числа  $\mathbb{R}$ , комплексные числа  $\mathbb{C}$ , кватернионы  $\mathbb{H}$  и октонионы  $\mathbb{O}$ . Такие алгебры принято называть *гурвицевыми*, и их размерности равны 1, 2, 4 и 8, соответственно. Эта знаменитая теорема играет важную роль в различных областях математики. Например, с ней связан тот факт, что сфера  $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$  является параллелизуемой, если и только если  $n \in \{1, 2, 4, 8\}$ . Это утверждение было независимо доказано Боттом и Милнором [14], а также Кервэйром [31]. Гурвицевы алгебры, особенно, кватернионы и ок-

тонионы, имеют множество применений в физике элементарных частиц, а также в теории йордановых алгебр и алгебр Ли, см. работу [7] и её библиографию.

Позднее теорема Гурвица была обобщена Джекобсоном на случай произвольных унитарных композиционных алгебр над произвольным полем  $\mathbb{F}$ ,  $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$ . Он показал, что любая такая алгебра  $\mathcal{A}$  изоморфна алгебре Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_n$  размерности  $2^n$ , где  $0 \leq n \leq 3$ , см. [29, стр. 61, теорема 1]. Этот результат был обобщён Жевлаковым, Слинью, Шестаковым и Ширшовым на случай поля  $\mathbb{F}$  произвольной характеристики, см. [46, стр. 46, теорема 1].

Как показывает [24, лемма 2.1], элемент  $a$  (не обязательно унитарной) конечномерной композиционной алгебры  $\mathcal{A}$  является делителем нуля, если и только если  $n(a) = 0$ . Таким образом, любая конечномерная композиционная алгебра либо является алгеброй с делением, либо имеет делители нуля, в зависимости от того, является ли норма на ней анизотропной или изотропной.

**Определение.** Пусть  $\mathcal{A}$  — произвольная алгебра над полем  $\mathbb{F}$ , и  $a, b, c \in \mathcal{A}$ .

- Ассоциатором элементов  $a, b, c$  называется элемент  $[a, b, c] = (ab)c - a(bc)$ .
- Элемент  $a$  альтернирует с  $b$ , если  $[a, a, b] = [b, a, a] = 0$ .
- Если  $a$  альтернирует со всеми  $b \in \mathcal{A}$ , то  $a$  называется *альтернативным*.
- Элемент  $a$  строго альтернирует с  $b$ , если  $[a, a, b] = [b, a, a] = [b, b, a] = [a, b, b] = 0$ .
- Если  $a$  строго альтернирует со всеми  $b \in \mathcal{A}$ , то  $a$  называется *строго альтернативным*.
- Алгебра  $\mathcal{A}$  называется *альтернативной*, если все её элементы альтернативны.

В общем случае, вещественные алгебры Кэли-Диксона — это семейство  $2^n$ -мерных алгебр  $\mathcal{A}_n$  над полем  $\mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , которые обобщают алгебры вещественных чисел, комплексных чисел, кватернионов и октонионов. Алгебры Кэли-Диксона определяются индуктивно: на каждом шаге алгебра  $\mathcal{A}_{n+1}$  получается из алгебры  $\mathcal{A}_n$  с помощью процедуры удвоения Кэли-Диксона с некоторым параметром  $\gamma_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Элементами  $\mathcal{A}_{n+1}$  являются упорядоченные пары элементов из  $\mathcal{A}_n$ , то есть элементы вида  $(a, b) \in \mathcal{A}_n \times \mathcal{A}_n$ . Таким образом, каждую из алгебр  $\mathcal{A}_n$  определяют  $n$  ненулевых вещественных параметров  $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}$ , причём с точностью до изоморфизма можно считать, что  $\gamma_k \in \{\pm 1\}$  для всех  $k = 0, \dots, n-1$ . При  $n \geq 4$  алгебры  $\mathcal{A}_n$  неальтернативны, а потому не являются композиционными. Как следствие, в них появляются делители нуля даже в том случае, когда норма на  $\mathcal{A}_n$  анизотропна. Классификация этих делителей нуля и описание их аннуляторов оказываются довольно трудной задачей, за исключением, разве что, некоторых частных случаев.

Алгебры Кэли-Диксона являются объектом активного изучения математиков на протяжении уже нескольких десятилетий. Им посвящены частично или полностью такие классические работы, как статья Шафера [44], статья Эакина и Сасайе [23] и фундаментальный труд МакКриммона [37].

В настоящее время большинство авторов ограничиваются изучением алгебр главной последовательности, которые мы обозначаем как  $\mathcal{M}_n$ . В них все параметры Кэли-Диксона

$\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}$  равны  $-1$ . Наиболее успешные попытки по изучению и классификации делителей нуля в этих алгебрах были предприняты Морено [38–40] и Биссом, Даггером и Исаксеном [12, 13]. Однако и сейчас решение этой проблемы далеко от завершения. В частности, работа [12] содержит описание только тех делителей нуля, аннуляторы которых имеют наибольшую возможную размерность.

Отметим, что Морено был первым, кто начал изучать в алгебрах главной последовательности дважды альтернативные элементы, то есть такие элементы, обе компоненты которых альтернативны в предыдущей алгебре этой последовательности. Он установил ряд важных свойств дважды альтернативных делителей нуля, см. [38, стр. 25–27]. Затем их аннуляторы были описаны в [12, предложение 11.1]. Одна из причин успешного изучения дважды альтернативных элементов состоит в том, что, как было показано в [39, стр. 15], композиционное тождество  $n(ab) = n(ba) = n(a)n(b)$ , хотя и не выполняется во всей алгебре  $\mathcal{M}_n$  при  $n \geq 4$ , продолжает выполняться в том случае, если элементы  $a, b \in \mathcal{M}_n$  альтернируют между собой.

В данной диссертационной работе понятие дважды альтернативного элемента обобщается на случай произвольной вещественной алгебры Кэли-Диксона. Рассматривается также и более слабое условие: требуется, чтобы компоненты пары делителей нуля строго альтернировали друг с другом. Это позволяет усилить результаты, полученные ранее в работах Морено и Бисса, Даггера и Исаксена, а также обобщить их на случай произвольных вещественных алгебр Кэли-Диксона. Свойства, наиболее похожие на случай алгебр главной последовательности, наблюдаются в контр-алгебрах Кэли-Диксона, которые мы обозначаем как  $\mathcal{H}_n$ . В этих алгебрах параметры Кэли-Диксона  $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-2}$  равны  $-1$ , а  $\gamma_{n-1}$  равен  $1$ .

В случае, когда  $n \leq 4$ , все элементы алгебры  $\mathcal{A}_n$  являются дважды альтернативными. В частности, это выполнено для контр-алгебр малых размерностей: контркомплексных чисел  $\hat{\mathbb{C}}$ , контркватернионов  $\hat{\mathbb{H}}$  и контроктонионов  $\hat{\mathbb{O}}$ , подробно рассмотренных в [37, стр. 157–160], а также алгебры контрседенионов  $\hat{\mathbb{S}}$ . В диссертации описаны графы коммутативности, ортогональности и делителей нуля этих алгебр. Поскольку алгебра контркватернионов изоморфна алгебре вещественных  $(2 \times 2)$ -матриц  $M_2(\mathbb{R})$ , свойства её графов отношений уже хорошо известны, см. [2, 8, 15]. Однако мы приводим свои доказательства этих утверждений, чтобы провести параллель между контркватернионами и контроктонионами.

Ещё одной алгеброй, все элементы которой дважды альтернативны, является алгебра седенионов  $\mathbb{S} = \mathcal{M}_4$ . Это первая неальтернативная алгебра главной последовательности, поэтому в ней впервые возникают делители нуля. Она также является наиболее изученной из алгебр  $\mathcal{M}_n$  при  $n \geq 4$ , см. работы [12, 18, 19, 30, 32, 34, 38].

Элементы алгебры  $\mathbb{S}$  удобнее всего представлять в виде упорядоченных пар октонионов. Можно проверить, что любой автоморфизм  $\varphi$  октонионов можно продолжить до автоморфизма  $\hat{\varphi}$  седенионов по формуле  $\hat{\varphi}((a, b)) = (\varphi(a), \varphi(b))$ . Халил и Яо [32] показали, что группа  $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O})$  действует свободно и транзитивно на множестве

$$\{(x, y) \in \mathbb{S} \times \mathbb{S} \mid n(x) = n(y) = 1, xy = 0\}.$$

В частности, любую пару делителей нуля  $(a, b)$  и  $(c, d)$  всегда можно заменить на  $(e_1, e_2)$

и  $(e_7, e_4)$  с некоторыми коэффициентами. В [19, предложение 3.4(ii)] было доказано, что, поскольку  $e_1e_2 = e_3 = -e_7e_4$ , из  $(a, b)(c, d) = 0$  следует  $n(c)ab = -n(a)cd$ . Это свойство седенионов особенно важно и позволяет усилить некоторые результаты, полученные для произвольных алгебр главной последовательности. В диссертации полностью описаны компоненты связности графа ортогональности алгебры седенионов, а также получены нижняя и верхняя оценка на диаметр её графа коммутативности.

Частным случаем дважды альтернативных элементов в произвольных вещественных алгебрах Кэли-Диксона являются элементы, обе компоненты которых — стандартные базисные элементы с точностью до умножения на  $\pm 1$ , то есть элементы вида  $(e_i, \pm e_j)$ . Де Маре [34–36] уже изучал ранее делители нуля такого вида в алгебрах главной последовательности большой размерности ( $n = 4, 5, 6$ ). В случае седенионов, он получил описание структур, которые образуют эти делители нуля в графе ортогональности [35, стр. 3], и их таблицу умножения [36, стр. 8]. Указанные структуры также уже встречались в работе Брауна [17, теорема 8.1].

В работе Кавагаса [18], посвящённой классификации подлуп в лупе стандартных базисных седенионов, найдены семь изоморфных копий лупы квазиоктонионов и показано, что к ним сводятся все делители нуля, которые ранее перечислил де Маре.

В диссертационной работе рассматривается граф ортогональности на парах базисных элементов для произвольной вещественной алгебры Кэли-Диксона. Устанавливаются критерии ортогональности таких делителей нуля и описывается индуктивный алгоритм построения этого графа, что позволяет обобщить результаты Брауна и де Маре. Кроме того, в диссертации решена проблема изоморфизма для этих графов, то есть показано, что две вещественные алгебры Кэли-Диксона размерности не менее 16 изоморфны, если и только если изоморфны их графы ортогональности на парах базисных элементов. Ключевым вспомогательным результатом при доказательстве этого утверждения является критерий изоморфности алгебр Кэли-Диксона, полученный в работе Эакина и Сасайе [23].

## Цели и задачи работы

- Исследовать отношения коммутативности и ортогональности, а также пары делителей нуля в вещественных алгебрах Кэли-Диксона.
- Изучить общие закономерности и структуры в графах отношений вещественных алгебр Кэли-Диксона.
- Описать графы коммутативности, ортогональности и делителей нуля вещественных алгебр Кэли-Диксона малых размерностей.
- Решить проблему изоморфизма для графов ортогональности вещественных алгебр Кэли-Диксона.

## Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие результаты диссертации:

- Свойства подграфов, образованных в графах ортогональности и делителей нуля произвольной вещественной алгебры Кэли-Диксона такими делителями нуля, что нормы компонент каждого элемента отличны от нуля, а компоненты разных элементов строго альтернируют между собой.
- Явный вид аннуляторов, ортогонализаторов и централизаторов для дважды альтернативных делителей нуля в вещественных алгебрах Кэли-Диксона, нормы компонент которых отличны от нуля.
- Структура и числовые характеристики, в частности, диаметры и клики, графов коммутативности, ортогональности и делителей нуля для вещественных алгебр Кэли-Диксона малых размерностей: контроктонионов, контрседенионов и седенионов.
- Критерий ортогональности чисто мнимых делителей нуля, являющихся парами базисных элементов. Решение проблемы изоморфизма для графов ортогональности вещественных алгебр Кэли-Диксона на парах базисных элементов.

## Объект и предмет исследования

Объектом исследования являются отношения между элементами неассоциативных алгебр и индуцированные ими графы.

Предметом исследования являются графы коммутативности, ортогональности и делителей нуля вещественных алгебр Кэли-Диксона.

## Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми. Среди них:

- Описаны структуры, образованные в графах ортогональности и делителей нуля произвольной вещественной алгебры Кэли-Диксона такими делителями нуля, компоненты которых удовлетворяют дополнительным условиям на норму и альтернативность. Получен явный вид таблицы умножения вершин двойного шестиугольника в графе ортогональности произвольной алгебры главной последовательности.
- Полностью описаны компоненты связности графа ортогональности алгебры седенионов. Доказано, что в графе коммутативности седенионов делители нуля образуют компоненту связности, диаметр которой заключён между 3 и 4.
- Описаны свойства таких дважды альтернативных делителей нуля в вещественных алгебрах Кэли-Диксона, компоненты которых имеют ненулевую норму. Получен явный вид их аннуляторов и ортогонализатора, соотношение между централизатором и ортогонализатором.

- Установлена взаимосвязь между графами коммутативности и графами ортогональности контр-алгебр Кэли-Диксона малых размерностей, описаны графы ортогональности и делителей нуля этих алгебр в терминах диаметров и клик.
- Решена проблема изоморфизма для графов ортогональности вещественных алгебр Кэли-Диксона на парах базисных элементов.

## **Методы исследования**

В исследовании используются классические методы линейной и общей алгебры, комбинаторики и теории графов. Предложенные в диссертации методы позволяют доказывать некоторые известные результаты неассоциативной алгебры в большей общности и в качестве частных проявлений объемлющей их теории.

## **Теоретическая и практическая значимость**

Работа имеет теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, представляют интерес для специалистов в абстрактной и линейной алгебре, комбинаторике, теории графов и их приложениях.

## **Степень достоверности и апробация результатов**

Соискатель имеет 12 опубликованных работ, в том числе 6 статей по теме диссертации [47–52], которые опубликованы в научных журналах, входящих в базы данных Scopus, Web of Science и RSCI.

Автор неоднократно выступала с докладами по результатам работы на спецсеминарах «Кольца, модули и матрицы» и «Избранные вопросы алгебры», а также на Научно-исследовательском семинаре кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова. Кроме того, автором были сделаны доклады по теме диссертации на следующих конференциях:

- XXV Международная научная конференция «Ломоносов – 2018», МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 2018 (устный доклад, отмечен грамотой).
- Международная алгебраическая конференция, посвященная 110-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша, МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 2018 (устный доклад, совместно с Александром Эмилевичем Гутерманом).
- XXVI Международная научная конференция «Ломоносов – 2019», МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 2019 (устный доклад, отмечен грамотой).
- 8th European Congress of Mathematics, Порторож, Словения, 2021 (дистанционный устный доклад).

- Конференция международных математических центров мирового уровня, Сочи, Россия, 2021 (два устных доклада и постерный доклад).
- CIMPA school «Non-associative Algebras and their Applications», Антананариву, Мадагаскар, 2021 (дистанционный пленарный доклад).
- The Fifth Workshop «New Trends in Quaternions and Octonions», Вила-Реал, Португалия, 2021 (дистанционный устный доклад).
- XXIX Международная научная конференция «Ломоносов – 2022», МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 2022 (устный доклад, отмечен грамотой).

## Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и списка публикаций автора. Общий объём работы составляет 135 страниц. Список литературы включает 58 наименований.

## Содержание работы

**Введение** посвящено актуальности рассматриваемой темы, краткой истории вопроса, изложению цели работы, методов и основных результатов.

В **главе 1** собраны основные понятия теории неассоциативных алгебр и теории графов отношений, а также приводятся некоторые известные результаты этих теорий.

В разделе 1.1 мы вводим основные определения и обозначения, используемые на протяжении всего текста. Ниже перечислены наиболее важные из них.

Пусть  $\mathcal{A}$  — некоторая алгебра над произвольным полем  $\mathbb{F}$ . Множество делителей нуля в  $\mathcal{A}$  (левых, правых и двусторонних) мы будем обозначать как  $Z(\mathcal{A})$ , множество двусторонних делителей нуля в  $\mathcal{A}$  — как  $Z_{LR}(\mathcal{A})$ , а центр  $\mathcal{A}$  — как  $C_{\mathcal{A}}$ .

**Определение.** Пусть  $a$  — произвольный элемент алгебры  $\mathcal{A}$ .

- *Централизатором*  $a$  называется  $C_{\mathcal{A}}(a) = \{b \in \mathcal{A} \mid ab = ba\}$  — множество элементов  $\mathcal{A}$ , коммутирующих с  $a$ .
- *Ортогонализатором*  $a$  называется  $O_{\mathcal{A}}(a) = \{b \in \mathcal{A} \mid ab = ba = 0\}$  — множество элементов  $\mathcal{A}$ , ортогональных к  $a$ .
- *Левым аннулятором*  $a$  называется множество  $l. \text{Ann}_{\mathcal{A}}(a) = \{b \in \mathcal{A} \mid ba = 0\}$ .
- Аналогично *правым аннулятором*  $a$  называется  $r. \text{Ann}_{\mathcal{A}}(a) = \{b \in \mathcal{A} \mid ab = 0\}$ .

Для любого подмножества  $X$  линейного пространства  $W$  над  $\mathbb{F}$  обозначим множество прямых, проходящих через элементы  $X$ , как  $\mathbb{P}(X) = \{[x] = \mathbb{F}x \mid x \in X \setminus \{0\}\}$ . Тогда графы отношений, изучению которых посвящена данная работа, определяются следующим образом.

**Определение (1.1.2).** Пусть  $\mathcal{A}$  — произвольная алгебра.

- *Граф коммутативности*  $\Gamma_C(\mathcal{A})$ : вершины — элементы  $\mathbb{P}(\mathcal{A}/C_{\mathcal{A}})$ , причём различные вершины  $[a + C_{\mathcal{A}}]$  и  $[b + C_{\mathcal{A}}]$  соединены ребром, если и только если  $ab = ba$ .
- *Граф ортогональности*  $\Gamma_O(\mathcal{A})$ : вершины — элементы  $\mathbb{P}(Z_{LR}(\mathcal{A}))$ , причём различные вершины  $[a]$  и  $[b]$  соединены ребром, если и только если  $ab = ba = 0$ .
- *Ориентированный граф делителей нуля*  $\Gamma_Z(\mathcal{A})$ : вершины — элементы  $\mathbb{P}(Z(\mathcal{A}))$ , причём различные вершины  $[a]$  и  $[b]$  соединены направленным ребром от  $[a]$  к  $[b]$ , если и только если  $ab = 0$ .

Мы подробно описываем процедуру Кэли-Диксона в разделе 1.2 и напоминаем некоторые свойства вещественных алгебр Кэли-Диксона в разделе 1.3. Отметим, что для любого элемента  $a$  вещественной алгебры Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_n$  определены *норма*  $n(a)$ , *вещественная часть*  $\Re(a)$  и *мнимая часть*  $\Im(a)$ , причём  $a = \Re(a) + \Im(a)$ . Элемент  $a$  называется *чисто мнимым*, если и только если  $\Re(a) = 0$ . Согласно [44, стр. 438], при  $n \geq 2$  имеет место равенство  $C_{\mathcal{A}_n} = \mathbb{R}$ , поэтому  $\Gamma_C(\mathcal{A}_n)$  изоморфен графу, вершинами которого являются элементы  $\mathbb{P}(\mathcal{A}'_n)$ , где  $\mathcal{A}'_n = \{a \in \mathcal{A}_n \mid \Re(a) = 0\}$  — множество чисто мнимых элементов  $\mathcal{A}_n$ .

После этого в разделе 1.4 мы приводим явные определения вещественных алгебр Кэли-Диксона малых размерностей: кватернионов, октонионов и седенионов, а также контркомплексных чисел, контркватернионов, контроктонионов и контрседенионов.

В **главе 2** рассматриваются дважды альтернативные делители нуля в произвольных вещественных алгебрах Кэли-Диксона. Целью данной главы является решение следующих двух задач:

- Описание структур, которые образуют в графе делителей нуля произвольной вещественной алгебры Кэли-Диксона такие элементы, компоненты которых удовлетворяют дополнительным условиям на норму и альтернативность.
- Изучение свойств таких дважды альтернативных делителей нуля, компоненты которых имеют ненулевую норму.

В разделе 2.1 получено обобщение некоторых известных результатов о подалгебрах в алгебрах главной последовательности на случай произвольных вещественных алгебр Кэли-Диксона. А именно, в леммах 2.1.3, 2.1.6, 2.1.7 и 2.1.9 и следствии 2.1.8 мы устанавливаем достаточное условие того, что два или три элемента порождают ассоциативную или альтернативную подалгебру. Основным методом доказательства этих утверждений является построение гомоморфизма из  $\mathcal{A}_2$  или  $\mathcal{A}_3$  в рассматриваемую подалгебру. Однако, в отличие от случая алгебр главной последовательности, построенный гомоморфизм может иметь нетривиальное ядро. Эти результаты являются вспомогательными и активно используются на протяжении всей диссертации.

В разделе 2.2 рассматриваются такие делители нуля  $(a, b) \in \mathcal{A}_{n+1}$ , которые удовлетворяют условию (\*):

$$\begin{cases} (n(a))^2 = (n(b))^2 \neq 0; \\ \chi = \frac{n(a)}{\gamma_n n(b)} = \frac{\gamma_n n(b)}{n(a)} = \pm 1. \end{cases} \quad (*)$$

Ключевую роль при их изучении играет следующая лемма:

**Лемма (2.2.1).** Пусть  $(a, b), (c, d) \in \mathcal{A}_{n+1}$ , и элементы  $c, d \in \mathcal{A}_n$  (не строго) альтернируют с элементами  $a, b \in \mathcal{A}_n$ . Предположим также, что  $n(c) - \chi \gamma_n n(d) = \chi n(c) - \gamma_n n(d) = 0$  для некоторого  $\chi \in \mathbb{R}$ . Тогда

- (1) если  $(a, b)(c, d) = 0$ , то  $(c, d)(\overline{ac}, -\chi da) = 0$ ;
- (2) если  $(c, d)(a, b) = 0$ , то  $(\overline{ca}, -\chi d\overline{a})(c, d) = 0$ .

Основным результатом этого раздела является следующая теорема, показывающая, что такие делители нуля образуют шестиугольные структуры в графе делителей нуля произвольной вещественной алгебры Кэли-Диксона:

**Теорема (2.2.12).** Пусть элементы  $a, b \in \mathcal{A}_n$  строго альтернируют с элементами  $c, d \in \mathcal{A}_n$ , и  $(a, b)(c, d) = 0$  в  $\mathcal{A}_{n+1}$ . Тогда

- (1) Элементы  $ac, da$  строго альтернируют с элементами  $a, b, c, d$ .
- (2) Пусть  $n(a) \neq 0$  или  $n(b) \neq 0$ , а также  $n(c) \neq 0$  или  $n(d) \neq 0$ . Тогда  $(a, b), (c, d)$  и  $(\overline{ac}, -\chi da)$  удовлетворяют условию (\*) с одним и тем же значением  $\chi$ .
- (3) В этом случае существуют следующие циклы длины 6 в  $\Gamma_Z(\mathcal{A}_{n+1})$ :

$$\begin{aligned} & (a, b) \rightarrow (c, d) \rightarrow (\overline{ac}, -\chi da) \rightarrow (a, -b) \rightarrow (c, -d) \rightarrow (\overline{ac}, \chi da) \rightarrow (a, b), \\ & (\overline{a}, \overline{b}) \rightarrow (\gamma_n \overline{d}, \overline{c}) \rightarrow (-\chi \gamma_n da, \overline{ac}) \rightarrow (\overline{a}, -\overline{b}) \rightarrow (\gamma_n \overline{d}, -\overline{c}) \rightarrow (\chi \gamma_n da, \overline{ac}) \rightarrow (\overline{a}, \overline{b}), \\ & (\gamma_n b, a) \rightarrow (\overline{c}, \overline{d}) \rightarrow (-\chi \gamma_n \overline{da}, ac) \rightarrow (\gamma_n b, -a) \rightarrow (\overline{c}, -\overline{d}) \rightarrow (\chi \gamma_n \overline{da}, ac) \rightarrow (\gamma_n b, a), \\ & (\gamma_n \overline{b}, \overline{a}) \rightarrow (\gamma_n d, c) \rightarrow (ac, -\chi \overline{da}) \rightarrow (\gamma_n \overline{b}, -\overline{a}) \rightarrow (\gamma_n d, -c) \rightarrow (ac, \chi \overline{da}) \rightarrow (\gamma_n \overline{b}, \overline{a}). \end{aligned}$$

- (4) Имеют место равенства  $(\overline{ac}, -\chi da) = -(\gamma_n \overline{bd}, -\chi b\overline{c})$  и  $(\overline{ac}, \chi da) = -(\gamma_n \overline{bd}, \chi b\overline{c})$ .

Раздел 2.3 начинается с описания взаимосвязи между графом ортогональности и графом делителей нуля произвольной вещественной алгебры Кэли-Диксона. Так, согласно следствию 2.3.3, в случае вещественных алгебр Кэли-Диксона все делители нуля оказываются двусторонними делителями нуля, поэтому множества вершин этих графов совпадают. Предложение 2.3.4 описывает те рёбра, которые являются общими у этих графов. Из него следует, что в контексте графов ортогональности наибольший интерес представляют чисто мнимые делители нуля, в связи с чем удобно ввести следующее определение:

**Определение (2.3.5).** Граф  $\Gamma'_O(\mathcal{A}_n)$  — подграф  $\Gamma_O(\mathcal{A}_n)$  на множестве вершин  $\mathbb{P}(Z'(\mathcal{A}_n))$ , где  $Z'(\mathcal{A}_n) = \{x \in Z(\mathcal{A}_n) \mid \Re(x) = 0\}$  — множество чисто мнимых делителей нуля в  $\mathcal{A}_n$ .

Затем вводится определение дважды альтернативных элементов в произвольной вещественной алгебре Кэли-Диксона.

**Определение (2.3.6).** Множество *дважды альтернативных элементов*  $\mathcal{A}_{n+1}$  определяется как  $DA(\mathcal{A}_{n+1}) = \{(a, b) \in \mathcal{A}_{n+1} \mid \text{оба элемента } a \text{ и } b \text{ являются альтернативными в } \mathcal{A}_n\}$ .

В леммах 2.3.8 и 2.3.9 описывается явный вид аннуляторов и ортогонализаторов дважды альтернативных делителей нуля. Эти леммы играют особо важную роль в главах 4 и 5.

**Лемма (2.3.8).** Пусть  $(a, b) \in DA(\mathcal{A}_{n+1})$  таково, что  $n(a) \neq 0$ , и пусть  $\chi = \gamma_n \frac{n(b)}{n(a)}$ . В частности, это выполнено, если  $(a, b)$  удовлетворяет условию (\*). Тогда

$$\begin{aligned} l. \text{ Ann}_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, b)) &= \left\{ \left( c, -\frac{(bc)a}{n(a)} \right) \mid b(ca) = \chi(bc)a \right\}, \\ r. \text{ Ann}_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, b)) &= \left\{ \left( c, -\frac{(bc)\bar{a}}{n(a)} \right) \mid (ac)\bar{b} = \chi a(c\bar{b}) \right\}. \end{aligned}$$

**Лемма (2.3.9).** Пусть  $(a, b) \in DA(\mathcal{A}_{n+1})$  — такой чисто мнимый элемент, что  $n(a) \neq 0$ , и пусть  $\chi = \gamma_n \frac{n(b)}{n(a)} \neq 0$ . В частности, это выполнено, если  $(a, b)$  удовлетворяет условию (\*). Тогда

$$\begin{aligned} O_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, b)) &= \left\{ \left( c, -\frac{(bc)a}{n(a)} \right) \mid \Re(c) = 0, b(ca) = \chi(bc)a \right\} = \\ &= \left\{ \left( \frac{(a\bar{d})b}{n(b)}, d \right) \mid \langle d, ba \rangle = 0, (a\bar{d})b = \chi a(d\bar{b}) \right\}. \end{aligned}$$

В разделе 2.4 изучается взаимосвязь между централизатором и ортогонализатором произвольного элемента вещественной алгебры Кэли-Диксона. Лемма 2.4.1 показывает, что мнимая часть централизатора всегда совпадает с ортогонализатором с точностью до сложения с не более чем одномерным подпространством  $V$ . Лемма 2.4.2 устанавливает явный вид этого подпространства  $V$  в некоторых частных случаях.

**Лемма (2.4.1).** Пусть  $x \in \mathcal{A}_n$ ,  $x \neq 0$ ,  $\Re(x) = 0$ . Тогда  $C_{\mathcal{A}_n}(x) = \mathbb{R} \oplus O_{\mathcal{A}_n}(x) \oplus V$ , где  $\dim(V) \leq 1$ .

**Лемма (2.4.2).** Пусть  $x \in \mathcal{A}_n \setminus \{0\}$ ,  $\Re(x) = 0$ . Тогда

(1) если  $n(x) = 0$  и  $n \leq 3$ , то  $C_{\mathcal{A}_n}(x) = \mathbb{R} \oplus O_{\mathcal{A}_n}(x)$ ;

(2) если  $n(x) \neq 0$ , то  $C_{\mathcal{A}_n}(x) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus O_{\mathcal{A}_n}(x)$ .

В частности, если  $\mathcal{A}_n = \mathcal{M}_n$  — алгебра главной последовательности, то любой элемент  $x \in \mathcal{M}_n \setminus \{0\}$ ,  $\Re(x) = 0$ , всегда удовлетворяет условию леммы 2.4.2(2).

Как показывают предложение 2.4.6 и пример 2.4.7, дополнительное условие на  $n$  в пункте (1) леммы 2.4.2 является существенным. Однако, согласно теореме 2.4.9, лемма 2.4.2(1) может быть обобщена на случай дважды альтернативных делителей нуля, удовлетворяющих условию (\*) с  $\chi = 1$ . Если же  $\chi = \gamma_n \frac{n(b)}{n(a)} \neq 1$ , то норма такого элемента отлична от нуля,

поэтому применима лемма 2.4.2(2). Таким образом, для дважды альтернативных делителей нуля, удовлетворяющих условию (\*), мы также можем получить явный вид централизатора.

**Теорема (2.4.9).** Пусть  $(a, b) \in DA(\mathcal{A}_{n+1})$  — чисто мнимый элемент, удовлетворяющий условию (\*) с  $\chi = 1$ . Тогда  $C_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, b)) = \mathbb{R} \oplus O_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, b))$ .

В главе 3 результаты предыдущей главы применяются для описания графов ортогональности алгебр главной последовательности, в частности, алгебры седенионов. Для этого используется [38, следствие 1.6], согласно которому в алгебрах главной последовательности любая пара делителей нуля является также парой ортогональных элементов.

В разделе 3.1 показано, что в случае алгебр главной последовательности ориентированные шестиугольники в графе делителей нуля из теоремы 2.2.12 могут быть продолжены до неориентированного двойного шестиугольника в графе ортогональности. Кроме того, согласно теореме 3.1.11, таблица умножения вершин двойного шестиугольника имеет блочную структуру. Основным результатом данного раздела является теорема 3.1.14.

**Теорема (3.1.14).** Пусть  $a, b \in \mathcal{M}_n$  строго альтернируют с элементами  $c, d \in \mathcal{M}_n$ ,  $(a, b), (c, d) \in Z(\mathcal{M}_{n+1})$ ,  $(a, b)(c, d) = 0$ . По лемме 3.1.3, без ограничения общности можно считать, что  $n(a) = n(b) = n(c) = n(d) = 1$ . Тогда

- (1) Элементы  $ac, ad$  строго альтернируют с элементами  $a, b, c, d$ .
- (2) Элементы  $e_0, a, b, c, d, ac, ad$  образуют ортонормированную систему относительно скалярного произведения  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .
- (3) Существует подграф  $\Gamma_O(\mathcal{M}_{n+1})$ , изображённый на рисунке 3.1 и называемый *двойным шестиугольником*.
- (4) Все элементы в вершинах двойного шестиугольника линейно независимы.
- (5) В обозначениях теоремы 3.1.11, вершины двойного шестиугольника удовлетворяют таблице умножения 3.2.

Раздел 3.2 посвящён изучению графов ортогональности и коммутативности алгебры седенионов  $\mathbb{S}$ .

Хорошо известно, что алгебра октонионов альтернативна, см. [7, стр. 10], и любой седенион может быть представлен в виде пары октонионов. Следовательно, в случае седенионов любой делитель нуля дважды альтернативен, поэтому мы можем применить теорему 3.1.14 и получить, что любая пара делителей нуля порождает двойной шестиугольник в  $\Gamma_O(\mathbb{S})$ .

В подразделе 3.2.1 приводятся известные результаты о свойствах делителей нуля алгебры седенионов. Как уже было сказано ранее, в случае алгебры седенионов из  $(a, b)(c, d) = 0$  следует  $n(c)ab = -n(a)cd$ . Это свойство седенионов особенно важно и отличает их от остальных алгебр главной последовательности. В частности, благодаря ему множество вершин двойного шестиугольника можно дополнить до базиса, имеющего удобную таблицу умножения, см. теорему 3.2.18 подраздела 3.2.4.

В подразделе 3.2.2 изучены компоненты связности  $\Gamma_O(\mathbb{S})$ . Ясно, что для любых двух делителей нуля  $(a, b)$  и  $(c, d)$ , принадлежащих одной компоненте связности, элементы  $ab$  и  $cd$  линейно зависимы. Из [38, стр. 25-27] также следует, что  $ab$  и  $cd$  чисто мнимые. Значит, каждой компоненте связности  $\Gamma_O(\mathbb{S})$  можно поставить в соответствие некоторую прямую из мнимой части алгебры октонионов. По теореме 3.2.12, это соответствие биективно. Диаметр каждой компоненты связности равен 3, см. теорему 3.2.10.

В подразделе 3.2.3 описывается подграф  $\Gamma_O(\mathbb{S})$  на множестве тех вершин, обе компоненты которых с точностью до знака являются стандартными базисными элементами, то есть имеют вид  $(e_i, \pm e_j)$ .

Наконец, в подразделе 3.2.5 мы рассматриваем граф коммутативности  $\mathbb{S}$ . В предложениях 3.2.23 и 3.2.24 показано, что все делители нуля содержатся в одной компоненте связности  $\Gamma_C(\mathbb{S})$ , и значение её диаметра заключено между 3 и 4.

Объединение полученных в разделе 3.2 результатов приводит нас к следующей теореме.

**Теорема (3.2.26).**

- (1)  $\Gamma_O(\mathbb{S})$  не содержит циклов нечётной длины.
- (2) Пусть  $(a, b)(c, d) = 0$  в  $\mathbb{S}$ ,  $n(a) = n(b) = n(c) = n(d) = 1$ . Тогда существует подграф  $\Gamma_O(\mathbb{S})$ , изображённый на рисунке 3.1 и называемый двойным шестиугольником. В обозначениях теоремы 3.2.18, вершины двойного шестиугольника удовлетворяют таблице умножения 3.4.
- (3) Множество вершин компоненты связности графа  $\Gamma_O(\mathbb{S})$ , содержащей  $(a, b)$ , совпадает с  $\mathbb{P}(\Lambda_{(a,b)})$ , где  $\Lambda_{(a,b)}$  — это множество всех нетривиальных линейных комбинаций элементов, стоящих в углах двойного шестиугольника через один.
- (4) Диаметр каждой компоненты связности  $\Gamma_O(\mathbb{S})$  равен 3.
- (5) Пусть  $\mathcal{C}(\Gamma_O(\mathbb{S}))$  обозначает множество всех компонент связности графа  $\Gamma_O(\mathbb{S})$ . Тогда существует корректно определённая биекция  $\psi : \mathcal{C}(\Gamma_O(\mathbb{S})) \rightarrow \mathbb{P}(\mathfrak{Im}(\mathbb{O}))$ , действующая следующим образом. Если  $C \in \mathcal{C}(\Gamma_O(\mathbb{S}))$  и  $(a, b) \in C$ , то  $\psi(C) = \text{Lin}(ab)$ .
- (6) Пусть  $\varphi \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O})$  порождает  $\widehat{\varphi} \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{S})$  по формуле  $\widehat{\varphi}((x, y)) = (\varphi(x), \varphi(y))$  для всех  $(x, y) \in \mathbb{S}$ . Тогда  $\widehat{\varphi}$  действует естественным образом на  $\mathcal{C}(\Gamma_O(\mathbb{S}))$ , причём  $\psi \circ \widehat{\varphi} = \varphi \circ \psi$ .
- (7) Пусть  $\Gamma_C^Z(\mathbb{S})$  — подграф  $\Gamma_C(\mathbb{S})$  на множестве вершин  $\mathbb{P}(Z(\mathbb{S}))$ . Тогда  $\Gamma_C^Z(\mathbb{S})$  — компонента связности  $\Gamma_C(\mathbb{S})$ , причём значение её диаметра заключено между 3 и 4.

В главе 4 мы описываем графы коммутативности, ортогональности и делителей нуля для контр-алгебр Кэли-Диксона малых размерностей.

В разделе 4.1 мы применяем полученные в разделе 2.3 результаты для изучения дважды альтернативных делителей нуля в контр-алгебрах произвольной размерности. Важную роль здесь играет лемма 4.1.1, согласно которой дважды альтернативные элементы в контр-алгебрах являются делителями нуля тогда и только тогда, когда они имеют нулевую норму.

**Лемма (4.1.1).** Пусть  $(a, b) \in DA(\mathcal{H}_n) \setminus \{0\}$ . Тогда  $(a, b) \in Z(\mathcal{H}_n)$ , если и только если  $n((a, b)) = n(a) - n(b) = 0$ .

Пример 4.1.6 показывает, что в лемме 4.1.1 алгебру  $\mathcal{H}_n$  нельзя заменить произвольной алгеброй Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_n$  с условием  $\gamma_{n-1} = 1$ . Кроме того, он даёт пример дважды альтернативного делителя нуля, не удовлетворяющего условию (\*).

Затем с помощью теоремы 2.4.9 устанавливается взаимосвязь между графами коммутативности и графами ортогональности контр-алгебр малых размерностей.

**Теорема (4.1.10).** Пусть  $2 \leq n \leq 4$ . Обозначим как  $\Gamma_C^Z(\mathcal{H}_n)$  подграф  $\Gamma_C(\mathcal{H}_n)$  на множестве вершин  $\mathbb{P}(Z'(\mathcal{H}_n))$ , где  $Z'(\mathcal{H}_n) = \{x \in \mathcal{H}_n \setminus \{0\} \mid \Re(x) = n(x) = 0\}$ . Тогда  $\Gamma_C^Z(\mathcal{H}_n)$  изоморфен  $\Gamma'_O(\mathcal{H}_n)$ .

В разделах 4.2–4.5 описываются графы ортогональности и графы делителей нуля контр-алгебр малых размерностей: контркомплексных чисел, контркватернионов, контроктонионов и контрсденионов. В этих алгебрах все элементы являются дважды альтернативными, а потому применимы результаты раздела 4.1. Наибольшее внимание уделяется компонентам связности рассматриваемых графов и их диаметрам, а также максимальным кликам.

Раздел 4.2 содержит элементарные сведения о графах отношений алгебры контркомплексных чисел. В разделе 4.3, посвящённом графам отношений алгебры контркватернионов, мы приводим свои доказательства некоторых известных результатов, чтобы продемонстрировать аналогию между контркватернионами и контроктонионами. В следствии 4.4.11 раздела 4.4 мы получаем аналог вещественной жордановой нормальной формы для контроктонионов, что позволяет описать их графы ортогональности и делителей нуля. И наконец, в разделе 4.5 мы подробно описываем графы ортогональности и делителей нуля алгебры контрсденионов.

**Теорема (4.2.1).**

- (1)  $\Gamma_O(\hat{\mathbb{C}})$  — полный граф на двух вершинах  $[1 + \ell]$  и  $[1 - \ell]$ .  $\Gamma_Z(\hat{\mathbb{C}})$  получается из  $\Gamma_O(\hat{\mathbb{C}})$  заменой неориентированного ребра на пару ориентированных рёбер.
- (2) Диаметр  $\Gamma_Z(\hat{\mathbb{H}})$  равен 2. Граф  $\Gamma'_O(\hat{\mathbb{H}})$  состоит из изолированных вершин вида  $[a]$ , где  $n(a) = \text{tr}(a) = 0$ .
- (3) Диаметр  $\Gamma_Z(\hat{\mathbb{O}})$  равен 2, диаметр  $\Gamma'_O(\hat{\mathbb{O}})$  равен 3.
- (4) Диаметр  $\Gamma_Z(\hat{\mathbb{S}})$  равен 4, диаметр  $\Gamma'_O(\hat{\mathbb{S}})$  равен 5.

**Глава 5** посвящена решению проблемы изоморфизма для графов ортогональности на парах базисных элементов произвольных вещественных алгебр Кэли-Диксона.

**Определение (5.1.4).** Пусть  $\mathcal{E}_n = \{e_0^{(n)}, e_1^{(n)}, \dots, e_{2^n-1}^{(n)}\}$  обозначает множество стандартных базисных элементов, а  $\mathcal{E}'_n = \mathcal{E}_n \setminus \{e_0^{(n)}\}$  — множество чисто мнимых стандартных базисных элементов в  $\mathcal{A}_n$ . Рассмотрим следующее подмножество в  $Z(\mathcal{A}_{n+1})$ :

$$Z'_e(\mathcal{A}_{n+1}) = \left\{ \left( e_i^{(n)}, \pm e_j^{(n)} \right) \in Z(\mathcal{A}_{n+1}) \mid i \neq 0 \right\} = (\mathcal{E}'_n \times (\pm \mathcal{E}_n)) \cap Z(\mathcal{A}_{n+1}).$$

Тогда  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  обозначает подграф  $\Gamma'_O(\mathcal{A}_{n+1})$  на множестве вершин  $\mathbb{P}(Z'_e(\mathcal{A}_{n+1}))$ .

В разделе 5.1 изучаются чисто мнимые делители нуля, являющиеся парами базисных элементов, то есть элементы из  $Z'_e(\mathcal{A}_{n+1})$ . Теорема 5.1.20 устанавливает критерий того, что пара базисных элементов является делителем нуля, а в теореме 5.1.21 описаны условия, при которых два элемента из  $Z'_e(\mathcal{A}_{n+1})$  ортогональны. Ключевым утверждением для классификации таких делителей нуля является лемма 5.1.5 — ослабленный вариант равенства произведения компонент у пары делителей нуля в алгебре седенионов.

**Лемма (5.1.5).** Пусть  $(a, b), (c, d) \in Z_e(\mathcal{A}_{n+1})$ ,  $(a, b)(c, d) = 0$ . Тогда  $ab = \pm cd$ .

С помощью этих результатов в теореме 5.2.6 раздела 5.2 получен алгоритм индуктивного построения графа  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  для произвольной вещественной алгебры Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_{n+1}$ . Следствие 5.2.9 позволяет установить число компонент связности графа  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  при  $n \geq 3$ , а также их найти мощности и диаметры.

**Следствие (5.2.9).** Если  $n \geq 3$ , то  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  содержит  $2^n$  компонент связности при  $\gamma_n = 1$  и  $2^n - 1$  компоненту связности при  $\gamma_n = -1$ . Пусть  $C$  — произвольная компонента связности графа  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$ . Тогда диаметр  $C$  равен 3. Кроме того, мы можем найти число вершин в  $C$  по формуле

$$|V(C)| = \begin{cases} 2^{n+1} - 2, & \chi(C) = 1; \\ 2^{n+1} - 4, & \chi(C) = -1. \end{cases}$$

Раздел 5.3 посвящён решению обратной задачи, а именно, по графу  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  требуется восстановить параметры Кэли-Диксона алгебры  $\mathcal{A}_{n+1}$ . Её решение разбивается на следующие шаги:

- Если  $n \geq 3$ , то следствие 5.2.9 сразу позволяет получить значения  $n$  и  $\gamma_n$ .
- Если  $n = 3$ , то требуемое утверждение вытекает из следствия 5.3.7.
- Если  $n \geq 4$ , то, по лемме 5.3.2, можно также найти  $\gamma_{n-1}$ .
- Затем можно воспользоваться теоремой 5.3.12 и по графу  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  построить графы  $\Gamma_e(\mathcal{A}_n^\circ)$  и  $\Gamma_e(\mathcal{A}_n^\bullet)$ , где первые  $n - 1$  параметров у алгебр  $\mathcal{A}_n^\circ$  и  $\mathcal{A}_n^\bullet$  те же, что и у алгебры  $\mathcal{A}_{n+1}$ , а их последние параметры равны  $\gamma_n$  и  $\gamma_{n-1}\gamma_n$ , соответственно.
- Продолжая процесс рекурсивно, мы получаем импликацию слева направо в теореме 5.3.16. Импликация справа налево доказывается с помощью критерия изоморфности алгебр Кэли-Диксона, полученного Эакином и Сасайе [23, следствие 2.6].

**Теорема (5.3.16).** Пусть  $n, m \geq 3$ ,  $\gamma = \{\gamma_0, \dots, \gamma_n\}$  и  $\lambda = \{\lambda_0, \dots, \lambda_m\}$  — две последовательности параметров. Тогда графы  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1}^\gamma)$  и  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{m+1}^\lambda)$  изоморфны, если и только если алгебры  $\mathcal{A}_{n+1}^\gamma$  и  $\mathcal{A}_{m+1}^\lambda$  изоморфны.

В подразделе 5.3.2 показано, что при  $n, m \leq 2$  импликация справа налево в теореме 5.3.16 неверна. Это связано с тем, что при  $n \leq 2$  изоморфизм между  $\mathcal{A}_{n+1}^\gamma$  и  $\mathcal{A}_{n+1}^\lambda$  может переводить базисные элементы из первой половины во вторую половину, и наоборот. В разделе 5.4 предложен другой подход к определению графа ортогональности на парах базисных элементов, который может позволить решить эту проблему.

## Благодарность

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю доктору физико-математических наук профессору Александру Эмилевичу Гутерману за постановку задач, неоценимую поддержку и постоянное внимание к работе, а также всем сотрудникам кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова за тёплую доброжелательную атмосферу.

# Глава 1

## Основные определения и обозначения

В этой главе мы вводим основные определения и обозначения, которые будут использоваться на протяжении всего текста. В разделе 1.1 мы даём определения графов отношений, изучению которых посвящена данная работа. Затем мы подробно описываем процедуру Кэли-Диксона в разделе 1.2 и напоминаем некоторые свойства вещественных алгебр Кэли-Диксона в разделе 1.3. Раздел 1.4 посвящён вещественным алгебрам Кэли-Диксона малых размерностей: мы приводим их явные определения и перечисляем основные свойства.

Доказательство леммы 1.3.8 опубликовано в статье [47].

### 1.1 Алгебраические отношения и их графы

Пусть  $\mathbb{F}$  — произвольное поле, и  $(\mathcal{A}, +, \cdot)$  — алгебра над полем  $\mathbb{F}$ , возможно, некоммутативная или неассоциативная. Будем говорить, что элементы  $a, b \in \mathcal{A}$  *антикоммутируют*, если  $ab + ba = 0$ , и элементы  $a, b$  *ортогональны*, если  $ab = ba = 0$ . Множество всех делителей нуля в  $\mathcal{A}$  (левых, правых и двусторонних) мы будем обозначать как  $Z(\mathcal{A})$ , множество левых (соответственно, правых) делителей нуля в  $\mathcal{A}$  — как  $Z_L(\mathcal{A})$  (соответственно,  $Z_R(\mathcal{A})$ ), множество двусторонних делителей нуля в  $\mathcal{A}$  — как  $Z_{LR}(\mathcal{A})$ , а центр  $\mathcal{A}$  — как  $C_{\mathcal{A}}$ .

Обозначим множество всех автоморфизмов алгебры  $\mathcal{A}$  над полем  $\mathbb{F}$  как  $\text{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ . Легко видеть, что каждый автоморфизм сохраняет пары коммутирующих элементов, пары ортогональных элементов и пары делителей нуля.

**Определение 1.1.1.** Пусть  $a$  — произвольный элемент алгебры  $\mathcal{A}$ .

- *Централизатором*  $a$  называется  $C_{\mathcal{A}}(a) = \{b \in \mathcal{A} \mid ab = ba\}$  — множество элементов  $\mathcal{A}$ , коммутирующих с  $a$ .
- *Антицентрализатором*  $a$  называется  $\text{Anc}_{\mathcal{A}}(a) = \{b \in \mathcal{A} \mid ab + ba = 0\}$  — множество элементов  $\mathcal{A}$ , антикоммутирующих с  $a$ .
- *Ортогонализатором*  $a$  называется  $O_{\mathcal{A}}(a) = \{b \in \mathcal{A} \mid ab = ba = 0\}$  — множество элементов  $\mathcal{A}$ , ортогональных к  $a$ .
- *Левым аннулятором*  $a$  называется множество  $l. \text{Ann}_{\mathcal{A}}(a) = \{b \in \mathcal{A} \mid ba = 0\}$ .

- Аналогично *правым аннулятором*  $a$  называется  $r$ .  $\text{Ann}_{\mathcal{A}}(a) = \{b \in \mathcal{A} \mid ab = 0\}$ .

Ясно, что  $C_{\mathcal{A}}(a)$ ,  $\text{Ann}_{\mathcal{A}}(a)$ ,  $O_{\mathcal{A}}(a)$ ,  $l.\text{Ann}_{\mathcal{A}}(a)$  и  $r.\text{Ann}_{\mathcal{A}}(a)$  — линейные пространства над  $\mathbb{F}$ .

**Обозначение.** Для любого подмножества  $X$  линейного пространства  $W$  над  $\mathbb{F}$  обозначим множество прямых, проходящих через элементы  $X$ , как

$$\mathbb{P}(X) = \{[x] = \mathbb{F}x \mid x \in X \setminus \{0\}\}.$$

**Определение 1.1.2.** Пусть  $\mathcal{A}$  — произвольная алгебра. Определим следующие графы отношений алгебры  $\mathcal{A}$ :

- *Граф коммутативности*  $\Gamma_C(\mathcal{A})$ : его вершины — прямые в факторпространстве  $\mathcal{A}/C_{\mathcal{A}}$ , то есть

$$V(\Gamma_C(\mathcal{A})) = \mathbb{P}(\mathcal{A}/C_{\mathcal{A}}) = \{[a + C_{\mathcal{A}}] = \mathbb{F}a + C_{\mathcal{A}} \mid a \in \mathcal{A} \setminus C_{\mathcal{A}}\},$$

причём различные вершины  $[a + C_{\mathcal{A}}]$  и  $[b + C_{\mathcal{A}}]$  соединены ребром, если и только если  $ab = ba$ .

- *Граф ортогональности*  $\Gamma_O(\mathcal{A})$ : его вершины — прямые в  $Z_{LR}(\mathcal{A})$ , то есть

$$V(\Gamma_O(\mathcal{A})) = \mathbb{P}(Z_{LR}(\mathcal{A})),$$

причём различные вершины  $[a]$  и  $[b]$  соединены ребром, если и только если  $ab = ba = 0$ .

- *Ориентированный граф делителей нуля*  $\Gamma_Z(\mathcal{A})$ : его вершины — прямые в  $Z(\mathcal{A})$ , то есть

$$V(\Gamma_Z(\mathcal{A})) = \mathbb{P}(Z(\mathcal{A})),$$

причём различные вершины  $[a]$  и  $[b]$  соединены направленным ребром от  $[a]$  к  $[b]$ , если и только если  $ab = 0$ .

Заметим, что рёбра графов  $\Gamma_C(\mathcal{A})$ ,  $\Gamma_O(\mathcal{A})$  и  $\Gamma_Z(\mathcal{A})$  корректно определены. Говоря о вершинах этих графов, мы не будем проводить различия между ненулевым элементом  $a$  и проходящей через него прямой  $[a] = \mathbb{F}a$ . Мы также обозначаем  $\text{Lin}(a_1, \dots, a_k) = \mathbb{F}a_1 + \dots + \mathbb{F}a_k$ .

Напомним основные сведения из теории графов, которые нам потребуются.

**Определение 1.1.3.** Пусть  $\Gamma$  — ориентированный или неориентированный граф.

- $\Gamma$  называется *связным*, если для любой упорядоченной пары вершин  $(x, y)$  существует путь от  $x$  к  $y$ .
- *Расстояние*  $d(x, y) = d_{\Gamma}(x, y)$  между двумя вершинами  $x$  и  $y$  в графе  $\Gamma$  — это число рёбер в кратчайшем пути от  $x$  к  $y$ . Если такого пути не существует, то  $d(x, y) = \infty$ .
- *Диаметр*  $d(\Gamma)$  графа  $\Gamma$  определяется как  $\sup_{x, y \in \Gamma} d(x, y)$ .

Для неориентированного графа  $\Gamma$  определены также следующие понятия:

- *Компонентой связности*  $\Gamma$  называется максимальный связный подграф  $\Gamma$ .
- *Клика*  $Q$  в графе  $\Gamma$  — это такое подмножество вершин  $\Gamma$ , что любые две различные вершины в  $Q$  соединены ребром.
- Клика  $Q$  называется *максимальной*, если  $Q$  максимальна по включению.
- *Обхват*  $g(\Gamma)$  графа  $\Gamma$  — это длина кратчайшего цикла в  $\Gamma$ .

## 1.2 Построение алгебр Кэли-Диксона

**Определение 1.2.1.** [37, с. 139, определение 1.5.1] Пусть  $(\mathcal{A}, +, \cdot)$  — алгебра над полем  $\mathbb{F}$ . Операцией *сопряжения*  $a \mapsto \bar{a}$  на  $\mathcal{A}$  называется такой эндоморфизм  $\mathcal{A}$  как линейного пространства, что для любых  $a, b \in \mathcal{A}$  выполнено  $\overline{\bar{a}} = a$  и  $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$ .

**Определение 1.2.2.** Пусть  $(\mathcal{A}, +, \cdot)$  — алгебра над полем  $\mathbb{F}$  с единицей  $1_{\mathcal{A}}$  и операцией сопряжения  $a \mapsto \bar{a}$ . Это сопряжение называется *регулярным*, если для любого элемента  $a \in \mathcal{A}$  выполнено  $a + \bar{a} = t(a)1_{\mathcal{A}}$  и  $a\bar{a} = \bar{a}a = n(a)1_{\mathcal{A}}$ , где  $t(a), n(a) \in \mathbb{F}$ . Здесь  $t(a)$  называется *следом*  $a$ ,  $n(a)$  называется *нормой*  $a$ .

Далее будем считать, что на  $\mathbb{F}$ -алгебре  $\mathcal{A}$  задана регулярная операция сопряжения  $a \mapsto \bar{a}$ . Ниже представлены основные утверждения, которые понадобятся нам позднее. Для полноты изложения мы также приводим доказательства для некоторых из них.

**Предложение 1.2.3.** Пусть  $a \in \mathcal{A}$ ,  $\lambda \in \mathbb{F}$ . Тогда  $n(a - \lambda 1_{\mathcal{A}}) = \lambda^2 - t(a)\lambda + n(a)$ .

*Доказательство.* Для любого  $b \in \mathcal{A}$  имеем  $\bar{b} = \overline{b1_{\mathcal{A}}} = \overline{1_{\mathcal{A}} \cdot b}$ , поэтому  $\overline{1_{\mathcal{A}}} = 1_{\mathcal{A}}$ . Значит,  $(a - \lambda 1_{\mathcal{A}})\overline{(a - \lambda 1_{\mathcal{A}})} = (a - \lambda 1_{\mathcal{A}})(\bar{a} - \lambda 1_{\mathcal{A}}) = a\bar{a} - \lambda(a + \bar{a}) + \lambda^2 1_{\mathcal{A}} = (\lambda^2 - t(a)\lambda + n(a))1_{\mathcal{A}}$ .  $\square$

**Определение 1.2.4.** *Характеристическим многочленом* элемента  $a \in \mathcal{A}$  называется  $p_a(\lambda) = n(a - \lambda 1_{\mathcal{A}}) = \lambda^2 - t(a)\lambda + n(a)$ . Его дискриминант равен  $\text{dis}(a) = (t(a))^2 - 4n(a)$ .

**Предложение 1.2.5.** [44, стр. 438] Для любого  $a \in \mathcal{A}$  выполнено  $p_a(a) = 0$ .

Ниже, опираясь в основном на работы [37, 44], мы напоминаем классический способ построения неассоциативных алгебр методом удвоения, так называемую процедуру Кэли-Диксона.

**Определение 1.2.6.** Пусть  $\mathcal{A}$  — алгебра над полем  $\mathbb{F}$  с операцией сопряжения  $a \mapsto \bar{a}$ . Алгебра  $\mathcal{A}\{\gamma\}$ , полученная из  $\mathcal{A}$  с помощью *процедуры Кэли-Диксона* с параметром  $\gamma \in \mathbb{F}$ ,  $\gamma \neq 0$ , определяется как множество упорядоченных пар элементов из  $\mathcal{A}$  с операциями

$$\begin{aligned} \alpha(a, b) &= (\alpha a, \alpha b); \\ (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d); \\ (a, b)(c, d) &= (ac + \gamma \bar{d}b, da + b\bar{c}) \end{aligned}$$

и сопряжением

$$(\overline{a, b}) = (\bar{a}, -b), \quad a, b, c, d \in \mathcal{A}, \alpha \in \mathbb{F}.$$

**Предложение 1.2.7.** [44, стр. 435]

- $\mathcal{A}\{\gamma\}$  является алгеброй над полем  $\mathbb{F}$  с единицей  $1_{\mathcal{A}\{\gamma\}} = (1_{\mathcal{A}}, 0)$  и регулярной операцией сопряжения.
- Если  $\mathcal{A}$  — алгебра размерности  $n$  с базисом  $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ , то  $\mathcal{A}\{\gamma\}$  — алгебра размерности  $2n$  с базисом  $\{(e_i, 0), (0, e_i)\}_{i=1, \dots, n}$ .

**Предложение 1.2.8.** [44, стр. 435] Пусть  $a, b \in \mathcal{A}$ ,  $(a, b) \in \mathcal{A}\{\gamma\}$ . Тогда

$$\begin{aligned} t((a, b)) &= t(a), \\ n((a, b)) &= n(a) - \gamma n(b). \end{aligned}$$

**Предложение 1.2.9.** [37, стр. 161, упражнение 2.5.1] Пусть  $\gamma' = \alpha^2 \gamma$  для некоторого  $\alpha \neq 0$ . Тогда алгебры  $\mathcal{A}\{\gamma\}$  и  $\mathcal{A}\{\gamma'\}$  изоморфны.

Далее будем считать, что  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ , и дадим определение произвольной вещественной алгебры Кэли-Диксона в зависимости от набора её параметров. Наиболее распространённое определение вещественных алгебр Кэли-Диксона подразумевает, что все параметры равны  $-1$ . Мы будем называть такие алгебры алгебрами главной последовательности.

**Определение 1.2.10.** Для каждого целого  $n \geq 0$  и ненулевых вещественных чисел  $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}$  вещественная алгебра Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n\{\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}\}$  определяется индуктивно:

- 1)  $\mathcal{A}_0 = \mathbb{R}$ ,  $e_0^{(0)} = 1$  — её базисный элемент;
- 2) Если построена  $\mathcal{A}_n\{\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}\}$ , то  $\mathcal{A}_{n+1}\{\gamma_0, \dots, \gamma_n\} = (\mathcal{A}_n\{\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}\})\{\gamma_n\}$ , причём  $e_0^{(n+1)}, \dots, e_{2^{n+1}-1}^{(n+1)}$  — её базисные элементы, где

$$e_m^{(n+1)} = \begin{cases} (e_m^{(n)}, 0), & 0 \leq m \leq 2^n - 1, \\ (0, e_{m-2^n}^{(n)}), & 2^n \leq m \leq 2^{n+1} - 1. \end{cases}$$

Используя индукцию по  $n$  и предложение 1.2.7, нетрудно показать, что для каждого целого  $n \geq 0$  структура  $\mathcal{A}_n$  из определения 1.2.10 — это  $2^n$ -мерная алгебра над  $\mathbb{R}$  с единицей  $e_0^{(n)}$  и регулярной операцией сопряжения. Иногда мы будем использовать обозначения  $1 = e_0^{(n)}$  и  $r = r e_0^{(n)}$  при  $r \in \mathbb{R}$ . Для произвольного элемента  $\mathcal{A}$  введём следующие понятия, аналогичные соответствующим понятиям для комплексных чисел.

**Определение 1.2.11.**

- Пусть  $a \in \mathcal{A}_n$ . Вещественной частью  $a$  называется  $\Re(a) = \frac{a+\bar{a}}{2}$ , мнимой частью —  $\Im(a) = \frac{a-\bar{a}}{2}$ , нормой —  $n(a) = a\bar{a} = \bar{a}a$ .

- Элемент  $a \in \mathcal{A}_n$  называется *чисто мнимым*, если  $\Re(a) = 0$ .
- Элемент  $(a, b) \in \mathcal{A}_{n+1}$  называется *дважды чисто мнимым*, если  $\Re(a) = \Re(b) = 0$ .
- Элемент  $(a, b) \in \mathcal{A}_{n+1}$  называется *четырежды чисто мнимым*, если  $a$  и  $b$  — дважды чисто мнимые.

Заметим, что  $\Re(a), n(a) \in \mathbb{R}1_{\mathcal{A}} = \mathbb{R}$ , поскольку операция сопряжения на  $\mathcal{A}$  регулярна. Очевидно, введённое понятие нормы согласовано с определением 1.2.2.

**Обозначение.** Обозначим множество чисто мнимых элементов алгебры  $\mathcal{A}_n$  как

$$\mathcal{A}'_n = \{a \in \mathcal{A}_n \mid \Re(a) = 0\}.$$

**Предложение 1.2.12.** *Вещественная часть и норма элемента  $(a, b) \in \mathcal{A}_{n+1}$  могут быть вычислены индуктивно с использованием следующих соотношений:*

$$\begin{aligned}\Re((a, b)) &= \Re(a), \\ n((a, b)) &= n(a) - \gamma_n n(b).\end{aligned}$$

*Доказательство.* Непосредственно следует из предложения 1.2.8. □

**Замечание 1.2.13.** В случае алгебр главной последовательности (см. определение 1.4.1), норма  $a$  часто определяется как  $\sqrt{a\bar{a}}$ , в отличие от  $n(a) = a\bar{a}$ , используемого в данной работе. Однако большая часть результатов может быть легко перенесена на случай изменённой таким образом нормы.

**Лемма 1.2.14.** *Для любого  $a \in \mathcal{A}_n$  выполнено  $\text{dis}(a) = -4n(\Im(a))$ .*

*Доказательство.*  $\text{dis}(a) = (t(a))^2 - 4n(a) = (a + \bar{a})^2 - 2a\bar{a} - 2\bar{a}a = (a - \bar{a})^2 = -(a - \bar{a})(\overline{a - \bar{a}}) = -4n(\Im(a))$ . □

### 1.3 Свойства вещественных алгебр Кэли-Диксона

Далее подразумеваем, что  $\mathcal{A}$  — произвольная алгебра над полем  $\mathbb{F}$ , а  $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n\{\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}\}$  — произвольная вещественная алгебра Кэли-Диксона. Как следует из предложения 1.2.9,  $\mathcal{A}_n\{\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}\}$  изоморфна  $\mathcal{A}_n\{\text{sgn}(\gamma_0), \dots, \text{sgn}(\gamma_{n-1})\}$ , поэтому достаточно рассматривать только значения  $\gamma_k \in \{\pm 1\}$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ .

**Обозначение.** Для каждого  $m = 0, \dots, 2^n - 1$  обозначим

$$\delta_m^{(n)} = \prod_{l=0}^{n-1} (-\gamma_l)^{c_{m,l}}, \tag{1.1}$$

где показатели  $c_{m,l} \in \{0, 1\}$  однозначно определены условием  $m = \sum_{l=0}^{n-1} c_{m,l} 2^l$ .

**Замечание 1.3.1.** При любых значениях  $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}$  выполнено  $\delta_0^{(n)} = 1$ .

**Лемма 1.3.2.** Пусть  $a = a_0 + a_1 e_1^{(n)} + \dots + a_{2^n-1} e_{2^n-1}^{(n)} \in \mathcal{A}_n$ . Тогда

$$\begin{aligned}\bar{a} &= a_0 - a_1 e_1^{(n)} - \dots - a_{2^n-1} e_{2^n-1}^{(n)}; \\ \Re(a) &= a_0; \\ \Im(a) &= a_1 e_1^{(n)} + \dots + a_{2^n-1} e_{2^n-1}^{(n)}; \\ n(a) &= \sum_{m=0}^{2^n-1} \delta_m^{(n)} a_m^2,\end{aligned}$$

где сопряжение рассматривается в смысле определения 1.2.6, а норма, вещественная и мнимая части — в смысле определения 1.2.11.

*Доказательство.* Следует из предложения 1.2.12 путём непосредственных вычислений.  $\square$

**Обозначение.** Пусть  $\langle a, b \rangle$  — вещественнозначная симметрическая билинейная форма, соответствующая квадратичной форме  $n(a)$ , то есть  $\langle a, a \rangle = n(a)$ . Из леммы 1.3.2 следует, что для  $a = \sum_{m=0}^{2^n-1} a_m e_m^{(n)}$  и  $b = \sum_{m=0}^{2^n-1} b_m e_m^{(n)} \in \mathcal{A}_n$  выполнено

$$\langle a, b \rangle = \sum_{m=0}^{2^n-1} \delta_m^{(n)} a_m b_m. \quad (1.2)$$

Мы будем обозначать  $a \perp b$ , если  $a$  и  $b$  ортогональны относительно  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , то есть  $\langle a, b \rangle = 0$ .

**Предложение 1.3.3.** Пусть  $a, b \in \mathcal{A}_n$ . Тогда  $2\langle a, b \rangle = a\bar{b} + b\bar{a} = \bar{a}b + \bar{b}a$ .

*Доказательство.* Линеаризуя равенство  $\langle a, a \rangle = n(a) = a\bar{a} = \bar{a}a$ , получаем

$$\begin{aligned}2\langle a, b \rangle &= \langle a + b, a + b \rangle - \langle a, a \rangle - \langle b, b \rangle = (a + b)\overline{(a + b)} - a\bar{a} - b\bar{b} = a\bar{b} + b\bar{a}, \\ 2\langle a, b \rangle &= \langle a + b, a + b \rangle - \langle a, a \rangle - \langle b, b \rangle = \overline{(a + b)}(a + b) - \bar{a}a - \bar{b}b = \bar{a}b + \bar{b}a.\end{aligned} \quad \square$$

**Следствие 1.3.4.** Пусть  $a, b \in \mathcal{A}_n$ ,  $\Re(a) = \Re(b) = 0$ . Тогда  $ab + ba = -2\langle a, b \rangle \in \mathbb{R}$ .

*Доказательство.* Является частным случаем предложения 1.3.3 в случае, когда  $\bar{a} = -a$ ,  $\bar{b} = -b$ .  $\square$

**Следствие 1.3.5.** Пусть  $a, b \in \mathcal{A}_n$ . Тогда  $\langle a, b \rangle = \Re(a\bar{b}) = \Re(\bar{b}a)$ . Отсюда следует, что  $\langle a, b \rangle = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$  и  $\Re(a) = \langle a, 1 \rangle$ .

*Доказательство.* Действительно, согласно предложению 1.3.3,  $2\Re(a\bar{b}) = a\bar{b} + \overline{a\bar{b}} = a\bar{b} + b\bar{a} = 2\langle a, b \rangle$ . Аналогично,  $2\Re(\bar{b}a) = \bar{b}a + \overline{\bar{b}a} = \bar{b}a + \bar{a}b = 2\langle a, b \rangle$ .  $\square$

**Лемма 1.3.6.** [44, лемма 2] Для любых  $x, y, z \in \mathcal{A}_n$  имеет место равенство  $\Re([x, y, z]) = 0$ .

**Лемма 1.3.7.** [44, лемма 6] Пусть  $x, y, z \in \mathcal{A}_n$ . Тогда  $\langle x, yz \rangle = \langle x\bar{z}, y \rangle = \langle \bar{y}x, z \rangle$ .

В следующей лемме описан антицентрализатор произвольного ненулевого элемента  $\mathcal{A}_n$ .

**Лемма 1.3.8.** Пусть  $a \in \mathcal{A}_n$ ,  $a \neq 0$ .

- (1) Если  $\Re(a) \neq 0$ ,  $n(a) \neq 0$ , то  $\text{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a) = \{0\}$ .
- (2) Если  $\Re(a) \neq 0$ ,  $n(a) = 0$ , то  $\text{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a) = \mathbb{R}\bar{a}$ .
- (3) Если  $\Re(a) = 0$ , то  $\text{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a) = \{b \in \mathcal{A}_n \mid \Re(b) = 0 \text{ и } \langle a, b \rangle = 0\}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим условие антикоммутируемости элементов  $a, b \in \mathcal{A}_n$ :

$$\begin{aligned} 0 &= ab + ba = a(2\Re(b) - \bar{b}) + b(2\Re(a) - \bar{a}) = 2\Re(b)a + 2\Re(a)b - (a\bar{b} + b\bar{a}) = \\ &= 2\Re(b)(\Re(a) + \Im(a)) + 2\Re(a)(\Re(b) + \Im(b)) - \langle a, b \rangle = A_1 + A_2, \end{aligned}$$

где  $A_1 = 4\Re(a)\Re(b) - \langle a, b \rangle \in \mathbb{R}$  и  $A_2 = 2(\Re(a)\Im(b) + \Re(b)\Im(a)) \in \mathcal{A}'_n$ . Поэтому  $A_1 = \Re(ab+ba)$  и  $A_2 = \Im(ab+ba)$ , а значит, равенство  $A_1 + A_2 = 0$  равносильно  $A_1 = A_2 = 0$ .

Рассмотрим вначале случай  $\Re(a) \neq 0$ . Тогда  $\Im(b) = -\frac{\Re(b)}{\Re(a)}\Im(a)$ , откуда

$$b = \Re(b) + \Im(b) = \frac{\Re(b)}{\Re(a)}(\Re(a) - \Im(a)) = \frac{\Re(b)}{\Re(a)}\bar{a}, \quad (1.3)$$

$$0 = ab + ba = \frac{\Re(b)}{\Re(a)}(a\bar{a} + \bar{a}a) = 2\frac{\Re(b)}{\Re(a)}n(a). \quad (1.4)$$

Если  $n(a) \neq 0$ , то из равенства (1.4) следует, что  $\Re(b) = 0$ , а значит, из (1.3) получаем, что  $b = 0$ , что доказывает условие (1). Если  $n(a) = 0$ , то равенство (1.3) гарантирует выполнение условия (2).

Случай, когда  $\Re(b) \neq 0$ , рассматривается аналогично, и приводит к условиям случаев (1) или (2). Если же  $\Re(a) = \Re(b) = 0$ , то из следствия 1.3.4 получаем условие (3).  $\square$

Перейдём к некоторым определениям, связанным с понятием ассоциативности.

**Определение 1.3.9.** Ассоциатором элементов  $a, b, c \in \mathcal{A}$  называется элемент  $[a, b, c] = (ab)c - a(bc)$ , а их антиассоциатором — элемент  $\{a, b, c\} = (ab)c + a(bc)$ .

**Определение 1.3.10.** [37, определение 2.1.1]

- Алгебра  $\mathcal{A}$  называется *гибкой*, если для любых  $a, b \in \mathcal{A}$  выполнено  $[a, b, a] = 0$ .
- Алгебра  $\mathcal{A}$  называется *альтернативной*, если для любых  $a, b \in \mathcal{A}$  выполнено  $[a, a, b] = [b, a, a] = 0$ .

**Предложение 1.3.11.** [37, упражнение 2.1.1]

- Если  $\mathcal{A}$  — гибкая алгебра, то для всех  $a, b, c \in \mathcal{A}$  выполнено  $[a, b, c] = -[c, b, a]$ .
- Если  $\mathcal{A}$  альтернативна, то ассоциатор на  $\mathcal{A}$  кососимметричен, то есть меняет знак при транспозиции аргументов.

**Лемма 1.3.12.** [44, стр. 436, стр. 438, теорема 1]

- $\mathcal{A}_n$  коммутативна, если и только если  $n \leq 1$ .
- $\mathcal{A}_n$  ассоциативна, если и только если  $n \leq 2$ .
- $\mathcal{A}_n$  альтернативна, если и только если  $n \leq 3$ .
- $\mathcal{A}_n$  гибкая для всех  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  и  $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Лемма 1.3.13.** [44, стр. 438]

- Если  $n \leq 1$ , то  $C_{\mathcal{A}_n} = \mathcal{A}_n$ , поэтому множество вершин  $\Gamma_C(\mathcal{A}_n)$  пустое.
- Если  $n \geq 2$ , то  $C_{\mathcal{A}_n} = \mathbb{R}$ , поэтому  $\Gamma_C(\mathcal{A}_n)$  изоморфен графу, вершинами которого являются элементы  $\mathbb{P}(\mathcal{A}'_n)$ , причём различные вершины  $[a]$  и  $[b]$  соединены ребром, если и только если  $ab = ba$ .

Поскольку алгебры Кэли-Диксона в общем случае не являются альтернативными, а условие альтернативности между парами элементов играет ключевую роль в данной работе, нам понадобится также следующее определение.

**Определение 1.3.14.** [39, стр. 12, стр. 15] Пусть  $a, b \in \mathcal{A}_n$ .

- Элемент  $a$  *альтернирует* с элементом  $b$ , если  $[a, a, b] = 0$ .
- Если  $a$  альтернирует со всеми  $b \in \mathcal{A}_n$ , то  $a$  называется *альтернативным*.
- Элемент  $a$  *строго альтернирует* с элементом  $b$ , если  $[a, a, b] = 0$  и  $[b, b, a] = 0$ .
- Если  $a$  строго альтернирует со всеми  $b \in \mathcal{A}_n$ , то  $a$  называется *строго альтернативным*.

## 1.4 Примеры вещественных алгебр Кэли-Диксона

**Определение 1.4.1.**

- Говорят, что алгебра  $\mathcal{A}_n\{\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}\}$  является алгеброй *главной последовательности Кэли-Диксона*, если  $\gamma_k = -1$  для любого  $k = 0, \dots, n-1$ . Мы будем обозначать такую алгебру символом  $\mathcal{M}_n$ , от слова «main».
- Алгебра  $\mathcal{A}_n\{\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}\}$  называется *контр-алгеброй*, если  $\gamma_k = -1$  для любого  $k = 0, \dots, n-2$  и  $\gamma_{n-1} = 1$ . Мы будем обозначать её  $\mathcal{H}_n$ , от слова «hyperbolic», поскольку  $\mathcal{H}_n$  обладает гиперболической нормой.

**Предложение 1.4.2.**

- Пусть  $a = \sum_{m=0}^{2^n-1} a_m e_m^{(n)}, b = \sum_{m=0}^{2^n-1} b_m e_m^{(n)} \in \mathcal{M}_n$ . Тогда  $\langle a, b \rangle = \sum_{m=0}^{2^n-1} a_m b_m$  — стандартное евклидово скалярное произведение. В частности,  $n(a) = \sum_{m=0}^{2^n-1} a_m^2$ , поэтому  $n(a) = 0$ , если и только если  $a = 0$ .

- Пусть  $a = \sum_{m=0}^{2^n-1} a_m e_m^{(n)}, b = \sum_{m=0}^{2^n-1} b_m e_m^{(n)} \in \mathcal{H}_n$ . Тогда  $\langle a, b \rangle = \sum_{m=0}^{2^{n-1}-1} a_m b_m - \sum_{m=2^{n-1}}^{2^n-1} a_m b_m$ .

*Доказательство.*

- Выражение для скалярного произведения в алгебрах главной последовательности может быть получено из равенства (1.2) подстановкой значения  $\delta_m^{(n)} = \prod_{l=0}^{n-1} (-\gamma_l)^{c_{m,l}} = 1$  для всех  $m = 0, \dots, 2^n - 1$ .
- В случае контр-алгебр имеем  $\delta_m^{(n)} = 1$  для всех  $m = 0, \dots, 2^{n-1} - 1$  и  $\delta_m^{(n)} = -1$  для всех  $m = 2^{n-1}, \dots, 2^n - 1$ .  $\square$

### Пример 1.4.3.

- Алгебры комплексных чисел ( $\mathbb{C}$ ), кватернионов ( $\mathbb{H}$ ), октонионов ( $\mathbb{O}$ ) и седенионов ( $\mathbb{S}$ ) являются алгебрами главной последовательности при  $n = 1, 2, 3$ , и  $4$ , соответственно. Читатель может обратиться к [7] для знакомства с определениями  $\mathbb{H}$  и  $\mathbb{O}$ , и к [18] — с определением  $\mathbb{S}$ .
- Примерами контр-алгебр малых размерностей являются алгебры контркомплексных чисел (the split-complex-numbers;  $\hat{\mathbb{C}}$ ), контркватернионов (the split-quaternions;  $\hat{\mathbb{H}}$ ) и контроктонионов (the split-octonions;  $\hat{\mathbb{O}}$ ), определённые в [11]. Ещё один пример — алгебра контрседенионов (the split-sedenions;  $\hat{\mathbb{S}}$ ), имеющая ту же размерность, что и алгебра седенионов.

Ниже приведены точные определения и основные свойства упомянутых выше алгебр.

**Определение 1.4.4.** [7, стр. 6], [11, стр. 3, стр. 5, стр. 6]

- Алгебра *кватернионов*  $\mathbb{H}$  — это четырёхмерная алгебра над  $\mathbb{R}$  с базисом  $1, i, j, k$ . Операция сопряжения на  $\mathbb{H}$  задаётся формулой  $\overline{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k} = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k$ , а умножение выполняется согласно таблице 1.1.

$\times$	1	$i$	$j$	$k$
1	1	$i$	$j$	$k$
$i$	$i$	-1	$k$	$-j$
$j$	$j$	$-k$	-1	$i$
$k$	$k$	$j$	$-i$	-1

Таблица 1.1: Таблица умножения базисных кватернионов.

- Алгебра *октонионов*  $\mathbb{O}$  — это восьмимерная алгебра над  $\mathbb{R}$ , базисными элементами которой являются  $1, e_1, \dots, e_7$ . Операция сопряжения на  $\mathbb{O}$  задаётся формулой  $\overline{a_0 + a_1 e_1 + \dots + a_7 e_7} = a_0 - a_1 e_1 - \dots - a_7 e_7$ , а умножение задаётся таблицей 1.2.

×	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$
1	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$
$e_1$	$e_1$	-1	$e_3$	$-e_2$	$e_5$	$-e_4$	$-e_7$	$e_6$
$e_2$	$e_2$	$-e_3$	-1	$e_1$	$e_6$	$e_7$	$-e_4$	$-e_5$
$e_3$	$e_3$	$e_2$	$-e_1$	-1	$e_7$	$-e_6$	$e_5$	$-e_4$
$e_4$	$e_4$	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_5$	$e_5$	$e_4$	$-e_7$	$e_6$	$-e_1$	-1	$-e_3$	$e_2$
$e_6$	$e_6$	$e_7$	$e_4$	$-e_5$	$-e_2$	$e_3$	-1	$-e_1$
$e_7$	$e_7$	$-e_6$	$e_5$	$e_4$	$-e_3$	$-e_2$	$e_1$	-1

Таблица 1.2: Таблица умножения базисных октонионов.

- Алгебра контркомплексных чисел  $\hat{\mathbb{C}}$  — это алгебра элементов вида  $a + bl$ , где  $a, b \in \mathbb{R}$  и  $\ell^2 = 1$ , с сопряжением  $\overline{a + bl} = a - bl$ .
- Алгебра контркватернионов  $\hat{\mathbb{H}}$  — четырёхмерная алгебра над  $\mathbb{R}$  с базисом  $1, i, \ell, li$ . Сопряжение на  $\hat{\mathbb{H}}$  задаётся формулой  $\overline{a_0 + a_1i + a_2\ell + a_3li} = a_0 - a_1i - a_2\ell - a_3li$ , а умножение выполняется согласно таблице 1.3.

×	1	$i$	$\ell$	$li$
1	1	$i$	$\ell$	$li$
$i$	$i$	-1	$-li$	$\ell$
$\ell$	$\ell$	$li$	1	$i$
$li$	$li$	$-\ell$	$-i$	1

Таблица 1.3: Таблица умножения базисных контркватернионов.

- Алгебра контроктонионов  $\hat{\mathbb{O}}$  — восьмимерная алгебра над  $\mathbb{R}$  с базисом  $1, i, j, k, \ell, li, lj, lk$ . Сопряжение на  $\hat{\mathbb{O}}$  задаётся формулой  $\overline{a_0 + a_1i + a_2j + a_3k + a_4\ell + a_5li + a_6lj + a_7lk} = a_0 - a_1i - a_2j - a_3k - a_4\ell - a_5li - a_6lj - a_7lk$ , а умножение задаётся таблицей 1.4.

×	1	$i$	$j$	$k$	$\ell$	$li$	$lj$	$lk$
1	1	$i$	$j$	$k$	$\ell$	$li$	$lj$	$lk$
$i$	$i$	-1	$k$	$-j$	$-li$	$\ell$	$-lk$	$lj$
$j$	$j$	$-k$	-1	$i$	$-lj$	$lk$	$\ell$	$-li$
$k$	$k$	$j$	$-i$	-1	$-lk$	$-lj$	$li$	$\ell$
$\ell$	$\ell$	$li$	$lj$	$lk$	1	$i$	$j$	$k$
$li$	$li$	$-\ell$	$-lk$	$lj$	$-i$	1	$k$	$-j$
$lj$	$lj$	$lk$	$-\ell$	$-li$	$-j$	$-k$	1	$i$
$lk$	$lk$	$-lj$	$li$	$-\ell$	$-k$	$j$	$-i$	1

Таблица 1.4: Таблица умножения базисных контроктонионов.

**Предложение 1.4.5.** [11, стр. 2], [38, стр. 1] *Имеют место следующие изоморфизмы:*  
 $\mathbb{R} \cong \mathcal{M}_0$ ;  $\mathbb{C} \cong \mathcal{M}_1$ ;  $\mathbb{H} \cong \mathcal{M}_2$ ;  $\mathbb{O} \cong \mathcal{M}_3$ ;  $\hat{\mathbb{C}} \cong \mathcal{H}_1$ ;  $\hat{\mathbb{H}} \cong \mathcal{H}_2$ ;  $\hat{\mathbb{O}} \cong \mathcal{H}_3$ .

*Доказательство.* Изоморфизм  $\mathbb{R} \cong \mathcal{M}_0$  непосредственно следует из определения. Изоморфизм  $\mathbb{O} \cong \mathcal{M}_3$  получается переводом стандартного базиса  $\mathbb{O}$  в стандартный базис  $\mathcal{M}_3$ . Остальные изоморфизмы могут быть заданы на базисных элементах следующим образом:

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}\{-1\}: 1 \mapsto (1, 0), i \mapsto (0, 1).$$

$$\mathbb{H} \cong \mathbb{C}\{-1\}: 1 \mapsto (1, 0), i \mapsto (i, 0), j \mapsto (0, 1), k \mapsto (0, i).$$

$$\hat{\mathbb{C}} \cong \mathbb{R}\{1\}: 1 \mapsto (1, 0), \ell \mapsto (0, 1).$$

$$\hat{\mathbb{H}} \cong \mathbb{C}\{1\}: 1 \mapsto (1, 0), i \mapsto (i, 0), \ell \mapsto (0, 1), \ell i \mapsto -(0, i).$$

$$\hat{\mathbb{O}} \cong \mathbb{H}\{1\}: 1 \mapsto (1, 0), i \mapsto (i, 0), j \mapsto (j, 0), k \mapsto (k, 0), \ell \mapsto (0, 1), \ell i \mapsto -(0, i), \ell j \mapsto -(0, j), \ell k \mapsto -(0, k). \quad \square$$

**Следствие 1.4.6.**

- $\mathbb{C}$  и  $\hat{\mathbb{C}}$  коммутативны и ассоциативны;
- $\mathbb{H}$  и  $\hat{\mathbb{H}}$  некоммутативны, но ассоциативны;
- $\mathbb{O}$  и  $\hat{\mathbb{O}}$  некоммутативны, неассоциативны, но альтернативны.

*Доказательство.* Непосредственно следует из леммы 1.3.12 и предложения 1.4.5. □

Хорошо известно, что алгебры  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  и  $\mathbb{O}$  не имеют делителей нуля, см. [7, стр. 10], а алгебры  $\hat{\mathbb{C}}$ ,  $\hat{\mathbb{H}}$  и  $\hat{\mathbb{O}}$  их имеют.

**Определение 1.4.7.** Алгебра *седенионов* определяется как  $\mathbb{S} = \mathcal{M}_4$ , а алгебра *контрседенионов* — как  $\hat{\mathbb{S}} = \mathcal{H}_4$ .

Легко видеть, что  $\mathbb{S} = \mathcal{M}_4 = \mathcal{M}_3\{-1\} \cong \mathbb{O}\{-1\}$  и  $\hat{\mathbb{S}} = \mathcal{H}_4 = \mathcal{M}_3\{1\} \cong \mathbb{O}\{1\}$ . Это приводит нас к наиболее удобной форме записи седенионов и контрседенионов, а именно, в виде упорядоченных пар октонионов. Алгебры  $\mathbb{S}$  и  $\hat{\mathbb{S}}$  — шестнадцатимерные некоммутативные, неассоциативные и неальтернативные алгебры с делителями нуля, см. [38, стр. 2].

Из предложения 1.4.2 следует, что в случае алгебр главной последовательности норма является анизотропной, тогда как в случае контр-алгебр всегда существует ненулевой вектор нулевой нормы. При  $n \leq 3$  любая алгебра Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_n$  над произвольным полем  $\mathbb{F}$ ,  $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$ , альтернативна, а значит, является композиционной алгеброй. И наоборот, любая унитарная композиционная алгебра над полем  $\mathbb{F}$ ,  $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$ , изоморфна алгебре Кэли-Диксона с  $n \leq 3$ , см. [29, стр. 61, теорема 1] или [37, стр. 166, теорема 2.6.2]. Если при этом норма на  $\mathcal{A}$  анизотропна, то  $\mathcal{A}$  является алгеброй с делением, а если норма на  $\mathcal{A}$  изотропна, то  $\mathcal{A}$  — расщепляющаяся композиционная алгебра (split composition algebra), см. [37, см. 66]. Таким образом, алгебры  $\mathcal{M}_n$ ,  $0 \leq n \leq 3$ , — это композиционные алгебры с делением, а  $\mathcal{H}_n$ ,  $1 \leq n \leq 3$ , — расщепляющиеся композиционные алгебры. Кроме того, следующее предложение показывает, что вещественные расщепляющиеся композиционные алгебры исчерпываются алгебрами  $\hat{\mathbb{C}}$ ,  $\hat{\mathbb{H}}$ ,  $\hat{\mathbb{O}}$ . Это объясняет английское название контр-алгебр  $\mathcal{H}_n$  (split-algebras).

**Предложение 1.4.8.** [37, стр. 165-166, упражнение 2.6.1A, теорема 2.6.2]

*Имеют место изоморфизмы  $\hat{\mathbb{H}} = \mathbb{C}\{1\} \cong \hat{\mathbb{C}}\{-1\} \cong \hat{\mathbb{C}}\{1\}$  и  $\hat{\mathbb{O}} = \mathbb{H}\{1\} \cong \hat{\mathbb{H}}\{-1\} \cong \hat{\mathbb{H}}\{1\}$ .*

## Глава 2

# Дважды альтернативные делители нуля в вещественных алгебрах Кэли-Диксона

Глава построена следующим образом: в разделе 2.1 мы устанавливаем достаточное условие того, что два или три элемента порождают ассоциативную или альтернативную подалгебру в произвольной вещественной алгебре Кэли-Диксона, а также приводим явную таблицу умножения элементов такой подалгебры. В разделе 2.2 мы рассматриваем пары делителей нуля, компоненты которых удовлетворяют дополнительным условиям на норму и альтернативность, и показываем, что они образуют шестиугольные структуры в графе делителей нуля произвольной вещественной алгебры Кэли-Диксона. Основным результатом этого раздела является теорема 2.2.12. В разделе 2.3 мы устанавливаем свойства дважды альтернативных делителей нуля, компоненты которых имеют ненулевую норму. Наконец, в разделе 2.4 мы изучаем взаимосвязь между централизатором и ортогонализатором произвольного элемента вещественной алгебры Кэли-Диксона.

Результаты этой главы опубликованы в статье [51], за исключением раздела 2.4, результаты которого опубликованы в статье [47].

### 2.1 Альтернативные подалгебры

При  $n \geq 4$  алгебра  $\mathcal{A}_n$  неальтернативна, а потому не является композиционной. Однако, как показывает следующая лемма, композиционное тождество всё ещё выполняется для альтернирующих между собой элементов. Её доказательство аналогично приведённому в [39, стр. 15].

**Лемма 2.1.1.** Пусть  $a, b \in \mathcal{A}_n$ ,  $[a, a, b] = 0$ . Тогда  $n(ab) = n(ba) = n(a)n(b)$ .

*Доказательство.* Заметим, что  $[\bar{a}, a, b] = [2\Re(a) - a, a, b] = -[a, a, b] = 0$ , откуда  $\bar{a}(ab) = (\bar{a}a)b$ . По определению симметрической билинейной формы  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , имеем  $n(ab) = \langle ab, ab \rangle$ . Применяя лемму 1.3.7 для  $x = ab$ ,  $y = a$  и  $z = b$ , получаем  $\langle ab, ab \rangle = \langle \bar{a}(ab), b \rangle = \langle (\bar{a}a)b, b \rangle = \langle n(a)b, b \rangle = n(a)\langle b, b \rangle = n(a)n(b)$ .

Теперь применим лемму 1.3.7 для  $x = ba$ ,  $y = b$  и  $z = a$  и получим  $n(ba) = \langle ba, ba \rangle = \langle (ba)\bar{a}, b \rangle$ . Поскольку, из гибкости,  $[b, a, \bar{a}] = -[b, a, a] = [a, a, b] = 0$ , имеет место равенство  $\langle (ba)\bar{a}, b \rangle = \langle b(a\bar{a}), b \rangle = \langle n(a)b, b \rangle = n(a)\langle b, b \rangle = n(a)n(b)$ . Таким образом,  $n(ba) = n(a)n(b)$ .  $\square$

Аналогично работам [38–40], мы будем обозначать  $\tilde{e}_0 = (0, e_0) \in \mathcal{A}_n$  и  $\tilde{a} = a\tilde{e}_0$  для всех  $a \in \mathcal{A}_n$ .

**Лемма 2.1.2.** *Пусть  $a, b \in \mathcal{A}_n$ , и  $b$  — дважды чисто мнимый элемент. Тогда*

$$(1) \quad \tilde{\tilde{a}} = \gamma_{n-1}a;$$

$$(2) \quad \tilde{a}b = -\tilde{\tilde{a}}b;$$

$$(3) \quad \tilde{a} \perp a.$$

*Если  $a$  — также дважды чисто мнимый, то*

$$(4) \quad \tilde{a}b + \tilde{\tilde{b}}a = 0, \text{ если и только если } a \perp b;$$

$$(5) \quad \gamma_{n-1}ab + \tilde{\tilde{b}}\tilde{a} = 0, \text{ если и только если } \tilde{a} \perp b.$$

*Доказательство.* Пусть  $a = (a_1, a_2)$ ,  $b = (b_1, b_2)$ . По определению,  $\tilde{a} = (a_1, a_2)(0, e_0) = (\gamma_{n-1}a_2, a_1)$ .

$$(1) \quad \text{Имеет место равенство } \tilde{\tilde{a}} = (\widetilde{\gamma_{n-1}a_2, a_1}) = (\gamma_{n-1}a_1, \gamma_{n-1}a_2) = \gamma_{n-1}a.$$

(2) Так как  $b$  — дважды чисто мнимый элемент, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{a}b &= (\gamma_{n-1}a_2, a_1)(b_1, b_2) = (\gamma_{n-1}a_2b_1 + \gamma_{n-1}\bar{b}_2a_1, \gamma_{n-1}b_2a_2 + a_1\bar{b}_1) = \\ &= -(\gamma_{n-1}(b_2a_1 + a_2\bar{b}_1), a_1b_1 + \gamma_{n-1}\bar{b}_2a_2) = -\tilde{\tilde{a}}b. \end{aligned}$$

$$(3) \quad \text{По лемме 1.3.7, } \langle a, \tilde{a} \rangle = \langle a, a\tilde{e}_0 \rangle = \langle \bar{a}a, \tilde{e}_0 \rangle = \langle n(a)e_0, \tilde{e}_0 \rangle = 0.$$

$$(4) \quad \text{По лемме 1.3.8, } a \perp b, \text{ если и только если } ab = -ba, \text{ что равносильно условию } -\tilde{a}b = \tilde{\tilde{a}}b = -\tilde{\tilde{b}}a = \tilde{b}a.$$

$$(5) \quad \text{По лемме 1.3.8, } \tilde{a} \perp b, \text{ если и только если } \tilde{a}b = -b\tilde{a} \text{ или, что равносильно, } -\gamma_{n-1}ab = -\tilde{\tilde{a}}b = \tilde{\tilde{a}}b = -\tilde{\tilde{b}}a = \tilde{b}a.$$

$\square$

Отметим, что в леммах 2.1.3, 2.1.6 и 2.1.9 мы допускаем равенство  $n(a)$  и  $n(b)$  нулю, в отличие от стандартного определения алгебр Кэли-Диксона.

**Лемма 2.1.3.** *Пусть  $a \in \mathcal{A}_n$  — дважды чисто мнимый элемент. Рассмотрим  $\mathbb{H}_a = \text{Lin}(e_0, a, \tilde{e}_0, \tilde{a})$ . Тогда существует сюръективный гомоморфизм  $\varphi_a : \mathcal{A}_2\{-n(a), \gamma_{n-1}\} \rightarrow \mathbb{H}_a$ , поэтому  $\mathbb{H}_a$  — ассоциативная подалгебра  $\mathcal{A}_n$ . Если, кроме того,  $n(a) \neq 0$ , то  $\varphi_a$  — изоморфизм.*

*Доказательство.* Обозначим  $\mu_1 = n(a)$ ,  $\mu_2 = n(\tilde{e}_0) = -\gamma_{n-1}$ . Поскольку  $a$  и  $\tilde{e}_0$  — чисто мнимые элементы, имеем  $a^2 = -n(a) = -\mu_1$  и  $\tilde{e}_0^2 = -n(\tilde{e}_0) = -\mu_2$ . Из условия  $a \in \text{Lin}(e_0, \tilde{e}_0)^\perp$  следует  $\tilde{a} \in \text{Lin}(e_0, \tilde{e}_0)^\perp$ . По лемме 2.1.2(3),  $\tilde{a} \perp a$ , поэтому  $a, \tilde{e}_0, \tilde{a}$  попарно антикоммутируют. Остаётся показать, что  $\tilde{a}a = -\tilde{a}\tilde{a} = \widetilde{\mu_1 e_0} = \mu_1 \tilde{e}_0$  по лемме 2.1.2(2),  $\tilde{a}\tilde{e}_0 = \tilde{\tilde{a}} = \gamma_{n-1}a = -\mu_2 a$  по лемме 2.1.2(1) и  $\tilde{a}\tilde{a} = -\tilde{a}\tilde{a} = \widetilde{\mu_1 \tilde{e}_0} = \mu_1 \gamma_{n-1} = -\mu_1 \mu_2$  по лемме 2.1.2(1–2). Таким образом, умножение в  $\mathbb{H}_a$  описывается следующей таблицей:

$\times$	$e_0$	$a$	$\tilde{e}_0$	$\tilde{a}$
$e_0$	$e_0$	$a$	$\tilde{e}_0$	$\tilde{a}$
$a$	$a$	$-\mu_1$	$\tilde{a}$	$-\mu_1 \tilde{e}_0$
$\tilde{e}_0$	$\tilde{e}_0$	$-\tilde{a}$	$-\mu_2$	$\mu_2 a$
$\tilde{a}$	$\tilde{a}$	$\mu_1 \tilde{e}_0$	$-\mu_2 a$	$-\mu_1 \mu_2$

Таблица 2.1: Таблица умножения в  $\mathbb{H}_a$ .

Теперь мы можем задать  $\varphi_a : \mathcal{A}_2\{-\mu_1, -\mu_2\} \rightarrow \mathbb{H}_a$  равенствами  $\varphi_a(e_0) = e_0$ ,  $\varphi_a(e_1) = a$ ,  $\varphi_a(e_2) = \tilde{e}_0$ ,  $\varphi_a(e_3) = \tilde{a}$ . Таблица умножения 2.1 совпадает с таблицей умножения  $\mathcal{A}_2\{-\mu_1, -\mu_2\}$ , и элементы  $e_0, e_1, e_2, e_3$  образуют базис  $\mathcal{A}_2\{-\mu_1, -\mu_2\}$ . Таким образом, любое нетривиальное равенство в  $\mathcal{A}_2\{-\mu_1, -\mu_2\}$  сохраняется под действием  $\varphi_a$ , поэтому  $\varphi_a$  — это действительно гомоморфизм. Ясно, что  $\varphi_a$  сюръективно, так как  $\mathbb{H}_a = \text{Lin}(e_0, a, \tilde{e}_0, \tilde{a})$ .

Чтобы доказать последнее утверждение леммы, мы используем тот факт, что  $e_0, a, \tilde{e}_0, \tilde{a}$  образуют ортогональную систему относительно симметрической билинейной формы  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Если  $n(a) \neq 0$ , то, по лемме 2.1.1,  $n(\tilde{a}) = n(a\tilde{e}_0) = n(a)n(\tilde{e}_0) \neq 0$ , поэтому  $e_0, a, \tilde{e}_0, \tilde{a}$  линейно независимы, а значит,  $\varphi_a$  — изоморфизм.  $\square$

**Замечание 2.1.4.** В случае, когда  $n(a) = 0$ , отображение  $\varphi_a$  в лемме 2.1.3 может иметь нетривиальное ядро даже при  $a \neq 0$ , так как возможно равенство  $a = \tilde{a}$ .

**Следствие 2.1.5.** Элемент  $\tilde{e}_0$  строго альтернативен в  $\mathcal{A}_n$ .

*Доказательство.* Пусть  $a \in \mathcal{A}_n$ ,  $a'$  — ортогональная проекция  $a$  на  $\text{Lin}(e_0, \tilde{e}_0)^\perp$ . По лемме 2.1.3,  $a'$  и  $\tilde{e}_0$  порождают ассоциативную подалгебру  $\mathbb{H}'_a \subset \mathcal{A}_n$ . Ясно, что  $a \in \mathbb{H}'_a$ , поэтому  $[a, a, \tilde{e}_0] = [\tilde{e}_0, \tilde{e}_0, a] = 0$ .  $\square$

**Лемма 2.1.6.** Пусть  $a, b \in \mathcal{A}_n$  — чисто мнимые элементы,  $b \perp a$ . Пусть также  $a$  строго альтернирует с  $b$ . Обозначим  $\mathbb{H}_{a,b} = \text{Lin}(e_0, a, b, ab)$ . Тогда существует сюръективный гомоморфизм  $\psi_{a,b} : \mathcal{A}_2\{-n(a), -n(b)\} \rightarrow \mathbb{H}_{a,b}$ , поэтому  $\mathbb{H}_{a,b}$  — ассоциативная подалгебра  $\mathcal{A}_n$ . Если, кроме того,  $n(a) \neq 0$  и  $n(b) \neq 0$ , то  $\psi_{a,b}$  — изоморфизм.

*Доказательство.* Обозначим  $\mu_1 = n(a)$ ,  $\mu_2 = n(b)$ . Поскольку  $a$  и  $b$  — чисто мнимые элементы, имеем  $a^2 = -n(a) = -\mu_1$  и  $b^2 = -n(b) = -\mu_2$ . Из леммы 1.3.7 следует, что система  $\{e_0, a, b, ab\}$  ортогональна относительно  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Тогда  $ab$  также является чисто мнимым и, по лемме 1.3.8,  $a, b, ab$  попарно антикоммутируют.

Элемент  $a$  строго альтернирует с  $b$ , поэтому  $a(ab) = a^2 b = -\mu_1 b$ ,  $b(ab) = -b(ba) = -b^2 a = \mu_2 a$ ,  $(ab)a = -(ba)a = -ba^2 = \mu_1 b$ ,  $(ab)b = ab^2 = -\mu_2 a$ . Наконец, из леммы 2.1.1 следует,

что  $(ab)^2 = -n(ab) = -n(a)n(b) = -\mu_1\mu_2$ . Таким образом, мы имеем следующую таблицу умножения в  $\mathbb{H}_{a,b}$ :

$\times$	$e_0$	$a$	$b$	$ab$
$e_0$	$e_0$	$a$	$b$	$ab$
$a$	$a$	$-\mu_1$	$ab$	$-\mu_1b$
$b$	$b$	$-ab$	$-\mu_2$	$\mu_2a$
$ab$	$ab$	$\mu_1b$	$-\mu_2a$	$-\mu_1\mu_2$

Таблица 2.2: Таблица умножения в  $\mathbb{H}_{a,b}$ .

Тогда мы можем задать  $\psi_{a,b}$  равенствами  $\psi_{a,b}(e_0) = e_0$ ,  $\psi_{a,b}(e_1) = a$ ,  $\psi_{a,b}(e_2) = b$ ,  $\psi_{a,b}(e_3) = ab$ . Оставшаяся часть доказательства аналогична доказательству леммы 2.1.3.  $\square$

**Лемма 2.1.7.** Пусть  $a, b \in \mathcal{A}_n$  — чисто мнимые элементы,  $b \not\perp a$ ,  $n(a) = n(b) = 0$ . Пусть также  $a$  строго альтернирует с  $b$ . Обозначим  $\mathbb{H}_{a,b} = \text{Lin}(e_0, a, b, ab)$ . Тогда существует сюръективный гомоморфизм  $\psi_{a,b} : \hat{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{H}_{a,b}$ , поэтому  $\mathbb{H}_{a,b}$  — ассоциативная подалгебра  $\mathcal{A}_n$ .

*Доказательство.* Поскольку  $a$  и  $b$  — чисто мнимые элементы, имеем  $a^2 = -n(a) = 0$  и  $b^2 = -n(b) = 0$ . Обозначим  $k = 2\Re(ab)$ . Тогда, по следствию 1.3.5 и лемме 1.3.7,  $k = 2\Re(ab) = \langle ab, e_0 \rangle = \langle a, \bar{b} \rangle = -\langle a, b \rangle \neq 0$ . Ясно, что  $ba = \bar{b}\bar{a} = \overline{ab} = k - ab$ .

Элемент  $a$  строго альтернирует с  $b$ , поэтому  $a(ab) = a^2b = 0$ ,  $b(ab) = b(k - ba) = kb - b^2a = kb$ ,  $(ab)a = (k - ba)a = ka - ba^2 = ka$ ,  $(ab)b = ab^2 = 0$ . Наконец, из леммы 2.1.1 следует, что  $(ab)^2 = (ab)(k - \overline{ab}) = kab - n(ab) = kab - n(a)n(b) = kab$ . Таким образом, мы имеем следующую таблицу умножения в  $\mathbb{H}_{a,b}$ :

$\times$	$e_0$	$a$	$b$	$ab$
$e_0$	$e_0$	$a$	$b$	$ab$
$a$	$a$	$0$	$ab$	$0$
$b$	$b$	$k - ab$	$0$	$kb$
$ab$	$ab$	$ka$	$0$	$kab$

Таблица 2.3: Таблица умножения в  $\mathbb{H}_{a,b}$  при  $n(a) = n(b) = 0$ .

Рассмотрим элементы  $x = i + \ell$ ,  $y = -\frac{k}{2}(i + \ell i)$ ,  $xy = \frac{k}{2}(1 - i - \ell - \ell i)$  в  $\hat{\mathbb{H}}$ . Тогда  $1, x, y, xy$  линейно независимы в  $\hat{\mathbb{H}}$ , а их произведения удовлетворяют тем же соотношениям, что и произведения  $e_0, a, b, ab$ , так как  $\hat{\mathbb{H}}$  ассоциативна,  $n(x) = n(y) = 0$  и  $2\Re(xy) = k$ . Тогда мы можем задать  $\psi_{a,b}$  равенствами  $\psi_{a,b}(1) = e_0$ ,  $\psi_{a,b}(x) = a$ ,  $\psi_{a,b}(y) = b$ ,  $\psi_{a,b}(xy) = ab$ . Оставшаяся часть доказательства аналогична доказательству леммы 2.1.3.  $\square$

**Следствие 2.1.8.** Пусть  $a, b \in \mathcal{A}_n$  строго альтернируют. Тогда множество  $\text{Lin}(e_0, a, b, ab)$  — ассоциативная подалгебра в  $\mathcal{A}_n$ , замкнутая относительно сопряжения.

*Доказательство.* Пусть  $a' = \Im(a)$ ,  $b' = \Im(b)$ . Ясно, что  $a'$  и  $b'$  строго альтернируют и  $\text{Lin}(e_0, a, b, ab) = \text{Lin}(e_0, a', b', a'b')$ . Если  $n(a') = n(b') = 0$ , то либо  $a' \perp b'$ , и тогда достаточно

применить лемму 2.1.6 к элементам  $a'$  и  $b'$ , либо  $a' \not\perp b'$ , и тогда можно применить лемму 2.1.7 к элементам  $a'$  и  $b'$ . Иначе предположим без ограничения общности, что  $n(a') \neq 0$ , и обозначим  $k = \frac{\langle a', b' \rangle}{n(a')}$ . Тогда  $b'' = b' - ka' \in \text{Lin}(e_0, a')^\perp$  и  $\text{Lin}(e_0, a, b, ab) = \text{Lin}(e_0, a', b'', a'b'')$ . Кроме того,  $[a', a', b''] = [a', a', b'] - k[a', a', a'] = 0$  и  $[b'', b'', a'] = [b', b', a'] - k[a', b', a'] - k[b', a', a'] + k^2[a', a', a'] = 0$ , то есть  $a'$  и  $b''$  строго альтернируют. Остаётся применить лемму 2.1.6 к элементам  $a'$  и  $b''$ .  $\square$

Следующая лемма является обобщением [39, теорема 5.1].

**Лемма 2.1.9.** Пусть  $a, b \in \mathcal{A}_n$  — дважды чисто мнимые,  $b \perp \text{Lin}(a, \tilde{a})$ . Пусть также  $a$  строго альтернирует с  $b$ . Обозначим  $\mathbb{O}_{a,b} = \text{Lin}(e_0, a, b, ab, \tilde{e}_0, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{ab})$ . Тогда существует сюръективный гомоморфизм  $\varphi_{a,b} : \mathcal{A}_3\{-n(a), -n(b), \gamma_{n-1}\} \rightarrow \mathbb{O}_{a,b}$ , поэтому  $\mathbb{O}_{a,b}$  — альтернативная подалгебра  $\mathcal{A}_n$ . Если, кроме того,  $n(a) \neq 0$  и  $n(b) \neq 0$ , то  $\varphi_{a,b}$  — изоморфизм.

*Доказательство.* Обозначим  $\mu_1 = n(a)$ ,  $\mu_2 = n(b)$ ,  $\mu_3 = n(\tilde{e}_0) = -\gamma_{n-1}$ . Поскольку  $a, b$  и  $\tilde{e}_0$  — чисто мнимые элементы, имеем  $a^2 = -n(a) = -\mu_1$ ,  $b^2 = -n(b) = -\mu_2$  и  $\tilde{e}_0^2 = -n(\tilde{e}_0) = -\mu_3$ . С помощью леммы 1.3.7 нетрудно показать, что из  $a \perp \text{Lin}(e_0, \tilde{e}_0)$  и  $b \perp \text{Lin}(e_0, a, \tilde{e}_0, \tilde{a})$  следует, что система  $\{e_0, a, b, ab, \tilde{e}_0, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{ab}\}$  ортогональна относительно  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Тогда, по лемме 1.3.8, элементы  $a, b, ab, \tilde{e}_0, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{ab}$  попарно антикоммутируют. Отметим, что  $ab$  — также дважды чисто мнимый элемент.

По лемме 2.1.6, существует сюръективный гомоморфизм  $\psi_{a,b} : \mathcal{A}_2\{-\mu_1, -\mu_2\} \rightarrow \mathbb{H}_{a,b}$ . Мы продолжим его до  $\varphi_{a,b} : \mathcal{A}_3\{-\mu_1, -\mu_2, -\mu_3\} \rightarrow \mathbb{O}_{a,b}$ . Применим лемму 2.1.3 к элементам  $a, b$  и  $ab$  по отдельности. Затем используем лемму 2.1.2(2), чтобы показать, что  $\tilde{a}b = -\tilde{ab}$ ,  $\tilde{a}(ab) = -\tilde{a}(\tilde{ab}) = \mu_1\tilde{b}$ ,  $\tilde{b}a = -\tilde{b}a = \tilde{ab}$ ,  $\tilde{b}(ab) = -\tilde{b}(\tilde{ab}) = -\mu_2\tilde{a}$ ,  $\tilde{ab} \cdot a = -(\tilde{ab})a = -\mu_1\tilde{b}$ ,  $\tilde{ab} \cdot b = -(\tilde{ab})b = \mu_2\tilde{a}$ . Из леммы 2.1.2(1–2) получаем  $\tilde{b}\tilde{a} = -\tilde{b}\tilde{a} = -\tilde{ab} = -\gamma_{n-1}ab = \mu_3ab$ ,  $\tilde{ab} \cdot \tilde{a} = -(\tilde{ab})\tilde{a} = \mu_1\tilde{\tilde{b}} = \mu_1\gamma_{n-1}b = -\mu_1\mu_3b$  и  $\tilde{ab} \cdot \tilde{b} = -(\tilde{ab})\tilde{b} = -\mu_2\tilde{\tilde{a}} = -\mu_2\gamma_{n-1}a = \mu_2\mu_3a$ . Таким образом, мы имеем следующую таблицу умножения в  $\mathbb{O}_{a,b}$ :

$\times$	$e_0$	$a$	$b$	$ab$	$\tilde{e}_0$	$\tilde{a}$	$\tilde{b}$	$\tilde{ab}$
$e_0$	$e_0$	$a$	$b$	$ab$	$\tilde{e}_0$	$\tilde{a}$	$\tilde{b}$	$\tilde{ab}$
$a$	$a$	$-\mu_1$	$ab$	$-\mu_1b$	$\tilde{a}$	$-\mu_1\tilde{e}_0$	$-\tilde{ab}$	$\mu_1\tilde{b}$
$b$	$b$	$-ab$	$-\mu_2$	$\mu_2a$	$\tilde{b}$	$\tilde{ab}$	$-\mu_2\tilde{e}_0$	$-\mu_2\tilde{a}$
$ab$	$ab$	$\mu_1b$	$-\mu_2a$	$-\mu_1\mu_2$	$\tilde{ab}$	$-\mu_1\tilde{b}$	$\mu_2\tilde{a}$	$-\mu_1\mu_2\tilde{e}_0$
$\tilde{e}_0$	$\tilde{e}_0$	$-\tilde{a}$	$-\tilde{b}$	$-\tilde{ab}$	$-\mu_3$	$\mu_3a$	$\mu_3b$	$\mu_3ab$
$\tilde{a}$	$\tilde{a}$	$\mu_1\tilde{e}_0$	$-\tilde{ab}$	$\mu_1\tilde{b}$	$-\mu_3a$	$-\mu_1\mu_3$	$-\mu_3ab$	$\mu_1\mu_3b$
$\tilde{b}$	$\tilde{b}$	$\tilde{ab}$	$\mu_2\tilde{e}_0$	$-\mu_2\tilde{a}$	$-\mu_3b$	$\mu_3ab$	$-\mu_2\mu_3$	$-\mu_2\mu_3a$
$\tilde{ab}$	$\tilde{ab}$	$-\mu_1\tilde{b}$	$\mu_2\tilde{a}$	$\mu_1\mu_2\tilde{e}_0$	$-\mu_3ab$	$-\mu_1\mu_3b$	$\mu_2\mu_3a$	$-\mu_1\mu_2\mu_3$

Таблица 2.4: Таблица умножения в  $\mathbb{O}_{a,b}$ .

Теперь мы можем задать  $\varphi_{a,b}$  равенствами  $\varphi_{a,b}((e_j, 0)) = \psi_{a,b}(e_j)$  и  $\varphi_{a,b}((0, e_j)) = \tilde{\psi}_{a,b}(e_j)$  для всех  $0 \leq j \leq 3$ . Оставшаяся часть доказательства аналогична доказательству леммы 2.1.3.  $\square$

**Следствие 2.1.10.** Пусть  $x, y \in \mathcal{A}_{n-1}$  строго альтернируют. Тогда в  $\mathcal{A}_n$  выполнено

$$x\tilde{y} = \widetilde{yx}, \quad \tilde{x}y = \widetilde{x\bar{y}}, \quad \tilde{x}\tilde{y} = \gamma_{n-1}\bar{y}x.$$

*Доказательство.* По следствию 2.1.8, элементы  $e_0, x$  и  $y$  порождают ассоциативную подалгебру  $\mathcal{A} = \text{Lin}(e_0, x, y, xy)$  в  $\mathcal{A}_{n-1}$ , замкнутую относительно сопряжения. Тогда  $x, y$  и  $\tilde{e}_0$  порождают альтернативную подалгебру  $\mathcal{A}\{\gamma_{n-1}\} \subset \mathcal{A}_n$ . Согласно [41, стр. 419-420],  $\mathcal{A}\{\gamma_{n-1}\}$  удовлетворяет тождествам Муфанг, то есть для любых  $a, b, c \in \mathcal{A}\{\gamma_{n-1}\}$  выполнено

$$c(a(cb)) = ((ca)c)b; \quad (2.1)$$

$$a(c(bc)) = ((ac)b)c; \quad (2.2)$$

$$(ca)(bc) = (c(ab))c; \quad (2.3)$$

$$(ca)(bc) = c((ab)c). \quad (2.4)$$

Для любого  $z \in \mathcal{A}_{n-1}$  выполнено  $\tilde{z} = z\tilde{e}_0 = \tilde{e}_0\bar{z}$ . Тогда

$$\begin{aligned} x\tilde{y} &= x(\tilde{e}_0\bar{y}) = \frac{1}{\tilde{e}_0^2} \tilde{e}_0(\tilde{e}_0(x(\tilde{e}_0\bar{y}))) \stackrel{(2.1)}{=} \frac{1}{\tilde{e}_0^2} \tilde{e}_0(((\tilde{e}_0x)\tilde{e}_0)\bar{y}) = \\ &= \frac{1}{\tilde{e}_0^2} \tilde{e}_0(((\tilde{x}\tilde{e}_0)\tilde{e}_0)\bar{y}) = \frac{\tilde{e}_0^2}{\tilde{e}_0^2} \tilde{e}_0(\tilde{x}\bar{y}) = \tilde{e}_0(\bar{y}x) = \widetilde{yx}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}y &= (x\tilde{e}_0)y = \frac{1}{\tilde{e}_0^2} (((x\tilde{e}_0)y)\tilde{e}_0)\tilde{e}_0 \stackrel{(2.2)}{=} \frac{1}{\tilde{e}_0^2} (x(\tilde{e}_0(y\tilde{e}_0)))\tilde{e}_0 = \\ &= \frac{1}{\tilde{e}_0^2} (x(\tilde{e}_0(\tilde{e}_0\bar{y})))\tilde{e}_0 = \frac{\tilde{e}_0^2}{\tilde{e}_0^2} (x\bar{y})\tilde{e}_0 = \widetilde{x\bar{y}}, \end{aligned}$$

$$\tilde{x}\tilde{y} = (x\tilde{e}_0)(y\tilde{e}_0) = (\tilde{e}_0\bar{x})(y\tilde{e}_0) \stackrel{(2.3)}{=} (\tilde{e}_0(\bar{x}y))\tilde{e}_0 = ((\bar{x}y)\tilde{e}_0)\tilde{e}_0 = (\bar{y}x)\tilde{e}_0^2 = \gamma_{n-1}\bar{y}x. \quad \square$$

## 2.2 Шестиугольники в графах делителей нуля

**Лемма 2.2.1.** Пусть  $(a, b), (c, d) \in \mathcal{A}_{n+1}$ , и элементы  $c, d \in \mathcal{A}_n$  (нестрого) альтернируют с элементами  $a, b \in \mathcal{A}_n$ . Предположим также, что  $n(c) - \chi\gamma_n n(d) = \chi n(c) - \gamma_n n(d) = 0$  для некоторого  $\chi \in \mathbb{R}$ . Тогда

$$(1) \text{ если } (a, b)(c, d) = 0, \text{ то } (c, d)(\bar{a}\bar{c}, -\chi da) = 0;$$

$$(2) \text{ если } (c, d)(a, b) = 0, \text{ то } (\bar{c}\bar{a}, -\chi d\bar{a})(c, d) = 0.$$

*Доказательство.*

(1) Имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned} (c, d)(\bar{a}\bar{c}, -\chi da) &= (c(\bar{a}\bar{c}) + \gamma_n(\overline{-\chi da})d, (-\chi da)c + d(ac)) = \\ &= (c(\bar{c}\bar{a}) - \chi\gamma_n(\bar{a}\bar{d})d, \chi(b\bar{c})c - \gamma_n d(\bar{d}b)) = \\ &= ((c\bar{c})\bar{a} - \chi\gamma_n \bar{a}(\bar{d}d), \chi b(\bar{c}c) - \gamma_n(d\bar{d})b) = \\ &= ((n(c) - \chi\gamma_n n(d))\bar{a}, (\chi n(c) - \gamma_n n(d))b) = 0. \end{aligned}$$

(2) Аналогично,

$$\begin{aligned}
(\bar{c}a, -\chi d\bar{a})(c, d) &= ((\bar{c}a)c + \gamma_n \bar{d}(-\chi d\bar{a}), d(\bar{c}a) + (-\chi d\bar{a})\bar{c}) = \\
&= ((\bar{a}\bar{c})c - \chi \gamma_n \bar{d}(d\bar{a}), d(-\gamma_n \bar{b}d) + \chi(bc)\bar{c}) = \\
&= (\bar{a}(\bar{c}c) - \chi \gamma_n (\bar{d}d)\bar{a}, -\gamma_n (d\bar{d})b + \chi b(c\bar{c})) = \\
&= ((n(c) - \chi \gamma_n n(d))\bar{a}, (\chi n(c) - \gamma_n n(d))b) = 0. \quad \square
\end{aligned}$$

**Замечание 2.2.2.** Если в лемме 2.2.1 выполнено  $n(c) = n(d) = 0$ , то можно взять произвольное  $\chi \in \mathbb{R}$ . В противном случае, так как  $\gamma_n^2 = 1$ , мы немедленно получаем

$$\begin{cases} (n(c))^2 = (n(d))^2 \neq 0; \\ \chi = \frac{n(c)}{\gamma_n n(d)} = \frac{\gamma_n n(d)}{n(c)} = \pm 1. \end{cases} \quad (*)$$

Условие (\*) автоматически выполнено в том случае, если  $\mathcal{A}_{n+1}$  — алгебра главной последовательности, см. [38, стр. 25-27], или если  $\mathcal{A}_{n+1}$  — контр-алгебра Кэли-Диксона, см. лемму 4.1.1 ниже. Можно проверить, что данные доказательства используют только тот факт, что  $c, d \in \mathcal{A}_n$  (нестрого) альтернируют с  $a, b \in \mathcal{A}_n$ , и тогда  $n(c) = n(d)$ . Таким образом, значения  $\chi$  равны  $-1$  и  $1$ , соответственно.

В произвольной вещественной алгебре Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_{n+1}$  условие (\*) выполняется для любого элемента, обе компоненты которого являются стандартными базисными элементами с точностью до умножения на  $\pm 1$ . Мы будем изучать такие элементы в разделе 5.1. Однако в общем случае условие (\*) может не выполняться, см. пример 4.1.6 ниже.

**Предложение 2.2.3.** Если  $(x, y) \in \mathcal{A}_{n+1}$  — чисто мнимый и удовлетворяет условию (\*) со значением  $\chi = 1$ , то  $(x, y)$  ортогонален (в сильном смысле) самому себе.

*Доказательство.* По определению,  $n((x, y)) = n(x) - \gamma_n n(y) = \gamma_n n(y) - \gamma_n n(y) = 0$ , поэтому  $(x, y)(x, y) = -\overline{(x, y)(x, y)} = -n((x, y)) = 0$ .  $\square$

**Лемма 2.2.4.** Пусть элементы  $c, d \in \mathcal{A}_n$  альтернируют с элементами  $a, b \in \mathcal{A}_n$ , и пусть  $(a, b)(c, d) = 0$  или  $(c, d)(a, b) = 0$  в  $\mathcal{A}_{n+1}$ . Предположим, что  $n(a) \neq 0$  или  $n(b) \neq 0$ , а также  $n(c) \neq 0$  или  $n(d) \neq 0$ . Тогда  $(a, b)$  и  $(c, d)$  удовлетворяют условию (\*) с одним и тем же значением  $\chi$ , и, кроме того,  $(\bar{a}\bar{c}, -\chi da)$  и  $(\bar{c}\bar{a}, -\chi d\bar{a})$  также удовлетворяют условию (\*) с тем же значением  $\chi$ .

*Доказательство.* Воспользуемся соображениями, аналогичными изложенным в [38, стр. 25]. Без ограничения общности будем считать, что  $(a, b)(c, d) = (ac + \gamma_n \bar{d}b, da + b\bar{c}) = 0$ , — случай  $(c, d)(a, b) = 0$  рассматривается аналогично. По лемме 2.1.1,

$$\begin{aligned}
n(a)n(c) &= n(ac) = n(-\gamma_n \bar{d}b) = n(\bar{d}b) = n(b)n(\bar{d}) = n(b)n(d), \\
n(a)n(d) &= n(da) = n(-b\bar{c}) = n(b\bar{c}) = n(b)n(\bar{c}) = n(b)n(c), \\
(n(c))^2 n(a) &= n(c)(n(a)n(c)) = n(c)(n(b)n(d)) = n(d)(n(b)n(c)) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n(d)(n(a)n(d)) = (n(d))^2 n(a), \\
(n(c))^2 n(b) &= n(c)(n(b)n(c)) = n(c)(n(a)n(d)) = n(d)(n(a)n(c)) = \\
&= n(d)(n(b)n(d)) = (n(d))^2 n(b).
\end{aligned}$$

Из  $n(a) \neq 0$  или  $n(b) \neq 0$  следует  $(n(c))^2 = (n(d))^2 \neq 0$ . Аналогично, из  $n(c) \neq 0$  или  $n(d) \neq 0$  следует  $(n(a))^2 = (n(b))^2 \neq 0$ . Значит,  $\gamma_n \frac{n(b)}{n(a)} = \gamma_n \frac{n(d)}{n(c)} = \chi = \pm 1$ . Кроме того, из леммы 2.1.1 вытекает, что

$$\gamma_n \frac{n(-\chi da)}{n(\bar{a}\bar{c})} = \gamma_n \frac{n(da)}{n(ac)} = \gamma_n \frac{n(a)n(d)}{n(a)n(c)} = \gamma_n \frac{n(d)}{n(c)} = \chi.$$

Аналогично доказывается, что  $\gamma_n \frac{n(-\chi d\bar{a})}{n(\bar{c}\bar{a})} = \chi$ .  $\square$

В утверждениях 2.2.5–2.2.11 и на рисунке 2.5 мы предполагаем, что элементы  $a, b \in \mathcal{A}_n$  строго альтернируют с элементами  $c, d \in \mathcal{A}_n$ , и  $(a, b)(c, d) = 0$  в  $\mathcal{A}_{n+1}$ . Везде, кроме леммы 2.2.5, мы также считаем, что  $(a, b)$  и  $(c, d)$  удовлетворяют условию (\*).

**Лемма 2.2.5.** *Элементы  $ac, da$  строго альтернируют с элементами  $a, b, c, d$ .*

*Доказательство.* Из  $(a, b)(c, d) = (ac + \gamma_n \bar{d}b, da + b\bar{c}) = 0$  получаем, что  $ac = -\gamma_n \bar{d}b$  и  $da = -b\bar{c}$ . Тогда остаётся применить следствие 2.1.8 к парам элементов  $a$  и  $c$ ,  $b$  и  $c$ ,  $a$  и  $d$ ,  $b$  и  $d$ .

Отметим, что это утверждение нетрудно доказать и непосредственно:

$$\begin{aligned}
[a, a, ac] &= -[a, \bar{a}, ac] = -(a\bar{a})(ac) + a(\bar{a}(ac)) = \\
&= -(a\bar{a})(ac) + a((\bar{a}a)c) = -n(a)ac + n(a)ac = 0, \\
[b, b, ac] &= [b, b, -\gamma_n \bar{d}b] = \gamma_n [\bar{d}b, b, b] = -\gamma_n [\bar{d}b, \bar{b}, b] = 0.
\end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что  $a, b, c, d$  альтернируют с  $ac, da$ . И наоборот,

$$\begin{aligned}
[ac, ac, a] &= -[ac, \bar{a}\bar{c}, a] = -((ac)(\bar{a}\bar{c}))a + (ac)((\bar{c}\bar{a})a) = \\
&= -n(ac)a + (ac)(\bar{c}(\bar{a}a)) = -n(ac)a + n(a)(ac)\bar{c} = \\
&= -n(ac)a + n(a)a(c\bar{c}) = -n(ac)a + n(a)n(c)a = 0,
\end{aligned}$$

поскольку из леммы 2.1.1 следует, что  $n(ac) = n(a)n(c)$ . Таким образом, элементы  $ac, da$  альтернируют с элементами  $a, b, c, d$ .  $\square$

**Следствие 2.2.6.** *Существует следующий цикл длины 6 в  $\Gamma_Z(\mathcal{A}_{n+1})$ :*

$$(a, b) \rightarrow (c, d) \rightarrow (\bar{a}\bar{c}, -\chi da) \rightarrow (a, -b) \rightarrow (c, -d) \rightarrow (\bar{a}\bar{c}, \chi da) \rightarrow (a, b).$$

*Доказательство.* По лемме 2.2.4,  $(a, b)$ ,  $(c, d)$  и  $(\bar{a}\bar{c}, -\chi da)$  удовлетворяют условию (\*) с одним и тем же значением  $\chi$ . Кроме того, согласно лемме 2.2.5, элементы  $ac, da$  строго альтернируют с элементами  $a, b, c, d$ . Мы получаем искомый цикл последовательным применением леммы 2.2.1(1):

- из  $(a, b)(c, d) = 0$  следует  $(c, d)(\overline{ac}, -\chi da) = 0$ ;
- $\overline{c(\overline{ac})} = \overline{c(\overline{ca})} = \overline{(c\overline{c})\overline{a}} = n(c)a$ ,  
 $-\chi(-\chi da)c = (da)c = (-b\overline{c})c = -b(\overline{cc}) = -n(c)b$ ,  
 поэтому из  $(c, d)(\overline{ac}, -\chi da) = 0$  следует  $(\overline{ac}, -\chi da)(a, -b) = 0$ , так как  $n(c) \neq 0$ ;
- $\overline{(\overline{ac})a} = \overline{(\overline{ca})a} = \overline{c(\overline{aa})} = n(a)c$ ,  
 $-\chi(-b)(\overline{ac}) = \chi b(\overline{-\gamma_n \overline{db}}) = -\chi \gamma_n b(\overline{bd}) = -\chi \gamma_n (b\overline{b})d = -\chi \gamma_n n(b)d = -n(a)d$ ,  
 поэтому из  $(\overline{ac}, -\chi da)(a, -b) = 0$  следует  $(a, -b)(c, -d) = 0$ , так как  $n(a) \neq 0$ ;
- из  $(a, -b)(c, -d) = 0$  следует  $(c, -d)(\overline{ac}, \chi da) = 0$ ;
- из  $(c, -d)(\overline{ac}, \chi da) = 0$  следует  $(\overline{ac}, \chi da)(a, b) = 0$ .

□

В некоторых случаях оказывается удобным использовать равенства, которые устанавливает следующее предложение.

**Предложение 2.2.7.** *Имеют место равенства  $(\overline{ac}, -\chi da) = -(\gamma_n \overline{bd}, -\chi b\overline{c})$  и  $(\overline{ac}, \chi da) = -(\gamma_n \overline{bd}, \chi b\overline{c})$ .*

*Доказательство.* Поскольку  $(a, b)(c, d) = (ac + \gamma_n \overline{db}, da + b\overline{c}) = 0$ , имеем  $\overline{ac} = -\overline{\gamma_n \overline{db}} = -\gamma_n \overline{bd}$  и  $da = -b\overline{c}$ . Значит,  $(\overline{ac}, -\chi da) = (-\gamma_n \overline{bd}, \chi b\overline{c}) = -(\gamma_n \overline{bd}, -\chi b\overline{c})$  и  $(\overline{ac}, \chi da) = (-\gamma_n \overline{bd}, -\chi b\overline{c}) = -(\gamma_n \overline{bd}, \chi b\overline{c})$ . □

**Предложение 2.2.8.** *Пусть  $(x, y)(z, w) = 0$  в  $\mathcal{A}_{n+1}$ . Тогда  $(\overline{x}, \overline{y})(\gamma_n \overline{w}, \overline{z}) = (\gamma_n \overline{y}, \overline{x})(\gamma_n w, z) = (\gamma_n y, x)(\overline{z}, \overline{w}) = 0$ .*

*Доказательство.* По условию,  $(x, y)(z, w) = (xz + \gamma_n \overline{wy}, wx + y\overline{z}) = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} (\overline{x}, \overline{y})(\gamma_n \overline{w}, \overline{z}) &= (\gamma_n \overline{x\overline{w}} + \gamma_n z\overline{y}, \overline{z\overline{x}} + \gamma_n \overline{y}w) = (\gamma_n (\overline{wx + y\overline{z}}), \overline{zx + \gamma_n \overline{wy}}) = 0, \\ (\gamma_n \overline{y}, \overline{x})(\gamma_n w, z) &= (\gamma_n^2 \overline{yw} + \gamma_n \overline{z\overline{x}}, \gamma_n z\overline{y} + \gamma_n \overline{x\overline{w}}) = \gamma_n (\overline{xz + \gamma_n \overline{wy}}, \overline{wx + y\overline{z}}) = 0, \\ (\gamma_n y, x)(\overline{z}, \overline{w}) &= (\gamma_n y\overline{z} + \gamma_n wx, \gamma_n \overline{wy} + xz) = 0. \end{aligned}$$

□

**Следствие 2.2.9.** *Существуют следующие циклы длины 6 в  $\Gamma_Z(\mathcal{A}_{n+1})$ :*

$$\begin{aligned} (\overline{a}, \overline{b}) &\rightarrow (\gamma_n \overline{d}, \overline{c}) \rightarrow (-\chi \gamma_n da, \overline{ac}) \rightarrow (\overline{a}, -\overline{b}) \rightarrow (\gamma_n \overline{d}, -\overline{c}) \rightarrow (\chi \gamma_n da, \overline{ac}) \rightarrow (\overline{a}, \overline{b}), \\ (\gamma_n \overline{b}, a) &\rightarrow (\overline{c}, \overline{d}) \rightarrow (-\chi \gamma_n \overline{da}, ac) \rightarrow (\gamma_n \overline{b}, -a) \rightarrow (\overline{c}, -\overline{d}) \rightarrow (\chi \gamma_n \overline{da}, ac) \rightarrow (\gamma_n \overline{b}, a), \\ (\gamma_n \overline{b}, \overline{a}) &\rightarrow (\gamma_n d, c) \rightarrow (ac, -\chi \overline{da}) \rightarrow (\gamma_n \overline{b}, -\overline{a}) \rightarrow (\gamma_n d, -c) \rightarrow (ac, \chi \overline{da}) \rightarrow (\gamma_n \overline{b}, \overline{a}). \end{aligned}$$

*Доказательство.* Непосредственно вытекает из следствия 2.2.6 и предложения 2.2.8. □

**Замечание 2.2.10.** Циклы из следствия 2.2.9 можно также получить при помощи следствия 2.2.6, если брать в качестве исходных пар делителей нуля пары  $(\overline{a}, \overline{b})$  и  $(\gamma_n \overline{d}, \overline{c})$ ,  $(\gamma_n \overline{b}, a)$  и  $(\overline{c}, \overline{d})$ ,  $(\gamma_n \overline{b}, \overline{a})$  и  $(\gamma_n d, c)$ .

**Описание 2.2.11.** Используя следствия 2.2.6 и 2.2.9, мы получаем подграфы графа делителей нуля  $\Gamma_Z(\mathcal{A}_{n+1})$ , которые мы называем *шестиугольниками*. Они изображены на рисунке 2.5.

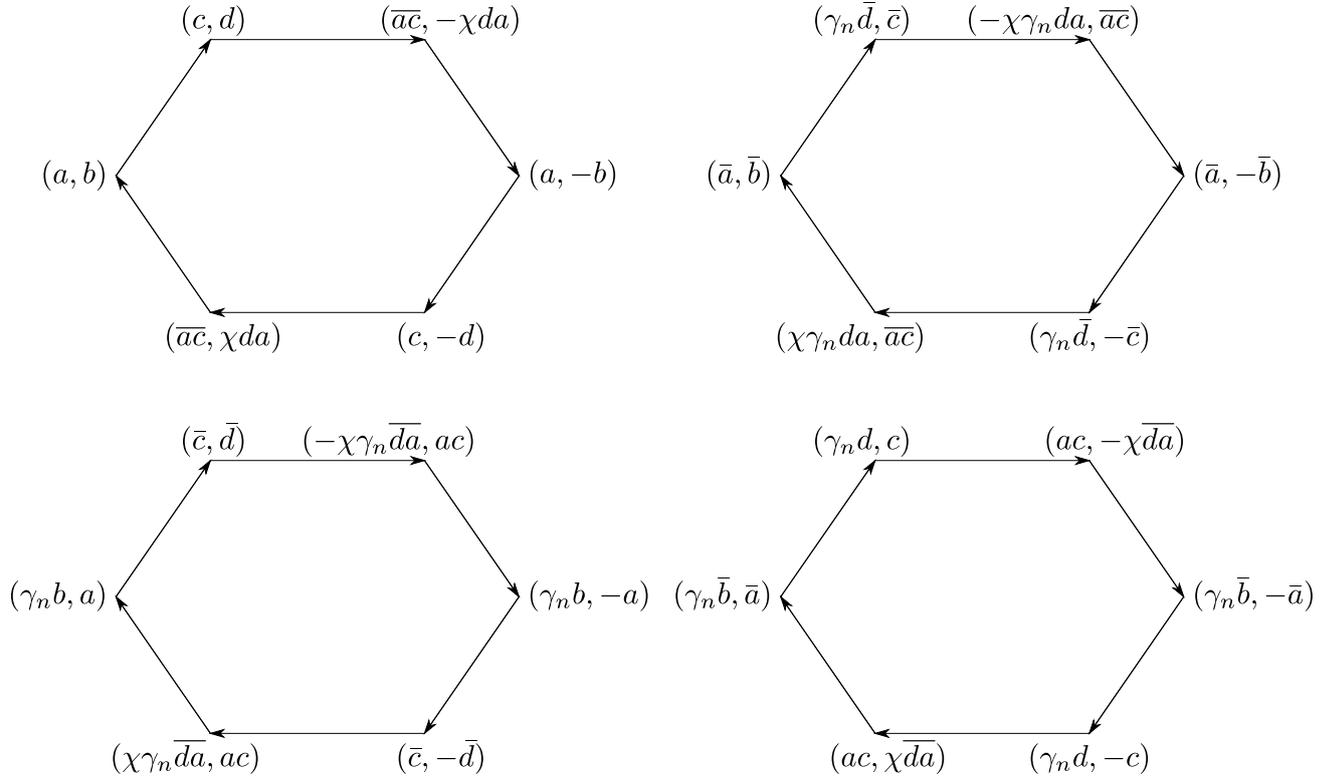


Рис. 2.5: Шестиугольники.

Объединяя результаты лемм 2.2.4 и 2.2.5, предложения 2.2.7, а также следствий 2.2.6 и 2.2.9, мы получаем следующую теорему.

**Теорема 2.2.12.** Пусть элементы  $a, b \in \mathcal{A}_n$  строго альтернируют с элементами  $c, d \in \mathcal{A}_n$ , и  $(a, b)(c, d) = 0$  в  $\mathcal{A}_{n+1}$ . Тогда

- (1) Элементы  $ac, da$  строго альтернируют с элементами  $a, b, c, d$ .
- (2) Пусть  $n(a) \neq 0$  или  $n(b) \neq 0$ , а также  $n(c) \neq 0$  или  $n(d) \neq 0$ . Тогда  $(a, b)$ ,  $(c, d)$  и  $(\overline{ac}, -\chi da)$  удовлетворяют условию (\*) с одним и тем же значением  $\chi$ .
- (3) В этом случае существуют следующие циклы длины 6 в  $\Gamma_Z(\mathcal{A}_{n+1})$ :

$$\begin{aligned}
& (a, b) \rightarrow (c, d) \rightarrow (\overline{ac}, -\chi da) \rightarrow (a, -b) \rightarrow (c, -d) \rightarrow (\overline{ac}, \chi da) \rightarrow (a, b), \\
& (\overline{a}, \overline{b}) \rightarrow (\gamma_n \overline{d}, \overline{c}) \rightarrow (-\chi \gamma_n da, \overline{ac}) \rightarrow (\overline{a}, -\overline{b}) \rightarrow (\gamma_n \overline{d}, -\overline{c}) \rightarrow (\chi \gamma_n da, \overline{ac}) \rightarrow (\overline{a}, \overline{b}), \\
& (\gamma_n b, a) \rightarrow (\overline{c}, \overline{d}) \rightarrow (-\chi \gamma_n \overline{da}, ac) \rightarrow (\gamma_n b, -a) \rightarrow (\overline{c}, -\overline{d}) \rightarrow (\chi \gamma_n \overline{da}, ac) \rightarrow (\gamma_n b, a), \\
& (\gamma_n \overline{b}, \overline{a}) \rightarrow (\gamma_n d, c) \rightarrow (ac, -\chi \overline{da}) \rightarrow (\gamma_n \overline{b}, -\overline{a}) \rightarrow (\gamma_n d, -c) \rightarrow (ac, \chi \overline{da}) \rightarrow (\gamma_n \overline{b}, \overline{a}).
\end{aligned}$$

- (4) Имеют место равенства  $(\overline{ac}, -\chi da) = -(\gamma_n \overline{bd}, -\chi b \overline{c})$  и  $(\overline{ac}, \chi da) = -(\gamma_n \overline{bd}, \chi b \overline{c})$ .

## 2.3 Дважды альтернативные делители нуля

**Обозначение.** Пусть  $a \in \mathcal{A}_n$ . Тогда отображения  $L_a, R_a : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{A}_n$  задаются равенствами

$$\begin{aligned} L_a(x) &= ax, \\ R_a(x) &= xa \end{aligned} \tag{2.5}$$

для всех  $x \in \mathcal{A}_n$ .

**Предложение 2.3.1.** [37, стр. 55] Для любого  $a \in \mathcal{A}_n$  отображения  $L_a$  и  $R_a$  являются линейными операторами в  $2^n$ -мерном линейном пространстве  $\mathcal{A}_n$ .

**Лемма 2.3.2.** Пусть  $a \in \mathcal{A}_n$ . Тогда  $\dim(\text{Ker } L_a) = \dim(\text{Ker } R_a)$ .

*Доказательство.* Пусть  $b \in \text{Ker } L_a$ , то есть  $ab = 0$ . Тогда, согласно лемме 1.3.7, для всех  $x \in \mathcal{A}_n$  выполняется равенство  $\langle \bar{b}, xa \rangle = \langle \bar{b}\bar{a}, x \rangle = \langle \overline{ab}, x \rangle = \langle 0, x \rangle = 0$ , то есть  $\bar{b} \perp \text{Im } R_a$ . Значит,  $\overline{\text{Ker } L_a} \perp \text{Im } R_a$  и  $\dim(\overline{\text{Ker } L_a}) + \dim(\text{Im } R_a) \leq \dim(\mathcal{A}_n)$ . Следовательно,  $\dim(\text{Ker } R_a) = \dim(\mathcal{A}_n) - \dim(\text{Im } R_a) \geq \dim(\overline{\text{Ker } L_a}) = \dim(\text{Ker } L_a)$ . Аналогично,  $\dim(\text{Ker } L_a) \geq \dim(\text{Ker } R_a)$ , откуда получаем  $\dim(\text{Ker } L_a) = \dim(\text{Ker } R_a)$ .  $\square$

**Следствие 2.3.3.**  $Z(\mathcal{A}_n) = Z_{LR}(\mathcal{A}_n)$ .

*Доказательство.* Пусть  $a \in \mathcal{A}_n$ ,  $a \neq 0$ . Тогда, согласно лемме 2.3.2,  $\text{Ker } L_a \neq \{0\}$ , если и только если  $\text{Ker } R_a \neq \{0\}$ . Другими словами,  $a \in Z_L(\mathcal{A}_n)$ , если и только если  $a \in Z_R(\mathcal{A}_n)$ . Значит,  $Z_L(\mathcal{A}_n) = Z_R(\mathcal{A}_n)$ , то есть  $Z(\mathcal{A}_n) = Z_{LR}(\mathcal{A}_n)$ .  $\square$

Таким образом, в случае вещественных алгебр Кэли-Диксона все делители нуля оказываются двусторонними делителями нуля. Теперь мы изучим связь между графами ортогональности и графами делителей нуля этих алгебр.

**Предложение 2.3.4.** Пусть  $([a], [b])$  — ребро в  $\Gamma_Z(\mathcal{A}_n)$ . Тогда  $([a], [b])$  является ребром также и в  $\Gamma_O(\mathcal{A}_n)$ , если и только если выполнено одно из следующих двух условий:

- (1)  $[b] = [\bar{a}]$  и  $n(a) = 0$ ;
- (2)  $\Re(a) = \Re(b) = 0$ .

*Доказательство.* Предположим, что  $ab = ba = 0$ . Тогда  $ab + ba = 0$ , то есть  $b \in \text{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a)$ , поэтому мы можем применить лемму 1.3.8. Если  $\Re(a) = 0$ , то  $\Re(b) = 0$  и  $\langle a, b \rangle = 0$ . В противном случае,  $n(a) = 0$  и  $b \in [\bar{a}]$ .

Теперь мы докажем обратную импликацию:

- (1) Если  $n(a) = 0$  и  $b \in [\bar{a}]$ , то мы сразу получаем  $ab = ba = 0$ ;
- (2) Если  $\Re(a) = \Re(b) = 0$ , то  $ba = \overline{\bar{a}b} = \overline{a\bar{b}} = \bar{0} = 0$ .  $\square$

Из предложения 2.3.4 следует, что любой делитель нуля  $a \in \mathcal{A}_n$  с нетривиальным ортогонализатором либо является чисто мнимым, либо имеет нулевую норму. Если  $a$  не является чисто мнимым, то содержащая его компонента связности  $\Gamma_O(\mathcal{A}_n)$  состоит из двух вершин:  $[a]$  и  $[\bar{a}]$ . Таким образом, в контексте графов ортогональности нас интересуют только чисто мнимые делители нуля.

**Определение 2.3.5.** Мы обозначаем множество чисто мнимых делителей нуля как

$$Z'(\mathcal{A}_n) = Z(\mathcal{A}_n) \cap \mathcal{A}'_n = \{x \in Z(\mathcal{A}_n) \mid \Re(x) = 0\}.$$

Тогда  $\Gamma'_O(\mathcal{A}_n)$  — подграф  $\Gamma_O(\mathcal{A}_n)$  на множестве вершин  $\mathbb{P}(Z'(\mathcal{A}_n))$ .

Далее мы будем рассматривать такие делители нуля  $(a, b) \in \mathcal{A}_{n+1}$ , у которых обе компоненты  $a$  и  $b$  являются альтернативными элементами в  $\mathcal{A}_n$ .

**Определение 2.3.6.** Множество *дважды альтернативных элементов*  $\mathcal{A}_{n+1}$  определяется как

$$DA(\mathcal{A}_{n+1}) = \{(a, b) \in \mathcal{A}_{n+1} \mid \text{оба элемента } a \text{ и } b \text{ являются альтернативными в } \mathcal{A}_n\}.$$

Следующее предложение содержит условие, при котором все элементы  $\mathcal{A}_{n+1}$  являются дважды альтернативными. Заметим, что дважды альтернативные элементы могут не быть альтернативными, см. лемму 4.1.5 ниже.

**Предложение 2.3.7.** Пусть  $n \in \mathbb{N}_0$ . Тогда  $DA(\mathcal{A}_{n+1}) = \mathcal{A}_{n+1}$ , если и только если  $n \leq 3$ .

*Доказательство.* По лемме 1.3.12, алгебра  $\mathcal{A}_n$  является альтернативной, если и только если  $n \leq 3$ , откуда немедленно следует требуемое утверждение.  $\square$

Согласно примеру 4.1.6 ниже, дважды альтернативные элементы не обязаны удовлетворять условию (\*) даже в том случае, когда обе их компоненты имеют ненулевую норму. Однако, по лемме 2.2.4, если левый или правый аннулятор некоторого дважды альтернативного элемента  $(a, b)$  содержит элемент  $(c, d)$ , причём  $n(a) \neq 0$  или  $n(b) \neq 0$ , а также  $n(c) \neq 0$  или  $n(d) \neq 0$ , то  $(a, b)$  удовлетворяет условию (\*).

**Лемма 2.3.8.** Пусть  $(a, b) \in DA(\mathcal{A}_{n+1})$  таково, что  $n(a) \neq 0$ , и пусть  $\chi = \gamma_n \frac{n(b)}{n(a)}$ . В частности, это выполнено, если  $(a, b)$  удовлетворяет условию (\*). Тогда

$$\begin{aligned} l. \text{ Ann}_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, b)) &= \left\{ \left( c, -\frac{(bc)a}{n(a)} \right) \mid b(ca) = \chi(bc)a \right\}, \\ r. \text{ Ann}_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, b)) &= \left\{ \left( c, -\frac{(b\bar{c})\bar{a}}{n(a)} \right) \mid (ac)\bar{b} = \chi a(c\bar{b}) \right\}. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Сперва рассмотрим  $l. \text{ Ann}_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, b))$ . Пусть для  $(c, d) \in \mathcal{A}_{n+1}$  выполнено  $(c, d)(a, b) = (ca + \gamma_n \bar{b}d, bc + d\bar{a}) = 0$ . Тогда  $bc + d\bar{a} = 0$ , поэтому  $n(a)d = d(\bar{a}a) = (d\bar{a})a = -(bc)a$ . Кроме того,  $ca + \gamma_n \bar{b}d = 0$  и  $\chi n(a) = \gamma_n n(b)$ , откуда  $b(ca) = -\gamma_n b(\bar{b}d) = -\gamma_n (b\bar{b})d =$

$-\gamma_n n(b)d = -\chi n(a)d = \chi(bc)a$ . Проводя эти же рассуждения в противоположную сторону, нетрудно показать, что для любого такого  $c \in \mathcal{A}_n$ , что  $b(ca) = \chi(bc)a$ , выполнено  $\left(c, -\frac{(bc)a}{n(a)}\right) \in l. \text{Ann}_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, b))$ . Таким образом, обратное утверждение также верно.

Теперь рассмотрим  $r. \text{Ann}_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, b))$ . Пусть для  $(c, d) \in \mathcal{A}_{n+1}$  выполнено  $(a, b)(c, d) = (ac + \gamma_n \bar{d}b, da + b\bar{c}) = 0$ . Тогда  $da + b\bar{c} = 0$ , поэтому  $n(a)d = d(a\bar{a}) = (da)\bar{a} = -(b\bar{c})\bar{a}$ . Поскольку  $ac + \gamma_n \bar{d}b = 0$  и  $\chi n(a) = \gamma_n n(b)$ , имеем  $(ac)\bar{b} = -\gamma_n (\bar{d}b)\bar{b} = -\gamma_n \bar{d}(b\bar{b}) = -\gamma_n n(b)\bar{d} = -\chi n(a)\bar{d} = \chi(-n(a)\bar{d}) = \chi(\overline{b\bar{c}}\bar{a}) = \chi a(\bar{c}\bar{b})$ . Ясно, что в этом случае обратное утверждение тоже верно, то есть для любого такого  $c \in \mathcal{A}_n$ , что  $(ac)\bar{b} = \chi a(\bar{c}\bar{b})$ , выполнено  $\left(c, -\frac{(b\bar{c})\bar{a}}{n(a)}\right) \in r. \text{Ann}_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, b))$ .  $\square$

**Лемма 2.3.9.** Пусть  $(a, b) \in DA(\mathcal{A}_{n+1})$  — такой чисто мнимый элемент, что  $n(a) \neq 0$ , и пусть  $\chi = \gamma_n \frac{n(b)}{n(a)} \neq 0$ . В частности, это выполнено, если  $(a, b)$  удовлетворяет условию (\*). Тогда

$$\begin{aligned} O_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, b)) &= \left\{ \left( c, -\frac{(bc)a}{n(a)} \right) \mid \Re(c) = 0, b(ca) = \chi(bc)a \right\} = \\ &= \left\{ \left( \frac{(a\bar{d})b}{n(b)}, d \right) \mid \langle d, ba \rangle = 0, (a\bar{d})b = \chi a(\bar{d}b) \right\}. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Для доказательства первой части формулы достаточно совместить предложение 2.3.4 и лемму 2.3.8.

Второе равенство доказывается аналогично. Условие  $(a, b)(c, d) = (ac + \gamma_n \bar{d}b, da + b\bar{c}) = 0$  выполняется тогда и только тогда, когда  $c = -\frac{(a\bar{d})b}{n(b)}$  и  $\bar{b}(da) = \chi(\bar{b}d)a$ . Поскольку  $\Re(a) = 0$ , это равносильно тому, что  $c = \frac{(a\bar{d})b}{n(b)}$  и  $(a\bar{d})b = \chi a(\bar{d}b)$ . Кроме того, по следствию 1.3.5 и лемме 1.3.7, мы имеем  $\Re(n(b)c) = \langle e_0, n(b)c \rangle = \langle e_0, (a\bar{d})b \rangle = \langle \bar{b}, a\bar{d} \rangle = \langle \bar{a}\bar{b}, \bar{d} \rangle = \langle \bar{b}\bar{a}, \bar{d} \rangle = \langle d, ba \rangle$ , поэтому  $\Re(c) = 0$ , если и только если  $\langle d, ba \rangle = 0$ .  $\square$

**Замечание 2.3.10.** Лемму 2.3.9 можно также интерпретировать следующим образом. Пусть элементы  $a, b \in \mathcal{A}_n$  строго альтернируют с элементами  $c, d \in \mathcal{A}_n$ ,  $(a, b)$  и  $(c, d)$  — чисто мнимые элементы, ортогональные в  $\mathcal{A}_{n+1}$  и удовлетворяющие условию (\*). Тогда  $b(ca) = \chi(bc)a$  и  $(a\bar{d})b = \chi a(\bar{d}b)$ . Кроме того, значение  $d$  однозначно определяется значениями  $a, b, c$  по формуле  $d = -\frac{(bc)a}{n(a)}$ . Значение  $c$  также однозначно определяется значениями  $a, b, d$  по формуле  $c = \frac{(a\bar{d})b}{n(b)}$ . Заметим, что из условия (\*) следует, что  $(n(c))^2 = (n(d))^2 \neq 0$ , откуда  $c \neq 0$  и  $d \neq 0$ .

**Следствие 2.3.11.** Пусть  $a, b, c, d, ac, ad \in \mathcal{A}_n$  попарно строго альтернируют,  $(a, b)(c, d) = 0$  в  $\mathcal{A}_{n+1}$ ,  $(a, b)$  и  $(c, d)$  удовлетворяют условию (\*). Пусть также  $\Re(a) = \Re(c) = \Re(ac) = 0$ . Тогда левый верхний шестиугольник на рисунке 2.5 является также неориентированным шестиугольником в  $\Gamma_O(\mathcal{A}_{n+1})$ , и в  $\Gamma_O(\mathcal{A}_{n+1})$  нет других рёбер, соединяющих его вершины, то есть в этом шестиугольнике нет хорд.

*Доказательство.* Поскольку  $\Re(a) = \Re(c) = \Re(ac) = 0$ , из предложения 2.3.4 следует, что данный шестиугольник является шестиугольником не только в  $\Gamma_Z(\mathcal{A}_{n+1})$ , но и в  $\Gamma_O(\mathcal{A}_{n+1})$ .

Пусть теперь  $(x, y)$  и  $(z, w)$  — какие-то две из его вершин, возможно, равные. Сперва мы покажем, что  $(x, y)$  не может быть ортогонален  $(z, w)$  и  $(z, -w)$  одновременно. Предположим противное. Тогда, согласно замечанию 2.3.10, из  $(x, y)(z, w) = 0$  следует  $w = -\frac{(yz)x}{n(x)}$ , а из  $(x, y)(z, -w) = 0$  следует  $-w = -\frac{(yz)x}{n(x)}$ , откуда  $w = -w$ . Но  $w \neq 0$ , противоречие.

Пусть  $\Re(x) = 0$ . В общем случае равенство  $(x, y)(x, -y) = (-n(x) - \gamma_n n(y), -2yx) = 0$  может выполняться, то есть  $(x, y)$  и  $(x, -y)$  могут быть ортогональны. Однако, если  $x$  строго альтернирует с  $y$  и  $(x, y)$  удовлетворяет условию  $(*)$ , то  $(x, y)$  не может быть ортогонален  $(x, -y)$ . Действительно, по лемме 2.1.1,  $n(yx) = n(y)n(x) \neq 0$ . Значит,  $yx \neq 0$ , откуда  $(x, y)(x, -y) \neq 0$ .  $\square$

## 2.4 Связь централизаторов и ортогонализаторов

В леммах 2.4.1 и 2.4.2 прямая сумма дополнительно подразумевает, что прямые слагаемые ортогональны друг другу относительно симметрической билинейной формы  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Лемма 2.4.1.** Пусть  $x \in \mathcal{A}_n$ ,  $x \neq 0$ ,  $\Re(x) = 0$ . Тогда  $C_{\mathcal{A}_n}(x) = \mathbb{R} \oplus O_{\mathcal{A}_n}(x) \oplus V$ , где  $\dim(V) \leq 1$ .

*Доказательство.* Ясно, что  $\mathbb{R} \subseteq C_{\mathcal{A}_n}(x)$ , поэтому требуется показать, что  $\Im(C_{\mathcal{A}_n}(x)) = O_{\mathcal{A}_n}(x) \oplus V$ , где  $\dim(V) \leq 1$ . Согласно лемме 1.3.8,  $\text{Anc}_{\mathcal{A}_n}(x) \subset \mathcal{A}'_n$ , поэтому имеет место равенство

$$O_{\mathcal{A}_n}(x) = C_{\mathcal{A}_n}(x) \cap \text{Anc}_{\mathcal{A}_n}(x) = \Im(C_{\mathcal{A}_n}(x)) \cap \text{Anc}_{\mathcal{A}_n}(x).$$

Так как при  $y \in \Im(C_{\mathcal{A}_n}(x))$  (а значит,  $\Re(y) = 0$ ) условие  $y \in \text{Anc}_{\mathcal{A}_n}(x)$  задаётся одним линейным уравнением, то  $\dim(\Im(C_{\mathcal{A}_n}(x))) - \dim(O_{\mathcal{A}_n}(x)) \leq 1$ .  $\square$

**Лемма 2.4.2.** Пусть  $x \in \mathcal{A}_n \setminus \{0\}$ ,  $\Re(x) = 0$ . Тогда

- (1) если  $n(x) = 0$  и  $n \leq 3$ , то  $C_{\mathcal{A}_n}(x) = \mathbb{R} \oplus O_{\mathcal{A}_n}(x)$ ;
- (2) если  $n(x) \neq 0$ , то  $C_{\mathcal{A}_n}(x) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus O_{\mathcal{A}_n}(x)$ .

*Доказательство.* Ясно, что выполнено включение  $C_{\mathcal{A}_n}(x) \supseteq \mathbb{R} + \mathbb{R}x + O_{\mathcal{A}_n}(x)$ . Отметим, что если  $y \in O_{\mathcal{A}_n}(x)$ , то  $\Re(y) = 0$ , поэтому, по лемме 1.3.7,  $\langle x, y \rangle = \langle x\bar{y}, e_0 \rangle = -\langle xy, e_0 \rangle = 0$ . Так как  $n(x) = x\bar{x} = -x^2$ , то условия  $n(x) = 0$  и  $x \in O_{\mathcal{A}_n}(x)$  равносильны. Рассмотрим два случая:

- (1) Если  $n(x) = 0$ , то это включение принимает вид  $C_{\mathcal{A}_n}(x) \supseteq \mathbb{R} \oplus O_{\mathcal{A}_n}(x)$ . Покажем, что при  $n \leq 3$  имеет место также обратное включение. Пусть  $y \in C_{\mathcal{A}_n}(x)$  и  $\Re(y) = 0$ . Так как  $n \leq 3$ , то, в силу леммы 1.3.12, можно воспользоваться альтернативностью  $\mathcal{A}_n$ . Заметим, что  $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x} = yx = xy$ , то есть  $xy = r \in \mathbb{R}$ . Тогда  $0 = x^2y = x(xy) = rx$ , поэтому  $r = 0$ , то есть  $y \in O_{\mathcal{A}_n}(x)$ .
- (2) Если  $n(x) \neq 0$ , то это включение имеет вид  $C_{\mathcal{A}_n}(x) \supseteq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus O_{\mathcal{A}_n}(x)$ . Обратное включение следует из леммы 2.4.1 и соображений размерности.  $\square$

**Пример 2.4.3.** Если  $\mathcal{A}_n = \mathcal{M}_n$  — алгебра главной последовательности, то любой элемент  $x \in \mathcal{M}_n \setminus \{0\}$ ,  $\Re(x) = 0$ , удовлетворяет условию леммы 2.4.2(2).

Покажем существенность дополнительного условия  $n \leq 3$  в пункте (1) леммы 2.4.2. Для этого нам понадобится следующее обозначение и некоторые утверждения, непосредственно из него вытекающие.

**Обозначение.** Пусть  $a, b \in \mathcal{A}_n \setminus \{0\}$  таковы, что  $ba = 0$ ,  $\Re(a) = 0$  и  $n(a) = \gamma_n n(b) \neq 0$ .

(1) Положим  $c = (a, b)$ ,  $d = (0, b) \in \mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n\{\gamma_n\}$ .

(2) Если, кроме того,  $\gamma_n = 1$  и  $ab = 0$ , то для любого  $r \in \mathbb{R}$ ,  $|r| < 1$ , обозначим  $c(r) = (a, ra + \sqrt{1-r^2}b) \in \mathcal{A}_{n+1}$ .

**Предложение 2.4.4.** Пусть  $a, b \in \mathcal{A}_n \setminus \{0\}$  таковы, что  $ba = 0$  и  $\Re(a) = 0$ . Тогда условия  $ab = 0$  и  $\Re(b) = 0$  равносильны.

*Доказательство.* Поскольку  $a \neq 0$ , это утверждение следует из равенства  $0 = \overline{ba} = \overline{ab} = -a(2\Re(b) - b) = ab - 2\Re(b)a$ .  $\square$

**Предложение 2.4.5.** Пусть  $a, b, c, c(r), d$  введены в обозначении 2.4. Тогда  $\Re(d) = 0$  и, кроме того,

(1)  $\Re(c) = 0$ ,  $n(c) = 0$ ;

(2)  $\Re(c(r)) = 0$ ,  $n(c(r)) = 0$ .

*Доказательство.* Ясно, что  $\Re(d) = \Re((0, b)) = 0$ .

(1) В силу леммы 1.3.2, выполнено  $\Re(c) = \Re((a, b)) = \Re(a) = 0$  и  $n(c) = n((a, b)) = n(a) - \gamma_n n(b) = 0$ .

(2) Очевидно,  $\Re(ra + \sqrt{1-r^2}b) = 0$  и  $\Re(c(r)) = 0$ . Ясно также, что  $n(a) = n(b)$ . Проверим, что  $n(c(r)) = 0$ :

$$\begin{aligned} n(c(r)) &= n(a) - n(ra + \sqrt{1-r^2}b) = n(a) + (ra + \sqrt{1-r^2}b)^2 = \\ &= n(a) + r^2a^2 + r\sqrt{1-r^2}(ab + ba) + (1-r^2)b^2 = \\ &= n(a) - r^2n(a) - (1-r^2)n(b) = 0. \end{aligned} \quad \square$$

**Предложение 2.4.6.** Пусть  $a, b, c, c(r), d$  введены в обозначении 2.4. Тогда

(1)  $C_{\mathcal{A}_{n+1}}(c) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}d \oplus O_{\mathcal{A}_{n+1}}(c)$ ;

(2)  $C_{\mathcal{A}_{n+1}}(c(r)) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}d \oplus O_{\mathcal{A}_{n+1}}(c(r))$ .

*Доказательство.*

(1) Нетрудно видеть, что  $cd = (a, b)(0, b) = (a0 + \gamma_n \bar{b}b, ba + b\bar{0}) = \gamma_n n(b) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Кроме того,  $\Re(c) = \Re(d) = 0$ , поэтому  $dc = \bar{d}\bar{c} = \overline{cd} = cd$ . Таким образом,  $d \in C_{\mathcal{A}_{n+1}}(c)$ . Однако  $d \notin \mathbb{R} \oplus O_{\mathcal{A}_{n+1}}(c)$ , поскольку  $\Re(d) = 0$  и  $d \notin O_{\mathcal{A}_{n+1}}(c) \subseteq \mathcal{A}'_{n+1}$ . В силу леммы 2.4.1, это означает, что  $C_{\mathcal{A}_{n+1}}(c) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}d \oplus O_{\mathcal{A}_{n+1}}(c)$ .

(2) Покажем, что  $c(r)d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Действительно,

$$\begin{aligned} c(r)d &= (a, ra + \sqrt{1-r^2}b)(0, b) = \left( a0 + \gamma_n \bar{b}(ra + \sqrt{1-r^2}b), ba + (ra + \sqrt{1-r^2}b)\bar{0} \right) = \\ &= (-rba + \sqrt{1-r^2}\bar{b}b, ba) = \sqrt{1-r^2}n(b) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Доказательство того факта, что  $C_{\mathcal{A}_{n+1}}(c(r)) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}d \oplus O_{\mathcal{A}_{n+1}}(c(r))$ , аналогично предыдущему пункту.  $\square$

**Пример 2.4.7.** Обои условиям, приведённым в обозначении 2.4, удовлетворяют, например,  $a = (e_1, e_4)$ ,  $b = (e_2, e_7) \in \mathbb{S} = \mathcal{M}_4$  при  $\gamma_4 = 1$ .

Доказательство следующей леммы использует соображения из [38, стр. 21].

**Лемма 2.4.8.** Пусть  $a, b, c \in \mathcal{A}_n$  удовлетворяют условиям  $\Re(a) = \Re(b) = 0$ ,  $[a, b, b] = 0$  и  $b = [a, c, b]$ . Тогда  $n(b) = 0$ .

*Доказательство.* Рассмотрим отображение  $S : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{A}_n$ , задаваемое формулой  $S(x) = [a, x, b]$  для всех  $x \in \mathcal{A}_n$ . Тогда  $S = R_b L_a - L_a R_b$ , где  $L_a$  и  $R_b$  определяются равенством (2.5). Отображения  $L_a$  и  $R_b$  кососимметричны относительно симметрической билинейной формы  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , так как, по лемме 1.3.7,  $\langle L_a(x), y \rangle = \langle ax, y \rangle = \langle x, \bar{a}y \rangle = \langle x, -ay \rangle = -\langle x, L_a y \rangle$ . Значит,  $S$  также кососимметрично, и из  $S(S(x)) = 0$  следует  $0 = \langle x, -S(S(x)) \rangle = \langle S(x), S(x) \rangle = n(S(x))$ . Поскольку  $b = S(c)$  и  $0 = [a, b, b] = S(b) = S(S(c))$ , получаем  $n(b) = n(S(c)) = 0$ .  $\square$

Следующая теорема обобщает лемму 2.4.2(1) на случай дважды альтернативных делителей нуля, удовлетворяющих условию (\*) с  $\chi = 1$ . Если же  $\chi = \gamma_n \frac{n(b)}{n(a)} \neq 1$ , то норма такого элемента отлична от нуля, поэтому применима лемма 2.4.2(2).

**Теорема 2.4.9.** Пусть  $(a, b) \in DA(\mathcal{A}_{n+1})$  — чисто мнимый элемент, удовлетворяющий условию (\*) с  $\chi = 1$ . Тогда  $C_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, b)) = \mathbb{R} \oplus O_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, b))$ .

*Доказательство.* Так как  $\chi = 1$ , то  $n((a, b)) = n(a) - \gamma_n n(b) = 0$ . Предположим, что существует  $(c, d) \in C_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, b)) \setminus (\mathbb{R} \oplus O_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, b)))$ . Без ограничения общности можно считать, что  $\Re(c) = 0$ . Тогда

$$\overline{(a, b)(c, d)} = \overline{(c, d)} \cdot \overline{(a, b)} = (c, d)(a, b) = (a, b)(c, d),$$

то есть  $(a, b)(c, d) = r \in \mathbb{R}$ . Поскольку  $(c, d) \notin O_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, b))$ , то  $r \neq 0$ . Предположим без ограничения общности, что  $r = 1$ . Тогда

$$(1, 0) = (a, b)(c, d) = (ac + \gamma_n \bar{d}b, da + b\bar{c}) = (ac + \gamma_n \bar{d}b, da - bc).$$

Из условия  $da = bc$  следует, что  $n(a)d = d(a\bar{a}) = (da)\bar{a} = (bc)\bar{a}$ , значит,  $n(a)\bar{d} = a(\bar{c}\bar{b}) = -a(\bar{c}\bar{b})$ . Умножим равенство  $1 = ac + \gamma_n \bar{d}b$  справа на  $\bar{b}$  и подставим выражение для  $n(a)\bar{d}$ :

$$\bar{b} = (ac)\bar{b} + \gamma_n (\bar{d}b)\bar{b} = (ac)\bar{b} + \gamma_n \bar{d}(b\bar{b}) = (ac)\bar{b} + \gamma_n n(b)\bar{d} = (ac)\bar{b} + n(a)\bar{d} = (ac)\bar{b} - a(\bar{c}\bar{b}) = [a, c, \bar{b}].$$

Из леммы 1.3.6 следует, что  $\Re(\bar{b}) = \Re([a, c, \bar{b}]) = 0$ , откуда  $\bar{b} = -b$  и  $b = [a, c, b]$ . Применяя лемму 2.4.8, получаем  $n(b) = 0$ , противоречие с условием (\*).  $\square$

# Глава 3

## Графы отношений алгебр главной последовательности

В этой главе мы применяем результаты предыдущей главы для описания графов отношений алгебр главной последовательности. В разделе 3.1 показано, что в случае алгебр главной последовательности ориентированный шестиугольник в графе делителей нуля может быть продолжен до неориентированного двойного шестиугольника в графе ортогональности, причём таблица умножения вершин двойного шестиугольника имеет блочную структуру. Главным результатом этого раздела является теорема 3.1.14. Раздел 3.2 посвящён уточнению общих результатов об алгебрах главной последовательности на случай алгебры седенионов, а также изучению компонент связности её графов ортогональности и коммутативности. Основные свойства этих графов перечислены в теореме 3.2.26.

Результаты раздела 3.1 опубликованы в статье [51], а раздела 3.2 — в статье [48].

### 3.1 Двойные шестиугольники в графах ортогональности

Как было показано в следствии 2.3.3, в случае вещественных алгебр Кэли-Диксона все делители нуля оказываются двусторонними делителями нуля, то есть  $Z(\mathcal{A}_n) = Z_{LR}(\mathcal{A}_n)$ . В случае алгебр главной последовательности имеет место более сильный результат.

**Лемма 3.1.1.** [38, следствие 1.6, следствие 1.9, следствие 1.12]

- (1) Пусть  $x, y \in \mathcal{M}_{n+1}$ . Тогда  $xy = 0$ , если и только если  $yx = 0$ .
- (2) Если  $x \in Z(\mathcal{M}_{n+1})$ , то  $x$  — дважды чисто мнимый.
- (3) Пусть  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$ ,  $\tilde{y} = (-y_2, y_1) \in \mathcal{M}_{n+1}$ . Тогда  $xy = 0$ , если и только если  $x\tilde{y} = 0$ .

**Следствие 3.1.2.**  $\Gamma_Z(\mathcal{M}_{n+1})$  может быть получен из  $\Gamma_O(\mathcal{M}_{n+1})$  заменой каждого неориентированного ребра на пару ориентированных рёбер.

*Доказательство.* Непосредственно следует из леммы 3.1.1(1). □

В приведённом ниже утверждении из работы [38] Морено предполагает, что  $c$  и  $d$  — альтернативные элементы в  $\mathcal{M}_n$ . Однако его доказательство дословно переносится на случай, когда элементы  $c, d \in \mathcal{M}_n$  альтернируют лишь с элементами  $a, b \in \mathcal{M}_n$ . Напомним, что антиассоциатором элементов  $a, b, c$  алгебры  $\mathcal{A}$  называется элемент  $\{a, b, c\} = (ab)c + a(bc)$ .

**Лемма 3.1.3.** [38, стр. 25-27] Пусть элементы  $c, d \in \mathcal{M}_n$  альтернируют с элементами  $a, b \in \mathcal{M}_n$ ,  $(a, b), (c, d) \in Z(\mathcal{M}_{n+1})$ ,  $(a, b)(c, d) = 0$ . Тогда

$$(1) \Re(a) = \Re(b) = \Re(c) = \Re(d) = 0;$$

$$(2) n(c) = n(d);$$

$$(3) a \perp b;$$

$$(4) ac = -db, da = bc;$$

$$(5) [c, a, d] = 2n(c)b, [c, b, d] = -2n(c)a;$$

$$(6) \{c, a, d\} = \{c, b, d\} = 0.$$

Если, кроме того,  $c$  строго альтернирует с  $d$ , то

$$(7) a, b \in \text{Lin}(e_0, c, d, cd)^\perp.$$

Следующая лемма показывает, что пункт (7) леммы 3.1.3 остаётся верным и без требования строгого альтернирования элементов  $c$  и  $d$ .

**Лемма 3.1.4.** Пусть элементы  $c, d \in \mathcal{M}_n$  альтернируют с элементами  $a, b \in \mathcal{M}_n$ ,  $(a, b), (c, d) \in Z(\mathcal{M}_{n+1})$ ,  $(a, b)(c, d) = 0$ . Тогда

$$(1) a, b \in \text{Lin}(e_0, c, d)^\perp;$$

$$(2) ac, ad \in \text{Lin}(e_0, c, d)^\perp;$$

$$(3) a, b \in \text{Lin}(e_0, c, d, cd)^\perp;$$

$$(4) (c, d)(ac, ad) = 0.$$

*Доказательство.*

- (1) Согласно лемме 3.1.1(2),  $\Re(a) = \Re(b) = \Re(c) = \Re(d) = 0$ , что равносильно условию  $e_0 \in \text{Lin}(a, b, c, d)^\perp$ . Применим лемму 2.2.1(1) к элементам  $(a, b)$  и  $(c, d)$  со значением  $\chi = \gamma_n \frac{n(d)}{n(c)} = -1$  и воспользуемся тем, что  $\overline{ac} = \overline{ca} = ca$ . Тогда  $(c, d)(ca, da) = 0$  и, по лемме 3.1.1(2),  $\Re(ca) = \Re(da) = 0$ . Из следствия 1.3.5 вытекает, что  $\langle a, c \rangle = -\langle a, \overline{c} \rangle = -\Re(ca) = 0$  и, аналогично,  $\langle a, d \rangle = 0$ , то есть  $a \perp c$  и  $a \perp d$ . Пользуясь равенствами  $ca = -bd$  и  $da = bc$ , аналогично получаем, что  $b \perp c$  и  $b \perp d$ .

- (2) Из пункта (1) и леммы 1.3.8 следует, что элементы  $a, b$  антикоммутируют с элементами  $c, d$ . Тогда  $ac = -ca$  и  $ad = -da$ , что сразу доказывает пункт (4). Требуется показать, что  $ca, da \in \text{Lin}(e_0, c, d)^\perp$ . Повторяя доказательство леммы 2.2.5, мы получаем

$$[c, c, ca] = -[c, \bar{c}, ca] = -(c\bar{c})(ca) + c(\bar{c}(ca)) = -(c\bar{c})ca + c((\bar{c}c)a) = -n(c)ca + n(c)ca = 0$$

и  $[d, d, ca] = -[d, d, bd] = [d, d, db] = 0$ . Аналогично доказываются равенства  $[c, c, da] = [d, d, da] = 0$ , поэтому элементы  $c, d$  альтернируют с элементами  $ca, da$ . По лемме 3.1.1(1), из  $(c, d)(ca, da) = 0$  следует  $(ca, da)(c, d) = 0$ . Применяя пункт (1) для пары элементов  $(ca, da)$  и  $(c, d)$ , мы получаем требуемое утверждение.

- (3) По лемме 1.3.7,  $\langle a, cd \rangle = \langle \bar{c}a, d \rangle = \langle ac, d \rangle = 0$  и  $\langle b, cd \rangle = \langle \bar{c}b, d \rangle = \langle bc, d \rangle = \langle da, d \rangle = 0$ , откуда  $a \perp cd$  и  $b \perp cd$ . □

В утверждениях 3.1.5–3.1.13, на рисунке 3.1 и в таблице 3.2 мы предполагаем, что элементы  $a, b \in \mathcal{M}_n$  строго альтернируют с элементами  $c, d \in \mathcal{M}_n$ ,  $(a, b)(c, d) = 0$  в  $\mathcal{M}_{n+1}$ . По лемме 3.1.3, без ограничения общности можно считать, что  $n(a) = n(b) = n(c) = n(d) = 1$ .

**Следствие 3.1.5.** *Существует следующий цикл длины 6 в графе ортогональности  $\Gamma_O(\mathcal{M}_{n+1})$ :*

$$(a, b) \leftrightarrow (c, d) \leftrightarrow (ac, ad) \leftrightarrow (a, -b) \leftrightarrow (c, -d) \leftrightarrow (ac, -ad) \leftrightarrow (a, b).$$

*Доказательство.* Воспользуемся следствием 2.2.6 для  $\chi = \gamma_n \frac{n(b)}{n(a)} = -1$ . По лемме 3.1.4, мы имеем  $\bar{a}c = -ac$  и  $da = -ad$ . Наконец, из следствия 3.1.2 мы получаем, что ориентированные рёбра шестиугольника в  $\Gamma_Z(\mathcal{M}_{n+1})$  соответствуют неориентированным рёбрам в  $\Gamma_O(\mathcal{M}_{n+1})$ . □

**Описание 3.1.6.** Используя лемму 3.1.1(3) и следствие 3.1.5, мы получаем подграф  $\Gamma_O(\mathcal{M}_{n+1})$ , который мы называем *двойным шестиугольником*. Он изображён на рисунке 3.1. Двойной шестиугольник состоит из шести склеенных вместе полных двудольных графов  $K_{2,2}$ . Отметим, что он содержит в себе все шестиугольники, изображённые на рисунке 2.5.

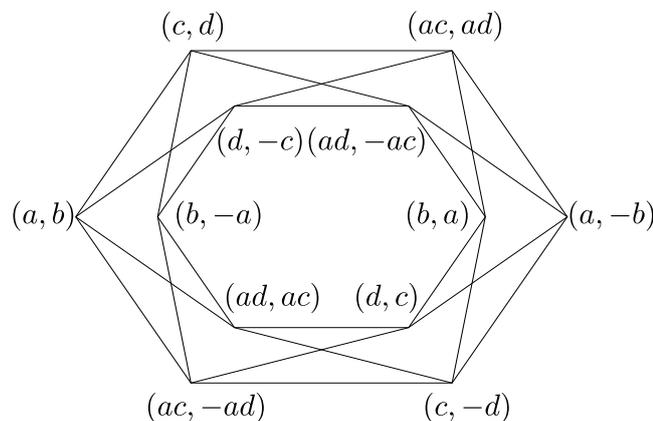


Рис. 3.1: Двойной шестиугольник.

**Замечание 3.1.7.** В следствии 3.1.5 мы могли начать с равенства  $(c, d)(a, b) = 0$  вместо  $(a, b)(c, d) = 0$ , и тогда мы бы получили тот же двойной шестиугольник, но в направлении против часовой стрелки.

Наша следующая цель состоит в том, чтобы найти таблицу умножения вершин двойного шестиугольника.

**Лемма 3.1.8.**

- (1) Элементы  $e_0, a, b, c, d$  образуют ортонормированную систему относительно  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .
- (2) Элементы  $e_0, a, b, c, d, ac, ad$  образуют ортонормированную систему относительно  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

*Доказательство.*

- (1) Сразу следует из лемм 3.1.3(3) и 3.1.4, применённых к парам элементов  $(a, b)(c, d) = 0$  и  $(c, d)(a, b) = 0$ .
- (2) По лемме 2.1.1,  $n(ac) = n(a)n(c) = 1$  и  $n(ad) = n(a)n(d) = 1$ . Согласно лемме 2.2.5, элементы  $ac, ad$  строго альтернируют с элементами  $a, b, c, d$ . Из рисунка 3.1 следует, что  $(a, b)(c, d) = (c, d)(ac, ad) = (ac, ad)(a, -b) = 0$ . Остаётся трижды воспользоваться пунктом (1).  $\square$

Следующая лемма описывает произведения двух элементов, полученных из пары делителей нуля, и справедлива для произвольной вещественной алгебры Кэли-Диксона.

**Лемма 3.1.9.** Пусть  $(x, y)(z, w) = 0$  в  $\mathcal{A}_{n+1}$ . Тогда

$$\begin{aligned}(x, y)(z, -w) &= 2(xz, -wx), \\ (x, -y)(z, w) &= 2(xz, wx).\end{aligned}$$

*Доказательство.* Поскольку  $(x, y)(z, w) = 0$ , мы имеем  $wx + y\bar{z} = 0$ . Отсюда

$$\begin{aligned}(x, y)(z, -w) &= (x, y)(z, -w) + (x, y)(z, w) = (x, y)(2z, 0) = 2(xz, y\bar{z}) = 2(xz, -wx), \\ (x, -y)(z, w) &= (x, -y)(z, w) + (x, y)(z, w) = (2x, 0)(z, w) = 2(xz, wx).\end{aligned} \quad \square$$

**Лемма 3.1.10.** Произведения элемента  $(a, b)$  с вершинами двойного шестиугольника на рисунке 3.1 таковы:

$$\begin{array}{lll}(a, b)(c, d) = 0, & (a, b)(c, -d) = 2(ac, ad), & (a, b)(a, b) = -2(e_0, 0), \\ (a, b)(d, -c) = 0, & (a, b)(d, c) = 2(ad, -ac), & (a, b)(b, -a) = 2(0, e_0), \\ (a, b)(ad, ac) = 0, & (a, b)(ad, -ac) = -2(d, c), & (a, b)(a, -b) = 2(0, ab), \\ (a, b)(ac, -ad) = 0, & (a, b)(ac, ad) = -2(c, -d), & (a, b)(b, a) = 2(ab, 0).\end{array}$$

*Доказательство.* По лемме 3.1.8(2), элементы  $a$  и  $b$  являются чисто мнимыми, поэтому  $a^2 = b^2 = -e_0$ , и при этом элементы  $a, b, c, d, ac, ad$  попарно антикоммутируют. Из рисунка 3.1 следует, что  $(a, b)(c, d) = (a, b)(d, -c) = (a, b)(ad, ac) = (a, b)(ac, -ad) = 0$ . Применяя лемму 3.1.9 к каждому из этих четырёх равенств, мы получаем второй столбец. Равенства в последнем столбце проверяются непосредственно.  $\square$

**Теорема 3.1.11.** *Пусть*

$$\begin{array}{llll}
f_0 = (e_0, 0) = e_0, & f_5 = (c, d), & \widetilde{f}_0 = (0, e_0) = \widetilde{e}_0, & \widetilde{f}_5 = (-d, c), \\
f_1 = (a, b), & f_6 = (a, -b), & \widetilde{f}_1 = (-b, a), & \widetilde{f}_6 = (b, a), \\
f_2 = (c, -d), & f_7 = (0, ab), & \widetilde{f}_2 = (d, c), & \widetilde{f}_7 = (-ab, 0), \\
f_3 = (ac, ad), & f_8 = (0, dc), & \widetilde{f}_3 = (-ad, ac), & \widetilde{f}_8 = (-dc, 0), \\
f_4 = (ac, -ad), & f_9 = (0, (ac)(ad)), & \widetilde{f}_4 = (ad, ac), & \widetilde{f}_9 = (-(ac)(ad), 0).
\end{array}$$

Тогда  $F = \{f_m, \widetilde{f}_m \mid m = 0, \dots, 6\}$  — ортогональная система в  $\mathcal{M}_{n+1}$  относительно скалярного произведения  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Её таблица умножения описывается таблицей 3.2.

*Доказательство.* Элемент  $f_0$  является единицей алгебры  $\mathcal{M}_{n+1}$ . По лемме 3.1.8(2), элементы  $e_0, a, b, c, d, ac, ad$  образуют ортонормированную систему в  $\mathcal{M}_n$  относительно скалярного произведения  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Отсюда  $F$  — ортогональная система в  $\mathcal{M}_{n+1}$ . Из леммы 1.3.8 следует, что элементы  $F \setminus \{f_0\}$  попарно антикоммутируют.

По лемме 2.1.2, для любого  $(x, y) \in \mathbb{S}$  выполнено  $(x, y)\widetilde{f}_0 = (x, y)(0, e_0) = (-y, x)$ . Отсюда  $f_m\widetilde{f}_0 = \widetilde{f}_m$  и  $\widetilde{f}_m\widetilde{f}_0 = -f_m$  для всех  $m = 0, \dots, 9$ .

Чтобы получить оставшуюся часть таблицы, мы используем лемму 3.1.10. Элементы  $(a, b)$  и  $(c, d)$  можно заменить любой другой парой смежных вершин двойного шестиугольника, поскольку они отвечают произвольной паре делителей нуля в  $\mathcal{M}_{n+1}$  с условием строгой альтернативности.  $\square$

**Замечание 3.1.12.** Согласно лемме 3.1.1(3), элементы  $f_m$  и  $-\widetilde{f}_m$  принадлежат одному двойному углу двойного шестиугольника,  $m = 1, \dots, 6$ . Элемент  $f_m$  принадлежит внешнему шестиугольнику, тогда как  $-\widetilde{f}_m$  принадлежит внутреннему шестиугольнику.

Элементы  $f_1, f_2$  и  $f_3$  образуют множество попарно не соединённых вершин внешнего шестиугольника, равно как и элементы  $f_4, f_5$  и  $f_6$ . Каждая из пар элементов  $f_1$  и  $f_6, f_2$  и  $f_5, f_3$  и  $f_4$  соответствует паре противоположных вершин внешнего шестиугольника.

**Замечание 3.1.13.** Из теоремы 3.1.11 следует, что все элементы в вершинах двойного шестиугольника на рисунке 3.1 линейно независимы.

Можно заметить, что таблица 3.2 имеет блочную структуру, причём её блоки бывают двух видов. Часть из них антидиагональна, а остальные сходны с таблицей умножения базисных кватернионов. Однако мы не можем подправить элементы таким образом, чтобы какой-либо из этих блоков совпал с настоящей таблицей умножения кватернионов. В частности, подалгебра  $\text{Lin}(f_0, f_1, f_2, f_3)$  неассоциативна, а потому не изоморфна  $\mathbb{H}$ , см. [19, стр. 496].

$\times$	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$\tilde{f}_0$	$\tilde{f}_1$	$\tilde{f}_2$	$\tilde{f}_3$	$\tilde{f}_4$	$\tilde{f}_5$	$\tilde{f}_6$
$f_0$	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$\tilde{f}_0$	$\tilde{f}_1$	$\tilde{f}_2$	$\tilde{f}_3$	$\tilde{f}_4$	$\tilde{f}_5$	$\tilde{f}_6$
$f_1$	$f_1$	$-2f_0$	$2f_3$	$-2f_2$	0	0	$2f_7$	$\tilde{f}_1$	$-2\tilde{f}_0$	$-2\tilde{f}_3$	$2\tilde{f}_2$	0	0	$-2\tilde{f}_7$
$f_2$	$f_2$	$-2f_3$	$-2f_0$	$2f_1$	0	$2f_8$	0	$\tilde{f}_2$	$2\tilde{f}_3$	$-2\tilde{f}_0$	$-2\tilde{f}_1$	0	$-2\tilde{f}_8$	0
$f_3$	$f_3$	$2f_2$	$-2f_1$	$-2f_0$	$2f_9$	0	0	$\tilde{f}_3$	$-2\tilde{f}_2$	$2\tilde{f}_1$	$-2\tilde{f}_0$	$-2\tilde{f}_9$	0	0
$f_4$	$f_4$	0	0	$-2f_9$	$-2f_0$	$-2f_6$	$2f_5$	$\tilde{f}_4$	0	0	$2\tilde{f}_9$	$-2\tilde{f}_0$	$2\tilde{f}_6$	$-2\tilde{f}_5$
$f_5$	$f_5$	0	$-2f_8$	0	$2f_6$	$-2f_0$	$-2f_4$	$\tilde{f}_5$	0	$2\tilde{f}_8$	0	$-2\tilde{f}_6$	$-2\tilde{f}_0$	$2\tilde{f}_4$
$f_6$	$f_6$	$-2f_7$	0	0	$-2f_5$	$2f_4$	$-2f_0$	$\tilde{f}_6$	$2\tilde{f}_7$	0	0	$2\tilde{f}_5$	$-2\tilde{f}_4$	$-2\tilde{f}_0$
$\tilde{f}_0$	$\tilde{f}_0$	$-f_1$	$-f_2$	$-f_3$	$-f_4$	$-f_5$	$-f_6$	$-f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$
$\tilde{f}_1$	$\tilde{f}_1$	$2\tilde{f}_0$	$-2\tilde{f}_3$	$2\tilde{f}_2$	0	0	$-2\tilde{f}_7$	$-f_1$	$-2f_0$	$-2f_3$	$2f_2$	0	0	$-2f_7$
$\tilde{f}_2$	$\tilde{f}_2$	$2\tilde{f}_3$	$2\tilde{f}_0$	$-2\tilde{f}_1$	0	$-2\tilde{f}_8$	0	$-f_2$	$2f_3$	$-2f_0$	$-2f_1$	0	$-2f_8$	0
$\tilde{f}_3$	$\tilde{f}_3$	$-2\tilde{f}_2$	$2\tilde{f}_1$	$2\tilde{f}_0$	$-2\tilde{f}_9$	0	0	$-f_3$	$-2f_2$	$2f_1$	$-2f_0$	$-2f_9$	0	0
$\tilde{f}_4$	$\tilde{f}_4$	0	0	$2\tilde{f}_9$	$2\tilde{f}_0$	$2\tilde{f}_6$	$-2\tilde{f}_5$	$-f_4$	0	0	$2f_9$	$-2f_0$	$2f_6$	$-2f_5$
$\tilde{f}_5$	$\tilde{f}_5$	0	$2\tilde{f}_8$	0	$-2\tilde{f}_6$	$2\tilde{f}_0$	$2\tilde{f}_4$	$-f_5$	0	$2f_8$	0	$-2f_6$	$-2f_0$	$2f_4$
$\tilde{f}_6$	$\tilde{f}_6$	$2\tilde{f}_7$	0	0	$2\tilde{f}_5$	$-2\tilde{f}_4$	$2\tilde{f}_0$	$-f_6$	$2f_7$	0	0	$2f_5$	$-2f_4$	$-2f_0$

Таблица 3.2: Таблица умножения вершин двойного шестиугольника.

Объединяя результаты лемм 2.2.5 и 3.1.8(2), следствия 3.1.5, описания 3.1.6, теоремы 3.1.11 и замечания 3.1.13, мы получаем следующую теорему.

**Теорема 3.1.14.** Пусть  $a, b \in \mathcal{M}_n$  строго альтернируют с элементами  $c, d \in \mathcal{M}_n$ ,  $(a, b), (c, d) \in Z(\mathcal{M}_{n+1})$ ,  $(a, b)(c, d) = 0$ . По лемме 3.1.3, без ограничения общности можно считать, что  $n(a) = n(b) = n(c) = n(d) = 1$ . Тогда

- (1) Элементы  $ac, ad$  строго альтернируют с элементами  $a, b, c, d$ .
- (2) Элементы  $e_0, a, b, c, d, ac, ad$  образуют ортонормированную систему относительно скалярного произведения  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .
- (3) Существует подграф  $\Gamma_O(\mathcal{M}_{n+1})$ , изображённый на рисунке 3.1 и называемый двойным шестиугольником.
- (4) Все элементы в вершинах двойного шестиугольника линейно независимы.
- (5) В обозначениях теоремы 3.1.11, вершины двойного шестиугольника удовлетворяют таблице умножения 3.2.

## 3.2 Седенионы

### 3.2.1 Делители нуля и их свойства

Рассмотрим случай, когда  $\mathcal{M}_{n+1} = \mathbb{S}$ , то есть  $n = 3$ . Поскольку  $\mathbb{O}$  альтернативна, любая пара делителей нуля  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{S}$ ,  $(a, b)(c, d) = 0$ , удовлетворяет условиям лемм 3.1.3 и 3.1.4. В частности, можно считать, что  $n(a) = n(b) = n(c) = n(d) = 1$ . Тогда, по следствию 2.12 и теореме 2.13 в [38], существует автоморфизм  $\varphi$  алгебры  $\mathbb{O}$ , отображающий  $a, b, c, d$  в  $e_1, e_2, e_7, e_4$ , соответственно. Мы можем продолжить  $\varphi$  до автоморфизма  $\mathbb{S}$  по формуле  $(x, y) \mapsto (\varphi(x), \varphi(y))$ . Тогда  $(a, b)$  и  $(c, d)$  будут переходить в  $(e_1, e_2)$  и  $(e_7, e_4)$ . Таким образом, всегда можно заменить  $(a, b)$  и  $(c, d)$  на  $(e_1, e_2)$  и  $(e_7, e_4)$ . Отсюда мы сразу получаем следующее предложение.

**Предложение 3.2.1.** Пусть  $(a, b), (c, d) \in Z(\mathbb{S})$ ,  $(a, b)(c, d) = 0$ ,  $n(a) = n(b) = n(c) = n(d) = 1$ . Тогда  $1, a, b, c, d, ab, ac, ad$  образуют ортонормированную систему относительно скалярного произведения  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

В случае седенионов имеется ещё одно соотношение между компонентами пар делителей нуля в дополнение к лемме 3.1.3. В остальных алгебрах оно принимает более слабый вид и выполняется только для пар базисных элементов, см. лемму 5.1.5 ниже.

**Лемма 3.2.2.** [19, предложение 3.4(ii)] Пусть  $(a, b)(c, d) = 0$  в  $\mathbb{S}$ ,  $n(a) = n(b) = n(c) = n(d) = 1$ . Тогда  $ab = -cd$ .

**Пример 3.2.3.** Пусть  $(a, b) = (e_1, e_2)$ ,  $(c, d) = (e_5 + e_{13}, e_6 + e_{14}) \in \mathcal{M}_5$ . Тогда  $(a, b)(c, d) = 0$ . Кроме того, из [39, теорема 3.3] следует, что  $a, b, c, d$  альтернативны в  $\mathcal{M}_4 = \mathbb{S}$ . Однако  $ab = e_3$ ,  $cd = 2e_{11}$ , поэтому  $ab$  и  $cd$  линейно независимы.

**Следствие 3.2.4.** Пусть  $(a, b), (c, d) \in Z(\mathbb{S})$ ,  $n(a) = n(b) = n(c) = n(d) = 1$ . Пусть также  $P$  – путь длины  $k$  в  $\Gamma_O(\mathbb{S})$  между  $(a, b)$  и  $(c, d)$ . Тогда  $ab = (-1)^k cd$ .

*Доказательство.* Можно считать, что для каждой внутренней вершины  $(x, y) \in P$  выполнено  $n(x) = n(y) = 1$ . Требуемое утверждение нетрудно получить из леммы 3.2.2 индукцией по  $k$ .  $\square$

**Предложение 3.2.5.**

- (1)  $\Gamma_O(\mathbb{S})$  не содержит циклов нечётной длины.
- (2) Обхват  $\Gamma_O(\mathbb{S})$  равен 4.
- (3) Каждая максимальная клика в  $\Gamma_O(\mathbb{S})$  содержит ровно две вершины.

*Доказательство.*

- (1) Предположим от противного, что существует путь  $P$ , начинающийся и заканчивающийся в вершине  $(a, b) \in Z(\mathbb{S})$ ,  $n(a) = n(b) = 1$ , и  $P$  имеет нечётную длину  $k$ . Согласно следствию 3.2.4, мы имеем  $ab = (-1)^k ab = -ab$ . Следовательно,  $ab = 0$ , но  $\mathbb{O}$  не содержит делителей нуля, противоречие.
- (2) Сперва покажем, что  $g(\Gamma_O(\mathbb{S})) \leq 4$ . Пусть  $(a, b)(c, d) = 0$ , где  $(a, b), (c, d) \in Z(\mathbb{S})$ . Тогда, по лемме 3.1.1(3), существует следующий 4-цикл в  $\Gamma_O(\mathbb{S})$ :

$$(a, b) \leftrightarrow (c, d) \leftrightarrow (b, -a) \leftrightarrow (d, -c) \leftrightarrow (a, b).$$

Поскольку в  $\Gamma_O(\mathbb{S})$  нет циклов нечётной длины,  $g(\Gamma_O(\mathbb{S})) \geq 4$ . Значит,  $g(\Gamma_O(\mathbb{S})) = 4$ .

- (3) В  $\Gamma_O(\mathbb{S})$  нет циклов длины 3. Кроме того,  $\Gamma_O(\mathbb{S})$  не содержит изолированных вершин, откуда мы сразу получаем требуемое утверждение.  $\square$

### 3.2.2 Компоненты связности графа ортогональности

В утверждениях 3.2.6–3.2.9 мы предполагаем, что  $(a, b), (c, d) \in Z(\mathbb{S})$ ,  $(a, b)(c, d) = 0$ ,  $n(a) = n(b) = n(c) = n(d) = 1$ . Тогда  $(a, b), (c, d)$  удовлетворяют условиям теоремы 3.1.14, поэтому они содержатся в двойном шестиугольнике на рисунке 3.1.

**Предложение 3.2.6.** Каждая вершина двойного шестиугольника соединена ровно с четырьмя другими вершинами, и эти четыре вершины образуют базис ортогонализатора выбранной вершины. В частности,

$$\begin{aligned} O_{\mathbb{S}}((a, b)) &= \text{Lin}((c, d), (d, -c), (ac, -ad), (ad, ac)), \\ O_{\mathbb{S}}((c, d)) &= \text{Lin}((a, b), (b, -a), (ac, ad), (ad, -ac)), \\ O_{\mathbb{S}}((ac, ad)) &= \text{Lin}((c, d), (d, -c), (a, -b), (b, a)). \end{aligned}$$

*Доказательство.* Включение справа налево сразу следует из теоремы 3.1.14(3). Согласно [38, стр. 25], ортогонализатор произвольного делителя нуля в  $\mathbb{S}$  имеет размерность 4, что, в силу теоремы 3.1.14(4), даёт нам обратное включение.  $\square$

**Обозначение.** Обозначим

$$\begin{aligned}\Lambda_{(a,b)}^+ &= \text{Lin}((a, b), (b, -a), (d, c), (c, -d), (ac, ad), (ad, -ac)) \setminus \{0\}, \\ \Lambda_{(a,b)}^- &= \text{Lin}((b, a), (a, -b), (c, d), (d, -c), (ad, ac), (ac, -ad)) \setminus \{0\}, \\ \Lambda_{(a,b)} &= \Lambda_{(a,b)}^+ \cup \Lambda_{(a,b)}^-.\end{aligned}$$

$\Lambda_{(a,b)}$  — это множество всех нетривиальных линейных комбинаций элементов, стоящих в углах двойного шестиугольника на рисунке 3.1 через один.

**Лемма 3.2.7.**  $\Lambda_{(a,b)}$  находится на расстоянии не больше 3 от  $(a, b)$  в  $\Gamma_O(\mathbb{S})$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $(x, y) \in O_{\mathbb{S}}((a, b))$ ,  $(x, y) = k_1(c, d) + k_2(d, -c) + k_3(ad, ac) + k_4(ac, -ad)$ . Тогда  $(ax, ay) = k_1(ac, ad) + k_2(ad, -ac) - k_3(d, c) - k_4(c, -d)$ . Согласно лемме 3.1.4(4),  $(x, y)(ax, ay) = 0$ . Кроме того, из рисунка 3.1 следует, что  $(a, b), (b, -a) \in O_{\mathbb{S}}((x, y))$  и  $(b, a), (a, -b) \in O_{\mathbb{S}}((ax, ay))$ . Тогда для любых таких  $k_5, k_6 \in \mathbb{R}$ , что последний элемент пути отличен от нуля, существуют следующие пути длины не больше 3:

- $(a, b) \longleftrightarrow (x, y) \longleftrightarrow k_5(a, b) + k_6(b, -a)$ ;
- $(a, b) \longleftrightarrow (x, y) \longleftrightarrow (ax, ay) + k_5(a, b) + k_6(b, -a)$ ;
- $(a, b) \longleftrightarrow (x, y) \longleftrightarrow (ax, ay) \longleftrightarrow k_5(b, a) + k_6(a, -b)$ ;
- $(a, b) \longleftrightarrow (x, y) \longleftrightarrow (ax, ay) \longleftrightarrow (x, y) + k_5(b, a) + k_6(a, -b)$ .

Отсюда мы сразу получаем утверждение леммы.  $\square$

**Лемма 3.2.8.** Пусть  $(x, y) \in Z(\mathbb{S})$  таков, что  $xy \in \text{Lin}(ab)$ . Тогда  $(x, y) \in \Lambda_{(a,b)}$ .

*Доказательство.* Согласно предложению 3.2.1,  $1, a, b, c, d, ab, ac, ad$  образуют ортонормированную систему относительно скалярного произведения  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Без ограничения общности можно считать, что  $n(x) = n(y) = 1$ . Аналогично,  $1, x, y, xy$  образуют ортонормированную систему, поэтому  $xy = \pm ab$  и  $x, y \in \text{Lin}(a, b, c, d, ac, ad)$ . Тогда, если мы зафиксируем  $x \in \text{Lin}(a, b, c, d, ac, ad)$ ,  $n(x) = 1$ , вторая компонента  $y = (\bar{x}x)y = -x(xy) = \mp x(ab)$  определена с точностью до знака. Следовательно,  $(x, y) \in \Lambda_{(a,b)}$ .  $\square$

**Следствие 3.2.9.** Пусть  $C$  обозначает компоненту связности  $\Gamma_O(\mathbb{S})$ , содержащую  $(a, b)$ . Тогда множество вершин  $C$  совпадает с  $\mathbb{P}(\Lambda_{(a,b)})$ .

*Доказательство.* Включение справа налево доказано в лемме 3.2.7. Пусть теперь  $(x, y) \in C$ . По следствию 3.2.4,  $xy \in \text{Lin}(ab)$ . Тогда из леммы 3.2.8 следует, что  $(x, y) \in \Lambda_{(a,b)}$ .  $\square$

**Теорема 3.2.10.** Диаметр каждой компоненты связности  $\Gamma_O(\mathbb{S})$  равен 3.

*Доказательство.* Пусть  $(a, b) \in Z(\mathbb{S})$ . Тогда существует такое  $(c, d) \in Z(\mathbb{S})$ , что  $(a, b)(c, d) = 0$ . Без ограничения общности можно считать, что  $n(a) = n(b) = n(c) = n(d) = 1$ . Обозначим компоненту связности  $\Gamma_O(\mathbb{S})$ , содержащую  $(a, b)$  и  $(c, d)$ , за  $C$ . По следствию 3.2.9, множество вершин  $C$  совпадает с  $\mathbb{P}(\Lambda_{(a,b)})$ . Более того, согласно лемме 3.2.7,  $\Lambda_{(a,b)}$  лежит на расстоянии не больше 3 от  $(a, b)$  в  $\Gamma_O(\mathbb{S})$ .

Заметим, что из теоремы 3.1.14(4) следует, что  $O_{\mathbb{S}}((a, b)) \cap O_{\mathbb{S}}((b, a)) = 0$ , поэтому  $d((a, b), (b, a)) = 3$ .

Поскольку элемент  $(a, b)$  был выбран произвольным образом, диаметр каждой компоненты связности равен 3. □

**Лемма 3.2.11.** [12, предложение 12.1] Пусть  $a, b \in \mathbb{O}$ ,  $(a, b) \in \mathbb{S} \setminus \{0\}$ . Тогда  $(a, b) \in Z(\mathbb{S})$ , если и только если выполнены следующие условия:

- (1)  $n(a) = n(b)$ ;
- (2)  $1, a, b$  ортогональны относительно скалярного произведения  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Теорема 3.2.12.** Пусть  $\mathbb{P}(\mathfrak{Im}(\mathbb{O}))$  обозначает множество всех одномерных подпространств в  $\mathfrak{Im}(\mathbb{O})$ , а  $\mathcal{C}(\Gamma_O(\mathbb{S}))$  — множество компонент связности графа  $\Gamma_O(\mathbb{S})$ . Тогда существует корректно определённая биекция  $\psi : \mathcal{C}(\Gamma_O(\mathbb{S})) \rightarrow \mathbb{P}(\mathfrak{Im}(\mathbb{O}))$ , действующая следующим образом. Если  $C \in \mathcal{C}(\Gamma_O(\mathbb{S}))$  и  $(a, b) \in C$ , то  $\psi(C) = \text{Lin}(ab)$ .

*Доказательство.*

- $\psi$  корректно определено по следствию 3.2.4.
- $\psi$  инъективно по лемме 3.2.8.
- $\psi$  сюръективно. Рассмотрим прямую  $X \in \mathbb{P}(\mathfrak{Im}(\mathbb{O}))$ . Тогда  $X = \text{Lin}(x)$  для некоторого  $x \in \mathfrak{Im}(\mathbb{O})$ ,  $n(x) = 1$ . Пусть теперь  $a \perp \text{Lin}(1, x)$ ,  $n(a) = 1$ ,  $b = \bar{a}x$ . Тогда  $ab = a(\bar{a}x) = (a\bar{a})x = x$ . Согласно лемме 3.2.11,  $(a, b) \in Z(\mathbb{S})$ :

- (1) по лемме 2.1.1,  $n(b) = n(\bar{a})n(x) = n(a)$ ;
- (2) из леммы 1.3.7 следует, что  $\langle 1, b \rangle = \langle a, x \rangle = 0$ ,  $\langle a, b \rangle = \langle a^2, x \rangle = -\langle 1, x \rangle = 0$ , поэтому  $1, a, b$  ортогональны.

Пусть теперь  $C \in \mathcal{C}(\Gamma_O(\mathbb{S}))$  такова, что  $(a, b) \in C$ . Тогда  $\psi(C) = X$ . □

**Следствие 3.2.13.** Пусть  $\varphi \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O})$  порождает автоморфизм  $\widehat{\varphi} \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{S})$  по формуле  $\widehat{\varphi}((x, y)) = (\varphi(x), \varphi(y))$  для всех  $(x, y) \in \mathbb{S}$ . Тогда  $\widehat{\varphi}$  действует естественным образом на  $\mathcal{C}(\Gamma_O(\mathbb{S}))$ , причём  $\psi \circ \widehat{\varphi} = \varphi \circ \psi$ .

*Доказательство.* Заметим, что  $\widehat{\varphi}$  сохраняет пары ортогональных элементов и, следовательно, отображает компоненты связности  $\Gamma_O(\mathbb{S})$  в компоненты связности. Пусть  $C \in \mathcal{C}(\Gamma_O(\mathbb{S}))$ ,  $(a, b) \in C$ . Тогда  $(\varphi(a), \varphi(b)) = \widehat{\varphi}((a, b)) \in \widehat{\varphi}(C)$ , поэтому  $\psi(\widehat{\varphi}(C)) = \text{Lin}(\varphi(a)\varphi(b)) = \text{Lin}(\varphi(ab)) = \varphi(\text{Lin}(ab)) = \varphi(\psi(C))$ . □

### 3.2.3 Граф ортогональности на парах базисных элементов

**Обозначение.** Нам понадобятся следующие подмножества  $Z(\mathbb{S})$ :

$$Z_e = \{(e_i, \pm e_j) \in Z(\mathbb{S})\},$$

$$Z_e^+ = \{(e_i, e_j) \in Z(\mathbb{S})\},$$

$$Z_e^- = \{(e_i, -e_j) \in Z(\mathbb{S})\}.$$

Обозначим за  $\Gamma_e(\mathbb{S})$  подграф  $\Gamma_O(\mathbb{S})$  на множестве вершин  $\mathbb{P}(Z_e)$ .

**Описание 3.2.14.**  $\Gamma_e(\mathbb{S})$  изображён на рисунке 3.3 на основе результатов работ [18] и [34].

$\Gamma_e(\mathbb{S})$  несвязен и состоит из 7 двойных шестиугольников. Для удобства мы будем считать, что внешние элементы принадлежат  $Z_e^+$ , а внутренние —  $Z_e^-$ . Пронумеруем двойные шестиугольники на рисунке 3.3 от 1 до 7 слева направо и сверху вниз. Будем обозначать  $k$ -ый двойной шестиугольник как  $H_k$ .

**Предложение 3.2.15.** Перечислим основные свойства  $\Gamma_e(\mathbb{S})$ :

- (1)  $(e_i, \pm e_j) \in Z(\mathbb{S})$ , если и только если  $i \neq j$ ;
- (2)  $(e_i, e_j)(e_k, e_l) = 0$ , если и только если  $(e_i, -e_j)(e_k, -e_l) = 0$ ,  
 $(e_i, e_j)(e_k, -e_l) = 0$ , если и только если  $(e_i, -e_j)(e_k, e_l) = 0$ ;
- (3) Для всех  $k \in \{1, \dots, 7\}$  подграф  $H_k$  — это в действительности двойной шестиугольник с рисунка 3.1, упорядоченный так, чтобы внешние элементы принадлежали  $Z_e^+$ , а внутренние —  $Z_e^-$ ;
- (4) Каждый двойной угол двойного шестиугольника содержит пару элементов  $(e_i, e_j)$  и  $(e_j, -e_i)$ . Противоположный двойной угол содержит элементы  $(e_j, e_i)$  и  $(e_i, -e_j)$ ;
- (5) Пусть  $(e_i, \pm e_j) \in H_k$ . Тогда  $e_i e_j = \pm e_k$ .

*Доказательство.*

- (1) Следует из леммы 3.2.11.
- (2) Сразу следует из теоремы 3.1.14.
- (3) Нетрудно проверить непосредственными вычислениями.
- (4) Следует из структуры двойного шестиугольника на рисунке 3.1.
- (5) Пусть  $(e_i, e_j)$  — произвольный элемент в  $H_k$ . Тогда, по теореме 3.2.12, для любого  $(e_l, e_m) \in H_k$  выполнено  $e_l e_m \in \text{Lin}(e_i e_j)$ . Значит,  $e_l e_m = \pm e_i e_j$ . Перенумерацией двойных шестиугольников нетрудно добиться равенства  $e_i e_j = \pm e_k$  для всех  $(e_i, \pm e_j) \in H_k$ .

□

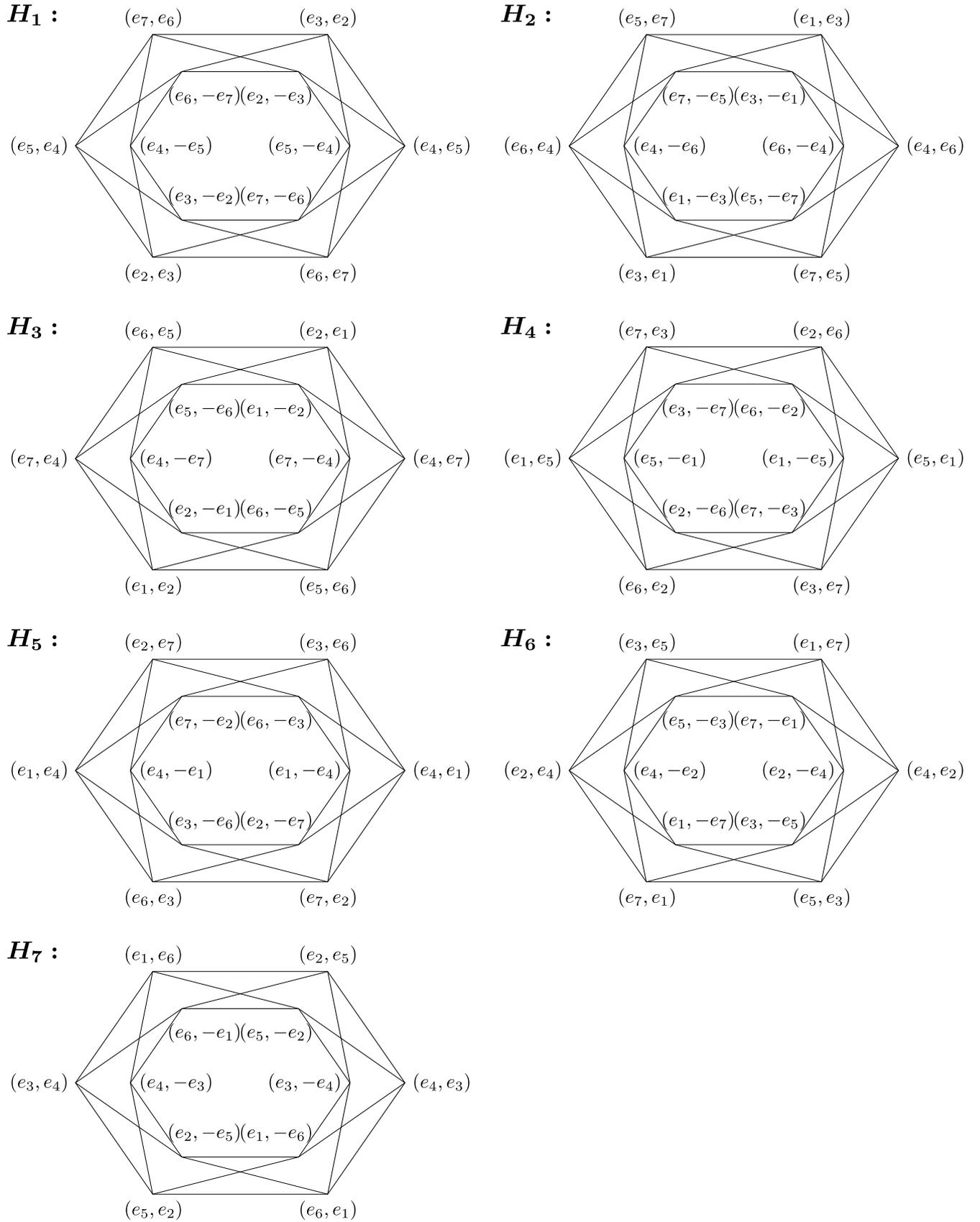


Рис. 3.3: Подграф  $\Gamma_O(\mathbb{S})$  на элементах вида  $[(e_i, \pm e_j)]$ .

**Предложение 3.2.16.** *Разные компоненты связности  $\Gamma_e(\mathbb{S})$  содержатся в разных компонентах связности  $\Gamma_O(\mathbb{S})$ .*

*Доказательство.* Непосредственно следует из теоремы 3.2.12 и предложения 3.2.15(5).  $\square$

Отметим, что шестиугольники на рисунке 3.3 уже встречались в работе Брауна [17, теорема 8.1]. Кроме того, де Маре [34] изучал ранее делители нуля вида  $(e_i, \pm e_j)$  и получил аналог двойных шестиугольников [35, стр. 3], а также таблицу умножения для их вершин [36, стр. 8], которая будет доказана нами в следующем подразделе. Однако наше доказательство является более общим.

### 3.2.4 Таблица умножения вершин двойного шестиугольника

**Лемма 3.2.17.** *Пусть  $\{1, x, y\}$  — ортонормированная система в  $\mathbb{O}$ . Тогда в  $\mathbb{S}$  выполнено*

$$\begin{aligned}(x, y)(0, xy) &= -(x, -y), \\ (x, y)(xy, 0) &= -(y, x).\end{aligned}$$

*Доказательство.* По лемме 1.3.8, элементы  $x$  и  $y$  антикоммутируют. Поскольку  $x$  и  $y$  чисто мнимые, имеем  $x^2 = -n(x) = -1$  и  $y^2 = -n(y) = -1$ . Тогда из альтернативности  $\mathbb{O}$  мы получаем

$$\begin{aligned}(x, y)(0, xy) &= (-\overline{(xy)}y, (xy)x) = ((xy)y, -(yx)x) = (x(yy), -y(xx)) = -(x, -y), \\ (x, y)(xy, 0) &= (x(xy), y\overline{(xy)}) = (x(xy), y(yx)) = ((xx)y, (yy)x) = -(x, y).\end{aligned}\quad \square$$

Пусть  $(a, b), (c, d) \in Z(\mathbb{S})$ ,  $(a, b)(c, d) = 0$ ,  $n(a) = n(b) = n(c) = n(d) = 1$ . Тогда  $(a, b), (c, d)$  удовлетворяют условиям теоремы 3.1.14, поэтому рисунок 3.1 изображает двойной шестиугольник в  $\Gamma_O(\mathbb{S})$ , содержащий  $(a, b)$  и  $(c, d)$ . Вершины этого шестиугольника можно дополнить до базиса в  $\mathbb{S}$ , имеющего удобную таблицу умножения.

**Теорема 3.2.18.** *Пусть*

$$\begin{array}{llll}f_0 = (1, 0), & f_4 = (ac, -ad), & \tilde{f}_0 = (0, 1), & \tilde{f}_4 = (ad, ac), \\f_1 = (a, b), & f_5 = (c, d), & \tilde{f}_1 = (-b, a), & \tilde{f}_5 = (-d, c), \\f_2 = (c, -d), & f_6 = (a, -b), & \tilde{f}_2 = (d, c), & \tilde{f}_6 = (b, a), \\f_3 = (ac, ad), & f_7 = (0, ab), & \tilde{f}_3 = (-ad, ac), & \tilde{f}_7 = (-ab, 0).\end{array}$$

Тогда  $F = \{f_m, \tilde{f}_m \mid m = 0, \dots, 7\}$  — базис в  $\mathbb{S}$ , ортогональный относительно скалярного произведения  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Его таблица умножения описывается таблицей 3.4.

*Доказательство.* Легко видеть, что  $f_0 = e_0$  и  $\tilde{f}_0 = \tilde{e}_0$  в терминах стандартного базиса  $\mathbb{S}$ . Согласно предложению 3.2.1, элементы  $1, a, b, c, d, ab, ac, ad$  образуют ортонормированную систему относительно скалярного произведения  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Следовательно,  $F$  — ортогональная система в  $\mathbb{S}$ . По лемме 1.3.8, элементы  $F \setminus \{f_0\}$  попарно антикоммутируют.

$\times$	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$\tilde{f}_0$	$\tilde{f}_1$	$\tilde{f}_2$	$\tilde{f}_3$	$\tilde{f}_4$	$\tilde{f}_5$	$\tilde{f}_6$	$\tilde{f}_7$
$f_0$	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$\tilde{f}_0$	$\tilde{f}_1$	$\tilde{f}_2$	$\tilde{f}_3$	$\tilde{f}_4$	$\tilde{f}_5$	$\tilde{f}_6$	$\tilde{f}_7$
$f_1$	$f_1$	$-2f_0$	$2f_3$	$-2f_2$	0	0	$2f_7$	$-f_6$	$\tilde{f}_1$	$-2\tilde{f}_0$	$-2\tilde{f}_3$	$2\tilde{f}_2$	0	0	$-2\tilde{f}_7$	$\tilde{f}_6$
$f_2$	$f_2$	$-2f_3$	$-2f_0$	$2f_1$	0	$2f_7$	0	$-f_5$	$\tilde{f}_2$	$2\tilde{f}_3$	$-2\tilde{f}_0$	$-2\tilde{f}_1$	0	$-2\tilde{f}_7$	0	$\tilde{f}_5$
$f_3$	$f_3$	$2f_2$	$-2f_1$	$-2f_0$	$2f_7$	0	0	$-f_4$	$\tilde{f}_3$	$-2\tilde{f}_2$	$2\tilde{f}_1$	$-2\tilde{f}_0$	$-2\tilde{f}_7$	0	0	$\tilde{f}_4$
$f_4$	$f_4$	0	0	$-2f_7$	$-2f_0$	$-2f_6$	$2f_5$	$f_3$	$\tilde{f}_4$	0	0	$2\tilde{f}_7$	$-2\tilde{f}_0$	$2\tilde{f}_6$	$-2\tilde{f}_5$	$-\tilde{f}_3$
$f_5$	$f_5$	0	$-2f_7$	0	$2f_6$	$-2f_0$	$-2f_4$	$f_2$	$\tilde{f}_5$	0	$2\tilde{f}_7$	0	$-2\tilde{f}_6$	$-2\tilde{f}_0$	$2\tilde{f}_4$	$-\tilde{f}_2$
$f_6$	$f_6$	$-2f_7$	0	0	$-2f_5$	$2f_4$	$-2f_0$	$f_1$	$\tilde{f}_6$	$2\tilde{f}_7$	0	0	$2\tilde{f}_5$	$-2\tilde{f}_4$	$-2\tilde{f}_0$	$-\tilde{f}_1$
$f_7$	$f_7$	$f_6$	$f_5$	$f_4$	$-f_3$	$-f_2$	$-f_1$	$-f_0$	$\tilde{f}_7$	$-\tilde{f}_6$	$-\tilde{f}_5$	$-\tilde{f}_4$	$\tilde{f}_3$	$\tilde{f}_2$	$\tilde{f}_1$	$-\tilde{f}_0$
$\tilde{f}_0$	$\tilde{f}_0$	$-\tilde{f}_1$	$-\tilde{f}_2$	$-\tilde{f}_3$	$-\tilde{f}_4$	$-\tilde{f}_5$	$-\tilde{f}_6$	$-\tilde{f}_7$	$-f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$
$\tilde{f}_1$	$\tilde{f}_1$	$2\tilde{f}_0$	$-2\tilde{f}_3$	$2\tilde{f}_2$	0	0	$-2\tilde{f}_7$	$\tilde{f}_6$	$-f_1$	$-2f_0$	$-2f_3$	$2f_2$	0	0	$-2f_7$	$f_6$
$\tilde{f}_2$	$\tilde{f}_2$	$2\tilde{f}_3$	$2\tilde{f}_0$	$-2\tilde{f}_1$	0	$-2\tilde{f}_7$	0	$\tilde{f}_5$	$-f_2$	$2f_3$	$-2f_0$	$-2f_1$	0	$-2f_7$	0	$f_5$
$\tilde{f}_3$	$\tilde{f}_3$	$-2\tilde{f}_2$	$2\tilde{f}_1$	$2\tilde{f}_0$	$-2\tilde{f}_7$	0	0	$\tilde{f}_4$	$-f_3$	$-2f_2$	$2f_1$	$-2f_0$	$-2f_7$	0	0	$f_4$
$\tilde{f}_4$	$\tilde{f}_4$	0	0	$2\tilde{f}_7$	$2\tilde{f}_0$	$2\tilde{f}_6$	$-2\tilde{f}_5$	$-\tilde{f}_3$	$-f_4$	0	0	$2f_7$	$-2f_0$	$2f_6$	$-2f_5$	$-f_3$
$\tilde{f}_5$	$\tilde{f}_5$	0	$2\tilde{f}_7$	0	$-2\tilde{f}_6$	$2\tilde{f}_0$	$2\tilde{f}_4$	$-\tilde{f}_2$	$-f_5$	0	$2f_7$	0	$-2f_6$	$-2f_0$	$2f_4$	$-f_2$
$\tilde{f}_6$	$\tilde{f}_6$	$2\tilde{f}_7$	0	0	$2\tilde{f}_5$	$-2\tilde{f}_4$	$2\tilde{f}_0$	$-\tilde{f}_1$	$-f_6$	$2f_7$	0	0	$2f_5$	$-2f_4$	$-2f_0$	$-f_1$
$\tilde{f}_7$	$\tilde{f}_7$	$-\tilde{f}_6$	$-\tilde{f}_5$	$-\tilde{f}_4$	$\tilde{f}_3$	$\tilde{f}_2$	$\tilde{f}_1$	$\tilde{f}_0$	$-f_7$	$-f_6$	$-f_5$	$-f_4$	$f_3$	$f_2$	$f_1$	$-f_0$

Таблица 3.4: Таблица умножения базисных элементов  $\mathbb{S}$ , являющихся делителями нуля.

По лемме 2.1.2, для любого  $(x, y) \in \mathbb{S}$  выполнено  $(x, y)\tilde{f}_0 = (x, y)(0, 1) = (-y, x)$ . Следовательно,  $f_m\tilde{f}_0 = \tilde{f}_m$  и  $\tilde{f}_m\tilde{f}_0 = -f_m$  для всех  $m = 0, \dots, 7$ .

Поскольку  $(a, b)(c, d) = 0$  и  $(c, d)(ac, ad) = 0$ , из леммы 3.2.2 следует, что  $ab = -cd = (ac)(ad)$ . Элементы  $a, b, c, d, ac, ad$  попарно антикоммутируют, поэтому

$$ab = -ba = dc = -cd = (ac)(ad) = -(ad)(ac).$$

Тогда равенства в таблице умножения для элементов  $\{f_m, \tilde{f}_m \mid m = 0, \dots, 6\}$  следуют из теоремы 3.1.11. Затем мы добавляем столбцы и строки, соответствующие  $f_7$  и  $\tilde{f}_7$ , используя лемму 3.2.17.  $\square$

Таблица 3.4 имеет блочную структуру, а её  $(3 \times 3)$ -блоки бывают двух видов. Часть из них антидиагональна, а остальные сходны с таблицей умножения базисных кватернионов. В целом, таблица 3.4 напоминает таблицу умножения для стандартного базиса  $\mathbb{S}$ , см. [18, стр. 254]. Базис  $F$  был найден ранее в работе [36, стр. 8], однако де Маре иначе упорядочивал элементы, поэтому его таблица умножения имеет другую структуру и состоит из блоков  $4 \times 4$ .

Отметим также работу Чана и Джоковича [19], посвящённую классификации подалгебр в  $\mathbb{S}$ . Классом сопряжённости называется орбита относительно действия  $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{S})$  на множестве всех подалгебр в  $\mathbb{S}$ . Изоморфизм двух подалгебр  $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{S}$  будем обозначать как  $S_1 \cong S_2$ , а их сопряжённость — как  $S_1 \sim S_2$ . В [19] показано, что размерность произвольной подалгебры в  $\mathbb{S}$  может принимать значения 1, 2, 3, 4, 6 или 8. Кроме того, описаны классы сопряжённости для каждой из возможных размерностей. Выбирая представителей этих классов, Чан и Джокович определённо использовали некоторые соотношения между делителями нуля, установленные в таблице 3.4, однако они не выписывали саму таблицу в явном виде. Пусть

$$\begin{aligned} S_3 &= \text{Lin}((1, 0), (e_1, e_4), (e_2, e_7)), & \mathbb{O}_{i,j,e} &= \mathbb{H} + \mathbb{H}(0, 1), \\ S_4 &= \text{Lin}((1, 0), (e_1, e_2), (e_4, e_7), (e_5, -e_6)), & R_8 &= S_4 + S_4(0, 1), \\ S_6 &= S_3 + S_3(0, 1), & S_8 &= \mathbb{H} + \mathbb{H}(0, e_4). \end{aligned}$$

Чан и Джокович [19] показали, что:

- Любая трёхмерная подалгебра сопряжена  $S_3$ ;
- Любая четырёхмерная подалгебра либо изоморфна  $\mathbb{H}$ , либо сопряжена  $S_4$ ;
- Любая шестимерная подалгебра сопряжена  $S_6$ ;
- Любая восьмимерная подалгебра сопряжена одной из подалгебр  $\mathbb{O}, \mathbb{O}_{i,j,e}, R_8$  или  $S_8$ . Подалгебра  $S_8$  единственная среди них не обладает делением. Алгебры  $\mathbb{O}$  и  $\mathbb{O}_{i,j,e}$  изоморфны, а  $R_8$  не изоморфна им.

Следующее предложение описывает некоторые подалгебры в  $\mathbb{S}$ , существование которых явно следует из таблицы 3.4. Мы также классифицируем их согласно результатам, полученным в [19].

**Предложение 3.2.19.** Перечислим некоторые нетривиальные подалгебры  $\mathbb{S}$ , содержащие  $f_1$ .

$$\begin{aligned} \dim = 3: & \quad \text{Lin}(f_0, f_1, f_4) \sim S_3, \text{Lin}(f_0, f_1, f_5) \sim S_3, \\ & \quad \text{Lin}(f_0, f_1, \tilde{f}_4) \sim S_3, \text{Lin}(f_0, f_1, \tilde{f}_5) \sim S_3. \\ \dim = 4: & \quad \text{Lin}(f_0, f_1, f_6, f_7) \cong \mathbb{H}, \text{Lin}(f_0, f_1, \tilde{f}_0, \tilde{f}_1) \cong \mathbb{H}, \\ & \quad \text{Lin}(f_0, f_1, \tilde{f}_6, \tilde{f}_7) \cong \mathbb{H}, \text{Lin}(f_0, f_1, f_2, f_3) \sim S_4. \\ \dim = 6: & \quad \text{Lin}(f_0, f_1, f_4, \tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \tilde{f}_4) \sim S_6, \\ & \quad \text{Lin}(f_0, f_1, f_5, \tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \tilde{f}_5) \sim S_6. \\ \dim = 8: & \quad \text{Lin}(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7) \sim S_8, \\ & \quad \text{Lin}(f_0, f_1, f_6, f_7, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3, \tilde{f}_4, \tilde{f}_5) \sim S_8, \\ & \quad \text{Lin}(f_0, f_1, f_6, f_7, \tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \tilde{f}_6, \tilde{f}_7) \sim \mathbb{O}_{i,j,e}, \\ & \quad \text{Lin}(f_0, f_1, f_2, f_3, \tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3) \sim R_8. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Используя таблицу 3.4, нетрудно проверить, что эти линейные пространства замкнуты относительно умножения, поэтому они являются подалгебрами в  $\mathbb{S}$ .

Сопряжённость подалгебрам  $S_3$  и  $S_6$  при  $\dim = 3$  и  $\dim = 6$  следует из [19, теорема 8.1].

Изоморфизм между  $\text{Lin}(f_0, f_1, f_6, f_7)$ ,  $\text{Lin}(f_0, f_1, \tilde{f}_0, \tilde{f}_1)$ ,  $\text{Lin}(f_0, f_1, \tilde{f}_6, \tilde{f}_7)$  и  $\mathbb{H}$  становится очевидным, если нормализовать элементы  $f_1, f_6, \tilde{f}_1, \tilde{f}_6$ , то есть поделить каждый из них на  $\sqrt{2}$ . Однако подалгебра  $\text{Lin}(\tilde{f}_0, \tilde{f}_1, f_2, f_3)$  не является ассоциативной, поэтому она не изоморфна  $\mathbb{H}$ , см. [19, стр. 496]. Значит,  $\text{Lin}(f_0, f_1, f_2, f_3) \sim S_4$ .

Поскольку  $f_1 f_4 = f_1 \tilde{f}_4 = 0$ ,  $\text{Lin}(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7)$  и  $\text{Lin}(f_0, f_1, f_6, f_7, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3, \tilde{f}_4, \tilde{f}_5)$  являются восьмимерными подалгебрами без деления. Таким образом, они сопряжены с  $S_8$ .

Так как  $\text{Lin}(f_0, f_1, f_6, f_7) \cong \mathbb{H}$ , элементы  $f_1$  и  $f_6$  строго альтернируют в  $\mathbb{S}$ . Кроме того,  $f_6 \perp \text{Lin}(f_0, f_1, \tilde{f}_0, \tilde{f}_1)$ . Следовательно, по лемме 2.1.9,  $\text{Lin}(f_0, f_1, f_6, f_7, \tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \tilde{f}_6, \tilde{f}_7) \cong \mathbb{O}$ . Множество  $\{\pm \tilde{f}_0\}$  инвариантно относительно  $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{S})$ , см. [23, лемма 2.1], причём  $\tilde{f}_0 \notin \mathbb{O}$ . Значит, подалгебра  $\text{Lin}(f_0, f_1, f_6, f_7, \tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \tilde{f}_6, \tilde{f}_7)$  не сопряжена  $\mathbb{O}$ , поэтому она сопряжена  $\mathbb{O}_{i,j,e}$ .

И наконец,  $\text{Lin}(f_0, f_1, f_2, f_3, \tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3) = \text{Lin}(f_0, f_1, f_2, f_3) + \text{Lin}(f_0, f_1, f_2, f_3)(0, 1)$ . Мы знаем, что  $\text{Lin}(f_0, f_1, f_2, f_3) \sim S_4$ , поэтому  $\text{Lin}(f_0, f_1, f_2, f_3, \tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3) \sim S_4 + S_4(0, 1) = R_8$ .  $\square$

**Замечание 3.2.20.** Поскольку  $f_1 = (a, b)$  — произвольный делитель нуля в  $\mathbb{S}$ , предложение 3.2.19 описывает подалгебры, содержащие произвольный делитель нуля из  $\mathbb{S}$ .

### 3.2.5 Граф коммутативности

Напомним, что, по лемме 1.3.13, при  $n \geq 2$  можно считать, что множество вершин графа  $\Gamma_C(\mathcal{A}_n)$  совпадает с  $\mathbb{P}(\mathcal{A}'_n)$ .

**Предложение 3.2.21.** Пусть  $x \in \mathcal{M}_n \setminus \{0\}$ ,  $\Re(x) = 0$ ,  $x \notin Z(\mathcal{M}_n)$ . Тогда компонента связности  $\Gamma_C(\mathcal{M}_n)$ , содержащая  $[x]$ , состоит из одной вершины.

*Доказательство.* Из леммы 2.4.2 следует, что  $C_{\mathcal{M}_n}(x) = \text{Lin}(e_0, x)$ . Отсюда мы сразу получаем требуемое утверждение.  $\square$

Согласно предложению 3.2.21, естественно ввести следующее обозначение:

**Обозначение.**  $\Gamma_C^Z(\mathbb{S})$  — подграф  $\Gamma_C(\mathbb{S})$  на множестве вершин  $\mathbb{P}(Z(\mathbb{S}))$ .

**Лемма 3.2.22.** Пусть  $(a, b) \in Z(\mathbb{S})$ ,  $z \in \mathbb{O}$ . Тогда существует такой  $(x, y) \in \mathfrak{Im}(C_{\mathbb{S}}((a, b)))$ , что  $xy = z$ , если и только если  $z \perp \text{Lin}(1, a, b)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим произвольный элемент  $(c, d) \in O_{\mathbb{S}}((a, b))$ ,  $(c, d) \neq 0$ , и предположим без ограничения общности, что  $n(a) = n(b) = n(c) = n(d) = 1$ . По предложению 3.2.1, элементы  $1, a, b, c, d, ab, ac, ad$  образуют ортонормированную систему относительно скалярного произведения  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Из леммы 1.3.8 следует, что  $a, b, c, d, ab, ac, ad$  попарно антикоммутируют. Согласно лемме 3.2.2,  $ac = bd = -db$ ,  $ad = -bc = cb$ ,  $ab = -cd = (ac)(ad)$ , поэтому

$$\begin{aligned} a(ad) &= -d = -(ad)a, & c(ad) &= c(cb) = -b = -(ad)c, \\ a(ac) &= -c = -(ac)a, & c(ac) &= -c(ca) = a = -(ac)c, \\ b(ad) &= -b(bc) = c = -(ad)b, & d(ad) &= -d(da) = a = -(ad)d, \\ b(ac) &= b(bd) = -d = -(ac)b, & d(ac) &= -d(db) = b = -(ac)d. \end{aligned}$$

Из леммы 2.4.2 следует, что

$$\mathfrak{Im}(C_{\mathbb{S}}((a, b))) = \mathbb{R}(a, b) \oplus O_{\mathbb{S}}((a, b)) = \text{Lin}((a, b), (c, d), (d, -c), (ad, ac), (ac, -ad)).$$

Рассмотрим  $(x, y) \in \mathfrak{Im}(C_{\mathbb{S}}((a, b)))$ ,  $(x, y) = k_0(a, b) + k_1(c, d) + k_2(d, -c) + k_3(ad, ac) + k_4(ac, -ad)$ . Тогда  $x = k_0a + k_1c + k_2d + k_3ad + k_4ac$  и  $y = k_0b - k_2c + k_1d - k_4ad + k_3ac$ , откуда

$$xy = 2k_0(k_1ad - k_2ac - k_3c + k_4d) - (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 - k_0^2)ab.$$

Ясно, что  $xy \perp \text{Lin}(1, a, b)$ . Кроме того, для любого  $z \perp \text{Lin}(1, a, b)$  мы можем выбрать такие  $k_j$ ,  $j = 0, \dots, 5$ , что  $xy = z$ . Действительно, пусть  $z = l_1ad - l_2ac - l_3c + l_4d - l_0ab$ , тогда  $n(z) = l_0^2 + l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2$ . Поскольку  $n(xy) = n(x)n(y) = (k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2)^2$ , нам нужно  $k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = \sqrt{n(z)}$  и  $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 - k_0^2 = l_0$ . Следовательно,  $k_0^2 = \frac{\sqrt{n(z)} - l_0}{2}$ . Заметим, что  $l_0 \leq \sqrt{n(z)}$ , поэтому мы можем взять  $k_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{n(z)} - l_0}{2}}$ . Рассмотрим два случая:

- Если  $l_0 = \sqrt{n(z)}$ , то  $k_0 = 0$ . Кроме того,  $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 0$ . Тогда подойдут любые  $k_1, k_2, k_3, k_4$ , удовлетворяющие условию  $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = \sqrt{n(z)} = l_0$ .
- Если  $l_0 < \sqrt{n(z)}$ , то  $k_0 > 0$ . Положим  $k_j = \frac{l_j}{2k_0}$ ,  $j = 1, \dots, 4$ . Тогда

$$\begin{aligned} k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 - k_0^2 &= \frac{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2}{4k_0^2} - k_0^2 = \frac{n(z) - l_0^2 - 4k_0^4}{4k_0^2} = \\ &= \frac{n(z) - l_0^2 - (\sqrt{n(z)} - l_0)^2}{2(\sqrt{n(z)} - l_0)} = \frac{2l_0(\sqrt{n(z)} - l_0)}{2(\sqrt{n(z)} - l_0)} = l_0, \end{aligned}$$

как и требовалось.

□

**Предложение 3.2.23.**  $\Gamma_C^Z(\mathbb{S})$  *связен, и его диаметр не превосходит 4.*

*Доказательство.* Пусть  $(a, b), (a', b') \in Z(\mathbb{S})$ . Рассмотрим произвольный ненулевой элемент  $z \perp \text{Lin}(1, a, b, a', b')$ . По лемме 3.2.22, существуют такие  $(c, d) \in \mathfrak{Im}(C_{\mathbb{S}}((a, b)))$  и  $(c', d') \in \mathfrak{Im}(C_{\mathbb{S}}((a', b')))$ , что  $cd = c'd' = z$ . Согласно предложению 3.2.21,  $(c, d), (c', d') \in Z(\mathbb{S})$ . По теореме 3.2.12,  $(c, d)$  и  $(c', d')$  принадлежат одной компоненте связности  $\Gamma_O(\mathbb{S})$ . Из теоремы 3.2.10 следует, что  $d_{\Gamma_O(\mathbb{S})}((c, d), (c', d')) \leq 3$ . Однако, по следствию 3.2.4, любой путь между  $(c, d)$  и  $(c', d')$  имеет чётную длину. Следовательно,  $d_{\Gamma_O(\mathbb{S})}((c, d), (c', d')) \leq 2$ . Любой путь в  $\Gamma_O(\mathbb{S})$  является также путём в  $\Gamma_C(\mathbb{S})$ , поэтому  $d_{\Gamma_C(\mathbb{S})}((c, d), (c', d')) \leq 2$ . Значит,  $d_{\Gamma_C(\mathbb{S})}((a, b), (a', b')) \leq 4$ .  $\square$

**Предложение 3.2.24.** *Диаметр  $\Gamma_C^Z(\mathbb{S})$  не меньше 3.*

*Доказательство.* Рассмотрим  $(a, b), (c, d) \in Z(\mathbb{S})$ ,  $(a, b)(c, d) = 0$ ,  $n(a) = n(b) = n(c) = n(d) = 1$ . Из рисунка 3.1 следует, что

$$\begin{aligned} O_{\mathbb{S}}((a, b)) &= \text{Lin}((c, d), (d, -c), (ad, ac), (ac, -ad)), \\ O_{\mathbb{S}}((b, a)) &= \text{Lin}((d, c), (c, -d), (ac, ad), (ad, -ac)). \end{aligned}$$

По лемме 2.4.2,

$$\begin{aligned} C_{\mathbb{S}}((a, b)) &= \text{Lin}((1, 0), (a, b)) \oplus O_{\mathbb{S}}((a, b)) = \text{Lin}((1, 0), (a, b), (c, d), (d, -c), (ad, ac), (ac, -ad)), \\ C_{\mathbb{S}}((b, a)) &= \text{Lin}((1, 0), (b, a)) \oplus O_{\mathbb{S}}((b, a)) = \text{Lin}((1, 0), (b, a), (d, c), (c, -d), (ac, ad), (ad, -ac)). \end{aligned}$$

Тогда, по теореме 3.1.14(4),  $C_{\mathbb{S}}((a, b)) \cap C_{\mathbb{S}}((b, a)) = \mathbb{R}$ , поэтому  $d_{\Gamma_C(\mathbb{S})}((a, b), (b, a)) \geq 3$ .  $\square$

После рассмотрения множества примеров с использованием Wolfram Mathematica оказалось, что во всех случаях можно найти путь длины 3 между двумя делителями нуля. Это приводит нас к следующей гипотезе.

**Гипотеза 3.2.25.** *Диаметр  $\Gamma_C^Z(\mathbb{S})$  равен 3.*

Объединяя результаты предложений 3.2.5, 3.2.23 и 3.2.24, следствий 3.2.9 и 3.2.13, а также теорем 3.2.10, 3.2.12 и 3.2.18, мы получаем следующую теорему:

**Теорема 3.2.26.**

- (1)  $\Gamma_O(\mathbb{S})$  *не содержит циклов нечётной длины.*
- (2) *Пусть  $(a, b)(c, d) = 0$  в  $\mathbb{S}$ ,  $n(a) = n(b) = n(c) = n(d) = 1$ . Тогда существует подграф  $\Gamma_O(\mathbb{S})$ , изображённый на рисунке 3.1 и называемый двойным шестиугольником. В обозначениях теоремы 3.2.18, вершины двойного шестиугольника удовлетворяют таблице умножения 3.4.*
- (3) *Множество вершин компоненты связности графа  $\Gamma_O(\mathbb{S})$ , содержащей  $(a, b)$ , совпадает с  $\mathbb{P}(\Lambda_{(a,b)})$ , где  $\Lambda_{(a,b)}$  — это множество всех нетривиальных линейных комбинаций элементов, стоящих в углах двойного шестиугольника через один.*

- (4) Диаметр каждой компоненты связности  $\Gamma_O(\mathbb{S})$  равен 3.
- (5) Пусть  $\mathcal{C}(\Gamma_O(\mathbb{S}))$  обозначает множество всех компонент связности графа  $\Gamma_O(\mathbb{S})$ . Тогда существует корректно определённая биекция  $\psi : \mathcal{C}(\Gamma_O(\mathbb{S})) \rightarrow \mathbb{P}(\mathfrak{Im}(\mathbb{O}))$ , действующая следующим образом. Если  $C \in \mathcal{C}(\Gamma_O(\mathbb{S}))$  и  $(a, b) \in C$ , то  $\psi(C) = \text{Lin}(ab)$ .
- (6) Пусть  $\varphi \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O})$  порождает автоморфизм  $\hat{\varphi} \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{S})$  по формуле  $\hat{\varphi}((x, y)) = (\varphi(x), \varphi(y))$  для всех  $(x, y) \in \mathbb{S}$ . Тогда  $\hat{\varphi}$  действует естественным образом на  $\mathcal{C}(\Gamma_O(\mathbb{S}))$ , причём  $\psi \circ \hat{\varphi} = \varphi \circ \psi$ .
- (7) Пусть  $\Gamma_C^Z(\mathbb{S})$  — подграф  $\Gamma_C(\mathbb{S})$  на множестве вершин  $\mathbb{P}(Z(\mathbb{S}))$ . Тогда  $\Gamma_C^Z(\mathbb{S})$  — компонента связности  $\Gamma_C(\mathbb{S})$ , причём значение её диаметра заключено между 3 и 4.

## Глава 4

# Графы отношений контр-алгебр малых размерностей

Глава построена следующим образом: в разделе 4.1 мы изучаем свойства дважды альтернативных делителей нуля в контр-алгебрах, а также устанавливаем взаимосвязь между графами коммутативности и графами ортогональности контр-алгебр малых размерностей. В разделах 4.2–4.5 мы описываем графы ортогональности и графы делителей нуля контр-алгебр малых размерностей: контркомплексных чисел, контркватернионов, контроктонионов и контрседенионов. Свойства компонент связности этих графов перечислены в теореме 4.2.1.

Результаты разделов 4.1–4.4 опубликованы в статье [49], а раздела 4.5 — в статье [50].

### 4.1 Дважды альтернативные делители нуля в контр-алгебрах

Напомним, что множество дважды альтернативных элементов алгебры  $\mathcal{A}_{n+1}$  обозначается как  $DA(\mathcal{A}_{n+1})$ , см. определение 2.3.6.

**Лемма 4.1.1.** Пусть  $(a, b) \in DA(\mathcal{H}_n) \setminus \{0\}$ . Тогда  $(a, b) \in Z(\mathcal{H}_n)$ , если и только если  $n((a, b)) = n(a) - n(b) = 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $n((a, b)) = 0$ . Тогда  $(a, b)\overline{(a, b)} = \overline{(a, b)}(a, b) = n((a, b)) = 0$ , откуда  $(a, b) \in Z(\mathcal{H}_n)$ . И наоборот, по лемме 2.2.4, из  $(a, b) \in Z(\mathcal{H}_n)$  следует, что  $(n(a))^2 = (n(b))^2$ . Кроме того,  $n(a) \geq 0$  и  $n(b) \geq 0$ , откуда  $n(a) = n(b)$  и, значит,  $n((a, b)) = n(a) - n(b) = 0$ .  $\square$

**Следствие 4.1.2.** Если  $1 \leq n \leq 4$ , то  $Z(\mathcal{H}_n) = \{x \in \mathcal{H}_n \setminus \{0\} \mid n(x) = 0\}$ .

*Доказательство.* Согласно предложению 2.3.7, имеет место равенство  $DA(\mathcal{H}_n) = \mathcal{H}_n$ , поэтому мы можем воспользоваться леммой 4.1.1.  $\square$

Теперь мы покажем, что множество элементов нулевой нормы, вообще говоря, строго меньше множества делителей нуля.

**Предложение 4.1.3.** При  $n \geq 5$  множество  $Z(\mathcal{H}_n)$  содержит элементы ненулевой нормы.

*Доказательство.* Если  $n \geq 5$ , то найдутся такие  $c, d \in Z(\mathcal{M}_{n-1})$ , что  $cd = dc = 0$ . Тогда  $(c, 0)(d, 0) = (d, 0)(c, 0) = 0$ , однако  $n((c, 0)) = n(c) \neq 0$  и  $n((d, 0)) = n(d) \neq 0$ .  $\square$

**Лемма 4.1.4.** Пусть  $a, b \in \mathcal{A}_n$ ,  $\Re a = 0$ . Тогда  $a(ab) = (ba)a$ .

*Доказательство.* Поскольку из  $\Re a = 0$  следует  $a^2 \in \mathbb{R}$ , то из гибкости получаем  $0 = [a, a, b] + [b, a, a] = a^2b - a(ab) + (ba)a - ba^2 = (ba)a - a(ab)$ .  $\square$

Следующая вспомогательная лемма 4.1.5 аналогична теореме 3.3 в [39] для  $\mathcal{M}_n$ , за исключением пункта (3).

**Лемма 4.1.5.** Пусть  $n \geq 4$ ,  $a, b \in \mathcal{M}_{n-1}$ ,  $\Re a = \Re b = 0$ . Рассмотрим следующие утверждения:

- (1)  $(a, b) \in \mathcal{H}_n$  альтернативен;
- (2)  $a$  и  $b$  альтернативны и линейно зависимы;
- (3)  $a = \pm b$ .

Тогда условие (1) равносильно выполнению одного из условий (2) или (3).

*Доказательство.* Рассмотрим условие альтернативности для элемента  $(a, b)$ . Для произвольного  $(c, d) \in \mathcal{H}_n$  выполняется равенство

$$\begin{aligned} (a, b)((a, b)(c, d)) &= (a, b)(ac + \bar{d}b, da + b\bar{c}) = \\ &= (a(ac + \bar{d}b) + \overline{(da + b\bar{c})}b, (da + b\bar{c})a + \overline{b(ac + \bar{d}b)}) = \\ &= (a(ac) - (cb)b - [a, \bar{d}, b], (da)a - b(bd) + [b, \bar{c}, a]) = (A, B), \end{aligned}$$

Мы также имеем  $[a, \bar{d}, b] = -[a, d, b]$  и, из гибкости,  $[b, \bar{c}, a] = -[b, c, a] = [a, c, b]$ . Кроме того, из леммы 4.1.4 следует, что  $(cb)b = b(bc)$  и  $(da)a = a(ad)$ . Значит,  $A = a(ac) - b(bc) + [a, d, b]$  и  $B = a(ad) - b(bd) + [a, c, b]$ .

Теперь рассмотрим

$$(a, b)^2(c, d) = -n((a, b))(c, d) = -(n(a) - n(b))(c, d) = (a^2 - b^2)(c, d).$$

Заметим, что  $B$  получается из  $A$  заменой  $c$  на  $d$  и наоборот. Таким образом,  $(a, b)$  альтернативен, если и только если для любых  $c, d \in \mathcal{M}_{n-1}$  выполняется равенство

$$a(ac) - b(bc) + [a, d, b] = (a^2 - b^2)c. \quad (4.1)$$

Независимо подставляя  $c = 0$  и  $d = 0$ , получаем, что это условие равносильно системе

$$\begin{cases} a(ac) - b(bc) = (a^2 - b^2)c, \\ [a, d, b] = 0 \end{cases}$$

для всех  $c, d \in \mathcal{M}_{n-1}$ .

Из теоремы 2.3 в [39] и гибкости,  $[a, d, b] = 0$  для всех  $d \in \mathcal{M}_{n-1}$ , если и только если  $a$  и  $b$  линейно зависимы.

Пусть теперь  $a$  и  $b$  линейно зависимы. Без ограничения общности можно считать, что  $b = \beta a$  для некоторого  $\beta \in \mathbb{R}$ , поэтому  $(a, b)$  альтернативен, если и только если  $(1 - \beta^2)a(ac) = (1 - \beta^2)a^2c$  для всех  $c \in \mathcal{M}_{n-1}$ . Это условие выполняется, если и только если либо  $\beta = \pm 1$ , либо  $a$  альтернативен.  $\square$

Пример 4.1.6 ниже показывает, что в лемме 4.1.1 мы не можем заменить  $\mathcal{H}_n$  произвольной алгеброй  $\mathcal{A}_n$  с условием  $\gamma_{n-1} = 1$ . Кроме того, он даёт пример дважды альтернативного делителя нуля, не удовлетворяющего условию (\*).

**Пример 4.1.6.** Пусть  $n \geq 4$ ,  $\mathcal{A}_n = \mathcal{H}_{n-1}\{1\}$ . Рассмотрим  $a = (e_1^{(n-2)}, 0)$ ,  $b = (e_1^{(n-2)}, e_1^{(n-2)})$ ,  $c = (e_2^{(n-2)}, -e_2^{(n-2)}) \in \mathcal{H}_{n-1}$ . Тогда  $(a+b, a)$  и  $(c, -c)$  дважды альтернативны и ортогональны в  $\mathcal{A}_n$ , поэтому  $(a+b, a) \in Z(\mathcal{A}_n)$ , однако  $n((a+b, a)) \neq 0$  и  $(a+b, a)$  не удовлетворяет условию (\*).

Согласно [44, лемма 4], любой элемент вида  $e_m^{(n)}$  всегда альтернативен в  $\mathcal{A}_n$ . Применяя лемму 4.1.5, получаем, что  $(a+b, a)$  и  $(c, -c)$  дважды альтернативны. Кроме того, согласно пункту (3) леммы 1.3.8,  $a$  и  $c$  антикоммутируют. Нетрудно также проверить, что  $b$  и  $c$  ортогональны. Тогда

$$\begin{aligned} (a+b, a)(c, -c) &= ((a+b)c - \bar{c}a, -c(a+b) + a\bar{c}) = (ac + ca, -(ac + ca)) = 0, \\ (c, -c)(a+b, a) &= (c(a+b) - \bar{a}c, ac - \overline{c(a+b)}) = (ac + ca, ac + ca) = 0, \end{aligned}$$

поэтому  $(a+b, a)$  и  $(c, -c)$  ортогональны. Наконец,  $n((a+b, a)) = n(a+b) - n(a) = 2$ , поскольку  $n(a+b) = n((2e_1^{(n-2)}, e_1^{(n-2)})) = n(2e_1^{(n-2)}) - n(e_1^{(n-2)}) = 4 - 1 = 3$  и  $n(a) = n(e_1^{(n-2)}) - n(0) = 1$ . Помимо этого,  $n(a+b) \neq \pm n(a)$ .

Предложение 11.1 из работы [12], доказанное для алгебр главной последовательности, может быть перенесено на случай контр-алгебр с заменой антиассоциатора на ассоциатор, см. лемму 4.1.7.

**Лемма 4.1.7.** Пусть  $(a, b) \in DA(\mathcal{H}_n) \cap Z(\mathcal{H}_n)$ . Тогда

$$\begin{aligned} l. \text{Ann}_{\mathcal{H}_n}((a, b)) &= \left\{ \left( c, -\frac{(bc)a}{n(a)} \right) \mid [a, c, b] = 0 \right\}, \\ r. \text{Ann}_{\mathcal{H}_n}((a, b)) &= \left\{ \left( c, -\frac{(b\bar{c})\bar{a}}{n(a)} \right) \mid [a, c, b] = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Если, кроме того,  $(a, b)$  является чисто мнимым, то есть  $(a, b) \in DA(\mathcal{H}_n) \cap Z'(\mathcal{H}_n)$ , то

$$O_{\mathcal{H}_n}((a, b)) = \left\{ \left( c, -\frac{(bc)a}{n(a)} \right) \mid \Re(c) = 0, [a, c, b] = 0 \right\}.$$

*Доказательство.* Следует из лемм 2.3.8 и 2.3.9 при  $\chi = 1$ .  $\square$

**Лемма 4.1.8.** Пусть  $(a, b) \in DA(\mathcal{H}_n) \cap Z'(\mathcal{H}_n)$ . Тогда

(1)  $C_{\mathcal{H}_n}((a, b)) = \mathbb{R} \oplus O_{\mathcal{H}_n}((a, b))$ ;

(2)  $x \in O_{\mathcal{H}_n}((a, b))$ , если и только если  $\Re(x) = 0$  и  $x \in C_{\mathcal{H}_n}((a, b))$ .

*Доказательство.* По лемме 4.1.1, из  $(a, b) \in DA(\mathcal{H}_n) \cap Z(\mathcal{H}_n)$  следует  $n(a) = n(b) \neq 0$ , то есть  $(a, b)$  удовлетворяет условию (\*) с  $\chi = 1$ . Таким образом, первая часть утверждения непосредственно следует из теоремы 2.4.9. Вторая часть следует из того факта, что в лемме 2.4.1 прямые слагаемые ортогональны друг другу относительно симметрической билинейной формы  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .  $\square$

Применим лемму 4.1.8 для описания связи между графами коммутативности и графами ортогональности контр-алгебр малых размерностей. Напомним, что, по лемме 1.3.13, при  $n \geq 2$  можно считать, что множество вершин графа  $\Gamma_C(\mathcal{A}_n)$  совпадает с  $\mathbb{P}(\mathcal{A}'_n)$ .

**Предложение 4.1.9.** Пусть  $2 \leq n \leq 4$ ,  $x \in \mathcal{H}_n \setminus \{0\}$ ,  $\Re(x) = 0$ ,  $n(x) \neq 0$ . Тогда компонента связности  $\Gamma_C(\mathcal{H}_n)$ , содержащая  $[x]$ , состоит из одной вершины.

*Доказательство.* По следствию 4.1.2,  $x \notin Z(\mathcal{H}_n)$ , поэтому  $O_{\mathcal{H}_n}(x) = \{0\}$ . Тогда из леммы 4.1.8 следует, что  $C_{\mathcal{H}_n}(x) = \text{Lin}(e_0, x)$ . Отсюда мы сразу получаем требуемое утверждение.  $\square$

**Теорема 4.1.10.** Пусть  $2 \leq n \leq 4$ . Обозначим как  $\Gamma_C^Z(\mathcal{H}_n)$  подграф  $\Gamma_C(\mathcal{H}_n)$  на множестве вершин  $\mathbb{P}(Z'(\mathcal{H}_n))$ , где  $Z'(\mathcal{H}_n) = \{x \in \mathcal{H}_n \setminus \{0\} \mid \Re(x) = n(x) = 0\}$ . Тогда  $\Gamma_C^Z(\mathcal{H}_n)$  изоморфен  $\Gamma'_O(\mathcal{H}_n)$ .

*Доказательство.* Заметим, что множества вершин  $\Gamma_C^Z(\mathcal{H}_n)$  и  $\Gamma'_O(\mathcal{H}_n)$  совпадают и равны  $\mathbb{P}(Z'(\mathcal{H}_n))$ . По лемме 4.1.8, элементы  $x, y \in Z'(\mathcal{H}_n)$  коммутируют, если и только если они ортогональны. Значит,  $\Gamma_C^Z(\mathcal{H}_n)$  и  $\Gamma'_O(\mathcal{H}_n)$  изоморфны.  $\square$

## 4.2 Контркомплексные числа

В этом и последующих разделах мы опишем графы отношений контр-алгебр малых размерностей, то есть контркомплексных чисел, контркватернионов, контроктонионов и контрседенионов. Доказанная в предыдущем разделе теорема 4.1.10 устанавливает взаимосвязь между графами ортогональности и графами коммутативности этих алгебр, поэтому для них достаточно рассмотреть только графы делителей нуля и графы ортогональности. Ключевым результатом при изучении этих графов является следствие 4.1.2.

Кроме того, в предложении 2.3.4 было показано, что любой делитель нуля  $a \in \mathcal{A}_n$  с нетривиальным ортогонализатором либо является чисто мнимым, либо имеет нулевую норму. Если  $a$  не является чисто мнимым, то содержащая его компонента связности  $\Gamma_O(\mathcal{A}_n)$  состоит из двух вершин:  $[a]$  и  $[\bar{a}]$ . Таким образом, в контексте графов ортогональности нас интересуют только чисто мнимые делители нуля, поэтому достаточно рассматривать  $\Gamma'_O(\mathcal{A}_n)$  — подграф  $\Gamma_O(\mathcal{A}_n)$  на множестве вершин  $\mathbb{P}(Z'(\mathcal{A}_n))$ .

Мы докажем следующую теорему, которая является объединением результатов предложения 4.2.2, а также теорем 4.3.7, 4.3.9, 4.4.16, 4.4.18, 4.5.15 и 4.5.26:

### Теорема 4.2.1.

- (1)  $\Gamma_O(\hat{\mathbb{C}})$  — полный граф на двух вершинах  $[1 + \ell]$  и  $[1 - \ell]$ .  $\Gamma_Z(\hat{\mathbb{C}})$  получается из  $\Gamma_O(\hat{\mathbb{C}})$  заменой неориентированного ребра на пару ориентированных рёбер.
- (2) Диаметр  $\Gamma_Z(\hat{\mathbb{H}})$  равен 2. Граф  $\Gamma'_O(\hat{\mathbb{H}})$  состоит из изолированных вершин вида  $[a]$ , где  $n(a) = \text{tr}(a) = 0$ .
- (3) Диаметр  $\Gamma_Z(\hat{\mathbb{O}})$  равен 2, диаметр  $\Gamma'_O(\hat{\mathbb{O}})$  равен 3.
- (4) Диаметр  $\Gamma_Z(\hat{\mathbb{S}})$  равен 4, диаметр  $\Gamma'_O(\hat{\mathbb{S}})$  равен 5.

Напомним, что алгеброй контркомплексных чисел  $\hat{\mathbb{C}}$  называется двумерная алгебра элементов вида  $a + b\ell$ , где  $a, b \in \mathbb{R}$  и  $\ell^2 = 1$ , с сопряжением  $\overline{a + b\ell} = a - b\ell$ .

**Предложение 4.2.2.**  $\Gamma_O(\hat{\mathbb{C}})$  — полный граф на двух вершинах  $[1 + \ell]$  и  $[1 - \ell]$ .  $\Gamma_Z(\hat{\mathbb{C}})$  получается из  $\Gamma_O(\hat{\mathbb{C}})$  заменой неориентированного ребра на пару ориентированных рёбер.

*Доказательство.* По следствию 4.1.2,  $Z(\hat{\mathbb{C}}) = \{a \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \mid n(a) = 0\} = [1 + \ell] \cup [1 - \ell]$ . Остаётся воспользоваться предложением 2.3.4 и тем фактом, что  $\hat{\mathbb{C}}$  коммутативна, поэтому условия  $ab = 0$  и  $ba = 0$  равносильны.  $\square$

## 4.3 Контркваaternionы

### 4.3.1 Матричное представление

Напомним, что алгеброй контркваaternionов  $\hat{\mathbb{H}}$  называется четырёхмерная алгебра над  $\mathbb{R}$  с базисом  $1, i, \ell, li$ . Сопряжение на  $\hat{\mathbb{H}}$  задаётся формулой  $\overline{a_0 + a_1i + a_2\ell + a_3li} = a_0 - a_1i - a_2\ell - a_3li$ , а умножение задаётся таблицей 4.1.

$\times$	1	$i$	$\ell$	$li$
1	1	$i$	$\ell$	$li$
$i$	$i$	-1	$-li$	$\ell$
$\ell$	$\ell$	$li$	1	$i$
$li$	$li$	$-\ell$	$-i$	1

Таблица 4.1: Таблица умножения базисных контркваaternionов.

**Предложение 4.3.1.** Пусть  $a = a_0 + a_1i + a_2\ell + a_3li \in \hat{\mathbb{H}}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Re(a) &= a_0, \\ \Im(a) &= a_1i + a_2\ell + a_3li, \\ n(a) &= a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Это частный случай леммы 1.3.2 для  $n = 2$ ,  $\gamma_0 = -1$ ,  $\gamma_1 = 1$ , поскольку из предложения 1.4.5 следует, что  $\hat{\mathbb{H}} \cong \mathcal{H}_2$ .  $\square$

**Лемма 4.3.2.** [37, стр. 66]  $\hat{\mathbb{H}}$  изоморфна  $M_2(\mathbb{R})$ , то есть алгебре вещественных матриц размера  $2 \times 2$ . Требуемый изоморфизм  $\sigma_{\hat{\mathbb{H}}} : \hat{\mathbb{H}} \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  задаётся следующим образом:

$$1 \mapsto I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \ell \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \ell i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь мы можем перенести понятия сопряжённого элемента, вещественной части и нормы на элементы алгебры  $M_2(\mathbb{R})$ .

**Предложение 4.3.3.** [37, стр. 157] Для любой матрицы  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$  имеем

$$\bar{A} = \text{tr}(A)I - A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

$$2\Re(A) = \text{tr}(A) = a + d,$$

$$n(A) = \det(A) = ad - bc.$$

Далее мы будем отождествлять элементы  $\hat{\mathbb{H}}$  и их образы при изоморфизме  $\sigma_{\hat{\mathbb{H}}}$ . Ясно, что в матричных терминах следствие 4.1.2 приобретает следующий очевидный смысл: матрица  $A \in M_2(\mathbb{R})$  является делителем нуля, если и только если  $\det(A) = 0$ .

### 4.3.2 Вещественная жорданова нормальная форма

**Замечание 4.3.4.** Пусть  $A \in \hat{\mathbb{H}}$ . Тогда характеристический многочлен  $p_A(\lambda) = \lambda^2 - t(A)\lambda + n(A)$  из определения 1.2.4 совпадает со стандартным характеристическим многочленом  $A$  как матрицы, и его дискриминант равен  $\text{dis}(A) = (\text{tr}(A))^2 - 4\det(A)$ .

**Лемма 4.3.5.** Пусть  $A \in \hat{\mathbb{H}} \setminus \mathbb{R}I$ . Тогда существует такое  $\varphi \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\hat{\mathbb{H}})$ , что:

(1) если  $\text{dis}(A) > 0$ , то есть  $\text{dis}(A) = d^2$  для некоторого  $d \neq 0$ , то

$$\varphi(A) = \frac{\text{tr}(A) + d\ell}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{tr}(A) + d & 0 \\ 0 & \text{tr}(A) - d \end{pmatrix};$$

(2) если  $\text{dis}(A) < 0$ , то есть  $\text{dis}(A) = -d^2$  для некоторого  $d \neq 0$ , то

$$\varphi(A) = \frac{\text{tr}(A) + di}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{tr}(A) & d \\ -d & \text{tr}(A) \end{pmatrix};$$

(3) если  $\text{dis}(A) = 0$ , то  $\varphi(A) = \frac{\text{tr}(A) + i + \ell i}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{tr}(A) & 2 \\ 0 & \text{tr}(A) \end{pmatrix}$ .

*Доказательство.* Пусть  $J_A$  — вещественная жорданова нормальная форма матрицы  $A$ .

(1) Если  $\text{dis}(A) > 0$ , то есть  $\text{dis}(A) = d^2$  для некоторого  $d \neq 0$ , то корнями  $p_A(\lambda)$  являются  $\frac{\text{tr}(A) \pm d}{2}$ , поэтому  $J_A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{tr}(A) + d & 0 \\ 0 & \text{tr}(A) - d \end{pmatrix}$ ;

(2) если  $\text{dis}(A) < 0$ , то есть  $\text{dis}(A) = -d^2$  для некоторого  $d \neq 0$ , то корнями  $p_A(\lambda)$  являются  $\frac{\text{tr}(A) \pm di}{2}$ , поэтому  $J_A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{tr}(A) & d \\ -d & \text{tr}(A) \end{pmatrix}$ ;

(3) если  $\text{dis}(A) = 0$ , то  $p_A(\lambda)$  имеет корень  $\frac{\text{tr}(A)}{2}$  кратности 2, поэтому  $J_A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{tr}(A) & 2 \\ 0 & \text{tr}(A) \end{pmatrix}$ , так как  $A \notin \mathbb{R}I$ .

Существует такая обратимая матрица  $C \in \hat{\mathbb{H}}$ , что  $A = C^{-1}J_AC$ . Зададим  $\varphi : \hat{\mathbb{H}} \rightarrow \hat{\mathbb{H}}$  формулой  $\varphi(B) = CBC^{-1}$  для всех  $B \in \hat{\mathbb{H}}$ . Тогда  $\varphi \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\hat{\mathbb{H}})$  и  $\varphi(A) = J_A$ .  $\square$

### 4.3.3 Граф ортогональности

Стоит заметить, что теорема 4.3.7 является частным случаем леммы 4.1 в работе [9], однако, на наш взгляд, формулировка теоремы 4.3.7 является более удобной.

**Лемма 4.3.6.** Пусть  $A \in Z(\hat{\mathbb{H}})$ . Тогда  $O_{\hat{\mathbb{H}}}(A) = \text{Lin}(\bar{A})$ .

*Доказательство.* Рассмотрим два случая:

(1) Если  $\Re(A) \neq 0$ , то мы можем воспользоваться предложением 2.3.4.

(2) Если  $\Re(A) = 0$ , то из леммы 4.1.7 следует, что  $\dim(O_{\hat{\mathbb{H}}}(A)) = 1$ . Поскольку  $\text{Lin}(\bar{A}) \subset O_{\hat{\mathbb{H}}}(A)$ , получаем  $O_{\hat{\mathbb{H}}}(A) = \text{Lin}(\bar{A}) = \text{Lin}(A)$ .  $\square$

**Теорема 4.3.7.** Компоненты связности  $\Gamma_O(\hat{\mathbb{H}})$  имеют следующий вид:

(1) полный граф на двух вершинах  $[A]$  и  $[\bar{A}]$ , где  $\det(A) = 0$ ,  $\text{tr}(A) \neq 0$ ;

(2) граф из одной вершины  $[A]$ , где  $\det(A) = 0$ ,  $\text{tr}(A) = 0$ .

Другими словами,  $\Gamma'_O(\hat{\mathbb{H}})$  состоит из изолированных вершин вида  $[A]$ , где  $\det(A) = 0$  и  $\text{tr}(A) = 0$ .

*Доказательство.* Непосредственно следует из леммы 4.3.6.  $\square$

### 4.3.4 Граф делителей нуля

Отметим, что теорема 4.3.9 является частным случаем леммы 4.2 в [15]. Тем не менее, мы приводим собственное доказательство этого утверждения, чтобы провести аналогию между  $\hat{\mathbb{H}}$  и  $\hat{\mathbb{O}}$ , см. теорему 4.3.9 и теорему 4.4.18, соответственно. Кроме того, в предложении 3.2 работы [15] показано, что для любого коммутативного кольца  $R$  и любого  $n \geq 2$  в  $\Gamma(M_n(R))$  существует ориентированный цикл длины 3. Однако в том случае, когда  $R = \mathbb{R}$  и  $n = 2$ , имеет место и более строгое утверждение, см. лемму 4.3.11.

**Обозначение.** Обозначим  $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Лемма 4.3.8.** Пусть  $A \in Z(\hat{\mathbb{H}})$ . Тогда существует такое  $\varphi \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\hat{\mathbb{H}})$ , что

- (1) если  $\text{tr}(A) \neq 0$ , то  $\varphi(A) = \text{tr}(A)E_{11}$ ;
- (2) если  $\text{tr}(A) = 0$ , то  $\varphi(A) = E_{12}$ .

*Доказательство.* По следствию 4.1.2,  $A \in Z(\hat{\mathbb{H}})$  означает  $\det(A) = 0$ , поэтому  $\text{dis}(A) = (\text{tr}(A))^2 - 4\det(A) = (\text{tr}(A))^2$ . Остаётся применить лемму 4.3.5.  $\square$

**Теорема 4.3.9.** Диаметр  $\Gamma_Z(\hat{\mathbb{H}})$  равен 2.

*Доказательство.* Сперва мы покажем, что  $d(\Gamma_Z(\hat{\mathbb{H}})) \leq 2$ . Так как любой автоморфизм сохраняет пары делителей нуля, то из леммы 4.3.5 вытекает, что достаточно доказать следующие утверждения. Пусть  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $\det(A) = ad - bc = 0$ . Тогда

- (1)  $d(E_{11}, A) \leq 2$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow k_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & -a \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d & -b \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};$$

- (2)  $d(E_{12}, A) \leq 2$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow k_1 \begin{pmatrix} c & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} d & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

В обоих случаях коэффициенты  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$  подобраны так, чтобы вторая матрица была отлична от нуля. Так как хотя бы одно из чисел  $a, b, c, d$  отлично от нуля, можно взять либо  $k_1 = 1$  и  $k_2 = 0$ , либо  $k_1 = 0$  и  $k_2 = 1$ .

Кроме того,  $d(\Gamma_Z(\hat{\mathbb{H}})) \geq 2$ , поскольку найдётся пара не связанных ребром вершин (например,  $E_{11} \not\sim E_{12}$ ). Значит,  $d(\Gamma_Z(\hat{\mathbb{H}})) = 2$ .  $\square$

**Предложение 4.3.10.**

- (1)  $l. \text{Ann}_{\hat{\mathbb{H}}}(E_{11}) = \text{Lin}(E_{12}, E_{22})$ ,  $r. \text{Ann}_{\hat{\mathbb{H}}}(E_{11}) = \text{Lin}(E_{21}, E_{22})$ ;
- (2)  $l. \text{Ann}_{\hat{\mathbb{H}}}(E_{12}) = \text{Lin}(E_{12}, E_{22})$ ,  $r. \text{Ann}_{\hat{\mathbb{H}}}(E_{12}) = \text{Lin}(E_{11}, E_{12})$ .

*Доказательство.* Все равенства проверяются при помощи непосредственных вычислений.  $\square$

**Лемма 4.3.11.** Пусть  $A, B \in Z(\hat{\mathbb{H}})$  линейно независимы,  $AB = 0$ . Тогда существует такое  $C \in Z(\hat{\mathbb{H}})$ , что  $A, B, C$  линейно независимы и образуют цикл длины 3 в  $\Gamma_Z(\hat{\mathbb{H}})$ , то есть  $BC = CA = 0$ .

*Доказательство.* Как следует из леммы 4.3.8, достаточно рассмотреть  $A \in \{E_{11}, E_{12}\}$ . Возможны два случая:

- (1)  $A = E_{11}$ . Тогда  $B = \alpha E_{21} + \beta E_{22}$ ,  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ , поэтому  $C = \beta E_{12} - \alpha E_{22}$ .

- (2)  $A = E_{12}$ . Тогда  $B = \alpha E_{11} + \beta E_{12}$ ,  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ . Поскольку  $A$  и  $B$  линейно независимы, имеем  $\alpha \neq 0$ , поэтому  $C = \beta E_{12} - \alpha E_{22}$ .  $\square$

## 4.4 Контроктонионы

### 4.4.1 Матричное представление

Напомним, что алгеброй контроктонионов  $\hat{\mathcal{O}}$  называется восьмимерная алгебра над  $\mathbb{R}$  с базисом  $1, i, j, k, \ell, li, lj, lk$ . Сопряжение на  $\hat{\mathcal{O}}$  задаётся формулой  $\overline{a_0 + a_1i + a_2j + a_3k + a_4\ell + a_5li + a_6lj + a_7lk} = a_0 - a_1i - a_2j - a_3k - a_4\ell - a_5li - a_6lj - a_7lk$ , а умножение задаётся таблицей 4.2.

$\times$	1	$i$	$j$	$k$	$\ell$	$li$	$lj$	$lk$
1	1	$i$	$j$	$k$	$\ell$	$li$	$lj$	$lk$
$i$	$i$	-1	$k$	$-j$	$-li$	$\ell$	$-lk$	$lj$
$j$	$j$	$-k$	-1	$i$	$-lj$	$lk$	$\ell$	$-li$
$k$	$k$	$j$	$-i$	-1	$-lk$	$-lj$	$li$	$\ell$
$\ell$	$\ell$	$li$	$lj$	$lk$	1	$i$	$j$	$k$
$li$	$li$	$-\ell$	$-lk$	$lj$	$-i$	1	$k$	$-j$
$lj$	$lj$	$lk$	$-\ell$	$-li$	$-j$	$-k$	1	$i$
$lk$	$lk$	$-lj$	$li$	$-\ell$	$-k$	$j$	$-i$	1

Таблица 4.2: Таблица умножения базисных контроктонионов.

**Предложение 4.4.1.** Пусть  $a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k + a_4\ell + a_5li + a_6lj + a_7lk \in \hat{\mathcal{O}}$ . Тогда

$$\Re(a) = a_0,$$

$$\Im(a) = a_1i + a_2j + a_3k + a_4\ell + a_5li + a_6lj + a_7lk,$$

$$n(a) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 - a_5^2 - a_6^2 - a_7^2.$$

*Доказательство.* Это частный случай леммы 1.3.2 для  $n = 3$ ,  $\gamma_0 = -1$ ,  $\gamma_1 = -1$ ,  $\gamma_2 = 1$ , так как из предложения 1.4.5 следует, что  $\hat{\mathcal{O}} \cong \mathcal{H}_3$ .  $\square$

**Обозначение.** Пусть  $a \in \mathbb{H}$ ,  $\Re(a) = 0$ ,  $a = a_1i + a_2j + a_3k$ . Тогда можно отождествить  $a$  и вектор  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^t \in \mathbb{R}^3$ .

**Лемма 4.4.2.** [37, стр. 158] Алгебра контроктонионов  $\hat{\mathcal{O}}$  изоморфна векторно-матричной алгебре Цорна, состоящей из всех матриц размера  $2 \times 2$  следующего вида:

$$\begin{pmatrix} a & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & b \end{pmatrix}, \quad \text{где } a, b \in \mathbb{R}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3,$$

в то время как сложение и умножение задаются формулами

$$\begin{pmatrix} a & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & \mathbf{v}' \\ \mathbf{w}' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & \mathbf{v} + \mathbf{v}' \\ \mathbf{w} + \mathbf{w}' & b + b' \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & \mathbf{v}' \\ \mathbf{w}' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}' & a\mathbf{v}' + b'\mathbf{v} + \mathbf{w} \times \mathbf{w}' \\ a'\mathbf{w} + b\mathbf{w}' - \mathbf{v} \times \mathbf{v}' & bb' + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{w} \end{pmatrix},$$

где  $\cdot$  и  $\times$  обозначают скалярное и векторное произведение элементов из  $\mathbb{R}^3$ , соответственно. Единицей этой алгебры является матрица  $I = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$ .

Требуемый изоморфизм  $\sigma_{\hat{\mathbb{O}}}$  задаётся следующим образом:

$$(a + c) + \ell(b + d) \mapsto \begin{pmatrix} a + b & \mathbf{c} + \mathbf{d} \\ -\mathbf{c} + \mathbf{d} & a - b \end{pmatrix},$$

где  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $c, d \in \mathbb{H}$  и  $\Re(c) = \Re(d) = 0$ .

**Предложение 4.4.3.** [37, стр. 158] Мы можем перенести понятия сопряжённого элемента, вещественной части и нормы на элементы векторно-матричной алгебры Цорна. Тогда для любой матрицы  $A = \begin{pmatrix} a & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & b \end{pmatrix}$  выполняется

$$\bar{A} = \text{tr}(A)I - A = \begin{pmatrix} b & -\mathbf{v} \\ -\mathbf{w} & a \end{pmatrix},$$

$$2\Re(A) = \text{tr}(A) = a + b,$$

$$n(A) = \det(A) = ab - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}.$$

Далее мы будем отождествлять элементы  $\hat{\mathbb{O}}$  и их образы при изоморфизме  $\sigma_{\hat{\mathbb{O}}}$ .

## 4.4.2 Вещественная жорданова нормальная форма

**Определение 4.4.4.** Алгебра  $\mathcal{A}$  с заданной на ней строго невырожденной квадратичной формой  $n(\cdot)$  называется композиционной алгеброй, если для любых  $a, b \in \mathcal{A}$  имеет место равенство  $n(ab) = n(a)n(b)$ .

**Теорема 4.4.5** (Теорема Джекобсона). [29, стр. 61, теорема 1] Унитарные композиционные алгебры над полем  $\mathbb{F}$ ,  $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$ , — это в точности алгебры Кэли-Диксона над  $\mathbb{F}$  размерности 1, 2, 4 или 8.

**Теорема 4.4.6.** [37, теорема 2.6.1] Пусть  $\mathcal{A}$  — такая собственная унитарная конечномерная подалгебра унитарной композиционной алгебры  $\mathcal{B}$  над полем  $\mathbb{F}$ ,  $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$ , что норма  $n(\cdot)$  невырождена на  $\mathcal{A}$ . Пусть также  $x \in \mathcal{A}^\perp$  удовлетворяет неравенству  $n(x) = -\gamma \neq 0$  (такое  $x$  всегда существует). Рассмотрим отображение  $\sigma : \mathcal{A} + \mathcal{A}x \rightarrow \mathcal{A}\{\gamma\}$ , заданное формулой  $\sigma(a + bx) = (a, b)$  для всех  $a, b \in \mathcal{A}$ . Тогда  $\sigma$  — изометрический изоморфизм.

Докажем два усиления леммы 2.1.9 для контрктонионов, которые аналогичны широко известному утверждению для октонионов, см. [7, стр. 35].

**Лемма 4.4.7.** Пусть  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{\ell} \in \hat{\mathbb{O}}$  таковы, что

$$(1) \Re(\hat{i}) = \Re(\hat{j}) = \Re(\hat{\ell}) = 0;$$

$$(2) n(\hat{i}) = n(\hat{j}) = 1, n(\hat{\ell}) = -1;$$

$$(3) \langle \hat{i}, \hat{j} \rangle = \langle \hat{\ell}, \hat{i} \rangle = \langle \hat{\ell}, \hat{j} \rangle = \langle \hat{\ell}, \hat{i}\hat{j} \rangle = 0.$$

Тогда существует такое  $\varphi \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\hat{\mathbb{O}})$ , что  $\varphi(\hat{i}) = i$ ,  $\varphi(\hat{j}) = j$ ,  $\varphi(\hat{\ell}) = \ell$ .

*Доказательство.* Применяя теорему 4.4.6 к  $\mathcal{A}_1 = \text{Lin}(e_0, \hat{i}) \cong \mathbb{C}$  и  $x_1 = \hat{j}$ , получаем  $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_1\hat{j} \cong \mathcal{A}_1\{-1\} \cong \mathbb{C}\{-1\} = \mathbb{H}$ , причём изоморфизм  $\psi : \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathbb{H}$  можно задать соотношениями  $\psi(1) = 1$ ,  $\psi(\hat{i}) = i$ ,  $\psi(\hat{j}) = j$ ,  $\psi(\hat{i}\hat{j}) = k$ . Снова применяя теорему 4.4.6 к  $\mathcal{A}_2$  и  $x_2 = \hat{\ell}$ , получаем  $\hat{\mathbb{O}} \supseteq \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_2\hat{\ell} \cong \mathcal{A}_2\{1\} \cong \mathbb{H}\{1\} = \hat{\mathbb{O}}$ , и поэтому  $\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_2\hat{\ell} = \hat{\mathbb{O}}$ . Зададим отображение  $\varphi : \hat{\mathbb{O}} \rightarrow \hat{\mathbb{O}}$  формулой  $\varphi(a + b\hat{\ell}) = \psi(a) + \psi(b)\ell$  для всех  $a, b \in \mathcal{A}$ . Тогда  $\varphi$  — требуемый автоморфизм.  $\square$

**Лемма 4.4.8.** Пусть  $\hat{\ell}, \hat{\ell}i, \hat{\ell}j \in \hat{\mathbb{O}}$  таковы, что

$$(1) \Re(\hat{\ell}) = \Re(\hat{\ell}i) = \Re(\hat{\ell}j) = 0;$$

$$(2) n(\hat{\ell}) = n(\hat{\ell}i) = n(\hat{\ell}j) = -1;$$

$$(3) \langle \hat{\ell}, \hat{\ell}i \rangle = \langle \hat{\ell}j, \hat{\ell} \rangle = \langle \hat{\ell}j, \hat{\ell}i \rangle = \langle \hat{\ell}j, \hat{\ell} \cdot \hat{\ell}i \rangle = 0.$$

Тогда существует такое  $\varphi \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\hat{\mathbb{O}})$ , что  $\varphi(\hat{\ell}) = \ell$ ,  $\varphi(\hat{\ell}i) = \ell i$ ,  $\varphi(\hat{\ell}j) = \ell j$ .

*Доказательство.* Мы будем отождествлять  $\hat{\mathbb{H}}$  и подалгебру  $\text{Lin}(1, i, \ell, \ell i) \subset \hat{\mathbb{O}}$ . Применяя теорему 4.4.6 к  $\mathcal{A}_1 = \text{Lin}(e_0, \hat{\ell}) \cong \hat{\mathbb{C}}$  и  $x_1 = \hat{\ell}i$ , получаем  $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_1 \cdot (\hat{\ell}i) \cong \mathcal{A}_1\{1\} \cong \hat{\mathbb{C}}\{1\} = \hat{\mathbb{H}}$ , причём изоморфизм  $\psi : \mathcal{A}_2 \rightarrow \hat{\mathbb{H}}$  можно задать соотношениями  $\psi(1) = 1$ ,  $\psi(\hat{\ell} \cdot \hat{\ell}i) = i$ ,  $\psi(\hat{\ell}) = \ell$ ,  $\psi(\hat{\ell}i) = \ell i$ . Затем применим теорему 4.4.6 к  $\mathcal{A} = \hat{\mathbb{H}}$  и  $x = \ell j$ , тогда  $\hat{\mathbb{O}} \supseteq \hat{\mathbb{H}} + \hat{\mathbb{H}} \cdot (\ell j) \cong \hat{\mathbb{H}}\{1\}$ , и из соображений размерности следует, что  $\hat{\mathbb{O}} = \hat{\mathbb{H}} + \hat{\mathbb{H}} \cdot (\ell j)$ . Наконец, применяя теорему 4.4.6 к  $\mathcal{A}_2$  и  $x_2 = \hat{\ell}j$ , получаем  $\hat{\mathbb{O}} \supseteq \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_2 \cdot (\hat{\ell}j) \cong \mathcal{A}_2\{1\} \cong \hat{\mathbb{H}}\{1\} \cong \hat{\mathbb{H}} + \hat{\mathbb{H}} \cdot (\ell j) = \hat{\mathbb{O}}$ , и поэтому  $\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_2 \cdot (\hat{\ell}j) = \hat{\mathbb{O}}$ . Зададим отображение  $\varphi : \hat{\mathbb{O}} \rightarrow \hat{\mathbb{O}}$  формулой  $\varphi(a + b \cdot (\hat{\ell}j)) = \psi(a) + \psi(b) \cdot (\ell j)$  для всех  $a, b \in \mathcal{A}$ . Тогда  $\varphi$  — требуемый автоморфизм.  $\square$

**Лемма 4.4.9.** Пусть  $a \in \hat{\mathbb{O}} \setminus \{0\}$ ,  $\Re(a) = 0$ . Тогда существует такое  $\varphi \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\hat{\mathbb{O}})$ , что:

$$(1) \text{ если } n(a) > 0, \text{ то } \varphi(a) = \sqrt{n(a)} i;$$

$$(2) \text{ если } n(a) < 0, \text{ то } \varphi(a) = \sqrt{-n(a)} \ell;$$

$$(3) \text{ если } n(a) = 0, \text{ то } \varphi(a) = \frac{i + \ell i}{2}.$$

*Доказательство.* Обозначим  $A_1 = \text{Lin}(i, j, k)$ ,  $A_2 = \text{Lin}(\ell, \ell i, \ell j, \ell k)$ . Тогда для любых  $a_1 \in A_1 \setminus \{0\}$  и  $a_2 \in A_2 \setminus \{0\}$  выполнено  $n(a_1) > 0$  и  $n(a_2) < 0$ .

(1) Если  $n(a) > 0$ , то найдётся такое  $b \in A_1$ , что  $b \in \text{Lin}(a)^\perp$  и  $n(b) = 1$ . Затем мы можем выбрать такое  $c \in A_2$ , что  $c \in \text{Lin}(a, b, ab)^\perp$  и  $n(c) = -1$ . По лемме 4.4.7, существует такое  $\varphi \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\hat{\mathbb{O}})$ , что  $\varphi\left(\frac{a}{\sqrt{n(a)}}\right) = i$ ,  $\varphi(b) = j$ ,  $\varphi(c) = \ell$ . Тогда  $\varphi(a) = \sqrt{n(a)} i$ .

(2) Если  $n(a) < 0$ , то найдётся такое  $b \in A_2$ , что  $b \in \text{Lin}(a)^\perp$  и  $n(b) = -1$ . Затем мы можем выбрать такое  $c \in A_2$ , что  $c \in \text{Lin}(a, b, ab)^\perp$  и  $n(c) = -1$ . Согласно лемме 4.4.8, существует такое  $\varphi \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\hat{\mathbb{O}})$ , что  $\varphi\left(\frac{a}{\sqrt{-n(a)}}\right) = \ell$ ,  $\varphi(b) = \ell i$ ,  $\varphi(c) = \ell j$ . Тогда  $\varphi(a) = \sqrt{-n(a)} \ell$ .

(3) Если  $n(a) = 0$ , то  $a = a_1 + a_2$ , где  $a_1 \in A_1$ ,  $a_2 \in A_2$ ,  $n(a_1) + n(a_2) = n(a) = 0$ . Поскольку  $a \neq 0$ , то  $n(a_1) = -n(a_2) = \frac{c^2}{4}$  для некоторого  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c \neq 0$ . Ясно, что  $\langle a_1, a_2 \rangle = 0$ . Теперь мы выберем такое  $b \in A_1$ , что  $b \in \text{Lin}(a_1, a_1 a_2)^\perp$  и  $n(b) = 1$ . Тогда условие  $\langle b, a_2 \rangle = 0$  выполнено автоматически. Кроме того, применяя лемму 1.3.7 для  $x = a_2$ ,  $y = a_1$ ,  $z = b$ , получаем  $\langle a_2, a_1 b \rangle = \langle \bar{a}_1 a_2, b \rangle = -\langle a_1 a_2, b \rangle = 0$ . По лемме 4.4.7, существует такое  $\varphi_1 \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\hat{\mathbb{O}})$ , что  $\varphi_1\left(\frac{a_1}{c/2}\right) = i$ ,  $\varphi_1(b) = j$ ,  $\varphi_1\left(\frac{a_2}{c/2}\right) = \ell$ . Тогда  $\varphi_1(a) = \varphi_1(a_1) + \varphi_1(a_2) = \frac{ci+c\ell}{2}$ .

Заметим, что

$$\begin{aligned} ci + c\ell &= \left(\frac{1+c^2}{2c}i - \frac{1-c^2}{2c}\ell\right) + \left(\frac{1+c^2}{2c}\ell - \frac{1-c^2}{2c}i\right), \\ n\left(\frac{1+c^2}{2c}i - \frac{1-c^2}{2c}\ell\right) &= \left(\frac{1+c^2}{2c}\right)^2 - \left(\frac{1-c^2}{2c}\right)^2 = 1, \\ n\left(\frac{1+c^2}{2c}\ell - \frac{1-c^2}{2c}i\right) &= \left(\frac{1-c^2}{2c}\right)^2 - \left(\frac{1+c^2}{2c}\right)^2 = -1, \\ \left\langle \frac{1+c^2}{2c}i - \frac{1-c^2}{2c}\ell, \frac{1+c^2}{2c}\ell - \frac{1-c^2}{2c}i \right\rangle &= \frac{1+c^2}{2c} \frac{1-c^2}{2c} - \frac{1-c^2}{2c} \frac{1+c^2}{2c} = 0. \end{aligned}$$

По лемме 4.4.7, найдётся такое  $\varphi_2 \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\hat{\mathbb{O}})$ , что  $\varphi_2\left(\frac{1+c^2}{2c}i - \frac{1-c^2}{2c}\ell\right) = i$ ,  $\varphi_2\left(\frac{1+c^2}{2c}\ell - \frac{1-c^2}{2c}i\right) = \ell$ ,  $\varphi_2(j) = j$ . Тогда  $\varphi_2\left(\frac{ci+c\ell}{2}\right) = \frac{i+\ell}{2}$ .

Затем, согласно лемме 4.4.8, существует такое  $\varphi_3 \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\hat{\mathbb{O}})$ , что  $\varphi_3(-li) = \ell$ ,  $\varphi_3(\ell) = li$ ,  $\varphi_3(lj) = lj$ . Тогда  $\varphi_3(i) = \varphi_3((-li) \cdot \ell) = \varphi_3(-li) \cdot \varphi_3(\ell) = \ell \cdot (li) = i$ , откуда  $\varphi_3\left(\frac{i+\ell}{2}\right) = \frac{i+li}{2}$ . Таким образом,  $\varphi = \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$  — требуемый автоморфизм. □

**Лемма 4.4.10.** [23, стр. 274] Пусть  $\varphi \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}_n)$ . Тогда для любого  $a \in \mathcal{A}_n$  выполнены равенства  $\Re(\varphi(a)) = \varphi(\Re(a)) = \Re(a)$  и  $\Im(\varphi(a)) = \varphi(\Im(a))$ , поэтому  $\overline{\varphi(a)} = \varphi(\bar{a})$  и  $n(\varphi(a)) = n(a)$ .

**Обозначение.** Обозначим  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^t$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^t$ ,  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^t \in \mathbb{R}^3$ .

Следствие ниже полностью аналогично лемме 4.3.5.

**Следствие 4.4.11.** Пусть  $A \in \hat{\mathbb{O}} \setminus \mathbb{R}I$ ,  $\text{dis}(A) = (\text{tr}(A))^2 - 4\det(A)$  введено в определении 1.2.4. Тогда существует такое  $\varphi \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\hat{\mathbb{O}})$ , что:

(1) если  $\text{dis}(A) > 0$ , то есть  $\text{dis}(A) = d^2$  для некоторого  $d \neq 0$ , то

$$\varphi(A) = \frac{\text{tr}(A) + d\ell}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{tr}(A) + d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{tr}(A) - d \end{pmatrix};$$

(2) если  $\text{dis}(A) < 0$ , то есть  $\text{dis}(A) = -d^2$  для некоторого  $d \neq 0$ , то

$$\varphi(A) = \frac{\text{tr}(A) + di}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{tr}(A) & d\mathbf{e}_1 \\ -d\mathbf{e}_1 & \text{tr}(A) \end{pmatrix};$$

(3) если  $\text{dis}(A) = 0$ , то  $\varphi(A) = \frac{\text{tr}(A) + i + li}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{tr}(A) & 2\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} & \text{tr}(A) \end{pmatrix}$ .

*Доказательство.* Согласно лемме 1.2.14,  $\text{dis}(A) = -4n(\Im(A))$ , поэтому доказательство сразу следует из лемм 4.4.9 и 4.4.10.  $\square$

### 4.4.3 Граф ортогональности

**Обозначение.** Обозначим  $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \in \hat{\mathcal{O}}$ .

**Лемма 4.4.12.** Пусть  $A \in Z(\hat{\mathcal{O}})$ . Тогда существует такое  $\varphi \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\hat{\mathcal{O}})$ , что

(1) если  $\text{tr}(A) \neq 0$ , то  $\varphi(A) = \text{tr}(A)E_{11}$ ;

(2) если  $\text{tr}(A) = 0$ , то  $\varphi(A) = E_{12}$ .

*Доказательство.* По следствию 4.1.2,  $A \in Z(\hat{\mathcal{O}})$  означает  $\det(A) = 0$ , поэтому  $\text{dis}(A) = (\text{tr}(A))^2 - 4\det(A) = (\text{tr}(A))^2$ . Остаётся применить следствие 4.4.11.  $\square$

**Лемма 4.4.13.** Пусть  $A \in Z'(\hat{\mathcal{O}})$ . Тогда  $\dim(O_{\hat{\mathcal{O}}}(A)) = 3$ .

*Доказательство.* Непосредственно следует из леммы 4.1.7.  $\square$

**Лемма 4.4.14.**

(1) Пусть  $A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{v} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \in \hat{\mathcal{O}}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ . Тогда

$$O_{\hat{\mathcal{O}}}(A) = \mathbb{R}A \oplus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{w} & 0 \end{pmatrix} \mid \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \mu\mathbf{v} \\ \mathbf{w} & 0 \end{pmatrix} \mid \mu \in \mathbb{R}, \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0 \right\}.$$

(2) Пусть  $A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{w} & 0 \end{pmatrix} \in \hat{\mathcal{O}}, \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ . Тогда

$$O_{\hat{\mathcal{O}}}(A) = \mathbb{R}A \oplus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{v} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{v} \\ \lambda\mathbf{w} & 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 \right\}.$$

*Доказательство.* Нетрудно проверить, что в обоих случаях имеет место включение справа налево. Поскольку  $A \in Z'(\hat{\mathcal{O}})$ , из леммы 4.4.13 следует, что  $\dim(O_{\hat{\mathcal{O}}}(A)) = 3$ . Это доказывает требуемые равенства.  $\square$

**Лемма 4.4.15.** [25, стр. 200] Для любых  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$  выполнено равенство  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{w}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ .

**Теорема 4.4.16.**  $\Gamma'_O(\hat{\mathcal{O}})$  связан, и его диаметр равен 3.

*Доказательство.* Так как любой автоморфизм сохраняет пары ортогональных элементов, то из леммы 4.4.12 вытекает, что достаточно доказать следующий факт. Пусть  $A = \begin{pmatrix} a & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & b \end{pmatrix} \in Z'(\hat{\mathcal{O}})$ . Тогда  $d(E_{12}, A) \leq 3$ .

Поскольку  $\text{tr}(A) = a + b = 0$ , то  $b = -a$ . Значит,  $\det(A) = -a^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ , поэтому  $a = 0$ , если и только если  $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$ .

- Если  $\mathbf{w} \perp \mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$ , то  $a = 0$  и существует такое  $\tilde{\mathbf{w}} \neq \mathbf{0}$ , что  $\tilde{\mathbf{w}} \perp \mathbf{e}_1$ ,  $\tilde{\mathbf{w}} \perp \mathbf{v}$  и  $\tilde{\mathbf{w}} \parallel \mathbf{w}$ , то есть  $\mathbf{w} \times \tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{0}$ . Значит, по лемме 4.4.14, найдётся путь длины 2 между  $E_{12}$  и  $A$ , а именно,

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{w}} & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & 0 \end{pmatrix}.$$

- Если  $\mathbf{w} \not\perp \mathbf{e}_1$  или  $\mathbf{w} \not\perp \mathbf{v}$ , то существует такое  $\tilde{\mathbf{w}} \neq \mathbf{0}$ , что  $\tilde{\mathbf{w}} \perp \mathbf{e}_1$ ,  $\tilde{\mathbf{w}} \perp \mathbf{v}$  и  $\tilde{\mathbf{w}} \not\parallel \mathbf{w}$ , то есть  $\mathbf{w} \times \tilde{\mathbf{w}} \neq \mathbf{0}$ . Построим путь длины 3 между  $E_{12}$  и  $A$ :

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{w}} & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow C = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{w} \times \tilde{\mathbf{w}} \\ -a\tilde{\mathbf{w}} & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & -a \end{pmatrix}.$$

Действительно, по лемме 4.4.14,  $E_{12}, C \in O_{\hat{\mathbb{O}}}(B)$ . Кроме того, согласно лемме 4.4.15,

$$(\mathbf{w} \times \tilde{\mathbf{w}}) \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \tilde{\mathbf{w}})) = -(\mathbf{w}(\mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{w}}) - \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\tilde{\mathbf{w}} = -a^2\tilde{\mathbf{w}},$$

поэтому

$$CA = \begin{pmatrix} 0 \cdot a + (\mathbf{w} \times \tilde{\mathbf{w}}) \cdot \mathbf{w} & \mathbf{0} - a(\mathbf{w} \times \tilde{\mathbf{w}}) + (-a\tilde{\mathbf{w}}) \times \mathbf{w} \\ -a^2\tilde{\mathbf{w}} + \mathbf{0} - (\mathbf{w} \times \tilde{\mathbf{w}}) \times \mathbf{v} & 0 \cdot (-a) + (-a\tilde{\mathbf{w}}) \cdot \mathbf{v} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Тогда, по предложению 2.3.4,  $A$  и  $C$  ортогональны.

Из леммы 4.4.14 нетрудно получить, что для любых  $\mathbf{w}$  и  $\mathbf{v}$  с условием  $\mathbf{w} \not\perp \mathbf{v}$  не существует пути длины  $\leq 2$  между  $\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{w} & 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{v} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}$ . Таким образом, диаметр  $\Gamma'_O(\hat{\mathbb{O}})$  равен в точности 3.  $\square$

**Теорема 4.4.17.** *Максимальные клики в  $\Gamma'_O(\hat{\mathbb{O}})$  имеют вид  $\mathbb{P}(\text{Lin}(A, B))$ , где  $A$  и  $B$  ортогональны и линейно независимы.*

*Доказательство.* Пусть  $Q$  — максимальная клика в  $\Gamma'_O(\hat{\mathbb{O}})$ ,  $[A] \in Q$ . По лемме 4.4.13, имеет место равенство  $\dim(O_{\hat{\mathbb{O}}}(A)) = 3$ . Значит, существует такое  $[B] \in Q$ , что  $A$  и  $B$  линейно независимы. Ясно, что  $A \in O_{\hat{\mathbb{S}}}(A)$  и  $B \in O_{\hat{\mathbb{S}}}(B)$ , поэтому  $\mathbb{P}(\text{Lin}(A, B)) \subset Q$ .

Пусть  $A, B, C \in Z'(\hat{\mathbb{O}})$  линейно независимы. Покажем, что тогда  $A, B, C$  не образуют цикл длины 3 в  $\Gamma'_O(\hat{\mathbb{O}})$ . Предположим противное. Тогда для любого  $D \in \text{Lin}(A, B, C)$ ,  $D \neq 0$ , выполнено  $\text{Lin}(A, B, C) \subset O_{\hat{\mathbb{O}}}(D)$  и  $\dim(\text{Lin}(A, B, C)) = \dim(O_{\hat{\mathbb{O}}}(D)) = 3$ , откуда  $O_{\hat{\mathbb{O}}}(D) = \text{Lin}(A, B, C)$ . Значит, подграф  $\Gamma'_O(\hat{\mathbb{O}})$  на множестве вершин  $\mathbb{P}(\text{Lin}(A, B, C))$  является компонентой связности. Но, по теореме 4.4.16,  $\Gamma'_O(\hat{\mathbb{O}})$  связан. Однако, как нетрудно получить из соображений размерности, включение  $Z'(\hat{\mathbb{O}}) \subset \text{Lin}(A, B, C)$  не выполняется, противоречие.

Таким образом,  $Q = \mathbb{P}(\text{Lin}(A, B))$ .  $\square$

#### 4.4.4 Граф делителей нуля

**Теорема 4.4.18.** *Диаметр  $\Gamma_Z(\hat{\mathcal{O}})$  равен 2.*

*Доказательство.* Сначала покажем, что  $d(\Gamma_Z(\hat{\mathcal{O}})) \leq 2$ . Так как любой автоморфизм сохраняет пары делителей нуля, то из леммы 4.4.12 вытекает, что достаточно доказать следующие утверждения:

(1) Пусть  $A = \begin{pmatrix} a & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & b \end{pmatrix}$ ,  $\det(A) = ab - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ . Тогда  $d(E_{11}, A) \leq 2$ :

- Если  $a \neq 0$  или  $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ , то

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{w} & -a \end{pmatrix} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} a & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & b \end{pmatrix},$$

$$E_{11}B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + \mathbf{0} \cdot \mathbf{w} & \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} \times \mathbf{w} \\ \mathbf{0} + \mathbf{0} - \mathbf{0} \times \mathbf{0} & 0 \cdot (-a) + \mathbf{0} \cdot \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 \cdot a + \mathbf{0} \cdot \mathbf{w} & \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{w} \times \mathbf{w} \\ a\mathbf{w} - a\mathbf{w} - \mathbf{0} \times \mathbf{v} & (-a) \cdot b + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

- Если  $a = 0$  и  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ , то либо  $b \neq 0$ , либо  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ . Пусть  $\mathbf{e}_v \in \mathbb{R}^3$  таков, что  $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\mathbf{e}_v$  и  $|\mathbf{e}_v| = 1$ . Рассмотрим следующий путь:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ b\mathbf{e}_v & -|\mathbf{v}| \end{pmatrix} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{v} \\ \mathbf{0} & b \end{pmatrix},$$

$$E_{11}B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + \mathbf{0} \cdot (b\mathbf{e}_v) & \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} \times (b\mathbf{e}_v) \\ \mathbf{0} + \mathbf{0} - \mathbf{0} \times \mathbf{0} & 0 \cdot (-|\mathbf{v}|) + \mathbf{0} \cdot \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + \mathbf{0} \cdot \mathbf{0} & \mathbf{0} + \mathbf{0} + (b\mathbf{e}_v) \times \mathbf{0} \\ \mathbf{0} + \mathbf{0} - (b\mathbf{e}_v) \times \mathbf{v} & (-|\mathbf{v}|) \cdot b + \mathbf{v} \cdot (b\mathbf{e}_v) \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Аналогично,  $d(A, E_{11}) \leq 2$ :

- Если  $a \neq 0$  или  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ , то

$$A = \begin{pmatrix} a & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & b \end{pmatrix} \longrightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{v} \\ \mathbf{0} & -a \end{pmatrix} \longrightarrow E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix};$$

- Если  $a = 0$  и  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , то либо  $b \neq 0$ , либо  $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ . Пусть  $\mathbf{e}_w \in \mathbb{R}^3$  таков, что  $\mathbf{w} = |\mathbf{w}|\mathbf{e}_w$  и  $|\mathbf{e}_w| = 1$ . Тогда путь от  $A$  к  $E_{11}$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{w} & b \end{pmatrix} \longrightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & b\mathbf{e}_w \\ \mathbf{0} & -|\mathbf{w}| \end{pmatrix} \longrightarrow E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Пусть  $A = \begin{pmatrix} a & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & b \end{pmatrix}$ ,  $\det(A) = 0$  и  $\text{tr}(A) = 0$ , то есть  $b = -a$  и  $ab - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ . Тогда  $d(E_{12}, A) \leq 2$ .

- Если  $a = 0$ ,  $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$  и  $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{w} = 0$ , то  $E_{12}$  и  $A$  соединены ребром:

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{12}A = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{w} & \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} \times \mathbf{w} \\ \mathbf{0} + \mathbf{0} - \mathbf{e}_1 \times \mathbf{v} & 0 \cdot 0 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{0} \end{pmatrix} = 0.$$

- В противном случае, существует следующий путь длины 2 от  $E_{12}$  к  $A$ :

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow B = \begin{pmatrix} -\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{w} & a\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_1 \times \mathbf{v} & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} a & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & b \end{pmatrix},$$

$$E_{12}B = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{w}) + \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{v}) & \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} \times (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{v}) \\ \mathbf{0} + \mathbf{0} - \mathbf{e}_1 \times (a\mathbf{e}_1) & 0 \cdot 0 + (a\mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{0} \end{pmatrix} = 0,$$

$$BA = \begin{pmatrix} (-\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{w}) \cdot a + (a\mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{w} & (-\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} + b(a\mathbf{e}_1) + (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \\ a(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{v}) + \mathbf{0} - (a\mathbf{e}_1) \times \mathbf{v} & 0 \cdot b + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{v}) \end{pmatrix} = 0,$$

так как, по лемме 4.4.15, выполняется равенство

$$(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{v}) = -(\mathbf{e}_1(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_1)) = \mathbf{v}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_1) - \mathbf{e}_1(ab).$$

Кроме того,  $d(\Gamma_Z(\hat{\mathbb{O}})) \geq 2$ , поскольку найдётся пара не связанных ребром вершин (например,  $E_{11} \not\sim E_{12}$ ). Таким образом,  $d(\Gamma_Z(\hat{\mathbb{O}})) = 2$ .  $\square$

## 4.5 Контрседенионы

### 4.5.1 Основные свойства

**Лемма 4.5.1.** [12, замечание 4.7] Пусть  $\{1, a, b\} \subset \mathbb{O}$  — ортонормированная система относительно скалярного произведения  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Тогда существует такой изоморфизм  $\varphi : \text{Lin}(1, a, b, ab) \rightarrow \mathbb{H}$ , что  $\varphi(a) = i$ ,  $\varphi(b) = j$  и  $\varphi(ab) = k$ . В частности, система  $\{1, a, b, ab\}$  тоже является ортонормированной. Будем обозначать  $\mathbb{H}_{a,b} = \text{Lin}(1, a, b, ab)$ .

*Доказательство.* Следует из леммы 2.1.6.  $\square$

Следующее предложение широко известно, однако мы приводим его доказательство для полноты изложения. Оно устанавливает условие ассоциативности произвольной тройки октонионов.

**Предложение 4.5.2.** Пусть  $a, b \in \mathbb{O}$ . Тогда уравнение  $[a, c, b] = 0$ , где  $c \in \mathbb{O}$  — переменная, имеет следующие решения:

- (1) Если  $1, a, b$  линейно независимы, то  $[a, c, b] = 0$ , если и только если  $c \in \text{Lin}(1, a, b, ab)$ , причём в этом случае  $\dim \text{Lin}(1, a, b, ab) = 4$ ;
- (2) В противном случае, равенство  $[a, c, b] = 0$  выполняется для всех  $c \in \mathbb{O}$ .

*Доказательство.* Пусть  $a' = \Im(a)$ . Обозначим ортогональную проекцию  $b$  на  $\text{Lin}(1, a)^\perp$  относительно скалярного произведения  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  как  $b'$ . Поскольку  $1$  — единица алгебры  $\mathbb{O}$ , и  $\mathbb{O}$  — гибкая, имеем  $[a, c, b] = [a', c, b']$ . Рассмотрим два случая:

- (1) Если  $1, a, b$  линейно независимы, то  $a' \neq 0$  и  $b' \neq 0$ . Согласно [12, лемма 8.5], условие  $[a', c, b'] = 0$  равносильно  $c \in \text{Lin}(1, a', b', a'b') = \text{Lin}(1, a, b, ab)$ .

(2) В противном случае, имеем  $a' = 0$  или  $b' = 0$ , поэтому  $[a', c, b'] = 0$  для всех  $c \in \mathbb{O}$ .  $\square$

Как следует из предложения 4.5.2, естественно ввести следующее подмножество  $\hat{\mathbb{S}}$ , где буквы  $LD$  отвечают словосочетанию «linearly dependent»:

**Обозначение.**  $LD(\hat{\mathbb{S}}) = \{(a, b) \in \hat{\mathbb{S}} \mid 1, a, b \text{ линейно зависимы}\}$ .

**Следствие 4.5.3.**

• Пусть  $(a, b) \in Z(\hat{\mathbb{S}})$ .

(1) Если  $(a, b) \notin LD(\hat{\mathbb{S}})$ , то  $\dim(l. \text{Ann}_{\hat{\mathbb{S}}}((a, b))) = \dim(r. \text{Ann}_{\hat{\mathbb{S}}}((a, b))) = 4$ ;

(2) Если  $(a, b) \in LD(\hat{\mathbb{S}})$ , то  $\dim(l. \text{Ann}_{\hat{\mathbb{S}}}((a, b))) = \dim(r. \text{Ann}_{\hat{\mathbb{S}}}((a, b))) = 8$ .

• Пусть  $(a, b) \in Z'(\hat{\mathbb{S}})$ .

(1) Если  $(a, b) \notin LD(\hat{\mathbb{S}})$ , то  $\dim(O_{\hat{\mathbb{S}}}((a, b))) = 3$ ;

(2) Если  $(a, b) \in LD(\hat{\mathbb{S}})$ , то  $\dim(O_{\hat{\mathbb{S}}}((a, b))) = 7$ .

*Доказательство.* Непосредственно следует из леммы 4.1.7 и предложения 4.5.2.  $\square$

## 4.5.2 Нижние оценки диаметров графов

В этом подразделе мы строим пары элементов, наиболее удалённых друг от друга в  $\Gamma'_O(\hat{\mathbb{S}})$  и  $\Gamma_Z(\hat{\mathbb{S}})$ .

**Лемма 4.5.4.** Пусть  $(a, b) \in Z(\hat{\mathbb{S}})$ ,  $(a, b) \notin LD(\hat{\mathbb{S}})$ . Пусть также  $P$  — некоторый путь в  $\Gamma_Z(\hat{\mathbb{S}})$ , начинающийся или заканчивающийся в  $(a, b)$ , причём все внутренние элементы  $P$  не содержатся в  $LD(\hat{\mathbb{S}})$ . Тогда все вершины в  $P$  принадлежат  $\text{Lin}(1, a, b, ab) \times \text{Lin}(1, a, b, ab)$ , то есть декартову квадрату  $\text{Lin}(1, a, b, ab)$ .

*Доказательство.* Без ограничения общности будем считать, что  $P$  начинается в  $(a, b)$ . Тогда  $P$  имеет вид

$$P_n : (a_0, b_0) \longrightarrow (a_1, b_1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (a_n, b_n),$$

где  $(a_0, b_0) = (a, b)$ , и  $n$  — длина  $P$ . Докажем лемму индукцией по  $n$ :

- Если  $n = 0$ , то  $(a, b) \in \text{Lin}(1, a, b, ab) \times \text{Lin}(1, a, b, ab)$  — единственная вершина в  $P$ .
- Предположим, что утверждение доказано для  $n = k$ . Покажем, что оно выполняется для  $n = k+1$ . Действительно, пусть  $P = P_{k+1}$ , и его внутренние вершины  $(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k) \notin LD(\hat{\mathbb{S}})$ . Тогда  $P_k$  тоже начинается в  $(a, b)$ , а все его внутренние элементы не содержатся в  $LD(\hat{\mathbb{S}})$ . Значит, по предположению индукции,  $(a_0, b_0), \dots, (a_k, b_k) \in \text{Lin}(1, a, b, ab) \times \text{Lin}(1, a, b, ab)$ . Осталось показать, что  $(a_{k+1}, b_{k+1}) \in \text{Lin}(1, a, b, ab) \times \text{Lin}(1, a, b, ab)$ .

Имеем  $(a_k, b_k) \in \text{Lin}(1, a, b, ab) \times \text{Lin}(1, a, b, ab)$  и  $(a_k, b_k) \notin LD(\hat{\mathbb{S}})$ . Согласно лемме 4.1.7 и предложению 4.5.2, из  $(a_{k+1}, b_{k+1}) \in r. \text{Ann}_{\hat{\mathbb{S}}}((a_k, b_k))$  следует, что  $a_{k+1} \in \text{Lin}(1, a_k, b_k, a_k b_k)$  и  $b_{k+1} = -\frac{(b_k a_{k+1}) a_k}{n(a_k)}$ . По следствию 2.1.8,  $b_{k+1} \in \text{Lin}(1, a_k, b_k, a_k b_k)$ . Снова используя следствие 2.1.8, получаем, что  $\text{Lin}(1, a_k, b_k, a_k b_k) \subseteq \text{Lin}(1, a, b, ab)$ , откуда  $(a_{k+1}, b_{k+1}) \in \text{Lin}(1, a, b, ab) \times \text{Lin}(1, a, b, ab)$ .  $\square$

Мы будем использовать следующее обозначение в утверждениях 4.5.5–4.5.12. Его свойства описаны в предложениях 4.5.5–4.5.7

**Обозначение.** Пусть  $\{1, a, b\} \subset \mathbb{O}$  — ортонормированная система относительно скалярного произведения  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , и  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Тогда

$$\begin{aligned} E_{a,b} &= (\sqrt{2}a, 1 + b), \\ F_{a,b} &= (a + ab, \sqrt{2}), \\ G_{a,b}^{\alpha,\beta} &= \left( -\sqrt{2}\beta^3 + \alpha(\alpha^2 + \beta^2)a + \sqrt{2}\alpha^2\beta b + \alpha(\alpha^2 - \beta^2)ab, \right. \\ &\quad \left. \sqrt{2}\alpha^3 + \beta(\alpha^2 + \beta^2)a + \sqrt{2}\alpha\beta^2 b + \beta(\alpha^2 - \beta^2)ab \right), \\ H_{a,b}^{\alpha,\beta} &= \left( \sqrt{2}\beta^3 + \alpha(\alpha^2 + \beta^2)a + \sqrt{2}\alpha^2\beta b + \alpha(\alpha^2 - \beta^2)ab, \right. \\ &\quad \left. \sqrt{2}\alpha^3 + \beta(\alpha^2 + \beta^2)a + \sqrt{2}\alpha\beta^2 b + \beta(\alpha^2 - \beta^2)ab \right). \end{aligned}$$

**Предложение 4.5.5.**  $E_{a,b} \in Z(\hat{\mathbb{S}})$ , причём

$$\begin{aligned} O_{\hat{\mathbb{S}}}(E_{a,b}) &= \text{Lin} \left( (\sqrt{2}a, 1 + b), (\sqrt{2}b, a + ab), (\sqrt{2}ab, 1 - b) \right), \\ l. \text{Ann}_{\hat{\mathbb{S}}}(E_{a,b}) &= O_{\hat{\mathbb{S}}}(E_{a,b}) \oplus \text{Lin} \left( (-\sqrt{2}, a - ab) \right), \\ r. \text{Ann}_{\hat{\mathbb{S}}}(E_{a,b}) &= O_{\hat{\mathbb{S}}}(E_{a,b}) \oplus \text{Lin} \left( (\sqrt{2}, a - ab) \right). \end{aligned}$$

*Доказательство.* Из следствия 4.1.2 вытекает, что  $E_{a,b} \in Z(\hat{\mathbb{S}})$ , поскольку  $n(E_{a,b}) = n(\sqrt{2}a) - n(1 + b) = 2n(a) - (n(1) + n(b)) = 2 - (1 + 1) = 0$ . По лемме 4.5.1,  $a$  и  $b$  порождают подалгебру  $\mathbb{H}_{a,b} \subset \mathbb{O}$ . Точные выражения для ортогонализатора и аннуляторов  $E_{a,b}$  могут быть получены с помощью леммы 4.1.7, учитывая, что  $E_{a,b} \notin LD(\hat{\mathbb{S}})$ .  $\square$

**Предложение 4.5.6.** Имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} O_{\hat{\mathbb{S}}}(E_{a,b}) \cap LD(\hat{\mathbb{S}}) &= \text{Lin}(F_{a,b}), \\ l. \text{Ann}_{\hat{\mathbb{S}}}(E_{a,b}) \cap LD(\hat{\mathbb{S}}) &= \left\{ G_{a,b}^{\alpha,\beta} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}, \\ r. \text{Ann}_{\hat{\mathbb{S}}}(E_{a,b}) \cap LD(\hat{\mathbb{S}}) &= \left\{ H_{a,b}^{\alpha,\beta} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Мы докажем равенство только для  $r. \text{Ann}_{\hat{\mathbb{S}}}(E_{a,b})$ , поскольку доказательство для  $l. \text{Ann}_{\hat{\mathbb{S}}}(E_{a,b})$  полностью аналогично, а равенство для  $O_{\hat{\mathbb{S}}}(E_{a,b})$  может быть получено из предыдущих двух при  $\beta = 0$  и  $\alpha = 1$ .

По предложению 4.5.5, произвольный элемент  $r. \text{Ann}_{\hat{\mathbb{S}}}(E_{a,b})$  имеет вид

$$\begin{aligned} A &= \kappa_1(\sqrt{2}, a - ab) + \kappa_2(\sqrt{2}a, 1 + b) + \kappa_3(\sqrt{2}b, a + ab) + \kappa_4(\sqrt{2}ab, 1 - b) = \\ &= \left( \sqrt{2}(\kappa_1 + \kappa_2 a + \kappa_3 b + \kappa_4 ab), (\kappa_2 + \kappa_4) + (\kappa_3 + \kappa_1)a + (\kappa_2 - \kappa_4)b + (\kappa_3 - \kappa_1)ab \right). \end{aligned}$$

Из леммы 4.5.1 следует, что  $1, a, b, ab$  линейно независимы. Тогда, по определению  $LD(\hat{\mathbb{S}})$ ,

имеем  $A \in LD(\hat{\mathbb{S}})$ , если и только если

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \kappa_2 & \kappa_3 & \kappa_4 \\ \kappa_3 + \kappa_1 & \kappa_2 - \kappa_4 & \kappa_3 - \kappa_1 \end{pmatrix} \leq 1.$$

Это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \Delta_{1,2} = \kappa_2(\kappa_2 - \kappa_4) - \kappa_3(\kappa_3 + \kappa_1) = 0; \\ \Delta_{3,2} = \kappa_4(\kappa_2 - \kappa_4) - \kappa_3(\kappa_3 - \kappa_1) = 0; \\ \Delta_{1,3} = \kappa_2(\kappa_3 - \kappa_1) - \kappa_4(\kappa_3 + \kappa_1) = 0. \end{cases}$$

Пусть  $\kappa_1 = \beta^3$  и  $\kappa_2 + \kappa_4 = \sqrt{2}\alpha^3$ . Имеем  $\Delta_{1,2} - \Delta_{3,2} = (\kappa_2 - \kappa_4)^2 - 2\kappa_1\kappa_3 = 0$ . Рассмотрим два случая:

- Если  $\kappa_1 = 0$ , то есть  $\beta = 0$ , то  $\kappa_2 = \kappa_4 = \frac{\alpha^3}{\sqrt{2}}$ . Тогда из  $\Delta_{1,2} = 0$  следует, что  $\kappa_3 = 0$ , поэтому  $A = \alpha^3(a + ab, \sqrt{2}) = H_{a,b}^{\alpha,0}$ .
- В противном случае,  $\kappa_1 \neq 0$ , откуда  $\kappa_3 = \frac{(\kappa_2 - \kappa_4)^2}{2\kappa_1}$ . Имеем также  $\Delta_{1,2} + \Delta_{3,2} = (\kappa_2 + \kappa_4)(\kappa_2 - \kappa_4) - 2\kappa_3^2 = 0$ . Обозначим  $x = \kappa_2 - \kappa_4$ . Тогда  $\kappa_3 = \frac{x^2}{2\kappa_1}$ , поэтому  $\Delta_{1,2} + \Delta_{3,2} = (\kappa_2 + \kappa_4)x - \frac{x^4}{2\kappa_1^2} = 0$ . Возможны два случая:
  - ◊ Если  $x = 0$ , то  $\kappa_3 = 0$ . Тогда  $\Delta_{1,3} = -(\kappa_2 + \kappa_4)\kappa_1 = 0$ . Из  $\kappa_1 \neq 0$  следует, что  $\kappa_2 + \kappa_4 = 0$ , то есть  $\alpha = 0$  и  $\kappa_2 = \kappa_4 = 0$ . Значит,  $A = \beta^3(\sqrt{2}, a - ab) = H_{a,b}^{0,\beta}$ .
  - ◊ Если  $x \neq 0$ , то  $x^3 = 2\kappa_1^2(\kappa_2 + \kappa_4) = (\sqrt{2}\alpha\beta^2)^3$ , поэтому  $x = \sqrt{2}\alpha\beta^2$ . Тогда  $\kappa_3 = \frac{x^2}{2\kappa_1} = \alpha^2\beta$ . Кроме того,  $\kappa_2 = \frac{\sqrt{2}\alpha^3 + x}{2} = \frac{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}{\sqrt{2}}$  и  $\kappa_4 = \frac{\sqrt{2}\alpha^3 - x}{2} = \frac{\alpha(\alpha^2 - \beta^2)}{\sqrt{2}}$ . Значит,  $A = H_{a,b}^{\alpha,\beta}$ . □

**Предложение 4.5.7.** *Имеет место следующее равенство:*

$$O_{\hat{\mathbb{S}}}(F_{a,b}) = \left\{ \left( c, -\frac{c(a+ab)}{\sqrt{2}} \right) \mid \Re(c) = 0 \right\}.$$

*Доказательство.* Следует из леммы 4.1.7, поскольку  $F_{a,b} \in LD(\hat{\mathbb{S}})$ . □

Теперь мы используем эту конструкцию в лемме 4.5.9, чтобы получить нижнюю оценку диаметра  $\Gamma_Z(\hat{\mathbb{S}})$ .

**Предложение 4.5.8.** *Пусть  $a = a' = e_1$ ,  $b = e_2$ ,  $b' = e_4$ . Тогда  $a, b$  удовлетворяют условию леммы 4.5.1, и  $\mathbb{H}_{a,b} = \text{Lin}(1, e_1, e_2, e_3)$ . Аналогично  $a', b'$  удовлетворяют условию леммы 4.5.1, и  $\mathbb{H}_{a',b'} = \text{Lin}(1, e_1, e_4, e_5)$ . Наконец,  $\mathbb{H}_{a,b} \cap \mathbb{H}_{a',b'} = \text{Lin}(1, e_1)$ .*

*Доказательство.* Проверяется при помощи непосредственных вычислений, так как  $ab = e_3$  и  $a'b' = e_5$ . □

**Лемма 4.5.9.** *Пусть  $a, b, a', b'$  введены в предложении 4.5.8. Тогда  $d_{\Gamma_Z(\hat{\mathbb{S}})}(E_{a,b}, E_{a',b'}) \geq 4$ .*

*Доказательство.* Поскольку  $b' \notin \mathbb{H}_{a,b}$ , из леммы 4.5.4 следует, что любой путь от  $E_{a,b}$  к  $E_{a',b'}$  содержит хотя бы один элемент  $A \in (\mathbb{H}_{a,b} \times \mathbb{H}_{a,b}) \cap LD(\hat{\mathbb{S}})$ . Аналогично  $b \notin \mathbb{H}_{a',b'}$ , поэтому любой путь от  $E_{a,b}$  к  $E_{a',b'}$  содержит хотя бы один элемент  $A' \in (\mathbb{H}_{a',b'} \times \mathbb{H}_{a',b'}) \cap LD(\hat{\mathbb{S}})$ .

Предположим, что  $d_{\Gamma_Z(\hat{\mathbb{S}})}(E_{a,b}, E_{a',b'}) \leq 3$ . По предложению 4.5.8,  $\mathbb{H}_{a,b} \cap \mathbb{H}_{a',b'} = \text{Lin}(1, e_1)$ , поэтому  $(\mathbb{H}_{a,b} \times \mathbb{H}_{a,b}) \cap (\mathbb{H}_{a',b'} \times \mathbb{H}_{a',b'}) = \text{Lin}(1, e_1) \times \text{Lin}(1, e_1) = X$ . Однако из предложения 4.5.5 следует, что  $r. \text{Ann}_{\hat{\mathbb{S}}}(E_{a,b}) \cap X = l. \text{Ann}_{\hat{\mathbb{S}}}(E_{a',b'}) \cap X = \{0\}$ , значит,  $A \neq A'$ , и путь имеет вид  $E_{a,b} \rightarrow A \rightarrow A' \rightarrow E_{a',b'}$ . По предложению 4.5.6, имеем  $A = H_{a,b}^{\alpha,\beta}$  и  $A' = G_{a',b'}^{\gamma,\delta}$  для некоторых  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ . Рассмотрим теперь  $AA' \in \hat{\mathbb{S}}$  как пару октонионов. Тогда из условия  $AA' = 0$  следует, что первая компонента  $AA'$  равна нулю:

$$\begin{aligned} & \left( \sqrt{2}\beta^3 + \alpha(\alpha^2 + \beta^2)e_1 + \sqrt{2}\alpha^2\beta e_2 + \alpha(\alpha^2 - \beta^2)e_3 \right) \times \\ & \times \left( -\sqrt{2}\delta^3 + \gamma(\gamma^2 + \delta^2)e_1 + \sqrt{2}\gamma^2\delta e_4 + \gamma(\gamma^2 - \delta^2)e_5 \right) + \\ & + \left( \sqrt{2}\gamma^3 - \delta(\gamma^2 + \delta^2)e_1 - \sqrt{2}\gamma\delta^2 e_4 - \delta(\gamma^2 - \delta^2)e_5 \right) \times \\ & \times \left( \sqrt{2}\alpha^3 + \beta(\alpha^2 + \beta^2)e_1 + \sqrt{2}\alpha\beta^2 e_2 + \beta(\alpha^2 - \beta^2)e_3 \right) = 0. \end{aligned}$$

Если  $\alpha = 0$ , то, так как  $A \neq 0$ , без ограничения общности можно считать, что  $\beta = 1$ . Тогда уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \left( -\sqrt{2}\delta^3 + \gamma(\gamma^2 + \delta^2)e_1 + \sqrt{2}\gamma^2\delta e_4 + \gamma(\gamma^2 - \delta^2)e_5 \right) + \\ & + \left( \sqrt{2}\gamma^3 - \delta(\gamma^2 + \delta^2)e_1 - \sqrt{2}\gamma\delta^2 e_4 - \delta(\gamma^2 - \delta^2)e_5 \right) (e_1 - e_3) = 0, \end{aligned}$$

где коэффициент при  $e_7 = e_3e_4$  равен  $-\sqrt{2}\gamma\delta^2$ . Значит,  $\gamma = 0$  или  $\delta = 0$ .

(1) Если  $\gamma = 0$ , то можно положить  $\delta = 1$ , но  $-2 - (e_1 - e_5)(e_1 - e_3) \neq 0$ .

(2) Если  $\delta = 0$ , то можно положить  $\gamma = 1$ , но  $\sqrt{2}(e_1 + e_5) + \sqrt{2}(e_1 - e_3) \neq 0$ .

Мы получили противоречие в обоих случаях, поэтому  $\alpha \neq 0$ .

Аналогично  $\beta \neq 0$ ,  $\gamma \neq 0$  и  $\delta \neq 0$ , поэтому мы можем поделить наше уравнение на  $\alpha^3\delta^3$  и ввести новые переменные  $\kappa = \frac{\beta}{\alpha}$  и  $\lambda = \frac{\gamma}{\delta}$ :

$$\begin{aligned} & \left( \sqrt{2}\kappa^3 + (1 + \kappa^2)e_1 + \sqrt{2}\kappa e_2 + (1 - \kappa^2)e_3 \right) \left( -\sqrt{2} + \lambda(\lambda^2 + 1)e_1 + \sqrt{2}\lambda^2 e_4 + \lambda(\lambda^2 - 1)e_5 \right) + \\ & + \left( \sqrt{2}\lambda^3 - (\lambda^2 + 1)e_1 - \sqrt{2}\lambda e_4 - (\lambda^2 - 1)e_5 \right) \left( \sqrt{2} + \kappa(1 + \kappa^2)e_1 + \sqrt{2}\kappa^2 e_2 + \kappa(1 - \kappa^2)e_3 \right) = 0. \end{aligned}$$

Коэффициент при  $1 = 1^2 = -e_1^2$  равен  $K_0 = (\kappa - \lambda)((\kappa^2 - 1)(\lambda^2 - 1) - 2\kappa\lambda)$ , тогда как коэффициент при  $e_6 = e_2e_4 = e_5e_3$  равен  $K_6 = (\kappa + \lambda)((\kappa^2 - 1)(\lambda^2 - 1) + 2\kappa\lambda)$ . Поскольку  $K_0 = K_6 = 0$ , выполнено одно из следующих условий:

(1) Если  $\kappa = \lambda$ , то из  $K_6 = 2\lambda((\lambda^2 - 1)^2 + 2\lambda^2) = 0$  следует, что  $\kappa = \lambda = 0$ .

(2) Если  $\kappa = -\lambda$ , то из  $K_0 = -2\lambda((\lambda^2 - 1)^2 + 2\lambda^2) = 0$  следует, что  $\kappa = \lambda = 0$ .

(3) В противном случае, имеем  $(\kappa^2 - 1)(\lambda^2 - 1) - 2\kappa\lambda = (\kappa^2 - 1)(\lambda^2 - 1) + 2\kappa\lambda = 0$ , поэтому  $\kappa\lambda = 0$ . Значит,  $\kappa = 0$  или  $\lambda = 0$ .

Однако из  $\kappa = 0$  следует, что  $\beta = 0$ , а из  $\lambda = 0$  следует, что  $\gamma = 0$ . Как показано выше, это приводит к противоречию.

Значит,  $d_{\Gamma_Z(\hat{\mathbb{S}})}((a, b), (a', b')) \geq 4$ . □

Аналогичные рассуждения применяются для доказательства нижней оценки диаметра  $\Gamma'_O(\hat{\mathbb{S}})$  в лемме 4.5.12.

**Предложение 4.5.10.** Пусть  $a = e_1$ ,  $b = e_2$ ,  $a' = \frac{e_1+e_4}{\sqrt{2}}$ ,  $b' = \frac{e_2+e_5}{\sqrt{2}}$ . Тогда  $a, b$  удовлетворяют условию леммы 4.5.1, и  $\mathbb{H}_{a,b} = \text{Lin}(1, e_1, e_2, e_3)$ . Аналогично  $a', b'$  удовлетворяют условию леммы 4.5.1, и  $\mathbb{H}_{a',b'} = \text{Lin}(1, e_1 + e_4, e_2 + e_5, e_1 + e_3 - e_4 - e_6)$ . Наконец,  $\mathbb{H}_{a,b} \cap \mathbb{H}_{a',b'} = \mathbb{R}$ .

*Доказательство.* Проверяется непосредственно, так как  $ab = e_3$  и  $a'b' = \frac{e_1+e_3-e_4-e_6}{2}$ . □

**Предложение 4.5.11.** Пусть  $a, b, a', b'$  введены в предложении 4.5.10. Тогда  $O_{\hat{\mathbb{S}}}(F_{a,b}) \cap (\mathbb{H}_{a',b'} \times \mathbb{H}_{a',b'}) = \{0\}$ .

*Доказательство.* По предложению 4.5.7,

$$O_{\hat{\mathbb{S}}}(F_{a,b}) = \left\{ \left( c, -\frac{c(a+ab)}{\sqrt{2}} \right) \mid \Re(c) = 0 \right\}.$$

Предположим, что существует такое  $c \in \mathbb{H}_{a',b'}$ ,  $c \neq 0$ , что  $d = -\frac{c(a+ab)}{\sqrt{2}} \in \mathbb{H}_{a',b'}$ . Так как алгебра  $\mathbb{O}$  альтернативна, имеем  $a + ab = -\frac{\sqrt{2}}{n(c)}\bar{c}d$ . Тогда из следствия 2.1.8 вытекает, что  $\bar{c}d \in \mathbb{H}_{a',b'}$ , поэтому  $a + ab \in \mathbb{H}_{a',b'}$ . Мы получили противоречие. □

**Лемма 4.5.12.** Пусть  $a, b, a', b'$  введены в предложении 4.5.10. Тогда  $d_{\Gamma'_O(\hat{\mathbb{S}})}(E_{a,b}, E_{a',b'}) \geq 5$ .

*Доказательство.* Любой путь в  $\Gamma'_O(\hat{\mathbb{S}})$  является также путём в  $\Gamma_Z(\hat{\mathbb{S}})$ , значит, применима лемма 4.5.4. Поскольку  $b' \notin \mathbb{H}_{a,b}$ , любой путь между  $E_{a,b}$  и  $E_{a',b'}$  содержит хотя бы один элемент  $A \in (\mathbb{H}_{a,b} \times \mathbb{H}_{a,b}) \cap LD(\hat{\mathbb{S}})$ . Аналогично  $b \notin \mathbb{H}_{a',b'}$ , поэтому любой путь между  $E_{a,b}$  и  $E_{a',b'}$  содержит хотя бы один элемент  $A' \in (\mathbb{H}_{a',b'} \times \mathbb{H}_{a',b'}) \cap LD(\hat{\mathbb{S}})$ .

Предположим, что  $d_{\Gamma'_O(\hat{\mathbb{S}})}(E_{a,b}, E_{a',b'}) \leq 4$ . По предложению 4.5.10,  $\mathbb{H}_{a,b} \cap \mathbb{H}_{a',b'} = \mathbb{R}$ , поэтому  $(\mathbb{H}_{a,b} \times \mathbb{H}_{a,b}) \cap (\mathbb{H}_{a',b'} \times \mathbb{H}_{a',b'}) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Поскольку  $\Re(A) = \Re(A') = 0$ ,  $A \neq 0$  и  $A' \neq 0$ , получаем, что  $A \neq A'$ . Тогда без ограничения общности можем считать, что после  $E_{a,b}$  сразу следует  $A$ . Согласно предложению 4.5.6, мы можем положить  $A = F_{a,b}$ . Из предложения 4.5.11 получаем, что  $O_{\hat{\mathbb{S}}}(F_{a,b}) \cap (\mathbb{H}_{a',b'} \times \mathbb{H}_{a',b'}) = \{0\}$ . Следовательно,  $d_{\Gamma'_O(\hat{\mathbb{S}})}(E_{a,b}, E_{a',b'}) = 4$ , и путь имеет вид  $E_{a,b} \longleftrightarrow A \longleftrightarrow C \longleftrightarrow A' \longleftrightarrow E_{a',b'}$  для некоторого  $C \in Z(\hat{\mathbb{S}})$ . По предложению 4.5.6, можно считать, что  $A' = F_{a',b'}$ .

Пусть  $C = (c, d)$ . Согласно предложению 4.5.7, из  $C \in O_{\hat{\mathbb{S}}}(F_{a,b})$  следует, что  $d = -\frac{c(a+ab)}{\sqrt{2}}$ . Аналогично из  $C \in O_{\hat{\mathbb{S}}}(F_{a',b'})$  следует, что  $d = -\frac{c(a'+a'b')}{\sqrt{2}}$ . Тогда  $c(a+ab) = c(a'+a'b')$ , поэтому  $c(a+ab-a'-a'b') = 0$ . Однако  $a+ab-a'-a'b' \neq 0$ , и в  $\mathbb{O}$  нет делителей нуля. Следовательно,  $c = 0$  и  $C = 0$ . Противоречие.

Значит,  $d_{\Gamma'_O(\hat{\mathbb{S}})}((a, b), (a', b')) \geq 5$ . □

### 4.5.3 Граф делителей нуля

**Лемма 4.5.13.** [27, лемма 5.1] Пусть  $n \geq 1$ ,  $a \in \mathcal{M}_n$ . Тогда существует такое  $b \in \mathcal{M}_n$ , что  $b^2 = a$ .

**Лемма 4.5.14.** Диаметр  $\Gamma_Z(\hat{\mathbb{S}})$  не превосходит 4.

*Доказательство.* Пусть  $(a, b), (a', b') \in Z(\hat{\mathbb{S}})$ . По следствию 4.1.2,  $n((a, b)) = n((a', b')) = 0$ , поэтому без ограничения общности можем считать, что  $n(a) = n(b) = n(a') = n(b') = 1$ . Будем искать путь длины 4 от  $(a, b)$  к  $(a', b')$  в виде

$$(a, b) \longrightarrow (1, c) \longrightarrow (x, y) \longrightarrow (1, d) \longrightarrow (a', b').$$

- Рассмотрим  $c = -b\bar{a}$ ,  $d = -b'a'$ . Так как  $\mathbb{O}$  — композиционная алгебра, имеем  $n(c) = n(d) = 1$ . Согласно лемме 4.1.7,  $(a, b)(1, c) = 0$  и  $(1, d)(a', b') = 0$ .
- Будем искать такое  $(x, y) \in Z(\hat{\mathbb{S}})$ , что  $(1, c)(x, y) = (x, y)(1, d) = 0$ . По лемме 4.1.7, это условие равносильно  $y = -c\bar{x} = -dx$ . Из леммы 4.5.13 следует, что существует такое  $x \in \mathbb{O}$ , что  $x^2 = \bar{d}c$ . Алгебра  $\mathbb{O}$  является композиционной, поэтому  $1 = n(d)n(c) = n(\bar{d})n(c) = n(\bar{d}c) = n(x^2) = (n(x))^2$ , а значит,  $n(x) = 1$ . Тогда, используя альтернативность  $\mathbb{O}$ , получаем, что из  $x^2 = \bar{d}c$  следует  $(dx)x = dx^2 = d(\bar{d}c) = (d\bar{d})c = n(d)c = c$ . Следовательно,  $dx = (dx)n(x) = (dx)(x\bar{x}) = ((dx)x)\bar{x} = c\bar{x}$ , что и требовалось. Мы завершаем доказательство, положив  $y = -c\bar{x} = -dx$ .

□

**Теорема 4.5.15.** Диаметр  $\Gamma_Z(\hat{\mathbb{S}})$  равен 4.

*Доказательство.* Непосредственно следует из лемм 4.5.9 и 4.5.14.

□

### 4.5.4 Граф ортогональности

Утверждения 4.5.16–4.5.18 играют ключевую роль при построении кратчайших путей в  $\Gamma'_O(\hat{\mathbb{S}})$ .

**Лемма 4.5.16.** Пусть  $(a, b) \in Z(\hat{\mathbb{S}})$ ,  $\Re(a) = \Re(b) = 0$ , то есть  $(a, b)$  — дважды чисто мнимый элемент. Тогда  $(a + b, a + b), (a - b, -(a - b)) \in O_{\hat{\mathbb{S}}}((a, b))$ .

*Доказательство.* Покажем, что  $(a, b), (b, a) \in O_{\hat{\mathbb{S}}}((a, b))$ . Действительно,  $(a, b) = -\overline{(a, b)} \in O_{\hat{\mathbb{S}}}((a, b))$ , так как  $n((a, b)) = n(a) - n(b) = 0$ . Имеем также  $-\frac{(bb)a}{n(a)} = \frac{n(b)a}{n(a)} = a$ , поэтому из леммы 4.1.7 для  $c = b$  следует, что  $(b, a) \in O_{\hat{\mathbb{S}}}((a, b))$ .

Тогда  $(a+b, a+b) = (a, b) + (b, a) \in O_{\hat{\mathbb{S}}}((a, b))$  и  $(a-b, -(a-b)) = (a, b) - (b, a) \in O_{\hat{\mathbb{S}}}((a, b))$ . □

**Лемма 4.5.17.** Пусть  $a \in \mathbb{O}$ ,  $n(a) = 1$ ,  $\Re(a) = 0$ . Тогда для любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , таких, что  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ , выполнено

$$O_{\hat{\mathbb{S}}}((a, \alpha + \beta a)) = \mathbb{R}(a, \alpha + \beta a) \oplus \{(b, (\alpha a - \beta)b) \mid b \in \text{Anc}_{\mathbb{O}}(a)\}.$$

*Доказательство.* Пусть  $c \in \mathbb{O}$ ,  $\Re(c) = 0$ . Тогда  $c$  единственным образом представимо в виде  $c = ka + b$  для некоторых  $k \in \mathbb{R}$  и  $b \in \mathbb{O}$  с условием  $\langle a, b \rangle = 0$ .  $\Re(b) = \Re(c - ka) = 0$ , поэтому из леммы 1.3.8 следует, что  $b \in \text{Anc}_{\mathbb{O}}(a)$ . Требуемое утверждение немедленно вытекает из леммы 4.1.7, поскольку  $-\langle (\alpha + \beta a)a, a \rangle = -\langle (\alpha + \beta a)(aa), a \rangle = (\alpha + \beta a)$  и  $-\langle (\alpha + \beta a)b, a \rangle = -\langle \alpha + \beta a, ba \rangle = (\alpha + \beta a)(ab) = ((\alpha + \beta a)a)b = (\alpha a - \beta)b$ .  $\square$

**Следствие 4.5.18.** Пусть  $a \in \mathbb{O}$ ,  $a \neq 0$ ,  $\Re(a) = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} O_{\hat{\mathbb{S}}}((a, a)) &= \mathbb{R}(a, a) \oplus \{(b, -b) \mid b \in \text{Anc}_{\mathbb{O}}(a)\}, \\ O_{\hat{\mathbb{S}}}((a, -a)) &= \mathbb{R}(a, -a) \oplus \{(b, b) \mid b \in \text{Anc}_{\mathbb{O}}(a)\}. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Следует из леммы 4.5.17 при  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \pm 1$ .  $\square$

Наша следующая цель — получение верхней оценки диаметра  $\Gamma'_O(\hat{\mathbb{S}})$ , и требуемый результат представлен в лемме 4.5.25. Доказательство леммы 4.5.25 разбивается на следующие шаги:

- В лемме 4.5.20 изучаются дважды чисто мнимые соседи произвольного делителя нуля, чтобы сделать возможным применение леммы 4.5.16.
- Следствие 4.5.22 устанавливает существование элементов вида  $(a, \pm a)$  на расстоянии не больше 2 от произвольного делителя нуля.
- Затем в лемме 4.5.25 эти элементы соединяются при помощи следствия 4.5.18, и тем самым строится путь длины не больше 5 между любыми двумя делителями нуля в  $\hat{\mathbb{S}}$ .

**Предложение 4.5.19.** Пусть  $(a, b) \in Z(\hat{\mathbb{S}})$ ,  $\Re(a) = 0$ ,  $n(a) = n(b) = 1$ . Тогда  $b = b_0 + b_1 a + b_2 c$  для некоторых  $c \in \text{Lin}(1, a)^\perp$ ,  $n(c) = 1$ , и  $b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ ,  $b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1$ . Рассмотрим  $d = ac$ . Тогда  $a$  и  $c$  порождают подалгебру  $\text{Lin}(1, a, c, d) = \mathbb{H}_{a,c} \subset \mathbb{O}$ . В частности,  $\{1, a, c, d\}$  — ортонормированная система относительно скалярного произведения  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

*Доказательство.* Непосредственно следует из леммы 4.5.1.  $\square$

**Лемма 4.5.20.** Пусть  $a, b, c, d$  введены в предложении 4.5.19. Тогда

- (1)  $(da, bd) = (c, b_2 a - b_1 c + b_0 d)$  и  $(db, ad) = -(b_2 a - b_1 c - b_0 d, c)$  — дважды чисто мнимые;
- (2)  $(da, bd), (db, ad) \in O_{\hat{\mathbb{S}}}((a, b))$ .

*Доказательство.*

- (1) Из предложения 4.5.19 следует, что  $\Re(c) = \Re(d) = 0$ ,  $da = -ad = c$ ,  $cd = -dc = a$ . Тогда  $db = d(b_0 + b_1 a + b_2 c) = b_0 d + b_1 c - b_2 a$  и  $bd = (b_0 + b_1 a + b_2 c)d = b_0 d - b_1 c + b_2 a$ . Поскольку  $a, c, d$  — чисто мнимые, получаем, что  $(da, bd) = (c, b_2 a - b_1 c + b_0 d)$  и  $(db, ad) = -(b_2 a - b_1 c - b_0 d, c)$  — дважды чисто мнимые.
- (2) Теперь мы используем лемму 4.1.7, чтобы показать, что  $(da, bd), (db, ad) \in O_{\hat{\mathbb{S}}}((a, b))$ :

- $\Re(da) = \Re(db) = 0$ .
- $\mathbb{H}_{a,c}$  ассоциативна, и  $a, b, c, d, db \in \mathbb{H}_{a,c}$ . Значит,  $[a, da, b] = [a, db, b] = 0$ .
- Наконец,  $-(b(da))a = -((bd)a)a = -(bd)(aa) = bd \cdot n(a) = bd$  и  $-(b(db))a = (b(\overline{db}))a = (b(\overline{bd}))a = -(b\overline{b})(da) = n(b) \cdot ad = ad$ .  $\square$

Мы будем использовать следующее обозначение в утверждениях 4.5.21–4.5.25.

**Обозначение.** Пусть  $a, b, c, d$  введены в предложении 4.5.19,  $K = (k_1, k_2) \in \mathbb{R}_*^2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Обозначим

$$\begin{aligned} f_K &= (k_1 - k_2)((1 - b_1)c + b_2a) + (k_1 + k_2)b_0d \in \mathbb{O}, \\ g_K &= (k_1 + k_2)((1 + b_1)c - b_2a) - (k_1 - k_2)b_0d \in \mathbb{O}. \end{aligned}$$

**Лемма 4.5.21.**

- (1)  $f_K = 0$ , если и только если либо  $k_1 - k_2 = b_0 = 0$ , либо  $b_0 = b_2 = 1 - b_1 = 0$ , то есть  $b = a$ .
- (2)  $g_K = 0$ , если и только если либо  $k_1 + k_2 = b_0 = 0$ , либо  $b_0 = b_2 = 1 + b_1 = 0$ , то есть  $b = -a$ .

*Доказательство.*

- (1) Из предложения 4.5.19 следует, что  $a, c, d$  линейно независимы. Тогда  $f_K = 0$ , если и только если  $(k_1 - k_2)(1 - b_1) = (k_1 - k_2)b_2 = (k_1 + k_2)b_0 = 0$ . Рассмотрим два случая:
  - Если  $1 - b_1 \neq 0$ , то  $k_1 - k_2 = 0$ . Кроме того,  $(k_1 + k_2)b_0 = 0$ , поэтому либо  $k_1 + k_2 = 0$ , либо  $b_0 = 0$ . Так как  $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}_*^2$ , это условие равносильно тому, что  $k_1 - k_2 = b_0 = 0$ .
  - Пусть теперь  $1 - b_1 = 0$ , то есть  $b_1 = 1$ . Тогда из условия  $b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1$  следует, что  $b_0 = b_2 = 0$ .
- (2) Случай, когда  $g_K = 0$ , рассматривается аналогично.  $\square$

**Следствие 4.5.22.**

- (1) Если  $f_K \neq 0$ , то  $d_{\Gamma_O(\mathbb{S})}((a, b), (f_K, f_K)) \leq 2$ .
- (2) Если  $g_K \neq 0$ , то  $d_{\Gamma_O(\mathbb{S})}((a, b), (g_K, -g_K)) \leq 2$ .

*Доказательство.* Пусть

$$\begin{aligned} h_K &= \left( h_K^{(1)}, h_K^{(2)} \right) = k_1(da, bd) + k_2(db, ad) = k_1(c, b_2a - b_1c + b_0d) - k_2(b_2a - b_1c - b_0d, c) = \\ &= ((k_1 + k_2b_1)c - k_2b_2a + k_2b_0d, -(k_2 + k_1b_1)c + k_1b_2a + k_1b_0d). \end{aligned}$$

По лемме 4.5.20,  $h_K \in O_{\mathbb{S}}((a, b))$  и  $\Re(h_K^{(1)}) = \Re(h_K^{(2)}) = 0$ . Заметим, что

$$h_K^{(1)} + h_K^{(2)} = ((k_1 + k_2b_1)c - k_2b_2a + k_2b_0d) + (-(k_2 + k_1b_1)c + k_1b_2a + k_1b_0d) =$$

$$\begin{aligned}
&= (k_1 - k_2)((1 - b_1)c + b_2a) + (k_1 + k_2)b_0d = f_K, \\
h_K^{(1)} - h_K^{(2)} &= ((k_1 + k_2b_1)c - k_2b_2a + k_2b_0d) - (-(k_2 + k_1b_1)c + k_1b_2a + k_1b_0d) = \\
&= (k_1 + k_2)((1 + b_1)c - b_2a) - (k_1 - k_2)b_0d = g_K.
\end{aligned}$$

Тогда, если  $h_K = 0$ , то  $f_K = g_K = 0$ .

(1) Если  $f_K \neq 0$ , то  $h_K \neq 0$ . По лемме 4.5.16,  $(f_K, f_K) = (h_K^{(1)} + h_K^{(2)}, h_K^{(1)} + h_K^{(2)}) \in O_{\hat{\mathbb{S}}}(h_K)$ , поэтому  $d_{\Gamma_O(\hat{\mathbb{S}})}((a, b), (f_K, f_K)) \leq 2$ .

(2) Если  $g_K \neq 0$ , то  $h_K \neq 0$ . По лемме 4.5.16,  $(g_K, -g_K) = (h_K^{(1)} - h_K^{(2)}, -(h_K^{(1)} - h_K^{(2)})) \in O_{\hat{\mathbb{S}}}(h_K)$ , поэтому  $d_{\Gamma_O(\hat{\mathbb{S}})}((a, b), (g_K, -g_K)) \leq 2$ .

□

**Лемма 4.5.23.** *Если  $f_K \neq 0$ , то*

$$\text{Anc}_{\mathbb{O}}(f_K) = \text{Lin}(1, a, c, d)^\perp \oplus \text{Lin}((k_1 + k_2)b_0c - (k_1 - k_2)(1 - b_1)d, (1 - b_1)a - b_2c).$$

*Доказательство.* Обозначим правую часть требуемого равенства как  $A$ . По лемме 4.5.21, из  $f_K \neq 0$  следует, что  $1 - b_1 \neq 0$  и либо  $k_1 - k_2 \neq 0$ , либо  $(k_1 + k_2)b_0 \neq 0$ . Поскольку  $a, c, d$  линейно независимы, получаем, что  $\dim(A) = 6$ . Кроме того, согласно предложению 4.5.19,  $1, a, c, d$  образуют ортонормированную систему, поэтому  $A \subset \mathfrak{Im}(\mathbb{O})$  и  $A \subset \text{Lin}(f_K)^\perp$ . Тогда из леммы 1.3.8 следует, что  $A \subset \text{Anc}_{\mathbb{O}}(f_K)$ . По лемме 1.3.8, имеем также  $\dim(\text{Anc}_{\mathbb{O}}(f_K)) = \dim(A) = 6$ , откуда  $\text{Anc}_{\mathbb{O}}(f_K) = A$ . □

**Лемма 4.5.24.** *Пусть  $b_0 \neq 0$ . Тогда  $f_K \neq 0$  для всех  $K \in \mathbb{R}_*^2$ , и  $\bigcup_{K \in \mathbb{R}_*^2} \text{Anc}_{\mathbb{O}}(f_K) = \mathfrak{Im}(\mathbb{O})$ .*

*Доказательство.* По лемме 4.5.21, имеем  $f_K \neq 0$  для всех  $K \in \mathbb{R}_*^2$ . Значит, можно применить лемму 4.5.23, чтобы получить явный вид для  $\text{Anc}_{\mathbb{O}}(f_K)$ . Достаточно показать, что

$$\bigcup_{K \in \mathbb{R}_*^2} \text{Lin}((k_1 + k_2)b_0c - (k_1 - k_2)(1 - b_1)d, (1 - b_1)a - b_2c) = \text{Lin}(a, c, d).$$

Заметим, что из  $b_0 \neq 0$  следует  $1 - b_1 \neq 0$ . Получаем

$$\begin{aligned}
&\bigcup_{K \in \mathbb{R}_*^2} \text{Lin}((k_1 + k_2)b_0c - (k_1 - k_2)(1 - b_1)d, (1 - b_1)a - b_2c) = \\
&= \text{Lin}(b_0c, (1 - b_1)d, (1 - b_1)a - b_2c) = \\
&= \text{Lin}(c, d, (1 - b_1)a - b_2c) = \text{Lin}(c, d, (1 - b_1)a) = \text{Lin}(a, c, d),
\end{aligned}$$

что и требовалось. □

**Лемма 4.5.25.** *Пусть  $(a, b), (a', b') \in Z'(\hat{\mathbb{S}})$ . Тогда  $d_{\Gamma_O(\hat{\mathbb{S}})}((a, b), (a', b')) \leq 5$ .*

*Доказательство.* Без ограничения общности будем считать, что  $n(a) = n(a') = 1$ . Кроме того, по условию,  $\Re(a) = \Re(a') = 0$ .

Если  $b' = -a'$ , то положим  $z = a'$ . В противном случае, по лемме 4.5.21, существует такое  $K' \in \mathbb{R}_*^2$ , что  $g'_{K'} \neq 0$ , где  $g'_{K'}$  может быть получено из  $g_K$  заменой каждой переменной на переменную со штрихом. Тогда положим  $z = g'_{K'}$ . Имеем  $z \neq 0$  и  $\Re(z) = 0$ . Из следствия 4.5.22 получаем, что  $d_{\Gamma_O(\hat{\mathbb{S}})}((a', b'), (z, -z)) \leq 2$ . Рассмотрим три случая:

- (1) Если  $b_0 \neq 0$ , то из леммы 4.5.24 следует, что существует такое  $K \in \mathbb{R}_*^2$ , что  $z \in \text{Anc}_{\mathbb{O}}(f_K)$ ,  $f_K \neq 0$ . По следствию 4.5.22,  $d_{\Gamma_O(\hat{\mathbb{S}})}((a, b), (f_K, f_K)) \leq 2$ , и из следствия 4.5.18 получаем, что  $(f_K, f_K)$  и  $(z, -z)$  ортогональны. Значит,  $d_{\Gamma_O(\hat{\mathbb{S}})}((a, b), (a', b')) \leq 5$ .
- (2) Если  $b_0 = 0$  и  $b \neq a$ , то, согласно лемме 4.5.16,  $(a - b, -(a - b)) \in O_{\mathbb{S}}((a, b))$ . Пусть  $y \in \text{Anc}_{\mathbb{O}}(\{a - b, z\})$ ,  $y \neq 0$ . Тогда, по следствию 4.5.18, существует путь длины 3 в  $\Gamma_O(\hat{\mathbb{S}})$ :

$$(a, b) \longleftrightarrow (a - b, -(a - b)) \longleftrightarrow (y, y) \longleftrightarrow (z, -z).$$

Значит,  $d_{\Gamma_O(\hat{\mathbb{S}})}((a, b), (a', b')) \leq 5$ .

- (3) Если  $b = a$ , то рассмотрим произвольные  $x \in \text{Anc}_{\mathbb{O}}(a)$ ,  $x \neq 0$ , и  $y \in \text{Anc}_{\mathbb{O}}(\{x, z\})$ ,  $y \neq 0$ . Тогда, согласно следствию 4.5.18, существует путь длины 3 в  $\Gamma_O(\hat{\mathbb{S}})$ :

$$(a, a) \longleftrightarrow (x, -x) \longleftrightarrow (y, y) \longleftrightarrow (z, -z).$$

Значит,  $d_{\Gamma_O(\hat{\mathbb{S}})}((a, b), (a', b')) \leq 5$ .

□

**Теорема 4.5.26.**  $\Gamma'_O(\hat{\mathbb{S}})$  *связен, и его диаметр равен 5.*

*Доказательство.* Непосредственно следует из лемм 4.5.12 и 4.5.25. □

Следующая теорема описывает максимальные клики в  $\Gamma'_O(\hat{\mathbb{S}})$ .

**Теорема 4.5.27.** *Максимальные клики в  $\Gamma'_O(\hat{\mathbb{S}})$  имеют вид  $\mathbb{P}(\text{Lin}(A, B))$ , где  $A$  и  $B$  ортогональны и линейно независимы.*

*Доказательство.* Пусть  $Q$  — максимальная клика в  $\Gamma'_O(\hat{\mathbb{S}})$ . Рассмотрим произвольный элемент  $[A] \in Q$ . По лемме 4.1.7,  $\dim(O_{\mathbb{S}}(A)) \in \{3, 7\}$ . Следовательно, существует  $[B] \in Q \setminus [A]$ , и тогда  $A$  и  $B$  линейно независимы. Так как  $A, B \in Z'(\hat{\mathbb{S}})$ , имеем  $A^2 = B^2 = 0$ , откуда  $\mathbb{P}(\text{Lin}(A, B)) \subset Q$ .

Пусть  $A, B, C \in Z'(\hat{\mathbb{S}})$  линейно независимы. Тогда  $A, B, C$  не образуют цикл длины 3 в  $\Gamma'_O(\hat{\mathbb{S}})$ . Предположим противное. Возможны два случая:

- (1) Размерность ортогонализатора хотя бы одного из элементов  $A, B, C$  равна 7. Пусть этот элемент —  $A$ . Тогда  $A = (a, \alpha + \beta a)$  для некоторых  $a \in \mathbb{O}$ ,  $\Re(a) = 0$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ . Без ограничения общности будем считать, что  $n(a) = 1$ . По лемме 4.5.17,

$$O_{\mathbb{S}}((a, \alpha + \beta a)) = \mathbb{R}(a, \alpha + \beta a) \oplus \{(b, (\alpha a - \beta)b) \mid b \in \text{Anc}_{\mathbb{O}}(a)\}.$$

Тогда  $B = (b, (\alpha a - \beta)b) + \gamma A$ ,  $C = (c, (\alpha a - \beta)c) + \delta A$  для некоторых  $b, c \in \text{Anc}_{\mathbb{O}}(a) \setminus \{0\}$ ,  $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ . Элементы  $A, (B - \gamma A), (C - \delta A)$  образуют цикл длины 3 в  $\Gamma'_O(\hat{\mathbb{S}})$ , поэтому без ограничения общности мы можем считать, что  $\gamma = \delta = 0$ , то есть  $B = (b, (\alpha a - \beta)b)$ ,  $C = (c, (\alpha a - \beta)c)$ . По лемме 4.1.7, из  $C \in O_{\hat{\mathbb{S}}}(B)$  следует, что  $[b, c, (\alpha a - \beta)b] = 0$ . Так как  $\mathbb{O}$  — гибкая алгебра, имеем  $\alpha[b, c, ab] = [b, c, (\alpha a - \beta)b] + \beta[b, c, b] = 0$ . Рассмотрим два случая:

(a) Если  $\alpha = 0$ , то  $B = (b, -\beta b)$ ,  $C = (c, -\beta c)$ ,  $\beta = \pm 1$ . По лемме 4.5.17,

$$O_{\hat{\mathbb{S}}}((b, -\beta b)) = \mathbb{R}(b, -\beta b) \oplus \{(d, \beta d) \mid d \in \text{Anc}_{\mathbb{O}}(b)\},$$

поэтому из  $C \in O_{\hat{\mathbb{S}}}(B)$  следует, что  $C \in [B]$ . Противоречие.

(b) Пусть теперь  $[b, c, ab] = 0$ . Без ограничения общности будем считать, что  $n(b) = 1$ . По лемме 4.5.1,  $a$  и  $b$  порождают подалгебру  $\mathbb{H}_{a,b} \subset \mathbb{O}$ . Следовательно,  $1, b, ab$  линейно независимы. Из предложения 4.5.2 получаем, что  $c \in \text{Lin}(1, b, ab, b(ab)) = \text{Lin}(1, a, b, ab)$ . Поскольку  $c \in \text{Anc}_{\mathbb{O}}(a)$ , из леммы 1.3.8 следует, что  $c \in \text{Lin}(1, a)^{\perp}$ , поэтому  $c \in \text{Lin}(b, ab)$ .  $A, B, C$  линейно независимы, откуда  $b, c$  линейно независимы. Пусть  $c = \kappa b + ab$ . Тогда  $A, B, (C - \kappa B)$  тоже образуют цикл длины 3 в  $\Gamma'_O(\hat{\mathbb{S}})$ , поэтому без ограничения общности можем считать, что  $\kappa = 0$ , то есть  $C = (ab, (\alpha a - \beta)(ab)) = (ab, -(\alpha + \beta a)b)$ . Тогда вторая компонента  $BC$  равна

$$\begin{aligned} &(-(\alpha + \beta a)b)b + ((\alpha a - \beta)b)(\overline{ab}) = -(\alpha + \beta a)b^2 + ((\alpha a - \beta)b)(ba) = \\ &= n(b)((\alpha + \beta a) - (\alpha a - \beta)a) = 2n(b)(\alpha + \beta a) \neq 0. \end{aligned}$$

Таким образом,  $C \notin O_{\hat{\mathbb{S}}}(B)$ . Мы получили противоречие.

(2) Ортогонализаторы  $A, B, C$  имеют размерность 3. Если существует такое  $D \in \text{Lin}(A, B, C)$ , что размерность ортогонализатора  $D$  равна 7, то мы получаем противоречие из предыдущего пункта.

В противном случае, для любого  $D \in \text{Lin}(A, B, C)$ ,  $D \neq 0$ , имеем  $\text{Lin}(A, B, C) \subset O_{\hat{\mathbb{S}}}(D)$  и  $\dim(\text{Lin}(A, B, C)) = \dim(O_{\hat{\mathbb{S}}}(D)) = 3$ , и тогда  $O_{\hat{\mathbb{S}}}(D) = \text{Lin}(A, B, C)$ . Следовательно, подграф  $\Gamma'_O(\hat{\mathbb{S}})$  на множестве вершин  $\mathbb{P}(\text{Lin}(A, B, C))$  является его компонентой связности. По теореме 4.5.26,  $\Gamma'_O(\hat{\mathbb{S}})$  связан. Однако из соображений размерности нетрудно получить нарушение включения  $Z'(\hat{\mathbb{S}}) \subset \text{Lin}(A, B, C)$ . Противоречие.

Таким образом,  $Q = \mathbb{P}(\text{Lin}(A, B))$ . □

## Глава 5

# Решение проблемы изоморфизма для графов ортогональности на парах базисных элементов

Данная глава посвящена решению проблемы изоморфизма для графов ортогональности на парах базисных элементов произвольных вещественных алгебр Кэли-Диксона. В разделе 5.1 изучаются чисто мнимые делители нуля, являющиеся парами базисных элементов. Теорема 5.1.20 устанавливает критерий того, что пара базисных элементов является делителем нуля, а в теореме 5.1.21 описаны условия, при которых два таких элемента ортогональны. С помощью этих результатов в теореме 5.2.6 раздела 5.2 получен алгоритм индуктивного построения графа ортогональности на парах базисных элементов для произвольной вещественной алгебры Кэли-Диксона. Раздел 5.3 посвящён решению обратной задачи, а именно, по графу ортогональности требуется восстановить параметры Кэли-Диксона соответствующей алгебры. Основным результатом этой главы является теорема 5.3.16, согласно которой, начиная с размерности 16, две вещественные алгебры Кэли-Диксона изоморфны, если и только если изоморфны их графы ортогональности на парах базисных элементов. В разделе 5.4 предложен другой подход к определению графа ортогональности на парах базисных элементов, который может позволить убрать ограничение на размерность в теореме 5.3.16.

Результаты этой главы опубликованы в статье [52], за исключением вспомогательных результатов из раздела 5.1, опубликованных в статье [51].

## 5.1 Делители нуля из пар базисных элементов

### 5.1.1 Классификация делителей нуля

В предложении 2.3.4 было показано, что, если делитель нуля  $a \in \mathcal{A}_n$  не является чисто мнимым, то содержащая его компонента связности  $\Gamma_O(\mathcal{A}_n)$  состоит из двух вершин:  $[a]$  и  $[\bar{a}]$ . Поэтому нам достаточно рассматривать  $\Gamma'_O(\mathcal{A}_n)$  — подграф  $\Gamma_O(\mathcal{A}_n)$  на множестве вершин  $\mathbb{P}(Z'(\mathcal{A}_n))$ .

Напомним, что мы обозначаем  $\tilde{e}_0 = (0, e_0) \in \mathcal{A}_n$  и  $\tilde{a} = a\tilde{e}_0$  для всех  $a \in \mathcal{A}_n$ . Свойства этой операции были подробно описаны в лемме 2.1.2. Ниже приведены формулировки доказанных ранее лемм 2.1.3 и 2.1.9, которые позволяют записать таблицу умножения для удовлетворяющих определённым условиям элементов алгебры  $\mathcal{A}_n$ .

**Лемма 5.1.1** (2.1.3). Пусть  $a \in \mathcal{A}_n$  — дважды чисто мнимый элемент. Тогда  $\mathbb{H}_a = \text{Lin}(e_0, a, \tilde{e}_0, \tilde{a})$  — ассоциативная подалгебра в  $\mathcal{A}_n$ , имеющая следующую таблицу умножения, где  $\mu_1 = n(a)$  и  $\mu_2 = n(\tilde{e}_0) = -\gamma_{n-1}$ :

$\times$	$e_0$	$a$	$\tilde{e}_0$	$\tilde{a}$
$e_0$	$e_0$	$a$	$\tilde{e}_0$	$\tilde{a}$
$a$	$a$	$-\mu_1$	$\tilde{a}$	$-\mu_1\tilde{e}_0$
$\tilde{e}_0$	$\tilde{e}_0$	$-\tilde{a}$	$-\mu_2$	$\mu_2a$
$\tilde{a}$	$\tilde{a}$	$\mu_1\tilde{e}_0$	$-\mu_2a$	$-\mu_1\mu_2$

Таблица 5.1: Таблица умножения в  $\mathbb{H}_a$ .

**Лемма 5.1.2** (2.1.9). Пусть  $a, b \in \mathcal{A}_n$  — дважды чисто мнимые элементы,  $b \perp \text{Lin}(a, \tilde{a})$ . Пусть также элементы  $a$  и  $b$  строго альтернируют. Тогда  $\mathbb{O}_{a,b} = \text{Lin}(e_0, a, b, ab, \tilde{e}_0, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{ab})$  — альтернативная подалгебра в  $\mathcal{A}_n$ , имеющая следующую таблицу умножения, где  $\mu_1 = n(a)$ ,  $\mu_2 = n(b)$  и  $\mu_3 = n(\tilde{e}_0) = -\gamma_{n-1}$ :

$\times$	$e_0$	$a$	$b$	$ab$	$\tilde{e}_0$	$\tilde{a}$	$\tilde{b}$	$\tilde{ab}$
$e_0$	$e_0$	$a$	$b$	$ab$	$\tilde{e}_0$	$\tilde{a}$	$\tilde{b}$	$\tilde{ab}$
$a$	$a$	$-\mu_1$	$ab$	$-\mu_1b$	$\tilde{a}$	$-\mu_1\tilde{e}_0$	$-\tilde{ab}$	$\mu_1\tilde{b}$
$b$	$b$	$-ab$	$-\mu_2$	$\mu_2a$	$\tilde{b}$	$\tilde{ab}$	$-\mu_2\tilde{e}_0$	$-\mu_2\tilde{a}$
$ab$	$ab$	$\mu_1b$	$-\mu_2a$	$-\mu_1\mu_2$	$\tilde{ab}$	$-\mu_1\tilde{b}$	$\mu_2\tilde{a}$	$-\mu_1\mu_2\tilde{e}_0$
$\tilde{e}_0$	$\tilde{e}_0$	$-\tilde{a}$	$-\tilde{b}$	$-\tilde{ab}$	$-\mu_3$	$\mu_3a$	$\mu_3b$	$\mu_3ab$
$\tilde{a}$	$\tilde{a}$	$\mu_1\tilde{e}_0$	$-\tilde{ab}$	$\mu_1\tilde{b}$	$-\mu_3a$	$-\mu_1\mu_3$	$-\mu_3ab$	$\mu_1\mu_3b$
$\tilde{b}$	$\tilde{b}$	$\tilde{ab}$	$\mu_2\tilde{e}_0$	$-\mu_2\tilde{a}$	$-\mu_3b$	$\mu_3ab$	$-\mu_2\mu_3$	$-\mu_2\mu_3a$
$\tilde{ab}$	$\tilde{ab}$	$-\mu_1\tilde{b}$	$\mu_2\tilde{a}$	$\mu_1\mu_2\tilde{e}_0$	$-\mu_3ab$	$-\mu_1\mu_3b$	$\mu_2\mu_3a$	$-\mu_1\mu_2\mu_3$

Таблица 5.2: Таблица умножения в  $\mathbb{O}_{a,b}$ .

**Обозначение.** Введём следующие множества базисных элементов  $\mathcal{A}_n$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_n &= \{e_0^{(n)}, e_1^{(n)}, \dots, e_{2^n-1}^{(n)}\}, \\ \mathcal{E}'_n &= \{e_1^{(n)}, \dots, e_{2^n-1}^{(n)}\} = \mathcal{E}_n \setminus \{e_0^{(n)}\}, \\ \mathcal{E}''_n &= \{e_1^{(n)}, \dots, e_{2^{n-1}-1}^{(n)}, e_{2^{n-1}+1}^{(n)}, \dots, e_{2^n-1}^{(n)}\} = \mathcal{E}_n \setminus \{e_0^{(n)}, e_{2^{n-1}}^{(n)}\}.\end{aligned}$$

Ясно, что  $\mathcal{E}'_n$  — множество чисто мнимых базисных элементов, а  $\mathcal{E}''_n$  — множество дважды чисто мнимых базисных элементов.

**Предложение 5.1.3.** Для  $e_j \in \mathcal{E}_n$  выполнено

$$\tilde{e}_j = \begin{cases} e_{j+2^{n-1}}, & 0 \leq j \leq 2^{n-1} - 1, \\ \gamma_{n-1} e_{j-2^{n-1}}, & 2^{n-1} \leq j \leq 2^n - 1. \end{cases}$$

*Доказательство.* Следует из явного вида элемента  $\tilde{a}$  в лемме 2.1.2.  $\square$

**Определение 5.1.4.** Нам понадобятся следующие подмножества  $Z(\mathcal{A}_{n+1})$ :

$$\begin{aligned} Z_e(\mathcal{A}_{n+1}) &= \left\{ \left( e_i^{(n)}, \pm e_j^{(n)} \right) \in Z(\mathcal{A}_{n+1}) \right\} = (\mathcal{E}_n \times (\pm \mathcal{E}_n)) \cap Z(\mathcal{A}_{n+1}); \\ Z'_e(\mathcal{A}_{n+1}) &= \left\{ \left( e_i^{(n)}, \pm e_j^{(n)} \right) \in Z(\mathcal{A}_{n+1}) \mid i \neq 0 \right\} = (\mathcal{E}'_n \times (\pm \mathcal{E}_n)) \cap Z(\mathcal{A}_{n+1}). \end{aligned}$$

Тогда  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  обозначает подграф  $\Gamma'_O(\mathcal{A}_{n+1})$  на множестве вершин  $\mathbb{P}(Z'_e(\mathcal{A}_{n+1}))$ .

Для удобства обозначений, ниже мы рассматриваем делители нуля в  $\mathcal{A}_{n+1}$  с точностью до умножения на  $\pm 1$ . Согласно предложению 2.3.4, чтобы доказать, что  $a, b \in Z'_e(\mathcal{A}_{n+1})$  ортогональны, достаточно показать, что  $ab = 0$ , то есть проверить, что только одно из произведений равно нулю.

**Лемма 5.1.5.** Пусть  $(a, b), (c, d) \in Z_e(\mathcal{A}_{n+1})$ ,  $(a, b)(c, d) = 0$ . Тогда  $ab = \pm cd$ .

*Доказательство.* Согласно [44, лемма 4],  $e_j^{(n)}$  альтернативен в  $\mathcal{A}_n$ . Кроме того, для любых элементов  $e_j^{(n)}$  и  $e_k^{(n)}$  всегда выполнено  $\overline{e_j^{(n)}} = \pm e_j^{(n)}$ ,  $n(e_j^{(n)}) = \pm 1$  и  $e_j^{(n)} e_k^{(n)} = \pm e_k^{(n)} e_j^{(n)}$ .

Из условия  $(a, b)(c, d) = (ac + \gamma_n \bar{d}b, da + b\bar{c}) = 0$  следует  $0 = ac + \gamma_n \bar{d}b = \pm ca \pm db$ . Аналогично [17, теорема 6.14], мы получаем  $(ca)b = \pm c(ab)$ . Тогда  $0 = (\pm ca \pm db)\bar{b} = \pm(ca)\bar{b} \pm (db)\bar{b} = \pm(ca)b \pm n(b)d = \pm c(ab) \pm d$ . Отсюда  $0 = \bar{c}(\pm c(ab) \pm d) = \pm n(c)(ab) \pm \bar{c}d = \pm ab \pm cd$ , поэтому  $ab = \pm cd$ .  $\square$

**Следствие 5.1.6.** Пусть  $(a, b), (c, d) \in Z'_e(\mathcal{A}_{n+1})$  принадлежат одной компоненте связности графа  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$ . Тогда  $ab = \pm cd$ .

*Доказательство.* Пусть  $P$  — путь длины  $k$  в  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  от  $(a, b)$  к  $(c, d)$ . Тогда требуемое утверждение сразу следует из леммы 5.1.5 с помощью индукции по  $k$ .  $\square$

**Обозначение.** Обозначим как  $C(e_j^{(n)})$  подграф  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  на множестве таких вершин  $(a, b)$ , что  $ab = \pm e_j^{(n)}$ .

Из следствия 5.1.6 вытекает, что  $C(e_j^{(n)})$  и  $C(e_k^{(n)})$ ,  $j \neq k$ , не связаны между собой в  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$ .

Согласно [44, лемма 4], элемент  $e_j^{(n)}$  всегда альтернативен в  $\mathcal{A}_n$ , поэтому  $Z_e(\mathcal{A}_{n+1}) \subseteq DA(\mathcal{A}_{n+1})$ . Кроме того, для  $(a, b) \in Z_e(\mathcal{A}_{n+1})$  всегда выполнено  $n(a) = \pm 1$  и  $n(b) = \pm 1$ , а потому  $(a, b)$  удовлетворяет условию (\*) для некоторого  $\chi = \pm 1$ , см. замечание 2.2.2. Значения  $\chi$  могут быть различны для разных элементов  $Z_e(\mathcal{A}_{n+1})$ , поэтому оно становится функцией от делителя нуля:  $\chi = \chi((a, b))$ . Для сокращения записи мы будем опускать аргумент  $\chi$  в тех случаях, когда он без труда восстанавливается из контекста.

Как следует из леммы 2.2.4, нетрудно показать индукцией по длине пути, что значение  $\chi$  постоянно на любой компоненте связности  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$ . Величина  $\chi = \chi(C)$  называется *характеристикой* компоненты связности  $C \subseteq \Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$ . Ниже мы устанавливаем значение  $\chi$  для любой вершины подграфа  $C(e_j^{(n)})$  даже в том случае, когда этот подграф несвязен.

**Предложение 5.1.7.** *Для любого  $x \in \mathcal{E}_n$  выполнено  $\chi(C(x)) = \gamma_n n(x)$ .*

*Доказательство.* Пусть  $(a, b) \in V(C(x))$ , то есть  $ab = \pm x$ . Поскольку  $n(a) = \pm 1$ , и элементы  $a$  и  $b$  оба являются альтернативными, мы получаем из леммы 2.1.1, что

$$\chi = \gamma_n \frac{n(b)}{n(a)} = \gamma_n n(a)n(b) = \gamma_n n(ab) = \gamma_n n(\pm x) = \gamma_n n(x). \quad \square$$

Следующее предложение позволяет упростить рассмотрение пар ортогональных элементов в  $Z'_e(\mathcal{A}_{n+1})$ .

**Предложение 5.1.8.** *Пусть  $a, b, c, d \in \pm\mathcal{E}_n$ ,  $ab = \pm cd$ . Если  $a, b, c$  линейно независимы, то  $a, b, c, d$  также линейно независимы.*

*Доказательство.* Предположим, что  $a, b, c, d$  линейно зависимы. Тогда  $d \in \{\pm a, \pm b, \pm c\}$ . Если  $d = \pm a$ , то  $ac = \pm dc = \pm cd = \pm ab$ , откуда  $n(a)c = \bar{a}(ac) = \pm \bar{a}(ab) = \pm n(a)b$  и  $c = \pm b$ . Если  $d = \pm b$ , то аналогично из  $ab = \pm cd = \pm cb$  следует  $a = \pm c$ . Если  $d = \pm c$ , то из  $ab = \pm c^2 = \pm c\bar{c} = \pm n(c)e_0$  следует  $b = \pm a$ . Во всех случаях получаем противоречие с линейной независимостью элементов  $a, b, c$ .  $\square$

**Предложение 5.1.9.** *Все элементы  $(x, y) \in Z'_e(\mathcal{A}_{n+1})$  разбиваются на четыре непересекающихся группы, в зависимости от типа произведения  $xy$ . В этой классификации мы предполагаем, что  $e_0, a, b, c$  — линейно независимые элементы в  $\pm\mathcal{E}_{n-1}$ , и  $ab = \pm c$ .*

- (I) Если  $xy \in \text{Lin}(e_0)$ , то  $(x, y)$  имеет вид  $(a, \pm a)$ ,  $(\tilde{a}, \pm \tilde{a})$  или  $(\tilde{e}_0, \pm \tilde{e}_0)$ .
- (II) Если  $xy \in \text{Lin}(\tilde{e}_0)$ , то  $(x, y)$  имеет вид  $(a, \pm \tilde{a})$ ,  $(\tilde{a}, \pm a)$  или  $(\tilde{e}_0, \pm e_0)$ .
- (III) Если  $xy \in \text{Lin}(c)$ , то  $(x, y)$  имеет вид  $(c, e_0)$ ,  $(\tilde{c}, \tilde{e}_0)$ ,  $(\tilde{e}_0, \tilde{c})$ ,  $(a, b)$  или  $(\tilde{a}, \tilde{b})$ .
- (IV) Если  $xy \in \text{Lin}(\tilde{c})$ , то  $(x, y)$  имеет вид  $(\tilde{c}, e_0)$ ,  $(c, \tilde{e}_0)$ ,  $(\tilde{e}_0, c)$ ,  $(a, \tilde{b})$  или  $(\tilde{a}, b)$ .

Элементы разных типов (или элементы одного типа, но соответствующие линейно независимым значениям  $c$ ) принадлежат разным компонентам связности  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$ .

*Доказательство.* Рассмотрим произвольный элемент  $(x, y) \in Z'_e(\mathcal{A}_{n+1})$ . Тогда  $xy \in \mathcal{E}_n$ , поэтому  $xy \in \{\pm e_0, \pm \tilde{e}_0\} \cup \{\pm c, \pm \tilde{c} \mid c \in \mathcal{E}_{n-1}\}$ , а значит,  $(x, y)$  относится ровно к одной из перечисленных групп. Обозначим  $z = xy$ . Тогда  $y = \pm n(x)y = \pm \bar{x}(xy) = \pm(\pm x)z = \pm xz$ . Кроме того,  $x \neq \pm e_0$ . Теперь покажем, что каждая группа содержит все элементы указанного вида и только их.

- (I) Если  $z = \pm e_0$ , то  $y = \pm x$ , поэтому  $(x, y)$  имеет требуемый вид.

- (II) Если  $z = \pm\tilde{e}_0$ , то  $y = \pm x\tilde{e}_0 = \pm\tilde{x}$ , поэтому  $(x, y)$  имеет требуемый вид.
- (III) Если  $z = \pm c$  для некоторого  $c \in \mathcal{E}_{n-1}$ , то  $y = \pm xc$ . Тогда, по лемме 5.1.1, из  $x = \pm c$  следует  $y = \pm e_0$ , из  $x = \pm\tilde{c}$  следует  $y = \pm\tilde{e}_0$ , а из  $x = \pm\tilde{e}_0$  следует  $y = \pm\tilde{c}$ . Остаётся рассмотреть случай, когда  $x = a$  или  $x = \tilde{a}$  для некоторого  $a \in \pm(\mathcal{E}_{n-1} \setminus \{e_0, c\})$ . По лемме 5.1.2, элементы  $a, c, \tilde{e}_0$  порождают октонионную подалгебру  $\mathbb{O}_{a,c}$ . Обозначим  $b = ac \in \pm\mathcal{E}_{n-1}$ . Тогда  $ab = \pm c$  и, если  $x = \pm a$ , то  $y = \pm b$ , а если  $x = \pm\tilde{a}$ , то  $y = \pm\tilde{b}$ . Из предложения 5.1.8 следует, что элементы  $a, c, e_0, b$  линейно независимы. Требуемый вид элемента  $(x, y)$  получается умножением  $a, b, c$  на подходящие коэффициенты  $\pm 1$ .
- (IV) Случай, когда  $z = \pm\tilde{c}$  для некоторого  $c \in \mathcal{E}_{n-1}$ , рассматривается аналогично предыдущему.

Последняя часть утверждения вытекает из следствия 5.1.6.  $\square$

**Определение 5.1.10.** Мы называем элемент *особым*, если выполнено одно из следующих двух условий:

- (1)  $\chi = 1$ , и одна из его компонент равна  $e_0$ ;
- (2)  $\chi = -1$ , и одна из его компонент равна  $\tilde{e}_0$ .

Мы скоро увидим, что особые элементы играют роль связующих звеньев в  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$ . А именно, при  $n \geq 3$  и  $x \in \mathcal{E}_n''$  любые два элемента  $C(x)$  соединяются путём длины не больше 3, проходящим через один из особых элементов.

## 5.1.2 Изучение условий ортогональности

Теперь мы определим условия, при которых два элемента из  $Z'_e(\mathcal{A}_{n+1})$  ортогональны. Для этого нам понадобятся леммы 2.3.8 и 2.3.9, описывающие аннуляторы и ортогонализаторы дважды альтернативных элементов, удовлетворяющих условию (\*). Для удобства читателей мы повторно приводим их формулировки.

**Лемма 5.1.11** (2.3.8 и 2.3.9). Пусть  $(a, b) \in DA(\mathcal{A}_{n+1})$  удовлетворяет условию (\*). Тогда

$$\begin{aligned} l. \text{ Ann}_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, b)) &= \left\{ \left( c, -\frac{(bc)a}{n(a)} \right) \mid b(ca) = \chi(bc)a \right\}, \\ r. \text{ Ann}_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, b)) &= \left\{ \left( c, -\frac{(b\bar{c})\bar{a}}{n(a)} \right) \mid (ac)\bar{b} = \chi a(c\bar{b}) \right\}. \end{aligned}$$

Если  $(a, b)$  также является чисто мнимым, то

$$\begin{aligned} O_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, b)) &= \left\{ \left( c, -\frac{(bc)a}{n(a)} \right) \mid \Re(c) = 0, b(ca) = \chi(bc)a \right\} = \\ &= \left\{ \left( \frac{(a\bar{d})b}{n(b)}, d \right) \mid \langle d, ba \rangle = 0, (a\bar{d})b = \chi a(\bar{d}b) \right\}. \end{aligned}$$

Два следующих важных предложения устанавливают «почти эквивалентность» элементов  $(a, b)$ ,  $(b, \gamma_n a)$ ,  $(\tilde{a}, \tilde{b})$  и  $(\tilde{b}, \gamma_n \tilde{a})$ , где  $a, b, \tilde{a}, \tilde{b}$  — линейно независимые элементы  $\pm \mathcal{E}_n''$ . Эти элементы не являются эквивалентными в том смысле, что множества их соседей не совпадают. Однако соседи, обе компоненты которых не принадлежат  $\mathbb{O}_{a,b}$ , у всех этих четырёх элементов одни и те же, см. лемму 5.1.18 ниже.

**Предложение 5.1.12.** Пусть  $a, b, c, d \in \mathcal{A}_n$  — чисто мнимые элементы. Тогда  $(a, b)$  ортогонален  $(c, d)$  тогда и только тогда, когда он ортогонален  $(d, \gamma_n c)$ .

*Доказательство.* Поскольку  $\gamma_n^2 = 1$ , имеем  $(a, b)(c, d) = (ac + \gamma_n \bar{d}b, da + b\bar{c}) = (ac - \gamma_n db, da - bc)$  и  $(a, b)(d, \gamma_n c) = (ad + \gamma_n \overline{(\gamma_n c)}b, \gamma_n ca + b\bar{d}) = (ad - cb, \gamma_n (ca - \gamma_n bd)) = ((da - bc), \gamma_n (ac - \gamma_n db))$ . Тогда  $(a, b)(c, d) = 0$ , если и только если  $(a, b)(d, \gamma_n c) = 0$ .  $\square$

**Предложение 5.1.13.** Пусть  $a, \tilde{a}, b, \tilde{b}, c, \tilde{c}, d, \tilde{d}$  — линейно независимые элементы в  $\pm \mathcal{E}_n''$ . Тогда

- (1)  $(a, b)$  ортогонален  $(c, d)$ , если и только если он ортогонален  $(\tilde{c}, \tilde{d})$ ;
- (2)  $(a, b)$  ортогонален  $(c, d)$ , если и только если  $(\tilde{a}, \tilde{b})$  ортогонален  $(\tilde{c}, \tilde{d})$ .

*Доказательство.*

- (1) По лемме 5.1.2, любые два элемента из  $a, b, c, d$  вместе с  $\tilde{e}_0$  порождают октонионную подалгебру в  $\mathcal{A}_n$ . Остаётся заметить, что  $(a, b)(c, d) = (ac + \gamma_n \bar{d}b, da + b\bar{c}) = (ac - \gamma_n db, da - bc)$  и  $(a, b)(\tilde{c}, \tilde{d}) = (\underline{a\tilde{c}} + \gamma_n \bar{\tilde{d}}b, \tilde{d}a + b\bar{\tilde{c}}) = (a\tilde{c} - \gamma_n \tilde{d}b, \tilde{d}a - b\tilde{c}) = (-\tilde{a}\tilde{c} + \gamma_n \tilde{d}b, -\tilde{d}a + \tilde{b}\tilde{c}) = (-\underline{ac} - \gamma_n db, -(da - bc))$ . Ясно, что  $(a, b)(c, d) = 0$ , если и только если  $(a, b)(\tilde{c}, \tilde{d}) = 0$ .
- (2) Применим пункт (1) дважды: элементы  $(a, b)$  и  $(c, d)$  ортогональны, если и только если  $(a, b)$  и  $(\tilde{c}, \tilde{d})$  ортогональны, если и только если  $(\tilde{a}, \tilde{b})$  и  $(\tilde{c}, \tilde{d})$  ортогональны.  $\square$

Сперва мы рассмотрим элементы типа (I) из предложения 5.1.9.

**Лемма 5.1.14.** Рассмотрим  $(a, \pm a) \in \mathcal{A}_{n+1}$ , где  $a \in \mathcal{E}'_n$ . Заметим, что  $\chi = \gamma_n \frac{n(a)}{n(\pm a)} = \gamma_n$ . Тогда  $(a, \pm a) \in Z'_e(\mathcal{A}_{n+1})$ , если и только если  $\chi = \gamma_n = 1$ , и в этом случае этот элемент ортогонален сам себе и всем таким  $(b, \mp b)$ , что  $b \in \mathcal{E}'_n \setminus \{a\}$ .

*Доказательство.* По лемме 5.1.11,

$$O_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, \pm a)) = \left\{ \left( b, \mp \frac{(ab)a}{n(a)} \right) \mid \Re(b) = 0, a(ba) = \chi(ab)a \right\}.$$

Явный вид аннуляторов описан в лемме 5.1.11. Из гибкости мы получаем, что  $a(ba) = (ab)a$ , и  $a(ba) \neq 0$  при  $b \neq 0$ . Таким образом, при  $\chi = -1$  имеем  $l. \text{Ann}_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, \pm a)) = r. \text{Ann}_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, \pm a)) = O_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, \pm a)) = \{0\}$ , поэтому  $(a, \pm a) \notin Z'_e(\mathcal{A}_{n+1})$ . Теперь предположим, что  $\chi = 1$ . По предложению 2.2.3,  $(a, \pm a)$  ортогонален сам себе. Рассмотрим  $b \in \mathcal{E}'_n$ ,  $b \neq a$ . Тогда  $b \perp a$ , а значит,  $ab + ba = 0$ . Таким образом,

$$\mp \frac{(ab)a}{n(a)} = \pm \frac{(ba)a}{n(a)} = \mp \frac{b(a\bar{a})}{n(a)} = \mp b,$$

поэтому  $(a, \pm a)$  ортогонален  $(b, \mp b)$ .  $\square$

Теперь перейдём к дважды чисто мнимым элементам типа (II). Те элементы типа (II), в которых второй компонентой является  $e_0$ , описываются в лемме 5.1.16.

**Лемма 5.1.15.** *Рассмотрим  $(\tilde{a}, \pm a) \in \mathcal{A}_{n+1}$  с условием  $a \in \mathcal{E}_n'' = \mathcal{E}_n \setminus \{e_0, \tilde{e}_0\}$ . Заметим, что  $\chi = \gamma_n \frac{n(\tilde{a})}{n(\pm a)} = \gamma_n \frac{n(\tilde{e}_0)n(a)}{n(a)} = -\gamma_{n-1}\gamma_n$ .*

- (1) Если  $\chi = 1$ , то  $(\tilde{a}, \pm a)$  ортогонален сам себе, а также элементам  $(\tilde{e}_0, \pm e_0)$  и  $(a, \pm \gamma_n \tilde{a})$ .
- (2) Если  $\chi = -1$ , то  $(\tilde{a}, \pm a)$  соединён в  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  ребром со всеми такими  $(\tilde{b}, \mp b)$ , что  $b \in \mathcal{E}_n'' \setminus \{a, \tilde{a}\}$ , и только с ними. Кроме того, в этом случае  $(\tilde{a}, \pm a) \in Z'_e(\mathcal{A}_{n+1})$  тогда и только тогда, когда  $n \geq 3$ .

*Доказательство.* По лемме 5.1.11,

$$O_{\mathcal{A}_{n+1}}((\tilde{a}, \pm a)) = \left\{ \left( b, \mp \frac{(ab)\tilde{a}}{n(\tilde{a})} \right) \mid \Re(b) = 0, a(b\tilde{a}) = \chi(ab)\tilde{a} \right\}.$$

Поскольку элемент  $a \in \pm \mathcal{E}_n''$ , мы можем применить к нему лемму 5.1.1. Таким образом, для  $b \in \mathbb{H}_a = \text{Lin}(1, a, \tilde{e}_0, \tilde{a})$  выполнено  $a(b\tilde{a}) = (ab)\tilde{a}$ . С другой стороны, если  $b \perp \mathbb{H}_a$ , то можно применить лемму 5.1.2 к элементам  $a, b$  и получить, что  $a(b\tilde{a}) = -(ab)\tilde{a}$ . Остаётся заметить, что для любого  $b \in \mathcal{E}_n'$  выполнено либо  $b \in \mathbb{H}_a$ , либо  $b \perp \mathbb{H}_a$ .

- (1) Предположим, что  $\chi = 1$ . По предложению 2.2.3, элемент  $(\tilde{a}, \pm a)$  ортогонален сам себе. Тогда из предложения 5.1.12 следует, что  $(\tilde{a}, \pm a)$  также ортогонален  $(\pm a, \gamma_n \tilde{a})$ . Поскольку  $b \in \mathbb{H}_a$  и  $b \in \pm \mathcal{E}_n'$ , остаётся рассмотреть случай  $b = \tilde{e}_0$ . Ясно, что

$$\mp \frac{(a\tilde{e}_0)\tilde{a}}{n(\tilde{a})} = \mp \frac{\tilde{a}\tilde{a}}{n(\tilde{a})} = \pm e_0.$$

Таким образом,  $(\tilde{a}, \pm a)$  ортогонален  $(\tilde{e}_0, \pm e_0)$ .

- (2) Если  $\chi = -1$ , то для  $b \in \mathcal{E}_n'$  из  $a(b\tilde{a}) = \chi(ab)\tilde{a}$  следует  $b \perp \mathbb{H}_a$ , поэтому вместо  $b$  можно рассмотреть  $\tilde{c}$ , где  $c \in \mathcal{E}_n'' \setminus \{a, \tilde{a}\}$ . Используем лемму 5.1.2, чтобы вычислить

$$\mp \frac{(a\tilde{c})\tilde{a}}{n(\tilde{a})} = \pm \frac{(\tilde{a}\tilde{c})\tilde{a}}{n(\tilde{a})} = \mp \frac{n(a)n(\tilde{e}_0)c}{n(a)n(\tilde{e}_0)} = \mp c.$$

Отсюда  $(\tilde{a}, \pm a)$  ортогонален  $(\tilde{c}, \mp c)$ .

Заметим, что если  $n \leq 2$ , то  $\mathcal{A}_n = \mathbb{H}_a$ , поэтому  $a(b\tilde{a}) = (ab)\tilde{a}$  для всех  $b \in \mathcal{A}_n$ , и тогда из леммы 5.1.11 следует, что  $l. \text{Ann}_{\mathcal{A}_{n+1}}((\tilde{a}, \pm a)) = r. \text{Ann}_{\mathcal{A}_{n+1}}((\tilde{a}, \pm a)) = O_{\mathcal{A}_{n+1}}((\tilde{a}, \pm a)) = \{0\}$ . Однако, если  $n \geq 3$ , то  $O_{\mathcal{A}_{n+1}}((\tilde{a}, \pm a)) \neq \{0\}$  и  $(\tilde{a}, \pm a) \in Z'_e(\mathcal{A}_{n+1})$ .  $\square$

Теперь изучим элементы типов (III) и (IV) из предложения 5.1.9. Мы начнём с тех из них, которые не являются четырёхжды чисто мнимыми, см. определение 1.2.11. Другими словами,

одна из их компонент равна либо  $\pm e_0$ , либо  $\pm \tilde{e}_0$ . Ясно, что  $(e_0, c) \notin Z'_e(\mathcal{A}_{n+1})$  ни для какого  $c \in \pm \mathcal{E}_n$ , поэтому мы будем рассматривать только элементы вида  $(c, e_0)$ .

**Лемма 5.1.16.** *Рассмотрим  $(c, e_0) \in \mathcal{A}_{n+1}$ ,  $c \in \pm \mathcal{E}'_n$ . Тогда  $(c, e_0) \in Z'_e(\mathcal{A}_{n+1})$  тогда и только тогда, когда соответствующее  $\chi = 1$ , и в этом случае элемент  $(c, e_0)$  ортогонален элементу  $(a, b) \in Z'_e(\mathcal{A}_{n+1})$ , если и только если  $ab = n(b)c$ .*

*Доказательство.* По лемме 5.1.11,

$$O_{\mathcal{A}_{n+1}}((c, e_0)) = \left\{ \left( a, -\frac{(e_0 a)c}{n(c)} \right) \mid \Re e(a) = 0, e_0(ac) = \chi(e_0 a)c \right\}.$$

Явный вид аннуляторов описан в лемме 5.1.11. Ясно, что всегда выполнено  $e_0(ac) = ac = (e_0 a)c$ , и  $ac \neq 0$  при  $a \neq 0$ . Следовательно, при  $\chi = -1$  выполнено  $l. \text{Ann}_{\mathcal{A}_{n+1}}((c, e_0)) = r. \text{Ann}_{\mathcal{A}_{n+1}}((c, e_0)) = O_{\mathcal{A}_{n+1}}((c, e_0)) = \{0\}$ , поэтому  $(c, e_0) \notin Z'_e(\mathcal{A}_{n+1})$ . Теперь предположим, что  $\chi = 1$ . Пусть  $a \in \mathcal{E}'_n$ . Обозначим  $b = -\frac{ac}{n(c)} \in \pm \mathcal{E}_n$ . Поскольку  $a$  альтернативен, по лемме 2.1.1,

$$n(b) = \frac{n(ac)}{(n(c))^2} = \frac{n(a)n(c)}{(n(c))^2} = \frac{n(a)}{n(c)},$$

и тогда

$$ab = -\frac{a(ac)}{n(c)} = \frac{(a\bar{a})c}{n(c)} = \frac{n(a)}{n(c)}c = n(b)c.$$

И наоборот, если  $ab = n(b)c$ , то  $b = -\frac{ac}{n(c)} \in \pm \mathcal{E}_n$ . □

Теперь мы рассмотрим элементы, одна из компонент которых равна  $\tilde{e}_0$ .

**Лемма 5.1.17.** *Рассмотрим  $(c, \tilde{e}_0), (\tilde{e}_0, \gamma_n c) \in \mathcal{A}_{n+1}$ ,  $c \in \pm \mathcal{E}''_n$ . Тогда  $\chi((c, \tilde{e}_0)) = \frac{n(\tilde{e}_0)}{\gamma_n n(c)} = \frac{\gamma_n n(\tilde{e}_0)}{n(\gamma_n c)} = \chi((\tilde{e}_0, \gamma_n c))$ , то есть значения  $\chi$  для этих элементов совпадают.*

(1) *Если  $\chi = 1$ , то  $(c, \tilde{e}_0)$  и  $(\tilde{e}_0, \gamma_n c)$  ортогональны сами себе, и все содержащие их рёбра в  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  могут быть изображены как*

$$(\tilde{c}, -\gamma_{n-1}e_0) \longleftrightarrow (c, \tilde{e}_0) \longleftrightarrow (\tilde{e}_0, \gamma_n c) \longleftrightarrow (\tilde{c}, \gamma_{n-1}e_0).$$

(2) *Пусть теперь  $\chi = -1$ . Тогда  $(c, \tilde{e}_0)$  и  $(\tilde{e}_0, \gamma_n c)$  соединены в  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  со всеми такими  $(a, b) \in Z'_e(\mathcal{A}_{n+1})$ , что  $a \perp \mathbb{H}_c = \text{Lin}(e_0, c, \tilde{e}_0, \tilde{c})$  и  $ab = \gamma_{n-1}n(b)\tilde{c}$ , и только с ними. Кроме того, в этом случае  $(c, \tilde{e}_0), (\tilde{e}_0, \gamma_n c) \in Z'_e(\mathcal{A}_{n+1})$ , если и только если  $n \geq 3$ .*

*Доказательство.* По лемме 5.1.11,

$$O_{\mathcal{A}_{n+1}}((c, \tilde{e}_0)) = \left\{ \left( a, -\frac{(\tilde{e}_0 a)c}{n(c)} \right) \mid \Re e(a) = 0, \tilde{e}_0(ac) = \chi(\tilde{e}_0 a)c \right\}.$$

Поскольку элемент  $c \in \pm \mathcal{E}''_n$ , мы можем применить к нему лемму 5.1.1. Тогда для  $a \in \mathbb{H}_c$  имеем  $\tilde{e}_0(ac) = (\tilde{e}_0 a)c$ . С другой стороны, если  $a \perp \mathbb{H}_c$ , то мы можем применить лемму 5.1.2 к элементам  $a, c$  и получить, что  $\tilde{e}_0(ac) = -(\tilde{e}_0 a)c$ . Остаётся заметить, что для любого  $a \in \mathcal{E}'_n$  выполнено либо  $a \in \mathbb{H}_c$ , либо  $a \perp \mathbb{H}_c$ .

- (1) Предположим, что  $\chi = 1$ . По предложению 2.2.3, элементы  $(c, \tilde{e}_0)$  и  $(\tilde{e}_0, \gamma_n c)$  ортогональны сами себе. Тогда из предложения 5.1.12 следует, что  $(c, \tilde{e}_0)$  также ортогонален  $(\tilde{e}_0, \gamma_n c)$ . Поскольку  $a \in \mathbb{H}_c$  и  $a \in \pm \mathcal{E}'_n$ , остаётся рассмотреть случай  $a = \tilde{c}$ . Из леммы 5.1.1 следует, что

$$-\frac{(\tilde{e}_0 \tilde{c})c}{n(c)} = -\frac{-\gamma_{n-1} c c}{n(c)} = -\frac{\gamma_{n-1} c \bar{c}}{n(c)} = -\gamma_{n-1} e_0.$$

Мы получаем, что  $(c, \tilde{e}_0)$  ортогонален  $(\tilde{c}, -\gamma_{n-1} e_0)$ . Аналогично,  $(\tilde{e}_0, \gamma_n c)$  ортогонален  $(\tilde{c}, \gamma_{n-1} e_0)$ .

- (2) Если  $\chi = -1$ , то из леммы 5.1.11 ясно, что любой сосед  $(a, b)$  элемента  $(c, \tilde{e}_0)$  или  $(\tilde{e}_0, \gamma_n c)$  в  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  является дважды чисто мнимым. Из предложения 5.1.12 следует, что  $(a, b)$  ортогонален элементу  $(c, \tilde{e}_0)$ , если и только если он ортогонален элементу  $(\tilde{e}_0, \gamma_n c)$ . Теперь рассмотрим некоторый такой  $a \in \mathcal{E}'_n$ , что  $a \perp \mathbb{H}_c$ , и пусть  $b = -\frac{(\tilde{e}_0 a)c}{n(c)} \in \mathcal{E}_n$ . По лемме 2.1.1,

$$n(b) = \frac{n((\tilde{e}_0 a)c)}{(n(c))^2} = \frac{n(\tilde{e}_0 a)n(c)}{(n(c))^2} = \frac{n(\tilde{e}_0)n(a)}{n(c)} = -\gamma_{n-1} \frac{n(a)}{n(c)},$$

Мы используем лемму 5.1.2, чтобы вычислить

$$ab = a \cdot \left( -\frac{(\tilde{e}_0 a)c}{n(c)} \right) = a \frac{\tilde{a}c}{n(c)} = -a \frac{\tilde{a}c}{n(c)} = -\frac{n(a)\tilde{c}}{n(c)} = \gamma_{n-1} n(b)\tilde{c}.$$

И наоборот, если  $ab = \gamma_{n-1} n(b)\tilde{c}$ , то  $b = -\frac{(\tilde{e}_0 a)c}{n(c)} \in \pm \mathcal{E}_n$ , поэтому  $(a, b)$  ортогонален  $(c, \tilde{e}_0)$ .

Заметим, что если  $n \leq 2$ , то  $\mathcal{A}_n = \mathbb{H}_c$ , поэтому  $\tilde{e}_0(ac) = (\tilde{e}_0 a)c$  для всех  $a \in \mathcal{A}_n$ , и тогда из леммы 5.1.11 следует, что  $l. \text{Ann}_{\mathcal{A}_{n+1}}((c, \tilde{e}_0)) = r. \text{Ann}_{\mathcal{A}_{n+1}}((c, \tilde{e}_0)) = l. \text{Ann}_{\mathcal{A}_{n+1}}((\tilde{e}_0, \gamma_n c)) = r. \text{Ann}_{\mathcal{A}_{n+1}}((\tilde{e}_0, \gamma_n c)) = \{0\}$ . Однако, если  $n \geq 3$ , то  $O_{\mathcal{A}_{n+1}}((c, \tilde{e}_0)) = O_{\mathcal{A}_{n+1}}((\tilde{e}_0, \gamma_n c)) \neq \{0\}$  и  $(c, \tilde{e}_0), (\tilde{e}_0, \gamma_n c) \in Z'_e(\mathcal{A}_{n+1})$ .

□

Далее мы изучаем отношение ортогональности между четырёхжды чисто мнимыми элементами.

**Обозначение.** Обозначим

$$\mathcal{A}_n^\circ = \mathcal{A}_n \{ \gamma_0, \dots, \gamma_{n-2}, \gamma_n \},$$

$$\mathcal{A}_n^\bullet = \mathcal{A}_n \{ \gamma_0, \dots, \gamma_{n-2}, \gamma_{n-1}, \gamma_n \}.$$

**Лемма 5.1.18.** Пусть  $a, b, c, d$  — линейно независимые элементы в  $\pm \mathcal{E}'_{n-1}$ .

- (1) Пусть  $x \in \{(a, b), (b, \gamma_n a), (\tilde{a}, \tilde{b}), (\tilde{b}, \gamma_n \tilde{a})\}$ ,  $y \in \{(c, d), (c, \gamma_n d), (\tilde{c}, \tilde{d}), (\tilde{c}, \gamma_n \tilde{d})\}$ . Тогда  $x$  и  $y$  ортогональны в  $\mathcal{A}_{n+1}$ , если и только если  $(a, b)$  и  $(c, d)$  ортогональны в  $\mathcal{A}_n^\circ$ .
- (2) Пусть  $x \in \{(a, \tilde{b}), (\tilde{b}, \gamma_n a), (\tilde{a}, \gamma_{n-1} b), (b, \gamma_{n-1} \gamma_n \tilde{a})\}$ ,  $y \in \{(c, \tilde{d}), (\tilde{d}, \gamma_n c), (\tilde{c}, \gamma_{n-1} d), (d, \gamma_{n-1} \gamma_n \tilde{c})\}$ . Тогда  $x$  и  $y$  ортогональны в  $\mathcal{A}_{n+1}$ , если и только если  $(a, b)$  и  $(c, d)$  ортогональны в  $\mathcal{A}_n^\bullet$ .

*Доказательство.*

- (1) Ясно, что  $(a, b)$  и  $(c, d)$  ортогональны в  $\mathcal{A}_{n+1}$ , если и только если  $(ac + \gamma_n \bar{d}b, da + b\bar{c}) = 0$ . Это условие выполнено в точности тогда, когда  $(a, b)$  и  $(c, d)$  ортогональны в  $\mathcal{A}_n^\circ$ . Равносильность остальных ортогональностей сразу следует из предложений 5.1.12 и 5.1.13.
- (2) По лемме 2.1.2,  $\tilde{b} = \gamma_{n-1}b$  и  $\gamma_{n-1}^2 = 1$ , поэтому  $(\tilde{a}, \tilde{b}) = (\tilde{a}, \gamma_{n-1}b)$  и  $(\tilde{b}, \widetilde{\gamma_n a}) = (\gamma_{n-1}b, \gamma_n \tilde{a}) = \gamma_{n-1}(b, \gamma_{n-1}\gamma_n \tilde{a})$ . Аналогично,  $(\tilde{c}, \tilde{d}) = (\tilde{c}, \gamma_{n-1}d)$  и  $(\tilde{d}, \widetilde{\gamma_n c}) = \gamma_{n-1}(d, \gamma_{n-1}\gamma_n \tilde{c})$ . Тогда, согласно предложениям 5.1.12 и 5.1.13, элементы  $x \in \{(a, \tilde{b}), (\tilde{b}, \gamma_n a), (\tilde{a}, \gamma_{n-1}b), (b, \gamma_{n-1}\gamma_n \tilde{a})\}$  и  $y \in \{(c, \tilde{d}), (\tilde{d}, \gamma_n c), (\tilde{c}, \gamma_{n-1}d), (d, \gamma_{n-1}\gamma_n \tilde{c})\}$  ортогональны в  $\mathcal{A}_{n+1}$  тогда и только тогда, когда  $(a, \tilde{b})$  и  $(c, \tilde{d})$  ортогональны в  $\mathcal{A}_{n+1}$ .

По лемме 5.1.2, любые два элемента из  $a, b, c, d$  вместе с  $\tilde{e}_0$  порождают октонионную подалгебру в  $\mathcal{A}_n$ . Отсюда  $(a, \tilde{b})$  и  $(c, \tilde{d})$  ортогональны в  $\mathcal{A}_{n+1}$ , если и только если

$$0 = (ac + \gamma_n \tilde{d}\tilde{b}, \tilde{d}a + \tilde{b}\bar{c}) = (ac + \gamma_{n-1}\gamma_n \bar{d}b, -(\widetilde{da + b\bar{c}})).$$

Поскольку в  $\mathcal{A}_n^\bullet$  имеем  $(a, b)(c, d) = (ac + \gamma_{n-1}\gamma_n \bar{d}b, da + b\bar{c})$ , это условие выполнено тогда и только тогда, когда  $(a, b)$  и  $(c, d)$  ортогональны в  $\mathcal{A}_n^\bullet$ . □

Теперь мы рассмотрим случай, когда четырежды чисто мнимый элемент  $(a, b)$  ортогонален некоторому элементу, одна из компонент которого равна либо  $\pm a$ , либо  $\pm \tilde{a}$  (тогда его другая компонента равна либо  $\pm b$ , либо  $\pm \tilde{b}$ ).

**Лемма 5.1.19.** Пусть  $a, b, \tilde{a}, \tilde{b}$  — линейно независимые элементы в  $\pm \mathcal{E}_n''$ .

- (1) Если  $\chi = 1$ , то элемент  $(a, b)$  ортогонален сам себе и элементу  $(b, \gamma_n a)$ .
- (2) Если  $\chi = -1$ , то элемент  $(a, b)$  ортогонален элементам  $(\tilde{a}, \tilde{b})$  и  $(\tilde{b}, \gamma_n \tilde{a})$ .

*Доказательство.* По лемме 5.1.11,

$$O_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, b)) = \left\{ \left( c, -\frac{(bc)a}{n(a)} \right) \mid \Re(c) = 0, b(ca) = \chi(bc)a \right\}.$$

Из леммы 5.1.2 следует, что  $\tilde{e}_0, a, b$  порождают октонионную подалгебру в  $\mathcal{A}_{n+1}$ . Отсюда для  $c \in \{\pm a, \pm b\}$  выполнено  $b(ca) = (bc)a$ , а для  $c \in \{\pm \tilde{a}, \pm \tilde{b}\}$  выполнено  $b(ca) = -(bc)a$ . Заметим, что во всех этих случаях  $b(ca) \neq 0$ . Таким образом, при  $\chi = 1$  нам нужно взять  $c \in \{a, b\}$ , а при  $\chi = -1$  нужно взять  $c \in \{\tilde{a}, \tilde{b}\}$ .

- (1) Если  $\chi = 1$ , то, по предложению 2.2.3, элемент  $(a, b)$  ортогонален сам себе. Отсюда, по предложению 5.1.12,  $(a, b)$  также ортогонален  $(b, \gamma_n a)$ . Заметим, что мы используем здесь только тот факт, что  $a, b \in \mathcal{E}_n'$ .

(2) Если  $\chi = -1$ , то рассмотрим сперва  $c = \tilde{a}$ . По лемме 5.1.2,

$$-\frac{(b\tilde{a})a}{n(a)} = -\frac{(\tilde{a}b)a}{n(a)} = -\frac{-n(a)\tilde{b}}{n(a)} = \tilde{b},$$

поэтому  $(a, b)$  ортогонален  $(\tilde{a}, \tilde{b})$ . Тогда, по предложению 5.1.12,  $(a, b)$  также ортогонален  $(\tilde{b}, \gamma_n \tilde{a})$ .

□

**Теорема 5.1.20.** Пусть  $n \geq 1$ ,  $(a, b) \in \mathcal{E}'_n \times (\pm\mathcal{E}_n)$ . Тогда  $(a, b) \in Z(\mathcal{A}_{n+1})$ , за исключением следующих случаев:

- (1)  $n \leq 2$  и  $\chi = -1$ ;
- (2)  $b = \pm a$  и  $\chi = \gamma_n = -1$ ;
- (3)  $b = \pm e_0$  и  $\chi = \gamma_n n(a) = -1$ .

*Доказательство.* Если  $\chi = 1$ , то  $(a, b)$  ортогонален сам себе по предложению 2.2.3, а значит,  $(a, b)$  является делителем нуля. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда  $\chi = -1$ :

- Если  $a, b, \tilde{a}, \tilde{b}$  — линейно независимые элементы в  $\pm\mathcal{E}''_n$ , то  $(a, b)$  является делителем нуля по лемме 5.1.19. Этот случай возможен только при  $n \geq 3$ .
- Если  $a \in \mathcal{E}'_n$  и  $b = \pm a$ , то, по лемме 5.1.14,  $(a, b)$  не является делителем нуля. Сюда входит также тот случай, когда  $a = \tilde{e}_0$  и  $b = \pm\tilde{e}_0$ .
- Если  $a \in \mathcal{E}''_n$  и  $b = \pm\tilde{a}$ , то, по лемме 5.1.15,  $(a, b)$  является делителем нуля, если и только если  $n \geq 3$ .
- Если  $b = \pm e_0$ , то, по лемме 5.1.16,  $(a, b)$  не является делителем нуля.
- Если  $a = \tilde{e}_0$  и  $b \in \pm\mathcal{E}''_n$ , то, по лемме 5.1.17,  $(a, b)$  является делителем нуля, если и только если  $n \geq 3$ .

□

Объединяя результаты лемм 5.1.14–5.1.17 и 5.1.19, мы получаем следующую теорему.

**Теорема 5.1.21.** Для каждого элемента  $(x, y) \in Z'_e(\mathcal{A}_{n+1})$  таблица 5.3 описывает, какие элементы  $Z'_e(\mathcal{A}_{n+1})$  ему ортогональны, в зависимости от  $\chi = \chi((x, y))$ . Мы используем здесь классификацию из предложения 5.1.9 и понятие особого элемента из определения 5.1.10.

Номер	Тип	Элемент	Ортогональные элементы из $Z'_e(\mathcal{A}_{n+1})$	
			$\chi = 1$	$\chi = -1$
5.1.21(1)	Тип (I)	$(a, \pm a)$ , $a \in \mathcal{E}'_n$ , $\chi = \gamma_n$	Он сам и все такие $(b, \mp b)$ , что $b \in \mathcal{E}'_n \setminus \{a\}$	Не делитель нуля
5.1.21(2)	Тип (II), кроме $(\tilde{e}_0, \pm e_0)$	$(\tilde{a}, \pm a)$ , $a \in \mathcal{E}''_n$ , $\chi = -\gamma_{n-1}\gamma_n$	Он сам, $(\tilde{e}_0, \pm e_0)$ и $(a, \pm \gamma_n \tilde{a})$	Все такие $(\tilde{b}, \mp b)$ , что $b \in \mathcal{E}''_n \setminus \{a, \tilde{a}\}$
5.1.21(3)	Типы (III)–(IV), $(\tilde{e}_0, \pm e_0)$	$(c, e_0)$ , $c \in \pm \mathcal{E}'_n$	Все $(a, b) \in Z'_e(\mathcal{A}_{n+1})$ с условием $ab = n(b)c$ . Это особый элемент	Не делитель нуля
5.1.21(4)	Типы (III)–(IV)	$(c, \tilde{e}_0)$ , $(\tilde{e}_0, \gamma_n c)$ , $c \in \pm \mathcal{E}''_n$ (их $\chi$ равны)	Они сами, и есть путь $(\tilde{c}, -\gamma_{n-1}e_0) - (c, \tilde{e}_0) - (\tilde{e}_0, \gamma_n c) - (\tilde{c}, \gamma_{n-1}e_0)$ . Это неособые элементы	Все такие $(a, b) \in Z'_e(\mathcal{A}_{n+1})$ , что $a \perp \mathbb{H}_c = \text{Lin}(e_0, c, \tilde{e}_0, \tilde{c})$ и $ab = \gamma_{n-1}n(b)\tilde{c}$ . Это особые элементы
5.1.21(5)	Типы (III)–(IV)	$(a, b)$ , $a, b, \tilde{a}, \tilde{b} \in \pm \mathcal{E}''_n$ линейно независимы	Он сам, $(b, \gamma_n a)$ , $(c, e_0)$ с условием $ab = n(b)c$ и неособые элементы из леммы 5.1.18	$(\tilde{a}, \tilde{b})$ и $(\tilde{b}, \gamma_n \tilde{a})$ , $(c, \tilde{e}_0)$ и $(\tilde{e}_0, \gamma_n c)$ с условием $ab = \gamma_{n-1}n(b)\tilde{c}$ и неособые элементы из леммы 5.1.18

Таблица 5.3: Условия ортогональности в  $Z'_e(\mathcal{A}_{n+1})$ .

## 5.2 Граф ортогональности на парах базисных элементов

### 5.2.1 Примеры в случае малых размерностей

Из предложения 1.4.8 следует, что при  $n \leq 2$  все вещественные алгебры Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_{n+1}$  изоморфны либо алгебрам главной последовательности  $\mathcal{M}_{n+1}$  ( $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$ ,  $\mathbb{O}$ ), либо контр-алгебрам  $\mathcal{H}_{n+1}$  ( $\hat{\mathbb{C}}$ ,  $\hat{\mathbb{H}}$ ,  $\hat{\mathbb{O}}$ ). Однако, если  $n \leq 2$ , то графы  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  могут оказаться неизоморфными для изоморфных алгебр  $\mathcal{A}_{n+1}$ . Мы обсудим этот вопрос подробнее в подразделе 5.3.2. В настоящем подразделе мы остановим своё внимание лишь на алгебрах  $\mathcal{M}_{n+1}$  и  $\mathcal{H}_{n+1}$ .

Хорошо известно, что при  $n \leq 2$  в алгебрах  $\mathcal{M}_{n+1}$  нет делителей нуля, поэтому их графы делителей нуля имеют пустое множество вершин. Граф  $\Gamma_{\mathcal{O}}(\hat{\mathbb{C}})$  состоит из двух вершин  $[(e_0, e_0)]$  и  $[(e_0, -e_0)]$ , то есть в  $\hat{\mathbb{H}}$  нет чисто мнимых делителей нуля, поэтому множество вершин  $V(\Gamma_e(\hat{\mathbb{C}}))$  является пустым. Графы  $\Gamma_e(\hat{\mathbb{H}})$  и  $\Gamma_e(\hat{\mathbb{O}})$  изображены на рисунках 5.4 и 5.5, соответственно.

Теперь мы рассмотрим три конкретных алгебры Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_{n+1}$  с условием  $n \geq 3$ , а именно,  $\mathbb{S} = \mathcal{M}_4$ ,  $\hat{\mathbb{S}} = \mathcal{H}_4$  и  $\mathcal{M}_5$ .

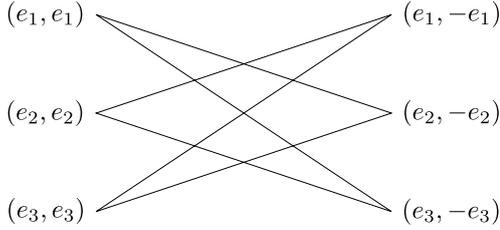
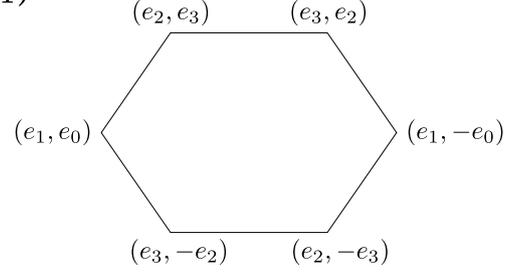
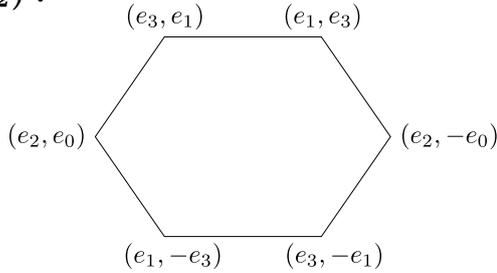
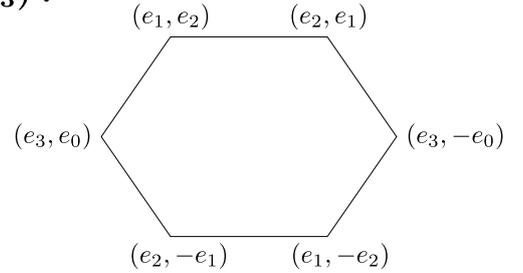
**Пример 5.2.1.** Как было показано в подразделе 3.2.3, любая компонента связности  $C(ab)$

$C(e_0) :$ 

$$\begin{array}{cc} (e_1, e_1) & (e_1, -e_1) \\ \bullet & \bullet \end{array}$$

 $C(e_1) :$ 

$$\begin{array}{cc} (e_1, e_0) & (e_1, -e_0) \\ \bullet & \bullet \end{array}$$

Рис. 5.4: Граф  $\Gamma_e(\hat{\mathbb{H}})$ . $C(e_0) :$  $C(e_1) :$  $C(e_2) :$  $C(e_3) :$ Рис. 5.5: Граф  $\Gamma_e(\hat{\mathbb{O}})$ .

графа  $\Gamma_e(\mathbb{S})$  является двойным шестиугольником, см. рисунок 5.6. По предложению 3.2.1, здесь  $e_0, a, b, c, d, ab, ac, ad$  образуют ортонормированный базис в  $\mathbb{O}$ . Кроме того, из леммы 3.2.2 следует, что  $ab = dc = (ac)(ad)$ . Целиком граф  $\Gamma_e(\mathbb{S})$  уже был изображён на рисунке 3.3, однако для удобства мы приводим его изображение снова на рисунке 5.10.

**Замечание 5.2.2.** Мы будем использовать те же обозначения при описании компонент связности  $\Gamma_e(\hat{\mathbb{S}})$  и  $\Gamma_e(\mathcal{M}_5)$ . Пусть  $x \neq e_0$  — некоторый стандартный базисный элемент  $\mathbb{O}$ . Существуют такие  $a, b, c, d \in \mathcal{E}'_3$ , что  $x = ab$  и  $(a, b)(c, d) = 0$  в  $\mathbb{S}$ . Тогда  $\{e_0, a, b, c, d, ac, ad, x\} \subseteq \pm\mathcal{E}_3$  — ортонормированный базис в  $\mathbb{O}$ . Элемент  $x$  может быть получен умножением следующих пар элементов  $\pm\mathcal{E}'_3$ , и только их:

$$x = ab = b \cdot (-a) = dc = c \cdot (-d) = (ac)(ad) = (ad) \cdot (-ac).$$

**Пример 5.2.3.** По следствию 4.1.2, в случае алгебры контрсденионов для любого  $(x, y) \in$

$Z'_e(\hat{\mathbb{S}})$  всегда выполнено  $n(x) = n(y) = 1$ , поэтому  $\chi = \gamma_3 \frac{n(x)}{n(y)} = 1$ . По лемме 4.1.7,

$$O_{\hat{\mathbb{S}}}((x, y)) = \left\{ (z, -(yz)x) \mid \Re(z) = 0, y(zx) = (yz)x \right\}.$$

Нас интересуют только  $z \in \mathcal{E}_3$ . Если  $y = \pm x$  или  $y = e_0$ , то можно взять любое  $z \in \mathcal{E}'_n$ . В противном случае,  $x$  и  $y$  порождают кватернионную подалгебру в  $\mathbb{O}$ , и тогда нам достаточно рассмотреть  $z \in \{x, y, xy\}$ .

Компонента связности  $C(e_0)$  содержит элементы вида  $(a, \pm a)$  для  $a \in \mathcal{E}'_3$ , причём  $(a, a)$  соединён ребром с  $(b, -b)$ , если и только если  $a \neq b$ , см. теорему 5.1.21(1). Мы будем называть её *почти полным (7, 7)-двудольным графом*.

Компонента связности  $C(ab)$  изображена на рисунке 5.7, где  $a, b, c, d$  определены в замечании 5.2.2. Её вид следует из теорем 5.1.21(3) и 5.1.21(5). Компоненты связности такого вида мы будем называть *связками шестиугольников*. Граф  $\Gamma_e(\mathbb{S})$  изображён на рисунке 5.9.

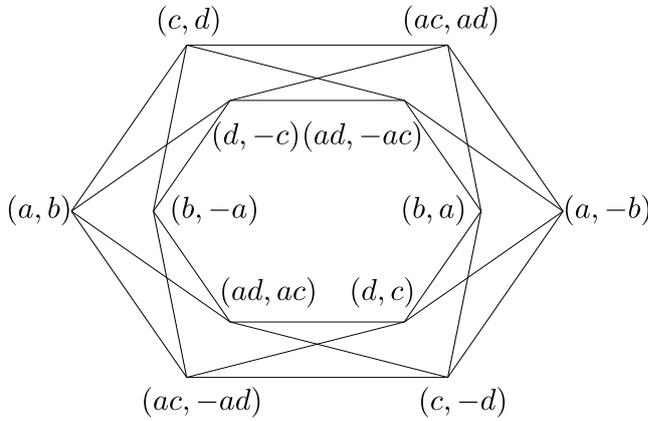


Рис. 5.6: Двойной шестиугольник.

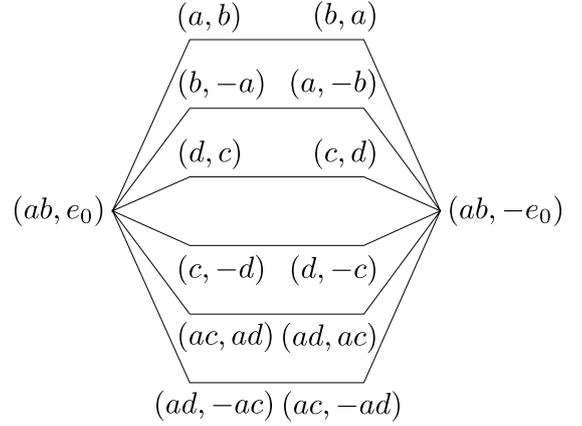


Рис. 5.7: Связка шестиугольников.

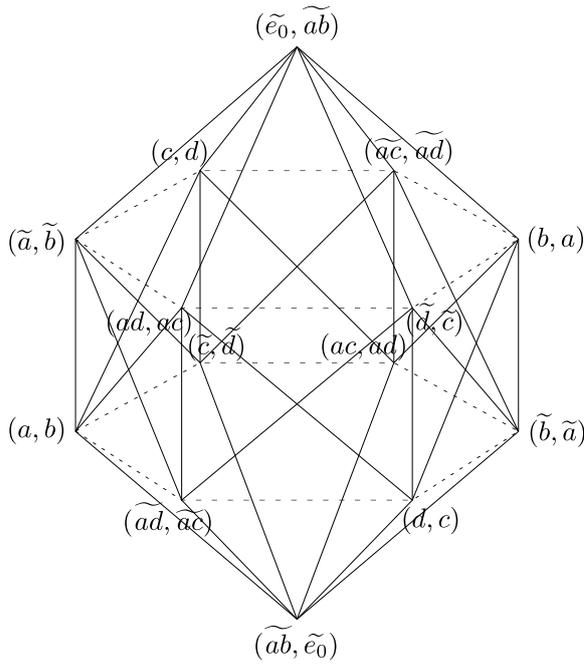
**Пример 5.2.4.** Наконец мы рассмотрим  $\mathcal{M}_5$ , см. рисунок 5.8. Заметим, что, по лемме 3.1.1(3), у любой вершины  $(x, y)$  в  $\Gamma_O(\mathcal{M}_n)$  соседи всегда те же, что и у вершины  $(y, -x)$ . Кроме того,  $(x, y)$  и  $(y, -x)$  никогда не соединены ребром. Чтобы сделать изображение  $\Gamma_e(\mathcal{M}_5)$  более понятным, из каждой такой пары вершин мы выбираем тот элемент, обе компоненты которого имеют знак плюс, например,  $(x, y)$ , и заменяем эту пару одной вершиной  $(x, y)$ . Так, двойной шестиугольник на рисунке 5.6 при такой замене упрощается до

$$(a, b) \leftrightarrow (c, d) \leftrightarrow (ac, ad) \leftrightarrow (b, a) \leftrightarrow (d, c) \leftrightarrow (ad, ac) \leftrightarrow (a, b).$$

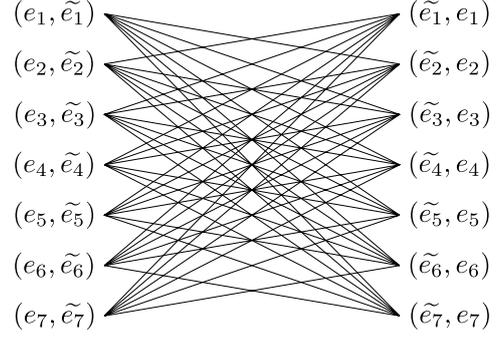
По теореме 5.1.21(1),  $\Gamma_e(\mathcal{M}_5)$  не имеет вершин типа (I), поэтому его подграф  $C(e_0)$  имеет пустое множество вершин. Явный вид  $C(\tilde{e}_0)$  следует из теоремы 5.1.21(2), поскольку для элементов типа (II) выполнено  $\chi = -\gamma_3\gamma_4 = -(-1)(-1) = -1$ . Заметим, что для  $b = \tilde{c}$  имеем  $(\tilde{b}, \mp b) = (\tilde{c}, \mp \tilde{c}) = (\gamma_3 c, \mp \tilde{c}) = -(c, \pm \tilde{c})$ .

Рассмотрим некоторую компоненту связности типа (III), скажем,  $C(ab)$ , где  $a, b, c, d$  определены в замечании 5.2.2. Тогда  $\mathcal{A}_4^\circ = \mathcal{A}_4\{-1, -1, -1, -1\} = \mathbb{S}$ , поэтому, по лемме 5.1.18,

$C(ab)$  :



$C(e_0)$  :



$C(ab)$  :

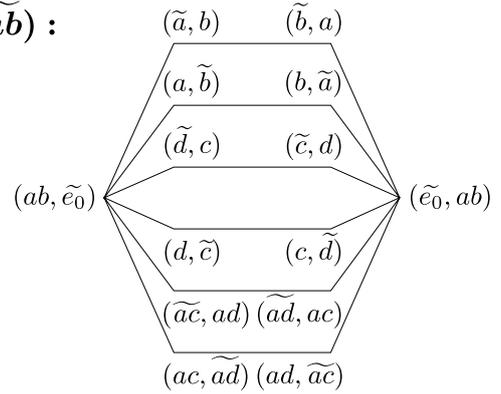


Рис. 5.8: Компоненты связности  $\Gamma_e(\mathcal{M}_5)$ .

умножение в  $\mathcal{M}_5$  сводится к умножению в  $\mathbb{S}$ . Остаётся воспользоваться рисунком 5.6, чтобы получить шестиугольники посередине, и теоремой 5.1.21(4) и 5.1.21(5), чтобы получить дополнительные рёбра, которые выполняют две важных функции. Во-первых, они соединяют все элементы либо с  $(\tilde{e}_0, \tilde{ab})$ , либо с  $(\tilde{ab}, \tilde{e}_0)$ . Во-вторых, если  $x, y \in \mathcal{E}'_3$ , то они соединяют ребром  $(x, y)$  и  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ . Когда мы проходим по ребру, изображённому сплошной линией, произведение двух компонент меняет знак, как это всегда происходит в случае седенионов, см. лемму 3.2.2. Когда мы проходим по штрихованному ребру, произведение компонент сохраняется. Согласно лемме 5.1.5, других возможностей для изменения произведения компонент нет.

Пусть  $C(\tilde{ab})$  — компонента связности типа (IV). Так как  $\mathcal{A}_4^\bullet = \mathcal{A}_4\{-1, -1, -1, (-1)(-1)\} = \hat{\mathbb{S}}$ , по лемме 5.1.18, умножение в  $\mathcal{M}_5$  сводится к умножению в  $\hat{\mathbb{S}}$ . Однако  $\Gamma_e(\hat{\mathbb{S}})$  не содержит дважды чисто мнимых элементов с линейно независимыми компонентами, которые были бы соединены ребром. Поэтому, чтобы получить  $C(\tilde{ab})$ , мы применяем теорему 5.1.21(4) и 5.1.21(5). Заметим, что элемент  $(\tilde{a}, b)$  ортогонален элементу  $(\gamma_4 \tilde{b}, \tilde{a}) = (\gamma_4 \tilde{b}, \gamma_3 a) = -(\tilde{b}, a)$ .

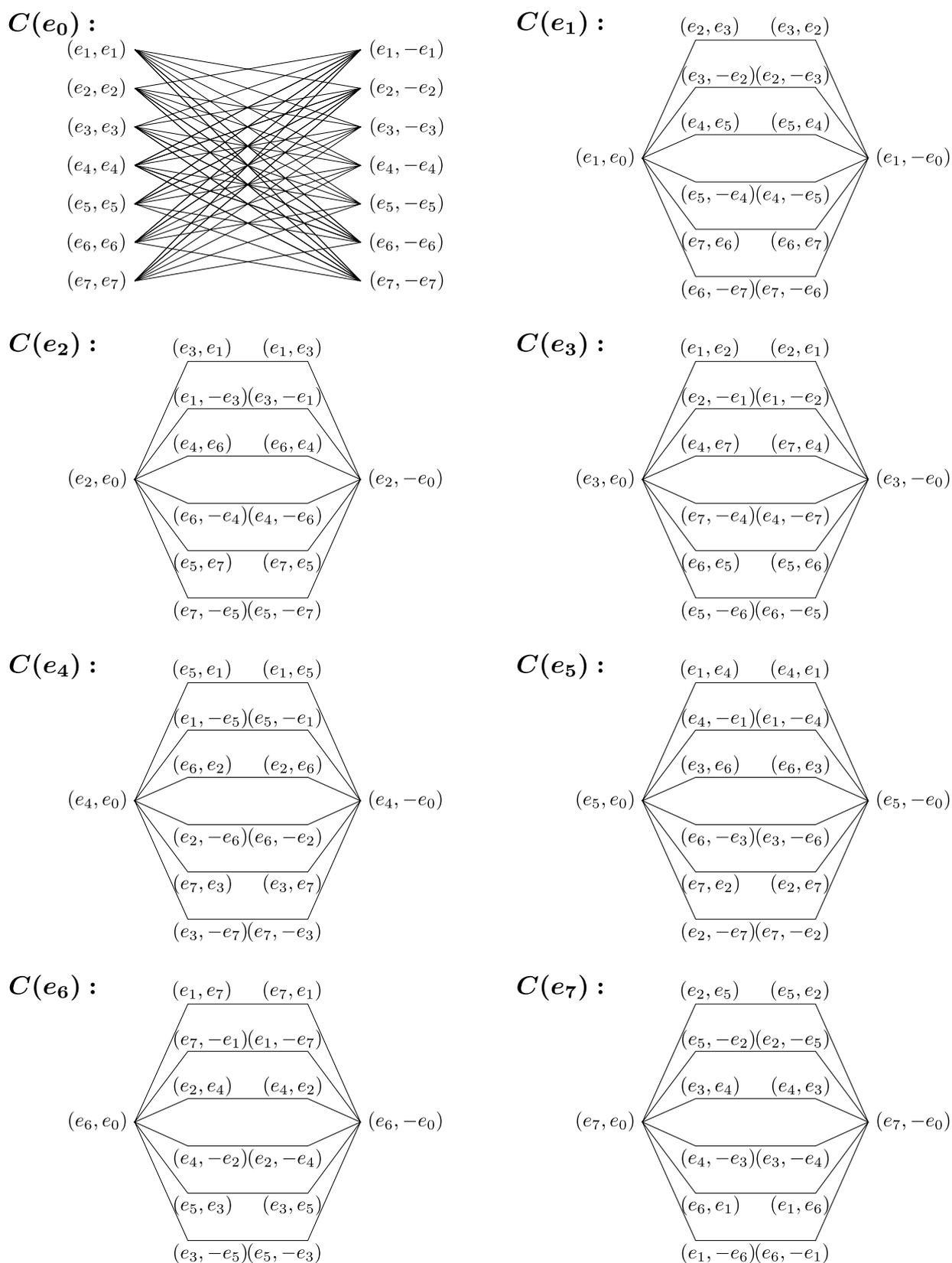


Рис. 5.9: Граф  $\Gamma_e(\hat{\mathbb{S}})$ .

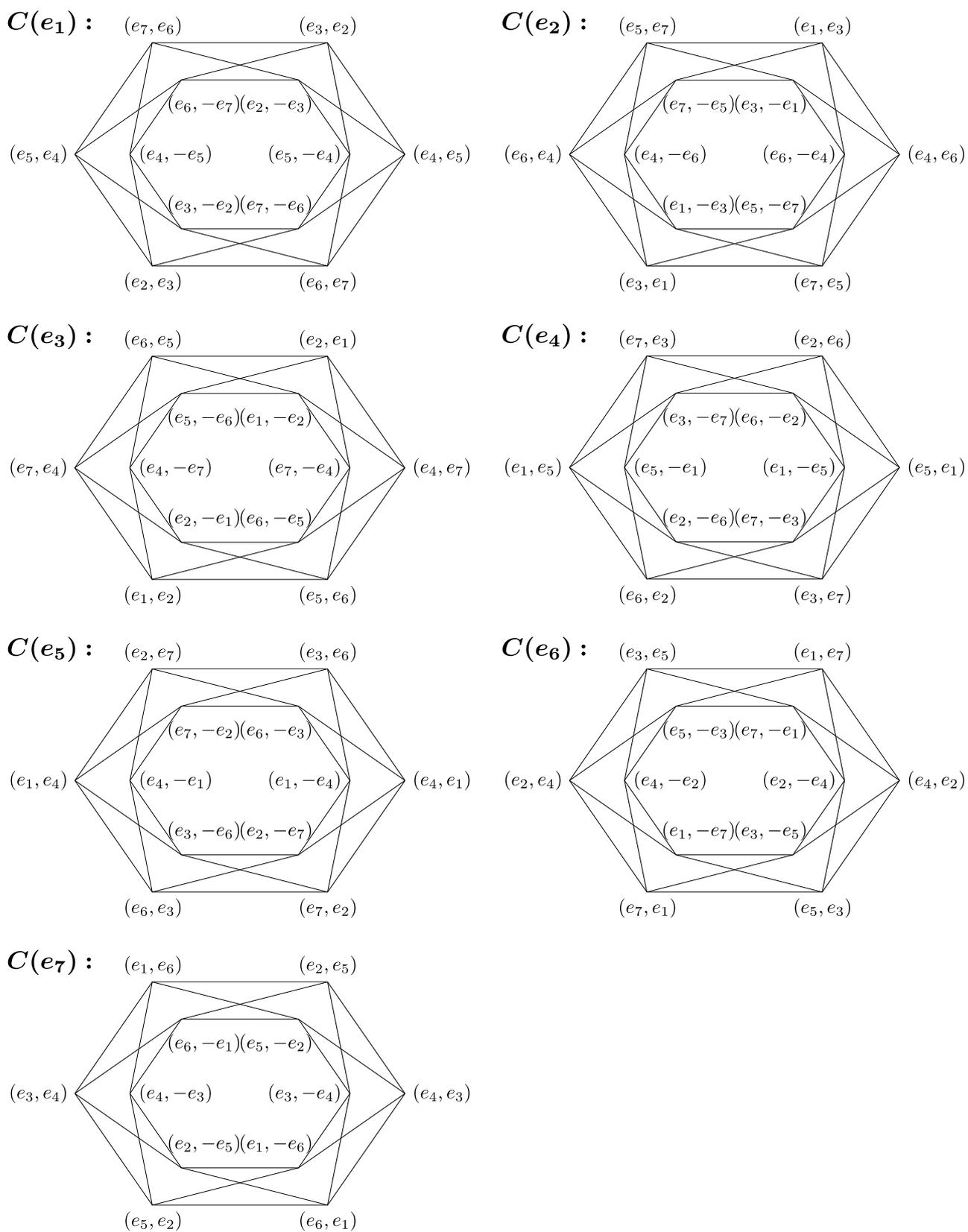


Рис. 5.10: Граф  $\Gamma_e(\mathbb{S})$ .

## 5.2.2 Структура графа ортогональности

В подразделе 5.2.1 мы описали некоторые из графов  $\Gamma_e(\mathcal{M}_{n+1})$  и  $\Gamma_e(\mathcal{H}_{n+1})$ . Теперь мы обобщим эти результаты на случай компонент связности графа  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  произвольной вещественной алгебры Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_{n+1}$  и найдём их диаметры.

Сперва мы рассмотрим элементы типов (I) и (II) из предложения 5.1.9. Обозначим  $N = 2^{n-1} - 1$ .

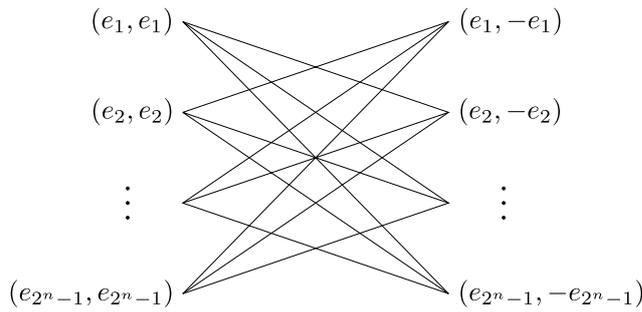
**Лемма 5.2.5.**  $C(e_0)$  и  $C(\tilde{e}_0)$  изображены на рисунке 5.11 для различных значений  $\gamma_n$  и  $\gamma_{n-1}\gamma_n$ . Отметим, что если  $\gamma_n = -1$ , то  $C(e_0)$  имеет пустое множество вершин. В случае  $n \geq 3$  подграфы  $C(e_0)$  и  $C(\tilde{e}_0)$ , если их множества вершин непусты, являются компонентами связности и имеют диаметр 3.

*Доказательство.* Явный вид  $C(e_0)$  сразу следует из теоремы 5.1.21(1).

Чтобы получить  $C(\tilde{e}_0)$ , мы применяем теорему 5.1.21(2) и 5.1.21(3). Случай, когда  $\gamma_{n-1}\gamma_n = -1$ , очевиден. В случае, когда  $\gamma_{n-1}\gamma_n = 1$ , остаётся заметить, что для  $b = \tilde{c}$  выполнено  $(\tilde{b}, \mp b) = (\tilde{c}, \mp \tilde{c}) = (\gamma_{n-1}c, \mp \tilde{c}) = \gamma_n(c, \mp \gamma_n \tilde{c})$ .

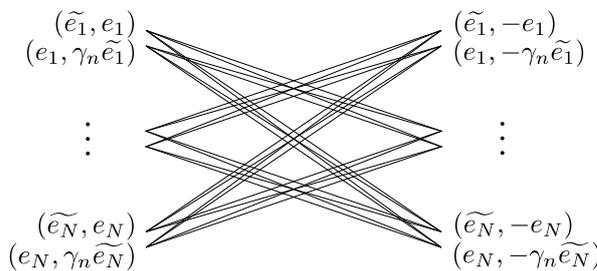
Связность и значения диаметров проверяются непосредственно. □

$C(e_0), \gamma_n = 1 :$



$C(e_0), \gamma_n = -1 :$

$C(\tilde{e}_0), \gamma_{n-1}\gamma_n = 1 :$



$C(\tilde{e}_0), \gamma_{n-1}\gamma_n = -1 :$

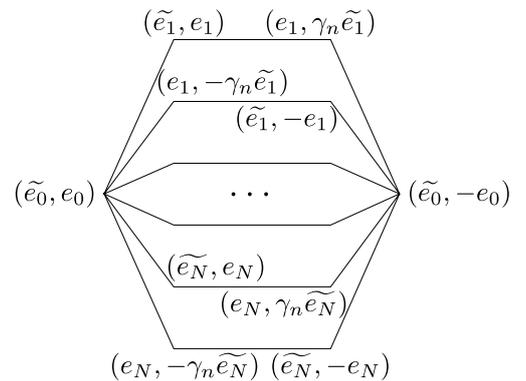


Рис. 5.11:  $C(e_0)$  и  $C(\tilde{e}_0)$  для разных значений  $\gamma_{n-1}$  и  $\gamma_n$ .

Теперь мы покажем, что при  $n \geq 3$  и любом  $x \in \mathcal{E}'_{n-1}$  подграфы  $C(x)$  и  $C(\tilde{x})$  также являются компонентами связности  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$ , и их диаметры равны 3. Напомним, что понятие особых элементов было введено в определении 5.1.10.

**Теорема 5.2.6.** Пусть  $x \in \mathcal{E}'_{n-1}$ . Структура подграфов  $C(x)$  и  $C(\tilde{x})$  изображена на рисунке 5.12 для различных значений  $\chi$ . Здесь  $a, b, c, d \in \pm\mathcal{E}'_{n-1}$  — произвольные элементы, такие, что  $a, b, c, d, x$  линейно независимы,  $ab = n(b)x$  и  $cd = \pm n(d)x$ , см. предложения 5.1.8 и 5.1.9. Штрихованное ребро соединяет две вершины в  $C(x)$ , если и только если  $(a, b)$  и  $(c, d)$  ортогональны в  $\mathcal{A}_n^\circ$ , тогда как пунктирное ребро соединяет две вершины в  $C(\tilde{x})$ , если и только если  $(a, b)$  и  $(c, d)$  ортогональны в  $\mathcal{A}_n^\bullet$ , см. лемму 5.1.18.

*Доказательство.* Мы рассматриваем все случаи независимо. Заметим, что если  $a, b \in \pm\mathcal{E}'_{n-1}$  таковы, что  $(a, b) \in C(x)$  или  $(a, \tilde{b}) \in C(\tilde{x})$ , то  $ab = \pm x \neq \pm e_0$ . Поэтому  $e_0, a, b$  линейно независимы, а значит,  $a$  и  $b$  удовлетворяют условиям леммы 5.1.2, то есть  $\tilde{e}_0, a, b$  порождают октонионную подалгебру  $\mathbb{O}_{a,b}$ .

(1) Пусть  $\chi = -1$  для  $C(x)$ . По теореме 5.1.21(4),  $(\tilde{x}, \tilde{e}_0)$  и  $(\tilde{e}_0, \gamma_n \tilde{x})$  ортогональны тем  $(a, b) \in Z'_e(\mathcal{A}_{n+1})$ , которые удовлетворяют условиям  $a \perp \text{Lin}(e_0, x, \tilde{e}_0, \tilde{x})$  и  $ab = \gamma_{n-1} n(b) \tilde{x} = (\gamma_{n-1})^2 n(b)x = n(b)x$ . Теперь мы предположим, что  $a, b \in \pm\mathcal{E}'_{n-1}$  и  $ab = n(b)x$ , тогда элементы  $(\tilde{x}, \tilde{e}_0)$  и  $(a, b)$  ортогональны. Применяя теорему 2.2.12 к элементам  $(\tilde{x}, \tilde{e}_0)$  и  $(a, b)$ , мы получаем следующий шестиугольник:

$$(\tilde{x}, \tilde{e}_0) \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (\tilde{a}, \tilde{b}) \leftrightarrow (\tilde{x}, -\tilde{e}_0) \leftrightarrow (a, -b) \leftrightarrow (\tilde{a}, -\tilde{b}) \leftrightarrow (\tilde{x}, \tilde{e}_0).$$

Так как  $\chi = -1$  и все элементы этого шестиугольника дважды чисто мнимые, из предложения 5.1.12 следует, что у элемента  $(A, B)$  те же соседи, что и у элемента  $(B, \gamma_n A)$ . Отсюда мы получаем двойной шестиугольник, состоящий из элементов  $(\tilde{x}, \pm\tilde{e}_0)$ ,  $(\tilde{e}_0, \pm\gamma_n \tilde{x})$ ,  $(a, \pm b)$ ,  $(\tilde{a}, \pm\tilde{b})$ ,  $(b, \pm\gamma_n a)$  и  $(\tilde{b}, \pm\tilde{a})$ .

Отметим, что мы также могли получить этот двойной шестиугольник с помощью теоремы 5.1.21(4) и 5.1.21(5). А именно, мы могли явно найти, какие пары его вершин соединены между собой ребром, а какие — нет.

Пусть теперь  $a, b, c, d \in \pm\mathcal{E}'_{n-1}$  линейно независимы. Применим лемму 5.1.18, которая утверждает, что любой элемент множества  $\{(a, b), (b, \gamma_n a), (\tilde{a}, \tilde{b}), (\tilde{b}, \gamma_n \tilde{a})\}$  ортогонален любому элементу множества  $\{(c, d), (c, \gamma_n d), (\tilde{c}, \tilde{d}), (\tilde{c}, \gamma_n \tilde{d})\}$ , если и только если  $(a, b)$  и  $(c, d)$  ортогональны в  $\mathcal{A}_n^\circ$ . Мы изображаем эти рёбра штрихованными линиями.

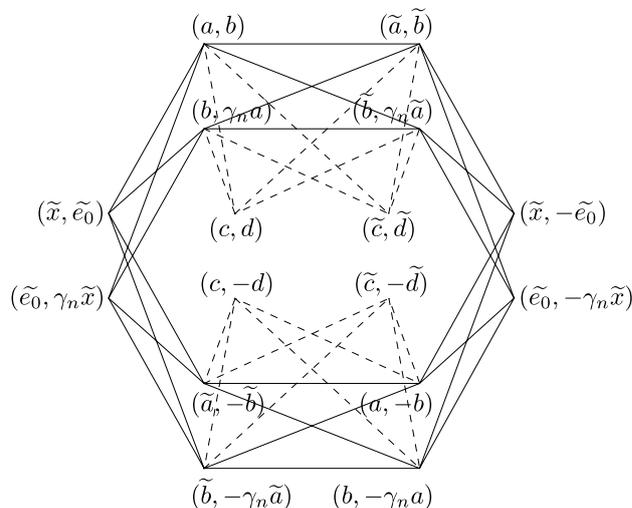
Заметим, что  $cd = \pm ab$ , поэтому  $cd = \pm n(d)x$ . Значит,  $(c, d)$  ортогонален либо элементу  $(\tilde{x}, \tilde{e}_0)$ , либо элементу  $(\tilde{x}, -\tilde{e}_0)$ . Тогда мы можем получить двойной шестиугольник, аналогичный тому, который содержит  $(a, b)$ , где  $(c, d)$  играет роль либо элемента  $(a, b)$ , либо элемента  $(a, -b)$ .

(2) Пусть  $\chi = 1$  для  $C(x)$ . По теореме 5.1.21(3), элемент  $(x, e_0)$  ортогонален тем  $(a, b) \in Z'_e(\mathcal{A}_{n+1})$ , для которых  $ab = n(b)x$ . Пусть теперь  $a, b \in \pm\mathcal{E}'_{n-1}$  и  $ab = n(b)x$ . Применяя теорему 2.2.12 к элементам  $(x, e_0)$  и  $(a, b)$ , получим следующий шестиугольник:

$$(x, e_0) \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (b, \gamma_n a) \leftrightarrow (x, -e_0) \leftrightarrow (a, -b) \leftrightarrow (b, -\gamma_n a) \leftrightarrow (x, e_0).$$

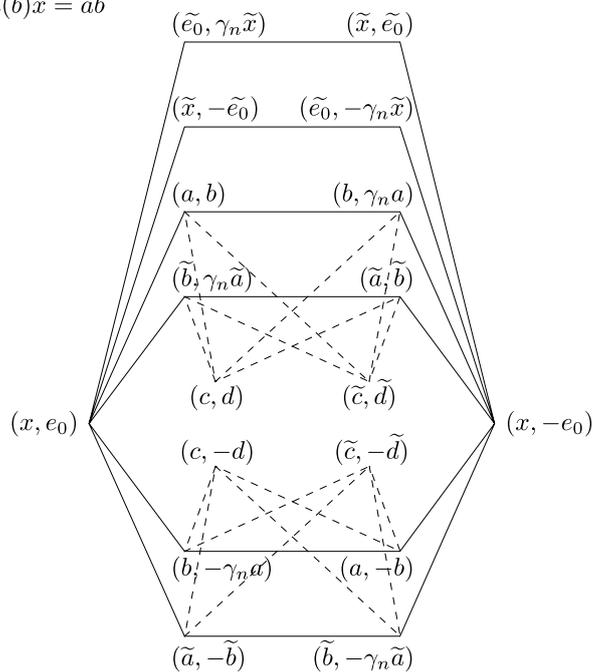
$C(x), \chi = -1 :$

$n(b)x = ab$



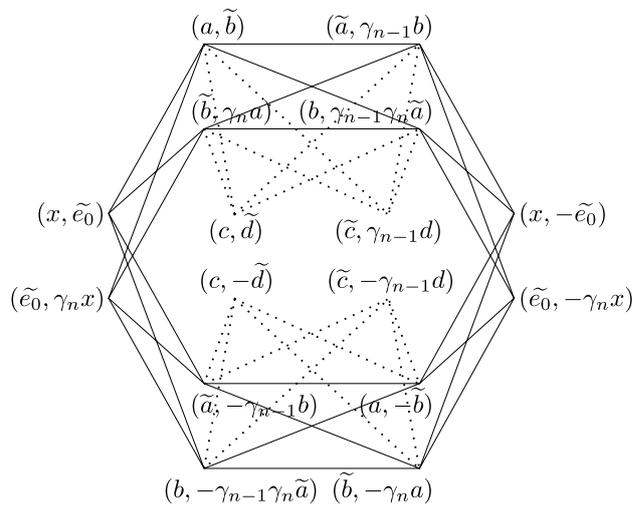
$C(x), \chi = 1 :$

$n(b)x = ab$



$C(x-tilde), \chi = -1 :$

$n(b)x = ab$



$C(x-tilde), \chi = 1 :$

$n(b)x = ab$

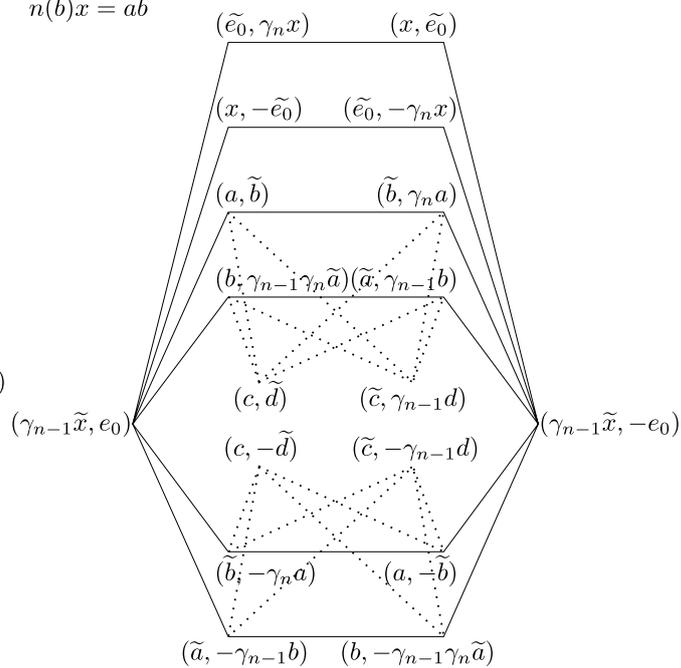


Рис. 5.12: Компоненты связности типов (III) и (IV) для различных значений  $\chi$ .

Заметим также, что, по лемме 5.1.2,  $\tilde{a}\tilde{b} = -n(\tilde{e}_0)ab = -n(\tilde{e}_0)n(b)x = -n(\tilde{b})x$ , поэтому  $(\tilde{a}, \tilde{b})$  ортогонален  $(x, -e_0)$ . Аналогично мы получаем шестиугольник

$$(x, -e_0) \leftrightarrow (\tilde{a}, \tilde{b}) \leftrightarrow (\tilde{b}, \gamma_n \tilde{a}) \leftrightarrow (x, e_0) \leftrightarrow (\tilde{a}, -\tilde{b}) \leftrightarrow (\tilde{b}, -\gamma_n \tilde{a}) \leftrightarrow (x, -e_0).$$

Из теоремы 5.1.21(5) следует, что других рёбер между вершинами этих двух шестиугольников нет.

Пусть  $a, b, c, d \in \pm\mathcal{E}'_{n-1}$  линейно независимы. По лемме 5.1.18, любой элемент множества  $\{(a, b), (b, \gamma_n a), (\tilde{a}, \tilde{b}), (\tilde{b}, \gamma_n \tilde{a})\}$  ортогонален любому элементу множества  $\{(c, d), (c, \gamma_n d), (\tilde{c}, \tilde{d}), (\tilde{c}, \gamma_n \tilde{d})\}$ , если и только если  $(a, b)$  и  $(c, d)$  ортогональны в  $\mathcal{A}_n^\circ$ .

Поскольку  $cd = \pm n(d)x$ , элемент  $(c, d)$  ортогонален либо элементу  $(x, e_0)$ , либо элементу  $(x, -e_0)$ . Таким образом, мы можем получить два шестиугольника, аналогичных тем, которые содержат элементы  $(a, b)$  и  $(\tilde{a}, \tilde{b})$ .

Применим теорему 5.1.21(4), чтобы получить шестиугольник, содержащий  $(\tilde{x}, \tilde{e}_0)$ :

$$(x, -e_0) \leftrightarrow (\tilde{x}, \tilde{e}_0) \leftrightarrow (\tilde{e}_0, \gamma_n \tilde{x}) \leftrightarrow (x, e_0) \leftrightarrow (\tilde{x}, -\tilde{e}_0) \leftrightarrow (\tilde{e}_0, -\gamma_n \tilde{x}) \leftrightarrow (x, -e_0).$$

Элементы  $(\tilde{x}, \pm\tilde{e}_0)$  и  $(\tilde{e}_0, \pm\gamma_n \tilde{x})$  не соединены ни с какими другими вершинами подграфа  $C(x)$ .

- (3) Пусть  $\chi = -1$  для  $C(\tilde{x})$ . Предположим, что  $a, b \in \pm\mathcal{E}'_{n-1}$  таковы, что  $(x, \tilde{e}_0)$  и  $(a, \tilde{b})$  ортогональны. По теореме 5.1.21(4), это равносильно тому, что  $a \perp \text{Lin}(e_0, x, \tilde{e}_0, \tilde{x})$  и  $-\tilde{a}\tilde{b} = \tilde{a}\tilde{b} = \gamma_{n-1}n(\tilde{b})\tilde{x} = \gamma_{n-1}n(b)n(\tilde{e}_0)\tilde{x} = -(\gamma_{n-1})^2n(b)\tilde{x} = -n(b)\tilde{x}$ , то есть  $ab = n(b)x$ . Применяя теорему 2.2.12 к элементам  $(x, \tilde{e}_0)$  и  $(a, \tilde{b})$ , мы получаем следующий шестиугольник:

$$(x, \tilde{e}_0) \leftrightarrow (a, \tilde{b}) \leftrightarrow (\tilde{a}, \gamma_{n-1}b) \leftrightarrow (x, -\tilde{e}_0) \leftrightarrow (a, -\tilde{b}) \leftrightarrow (\tilde{a}, -\gamma_{n-1}b) \leftrightarrow (x, \tilde{e}_0).$$

Оставшаяся часть доказательства аналогична случаю  $C(x)$  при  $\chi = -1$ , за одним лишь исключением. Пусть  $a, b, c, d \in \pm\mathcal{E}'_{n-1}$  линейно независимы. По лемме 5.1.18, любой элемент множества  $\{(a, \tilde{b}), (\tilde{b}, \gamma_{n-1}a), (\tilde{a}, \gamma_{n-1}b), (b, \gamma_{n-1}\gamma_n \tilde{a})\}$  ортогонален любому элементу множества  $\{(c, \tilde{d}), (\tilde{d}, \gamma_{n-1}c), (\tilde{c}, \gamma_{n-1}d), (d, \gamma_{n-1}\gamma_n \tilde{c})\}$ , если и только если  $(a, b)$  и  $(c, d)$  ортогональны в  $\mathcal{A}_n^\bullet$ . Мы изображаем эти рёбра пунктирными линиями.

- (4) Пусть  $\chi = 1$  для  $C(\tilde{x})$ . Предположим, что  $a, b \in \pm\mathcal{E}'_{n-1}$  таковы, что  $(\gamma_{n-1}\tilde{x}, e_0)$  и  $(a, \tilde{b})$  ортогональны. По теореме 5.1.21(3), это равносильно тому, что  $-\tilde{a}\tilde{b} = \tilde{a}\tilde{b} = n(\tilde{b})(\gamma_{n-1}\tilde{x}) = -n(b)\tilde{x}$ , то есть  $ab = n(b)x$ . Применяя теорему 2.2.12 к элементам  $(\gamma_{n-1}\tilde{x}, e_0)$  и  $(a, \tilde{b})$ , мы получаем следующий шестиугольник:

$$(\gamma_{n-1}\tilde{x}, e_0) \leftrightarrow (a, \tilde{b}) \leftrightarrow (\tilde{b}, \gamma_n a) \leftrightarrow (\gamma_{n-1}\tilde{x}, -e_0) \leftrightarrow (a, -\tilde{b}) \leftrightarrow (\tilde{b}, -\gamma_n a) \leftrightarrow (\gamma_{n-1}\tilde{x}, e_0).$$

Заметим также, что, по лемме 5.1.2,  $\tilde{a}(\gamma_{n-1}b) = -\gamma_{n-1}\tilde{a}\tilde{b} = n(b)(-\gamma_{n-1}\tilde{x})$ . Тогда, по теореме 5.1.21(3), элемент  $(\tilde{a}, \gamma_{n-1}b)$  ортогонален элементу  $(\gamma_{n-1}\tilde{x}, -e_0)$ . Аналогично мы по-

лучаем шестиугольник

$$\begin{aligned} (\gamma_{n-1}\tilde{x}, -e_0) \leftrightarrow (\tilde{a}, \gamma_{n-1}b) \leftrightarrow (b, \gamma_{n-1}\gamma_n\tilde{a}) \leftrightarrow (\gamma_{n-1}\tilde{x}, e_0) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\tilde{a}, -\gamma_{n-1}b) \leftrightarrow (b, -\gamma_{n-1}\gamma_n\tilde{a}) \leftrightarrow (\gamma_{n-1}\tilde{x}, -e_0). \end{aligned}$$

Применяя теорему 5.1.21(4), мы также получаем шестиугольник, содержащий  $(x, \tilde{e}_0)$ :

$$\begin{aligned} (\gamma_{n-1}\tilde{x}, -e_0) \leftrightarrow (x, \tilde{e}_0) \leftrightarrow (\tilde{e}_0, \gamma_n x) \leftrightarrow (\gamma_{n-1}\tilde{x}, e_0) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (x, -\tilde{e}_0) \leftrightarrow (\tilde{e}_0, -\gamma_n x) \leftrightarrow (\gamma_{n-1}\tilde{x}, -e_0). \end{aligned}$$

Пусть теперь  $a, b, c, d \in \pm\mathcal{E}'_{n-1}$  линейно независимы. Тогда, по лемме 5.1.18, любой элемент множества  $\{(a, \tilde{b}), (\tilde{b}, \gamma_n a), (\tilde{a}, \gamma_{n-1}b), (b, \gamma_{n-1}\gamma_n\tilde{a})\}$  ортогонален любому элементу множества  $\{(c, \tilde{d}), (\tilde{d}, \gamma_n c), (\tilde{c}, \gamma_{n-1}d), (d, \gamma_{n-1}\gamma_n\tilde{c})\}$ , если и только если  $(a, b)$  и  $(c, d)$  ортогональны в  $\mathcal{A}_n^\bullet$ .

□

**Замечание 5.2.7.** Элементы  $(d, \pm\gamma_n c)$  и  $(\tilde{d}, \pm\gamma_n \tilde{c})$ , а также  $(\tilde{d}, \pm\gamma_n c)$  и  $(d, \pm\gamma_{n-1}\gamma_n \tilde{c})$  не изображены на рисунках подграфов  $C(x)$  и  $C(\tilde{x})$ , соответственно. Однако их соседи, не являющиеся особыми элементами, могут быть описаны с помощью леммы 5.1.18.

По аналогии с  $(a, \pm b)$  и  $(\tilde{a}, \pm \tilde{b})$  мы получаем, что, в случае  $C(x)$ , элементы  $(c, d)$  и  $(\tilde{c}, -\tilde{d})$  соединены рёбрами с особыми элементами с одной стороны, тогда как  $(c, -d)$  и  $(\tilde{c}, \tilde{d})$  соединены рёбрами с особыми элементами с другой стороны. В случае  $C(\tilde{x})$ , элементы  $(c, \tilde{d})$  и  $(\tilde{c}, -\gamma_{n-1}d)$  соединены рёбрами с особыми элементами с одной стороны, тогда как  $(c, -\tilde{d})$  и  $(\tilde{c}, \gamma_{n-1}d)$  соединены рёбрами с особыми элементами с другой стороны, снова по аналогии с  $(a, \pm b)$  и  $(\tilde{a}, \pm \tilde{b})$ .

**Следствие 5.2.8.** Если  $n \geq 3$ , то диаметры подграфов  $C(x)$  и  $C(\tilde{x})$  равны 3.

*Доказательство.* Из теоремы 5.2.6 следует, что любой неособый элемент  $A$  принадлежит либо шестиугольнику (при  $\chi = 1$ ), либо двойному шестиугольнику (при  $\chi = -1$ ), две противоположные вершины (или пары вершин) которого являются особыми. Таким образом,  $A$  лежит на расстоянии 1 от одного особого элемента (или пары элементов) и на расстоянии 2 от другого особого элемента (или пары элементов).

Чтобы соединить неособые элементы  $A$  и  $B$ , мы сперва выбираем ближайший особый элемент к  $A$  (на расстоянии 1), а затем двигаемся от него к  $B$  (и при этом проходим расстояние не больше 2), отсюда  $d(A, B) \leq 3$ . Поскольку  $n \geq 3$ , из теоремы 5.1.20 следует, что неособые делители нуля существуют, поэтому мы можем соединить любые два особых элемента путём длины не больше 3. Остаётся заметить, что расстояние между противоположными особыми элементами равно в точности 3.

□

**Следствие 5.2.9.** Если  $n \geq 3$ , то  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  содержит  $2^n$  компонент связности при  $\gamma_n = 1$  и  $2^n - 1$  компоненту связности при  $\gamma_n = -1$ . Пусть  $C$  — произвольная компонента связности

графа  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$ . Тогда диаметр  $C$  равен 3. Кроме того, мы можем найти число вершин в  $C$  по формуле

$$|V(C)| = \begin{cases} 2^{n+1} - 2, & \chi(C) = 1; \\ 2^{n+1} - 4, & \chi(C) = -1. \end{cases}$$

*Доказательство.* В лемме 5.2.5 и теореме 5.2.6 мы показали, что  $C(x)$  является компонентой связности  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  для любого  $x \in \mathcal{E}'_n$ . Подграф  $C(e_0)$  имеет непустое множество вершин тогда и только тогда, когда  $\gamma_n = 1$ , и в этом случае он также является компонентой связности. Отсюда мы получаем число компонент связности графа  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$ . Значения их диаметров вытекают из леммы 5.2.5 и следствия 5.2.8.

Мы используем теорему 5.1.20, чтобы вычислить число вершин в  $C(x)$ ,  $x \in \mathcal{E}_n$ . Нас интересуют такие  $(a, b) \in Z_e(\mathcal{A}_{n+1})$ , что  $ab = \pm x$ . Если  $\chi = 1$ , то мы можем взять любое  $a \in \mathcal{E}'_n$  и найти два значения  $b$ , которые будут соответствовать  $x$  и  $-x$ . Таким образом, мы получаем  $2(2^n - 1) = 2^{n+1} - 2$  элементов. Если  $\chi = -1$ , то нам подойдут только  $a \in \mathcal{E}'_n \setminus \{x\}$ . Поскольку в этом случае  $x \neq e_0$ , мы имеем  $2(2^n - 2) = 2^{n+1} - 4$  вариантов выбора  $(a, b)$ .  $\square$

**Предложение 5.2.10.** *Для любого  $n \geq 1$  все компоненты связности  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  являются эйлеровыми графами.*

*Доказательство.* Из рисунков 5.11 и 5.12 легко видеть, что степень любой вершины  $C(x)$  чётна. В частности, мы используем здесь лемму 5.1.18, согласно которой все неособые элементы типов (III) и (IV) разбиваются на группы «почти эквивалентных» элементов, по четыре элемента в каждой. Отсюда следует, что штрихованная или пунктирная степень каждой неособой вершины делится на 4.

Возможен также случай, при котором  $C(x)$  имеет пустое множество вершин или состоит из двух не связанных между собой вершин, см. теорему 5.3.6 далее, однако компоненты связности этих графов также являются эйлеровыми.  $\square$

## 5.3 Восстановление параметров по графу $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$

### 5.3.1 Нахождение $\gamma_{n-1}$ и $\gamma_n$ при $n \geq 4$

Наша текущая цель — восстановить все значения параметров  $\gamma_k$  алгебры  $\mathcal{A}_{n+1}$ ,  $k = 0, \dots, n$ , по её графу ортогональности  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$ . При  $n \geq 3$  следствие 5.2.9 позволяет определить значение  $n$  по числу компонент связности  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$ . Затем мы можем посчитать число элементов в каждой компоненте связности и отсюда найти значение её характеристики  $\chi$ .

Сперва мы научимся находить особые элементы (см. определение 5.1.10) в компонентах связности вида  $C(x)$ , где  $x \in \mathcal{E}''_n$ .

**Лемма 5.3.1.** *Пусть  $n \geq 2$  и  $x \in \mathcal{E}''_n$ .*

(1) *Если  $\chi = 1$ , то  $C(x)$  имеет непустое множество вершин. Если  $n = 2$ , то  $C(x)$  — шестиугольник, поэтому в качестве особых элементов можно взять любые две его*

противоположные вершины. Если  $n \geq 3$ , то особые элементы подграфа  $C(x)$  определяются однозначно.

- (2) Если  $\chi = -1$ , то  $C(x)$  имеет непустое множество вершин тогда и только тогда, когда  $n \geq 3$ . Если  $n = 3$ , то  $C(x)$  — двойной шестиугольник, поэтому в качестве особых элементов можно взять любые две пары противоположных вершин. Если  $n \geq 4$ , то особые элементы подграфа  $C(x)$  определяются однозначно.

*Доказательство.* Ясно, что  $\mathcal{E}_n'' \neq \emptyset$  тогда и только тогда, когда  $n \geq 2$ , поэтому это условие является существенным.

- (1) Пусть  $\chi = 1$ . По теореме 5.1.20, любой элемент  $(a, b) \in \mathcal{E}_n' \times (\pm\mathcal{E}_n)$  с условием  $ab = x$  является делителем нуля, и такие  $(a, b)$  существуют, поэтому  $V(C(x))$  непусто.

Если  $n = 2$ , то  $\mathcal{E}_n = \{e_0, x, \tilde{e}_0, \tilde{x}\}$  с точностью до умножения элементов на  $\pm 1$ . Отсюда  $C(x)$  — это шестиугольник, в котором нет посторонних рёбер:

$$(x, -e_0) \leftrightarrow (\tilde{x}, \tilde{e}_0) \leftrightarrow (\tilde{e}_0, \gamma_n \tilde{x}) \leftrightarrow (x, e_0) \leftrightarrow (\tilde{x}, -\tilde{e}_0) \leftrightarrow (\tilde{e}_0, -\gamma_n \tilde{x}) \leftrightarrow (x, -e_0).$$

Ясно, что любые два противоположных элемента могут быть выбраны в качестве особых с точностью до автоморфизма графа  $C(x)$ .

Если  $n \geq 3$ , то существуют такие  $a, b \in \mathcal{E}_n''$ , что  $ab = n(b)x$ , и мы получаем по меньшей мере ещё два шестиугольника, проходящих через  $(x, e_0)$  и  $(x, -e_0)$ . Расстояние от  $(x, \pm e_0)$  до любого неособого элемента не превосходит 2, поэтому единственный элемент, находящийся на расстоянии 3 от особого элемента, — это другой особый элемент. Однако расстояние от  $(\tilde{x}, \tilde{e}_0)$  и  $(\tilde{e}_0, -\gamma_n \tilde{x})$  до  $(a, b)$  и  $(\tilde{a}, -\tilde{b})$  равно в точности 3, а расстояние от  $(\tilde{x}, -\tilde{e}_0)$  и  $(\tilde{e}_0, \gamma_n \tilde{x})$  до  $(a, -b)$  и  $(\tilde{a}, \tilde{b})$  также равно 3. Поэтому никакой из этих элементов не может перейти в особый элемент при автоморфизме графа  $C(x)$ , а значит,  $(x, e_0)$  и  $(x, -e_0)$  определены однозначно.

- (2) Пусть  $\chi = -1$ . По теореме 5.1.20,  $V(C(x))$  непусто тогда и только тогда, когда  $n \geq 3$ .

Если  $n = 3$ , то, с точностью до умножения элементов на  $\pm 1$ ,  $\mathcal{E}_n = \{e_0, x, \tilde{e}_0, \tilde{x}, a, b, \tilde{a}, \tilde{b}\}$  для некоторых  $a, b$  с условием  $ab = n(b)x$ . Отсюда  $C(x)$  — двойной шестиугольник, состоящий из элементов  $(\tilde{x}, \pm\tilde{e}_0)$ ,  $(\tilde{e}_0, \pm\gamma_n \tilde{x})$ ,  $(a, \pm b)$ ,  $(\tilde{a}, \pm\tilde{b})$ ,  $(b, \pm\gamma_n a)$  и  $(\tilde{b}, \pm\tilde{a})$ . Любые две пары противоположных элементов могут быть выбраны в качестве особых с точностью до автоморфизма графа  $C(x)$ .

Если  $n \geq 4$ , то особые и неособые элементы можно различить по степеням соответствующих им вершин. По следствию 5.2.9,  $C(x)$  состоит из  $2^{n+1} - 4$  вершин. В точности  $2^{n+1} - 8$  из них являются неособыми. Любой особый элемент соединяется рёбрами ровно с половиной из них, то есть его степень равна  $2^n - 4$ . Теперь предположим, что некоторый сосед, скажем,  $(a, b)$ , некоторого особого элемента, скажем,  $(\tilde{x}, \tilde{e}_0)$ , имеет степень  $K$ . Тогда  $K - 4$  из его соседей не принадлежат тому же двойному шестиугольнику, который содержит  $(a, b)$  и  $(\tilde{x}, \tilde{e}_0)$ . Половина из них, то есть  $\frac{K-4}{2}$  элементов, соединена рёбрами с элементом

$(\tilde{x}, \tilde{e}_0)$ , а другая половина соединена с элементом  $(\tilde{x}, -\tilde{e}_0)$ . Это означает, что у произвольного неособого элемента степени  $K$  имеется ровно  $\frac{K-4}{2}$  общих соседей с каждым из особых элементов.

Теперь предположим, что некоторый неособый элемент  $(a, b)$  переходит в особый элемент при автоморфизме  $\varphi$  графа  $C(x)$ . Обозначим степень элемента  $(a, b)$  за  $K$ . Тогда  $K = 2^n - 4 \geq 12$ . Степень его соседа  $(\tilde{a}, \tilde{b})$  также равна  $K$ . По лемме 5.1.18, любой сосед  $(a, b)$  вне содержащего их двойного шестиугольника также является соседом  $(\tilde{a}, \tilde{b})$ , и наоборот. Поэтому у элементов  $(a, b)$  и  $(\tilde{a}, \tilde{b})$  имеется  $K - 4 > \frac{K-4}{2}$  общих соседей. Мы получили противоречие с тем, что особый элемент  $\varphi((a, b))$  и его неособый сосед  $\varphi((\tilde{a}, \tilde{b}))$  имеют ровно  $\frac{K-4}{2}$  общих соседей. Таким образом, особые элементы определены однозначно. □

**Лемма 5.3.2.** *Если  $n \geq 3$ , то мы можем определить значения  $n$  и  $\gamma_n$  и, если  $\gamma_n = 1$ , найти  $C(e_0)$ . Если  $n \geq 4$ , то мы также можем найти  $C(\tilde{e}_0)$  и тем самым определить значение  $\gamma_{n-1}$ .*

*Доказательство.* Пусть  $n \geq 3$ . По следствию 5.2.9, число компонент связности равно либо  $2^n$  при  $\gamma_n = 1$ , либо  $2^n - 1$  при  $\gamma_n = -1$ . Значит, мы можем посчитать компоненты связности и найти  $n$  и  $\gamma_n$ . Если  $\gamma_n = -1$ , то  $C(e_0)$  имеет пустое множество вершин. Если  $\gamma_n = 1$ , то  $C(e_0)$  однозначно описывается леммой 5.2.5, поэтому нам достаточно найти компоненту связности, изоморфную  $C(e_0)$ , и считать, что это и есть  $C(e_0)$ . Далее мы будем рассматривать  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  без  $C(e_0)$ .

Пусть теперь  $n \geq 4$ , и мы хотим найти компоненту связности  $C(\tilde{e}_0)$ . Она изображена на рисунке 5.11 для различных значений  $\chi$ . Если  $\chi = -\gamma_{n-1}\gamma_n = -1$ , то степень любого элемента равна  $2(N - 1) = 2^n - 4$ . Однако ни у каких двух смежных вершин нет общих соседей. Предположим теперь, что  $C(\tilde{e}_0)$  изоморфна некоторой  $C(x)$  с условием  $x \in \mathcal{E}_n''$ . Пусть  $A \in V(C(\tilde{e}_0))$  отображается при этом изоморфизме в особый элемент, а  $B \in V(C(\tilde{e}_0))$  отображается в его неособого соседа. Степень  $B$  равна  $K = 2^n - 4 \geq 12$ . Тогда, по лемме 5.3.1,  $A$  и  $B$  имеют  $\frac{K-4}{2} \geq 4$  общих соседей, противоречие.

Таким образом, если  $\chi = -\gamma_{n-1}\gamma_n = -1$ , то мы всегда можем найти  $C(\tilde{e}_0)$  как единственную компоненту связности с  $\chi = -1$ , но без особых элементов. И наоборот, если такая компонента связности существует, то  $\gamma_{n-1}\gamma_n = 1$ . В противном случае,  $\gamma_{n-1}\gamma_n = -1$ , и остаётся найти компоненту связности, изоморфную соответствующему графу  $C(\tilde{e}_0)$  на рисунке 5.11. Теперь мы умеем определять значение  $\gamma_{n-1}\gamma_n$ , а значит, мы также знаем  $\gamma_{n-1}$ . □

### 5.3.2 Различение алгебр при $n \leq 3$

Мы уже видели в лемме 5.3.2, что мы можем найти  $C(\tilde{e}_0)$  и определить значение  $\gamma_{n-1}$  только при  $n \geq 4$ . Следствие 5.2.9 устанавливает количество компонент связности только при  $n \geq 3$ , поэтому значение  $\gamma_n$  мы также можем найти только при  $n \geq 3$ . Теорема 5.1.20, описывающая вершины графа  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$ , также имеет некоторые исключения при  $n \leq 2$ .

Мы скоро увидим, что при  $n \leq 3$  мы даже не можем различить компоненты связности типов (III) и (IV). В силу этих причин, нам необходимо отдельно рассмотреть случай, когда  $1 \leq n \leq 3$ . Как было показано в подразделе 5.2.1, при  $n = 0$  граф  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  всегда имеет пустое множество вершин.

В этом разделе нам понадобятся предложение 5.1.7 и следующее предложение.

**Предложение 5.3.3.** Пусть  $n \geq 1$ . Если  $\gamma_k = -1$  для всех  $k = 0, \dots, n-1$ , то  $n(e_j^{(n)}) = 1$  для всех  $j = 0, \dots, 2^n - 1$ . В противном случае, у  $2^{n-1}$  элементов из  $\mathcal{E}_n$  норма равна 1, а у оставшихся  $2^{n-1}$  элементов норма равна  $-1$ , причём всегда выполнено  $n(e_0) = 1$ .

*Доказательство.* Непосредственно следует из равенства (1.1) и леммы 1.3.2.  $\square$

**Следствие 5.3.4.** Значения  $\chi$  для подграфов  $C(x)$ ,  $x \in \mathcal{E}_n$ , таковы:

- (1) Если  $\gamma_k = -1$  для всех  $k = 0, \dots, n-1$ , то  $\chi(C(x)) = \gamma_n$  для всех  $x \in \mathcal{E}_n$ .
- (2) В противном случае,  $\chi(C(x))$  равно 1 для  $2^{n-1}$  элементов  $x \in \mathcal{E}_n$  и равно  $-1$  для остальных  $2^{n-1}$  элементов. Кроме того, всегда выполнено  $\chi(C(e_0)) = \gamma_n$ .

*Доказательство.* По предложению 5.1.7,  $\chi(C(x)) = \gamma_n n(x)$ . Остаётся применить предложение 5.3.3.  $\square$

**Лемма 5.3.5.** При  $1 \leq n \leq 3$  мы можем найти явный вид подграфа  $C(x)$ ,  $x \in \mathcal{E}_n$ , в зависимости от его значения  $\chi$ .

$n = 1$ : Если  $\chi = -1$ , то  $C(x)$  имеет пустое множество вершин. Если  $\chi = 1$ , то  $C(x)$  состоит из двух не соединённых между собой вершин.

$n = 2$ : Если  $\chi = -1$ , то  $C(x)$  имеет пустое множество вершин. Если  $\chi = 1$ , то  $C(x)$  — шестиугольник.

$n = 3$ : Предположим сперва, что  $x \in \mathcal{E}'_n$ . Если  $\chi = -1$ , то  $C(x)$  — двойной шестиугольник, см. рисунок 5.6. Если  $\chi = 1$ , то  $C(x)$  — связка шестиугольников, см. рисунок 5.7.

Теперь рассмотрим случай, когда  $x = e_0$ . Если  $\chi = -1$ , то  $C(e_0)$  имеет пустое множество вершин. Если  $\chi = 1$ , то  $C(e_0)$  — почти полный  $(7, 7)$ -двудольный граф, см. изображение  $C(e_0)$  графа  $\Gamma_e(\hat{\mathbb{S}})$  на рисунке 5.9.

*Доказательство.* Из теоремы 5.1.20 следует, что при  $n \leq 2$  нет делителей нуля с  $\chi = -1$ , тогда как любой элемент с  $\chi = 1$  всегда является делителем нуля. Оставшая часть утверждения непосредственно следует из леммы 5.2.5 и теоремы 5.2.6. Мы используем здесь тот факт, что:

$n = 1$ :  $\mathcal{E}_n = \{e_0, \tilde{e}_0\}$ ;

$n = 2$ :  $\mathcal{E}_n = \{e_0, \tilde{e}_0, a, \tilde{a}\}$  с точностью до умножения элементов на  $\pm 1$  для любого  $a \in \mathcal{E}''_n$ ;

$n = 3$ :  $\mathcal{E}_n = \{e_0, \tilde{e}_0, a, \tilde{a}, b, \tilde{b}, ab, \tilde{a}\tilde{b}\}$  с точностью до умножения элементов на  $\pm 1$ , если  $a, b \in \mathcal{E}''_n$  и  $a, \tilde{a}, b, \tilde{b}$  линейно независимы.

Заметим, что компоненты разных типов не отличаются между собой, за исключением типа (I) при  $n = 3$ , и их структура зависит только от их значения  $\chi$ .  $\square$

**Теорема 5.3.6.** *Если  $1 \leq n \leq 3$ , то  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  изоморфен одному из следующих графов.*

- $n = 1$ :
- Если  $\gamma_0 = \gamma_1 = -1$ , то  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  имеет пустое множество вершин.
  - Если  $\gamma_0 = 1$ , то  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  состоит из двух не соединённых между собой вершин.
  - Если  $\gamma_0 = -1$  и  $\gamma_1 = 1$ , то  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  состоит из четырёх не соединённых между собой вершин, см. рисунок 5.4.
- $n = 2$ :
- Если  $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = -1$ , то  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  имеет пустое множество вершин.
  - Если  $\gamma_0 = 1$  или  $\gamma_1 = 1$ , то  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  состоит из двух шестиугольников.
  - Если  $\gamma_0 = \gamma_1 = -1$  и  $\gamma_2 = 1$ , то  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  состоит из четырёх шестиугольников, см. рисунок 5.5.
- $n = 3$ :
- Если  $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = -1$ , то  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  состоит из семи двойных шестиугольников, см. рисунок 5.10.
  - Если хотя бы один из параметров  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$  равен 1 и  $\gamma_3 = -1$ , то  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  состоит из трёх двойных шестиугольников и четырёх связок шестиугольников.
  - Если хотя бы один из параметров  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$  равен 1 и  $\gamma_3 = 1$ , то  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  состоит из четырёх двойных шестиугольников, трёх связок шестиугольников и одного почти полного  $(7, 7)$ -двудольного графа.
  - Если  $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = -1$  и  $\gamma_3 = 1$ , то  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  состоит из семи связок шестиугольников и одного почти полного  $(7, 7)$ -двудольного графа, см. рисунок 5.9.

*Доказательство.* Непосредственно вытекает из следствия 5.3.4 и леммы 5.3.5. При  $n \leq 2$  у нас нет необходимости рассматривать  $C(e_0)$  отдельно, и все  $C(x)$ , для которых  $\chi = -1$ , имеют пустые множества вершин. Что касается случая  $n = 3$ ,  $C(e_0)$  отличается от других компонент связности с тем же значением  $\chi$ , и это единственная компонента связности, множество вершин которой может оказаться пустым, а именно, при  $\gamma_n = -1$ . Это связано с тем, что следствие 5.2.9 выполняется в точности при  $n \geq 3$ . По этой причине при  $n = 3$  необходимо рассматривать четыре случая, в отличие от трёх случаев при  $n = 1$  и  $n = 2$ .  $\square$

**Следствие 5.3.7.** *Пусть  $1 \leq n, m \leq 3$ ,  $\gamma = \{\gamma_0, \dots, \gamma_n\}$  и  $\lambda = \{\lambda_0, \dots, \lambda_m\}$  — две последовательности параметров. Предположим, что графы  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1}^\gamma)$  и  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{m+1}^\lambda)$  имеют непустые множества вершин и изоморфны. Тогда алгебры  $\mathcal{A}_{n+1}^\gamma$  и  $\mathcal{A}_{m+1}^\lambda$  также изоморфны.*

*Доказательство.* По теореме 5.3.6, размер каждой компоненты связности равен 1 при  $n = 1$ , 6 при  $n = 2$ , а также 12 или 14 при  $n = 3$ . Поскольку графы  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1}^\gamma)$  и  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{m+1}^\lambda)$  имеют непустые множества вершин и изоморфны, мы сразу получаем, что  $n = m$ . Теперь рассмотрим три случая:

$n = 1$ : Единственные два случая, при которых различные алгебры имеют изоморфные графы, – это  $\gamma_0 = 1, \gamma_1 = -1$  и  $\gamma_0 = 1, \gamma_1 = 1$ . По предложению 1.4.8, обе алгебры изоморфны  $\mathcal{H}_2$ .

$n = 2$ : Различные алгебры имеют изоморфные графы, когда хотя бы один из параметров  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  равен 1. Однако, по предложению 1.4.8, во всех шести случаях получаются алгебры, изоморфные  $\mathcal{H}_3$ .

$n = 3$ : Согласно следствию 5.2.9, мы имеем семь компонент связности при  $\gamma_3 = -1$  и восемь компонент связности при  $\gamma_3 = 1$ . Таким образом, значение параметра  $\gamma_3$  определено однозначно.

Пусть, например,  $\gamma_3 = -1$ . Различные алгебры имеют изоморфные графы, если и только если хотя бы один из параметров  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$  равен 1. Однако во всех семи случаях алгебра  $\mathcal{A}_3$  изоморфна  $\mathcal{H}_3$ . Значит,  $\mathcal{A}_4 = \mathcal{A}_3\{-1\}$  изоморфна  $\mathcal{H}_3\{-1\}$  (мы применяем изоморфизм покомпонентно).

Случай  $\gamma_3 = 1$  доказывается полностью аналогично.

□

В теореме 5.3.16 мы увидим, что при  $n = 3$  обратное утверждение к следствию 5.3.7 также выполняется, то есть, если алгебры изоморфны, то их графы ортогональности также изоморфны.

Однако при  $n \leq 2$  обратное утверждение к следствию 5.3.7 неверно. По предложению 1.4.8, при  $n \leq 2$  все вещественные алгебры Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_{n+1}$  изоморфны либо алгебрам главной последовательности  $\mathcal{M}_{n+1}$ , либо контр-алгебрам  $\mathcal{H}_{n+1}$ . В частности,  $\mathcal{A}_2\{1, -1\} \cong \mathcal{A}_2\{-1, 1\} = \mathcal{H}_2$ , но, по теореме 5.3.6, их графы неизоморфны. Аналогично, графы изоморфных алгебр  $\mathcal{A}_3\{1, -1, -1\}$  и  $\mathcal{A}_3\{-1, -1, 1\} = \mathcal{H}_3$  также неизоморфны. В разделе 5.4 мы обсудим, как можно решить эту проблему.

### 5.3.3 Рекурсивный поиск параметров алгебры

В подразделе 5.3.1 мы показали, как можно восстановить  $\gamma_{n-1}$  и  $\gamma_n$  по графу  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  при  $n \geq 4$ . Теперь мы научимся строить по  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$ ,  $n \geq 4$ , графы  $\Gamma_e(\mathcal{A}_n^\circ)$  и  $\Gamma_e(\mathcal{A}_n^\bullet)$ . Это позволит нам найти все остальные значения  $\gamma_k$ ,  $k = 0, \dots, n$ , рекурсивно.

Из теоремы 5.2.6 следует, что для  $x \in \mathcal{E}'_{n-1}$  по компоненте связности  $C(x)$  нужно строить компоненту связности  $C^\circ(x)$  графа  $\Gamma_e(\mathcal{A}_n^\circ)$ , тогда как по  $C(\tilde{x})$  нужно строить компоненту связности  $C^\bullet(x)$  графа  $\Gamma_e(\mathcal{A}_n^\bullet)$ . Сперва мы посмотрим, как при таком преобразовании изменяется значение  $\chi$ .

**Лемма 5.3.8.** Пусть  $x \in \mathcal{E}'_{n-1}$ .

(1) Если  $C(x)$  преобразуется в  $C^\circ(x)$ , то значение  $\chi$  сохраняется.

(2) Если  $C(\tilde{x})$  преобразуется в  $C^\bullet(x)$ , то  $\chi$  меняет знак.

*Доказательство.* Чтобы найти значения  $\chi$ , мы воспользуемся предложением 5.1.7.

- (1) Имеем  $\chi(C(x)) = \gamma_n n(x)$ . Поскольку  $x \in \mathcal{A}_{n-1}$ , норма  $x$  будет такой же и в  $\mathcal{A}_{n-1}$ . Напомним, что  $\mathcal{A}_n^\circ = \mathcal{A}_{n-1}\{\gamma_n\}$ . Ясно, что тогда также выполнено  $\chi(C^\circ(x)) = \gamma_n n(x)$ .
- (2) Имеем  $\chi(C(\tilde{x})) = \gamma_n n(\tilde{x}) = \gamma_n n(x)n(\tilde{e}_0) = -\gamma_{n-1}\gamma_n n(x)$  в  $\Gamma_\epsilon(\mathcal{A}_{n+1})$ . Поскольку  $\mathcal{A}_n^\bullet = \mathcal{A}_{n-1}\{\gamma_{n-1}\gamma_n\}$ ,  $\chi(C^\bullet(x)) = \gamma_{n-1}\gamma_n n(x)$ . Следовательно,  $\chi$  меняет знак.  $\square$

**Лемма 5.3.9.** Пусть  $x \in \mathcal{E}'_{n-1}$ ,  $n \geq 4$ . Тогда на рисунке 5.13 изображено, как из  $C(x)$  и  $C(\tilde{x})$  можно получить  $C^\circ(x)$  и  $C^\bullet(x)$ . Жирные линии обозначают те рёбра и вершины, которые сохраняются при этом преобразовании, тогда как все остальные стираются.

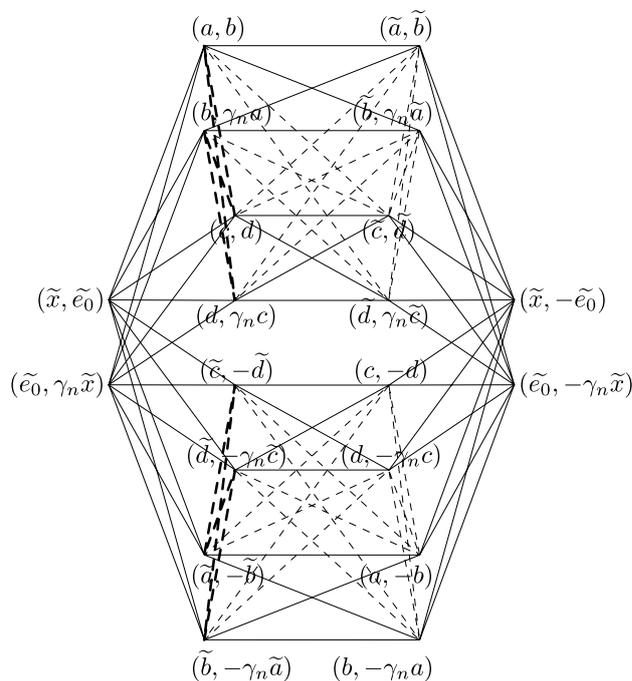
- (1)  $C(x)$  преобразуется в  $C^\circ(x)$  следующим образом:
  - (а) Если  $\chi = -1$ , то мы находим некоторый особый элемент и отмечаем всех его соседей. Затем мы стираем все остальные элементы, кроме отмеченных. В частности, мы стираем все особые элементы. Другими словами, мы берём подграф  $C(x)$  на множестве отмеченных вершин.
  - (б) Если  $\chi = 1$ , то мы находим два противоположных особых элемента и стираем две изолированных цепочки между ними, которые соответствуют элементам  $(\tilde{x}, \pm\tilde{e}_0)$ . Затем мы разбиваем все остальные цепочки на пары следующим образом: между двумя цепочками из одной пары рёбер нет, однако множества соседних с ними цепочек совпадают. Наконец, мы оставляем ровно по одной цепочке из каждой такой пары.
- (2)  $C(\tilde{x})$  преобразуется в  $C^\bullet(x)$  следующим образом:
  - (а) Если  $\chi = -1$ , то мы разбиваем все элементы на пары: два элемента пары не соединены между собой ребром, но имеют одно и то же множество соседей. Затем мы оставляем ровно по одному элементу из каждой пары.
  - (б) Если  $\chi = 1$ , то мы находим два противоположных особых элемента и стираем две изолированных цепочки между ними, которые соответствуют элементам  $(x, \pm\tilde{e}_0)$ . Затем мы отмечаем всех соседей одного из особых элементов. Наконец, мы стираем все элементы, кроме отмеченных.

*Доказательство.* Мы будем пользоваться теоремой 5.2.6, описывающей  $C(x)$  и  $C(\tilde{x})$  для различных значений  $\chi$ . Напомним, что, поскольку  $n \geq 4$ , особые элементы могут быть найдены с помощью леммы 5.3.1.

- (1) Сперва мы покажем, как  $C(x)$  преобразуется в  $C^\circ(x)$ . По лемме 5.3.8, значение  $\chi$  при этом сохраняется.
  - (а) Пусть  $\chi = -1$ . По следствию 5.2.9,  $C(x)$  содержит  $2^{n+1} - 4$  вершины. Тогда  $\chi(C^\circ(x))$  также равно  $-1$ , и  $C^\circ(x)$  содержит  $2^n - 4$  вершины. В обоих случаях нет элементов

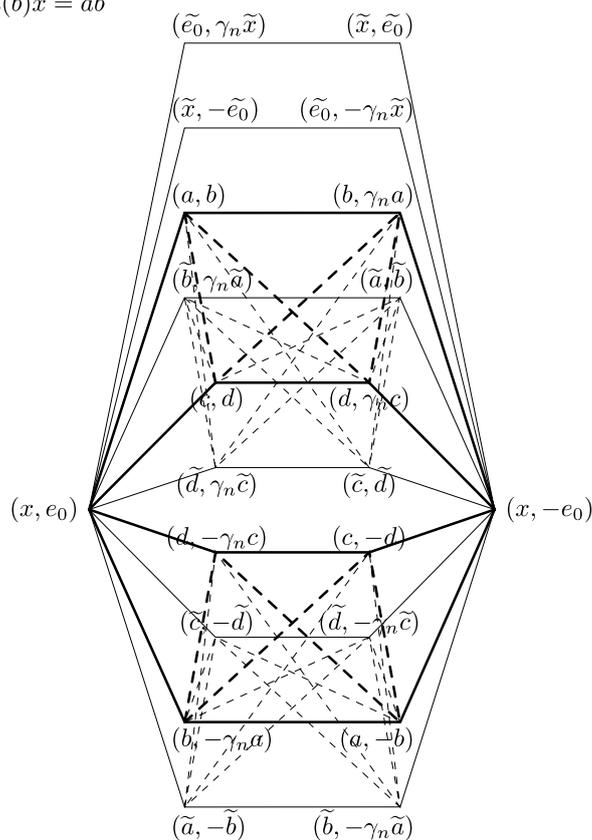
$C(x), \chi = -1 :$

$n(b)x = ab$



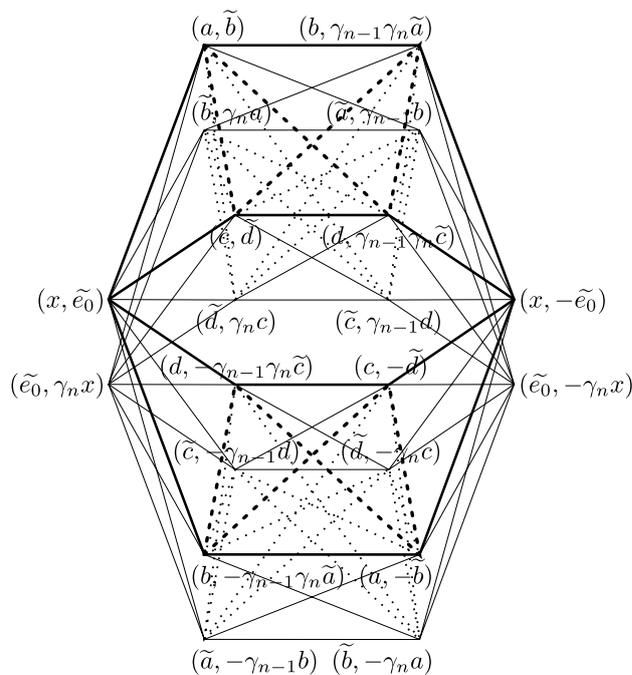
$C(x), \chi = 1 :$

$n(b)x = ab$



$C(\tilde{x}), \chi = -1 :$

$n(b)x = ab$



$C(\tilde{x}), \chi = 1 :$

$n(b)x = ab$

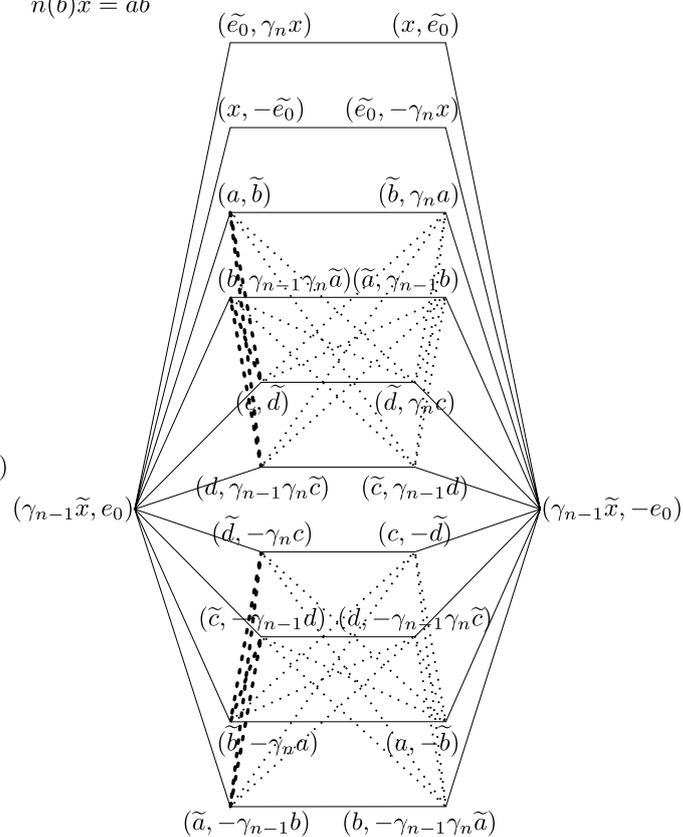


Рис. 5.13: Рекурсивное преобразование компонент связности типов (III) и (IV).

вида  $(x, \pm e_0)$ . Поэтому  $C^\circ(x)$  состоит только из вершин вида  $(a, b)$ , где  $a \in \mathcal{E}'_{n-1}$ ,  $b \in \pm \mathcal{E}'_{n-1}$  и  $ab = \pm x$ . Из леммы 5.1.18 следует, что подграф  $C(x)$  на множестве элементов вида  $(a, b)$  действительно изоморфен  $C^\circ(x)$ . Заметим также, что, по теореме 5.1.21(5), элемент  $(a, b)$  не соединён рёбрами с  $(a, -b)$  и  $(b, \pm a)$  ни в  $C(x)$ , ни в  $C^\circ(x)$ . Таким образом, особые элементы  $(\tilde{x}, \pm \tilde{e}_0)$  и  $(\tilde{e}_0, \pm \gamma_n \tilde{x})$  и элементы вида  $(\tilde{a}, \tilde{b})$  нам больше не понадобятся.

Однако мы не можем различить в графе элементы  $(a, b)$  и  $(\tilde{a}, \tilde{b})$  между собой, за исключением того факта, что они соединены рёбрами с разными парами особых вершин. Кроме того, половина элементов вида  $(a, b)$  соединена рёбрами с одной парой особых элементов, а другая половина — с другой, и мы не можем определить по графу, как именно они поделены пополам. Таким образом, мы не можем найти настоящий подграф  $C(x)$  на множестве элементов вида  $(a, b)$ , однако мы можем найти изоморфный ему подграф. Действительно, если мы возьмём всех соседей некоторой пары особых элементов, то мы всегда будем брать ровно один элемент из каждой пары элементов  $(a, b)$  и  $(\tilde{a}, \tilde{b})$ . Поскольку множества неособых соседей элементов  $(a, b)$  и  $(\tilde{a}, \tilde{b})$  совпадают, полученный подграф изоморфен  $C^\circ(x)$ .

- (b) Пусть  $\chi = 1$ . Тогда  $C(x)$  содержит  $2^{n+1} - 2$  вершины,  $\chi(C^\circ(x))$  также равно 1, и  $C^\circ(x)$  содержит  $2^n - 2$  вершины. В обоих случаях есть элементы вида  $(x, \pm e_0)$ . Подграф  $C(x)$  на множестве элементов вида  $(a, b)$  и  $(x, \pm e_0)$  изоморфен  $C^\circ(x)$ . Действительно, при  $a, c \in \mathcal{E}'_{n-1}$ ,  $b, d \in \pm \mathcal{E}_{n-1}$  элементы  $(a, b)$  и  $(c, d)$  ортогональны в  $\mathcal{A}_{n+1}$  тогда и только тогда, когда  $(a, b)$  и  $(c, d)$  ортогональны в  $\mathcal{A}_n^\circ$ . Мы рассматриваем независимо три случая: если  $b = \pm e_0$  или  $d = \pm e_0$ , то мы применяем теорему 5.1.21(3); если  $e_0, a, b, c, d$  линейно независимы, то мы применяем лемму 5.1.18; если  $c = a$  или  $d = \pm a$ , то мы применяем теорему 5.1.21(5).

Следовательно, мы хотим стереть элементы  $(\tilde{x}, \pm \tilde{e}_0)$  и  $(\tilde{e}_0, \pm \gamma_n \tilde{x})$ , а также элементы вида  $(\tilde{a}, \tilde{b})$ , где  $a \in \mathcal{E}'_{n-1}$ ,  $b \in \pm \mathcal{E}'_{n-1}$ . Сперва мы находим особые элементы при помощи леммы 5.3.1. Тогда элементы  $(\tilde{x}, \pm \tilde{e}_0)$  и  $(\tilde{e}_0, \pm \gamma_n \tilde{x})$  могут быть легко найдены, так как они принадлежат двум цепочкам между  $(x, e_0)$  и  $(x, -e_0)$ , которые не соединены рёбрами ни с какими другими цепочками. Мы стираем эти две цепочки и продолжаем работать с оставшейся частью графа.

Теперь мы хотим стереть элементы вида  $(\tilde{a}, \tilde{b})$ . Заметим, что мы не можем различить цепочку, содержащую  $(a, b)$  и  $(b, \gamma_n a)$ , и цепочку, содержащую  $(\tilde{a}, \tilde{b})$  и  $(\tilde{b}, \gamma_n \tilde{a})$ . Ясно, что нам нужна только одна из них. Значит, мы можем разбить все цепочки на пары следующим образом: между двумя цепочками из одной пары рёбер нет, однако множества соседних с ними цепочек совпадают. Наконец, мы оставляем ровно по одной цепочке из каждой такой пары и тем самым получаем граф, изоморфный  $C^\circ(x)$ .

- (2) Далее мы покажем, как  $C(\tilde{x})$  преобразуется в  $C^\bullet(x)$ . По лемме 5.3.8,  $\chi$  при этом меняет знак.

- (a) Пусть  $\chi = -1$ . Тогда  $C(\tilde{x})$  содержит  $2^{n+1} - 4$  вершины,  $\chi(C^\bullet(x))$  равно 1, и  $C^\bullet(x)$

содержит  $2^n - 2$  вершины. Элементов вида  $(\tilde{x}, \pm e_0)$  в  $C(\tilde{x})$  нет, но есть элементы вида  $(x, \pm e_0)$  в  $C^\bullet(x)$ . Следовательно,  $C^\bullet(x)$  состоит из  $(x, \pm e_0)$  и вершин вида  $(a, b)$ , где  $a \in \mathcal{E}'_{n-1}$ ,  $b \in \pm \mathcal{E}'_{n-1}$  и  $ab = \pm x$ . Мы утверждаем, что подграф  $C(\tilde{x})$  на множестве элементов вида  $(c, \tilde{d})$ , где  $c \in \mathcal{E}'_{n-1}$ ,  $d \in \pm \mathcal{E}_{n-1}$ , изоморфен  $C^\bullet(x)$ . Требуемый изоморфизм отображает  $(c, \tilde{d})$  в  $(c, d)$ .

Действительно, для  $a, c \in \mathcal{E}'_{n-1}$ ,  $b, d \in \pm \mathcal{E}_{n-1}$  элементы  $(a, \tilde{b})$  и  $(c, \tilde{d})$  ортогональны в  $\mathcal{A}_{n+1}$  тогда и только тогда, когда  $(a, b)$  и  $(c, d)$  ортогональны в  $\mathcal{A}_n^\bullet$ . Мы рассматриваем независимо три случая: если  $b = \pm e_0$  или  $d = \pm e_0$ , то мы применяем теорему 5.1.21(3); если  $e_0, a, b, c, d$  линейно независимы, то мы применяем лемму 5.1.18; если  $c = a$  или  $d = \pm a$ , то мы применяем теорему 5.1.21(5). Мы также используем здесь тот факт, что значение последнего параметра  $\gamma$  для  $\mathcal{A}_n^\bullet$  равно  $\gamma_{n-1}\gamma_n$ .

Теперь мы хотим выделить подграф  $C(\tilde{x})$  на множестве элементов вида  $(a, \tilde{b})$ , где  $a \in \mathcal{E}'_{n-1}$ ,  $b \in \pm \mathcal{E}_{n-1}$ . Однако мы не можем различить в графе элементы  $(a, \tilde{b})$  и  $(\tilde{b}, \gamma_n a)$ . Поэтому мы разбиваем все элементы на пары таким образом, что два элемента пары не соединены между собой ребром, но имеют одно и то же множество соседей. Тогда, с точностью до автоморфизма графа  $C(\tilde{x})$ , элементы  $(a, \tilde{b})$  и  $(\tilde{b}, \gamma_n a)$  всегда попадают в одну пару. Если мы оставим ровно по одному элементу из каждой пары, то полученный граф будет изоморфен  $C^\bullet(x)$ .

- (b) Пусть  $\chi = 1$ . Тогда  $C(\tilde{x})$  содержит  $2^{n+1} - 2$  вершины,  $\chi(C^\bullet(x))$  равно  $-1$ , и  $C^\bullet(x)$  содержит  $2^n - 4$  вершины. В  $C(\tilde{x})$  есть элементы вида  $(\tilde{x}, \pm e_0)$ , однако в  $C^\bullet(x)$  нет элементов вида  $(x, \pm e_0)$ . Мы утверждаем, что подграф  $C(\tilde{x})$  на множестве элементов вида  $(a, \tilde{b})$ , где  $a \in \mathcal{E}'_{n-1}$ ,  $b \in \pm \mathcal{E}'_{n-1}$ , изоморфен  $C^\bullet(x)$ . Требуемый изоморфизм отображает  $(a, \tilde{b})$  в  $(a, b)$ .

Действительно, для  $a, c \in \mathcal{E}'_{n-1}$ ,  $b, d \in \pm \mathcal{E}'_{n-1}$  элементы  $(a, \tilde{b})$  и  $(c, \tilde{d})$  ортогональны в  $\mathcal{A}_{n+1}$  тогда и только тогда, когда  $(a, b)$  и  $(c, d)$  ортогональны в  $\mathcal{A}_n^\bullet$ . Если  $a, b, c, d$  линейно независимы, то мы применяем лемму 5.1.18, а если  $c = a$  или  $d = \pm a$ , то мы применяем теорему 5.1.21(5). Мы используем здесь тот факт, что значение последнего параметра  $\gamma$  для  $\mathcal{A}_n^\bullet$  равно  $\gamma_{n-1}\gamma_n$ .

Чтобы построить этот подграф графа  $C(\tilde{x})$ , мы сперва находим особые элементы и стираем элементы  $(x, \pm \tilde{e}_0)$  и  $(\tilde{e}_0, \pm \gamma_n x)$  аналогично случаю  $C(x)$  при  $\chi = 1$ . Заметим, что  $(a, \tilde{b})$  и  $(\tilde{b}, \gamma_n a)$  соединены ребром, а их множества соседей совпадают, за исключением особых элементов. Следовательно, мы можем взять подграф на множестве всех соседей одного из особых элементов, как в случае  $C(x)$  при  $\chi = -1$ , и полученный граф будет изоморфен  $C^\bullet(x)$ .

□

**Замечание 5.3.10.** Для применения леммы 5.3.9 нам не требуется, чтобы вершины  $C(x)$  и  $C(\tilde{x})$  были подписаны именами соответствующих им элементов. В частности, поскольку  $n \geq 4$ , особые элементы могут быть найдены с помощью леммы 5.3.1.

Теперь мы можем построить по графам  $C(x)$  и  $C(\tilde{x})$  графы  $C^\circ(x)$  и  $C^\bullet(x)$ . Однако мы пока не можем различить  $C(x)$  и  $C(\tilde{x})$ , поэтому мы не знаем, какая из процедур должна быть применена к каждой конкретной компоненте связности. Определить это позволяет следующая лемма.

**Лемма 5.3.11.** *Рассмотрим такую компоненту связности  $C(x)$ , что  $x \in \mathcal{E}_n''$  и  $n \geq 4$ .*

- (1) *Если  $\chi = 1$ , то мы находим число изолированных цепочек между её особыми элементами. Если их не меньше шести, то  $x \in \mathcal{E}'_{n-1}$ . В противном случае, их в точности две, и тогда  $x = \tilde{y}$  для некоторого  $y \in \mathcal{E}'_{n-1}$ .*
- (2) *Если  $\chi = -1$ , то мы находим число изолированных двойных цепочек между парами её особых элементов. Если изолированных двойных цепочек нет, то  $x \in \mathcal{E}'_{n-1}$ . В противном случае, их не меньше двух, и тогда  $x = \tilde{y}$  для некоторого  $y \in \mathcal{E}'_{n-1}$ .*

*Доказательство.* Мы будем использовать лемму 5.3.9, описывающую требуемые преобразования в явном виде.

- (1) Пусть  $\chi = 1$ . Если  $x \in \mathcal{E}'_{n-1}$ , то по  $C(x)$  строится  $C^\circ(x)$  с тем же значением  $\chi$ , как изображено на рисунке 5.13. В  $C(x)$  имеется две изолированных цепочки, которые соответствуют элементам  $(\tilde{x}, \pm \tilde{e}_0)$  и  $(\tilde{e}_0, \pm \gamma_n \tilde{x})$ , и при искомом преобразовании эти цепочки стираются. Для  $C^\circ(x)$  также выполнено  $\chi = 1$ , поэтому в  $C^\circ(x)$  также есть две изолированных цепочки, которые соответствуют четырём изолированным цепочкам в  $C(x)$ . Следовательно, в  $C(x)$  не меньше шести изолированных цепочек.

Если  $x = \tilde{y}$  для некоторого  $y \in \mathcal{E}'_{n-1}$ , то по  $C(\tilde{y})$  строится  $C^\bullet(y)$  с противоположным  $\chi$ . Поскольку  $n \geq 4$ ,  $C^\bullet(y)$  связан по следствию 5.2.8. Следовательно, единственные две изолированные цепочки в  $C(\tilde{y})$  соответствуют элементам  $(y, \pm \tilde{e}_0)$  и  $(\tilde{e}_0, \pm \gamma_n y)$ .

- (2) Пусть теперь  $\chi = -1$ . Если  $x = \tilde{y}$  для некоторого  $y \in \mathcal{E}'_{n-1}$ , то по  $C(\tilde{y})$  строится  $C^\bullet(y)$  с противоположным  $\chi$ . Тогда для  $C^\bullet(y)$  выполнено  $\chi = 1$ , и поэтому в  $C^\bullet(y)$  по меньшей мере две изолированных цепочки. Значит, в  $C(\tilde{y})$  не меньше двух изолированных двойных цепочек.

Если  $x \in \mathcal{E}'_{n-1}$ , то по  $C(x)$  строится  $C^\circ(x)$  с тем же значением  $\chi$ . Поскольку  $n \geq 4$ ,  $C^\circ(x)$  связан по следствию 5.2.8, поэтому в  $C(x)$  нет изолированных двойных цепочек.

□

**Теорема 5.3.12.** *Пусть  $n \geq 4$ , и нам дан граф  $\Gamma_\epsilon(\mathcal{A}_{n+1})$ , вершины которого не подписаны именами соответствующих им элементов. Тогда мы можем построить  $\Gamma_\epsilon(\mathcal{A}_n^\circ)$  и  $\Gamma_\epsilon(\mathcal{A}_n^\bullet)$ .*

*Доказательство.* По лемме 5.3.2, мы можем определить значения  $\gamma_{n-1}$  и  $\gamma_n$  и найти  $C(e_0)$  и  $C(\tilde{e}_0)$ , если множества их вершин непусты. Тогда, по определению, мы знаем значение последнего параметра  $\gamma$  для обеих алгебр  $\mathcal{A}_n^\circ$  и  $\mathcal{A}_n^\bullet$ . Следовательно, из леммы 5.2.5 мы автоматически получаем явный вид  $C^\circ(e_0)$  и  $C^\bullet(e_0)$ , и нам достаточно построить  $C^\circ(x)$  и  $C^\bullet(x)$  для всех  $x \in \mathcal{E}'_{n-1}$ .

Пусть теперь  $C(x)$  — компонента связности  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  для некоторого  $x \in \mathcal{E}_n''$ . По следствию 5.2.9, мы знаем  $\chi(C(x))$ . По лемме 5.3.1, мы можем найти в  $C(x)$  особые элементы и затем воспользоваться леммой 5.3.11, чтобы узнать, выполнено ли  $x \in \mathcal{E}'_{n-1}$  или  $x = \tilde{y}$  для некоторого  $y \in \mathcal{E}'_{n-1}$ . Затем мы используем лемму 5.3.9 и получаем либо  $C^\circ(x)$ , либо  $C^\bullet(y)$ . Продолжая, мы строим все компоненты связности  $\Gamma_e(\mathcal{A}_n^\circ)$  и  $\Gamma_e(\mathcal{A}_n^\bullet)$ .  $\square$

### 5.3.4 Изоморфные графы и изоморфные алгебры

Нам понадобится следующая важная лемма об изоморфизмах алгебр Кэли-Диксона. Отметим, что в работе [23] она сформулирована для случая произвольного поля  $\mathbb{F}$ ,  $\text{char } \mathbb{F} \notin \{2, 3\}$ , а мы рассматриваем только случай  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ .

**Лемма 5.3.13.** [23, следствие 2.6] Пусть  $n \geq 3$ ,  $\gamma = \{\gamma_0, \dots, \gamma_n\}$  и  $\lambda = \{\lambda_0, \dots, \lambda_n\}$  — две последовательности параметров. Тогда  $\mathcal{A}_{n+1}^\gamma \cong \mathcal{A}_{n+1}^\lambda$ , если и только если  $\gamma_n = \lambda_n$  и  $\mathcal{A}_n^\gamma \cong \mathcal{A}_n^\lambda$ .

**Следствие 5.3.14.** Пусть  $n \geq 0$ ,  $\gamma = \{\gamma_0, \dots, \gamma_n\}$  и  $\lambda = \{\lambda_0, \dots, \lambda_n\}$  — две последовательности параметров. Тогда  $\mathcal{A}_{n+1}^\gamma \cong \mathcal{A}_{n+1}^\lambda$ , если и только если выполнены следующие условия:

- (1)  $\gamma_k = \lambda_k$  для всех  $k = 3, \dots, n$ ;
- (2) все параметры  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$  равны  $-1$ , если и только если все параметры  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  также равны  $-1$ .

*Доказательство.* Воспользуемся индукцией по  $n$ .

- (1) Если  $0 \leq n \leq 2$ , то требуемое утверждение непосредственно следует из предложения 1.4.8, так как при  $n \leq 2$  алгебра  $\mathcal{A}_{n+1}$  изоморфна либо  $\mathcal{M}_{n+1}$  (все параметры равны  $-1$ ), либо  $\mathcal{H}_{n+1}$  (хотя бы один из параметров равен 1).
- (2) Пусть теперь  $n \geq 3$ . По лемме 5.3.13,  $\mathcal{A}_{n+1}^\gamma \cong \mathcal{A}_{n+1}^\lambda$ , если и только если  $\gamma_n = \lambda_n$  и  $\mathcal{A}_n^\gamma \cong \mathcal{A}_n^\lambda$ . Остаётся применить предположение индукции к алгебрам  $\mathcal{A}_n^\gamma$  и  $\mathcal{A}_n^\lambda$ .  $\square$

**Теорема 5.3.15.** Пусть  $n \geq 3$ , и нам дан граф  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$ , вершины которого не подписаны именами соответствующих им элементов. Тогда мы можем найти  $n$  и значения всех параметров  $\gamma_k$ ,  $k = 3, \dots, n$ . Значения первых трёх параметров  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$  определены с точностью до изоморфизма  $\mathcal{A}_3$ .

*Доказательство.* Докажем теорему индукцией по  $n$ .

- (1) Если  $n = 3$ , то требуемое утверждение сразу вытекает из следствия 5.3.7.
- (2) Пусть теперь  $n \geq 4$ . По лемме 5.3.2, мы можем найти  $n$ ,  $\gamma_{n-1}$  и  $\gamma_n$ . Применим теорему 5.3.12, чтобы построить  $\Gamma_e(\mathcal{A}_n^\circ)$ . По предположению индукции, по графу  $\Gamma_e(\mathcal{A}_n^\circ)$  мы можем найти значения всех параметров  $\gamma_k$ ,  $k = 3, \dots, n-2$ , а значения параметров  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$  определены с точностью до изоморфизма  $\mathcal{A}_3$ .  $\square$

**Теорема 5.3.16.** Пусть  $n, m \geq 3$ ,  $\gamma = \{\gamma_0, \dots, \gamma_n\}$  и  $\lambda = \{\lambda_0, \dots, \lambda_m\}$  — две последовательности параметров. Тогда графы  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1}^\gamma)$  и  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{m+1}^\lambda)$  изоморфны, если и только если алгебры  $\mathcal{A}_{n+1}^\gamma$  и  $\mathcal{A}_{m+1}^\lambda$  изоморфны.

*Доказательство.* Импликация слева направо непосредственно вытекает из следствия 5.3.14 и теоремы 5.3.15.

Теперь докажем импликацию справа налево. Предположим, что  $\mathcal{A}_{n+1}^\gamma$  и  $\mathcal{A}_{m+1}^\lambda$  изоморфны. Тогда  $2^{n+1} = \dim \mathcal{A}_{n+1}^\gamma = \dim \mathcal{A}_{m+1}^\lambda = 2^{m+1}$ , откуда  $n = m$ . По следствию 5.3.14,  $\gamma_k = \lambda_k$  для всех  $k = 3, \dots, n$ , и все параметры  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$  равны  $-1$ , если и только если все параметры  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  также равны  $-1$ . Используя предложение 1.4.8, построим изоморфизм  $\varphi : \mathcal{A}_3^\gamma \rightarrow \mathcal{A}_3^\lambda$ , который переводит  $\pm \mathcal{E}_3^\gamma$  в  $\pm \mathcal{E}_3^\lambda$ . По индукции продолжим этот изоморфизм до изоморфизма  $\psi : \mathcal{A}_{n+1}^\gamma \rightarrow \mathcal{A}_{m+1}^\lambda$  так, что на каждом шаге он действует покомпонентно. Тогда  $\psi$  переводит пары базисных элементов в пары базисных элементов, а потому задаёт изоморфизм графов  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1}^\gamma)$  и  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{m+1}^\lambda)$ .  $\square$

## 5.4 Другой возможный подход

В теореме 5.3.16 мы показали, что при  $n \geq 3$  изоморфные алгебры  $\mathcal{A}_{n+1}$  имеют изоморфные графы. Однако в случае  $n \leq 2$  это неверно, см. подраздел 5.3.2. Причина этого состоит в том, что мы рассматриваем элементы вида  $(e_i^{(n)}, \pm e_j^{(n)})$ , но, например, изоморфизм между  $\mathcal{A}_3\{1, -1, -1\}$  и  $\mathcal{H}_3$  отображает некоторые базисные элементы из первой половины во вторую половину, и наоборот.

Эта проблема будет решена, если мы будем рассматривать делители нуля вида  $e_i^{(n+1)} \pm e_j^{(n+1)}$ , где  $e_i^{(n+1)}$  и  $e_j^{(n+1)}$  — различные элементы из  $\mathcal{E}'_{n+1}$ ,  $i < j$ . Элементы такого вида бывают трёх различных типов:

- (i)  $(e_i^{(n)}, \pm e_j^{(n)})$ , где  $0 < i$ ;
- (ii)  $(e_i^{(n)} \pm e_j^{(n)}, 0)$ , где  $0 < i < j$ ;
- (iii)  $(0, e_i^{(n)} \pm e_j^{(n)})$ , где  $i < j$ .

Поскольку  $(e_i^{(n)}, \pm e_j^{(n)})$  — дважды альтернативный элемент, удовлетворяющий условию (\*), из леммы 5.1.11 следует, что элементы типа (i) не могут быть ортогональны элементам типов (ii) и (iii). Следовательно, содержащие их компоненты связности будут такими же, как и в  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$ .

Что касается элементов типов (ii) и (iii), их условия ортогональности сводятся к равенству нулю некоторого произведения в  $\mathcal{A}_n$ . Например,  $(a, 0)(0, b) = (0, ba) = 0$  в  $\mathcal{A}_{n+1}$ , если и только если  $ba = 0$ . Мы знаем, что элемент  $(a, 0)$  является чисто мнимым, если и только если  $a$  является чисто мнимым. Однако  $(0, b)$  может быть чисто мнимым даже для не чисто мнимого  $b$ . Пусть  $\Re(a) = 0$ ,  $\Re(b) \neq 0$ ,  $ba = 0$ . Тогда, по предложению 2.3.4,  $(a, 0)$  ортогонален  $(0, b)$ , но  $a$  не ортогонален  $b$ . Следовательно, при индуктивном построении графов нам нужно рассматривать не только  $\Gamma_O(\mathcal{A}_n)$ , но и  $\Gamma_Z(\mathcal{A}_n)$ .

Заметим, что лемма 5.1.5 справедлива для пар делителей нуля даже в том случае, когда они не ортогональны. Отсюда нетрудно получить по индукции, что этот новый граф будет состоять из частей, соответствующих всем базисным элементам  $\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_{n-1}, \dots, \mathcal{A}_1$ , то есть

$$\begin{aligned} & C(e_0^{(n)}), C(e_1^{(n)}), C(e_2^{(n)}), \dots, C(e_{2^n-1}^{(n)}), \\ & C(e_0^{(n-1)}), C(e_1^{(n-1)}), \dots, C(e_{2^{n-1}-1}^{(n-1)}), \\ & \dots \\ & C(e_0^{(1)}), C(e_1^{(1)}). \end{aligned}$$

Никакие две из них не соединены между собой. Первая строчка соответствует элементам типа (i), тогда как остальные наследуются от алгебры  $\mathcal{A}_n$  и соответствуют элементам типов (ii) и (iii).

# Заключение

В диссертации исследовались различные аспекты теории графов отношений неассоциативных алгебр. В частности, изучались графы коммутативности, ортогональности и делителей нуля произвольных вещественных алгебр Кэли-Диксона. В рамках этого исследования естественным образом возникла необходимость изучения свойств делителей нуля, удовлетворяющих дополнительным ограничениям на норму и альтернативность их компонент. Изучение таких делителей нуля представляет независимый интерес, и в данной работе были обобщены результаты, полученные ранее в работах Морено, а также Бисса, Даггера и Исаксена для алгебр главной последовательности.

Получены следующие результаты:

- Показано, что любую пару делителей нуля, компоненты которых удовлетворяют некоторым дополнительным условиям на норму и альтернативность, можно продолжить до ориентированного шестиугольника в графе делителей нуля алгебры Кэли-Диксона. Доказано также, что в случае алгебр главной последовательности шестиугольники такого вида становятся подграфами в графе ортогональности соответствующей алгебры, и их можно продолжить до так называемых двойных шестиугольников, вершины которых имеют удобную таблицу умножения.
- Применение этих результатов к алгебре седенионов  $\mathbb{S}$  позволило полностью описать компоненты связности её графа ортогональности. Кроме того, показано, что в случае седенионов вершины произвольного двойного шестиугольника можно дополнить до базиса, который отличается от стандартного, но имеет простую таблицу умножения. Доказано, что в графе коммутативности седенионов делители нуля образуют компоненту связности, диаметр которой заключён между 3 и 4.
- Изучены свойства дважды альтернативных делителей нуля, компоненты которых имеют ненулевую норму. Для таких элементов получен явный вид аннуляторов и ортогонализатора, а также установлено соотношение между централизатором и ортогонализатором.
- С помощью данного соотношения установлена взаимосвязь между графами коммутативности и графами ортогональности контр-алгебр Кэли-Диксона малых размерностей: контркомплексных чисел, контркватернионов, контрроктонионов и контрседенионов. Графы ортогональности и делителей нуля этих алгебр описаны в терминах диаметров и клик.

- Для произвольной вещественной алгебры Кэли-Диксона  $\mathcal{A}_{n+1}$  рассмотрен граф ортогональности  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$ , вершинами которого являются пары базисных элементов. Показано, что построение  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$  можно осуществить с помощью рекурсивного алгоритма, и обратно, по заданному графу можно восстановить графы предыдущих алгебр. Это позволило доказать следующее утверждение: при  $n, m \geq 3$  алгебры  $\mathcal{A}_{n+1}^\gamma$  и  $\mathcal{A}_{m+1}^\lambda$  изоморфны, если и только если изоморфны соответствующие им графы  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1}^\gamma)$  и  $\Gamma_e(\mathcal{A}_{m+1}^\lambda)$ . Тем самым была решена проблема изоморфизма для графов ортогональности вещественных алгебр Кэли-Диксона на парах базисных элементов.

# Литература

- [1] A. Abdollahi, H. Shahverdi. Characterization of the alternating group by its non-commuting graph, *J. Algebra*, **357**, 203–207 (2012).
- [2] S. Akbari, H. Bidkhori, A. Mohammadian. Commuting graphs of matrix algebras, *Comm. Algebra*, **36(11)**, 4020–4031 (2008).
- [3] S. Akbari, M. Ghandehari, M. Hadian, A. Mohammadian. On commuting graphs of semisimple rings, *Linear Algebra Appl.*, **390**, 345–355 (2004).
- [4] S. Akbari, A. Mohammadian, H. Radjavi, P. Raja. On the diameters of commuting graphs, *Linear Algebra Appl.*, **418(1)**, 161–176 (2006).
- [5] D. F. Anderson, P. S. Livingston. The zero-divisor graph of a commutative ring, *J. Algebra*, **217(2)**, 434–447 (1999).
- [6] L. Babai, Á. Seress. On the diameter of permutation groups, *European J. Combin.*, **13(4)**, 231–243 (1992).
- [7] J. C. Baez. The octonions, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **39**, 145–205 (2002).
- [8] B. R. Bakhadly. Orthogonality graph of the algebra of upper triangular matrices, *Oper. Matrices*, **11(2)**, 455–463 (2017).
- [9] Б. Р. Бахадлы, А. Э. Гутерман, О. В. Маркова. Графы, определённые ортогональностью, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **428**, 49–80 (2014); Переведено в *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **207(5)**, 698–717 (2015).
- [10] I. Beck. Coloring of commutative rings, *J. Algebra*, **116(1)**, 208–226 (1988).
- [11] L. Bentz, D. Tray. Subalgebras of the split octonions, *Adv. Appl. Clifford Alg.*, **28(2)**, 40 (2018).
- [12] D. K. Biss, D. Dugger, D. C. Isaksen. Large annihilators in Cayley–Dickson algebras, *Comm. Algebra*, **36(2)**, 632–664 (2008).
- [13] D. K. Biss, D. Dugger, D. C. Isaksen. Large Annihilators in Cayley–Dickson Algebras II, *Bol. Soc. Mat. Mex.*, **13(2)**, 269–292 (2007).

- [14] R. Bott, J. Milnor. On the parallelizability of the spheres, *Bull. Am. Math. Soc.*, **64**, 87–89 (1958).
- [15] I. Božić, Z. Petrović. Zero-divisor graphs of matrices over commutative rings, *Comm. Algebra*, **37(4)**, 1186–1192 (2009).
- [16] W. Brown. *Matrices Over Commutative Rings*, Marcel Dekker, Inc. (1993).
- [17] H. C. Brown. *Structure of zero divisors, and other algebraic structures, in higher dimensional real Cayley-Dickson algebras*, Ph. D. Dissertations, University of Missouri–Rolla (1972).
- [18] R. E. Cawagas. On the structure and zero divisors of the Cayley-Dickson sedenion algebra, *Discuss. Math. Gen. Algebra Appl.*, **24(2)**, 251–265 (2004).
- [19] K.-C. Chan, D. Ž. Đoković. Conjugacy classes of subalgebras of the real sedenions, *Canad. Math. Bull.*, **49**, 492–507 (2006).
- [20] G. Dolinar, A. E. Guterman, B. Kuzma, P. Oblak. Commuting graphs and extremal centralizers, *Ars Math. Contemp.*, **7(2)**, 453–459 (2014).
- [21] G. Dolinar, B. Kuzma, N. Stopar. Characterization of orthomaps on the Cayley plane, *Aequationes Math.*, **92(2)**, 243–265 (2018).
- [22] G. Dolinar, B. Kuzma, N. Stopar. The orthogonality relation classifies formally real simple Jordan algebras, *Comm. Algebra*, **48(6)**, 2274–2292 (2020).
- [23] P. Eakin, A. Sathaye. On automorphisms and derivations of Cayley-Dickson algebras, *J. Algebra*, **129(2)**, 263–278 (1990).
- [24] A. Elduque, H. Ch. Myung. Flexible composition algebras and Okubo algebras, *Comm. Algebra.*, **19(4)**, 1197–1227 (1991).
- [25] W. Greub. *Linear algebra*, Springer New York (1975).
- [26] A. Э. Гутерман, О. В. Маркова. Графы ортогональности матриц над телами, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **463**, 81–93 (2017); Переведено в *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **232(6)**, 797–804 (2018).
- [27] M. Goldberg, T. J. Laffey. On the radius in Cayley–Dickson algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **143(11)**, 4733–4744 (2015).
- [28] Z. Han, G. Chen, X. Guo. A characterization theorem for sporadic simple groups, *Sib. Math. J.*, **49**, 1138–1146 (2008).
- [29] N. Jacobson. Composition algebras and their automorphisms, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **7**, 55–80 (1958).
- [30] K. Imaeda, M. Imaeda. Sedenions: Algebra and Analysis, *Appl. Math. Comput.*, **115(2–3)**, 77–88 (2000).

- [31] M. Kervaire. Non-parallelizability of the  $n$ -sphere for  $n > 7$ , *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **44(3)**, 280–283 (1958).
- [32] S. H. Khalil, P. Yiu. The Cayley–Dickson algebras, a theorem of A. Hurwitz, and quaternions, *Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź Sér. Rech. Déform.*, **24**, 117–169 (1997).
- [33] B. Kuzma. Dimensions of complex Hilbert spaces are determined by the commutativity relation, *J. Operator Theory*, **79(1)**, 201–211 (2018).
- [34] R. P. C. de Marrais. The 42 assessors and the box-kites they fly: diagonal axis-pair systems of zero-divisors in the sedenions’ 16 dimensions, [arXiv:math/0011260](https://arxiv.org/abs/math/0011260) (2000).
- [35] R. P. C. de Marrais. Flying higher than a box-kite: kite-chain middens, sand mandalas, and zero-divisor patterns in the  $2^n$ -ions beyond the sedenions, [arXiv:math/0207003](https://arxiv.org/abs/math/0207003) (2002).
- [36] R. P. C. de Marrais. Box-kites III: quizzical quaternions, mock octonions, and other zero-divisor-suppressing “sleeper cell” structures in the sedenions and  $2^n$ -ions, [arXiv:math/0403113](https://arxiv.org/abs/math/0403113) (2004).
- [37] K. McCrimmon. *A taste of Jordan algebras*, Springer-Verlag New York (2004).
- [38] G. Moreno. The zero divisors of the Cayley–Dickson algebras over the real numbers, *Bol. Soc. Mat. Mex. (tercera serie)*, **4(1)**, 13–28 (1998).
- [39] G. Moreno. Alternative elements in the Cayley–Dickson algebras, *Topics in Mathematical Physics, General Relativity and Cosmology in Honor of Jerzy Plebański*, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 333–346 (2006).
- [40] G. Moreno. Constructing zero divisors in the higher dimensional Cayley-Dickson algebras, [arXiv:math/0512517](https://arxiv.org/abs/math/0512517) (2005).
- [41] R. Moufang. Zur Structur von Alternativekörpern, *Math. Ann.*, **110**, 416–430 (1935).
- [42] S. B. Mulay. Cycles and symmetries of zero-divisors, *Comm. Alg.*, **30**, 3533–3558 (2002).
- [43] S. P. Redmond. The zero-divisor graph of a noncommutative ring, *Int. J. Commut. Rings*, **1(4)**, 203–211 (2002).
- [44] R. D. Schafer. On the algebras formed by the Cayley-Dickson process, *Amer. J. Math.*, **76(2)**, 435–446 (1954).
- [45] R. Solomon, A. Woldar. Simple groups are characterized by their non-commuting graphs, *J. Group Theory*, **16**, 793–824 (2013).
- [46] К. А. Жевлаков, А. М. Слинько, И. П. Шестаков, А. И. Ширшов. *Кольца, близкие к ассоциативным*, Москва, Наука (1978).

## Публикации автора по теме диссертации

### Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

- [47] А. Э. Гутерман, С. А. Жилина. Графы отношений вещественных алгебр Кэли–Диксона, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **472**, 44–75 (2018).  
English transl.: A. E. Guterman, S. A. Zhilina. Relationship graphs of real Cayley–Dickson algebras, *J. Math. Sci.*, **240(6)**, 733–753 (2019).  
С. А. Жилиной доказаны леммы 5.8, 8.10 и 8.11.  
DOI: 10.1007/s10958-019-04390-y  
Журнал индексируется в **Scopus**, **RSCI**. IF<sup>1</sup>: SJR 0.357.
- [48] А. Э. Гутерман, С. А. Жилина. Графы отношений алгебры седенионов, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **496**, 61–86 (2020).  
English transl.: A. E. Guterman, S. A. Zhilina. Relation graphs of the sedenion algebra, *J. Math. Sci.*, **255(3)**, 254–270 (2021).  
С. А. Жилиной доказаны теоремы 4.11, 4.15 и 5.2, следствия 4.10 и 4.16.  
DOI: 10.1007/s10958-021-05367-6  
Журнал индексируется в **Scopus**, **RSCI**. IF: SJR 0.357.
- [49] А. Э. Гутерман, С. А. Жилина. Контр-алгебры Кэли–Диксона: дважды альтернативные делители нуля и графы отношений, *Фундам. и прикл. мат.*, **23(3)**, 95–129 (2020).  
С. А. Жилиной доказаны леммы 4.11, 4.16, 4.21 и 5.20, теоремы 4.23, 4.30, 5.30 и 5.32.  
<http://mi.mathnet.ru/fpm1900>  
Журнал индексируется в **RSCI**.
- [50] С. А. Жилина. Графы отношений алгебры контрседенионов, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **482**, 87–113 (2019).  
English transl.: S. A. Zhilina. Relation graphs of the split-sedenion algebra, *J. Math. Sci.*, **249(2)**, 167–184 (2020).  
DOI: 10.1007/s10958-020-04930-x  
Журнал индексируется в **Scopus**, **RSCI**. IF: SJR 0.357.
- [51] S. Zhilina. Orthogonality graphs of real Cayley–Dickson algebras. Part I: Doubly alternative zero divisors and their hexagons, *Int. J. Algebra Comput.*, **31(4)**, 663–689 (2021).  
DOI: 10.1142/s0218196721500326  
Журнал индексируется в **WoS**, **Scopus**. IF: WoS 0.719, SJR 0.648 (Q2).

---

<sup>1</sup>Указаны импакт-факторы WoS за 2020 год и SJR за 2021 год.

- [52] S. Zhilina. Orthogonality graphs of real Cayley–Dickson algebras. Part II: The subgraph on pairs of basis elements, *Int. J. Algebra Comput.*, **31(4)**, 691–725 (2021).

DOI: 10.1142/s0218196721500338

Журнал индексируется в **WoS, Scopus**. IF: WoS 0.719, SJR 0.648 (Q2).

## Другие публикации автора

- [53] Lj. Arambašić, A. Guterman, B. Kuzma, R. Rajić, S. Zhilina. Orthograph related to mutual strong Birkhoff–James orthogonality in  $C^*$ -algebras, *Banach J. Math. Anal.*, **14(4)**, 1751–1772 (2020).

DOI: 10.1007/s43037-020-00074-x

Журнал индексируется в **WoS, Scopus**. IF: WoS 0.99, SJR 0.554 (Q2).

- [54] Lj. Arambašić, A. Guterman, B. Kuzma, R. Rajić, S. Zhilina. Symmetrized Birkhoff–James orthogonality in arbitrary normed spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **502(1)**, 125203 (2021).

DOI: 10.1016/j.jmaa.2021.125203

Журнал индексируется в **WoS, Scopus**. IF: WoS 1.583 (Q1), SJR 0.859 (Q1).

- [55] Lj. Arambašić, A. Guterman, B. Kuzma, R. Rajić, S. Zhilina. Operators preserving mutual strong Birkhoff–James orthogonality on  $B(H)$ , *Linear Algebra Appl.*, **624**, 27–43 (2021).

DOI: 10.1016/j.laa.2021.04.003

Журнал индексируется в **WoS, Scopus**. IF: WoS 1.401 (Q2), SJR 0.884 (Q1).

- [56] Lj. Arambašić, A. Guterman, B. Kuzma, R. Rajić, S. Zhilina. What does Birkhoff–James orthogonality know about the norm?, *Publ. Math. Debr.*, Accepted (2022).

Журнал индексируется в **WoS, Scopus**. IF: WoS 0.636, SJR 0.475 (Q2).

- [57] Lj. Arambašić, A. Guterman, B. Kuzma, S. Zhilina. Birkhoff–James orthogonality: characterizations, preservers, and orthogonality graphs, in: *Operator and Norm Inequalities and Related Topics*, Trends in Mathematics, Springer International Publishing AG (2022).

DOI: 10.1007/978-3-031-02104-6\_8

Серия книг индексируется в **Scopus**. IF: SJR 0.217.

- [58] A. E. Guterman, S. A. Zhilina. On the lengths of standard composition algebras, *Comm. Algebra*, **50(3)**, 1092–1105 (2022).

DOI: 10.1080/00927872.2021.1977945

Журнал индексируется в **WoS, Scopus**. IF: WoS 0.762, SJR 0.579 (Q2).