МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Тлюстангелов Ибрагим Асланович

Исследование симметрий периодов полиэдров Клейна, соответствующих алгебраическим решеткам

Специальность 1.1.5 – математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2022

Работа выполнена на кафедре теории чисел механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	**Герман Олег Николаевич,** доктор физико-математических наук
Официальные оппоненты:	**Добровольский Николай Михайлович** доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, физико-математический факультет, заведующий кафедрой **Илларионов Андрей Анатольевич** доктор физико-математических наук, Хабаровское отделение ФГБУН Института прикладной математики Дальневосточного отделения РАН, главный научный сотрудник **Устинов Алексей Владимирович** доктор физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», факультет компьютерных наук, профессор

Защита диссертации состоится 23 декабря 2022 года в 16:45 на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 (МГУ.01.17) при ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: sbgashkov@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций Фундаментальной библиотеки Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (Москва, Ломоносовский проспект, д. 27) и на сайте ИСА «ИСТИНА»: https://istina.msu.ru/dissertations/513079236.

Автореферат разослан 22 ноября 2022 года.

Ученый секретарь диссертационного совета, д.ф.-м.н., профессор **Гашков С. Б.**

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень ее разработанности

Цепная дробь сопоставляет каждому действительному числу конечную или бесконечную последовательность неполных частных, первый элемент которой является целым числом, а все последующие — натуральными. Известно, что все иррациональные числа и только они имеют бесконечное разложение в цепную дробь. В 1744 году Эйлер[1] опубликовал свою первую работу про цепные дроби, где он показал, что если разложение числа α в цепную дробь, начиная с некоторого момента, периодично, то α является квадратичной иррациональностью (то есть α является иррациональным корнем многочлена второй степени с целыми коэффициентами). Обратное утверждение доказал в 1770 году Лагранж[2], завершив таким образом доказательство классической теоремы, носящей его имя.

Настоящая диссертация появилась в результате исследования достаточно простого вопроса о том, в каком случае период $(a_0, a_1, \ldots, a_{t-1}, a_t)$ цепной дроби квадратичной иррациональности α является симметричным, то есть в каком случае последовательность $(a_t, a_{t-1}, \ldots, a_1, a_0)$ также является периодом цепной дроби числа α. Ответ на этот вопрос можно вывести из результатов классиков — Э. Галуа[3], А. М. Лежандра[4], М. Крайтчика[5], О. Перрона[6]. При этом симметричность периода допускает весьма наглядную геометрическую интерпретацию. С точки зрения этой геометрической интерпретации естественно наряду с самой квадратичной иррациональностью α рассматривать сопряженное число α'.

В 1828 году Галуа в своей самой первой работе показал, что период цепной дроби квадратичной иррациональности α совпадает с записанным в обратном порядке периодом цепной дроби сопряженного числа

[1] L. Euler *De fractionibus continuis dissertatio.* Comm. Acad. Sci. Petropol., **9** (1744), 98–137.

[2] J. L. Lagrange *Additions au mémoire sur la résolution des équations numériques.* Mém. Acad. royale sc. et belles-lettres, Berlin, **24** (1770), 581–652.

[3] E. Galois *Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques.* Annales de Mathématiques, **19** (1828), 294–301.

[4] A. M. Legendre *Théorie des nombres.* (3 éd.), Paris (1830).

[5] M. Kraitchik *Théorie des nombres. Tome II.* Paris (1926).

[6] O. Perron *Die Lehre von den Kettenbrüchen. Band I.* (3 Aufl.), Teubner (1954).

α'. При этом, если α является приведенной квадратичной иррациональностью, то есть $\alpha > 1$ и $-1 < \alpha' < 0$, то цепные дроби чисел α и $-1/\alpha'$ являются чисто периодическими. В этом случае, "склеивая" последовательности неполных частных этих чисел, можно получить бесконечную в обе стороны периодичную последовательность. Такая последовательность имеет тривиальные симметрии, которые являются в точности сдвигами этой последовательности вдоль периодов. Вопрос симметричности периода цепной дроби квадратичной иррациональности α эквивалентен наличию дополнительных симметрий, "переворачивающих" построенную последовательность относительно некоторого элемента или позиции между элементами. Такие дополнительные симметрии мы называем палиндромическими, а соответствующий период — циклическим палиндромом.

В качестве упомянутой выше геометрической точки зрения мы взяли полигоны Клейна — конструкцию, предложенную Ф. Клейном[7] в 1895 году. Данная конструкция допускает естественное многомерное обобщение — полиэдры Клейна. Это многомерное обобщение позволяет работать с алгебраическими числами более высоких степеней. Соответственно, многие классические утверждения про обыкновенные цепные дроби допускают многомерные обобщения в терминах полиэдров Клейна. Ряд такого рода обобщений был получен В. И. Арнольдом, Х. Цушиаши, Е. И. Коркиной, Ж. Лашо, А. Д. Брюно, В. И. Парусниковым, Ж.-О. Муссафиром, О. Н. Германом, О. Н. Карпенковым, М. Л. Концевичем, Ю. М. Суховым, Е. Л. Лакштановым, А. А. Илларионовым, А. В. Быковской, И. А. Макаровым.

Полиэдры Клейна, соответствующие вполне вещественным расширениям поля $\mathbb{Q}$ степени n, обладают $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$-симметриями, гарантируемыми теоремой Дирихле об алгебраических единицах. Но у таких полиэдров Клейна могут быть и дополнительные $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$-симметрии. Такие симметрии мы по аналогии с обыкновенными цепными дробями называем палиндромическими, а соответствующую $(n-1)$-мерную алгебраическую цепную дробь, определенную как объединение границ полиэдров Клейна,

[7] F. Klein *Uber eine geometrische Auffassung der gewohnlichen Kettenbruchentwichlung.* Nachr. Ges. Wiss., Gottingen, **3** (1895), 357–359.

мы называем палиндромичной.

Данная диссертация посвящена поиску критериев палиндромичности $(n-1)$-мерной алгебраической цепной дроби при $n \geq 3$.

Цели и задачи диссертации

Настоящая диссертация посвящена построению критериев того, что многомерные алгебраические цепные дроби обладают собственными, собственными циклическими или палиндромическими симметриями в размерностях $n = 2, 3, 4$. Также ставится задача доказательства существования палиндромичных цепных дробей в произвольной размерности.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования являются многомерные алгебраические цепные дроби.

Предметом исследования являются палиндромические симметрии многомерных цепных дробей. В частности — собственные и собственные циклические симметрии.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Для доказательства теорем автором был разработан новый метод исследования палиндромических симметрий при помощи их характеристических многочленов. Также новой является конструкция, использующая циклические расширения Галуа для построения серий палиндромичных цепных дробей в произвольной размерности.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие результаты диссертации:

1. Доказательство критерия того, что одномерная алгебраическая цепная дробь обладает палиндромическими симметриями. Доказатель-

ство существования палиндромичной одномерной цепной дроби, не обладающей собственными симметриями.

2. Доказательство существования в произвольной размерности алгебраической цепной дроби, обладающей собственной циклической симметрией.

3. Доказательство критерия того, что двумерная алгебраическая цепная дробь обладает палиндромическими симметриямии.

4. Доказательство критерия того, что трехмерная алгебраическая цепная дробь обладает собственными симметриями.

5. Доказательство критерия того, что трехмерная алгебраическая цепная дробь обладает собственными циклическими симметриями. Доказательство существования трехмерной алгебраической цепной дроби, обладающей собственными симметриями, но не обладающей собственными циклическими симметриями.

Методы исследования

В диссертации используются методы геометрии чисел, теории цепных дробей и алгебраической теории чисел.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации представляют интерес для специалистов в области геометрии чисел, теории цепных дробей и алгебраической теории чисел. Разработанная в ходе исследования техника может быть использована для анализа симметрий алгебраических решеток и построения решеток со специальными диофантовыми свойствами.

Апробация результатов

Результаты диссертации опубликованы в 4 статьях [1, 2, 3, 4], в том числе 4 статьях по теме диссертации, из которых 4 опубликованы в рецензируемых научных журналах, входящих в базы данных РИНЦ и Scopus, 3 опубликованы в рецензируемых научных журналах, входящих в базу данных Web of Science. Результаты диссертации были представлены на следующих научных семинарах и конференциях:

- Научно-исследовательский семинар кафедры теории чисел под руководством проф. Ю. В. Нестеренко, проф. Н. Г. Мощевитина, доц. О. Н. Германа, МГУ им. М. В. Ломоносова

- Семинар “Арифметика и геометрия” под руководством проф. Н. Г. Мощевитина, доц. О. Н. Германа, асс. И. П. Рочева, МГУ им. М. В. Ломоносова

- XXVIII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов-2021”, МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 12 – 23 апреля 2021

- Международная конференция математических центров мирового уровня, Сочи, Россия, 9 – 13 августа 2021

- Международная конференция “Осенние математические чтения в Адыгее 2021”, Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия, 12 – 17 октября 2021

- Вторая конференция Математических центров России, Москва, Россия, 7 – 11 ноября 2022

Личный вклад соискателя

Основные теоремы в совместных работах [1, 2] доказаны автором. Соавтором (Германом О.Н.) были доказаны некоторые вспомогательные утверждения и написаны некоторые абзацы, улучшающие подачу материала. Результаты работ [3, 4] получены автором самостоятельно.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Текст работы изложен на 131 странице. Список литературы содержит 21 наименование.

Краткое содержание работы

Во введении приводится историческая справка по исследуемой области, раскрывается актуальность темы исследования, сформулированы цели и задачи работы, перечислены используемые методы, а также основные результаты и положения диссертации, выносимые на защиту. Также приведена информация о публикациях и апробации работы.

Содержание главы 1

Начало первой главы диссертации посвящено обзору предшествующих результатов, связанных с обыкновенными цепными дробями. Введем некоторые необходимые определения.

Определение 1. *Периодом* называется множество слов, образованных всеми циклическими сдвигами слова $a = (a_0, \dots, a_t)$ и соответствующая этому слову бесконечная в обе стороны последовательность $(\bar{a})$.

Данное определение периода согласуется с естественным разбиением чисел на классы эквивалентности относительно разложения в цепную дробь:

Определение 2. Два числа α и ω называются *эквивалентными* (и пишется $\alpha \sim \omega$), если у разложений α и ω в цепную дробь существуют совпадающие *концы.*

Для уточнения понятия симметричности периода очень уместным оказывается следующее

Определение 3. Конечная последовательность $(a_0, a_1, \dots, a_{t-1}, a_t)$ называется *циклическим палиндромом*, если существует такой циклический сдвиг индексов σ, что $a_k = a_{\sigma(t-k)}$ для любого $k \in \{0, \dots, t\}$.

Ответ на вопрос о циклическом палнидроме из введения дает следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть α - квадратичная иррациональность. Период цепной дроби α является циклическим палиндромом тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

(а) $\alpha \sim \omega: \ \omega + \omega' = 0 \iff \omega^2 \in \mathbb{Q}$;

(б) $\alpha \sim \omega: \ \omega + \omega' = 1 \iff (\omega - 1/2)^2 \in \mathbb{Q}$;

(в) $\alpha \sim \omega: \ \omega\omega' = 1$;

(г) $\alpha \sim \omega: \ \omega\omega' = -1$.

Более того, (б) *эквивалентно* (в).

Подробное доказательство теоремы 1, использующее полигоны Клейна, изложено в первой главе диссертации. Стоит отметить, что в этом доказательстве существенно используется лемма Коркиной[8] о построении парусов Клейна с заданной последовательностью целочисленных длин и целочисленных углов. Также в первой главе методами геометрии чисел приводится доказательство теорем Галуа и Лагранжа о периодах цепных дробей квадратичных иррациональностей.

Содержание главы 2

Геометрическая конструкция, рассматриваемая в первой главе, позволяет весьма изящно перейти от классического случая к многомерному. Для описания такого обобщения рассмотрим $l_1, \ldots, l_n$ — одномерные подпространства пространства $\mathbb{R}^n$, линейная оболочка которых совпадает со всем $\mathbb{R}^n$. Гиперпространства, натянутые на всевозможные $(n-1)$-наборы из этих подпространств, разбивают $\mathbb{R}^n$ на 2^n симплициальных конусов. Будем обозначать множество этих конусов через

$$\mathcal{C}(l_1, \ldots, l_n).$$

Симплициальный конус с вершиной в начале координат $\mathbf{0}$ будем называть *иррациональным*, если линейная оболочка любой его гиперграни не содержит целых точек, кроме начала координат $\mathbf{0}$.

Определение 4. Пусть C — иррациональный конус, $C \in \mathcal{C}(l_1, \ldots, l_n)$. Выпуклая оболочка $\mathcal{K}(C) = \operatorname{conv}(C \cap \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\})$ и его граница $\partial(\mathcal{K}(C))$

[8] Е. И. Коркина *Двумерные цепные дроби. Самые простые примеры.* Тр. МИАН., **209** (1995), 124–144.

называются соответственно *полиэдром Клейна* и *парусом Клейна*, соответствующими конусу C. Объединение же всех 2^n парусов

$$\mathrm{CF}(l_1,\dots,l_n)=\bigcup_{C\in\mathcal{C}(l_1,\dots,l_n)}\partial(\mathcal{K}(C))$$

называется $(n-1)$*-мерной цепной дробью.*

$(n-1)$-мерные многогранники, из которых состоит парус $\partial(\mathcal{K}(C))$, вообще говоря, могут быть неограниченными (О. Н. Герман[9] показал, что отсутствие неограниченных граней равносильно иррациональности двойственного к C конуса). Грани полиэдра Клейна, будучи многомерными аналогами рёбер полигонов Клейна, играют роль неполных частных[10,11,12].

Про обыкновенные цепные дроби алгебраических чисел степени $n\geqslant 3$ известно не много, не известно даже, могут ли неполные частные такого числа быть чем-то ограничены. Геометрические же цепные дроби, строящиеся по алгебраическим числам, обладают периодической структурой — так же, как полигоны Клейна, строящиеся по квадратичным иррациональностям. Дело в том, что алгебраические числа степени n тесно связаны с операторами из $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Напомним, что оператор из $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ с вещественными собственными значениями, характеристический многочлен которого неприводим над $\mathbb{Q}$, называется *гиперболическим.* Известно, что выполняется следующее

Предложение 1. *Числа $1,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}$ образуют базис некоторого вполне вещественного расширения K поля $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда вектор $(1,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})$ является собственным для некоторого гиперболического оператора $A\in\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. При этом вектора $(1,\sigma_i(\alpha_1),\dots,\sigma_i(\alpha_{n-1}))$, $i=1,\dots,n$, где $\sigma_1(=\mathrm{id}),\sigma_2,\dots,\sigma_n$ — все вложения K в $\mathbb{R}$, образуют базис $\mathbb{R}^n$, состоящий из собственных векторов оператора A.*

[9] О. Н. Герман *Паруса и норменные минимумы решеток.* Матем. сб., **196**:3 (2005), 31–60.

[10] O. N. German *Klein polyhedra and lattices with positive norm minima.* Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, **19** (2007), 157–190.

[11] О. Н. Герман, Е. Л. Лакштанов *О многомерном обобщении теоремы Лагранжа для цепных дробей.* Известия РАН. Сер. матем., **72**:1 (2008), 51–66.

[12] O. N. Karpenkov *Geometry of Continued Fractions.* Algorithms and Computation in Mathematics, **26**, Springer-Verlag (2013).

В размерности $n = 2$ предложение 1 позволяет геометрически проинтерпретировать классическую теорему Лагранжа о периодичности обыкновенной цепной дроби. Геометрически теорема Лагранжа означает, что последовательность целочисленных длин и углов паруса одномерной цепной дроби $\mathrm{CF}(l_1, l_2)$ периодична тогда и только тогда, когда направления l_1 и l_2 являются собственными для некоторого $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ оператора с различными вещественными собственными значениями.

Определение 5. Пусть $l_1, \ldots, l_n$ — собственные подпространства некоторого гиперболического оператора $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Тогда $(n-1)$-мерная цепная дробь $\mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n)$ называется *алгебраической*. Мы будем также говорить, что эта дробь *ассоциирована* с оператором A и писать $\mathrm{CF}(A) = \mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n)$. Множество всех $(n-1)$-мерных алгебраических цепных дробей будем обозначать $\mathfrak{A}_{n-1}$.

Будем называть *группой симметрий* алгебраической цепной дроби $\mathrm{CF}(A) = \mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n)$ множество

$$\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big) = \Big\{G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \;\Big|\; G\big(\mathrm{CF}(A)\big) = \mathrm{CF}(A)\Big\}.$$

Из соображений непрерывности ясно, что для каждого $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$ однозначно определена перестановка σ_G, такая что

$$G(l_i) = l_{\sigma_G(i)}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

И обратно, если для $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ существует такая перестановка σ_G, что выполняются соотношения (1), то $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$.

Ясно, что если $\mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n) = \mathrm{CF}(A) \in \mathfrak{A}_{n-1}$, то оператор A, а также любая его степень, сохраняет цепную дробь $\mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n)$ (то есть отображает объединение всех 2^n парусов на себя). Из теоремы Дирихле об алгебраических единицах следует, что существует подгруппа группы $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$, изоморфная $\mathbb{Z}^{n-1}$, каждый элемент которой коммутирует с A и сохраняет $\mathrm{CF}(l_1, \ldots, l_n)$. Стоит отметить, что относительно действия этой подгруппы на любом из 2^n парусов возникает фундаментальная область, которую можно отождествить с $(n-1)$-мерным тором. Для каждого элемента G, принадлежащего этой подгруппе, $\sigma_G = \mathrm{id}$. Изоморфизм, о котором было сказано выше, устанавливается во второй главе диссертации, где также приводится доказательство предложения 1. В этих доказательствах, помимо использования теоремы Дирихле, подробно изучается связь между алгебраическими единицами и $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$-матрицами.

Определение 6. Оператор $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$, такой что $\sigma_G = \mathrm{id}$, будем называть *симметрией Дирихле* дроби $\mathrm{CF}(A) \in \mathfrak{A}_{n-1}$.

В $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$, вообще говоря, могут существовать такие элементы G, для которых $\sigma_G \neq \mathrm{id}$.

Определение 7. Оператор $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$, не являющийся симметрией Дирихле, будем называть *палиндромической симметрией* дроби $\mathrm{CF}(A)$. Если множество палиндромических симметрией цепной дроби непусто, то такую цепную дробь будем называть *палиндромичной*.

Определение 8. Симметрия $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$ называется *циклической*, если σ_G — циклическая перестановка.

Очевидно, что все циклические симметрии цепной дроби $\mathrm{CF}(A)$ являются палиндромическими симметриями этой цепной дроби.

Определение 9. Палиндромическая симметрия $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$ называется *собственной*, если у оператора G существует неподвижная точка на некотором парусе цепной дроби $\mathrm{CF}(A)$. Палиндромическая симметрия $G \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{CF}(A)\big)$, не являющаяся собственной, называется *несобственной*.

Во второй главе диссертации проверяется, что любая $(n-1)$-мерная алгебраическая цепная дробь из определенного класса $\mathbf{CF}$ обладает палиндромическими симметриями. При помощи нормальных базисов циклических вполне вещественных расширений Галуа доказывается, что множество $\mathbf{CF}$ непусто для любого $n > 1$. Это дает доказательство следующего утверждения.

Теорема 2. *Для любого целого $n > 1$ существует $(n-1)$-мерная цепная дробь $\mathrm{CF}(A)$, обладающая собственной циклической палиндромической симметрией.*

Содержание главы 3

Дадим следующее определение, естественным образом обобщающее понятие эквивалентности (обыкновенных) цепных дробей.

Определение 10. Пусть $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ — вектора в $\mathbb{R}^n$ и пусть их первые координаты равны 1. Будем говорить, что $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ *эквивалентны* и писать $\mathbf{v}_1 \sim \mathbf{v}_2$, если существует такой оператор $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ и такое $\mu \in \mathbb{R}$, что $X\mathbf{v}_1 = \mu\mathbf{v}_2$.

Замечание. В случае $n = 2$ отношение $(1, \alpha) \sim (1, \beta)$ равносильно отношению $\alpha \sim \beta$ из определения 2.

Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа позволяет переформулировать теорему 1 как критерий палиндромичности (одномерной) геометрической цепной дроби.

Теорема 3. *Пусть* $\mathrm{CF}(l_1, l_2) \in \mathfrak{A}_1$ *и пусть подпространство* l_1 *порождено вектором* $(1, \alpha)$*. Тогда* $\mathrm{CF}(l_1, l_2)$ *имеет собственную симметрию в том и только в том случае, если существует такое алгебраическое число* ω *степени* 2 *со своим сопряжённым* ω'*, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

(а) $(1, \alpha) \sim (1, \omega): \quad \mathrm{Tr}(\omega) = \omega + \omega' = 0$;

(б) $(1, \alpha) \sim (1, \omega): \quad \mathrm{Tr}(\omega) = \omega + \omega' = 1$.

Более того, существование ω*, удовлетворяющего условию* (б)*, равносильно существованию* ω*, удовлетворяющего условию*

(в) $(1, \alpha) \sim (1, \omega): \quad \mathrm{N}(\omega) = \omega\omega' = 1$.

В третьей главе диссертации доказывается критерий палиндромичности цепной дроби для $n = 3$, аналогичный теореме 3:

Теорема 4. *Пусть* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3) \in \mathfrak{A}_2$ *и пусть подпространство* l_1 *порождено вектором* $(1, \alpha, \beta)$*. Тогда* $\mathrm{CF}(l_1, l_2, l_3)$ *имеет собственную симметрию в том и только в том случае, если существует такое алгебраическое число* ω *степени* 3 *со своими сопряжёнными* ω' *и* ω''*, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

(а) $(1, \alpha, \beta) \sim (1, \omega, \omega'): \quad \mathrm{Tr}(\omega) = \omega + \omega' + \omega'' = 0$;

(б) $(1,\alpha,\beta)\sim(1,\omega,\omega')$: $\quad \mathrm{Tr}(\omega)=\omega+\omega'+\omega''=1.$

Более того, существование ω, удовлетворяющего условию (б), *равносильно существованию ω, удовлетворяющего любому из следующих двух условий:*

(в) $(1,\alpha,\beta)\sim(1,\omega,1/\omega')$: $\quad \mathrm{N}(\omega)=\omega\omega'\omega''=1;$

(г) $(1,\alpha,\beta)\sim(1,\omega,-1/\omega')$: $\quad \mathrm{N}(\omega)=\omega\omega'\omega''=-1.$

При доказательстве теоремы 4 исследуются характеристические многочлены палиндромических симметрий. Такое исследование позволяет существенно сузить класс возможных палиндромических симметрий и получить детальную информацию о строении собственных подпространств таких симметрий. Далее в доказательстве теоремы 4 при помощи метода спуска строятся два тетраэдра, которые переходят в себя при действии палиндромических симметрий. Для завершения доказательства остается заметить, что эти тетраэдры $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$-изоморфны тетраэдрам, вершины которых имеют конкретные целые координаты.

Стоит отметить, что в отличии от размерности $n=2$, при $n=3$ любая палиндромичная цепная дробь обладает собственной циклической симметрией, что и показывается в конце третьей главы.

Содержание главы 4

В четвертой главе диссертации доказываются критерии того, что трехмерная алгебраическая цепная дробь обладает собственными или собственными циклическими симметриями:

Теорема 5. *Пусть* $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\mathfrak{A}_3$ *и пусть подпространство* l_1 *порождено вектором* $(1,\alpha,\beta,\gamma)$. *Пусть* $K=\mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)$ *и* $\sigma_1(=\mathrm{id}),\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4$ *— все вложения поля* K *в* $\mathbb{R}$ *(см. предложение 1). Тогда* $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ *имеет собственную палиндромическую симметрию в том и только в том случае, если (с точностью до перестановки индексов) выполняется*

$$\sigma_3(K)=K,\quad \sigma_4(K)=\sigma_2(K),\quad \sigma_3^2=\sigma_1=\mathrm{id},\quad \sigma_4=\sigma_2\sigma_3$$

и существуют такие алгебраические числа ω и ψ степени 4, *принадлежащие полю K, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

(1) $(1,\alpha,\beta,\gamma)\sim(1,\omega,\psi,\omega')$: $\quad \psi+\psi'=-(\omega+\omega')$;

(2) $(1,\alpha,\beta,\gamma)\sim(1,\omega,\psi,\omega')$: $\quad \psi+\psi'=1-(\omega+\omega')$;

(3) $(1,\alpha,\beta,\gamma)\sim(1,\omega,\psi,\omega')$: $\quad \psi+\psi'=2-(\omega+\omega')$;

(4) $(1,\alpha,\beta,\gamma)\sim(1,\omega,\psi,\frac{\omega+\omega'}{2})$: $\quad \psi+\psi'=-(\omega+\omega')$;

(5) $(1,\alpha,\beta,\gamma)\sim(1,\omega,\psi,\frac{\omega+\omega'}{2})$: $\quad \psi+\psi'=2-(\omega+\omega')$;

(6) $(1,\alpha,\beta,\gamma)\sim(1,\omega,\psi,\frac{\omega+\omega'+1}{2})$: $\quad \psi+\psi'=-(\omega+\omega')$;

(7) $(1,\alpha,\beta,\gamma)\sim(1,\omega,\psi,\frac{\omega+\omega'+1}{2})$: $\quad \psi+\psi'=2-(\omega+\omega')$;

(8) $(1,\alpha,\beta,\gamma)\sim(1,\omega,\psi,\frac{\omega+\omega'}{2})$: $\quad \psi+\psi'=1-\frac{\omega+\omega'}{2}$;

(9) $(1,\alpha,\beta,\gamma)\sim(1,\omega,\psi,\frac{\omega+\omega'}{2})$: $\quad \psi+\psi'=2-\frac{\omega+\omega'}{2}$;

(10) $(1,\alpha,\beta,\gamma)\sim(1,\omega,\psi,\frac{\omega'-\omega}{4})$: $\quad \psi+\psi'=2-\frac{\omega+\omega'}{2}$,

где $\omega'=\sigma_3(\omega), \psi'=\sigma_3(\psi)$.

Теорема 6. *Пусть* $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\mathfrak{A}_3$ *и пусть подпространство* l_1 *порождено вектором* $(1,\alpha,\beta,\gamma)$. *Пусть* $K=\mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)$. *Тогда* $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)$ *имеет собственную циклическую симметрию в том и только в том случае, если* K *— циклическое расширение Галуа степени* 4, *группа Галуа которого порождается вложением* σ, *и существует такое алгебраическое число* $\omega\in K$ *степени* 4, *что выполнено хотя бы одно из семи условий* (1) - (7) *теоремы* 5 *для* $\psi=\sigma_2(\omega)$.

В доказательстве теорем 5 и 6 используются методы, аналогичные методам доказательства теоремы 4.

Следующее утверждение, также доказываемое в третьей главе, показывает, что, в отличии от размерностей $n=2$ и $n=3$, в размерности $n=4$ не всякая цепная дробь, обладающая собственными симметриями, обладает собственными циклическими симметриями:

Предложение 2. *Существуют такие вещественные числа* α, β, γ, *что подпространство* l_1 *порождено вектором* $(1,\alpha,\beta,\gamma)$, *вполне вещественное расширение* $K=\mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)$ *поля* $\mathbb{Q}$ *не является нормальным и* $\mathrm{CF}(l_1,l_2,l_3,l_4)\in\mathfrak{A}_3$ *обладает собственными симметриями, но не обладает собственными циклическими симметриями.*

В доказательстве предложения 2 строится вполне вещественное расширение K поля $\mathbb{Q}$ степени 4, не являющееся нормальным расширением, но удовлетворяющее условиям на K из теоремы 5. Искомая цепная дробь строится при помощи предложения 1 по такому базису расширения K, который удовлетворяет условию (1) теоремы 5.

Заключение. В заключении перечислены основные результаты работы и возможные перспективы дальнейших исследований.

Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю, д.ф.-м.н. О. Н. Герману за постановки задач, внимание к работе и плодотворные обсуждения. Также автор благодарит д.ф.-м.н., проф. Н. Г. Мощевитина, д.ф.-м.н., проф., член-корр. РАН Ю. В. Нестеренко и сотрудников кафедры теории чисел механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова за полезные комментарии.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ

[1] O. N. German, I. A. Tlyustangelov *Palindromes and periodic continued fractions.* Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory **6**:2–3 (2016), 354–373. И.А. Тлюстангеловым доказана теорема 1.

Журнал индексируется РИНЦ, Scopus. IF SJR: 0.276.

[2] О. Н. Герман, И. А. Тлюстангелов *Симметрии двумерной цепной дроби.* Изв. РАН. Сер. матем., **85**:4 (2021), 53–68. И.А. Тлюстангеловым доказаны предложение 4 и теорема 1.

Журнал индексируется РИНЦ, Scopus, WoS. IF SJR: 0.726, IF WoS: 0.978.

[3] И. А. Тлюстангелов *Собственные циклические симметрии многомерных цепных дробей.* Матем. сб., **213**:9 (2022), 138–166.

Журнал индексируется РИНЦ, Scopus, WoS. IF SJR: 0.843, IF WoS: 1.274.

[4] И. А. Тлюстангелов *Собственные симметрии трехмерных цепных дробей.* Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр., **506**:1 (2022), 73–82.

Журнал индексируется РИНЦ, Scopus, WoS. IF SJR: 0.385, IF WoS: 0.486.