В Диссертационный совет МГУ.011.4 (МГУ.01.17)
МГУ имени М. В. Ломоносова
119234, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, ГЗ МГУ,
механико-математический факультет

ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

доктора физико-математических наук, доцента Рябова Павла Евгеньевича на диссертационную работу Ворушилова Константина Сергеевича «Инварианты Жордана-Кронекера конечномерных алгебр Ли», представленную в диссертационный совет МГУ.011.4 (МГУ.01.17) на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 (01.01.04) — Геометрия и топология.

Диссертация К. С. Ворушилова посвящена исследованию инвариантов Жордана-Кронекера конечномерных алгебр Ли. Эти новые инварианты, введенные А. В. Болсиновым и P. Zhang, возникают при исследовании интегрируемых гамильтоновых систем на алгебрах Ли. Как известно, многие интегрируемые системы, возникающие в классической механике, могут быть реализованы на двойственном пространстве к алгебре Ли. Оказывается, что интегрируемость таких систем связана с наличием бигамильтоновой структуры, то есть пары согласованных скобок Пуассона на двойственных пространствах алгебр Ли. Однако вопрос о том, можно ли построить гамильтонову систему, интегрируемую относительно пары пуассоновых структур, то есть найти полный набор полиномов, находящихся в инволюции относительно обеих скобок Пуассона, остается открытым. Данный вопрос известен специалистам как «обобщенная гипотеза Мищенко–Фоменко» и тесно связан с методом сдвига аргумента, предложенным А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко в 1978 году. Оказывается, что возможность построения таких наборов полиномов в некоторых случаях можно установить, изучая алгебраическое устройство пучка скобок Пуассона, которое описывается инвариантами Жордана–Кронекера алгебры Ли. Несмотря на то, что для некоторых классов алгебр Ли (в частности, полупростых) инварианты Жордана–Кронекера известны, в общем случае вопрос вычисления инвариантов Жордана–Кронекера алгебр Ли остается открытым. Более того, нет даже общего метода, позволяющего вычислить данные инварианты для произвольной алгебры Ли. В диссертационной работе К. С. Ворушилова инварианты Жордана–Кронекера вычисляются для двух важных классов алгебр Ли, а именно полупрямых сумм и борелевских подалгебр Ли. Также в диссертации К. С. Ворушиловым была проверена справедливость обобщенной гипотезы Мищенко–Фоменко для семимерных нильпотентных алгебр Ли. Поэтому полезность и актуальность диссертационной работы К. С. Ворушилова не вызывает сомнений.

Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Работа напечатана на 97 страницах. Библиография содержит 30 наименований, в том числе 4 публикации автора, рекомендованные для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности.

Во введении и первой главе обоснована актуальность исследования, приведены основные определения и теоремы для дальнейшего изложения результатов диссертации, приведены описания всех основных понятий, связанных с инвариантами Жордана–Кронекера алгебр Ли, а также утверждения, показывающие связь инвариантов Жордана–Кронекера с существованием полного набора полиномов в биинволюции относительно пары скобок Пуассона на двойственном пространстве алгебры Ли (теоремы 4 и 5, стр. 16).

Во второй главе рассматриваются полупрямые суммы алгебр Ли, имеющие вид $\mathfrak{g}+_{\phi}(\mathbb{R}^n)^k$, где $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли $so(n)$ (ортогональная алгебра Ли) или $sp(n)$ (симплектическая алгебра Ли), а ϕ - стандартное представление. Для всех рассматриваемых алгебр Ли вычисляются инварианты Жордана–Кронекера. В случае $\mathfrak{g} = so(n)$ для вычисления инвариантов Жордана–Кронекера используется знание того, как устроены инварианты коприсоединенного представления, а также теорема Воронцова (теорема 6, стр. 16);

в случае $sp(n)$ этого оказывается недостаточно, так как при некоторых значениях n и k среди инвариантов Жордана–Кронекера появляются не только кронекеровы (как в предыдущем случае), но и жордановы индексы. Для данного случая описано множество сингулярных элементов алгебры Ли и также получен полный ответ. Стоит отметить, что при возрастании коммутативного идеала для алгебр Ли обеих серий инвариантами Жордана–Кронекера будут являться только кронекеровы индексы 1 и 2.

В третьей главе продолжается рассмотрение полупрямых сумм вида $\mathfrak{g}+_{\phi}(\mathbb{R}^n)^k$; теперь в качестве $\mathfrak{g}$ рассматривается специальная линейная $sl(n)$ или полная линейная алгебра Ли $gl(n)$. В данном случае инварианты Жордана–Кронекера вычислены для всех k и n, кроме случаев, когда $k < n$ и k делит n с ненулевым остатком. В рассматриваемых случаях, как и в предыдущей главе, для вычисления инвариантов Жордана–Кронекера приведены инварианты коприсоединенного представления и там, где это необходимо, подробно описано сингулярное множество.

В четвертой главе инварианты Жордана–Кронекера вычисляются для борелевских подалгебр полупростых алгебр Ли $so(n)$ и $sp(n)$. Отметим, что в статье «Bolsinov A. V., Zhang P. Jordan-Kronecker invariants of finite-dimensional Lie algebras // Transformation Groups, 2016. - Vol. 21, no. 1. - P. 51–86» аналогичный результат был получен для борелевских подалгебр алгебр Ли $sl(n)$, следовательно, полученный в данной главе результат вместе с результатом статьи представляют собой полное решение задачи вычисления инвариантов Жордана–Кронекера борелевских подалгебр полупростых классических алгебр Ли.

Наконец, ***пятая глава*** посвящена задаче построения полных наборов в биинволюции на семимерных нильпотентных алгебрах Ли из списка М.-Р.

Gong. Данная задача полностью решена, полные наборы приведены в таблице (Таблица 1, стр. 76–89). Таким образом, для всех рассматриваемых алгебр Ли была установлена справедливость обобщенной гипотезы Мищенко–Фоменко.

Теперь о замечаниях работы.

- Для некоторых серий алгебр Ли в формулировках окончательных ответов имеются ошибки. Так, в основной теореме об инвариантах Жордана–Кронекера для серий $sp(n)+_{\phi}(\mathbb{R}^n)^k$ (теорема 11, стр. 23) в первом пункте в перечислении кронекеровых блоков, если следовать доказательству, должно быть указано «ЖК-разложение […] имеет $\frac{k(k-1)}{2}$ кронекеровых блоков размера 3 и $m-\frac{k-1}{2}$ блоков размера $2k_i-1$, где k_i — нечетные числа, начиная с числа $2k+1$.» В работе вместо числа $2k+1$ указано число $k(k-1)+1$, что неверно. В этом можно убедиться, воспользовавшись тем, что число кронекеровых блоков, соответствующих алгебре Ли, равно индексу алгебры Ли, а сумма размеров - размерности алгебры Ли.
- Похожая ошибка имеется и в формулировке теорем 15 и 16 (стр. 38-39) об инвариантах Жордана–Кронекера серий $sl(n)+(\mathbb{R}^n)^k$ и $gl(n)+(\mathbb{R}^n)^k$ для случая $k>n$. Инвариантами Жордана–Кронекера в обоих случаях являются $kn-l\,\mathrm{ind}\,\mathfrak{g}$ блоков размера $2l+1$ и $(l+1)\mathrm{ind}\,\mathfrak{g}-kn$ блоков размера $2l-1$. В тексте диссертации при этом указаны другие ответы. И в этом случае, и в предыдущем, из доказательств теорем следуют верные индексы, поэтому данные ошибки можно отнести к разряду опечаток.
- Возвращаясь к случаю алгебр Ли $sl(n)+(\mathbb{R}^n)^k$, на странице 37 приведены рассуждения, из которых немедленно получаются инварианты Жордана–Кронекера в случаях, когда k делит n с остатком 1 или $k-1$.

Однако данный результат не был сформулирован как отдельное утверждение и не был вынесен на защиту.

Имеется ряд орфографических и стилистических ошибок по тексту диссертации.

- В теореме 8 на стр. 20 должно быть «...суммы главных миноров, проходящих через последние k столбцов» (в тексте написано «проходящие»);
- На стр. 23 в первой строчке перепутаны местами векторы l_i и h_i;
- на стр. 26 в конце первого абзаца двойственное пространство к алгебре Ли обозначено g^* вместо $\mathfrak{g}^*$;
- нет единообразия в обозначениях симплектической алгебры Ли $sp(n)$. Так, в доказательстве теоремы 11 (стр. 23 и далее) в одних случаях используется обозначение $sp(n)$, а в других $sp(2n)$. При этом в главе 2 до теоремы 11 используется обозначение $sp(n)$, а в главе 4 – только обозначение $sp(2n)$.

Отмеченные выше замечания носят исключительно рекомендательный характер и не снижают ценность диссертационной работы К. С. Ворушилова.

Заключение. Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации, подтверждается прежде всего публикациями в высокорейтинговых журналах, выступлениями на престижных конференциях и семинарах. Все основные результаты диссертации являются новыми, снабженными строгими доказательствами. Автореферат верно и полно отражает основные результаты диссертационной работы. Считаю, что диссертационная работа Ворушилова Константина Сергеевича «Инварианты Жордана–Кронекера конечномерных алгебр Ли» соответствует критериям, определенным в пп. 2.1–2.5 «Положении о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова», и оформлена согласно приложениям 5,6 «Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова». По моему мнению, автор диссертации, Ворушилов Константин Сергеевич, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 (01.01.04) — Геометрия и топология (физико-математические науки).

Официальный оппонент,
профессор Департамента анализа данных и машинного обучения
Факультета информационных технологий и анализа больших данных
федерального государственного образовательного
бюджетного учреждения высшего образования
«Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»,
доктор физико-математических наук
по специальности 01.02.01 – Теоретическая механика,
доцент

Павел Евгеньевич Рябов

125167, г. Москва, Ленинградский просп., 49/2
Тел.: +7 (495) 249–5222
E-mail: **PERyabov@fa.ru**

Подпись Рябова П. Е.
ЗАВЕРЯЮ
Ученый секретарь Ученого совета
Финансового университета
В.В. Звягинцева
05 сентября 2022 г.