

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Хлопунов Михаил Юрьевич

**Гравитационно-волновые эффекты в теориях с большими
дополнительными измерениями**

Специальность 1.3.3 – «Теоретическая физика»

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор,
Гальцов Дмитрий Владимирович

Москва – 2024

Оглавление

Введение	6
1. Теории гравитации с дополнительными измерениями	6
2. Нарушение принципа Гюйгенса в нечетных размерностях	8
3. DGP-модель гравитации	10
4. Общая характеристика диссертации	13
Глава 1. Скалярное излучение в нечетных размерностях	22
1.1. Взаимодействие скалярного поля с зарядом	22
1.1.1. Сокращение расходимостей в статическом пределе	24
1.2. Спектральное распределение мощности излучения	25
1.2.1. Произвольное движение заряда	25
1.2.2. Периодическое движение заряда	27
1.3. Подход Рорлиха-Тейтельбойма к излучению	29
1.4. Трехмерная теория	31
1.4.1. Излучаемая часть поля	31
1.4.2. Излучение нерелятивистского заряда	34
1.4.3. Синхротронное излучение	37
1.4.4. Спектральные распределения	41
1.5. Пятимерная теория	44
1.5.1. Излучаемая часть поля	44
1.5.2. Излучение нерелятивистского заряда	45
1.5.3. Синхротронное излучение	47
1.5.4. Спектральные распределения	50
1.5.5. Скалярное синхротронное излучение в произвольной размерности	52
1.6. Выводы	52
Глава 2. Хвостовые сигналы в излучении в нечетных размерностях	54
2.1. Пример хвостового сигнала в излучении	54
2.1.1. Излучение нерелятивистского заряда в $D = 4$	55
2.1.2. Излучение заряда с Гауссовым ускорением	56
2.2. Излучение заряда на эллиптической орбите	57
2.2.1. Линейное приближение	58

2.2.2.	Численные расчеты – линейное приближение неточно	62
2.2.3.	Квадратичное приближение	63
2.3.	Спектральное распределение излучения	69
2.3.1.	Заряд на круговой орбите	70
2.3.2.	Нерелятивистский заряд на эллиптической орбите	72
2.4.	Выводы	74
Глава 3. Гравитационное излучение в пятимерной ОТО		76
3.1.	Модель двойной системы на бране	76
3.1.1.	Полная нелинейная модель	77
3.1.2.	Линейное приближение	88
3.1.3.	Поляризации гравитационных волн	91
3.1.4.	Динамика нерелятивистской двойной системы	92
3.1.5.	Гравитационные волны, генерируемые двойной системой	93
3.1.6.	ADD-модель с бесконечным радиусом компактификации	94
3.2.	Вклад точечных частиц	95
3.2.1.	Гравитационное излучение нерелятивистской частицы	96
3.2.2.	Гравитационное излучение двойной системы	97
3.3.	Вклад скалярного поля	98
3.3.1.	Разделение пространства-времени – ближняя зона и зона излучения .	100
3.3.2.	Хвостовой интеграл	101
3.3.3.	Конусный интеграл	103
3.3.4.	Излучаемая часть гравитационного поля	104
3.4.	Пятимерная квадрупольная формула	105
3.4.1.	Излучаемая часть полного гравитационного поля	105
3.4.2.	Квадрупольная формула	106
3.4.3.	Двойная система на круговой орбите	107
3.4.4.	Эволюция квазикруговой орбиты	108
3.5.	Выводы	111
Глава 4. Утечка излучения в скалярной DGP-модели		113
4.1.	Скалярный аналог DGP-модели	113
4.1.1.	Эффективная четырехмерная скалярная теория на бране	114
4.1.2.	Инфракрасная прозрачность балка – двумерный пример	116

4.2.	Запаздывающая функция Грина DGP-модели	117
4.2.1.	Функция Грина двумерной DGP-модели	118
4.2.2.	Функция Грина трехмерной DGP-модели	119
4.2.3.	Функция Грина пятимерной DGP-модели	123
4.3.	Излучение четырехмерного массивного поля	124
4.3.1.	Размерная редукция пятимерного безмассового поля	125
4.3.2.	Безмассовый предел четырехмерного поля	126
4.3.3.	Излучаемая часть четырехмерного массивного поля	126
4.4.	Утечка излучения с браны	129
4.4.1.	Излучение заряда на круговой орбите	129
4.5.	Выводы	132
Глава 5.	Гравитационное излучение в DGP-гравитации	135
5.1.	DGP-модель гравитации	135
5.1.1.	Линеаризованная DGP-гравитация	136
5.2.	Эффективная теория на бране	138
5.2.1.	Эффективный тензор энергии-импульса DGP-скаляра	138
5.2.2.	Эффективный тензор энергии-импульса DGP-гравитации	142
5.3.	Динамические степени свободы DGP-гравитации	146
5.3.1.	Динамические степени свободы электродинамики	146
5.3.2.	Динамические степени свободы гравитации	150
5.3.3.	Динамические степени свободы массивной электродинамики	155
5.3.4.	Динамические степени свободы массивной гравитации	158
5.3.5.	Динамические степени свободы DGP-гравитации	165
5.4.	Гравитационное излучение в DGP-гравитации	167
5.4.1.	Тензорное поле в волновой зоне	167
5.4.2.	Скалярное поле в волновой зоне	170
5.4.3.	Квадрупольная формула в DGP-гравитации	170
5.4.4.	Оценка параметров формулы Деффайе-Мену	171
5.5.	Выводы	173
Заключение	174
Приложения	176
1.	Мощность пятимерного синхротронного излучения	176

2.	Вычисление I_4^l для заряда на эллиптической орбите	176
3.	Поляризации гравитационных волн в $D = 5$	177
4.	Регуляризация вклада точечных частиц	179
5.	Интеграл по ближней зоне	180
6.	Излучение двойной системы на круговой орбите	182
7.	Поле неподвижного заряда на бране	182
8.	Гравитационное излучение осциллирующей массы	183
Список литературы		184

Введение

1. Теории гравитации с дополнительными измерениями

Дополнительные измерения пространства-времени являются важным элементом многих современных теорий гравитации. Впервые гипотеза о существовании дополнительных измерений была выдвинута Т. Калуцей и О. Клейном в 20-ых годах прошлого века для построения единой теории гравитационного и электромагнитного взаимодействий [1, 2] (см. обзор [3]). И хотя изначально их работы не привлекли большого внимания, позже гипотеза дополнительных измерений получила развитие в теории струн, являющейся в настоящее время основной моделью квантовой гравитации и требующей существования дополнительных измерений для своей самосогласованности (см., например, [4]). Также дополнительные измерения являются неотъемлемой частью голографического соответствия [5, 6]. С другой стороны, в последние двадцать лет был разработан ряд теорий гравитации с дополнительными измерениями, направленных на решение определенных проблем физики элементарных частиц и космологии (см. обзоры [7–12]). В частности, модели Аркани-Хамед–Димопулоса–Двали (ADD) [13, 14] и Рэндалл–Сундрума (RS) [15, 16] были направлены на решение проблемы иерархии, заключающейся в объяснении огромной разницы между электрослабым масштабом энергий $m_{EW} \sim 10^2$ ГэВ и планковской массой $M_{Pl} \sim 10^{19}$ ГэВ, а модель Двали–Габададзе–Поррати (DGP) [17] рассматривалась в качестве возможного решения проблемы космологической постоянной, состоящей в объяснении позднего ускоренного расширения Вселенной [18, 19].

При этом последнее десятилетие было ознаменовано началом эры гравитационно-волновой астрономии – 14 сентября 2015 года обсерваторией LIGO был зарегистрирован первый гравитационно-волновой сигнал GW150914 от слияния двойной системы черных дыр [20]. Также важнейшим этапом в развитии гравитационно-волновой астрономии стало совместное детектирование гравитационно-волнового сигнала GW170817 и гамма-всплеска GRB170817A от слияния двойной нейтронной звезды [21–23]. К настоящему времени обсерваториями LIGO, VIRGO и KAGRA в общей сложности зарегистрировано 90 гравитационно-волновых сигналов от слияний двойных черных дыр и нейтронных звезд [24]. Таким образом, в настоящее время гравитационно-волновая астрономия является одним из наиболее перспективных инструментов для экспериментального исследования дополнительных измерений.

Дополнительные измерения могут проявиться в гравитационных волнах множеством различных способов (см. обзор [25]). Наиболее общим для всех теорий признаком дополнительных измерений являются дополнительные поляризации гравитационных волн [26, 27],

наблюдение которых станет возможным в будущем при запуске большего числа гравитационно-волновых обсерваторий. В теориях с компактными дополнительными измерениями в гравитационно-волновых сигналах также появляется дискретный спектр массивных калуца-клейновских мод [27, 28]. Однако, при реалистичных значениях радиуса компактификации данные моды обладают частотами, значительно превышающими диапазоны чувствительности современных наземных и будущих космических гравитационно-волновых обсерваторий [29], и недоступны для экспериментального наблюдения. Отметим здесь также гравитационно-волновые осцилляции, возникающие в некоторых моделях за счет смешивания безмассовой и массивных калуца-клейновских мод [30, 31]. Также в некоторых теориях гравитационно-волновые сигналы модифицируются за счет появления дополнительных вкладов в источник поля в уравнении движения эффективного четырехмерного гравитационного поля [32–35]. Другим интересным признаком дополнительных измерений в некоторых теориях является более быстрое ослабление амплитуды гравитационных волн с расстоянием на космологических масштабах от источника [36]. Данный эффект дает возможность ограничить параметры таких теорий за счет совместных наблюдений гравитационно-волновых и электромагнитных сигналов от слияний двойных систем, содержащих нейтронные звезды. И хотя данный эффект не был обнаружен при наблюдении гравитационно-волнового сигнала GW170817 и гамма-всплеска GRB170817A от слияния двойной нейтронной звезды [37], обсуждается возможность его обнаружения с помощью космической обсерватории LISA [38, 39]. Также некоторые теории предсказывают разницу во времени между регистрацией гравитационно-волновых и электромагнитных сигналов от слияния двойных систем, содержащих нейтронные звезды, обусловленную распространением гравитационных волн от источника к наблюдателю через искривленные дополнительные измерения [40]. Первые ограничения на параметры таких теорий уже были получены с помощью наблюдения гравитационно-волнового сигнала GW170817 и сопутствующего гамма-всплеска GRB170817A [41–43].

Также дополнительные измерения могут проявлять себя за счет изменения приливной деформируемости черных дыр и нейтронных звезд [44–46]. В частности, многомерные черные дыры имеют ненулевые приливные числа, в то время как в четырехмерной теории относительности они равны нулю. Наконец, признаки дополнительных измерений могут нести в себе квазинормальные моды черных дыр, определяющие спектр гравитационного излучения двойной системы на конечном этапе ее слияния [45, 47]. Так было показано, что присутствие дополнительных измерений значительно увеличивает время затухания квазинормальных колебаний черных дыр, что накладывает жесткие ограничения на параметры соответствующих теорий [48].

Здесь также необходимо упомянуть еще один важный инструмент исследования дополнительных измерений, возникший в последние несколько лет, – фотографии теней черных дыр [49, 50]. В некоторых теориях присутствие дополнительных измерений приводит к появлению приливного заряда у черных дыр, по своим свойствам схожего с электрическим зарядом черных дыр в теории относительности, квадрат которого, однако, может принимать отрицательные значения [51]. Ограничения на параметры соответствующих теорий уже были получены с помощью фотографий теней сверхмассивных черных дыр M87* и Sgr A* [52–55].

2. Нарушение принципа Гюйгенса в нечетных размерностях

Особый интерес представляют признаки дополнительных измерений в гравитационных волнах от слияний двойных систем черных дыр и нейтронных звезд в теориях гравитации с нечетным числом дополнительных измерений. Это связано с непривычным поведением запаздывающих безмассовых полей в таких теориях, обусловленным нарушением принципа Гюйгенса в пространстве-времени нечетной размерности.

Нарушение принципа Гюйгенса в нечетных размерностях известно со времен классических работ Адамара [56], Куранта и Гильберта [57], Иваненко и Соколова [58] и заключается в следующем. Так если в пространстве-времени четной размерности сигнал от мгновенной вспышки источника, достигнув точки наблюдения через интервал времени необходимый на распространение до нее со скоростью света, также мгновенно затухает в ней, то в нечетных размерностях после этого наблюдается бесконечный, затухающий со временем хвостовой сигнал. Математически это связано с тем, что в нечетных размерностях запаздывающие функции Грина безмассовых полей локализованы не только на световом конусе, как это имеет место быть в четных размерностях, но также и внутри него. Так запаздывающие функции Грина уравнения Даламбера в пространстве Минковского определяются двумя рекуррентными соотношениями отдельно для четных и нечетных размерностей [58]

$$G_{2n+2}(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2(2\pi)^n} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{n-1} \frac{\delta(t-r)}{r}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.1)$$

$$G_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{n-1} \frac{\theta(t)\theta(x^2)}{\sqrt{x^2}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.2)$$

где $x^2 = t^2 - r^2$, а индекс у функций Грина означает размерность пространства-времени. Из ур. (2.2) видно, что в размерности три запаздывающая функция Грина состоит из одного члена, локализованного внутри светового конуса. В размерности пять и выше функция Грина дается комбинацией нескольких членов, локализованных на световом конусе, и одного вклада, локализованного внутри него. Локализация функций Грина внутри светового

конуса соответствует тому, что в нечетных измерениях запаздывающие безмассовые поля распространяются со всеми скоростями вплоть до скорости света.

Однако, свободные безмассовые поля распространяются строго со скоростью света во всех размерностях. В результате, возникает противоречие в определении излучения в нечетных размерностях, т.к. полное запаздывающее поле локализованного источника распространяется со всеми скоростями вплоть до скорости света, в то время как его излучаемая часть, будучи свободным полем на удалении от источника, должна распространяться строго со скоростью света. Также присутствие хвостового члена в функциях Грина приводит к тому, что в нечетных размерностях в любой заданной точке пространства-времени запаздывающие безмассовые поля зависят от полной истории движения источника, предшествующей запаздывающему времени, в отличие от четных размерностей, где запаздывающие поля определяются лишь состоянием источника в запаздывающий момент времени. Еще одной особенностью запаздывающих полей в нечетных размерностях является то, что они даются комбинацией сингулярных на световом конусе членов (2.2).

В силу перечисленных выше особенностей запаздывающих полей в нечетных размерностях, применение стандартного определения волновой зоны [59] для вычисления излучения в нечетных размерностях затруднительно. Поэтому в большинстве литературы рассматривались лишь задачи излучения в четных размерностях [60–67], в то время как случай нечетных размерностей рассматривался в основном в контексте силы радиационного трения [68–74] (см. обзоры [75, 76]). В нечетных измерениях в излучаемой части поля присутствует нелокальный хвостовой вклад, аналогичный найденному ДеВитом и Бреме в случае искривленного четырехмерного пространства-времени [77–79]. Однако, в искривленном пространстве хвостовой член связан с рассеянием волн на кривизне пространства-времени, и его вычисление является затруднительным, в то время как в нечетных измерениях хвостовой вклад может быть записан в замкнутой форме.

Одним из возможных способов преодоления проблем, связанных с появлением хвостового вклада, является подход эффективной теории поля к задачам излучения [80–83]. Однако, будучи основанным на вычислениях в импульсном пространстве, нечувствительных к размерности пространства-времени, данный метод не дает информации о структуре запаздывающего поля в волновой зоне и роли хвостового вклада в формировании излучения. Как было показано недавно, данное затруднение может быть преодолено с помощью Фурье-преобразования запаздывающих функций Грина и полей по временной координате [84]. В данной работе мы развиваем другой подход, основанный на модификации определения излучения. А именно, мы используем подход Рорлиха-Тейтельбойма к излучению [85–87] (см. также [88–

91]), основанный на разложении тензора энергии-импульса запаздывающего поля по обратным степеням Лоренц-инвариантного расстояния и выделении из него части, обладающей определенными свойствами, ожидаемыми от тензора энергии-импульса поля излучения.

3. DGP-модель гравитации

В данной работе особый интерес для нас представляет DGP-модель гравитации [17, 92]. Данная модель может быть сформулирована с различным числом как бесконечных [92], так и компактных дополнительных измерений [93] (см. обзор [94]). При этом ее простейшая реализация с одним бесконечным дополнительным измерением уже содержит нарушение принципа Гюйгенса в пятимерном балке.

В простейшем случае DGP-модель формулируется с одним бесконечным дополнительным измерением и материей локализованной на 3-бране, вложенной в пятимерный балк. Действие такой модели схематично может быть записано как [17]

$$S_{\text{DGP}} = \frac{1}{2}M_5^3 \int d^5X \sqrt{-\mathcal{G}} \mathcal{R}(\mathcal{G}) + \frac{1}{2}M_4^2 \int d^4x \sqrt{-g} R(g) + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{mat}}. \quad (3.1)$$

Здесь X^M и x^μ обозначают координаты в балке и на бране, соответственно, а \mathcal{G}_{MN} и $g_{\mu\nu}$ – метрику в балке и индуцированную метрику на бране. Заглавные латинские индексы пробегает значения $M, N = \overline{0, 4}$, а строчные греческие $\mu, \nu = \overline{0, 3}$. За счет появления в действии дополнительного члена Эйнштейна-Гильберта, индуцированного на бране, в DGP модели имеются две планковские массы – пятимерная M_5 и четырехмерная M_4 . Для корректной постановки вариационной задачи в действие (3.1) необходимо также добавить граничные члены в балке и на бране. Такая форма действия мотивирована квантовой теорией. Считается, что классическая гравитация, описываемая лишь действием Эйнштейна-Гильберта в балке, должна приобретать дополнительный вклад в действие в виде индуцированного на бране члена Эйнштейна-Гильберта за счет квантово-петлевых поправок к пропагатору пятимерного гравитона, связанных со взаимодействием материи на бране с гравитонами в балке [17, 92, 94]. В частности, возникновение таких поправок к действию было продемонстрировано в модели браны конечной толщины [95–99].

В отличие от ADD и RS моделей, в которых законы гравитации изменяются на малых масштабах, DGP-модель является инфракрасной модификацией Теории Относительности и модифицирует законы гравитации на больших расстояниях. Это связано с тем, что в DGP-модели эффективный четырехмерный гравитон на бране является метастабильным резонансом из-за наличия у его пропагатора особых точек на нефизическом листе римановой поверхности [94, 100]. В частности, в то время как ADD и RS модели содержат нулевые

калуца-клейновские моды гравитона, локализованные на бране и отделенные от массивных мод конечным интервалом [16, 101], в DGP-модели гравитон на бране представляет собой непрерывный спектр калуца-клейновских мод [93, 102]. При этом пятимерный балк является прозрачным лишь для мод с $p_\mu^2 \leq m_c^2$ – только эти моды дают вклад в гравитационное взаимодействие материи на бране с материей в балке, в то время как моды $p_\mu^2 \geq m_c^2$ оказываются квазилокализованными на бране [92, 103]. Здесь $m_c = M_5^3/M_4^2$ – это характерный масштаб энергии, определяемый отношением двух планковских масс. За счет этого эффективный ньютоновский потенциал на бране имеет стандартную четырехмерную $1/r$ асимптотику на расстояниях $r \ll r_c$ и переходит к пятимерному $1/r^2$ поведению при $r \gg r_c$, где переходный радиус $r_c = 1/m_c$ [17] (см. также [104–107]).

Метастабильный характер эффективного гравитона на бране в DGP-модели приводит к интересным космологическим следствиям. Так в работе [108] было показано, что одна из ветвей решений DGP-модели содержит ускоренно расширяющуюся вакуумную брану в отсутствие космологических постоянных в балке и на бране (см. также [109]). Для согласования данного самоускоренного решения с космологическими наблюдениями характерный масштаб энергии DGP-модели должен быть порядка современной постоянной Хаббла $m_c \sim 10^{-42}$ ГэВ [110, 111]. Однако, в настоящее время существует множество ограничений на параметры DGP модели, полученных с помощью космологических наблюдений [112–119]. В частности, было показано, что для наилучшего согласования предсказаний DGP модели с историей расширения Вселенной предпочтительным является сценарий замкнутой браны, в то время как современные космологические наблюдения указывают на то, что наблюдаемая Вселенная является плоской.

С другой стороны, DGP-модель обладает рядом недостатков. Во-первых, в случае одного бесконечного дополнительного измерения пропагатор эффективного гравитона имеет тензорную структуру [17, 104–107], аналогичную пропагатору массивного гравитона в четырех измерениях [120, 121], за счет появления у него дополнительных степеней свободы (см. также [122, 123]). Однако, проблему vDVZ-разрыва в DGP-модели возможно решить за счет увеличения числа дополнительных измерений [92], либо с помощью компактификации дополнительного измерения [93]. В последнем случае эффективный гравитон на бране задается дискретным набором калуца-клейновских мод, по аналогии с ADD-моделью. Во-вторых, в работах [124–126] было продемонстрировано наличие режима сильной связи в DGP-модели на энергетическом масштабе $(M_c^2 M_4)^{1/3} \ll M_4$ (см. также [127, 128]). Однако, в работе [100] было показано, что DGP-модели с $D \geq 6$ избегают режима сильной связи. Также в работе [129] было продемонстрировано, что режима сильной связи можно избежать

и в DGP-модели с одним дополнительным измерением с помощью модификации теории возмущений. При этом, данная модифицированная теория возмущений приводит также к восстановлению правильной четырехмерной тензорной структуры пропагатора эффективного гравитона на малых расстояниях (скалярная поляризация гравитона отцепляется от материи и гравитации при высоких энергиях). Наконец, главной проблемой DGP-модели является то, что ее ветвь решений, содержащая ускоренно расширяющуюся вакуумную брану, содержит духовую степень свободы в возмущениях гравитационного поля над данным фоновым решением [109, 130, 131], делающую его нестабильным. Это делает невозможным решение проблемы космологической постоянной в рамках DGP-модели. Однако, духи в DGP-модели можно устранить за счет увеличения числа дополнительных измерений и последовательного вложения нескольких бран друг в друга [132].

Несмотря на перечисленные выше проблемы DGP-модели, ее вторая – нормальная – ветвь решений, не содержащая духов [109], остается интересной диффеоморфизм-инвариантной моделью метастабильного гравитона. Также интерес к DGP-модели сохраняется за счет того, что, как предполагается, все модели гравитации с дополнительными измерениями, в которых поля материи локализованы на бране, должны приобретать в действии индуцированный член Эйнштейна-Гильберта за счет квантовых поправок.

В частности, обсуждается возможность экспериментальной проверки метастабильного характера гравитона с помощью наблюдений гравитационно-волновых и электромагнитных сигналов от слияний двойных нейтронных звезд [36]. А именно, метастабильный характер гравитона должен приводить к утечке гравитационных волн с браны в дополнительное измерение на космологических расстояниях от источника. За счет этого для удаленных двойных нейтронных звезд расстояние до них, определяемое из гравитационно-волнового сигнала, должно казаться больше расстояния, определяемого по сопутствующему электромагнитному сигналу. В результате, гравитационно-волновая и электромагнитная диаграммы Хаббла для слияний двойных нейтронных звезд должны разойтись на больших красных смещениях. В частности, основываясь на поведении ньютоновского потенциала в DGP-модели [17], С. Деффайе и К. Меноу предложили эмпирическую формулу для зависимости амплитуды гравитационных волн от расстояния до источника, описывающую интенсивность утечки гравитационного излучения в дополнительное измерение с расстоянием от источника

$$h_{\times/+} \propto \frac{1}{d_L(1 + (d_L/r_c)^{n/2})^{1/n}}, \quad (3.2)$$

где d_L – это расстояние светимости до источника, n – эмпирический параметр, характеризующий резкость перехода от четырехмерного к пятимерному поведению гравитационного поля,

\times и $+$ обозначают поляризации гравитационных волн. Первые ограничения на параметры DGP-модели на основе данной формулы были получены с помощью наблюдения слияния двойной нейтронной звезды GW170817 [37, 39, 133, 134]. Также обсуждалась возможность проверки DGP-модели в зависимости от значений параметров данной эмпирической формулы с помощью наблюдений гравитационно-волновых сигналов космической обсерваторией LISA [38]. Однако, аналитически эффект утечки гравитационных волн в дополнительное измерение в DGP-модели не был исследован. В данной работе нашей целью является исследование данного эффекта в рамках DGP-модели с одним дополнительным измерением и оценка возможности его обнаружения наземными и космической гравитационно-волновыми обсерваториями LIGO/VIRGO/KAGRA и LISA.

4. Общая характеристика диссертации

Цели и задачи работы. Целью данной работы является исследование гравитационно-волновых эффектов в теориях гравитации с большими дополнительными измерениями пространства-времени вида моделей мира на бране, связанных с нарушением принципа Гюйгенса в балке нечетной размерности и метастабильным характером эффективного гравитон на бране, анализ возможности их экспериментального наблюдения современными и будущими гравитационно-волновыми обсерваториями, а также развитие скалярно-полевых аналогов таких моделей, допускающих простое качественное изучение данных эффектов, и обобщение и развитие аппарата классической теории поля, в частности теории излучения, на случай рассматриваемых моделей.

Для достижения данных целей были поставлены следующие задачи:

1. В модели безмассового скалярного поля в пространстве Минковского нечетной размерности изучить какую роль играет нарушение принципа Гюйгенса в формировании излучения и структуре запаздывающего поля в волновой зоне. В частности, исследовать излучение точечного заряда в нерелятивистском и ультрарелятивистском пределах.
2. В модели скалярного поля в пространстве Минковского нечетной размерности изучить признаки нарушения принципа Гюйгенса в излучении заряда на эллиптической орбите. Исследовать возникающие в излучении нелокальные хвостовые сигналы и определить их зависимость от эксцентриситета орбиты.
3. В ОТО с одним бесконечным дополнительным измерением исследовать гравитационное излучение двойной системы, локализованной на бране, в пятимерный балк. Определить,

генерирует ли двойная система на бране дополнительные поляризации пятимерных гравитационных волн. Получить закон орбитальной эволюции двойной системы, связанной с потерей ею энергии на гравитационное излучение в пятимерный балк.

4. В скалярном аналоге DGP-модели оценить интенсивность утечки гравитационных волн в дополнительное измерение, связанной с метастабильным характером эффективного гравитона на бране. Проанализировать возможность наблюдения данного эффекта современными и будущими гравитационно-волновыми обсерваториями в зависимости от значений переходного масштаба r_c .
5. Изучить процесс гравитационного излучения в DGP-модели гравитации. Получить аналог квадрупольной формулы для эффективной мощности гравитационного излучения произвольного нерелятивистского источника на бране. На основе него получить оценки для параметров эмпирической формулы Деффайе-Меноу (3.2), характеризующей интенсивность утечки гравитационных волн в дополнительное измерение в DGP-гравитации.

Методология и методы исследования. Исследование проводится на основе моделей мира на бране с большими дополнительными измерениями пространства-времени, предложенных в работах [13, 17, 101]. На начальном этапе рассматриваемые гравитационно-волновые эффекты изучаются в пробных моделях скалярного поля в многомерном пространстве Минковского, которые несмотря на свою заведомую нереалистичность улавливают их основные особенности. Далее полученные результаты расширяются и уточняются в рамках моделей гравитации. Для этого в работе применяется подход Рорлиха-Тейтельбойма к излучению и его обобщение на случай пространства-времени размерности отличной от четырех, представленные в работах [60, 85, 86, 90]. Помимо этого, в работе широко применяются методы классической теории поля и дифференциальной геометрии, а также предлагается обобщение и развитие ряда методов классической теории поля на случай рассматриваемых моделей.

Положения, выносимые на защиту:

1. В моделях безмассового скалярного поля в пространстве Минковского размерности три и пять получены формулы для мощности излучения нерелятивистского заряда и мощности синхротронного излучения. За счет нарушения принципа Гюйгенса полученные формулы содержат интегралы по истории движения заряда, предшествующей запаздывающему времени. Показано взаимное сокращение расходимостей, содержащихся в запаздывающем поле на световом конусе заряда. Предложена формула для мощности

скалярного синхротронного излучения в произвольной размерности.

2. В модели скалярного поля в размерности три показано, что нарушение принципа Гюйгенса приводит к формированию нелокальных хвостовых сигналов в излучении заряда на эллиптической орбите. В частности, точки экстремума мощности излучения заряда сдвигаются во времени от моментов прохождения зарядом перицентра и апоцентра орбиты, в отличие от четырехмерной теории. Получены выражения для данных сдвигов с точностью до вкладов квадратичных по эксцентриситету орбиты.
3. В ОТО с одним бесконечным дополнительным измерением получена пятимерная квадрупольная формула для мощности гравитационного излучения двойной системы, локализованной на 3-бране. Показано, что двойная система на бране генерирует все пять поляризаций гравитационных волн в балке. Также показано, что единственная дополнительная поляризация, доступная для регистрации наблюдателем на бране, – так называемая «дышащая» мода [27] – имеет ненулевое значение на бране, но переносит на 25% меньше энергии, чем остальные поляризации. Получен закон эволюции квазикруговой орбиты двойной системы на бране под действием гравитационного излучения в пятимерный балк. Обнаружено, что относительная скорость сжатия двойной системы на бране оказывается ниже по сравнению с четырехмерной теорией.
4. В скалярном аналоге DGP-модели [17] получена формула для эффективной мощности излучения нерелятивистского заряда на круговой орбите на бране, характеризующая интенсивность утечки гравитационных волн в дополнительное измерение. Обнаружено, что в соответствии с инфракрасной прозрачностью балка в DGP-модели [92] интенсивность утечки зависит от частоты гравитационно-волнового сигнала и оказывается выше для низкочастотных сигналов.
5. Оценена возможность экспериментального наблюдения утечки гравитационных волн современными и будущими гравитационно-волновыми обсерваториями LIGO и LISA. Показано, что при реалистичном выборе параметров DGP-модели $r_c \sim 6$ Гпк [108, 110] интенсивность утечки гравитационных волн с частотами в диапазонах чувствительности LIGO и LISA крайне мала. С другой стороны, чтобы данный эффект было доступен для наблюдения, параметры DGP-модели должны иметь значения, выходящие за рамки экспериментальных ограничений.
6. В DGP-гравитации получена квадрупольная формула для эффективной мощности гравитационного излучения произвольного нерелятивистского источника на бране. На ос-

нове метода Нетер разработана процедура построения эффективного тензора энергии-импульса (ТЭИ) гравитационного поля на бране из нелокального эффективного действия DGP-гравитации. Показано, что нелокальные члены эффективного действия не дают вклад в эффективный ТЭИ, и он может быть вычислен по стандартной формуле для канонического ТЭИ. На основе найденной квадрупольной формулы получены оценки для параметров эмпирической формулы Деффайе-Меноу (3.2).

Научная новизна. Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми. В частности, впервые в научной литературе было представлено аналитическое исследование эффекта утечки гравитационных волн в дополнительное измерение за счет непосредственного вычисления эффективной мощности излучения точечной частицы на бране в рамках скалярного аналога DGP-модели и проанализирована возможность его экспериментального наблюдения современными и будущими гравитационно-волновыми обсерваториями, а также исследованы нелокальные эффекты в гравитационном излучении двойных систем, связанные с нарушением принципа Гюйгенса в балке нечетной размерности, и предложена общая формула для мощности скалярного синхротронного излучения в пространстве Минковского произвольной размерности.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Основная теоретическая значимость данной работы состоит в разработке новых методов вычисления гравитационного излучения в теориях с нечетным числом больших дополнительных измерений и изучении признаков дополнительных измерений, связанных с нарушением принципа Гюйгенса и метастабильным характером эффективного гравитона на бране в DGP-модели, в гравитационно-волновых сигналах от слияний двойных черных дыр и нейтронных звезд. Помимо теоретической значимости, данная задача приобретает отдельную практическую значимость в связи с современным развитием гравитационно-волновой астрономии, использующей для анализа зарегистрированных сигналов банк теоретически смоделированных шаблонов.

Достоверность и обоснованность результатов. Достоверность представленных в работе результатов обеспечивается применением надежно установленных методов анализа классической теории поля и дифференциальной геометрии, взаимным согласованием результатов между собой, а также их согласованием с результатами работ других авторов в частных случаях. В частности, полученная в Главе 1 формула для мощности скалярного синхротронного излучения в размерности три согласуется с результатом, представленным в работе [72]. Помимо этого, данные результаты были также проверены за счет вычисления спектральных распределений мощности излучения, свободных от затруднений присущих координатному

подходу. Также полученная в Главе 3 пятимерная квадрупольная формула для мощности гравитационного излучения двойной системы на 3-бране укладывается в общую схему для мощности гравитационного излучения двойной системы, полученную в работе [62] для случая пространства-времени произвольной четной размерности. Более того, данная формула согласуется с пятимерной квадрупольной формулой, полученной в работе [84] с помощью Фурье-преобразования запаздывающих функций Грина по времени. Также зависимость интенсивности утечки гравитационных волн в дополнительное измерение от частоты сигнала, обнаруженная в Главе 4, согласуется с эффектом инфракрасной прозрачности балка DGP-модели, обнаруженным на основе анализа структуры пропагатора гравитона в DGP-модели [92].

Личный вклад соискателя. Основные результаты диссертации представлены в 4 работах [135–138], опубликованных в международных научных журналах, индексируемых в международных базах Web of Science и Scopus:

1. Gal'tsov D. V., Khlopunov M. Synchrotron radiation in odd dimensions // Phys. Rev. D. – 2020. – Т. 101, № 8. – С. 084054. – **ИФ WoS: 5.000.**
2. Khlopunov M., Gal'tsov D. V. Gravitational radiation from a binary system in odd-dimensional spacetime // JCAP. – 2022. – Т. 04. – С. 014. – **ИФ WoS: 6.400.**
3. Khlopunov M., Gal'tsov D. V. Leakage of gravitational waves into an extra dimension in the DGP model // JCAP. – 2022. – Т. 10. – С. 062. – **ИФ WoS: 6.400.**
4. Khlopunov M. Non-local tails in radiation in odd dimensions // JCAP. – 2023. – Т. 10. – С. 019. – **ИФ WoS: 6.400.**

Помимо этого 6 работ [139–144] были опубликованы в материалах конференций и тезисах докладов:

1. Хлопунов М. Ю. Синхротронное излучение в нечетномерном пространстве-времени // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2020» Секция физики. Сборник тезисов докладов. – М.: МАКС Пресс, 2020.
2. Хлопунов М. Ю. Скалярное излучение нерелятивистских источников в нечетных размерностях // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2021» Секция физики. Сборник тезисов докладов. – М.: МАКС Пресс, 2021.

3. Gal'tsov D. V., Khlopunov M. Retarded potentials and radiation in odd dimensions // 16th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics and Relativistic Field Theories. – 2023. – С. 699.
4. Gal'tsov D. V., Khlopunov M. Odd-dimensional gravitational waves from a binary system on a three-brane // 16th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics and Relativistic Field Theories. – 2023. – С. 3301.
5. Хлопунов М. Ю. Гравитационное излучение двойной системы в нечетномерном пространстве-времени // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2022» Секция физики. Сборник тезисов докладов. – М.: МАКС Пресс, 2022.
6. Хлопунов М. Ю. Утечка гравитационных волн в дополнительное измерение в DGP модели // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2023» Секция физики. Сборник тезисов докладов. – М.: МАКС Пресс, 2023.

В работах, написанных вместе с соавторами, автор принимал активное участие в постановке задач, проведении аналитических и численных вычислений, анализе и систематизации полученных результатов, а также подготовке научных статей к публикации. Вклад автора во все указанные работы является определяющим. Все результаты, выносимые на защиту, были получены автором лично.

Апробация результатов. По результатам, представленным в диссертации, автором лично были сделаны следующие доклады на всероссийских и международных научных конференциях и семинарах:

1. “Modification of the radiation definition in odd dimensions”, научный семинар ИТМФ МГУ, Москва, Россия, 28 октября 2020.
2. “Синхротронное излучение в нечетномерном пространстве-времени”, Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2020», МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия, 10–27 ноября 2020.
3. “Скалярное излучение нерелятивистских источников в нечетных размерностях”, Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2021», МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия, 12–23 апреля 2021.
4. “Retarded potentials and radiation in odd dimensions”, 16th Marcel Grossmann Meeting, University of Rome and ICRANet, Рим, Италия, 5–10 июля 2021 (дистанционно).

5. “Odd-dimensional gravitational waves from the binary system on three-brane”, 16th Marcel Grossmann Meeting, University of Rome and ICRANet, Рим, Италия, 5–10 июля 2021 (дистанционно).
6. “Five-dimensional gravitational waves from the binary system on a three-brane”, Gravitex 2021, Astrophysics Research Centre of the University of KwaZulu Natal, Дурбан, ЮАР, 9–12 августа 2021 (дистанционно).
7. “Гравитационные волны в многомерных теориях”, научный семинар теоретической группы ЛФВЭ МФТИ, Долгопрудный, Россия, 26 октября 2021.
8. “Гравитационное излучение двойной системы в нечетномерном пространстве-времени”, Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2022», МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия, 11–22 апреля 2022.
9. “Leakage of gravitational waves into extra dimension in DGP model”, 23rd International Conference on General Relativity and Gravitation, Institute of Theoretical Physics of Chinese Academy of Sciences, Лиян, Китай, 3–8 июля 2022 (дистанционно).
10. “Утечка гравитационных волн в дополнительное измерение в DGP модели”, Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2023», МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия, 10-21 апреля 2023.
11. “Signatures of extra spacetime dimensions in gravitational waves”, Научная школа по физике элементарных частиц и космологии имени В.А. Рубакова, Саров, Россия, 3-7 июля 2023 (постер).
12. “Признаки дополнительных измерений в гравитационных волнах”, Летняя школа «Квантовые поля: от гравитации и космологии до физики конденсированного состояния» фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС», Одинцовский городской округ, Россия, 31 июля - 11 августа 2023.
13. “Гравитационно-волновые эффекты в теориях с большими дополнительными измерениями”, научный семинар кафедры теоретической физики Физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия, 25 декабря 2023.
14. “Гравитационно-волновые эффекты в теориях с большими дополнительными измерениями”, научный семинар теоретической группы ЛФВЭ МФТИ, Долгопрудный, Россия, 20 марта 2024.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, восьми приложений и списка литературы. Полный объем диссертации 196 страниц, число рисунков 15, список литературы включает 181 наименование.

Первая глава посвящена изучению роли нарушения принципа Гюйгенса в нечетных размерностях в формировании излучения и структуре запаздывающего поля в волновой зоне. В модели безмассового скалярного поля в пространстве Минковского размерности три и пять с помощью применения подхода Рорлиха-Тейтельбойма к излучению мы вычисляем поток энергии излучения точечного заряда, движущегося по круговой орбите, в нерелятивистском и ультрарелятивистском пределах. Показано, что поток энергии излучения заряда зависит от полной истории его движения, предшествующей запаздывающему времени. Корректность полученных результатов проверяется с помощью вычисления спектральных распределений мощности излучения, нечувствительных к размерности пространства-времени.

Вторая глава посвящена изучению нелокальных эффектов в гравитационном излучении двойных систем в теориях с нечетным числом дополнительных измерений, связанных с нарушением принципа Гюйгенса. В модели безмассового скалярного поля в размерности три мы демонстрируем, что нарушение принципа Гюйгенса должно приводить к формированию характерных хвостовых сигналов в гравитационном излучении эллиптических двойных систем. В частности, хвостовые сигналы приводят к сдвигу точек экстремума мощности излучения двойной системы во времени от моментов прохождения ею перицентра и апоцентра орбиты. Мы находим зависимость этих сдвигов от эксцентриситета орбиты с точностью до вкладов квадратичных по эксцентриситету.

Третья глава посвящена изучению гравитационного излучения двойной системы, локализованной на 3-бране, в рамках ОТО с одним бесконечным дополнительным измерением. Мы получаем пятимерный аналог квадрупольной формулы для мощности гравитационного излучения двойной системы, демонстрируем генерацию дополнительных поляризаций пятимерного гравитационного поля четырехмерным источником, а также изучаем эволюцию орбиты двойной системы на бране под действием потери ею энергии на гравитационное излучение в пятимерный балк.

Четвертая глава посвящена изучению эффекта утечки гравитационных волн с дополнительное измерение в рамках скалярного-полевого аналога DGP-модели. Так как эффективное поле на бране в DGP-модели представляется как непрерывный спектр калуца-клейновских мод, дается обобщение подхода Рорлиха-Тейтельбойма к излучению на случай массивного поля. Получена формула для эффективной мощности излучения заряда на круговой орбите на бране, характеризующая интенсивность утечки излучения с браны по мере

его удаления от источника. В соответствии с инфракрасной прозрачностью балка в DGP-модели, интенсивность утечки излучения оказывается выше для низкочастотных сигналов. Мы также анализируем возможность экспериментального обнаружения данного эффекта современными и будущими гравитационно-волновыми обсерваториями.

Пятая глава посвящена изучению процесса гравитационного излучения в DGP-модели гравитации. На основе метода Нетер разработана процедура построения эффективного тензора энергии-импульса динамических степеней свободы DGP-гравитации на бране из ее нелокального эффективного действия. Получен аналог квадрупольной формулы для эффективной мощности гравитационного излучения произвольного нерелятивистского источника на бране. На основе данной формулы получены оценки для параметров эмпирической формулы Деффайе-Мену (3.2).

Заключение содержит краткое описание основных результатов диссертации.

Приложения содержат ряд технических вычислений, опущенных в основных главах работы.

Глава 1

Скалярное излучение в нечетных размерностях

Цель данной Главы – изучение роли нарушения принципа Гюйгенса в формировании излучения и структуре запаздывающего поля в волновой зоне в пространстве-времени нечетной размерности. В модели безмассового скалярного поля, взаимодействующего с точечным зарядом, в пространстве Минковского размерности три и пять с помощью подхода Рорлиха-Тейтельбойма к излучению получены формулы для мощности излучения нерелятивистского заряда, движущегося вдоль произвольной мировой линии, а также формулы для мощности скалярного синхротронного излучения, содержащие интегралы по истории движения заряда, предшествующей запаздывающему времени. Продемонстрировано взаимное сокращение расходимостей, содержащихся в запаздывающем поле на световом конусе заряда, и предложена общая формула для мощности скалярного синхротронного излучения в пространстве Минковского произвольной размерности. Полученные формулы проверены за счет суммирования спектральных распределений мощности скалярного излучения, нечувствительных к размерности пространства-времени.

1.1. Взаимодействие скалярного поля с зарядом

Взаимодействие точечного заряда с безмассовым скалярным полем в пространстве Минковского размерности $D = (n + 1)$ описывается действием (см., например, [145])

$$S = - \int d\tau (m + g\varphi(z)) \sqrt{\dot{z}^\alpha \dot{z}_\alpha} + \frac{1}{2\Omega_{n-1}} \int d^{n+1}x \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi, \quad \dot{z}^\alpha = \frac{dz^\alpha}{d\tau}, \quad (1.1.1)$$

где m и g – соответственно, масса частицы и ее скалярный заряд, $z^\mu(\tau)$ – мировая линия заряда, параметризованная его собственным временем τ , а Ω_{n-1} – площадь $(n - 1)$ -мерной сферы единичного радиуса

$$\Omega_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}. \quad (1.1.2)$$

Мы используем метрику пространства Минковского в виде $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$.

Из действия (1.1.1) следует уравнение движения скалярного поля в виде

$$\square\varphi(x) = -\Omega_{n-1}j(x), \quad (1.1.3)$$

$$j(x) = g \int d\tau \delta^{(n+1)}(x - z), \quad (1.1.4)$$

где $\square = \partial^\mu \partial_\mu - (n+1)$ -мерный оператор Даламбера, и мы учли нормировку скорости заряда $\dot{z}^\alpha \dot{z}_\alpha = 1$. Также из действия (1.1.1) находим канонический тензор энергии-импульса скалярного поля. Вне мировой линии заряда он имеет вид

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\Omega_{n-1}} \left(\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \varphi \partial^\alpha \varphi \right), \quad x^\alpha \neq z^\alpha. \quad (1.1.5)$$

В дальнейшем мы считаем мировую линию заряда фиксированной и независимой от его взаимодействия со скалярным полем и потери энергии зарядом на излучение.

Запаздывающее решение уравнения движения (1.1.3) записывается как

$$\varphi(x) = -\Omega_{n-1} \int d^{n+1}x' G_{n+1}(x-x') j(x'), \quad (1.1.6)$$

где запаздывающая функция Грина уравнения Даламбера удовлетворяет уравнению

$$\square G_{n+1}(x) = \delta^{(n+1)}(x), \quad (1.1.7)$$

$$G_{n+1}(x) = 0, \quad x^0 < 0. \quad (1.1.8)$$

В импульсном представлении запаздывающая функция Грина $(n+1)$ -мерного уравнения Даламбера задается следующим интегралом

$$G_{n+1}(x) = - \int \frac{d^{n+1}p}{(2\pi)^{n+1}} \frac{e^{-ipx}}{p^2 + i\varepsilon p^0}, \quad (1.1.9)$$

где $p^2 = p^\alpha p_\alpha$, и $\varepsilon \rightarrow +0$ определяет сдвиг полюсов в комплексной p^0 -плоскости, соответствующий условию (1.1.8). В работе Иваненко и Соколова [58] было получено следующее рекуррентное соотношение между запаздывающими функциями Грина в нечетных размерностях

$$G_{2\nu+1}(x) = \left(-\frac{1}{2\pi r} \frac{d}{dr} \right)^{\nu-1} G_3(x), \quad \nu \in \mathbb{N}, \quad (1.1.10)$$

$$G_3(x) = \frac{\theta(t) \theta(x^2)}{2\pi \sqrt{x^2}}, \quad t = x^0, \quad r = |\mathbf{x}|. \quad (1.1.11)$$

Из ур. (1.1.10) и (1.1.11) следует, что запаздывающие функции Грина в нечетных размерностях локализованы не только на световом конусе будущего, но и внутри него. Также отсюда следует, что функции Грина в нечетных размерностях задаются комбинацией сингулярных на световом конусе членов.

Таким образом, запаздывающее поле (1.1.6) в размерности $D \geq 5$ будет состоять из $D-3$ сингулярных на световом конусе слагаемых. Однако, далее будет показано, что расходимости, содержащиеся в каждом из отдельных членов, взаимно сокращаются, и запаздывающее поле имеет конечное значение.

1.1.1. Сокращение расходимостей в статическом пределе

Для начала, в качестве наглядного примера, продемонстрируем взаимное сокращение расходимостей, содержащихся в поле статического заряда в размерности $D = 5$.

Дифференцируя трехмерную функцию Грина (1.1.11), мы находим из ур. (1.1.10) пятимерную запаздывающую функцию Грина в виде суммы двух слагаемых

$$G_5(x) = \frac{\theta(t)}{2\pi^2} \left[\frac{\delta(x^2)}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{2} \frac{\theta(x^2)}{(x^2)^{3/2}} \right], \quad (1.1.12)$$

каждое из которых является сингулярным на световом конусе $x^2 = 0$. Продемонстрируем взаимное сокращение расходимостей в запаздывающем поле с помощью ограничения «времени жизни» покоящегося в начале координат заряда.

Предположим, что заряд «включен» лишь в течение конечного интервала собственного времени $\tau \in (a, b)$, где для определенности $a < 0$ и $b > 0$. В течение данного интервала времени мировая линия заряда имеет вид $z^\mu(\tau) = \{\tau, 0, 0, 0, 0\}$. В результате, из ур. (1.1.4) и (1.1.6) мы находим следующее выражение для поля статического заряда

$$\varphi(x) = \frac{g}{2} \int_a^b d\tau \left(\frac{\theta(t - \tau - r - \varepsilon)}{((t - \tau)^2 - r^2)^{3/2}} - \frac{\delta(t - \tau - r - \varepsilon)}{r \sqrt{(t - \tau)^2 - r^2}} \right), \quad (1.1.13)$$

где мы ввели регуляризующий параметр $\varepsilon \rightarrow +0$, который сдвигает расходимости со светового конуса. Интегрируя по собственному времени, мы находим зависимость поля от координатного времени в фиксированной точке наблюдения на расстоянии r от начала координат

$$\varphi(t, r) = \frac{g}{2} \begin{cases} 0, & t < a + r, \\ -\frac{t - a}{r^2 \sqrt{(t - a)^2 - r^2}}, & t \in [a + r, b + r), \\ \frac{t - b}{r^2 \sqrt{(t - b)^2 - r^2}} - \frac{t - a}{r^2 \sqrt{(t - a)^2 - r^2}}, & t \geq b + r. \end{cases} \quad (1.1.14)$$

Переходя к пределу вечного статического заряда $a \rightarrow -\infty$ и $b \rightarrow \infty$, мы получаем конечное выражение для поля заряда

$$\varphi(r) = -\frac{g}{2r^2}. \quad (1.1.15)$$

Таким образом, мы находим, что хоть запаздывающее поле заряда и состоит из суммы сингулярных на световом конусе слагаемых, итоговое выражение для поля является конечным.

Аналогично, далее будет показано, что расходимости, содержащиеся в выражениях для запаздывающего поля в нечетных размерностях, будут также взаимно сокращаться и в случае произвольно движущегося заряда. Мы продемонстрируем это явно для размерностей три и пять.

1.2. Спектральное распределение мощности излучения

Далее мы будем вычислять мощность излучения заряда в нечетных размерностях с помощью подхода Рорлиха-Тейтельбойма к излучению. Проверка полученных результатов может быть выполнена за счет суммирования спектральных распределений мощности излучения, так как запаздывающие поля в импульсном представлении нечувствительны к размерности пространства-времени и, таким образом, свободны от проблем, присущих координатному подходу. Получим общее выражение для спектрально-углового распределения мощности излучения скалярного заряда, движущегося в пространстве-времени произвольной размерности, а так же его частный случай для заряда, движущегося по окружности.

1.2.1. Произвольное движение заряда

Мы считаем мировую линию заряда фиксированной и независимой от потери энергии зарядом на излучение. В таком случае достаточно рассматривать лишь закон сохранения энергии-импульса скалярного поля при его взаимодействии с зарядом. Получим его, дифференцируя тензор энергии-импульса поля (1.1.5) с учетом ур. (1.1.3)

$$\partial^\nu T_{\mu\nu} = \frac{1}{\Omega_{n-1}} \partial_\mu \varphi \square \varphi = -\partial_\mu \varphi j. \quad (1.2.1)$$

Найдем отсюда полную энергию излучения как функцию мировой линии заряда $z^\mu(\tau)$.

Проинтегрируем ур. (1.2.1) по ограниченной области пространства-времени Ω с границей $\partial\Omega$, состоящей из двух пространственно-подобных поверхностей V_i и V_f и замыкающей их пространственно удаленной времени-подобной поверхности \mathcal{B} (считаем, что на \mathcal{B} поле равно нулю)

$$\int_{\Omega} d^{n+1}x \partial^\nu T_{\mu\nu} = - \int_{\Omega} d^{n+1}x \partial_\mu \varphi j. \quad (1.2.2)$$

Применим к левой части полученного уравнения теорему Гаусса

$$\int_{\Omega} d^{n+1}x \partial^\nu T_{\mu\nu} = \int_{\partial\Omega} d\sigma^\nu T_{\mu\nu} = \int_{V_f} d\sigma^\nu T_{\mu\nu} + \int_{V_i} d\sigma^\nu T_{\mu\nu}, \quad (1.2.3)$$

где мы учли, что на \mathcal{B} поле равно нулю. Выбирая в качестве $V_{i,f}$ поверхности постоянного времени $t = t_{i,f} = \text{Const}$ с времени-подобными векторами нормали $n_{i,f}^\mu = \delta_t^\mu$, получаем

$$\int_{\Omega} d^{n+1}x \partial^\nu T_{\mu\nu} = \int_{V_f} d^3x T_{\mu 0} - \int_{V_i} d^3x T_{\mu 0}, \quad (1.2.4)$$

где учтено, что на V_i как границе области Ω вектор нормали должен быть направлен из Ω наружу. Полученное здесь в правой части выражение определяет полную энергию и импульс излучения заряда за время его движения на интервале (t_i, t_f) .

В результате, из ур. (1.2.2) и (1.2.4) мы получаем выражение для полной энергии и импульса излучения заряда за все время его движения в виде интеграла

$$P_\mu = - \int d^{n+1}x \partial_\mu \varphi j. \quad (1.2.5)$$

С помощью Фурье-преобразования скалярного поля и тока

$$\varphi(x) = \int \frac{d^{n+1}p}{(2\pi)^{n+1}} e^{-ipx} \tilde{\varphi}(p), \quad j(x) = \int \frac{d^{n+1}p}{(2\pi)^{n+1}} e^{-ipx} \tilde{j}(p), \quad (1.2.6)$$

с учетом выражения для Фурье-образа δ -функции

$$\delta^{(n+1)}(p+k) = \int \frac{d^{n+1}x}{(2\pi)^{n+1}} e^{-ix(p+k)}, \quad (1.2.7)$$

мы приходим к следующему выражению для полных энергии и импульса излучения в импульсном представлении

$$P_\mu = i \int \frac{d^{n+1}p}{(2\pi)^{n+1}} p_\mu \tilde{\varphi}(p) \tilde{j}(-p). \quad (1.2.8)$$

Найдем Фурье-образ запаздывающего скалярного поля. Используя ур. (1.1.6), выражение для запаздывающей функции Грина в импульсном представлении (1.1.9) и Фурье-преобразования скалярного поля и тока (1.2.6), приходим к выражению

$$\tilde{\varphi}(p) = \frac{\Omega_{n-1} \tilde{j}(p)}{p^2 + i\epsilon p^0} = \Omega_{n-1} \tilde{j}(p) \left[\mathcal{P} \frac{1}{p^2} - i\pi \operatorname{sgn}(p^0) \delta(p^2) \right]. \quad (1.2.9)$$

Подставляя полученный Фурье-образ в ур. (1.2.8), находим, что первый член в подынтегральном выражении, пропорциональный $1/p^2$, является нечетной функцией и при интегрировании по импульсному пространству обращается в нуль. В итоге, полная энергия и импульс излучения принимают вид

$$P_\mu = \frac{\Omega_{n-1}}{(2\pi)^n} \int d^{n+1}p p_\mu |\tilde{j}(p)|^2 \theta(p^0) \delta(p^2), \quad (1.2.10)$$

где мы использовали условие вещественности тока $\tilde{j}(-p) = \tilde{j}^*(p)$ и симметрию p^0 -интеграла вместе с соотношением $\operatorname{sgn}(p^0) = 2\theta(p^0)$. Применяя выражение для произведения функции Хевисайда и δ -функции

$$\theta(p^0) \delta(p^2) = \frac{1}{2\omega} \delta(p^0 - \omega), \quad (1.2.11)$$

где $\omega = |\mathbf{p}|$, мы находим полную энергию излучения заряда в виде интеграла по импульсному пространству

$$E_{n+1} = \frac{\Omega_{n-1}}{2(2\pi)^n} \int d\omega d\Omega_{n-1} \omega^{n-1} |\tilde{j}(p)|^2 \Big|_{p^0=\omega}. \quad (1.2.12)$$

Здесь мы ввели элемент телесного угла в n -мерном евклидовом пространстве $d\Omega_{n-1}$.

Из ур. (1.2.12) находим спектрально-угловое распределение полной энергии излучения в виде

$$\frac{dE_{n+1}}{d\omega d\Omega_{n-1}} = \frac{\Omega_{n-1}\omega^{n-1}}{2(2\pi)^n} |\tilde{j}(p)|^2 \Big|_{p^0=\omega}. \quad (1.2.13)$$

Фурье-образ тока $\tilde{j}(p)$ может быть найден с помощью уравнения (1.1.4) в виде интеграла по координатному времени

$$\tilde{j}(p) = \int d^{n+1}x e^{ipx} j(x) = g \int d\tau \exp[i\omega z^0(\tau) - i\mathbf{p}\mathbf{z}(\tau)], \quad (1.2.14)$$

$$d\tau = \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} dt \quad \implies \quad \tilde{j}(p) = g \int dt \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} \exp[i\omega t - i\mathbf{p}\mathbf{z}(t)], \quad (1.2.15)$$

где $\mathbf{v} = d\mathbf{z}/dt$ – скорость заряда. Подставляя выражение для Фурье-образа тока в ур. (1.2.13), мы приходим к интегральному представлению для спектрально-углового распределения полной энергии излучения заряда

$$\frac{dE_{n+1}}{d\omega d\Omega_{n-1}} = \frac{\Omega_{n-1}\omega^{n-1}g^2}{2(2\pi)^n} \left| \int dt \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} \exp[i\omega t - i\mathbf{p}\mathbf{z}(t)] \right|^2. \quad (1.2.16)$$

Полученное спектрально-угловое распределение полной энергии излучения (1.2.16) будет использовано для вычисления мощности излучения ультрарелятивистского заряда, движущегося по круговой траектории в размерностях три и пять, при проверке результатов, полученных в рамках подхода Рорлиха-Тейтельбойма к излучению.

1.2.2. Периодическое движение заряда

Найдем также частный случай ур. (1.2.16) для заряда, движущегося по круговой орбите. Полученное уравнение будет использовано для вычисления мощности излучения нерелятивистского заряда, движущегося по круговой траектории в размерностях три и пять. В этом разделе наши вычисления аналогичны представленным в [146].

Для периодического движения заряда интеграл по времени можно представить как

$$\int dt \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} \exp[i\omega t - i\mathbf{p}\mathbf{z}(t)] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{il\omega T} \int_0^T dt \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} \exp[i\omega t - i\omega \mathbf{n}\mathbf{z}(t)], \quad (1.2.17)$$

где $\mathbf{p} = \omega \mathbf{n}$, и T – период движения заряда. С помощью соотношения

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{ilx} = 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi l) \quad (1.2.18)$$

приводим интеграл по времени к виду

$$\omega_0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 l) I_{n+1}^l, \quad (1.2.19)$$

$$I_{n+1}^l = \int_0^T dt \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} \exp[i\omega_0 l(t - \mathbf{n}\mathbf{z})]. \quad (1.2.20)$$

где $\omega_0 = 2\pi/T$ – частота периодического движения заряда. Соответственно, квадрат его модуля записывается как

$$\left| \int dt \sqrt{1-v^2} \exp[i\omega t - i\mathbf{p}\mathbf{z}(t)] \right|^2 = \omega_0^2 \delta(0) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 l) |I_{n+1}^l|^2. \quad (1.2.21)$$

Здесь мы понимаем $\delta(0)$ в смысле предельного перехода

$$2\pi\delta(0) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} dt e^{i\omega t} = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} T_0, \quad (1.2.22)$$

где T_0 – полное время движения заряда. Определяя мощность излучения заряда как

$$W_{n+1} = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{E_{n+1}}{T_0}, \quad (1.2.23)$$

мы находим спектрально-угловое распределение мощности излучения заряда в виде

$$\frac{dW_{n+1}}{d\omega d\Omega_{n-1}} = \frac{\Omega_{n-1} \omega^{n-1} g^2}{2(2\pi)^{n+1}} \omega_0^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 l) |I_{n+1}^l|^2. \quad (1.2.24)$$

Как и следовало ожидать [146, 147], спектр излучения периодически движущегося заряда является дискретным – с частотами кратными частоте орбитального движения заряда. Наконец, интегрируя ур. (1.2.24), получаем спектральное распределение мощности излучения периодически движущегося заряда в виде

$$W_{n+1} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\Omega_{n-1} \omega_0^{n+1} l^{n-1} g^2}{2(2\pi)^{n+1}} \int d\Omega_{n-1} |I_{n+1}^l|^2 = \sum_{l=1}^{\infty} W_{n+1}^l, \quad (1.2.25)$$

где W_{n+1}^l – мощность излучения заряда на l -ой гармонике спектра.

Формула Шотта для мощности скалярного излучения

В случае кругового движения заряда с постоянной скоростью

$$\mathbf{z}(t) = \{R_0 \cos \omega_0 t, R_0 \sin \omega_0 t, 0, \dots, 0\}, \quad (1.2.26)$$

$$\mathbf{n} = \{\cos \phi \sin \theta \sin \zeta \dots, \sin \phi \sin \theta \sin \zeta \dots, \cos \theta \sin \zeta \dots, \cos \zeta \dots, \dots\}, \quad (1.2.27)$$

где \mathbf{n} – это единичный вектор в направлении наблюдения [148], угловое распределение мощности излучения заряда на l -ой гармонике спектра имеет вид

$$\frac{dW_{n+1}^l}{d\Omega_{n-1}} = \frac{\Omega_{n-1} \omega_0^{n+1} l^{n-1} g^2}{2(2\pi)^{n+1} \gamma^2} \left| \int_0^T e^{i\omega_0 l(t - \mathbf{n}\mathbf{z}(t))} dt \right|^2, \quad (1.2.28)$$

где $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ – Лоренц-фактор заряда, а $v = R_0 \omega_0$ – его линейная скорость. Вводя новую угловую переменную $a = \omega_0 t - \phi + \pi/2$, нуль которой соответствует направлению движения заряда в момент времени t , и функцию полярных углов $f(\theta, \zeta, \dots) = \sin(\theta) \sin(\zeta) \dots$, записываем подынтегральное выражение в (1.2.28) в виде

$$e^{i\omega_0 l(t - \mathbf{n}\mathbf{z}(t))} = e^{i\omega_0 l t} e^{-i\omega_0 l R_0 \sin a f(\theta, \zeta, \dots)}. \quad (1.2.29)$$

Второй множитель в (1.2.29) может быть преобразован как [149, 150]

$$e^{-ix \sin a} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} J_{\nu}(x) e^{-i\nu a}. \quad (1.2.30)$$

В результате, вычисляя интеграл в ур. (1.2.28) с помощью формулы

$$\int_0^T e^{it\omega_0(l-\nu)} dt = \frac{2\pi}{\omega_0} \delta_{l\nu}, \quad (1.2.31)$$

находим выражение для углового распределения мощности излучения на l -ой гармонике спектра в случае кругового движения заряда в n -мерном пространстве в виде

$$\frac{dW_{n+1}^l}{d\Omega_{n-1}} = \frac{\Omega_{n-1}(\omega_0 l)^{n-1} g^2}{2(2\pi)^{n-1} \gamma^2} J_l^2(vlf(\theta, \zeta, \dots)). \quad (1.2.32)$$

В итоге, мы получили аналог формулы Шотта [146, 151] для мощности $(n+1)$ -мерного скалярного излучения заряда, движущегося по окружности,

$$W_{n+1} = \frac{\Omega_{n-1} \omega_0^{n-1} g^2}{2(2\pi)^{n-2} \gamma^2} \sum_{l=1}^{\infty} l^{n-1} \int d\theta d\zeta \dots \sin \theta \sin^2 \zeta \dots J_l^2(vlf(\theta, \zeta, \dots)). \quad (1.2.33)$$

Далее ур. (1.2.33) будет использовано при проверке выражений для угловых распределений мощности излучения нерелятивистского заряда, движущегося по окружности в размерностях три и пять, полученных в рамках подхода Рорлиха-Тейтельбойма.

1.3. Подход Рорлиха-Тейтельбойма к излучению

Далее для выделения излучаемой части запаздывающего поля локализованного источника и вычисления его мощности излучения мы применяем подход Рорлиха-Тейтельбойма к излучению и его обобщение на случай пространства-времени размерности, отличной от четырех, развитые в работах [85–91]. Данный подход основан на Лоренц-инвариантном разложении тензора энергии-импульса запаздывающего поля и выделении из него части, удовлетворяющей определенным условиям, позволяющим ассоциировать ее с энергией-импульсом излучения. Для этого в подходе Рорлиха-Тейтельбойма применяется техника запаздывающих ковариантных величин. Напомним кратко их определения.

Рассмотрим точечную частицу, движущуюся вдоль мировой линии $z^{\mu}(\tau)$, параметризованной собственным временем τ , со скоростью $v^{\mu} = dz^{\mu}/d\tau$ в D -мерном пространстве Минковского. Точка наблюдения имеет координаты x^{μ} . Построим из точки наблюдения световой конус прошлого и обозначим точку его пересечения с мировой линией частицы как $\hat{z}^{\mu} \equiv z^{\mu}(\hat{\tau})$. Соответствующий момент собственного времени частицы $\hat{\tau}$ называется запаздывающим собственным временем и определяется уравнением

$$(x^{\mu} - \hat{z}^{\mu})^2 = 0, \quad x^0 \geq \hat{z}^0. \quad (1.3.1)$$

Далее все величины с крышечками будут соответствовать запаздывающему времени. Определим три D -вектора: изотропный вектор $\hat{X}^\mu = x^\mu - \hat{z}^\mu$, направленный из запаздывающей точки мировой линии в точку наблюдения; единичный пространственно-подобный вектор \hat{u}^μ , ортогональный скорости частицы в запаздывающий момент времени; изотропный вектор $\hat{c}^\mu = \hat{u}^\mu + \hat{v}^\mu$, сонаправленный с вектором \hat{X}^μ , (см., например, [88])

$$\hat{X}^2 = 0, \quad \hat{u}\hat{v} = 0, \quad \hat{u}^2 = -\hat{v}^2 = -1, \quad \hat{c}^2 = 0, \quad (1.3.2)$$

где $\hat{u}\hat{v} \equiv \hat{u}^\alpha \hat{v}_\alpha$. Отсюда определяем *Лоренц-инвариантное расстояние* $\hat{\rho}$ как скалярное произведение

$$\hat{\rho} \equiv \hat{v}\hat{X}, \quad \hat{X}^\mu = \hat{\rho}\hat{c}^\mu. \quad (1.3.3)$$

Оно совпадает с пространственным расстоянием от частицы до точки наблюдения в системе отсчета, содвигущейся с частицей в запаздывающий момент времени. Если частица движется внутри ограниченной области пространства, то Лоренц-инвариантное расстояние $\hat{\rho}$ эквивалентно пространственному расстоянию $r = |\mathbf{x}|$ при удалении точки наблюдения от области движения частицы

$$\hat{\rho} \rightarrow r, \quad r \gg |\mathbf{z}|. \quad (1.3.4)$$

В подходе Рорлиха-Тейтельбойма излучение определяется дальнедействующей частью разложения тензора энергии-импульса запаздывающего поля *по обратным степеням* $\hat{\rho}$. В размерности D тензор энергии-импульса запаздывающего поля точечного источника раскладывается как [61, 67, 86, 88–90]

$$T^{\mu\nu} = T_{\text{Coul}}^{\mu\nu} + T_{\text{mix}}^{\mu\nu} + T_{\text{rad}}^{\mu\nu} \quad (1.3.5)$$

$$T_{\text{Coul}}^{\mu\nu} \propto \frac{A^{\mu\nu}}{\hat{\rho}^{2D-4}}, \quad T_{\text{mix}}^{\mu\nu} \propto \frac{B^{\mu\nu}}{\hat{\rho}^{2D-5}} + \dots + \frac{C^{\mu\nu}}{\hat{\rho}^{D-1}}, \quad T_{\text{rad}}^{\mu\nu} \propto \frac{D^{\mu\nu}}{\hat{\rho}^{D-2}}. \quad (1.3.6)$$

Здесь первый член $T_{\text{Coul}}^{\mu\nu}$ является тензором энергии-импульса деформированной Кулоновской части запаздывающего поля. Второй член в разложении является смешанной частью, которая состоит из более чем одного слагаемого при $D > 4$ и отсутствует при $D = 3$. Наконец, дальнедействующая часть тензора энергии-импульса $T_{\text{rad}}^{\mu\nu}$ обладает свойствами, позволяющими ассоциировать ее с энергией-импульсом излучения [86, 88, 90, 91]:

- сохраняется отдельно от остальных частей $\partial_\mu T_{\text{rad}}^{\mu\nu} = 0$, что соответствует ее динамической независимости от них;
- пропорциональна произведению двух изотропных векторов $T_{\text{rad}}^{\mu\nu} \sim \hat{c}^\mu \hat{c}^\nu$, что соответствует распространению определяемого ею потока энергии-импульса в пространстве строго со скоростью света $\hat{c}_\mu T_{\text{rad}}^{\mu\nu} = 0$;

- убывает с расстоянием как $T_{\text{rad}}^{\mu\nu} \sim 1/r^{D-2}$ и дает положительно определенный поток энергии-импульса через удаленную $(D-2)$ -мерную сферу.

Таким образом, мощность излучения в размерности D может быть вычислена как поток энергии, ассоциированный с $T_{\text{rad}}^{\mu\nu}$, через удаленную $(D-2)$ -мерную сферу радиуса r

$$W_D = \int d\Omega_{D-2} T_{\text{rad}}^{0i} n^i r^{D-2}, \quad n^i = x^i/r, \quad i = \overline{1, D-1}, \quad (1.3.7)$$

где n^i является единичным пространственно-подобным вектором в направлении наблюдения, а $d\Omega_{D-2}$ – угловой элемент на $(D-2)$ -мерной сфере. Данное разложение тензора энергии-импульса и выражение для мощности излучения справедливы как в четных, так и в нечетных размерностях с единственным отличием в том, что в нечетных размерностях излучаемая часть тензора энергии-импульса зависит от полной истории движения частицы, предшествующей запаздывающему времени \hat{t} .

Более того, в теориях, где тензор энергии-импульса поля является билинейной формой его производных, как это имеет место быть в рассматриваемой модели скалярного поля (1.1.5) или в электродинамике и линеаризованной гравитации, можно определить излучаемую часть производной поля (далее для краткости – излучаемую часть поля) как ее ведущую $\hat{\rho}$ -асимптотику [90]

$$T_{\mu\nu} \propto \partial\Phi\partial\Phi, \quad T_{\mu\nu}^{\text{rad}} \propto 1/\hat{\rho}^{D-2} \implies [\partial_\mu\Phi]^{\text{rad}} \propto 1/\hat{\rho}^{(D-2)/2}. \quad (1.3.8)$$

В таком случае для вычисления излучения достаточно найти излучаемую часть поля и подставить ее в уравнение для тензора энергии-импульса.

1.4. Трехмерная теория

Рассмотрим процесс излучения скалярного поля точечным зарядом в размерности $D = 3$. Получим формулы для мощности излучения нерелятивистского заряда, движущегося вдоль произвольной мировой линии, а также формулу для мощности скалярного синхротронного излучения. Проверим полученные результаты с помощью суммирования спектральных распределений мощности излучения (1.2.16) и (1.2.33).

1.4.1. Излучаемая часть поля

Получим выражение для излучаемой части запаздывающего поля точечного заряда, а также соответствующий тензор энергии-импульса излучения.

В соответствии с ур. (1.1.6), в размерности три запаздывающее решение ур. (1.1.3) дается интегралом

$$\varphi(x) = -2\pi \int d^3x' G_3(x-x')j(x'), \quad G_3(x) = \frac{\theta(t)\theta(x^2)}{2\pi\sqrt{x^2}}. \quad (1.4.1)$$

Подставляя сюда выражение для скалярного тока точечного заряда (1.1.4), находим запаздывающее поле в виде интеграла по собственному времени

$$\varphi(x) = -g \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \frac{1}{\sqrt{X^2}}, \quad X^\mu = x^\mu - z^\mu, \quad (1.4.2)$$

где запаздывающее время $\hat{\tau}$ определяется ур. (1.3.1). Далее для регуляризации полученного интеграла на верхнем пределе интегрирования мы будем вводить в него регуляризующий параметр $\hat{\tau} \rightarrow \hat{\tau} - \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow +0$, сдвигая расходимости со светового конуса

В соответствии с подходом Рорлиха-Тейтельбойма, для выделения излучаемой части поля находим его производную по координатам точки наблюдения

$$\partial_\mu \varphi = - \left. \frac{g\hat{c}_\mu}{\sqrt{X^2}} \right|_{\hat{\tau}-\varepsilon} + g \int_{-\infty}^{\hat{\tau}-\varepsilon} d\tau \frac{X_\mu}{(X^2)^{3/2}}, \quad (1.4.3)$$

где мы вычислили производную запаздывающего времени, дифференцируя ур. (1.3.1) и применяя соотношения (1.3.3)

$$\partial_\mu (x^\alpha - \hat{z}^\alpha)^2 = 0 \quad \implies \quad \partial_\mu \hat{\tau} = \hat{c}_\mu. \quad (1.4.4)$$

Заметим, что здесь и локальный граничный член, и нелокальный интеграл по истории движения заряда являются сингулярными. Однако, расходимости, содержащиеся в них, взаимно сокращаются с помощью интегрирования по частям нелокального вклада. А именно, с помощью соотношения

$$\frac{1}{(X^2)^{3/2}} = \frac{1}{vX} \frac{d}{d\tau} \frac{1}{\sqrt{X^2}} \quad (1.4.5)$$

приводим ур. (1.4.3) к виду

$$\partial_\mu \varphi = - \left. \frac{g\hat{c}_\mu}{\sqrt{X^2}} \right|_{\hat{\tau}-\varepsilon} + \left. \frac{gX_\mu}{vX\sqrt{X^2}} \right|_{-\infty}^{\hat{\tau}-\varepsilon} + g \int_{-\infty}^{\hat{\tau}-\varepsilon} d\tau \left[\frac{aX-1}{(vX)^2\sqrt{X^2}} X_\mu + \frac{v_\mu}{vX\sqrt{X^2}} \right]. \quad (1.4.6)$$

Т.к. мы считаем, что заряд движется в ограниченной области пространства, то во втором граничном члене нижний предел обращается в нуль, а верхний предел за счет соотношений (1.3.3) сокращается с первым локальным вкладом. В результате, производная запаздывающего поля принимает вид

$$\partial_\mu \varphi = g \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \left[\frac{aX-1}{(vX)^2\sqrt{X^2}} X_\mu + \frac{v_\mu}{vX\sqrt{X^2}} \right]. \quad (1.4.7)$$

Полученное выражение для производной поля является конечным. Аналогичное выражение для запаздывающего поля в размерности $D = 3$, содержащее интеграл по истории движения заряда, было также получено в работе [90]. Однако, для этого в данной работе запаздывающие функции Грина рассматривались как регуляризованные распределения, и в результате выражения для запаздывающих полей содержали набор контрчленов, которые лишь неявно сокращали расходимости из основного вклада и не содержали в себе информации об истории движения источника. Здесь же мы получили конечное выражение для запаздывающего поля, оба члена которого несут в себе физическую информацию о конфигурации поля и истории движения заряда.

Выделим излучаемую часть запаздывающего поля как ведущую $\hat{\rho}$ -асимптотику его производной. Для этого представим вектор X^μ в виде

$$X^\mu = \hat{\rho}\hat{c}^\mu + Z^\mu, \quad Z^\mu = \hat{z}^\mu - z^\mu. \quad (1.4.8)$$

С помощью ур. (1.4.8) находим ведущие асимптотики двух членов в подынтегральном выражении в производной поля (1.4.7)

$$\frac{aX - 1}{(vX)^2\sqrt{X^2}}X_\mu \rightarrow \frac{(a\hat{c})\hat{c}_\mu}{(v\hat{c})^2\sqrt{2\hat{\rho}Z\hat{c}}} \propto \hat{\rho}^{-1/2}, \quad (1.4.9)$$

$$\frac{v_\mu}{vX\sqrt{X^2}} \rightarrow \frac{v_\mu}{v\hat{c}\sqrt{2\hat{\rho}^3Z\hat{c}}} \propto \hat{\rho}^{-3/2}. \quad (1.4.10)$$

Таким образом, в соответствии с подходом Рорлиха-Тейтельбойма мы находим излучаемую часть запаздывающего скалярного поля точечного заряда в виде

$$[\partial_\mu\varphi]^{\text{rad}} = \frac{g\hat{c}_\mu}{\sqrt{2\hat{\rho}}} \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \frac{a\hat{c}}{(v\hat{c})^2} \frac{1}{\sqrt{Z\hat{c}}}. \quad (1.4.11)$$

Заметим, что она определяется интегралом по части мировой линии заряда, предшествующей запаздывающему времени $\tau \leq \hat{\tau}$, по аналогии с выражением, полученным в [90]. Данный вид является характерным для всех нечетных размерностей: поле излучения в волновой зоне собирается со всей истории движения, предшествующей запаздывающему времени $\hat{\tau}$. Очевидно, что в случае равномерного прямолинейного движения заряда излучаемая часть поля равна нулю, как и ожидается при рассмотрении излучения.

В ур. (1.4.11) мы отдельно вынесли множитель $(Z\hat{c})^{-1/2}$ в подынтегральном выражении – далее будет показано, что он определяет вклад истории движения заряда в излучение, подавляя вклады более ранних участков мировой линии. В различных теориях подобные факторы будут иметь разный вид, но все они будут зависеть от скалярного произведения $(Z\hat{c})$. Далее для краткости мы будем называть их *дампинг-факторами*.

Наконец, мы находим излучаемую часть тензора энергии-импульса поля, подставляя ур. (1.4.11) в общее выражение для канонического тензора энергии-импульса скалярного поля (1.1.5)

$$T_{\mu\nu}^{\text{rad}} = \frac{g^2 \hat{c}_\mu \hat{c}_\nu}{4\pi \hat{\rho}} \mathcal{A}_3^2, \quad \mathcal{A}_3 = \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \frac{a\hat{c}}{(v\hat{c})^2} \frac{1}{\sqrt{Z\hat{c}}}, \quad (1.4.12)$$

где мы ввели интегральную амплитуду потока энергии излучения в размерности три \mathcal{A}_3 . Полученный тензор энергии-импульса удовлетворяет всем критериям тензора энергии-импульса излучения из подхода Рорлиха-Тейтельбойма.

1.4.2. Излучение нерелятивистского заряда

Получим нерелятивистское приближение для интегральной амплитуды потока энергии излучения (1.4.12). Мы делаем следующие предположения о движении заряда:

- заряд является нерелятивистским $|\mathbf{v}| \ll 1, \forall \tau$;
- движется внутри ограниченной области пространства $|\mathbf{z}| \leq d, \forall \tau$ (d – характерный размер данной области);
- точка наблюдения удаленна от области движения заряда $d \ll r$.

В результате, запаздывающие ковариантные величины раскладываются в ряд по малым параметрам $|\mathbf{v}|$ и $|\mathbf{z}|/r$ с точностью до первого порядка малости как

$$\hat{\tau} \simeq \bar{t} + \mathbf{n}\bar{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{x}/r, \quad (1.4.13)$$

$$\hat{\rho} \simeq r \left(1 - \mathbf{n}\bar{\mathbf{v}} - \frac{1}{r}\mathbf{n}\bar{\mathbf{z}} \right), \quad (1.4.14)$$

$$\hat{c}^\mu \simeq \left\{ 1 + \mathbf{n}\bar{\mathbf{v}}; \mathbf{n} \left(1 + \mathbf{n}\bar{\mathbf{v}} + \frac{1}{r}\mathbf{n}\bar{\mathbf{z}} \right) - \frac{1}{r}\bar{\mathbf{z}} \right\}, \quad (1.4.15)$$

где $\bar{t} = t - r$ – это запаздывающее время, вычисленное с точностью до ведущего вклада, и все величины с чертой соответствуют этому моменту времени. С помощью ур. (1.4.13–1.4.15) мы переписываем дампинг-фактор в ур. (1.4.12) как

$$\frac{1}{\sqrt{(Z\hat{c})}} \simeq \frac{1}{\sqrt{\bar{t} - t'}} \left[1 + \mathbf{n}\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{n}\mathbf{s} \left(1 + \mathbf{n}\bar{\mathbf{v}} + \frac{1}{r}\mathbf{n}\bar{\mathbf{z}} \right) - \frac{1}{r}\mathbf{s}\bar{\mathbf{z}} \right]^{-1/2}, \quad (1.4.16)$$

где мы ввели пространственно-подобный вектор \mathbf{s} как

$$\mathbf{s}(t') = \frac{\bar{\mathbf{z}} - \mathbf{z}(t')}{\bar{t} - t'}, \quad (1.4.17)$$

и заменили собственное время заряда координатным временем $\tau = t'$, учитывая их эквивалентность в нерелятивистском пределе. В запаздывающий момент времени \bar{t} вектор \mathbf{s} имеет

конечное значение $\lim_{t' \rightarrow \bar{t}} \mathbf{s} = \bar{\mathbf{v}}$. Переписывая закон движения заряда через его скорость

$$\mathbf{z}(t) = \int_{t_{\text{in}}}^t \mathbf{v}(t') dt' + \mathbf{z}(t_{\text{in}}), \quad (1.4.18)$$

где t_{in} является начальным моментом времени в удаленном прошлом, с помощью теоремы о среднем значении мы находим, что вектор \mathbf{s} по порядку величины совпадает со скоростью заряда $|\mathbf{s}| \sim |\mathbf{v}|$, $\forall t'$. Таким образом, он должен рассматриваться как еще один малый параметр в нерелятивистском разложении. В результате, дамппинг-фактор в интегральной амплитуде (1.4.12) с точностью до первого порядка малости имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{(Z\hat{c})}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{t} - t'}} \left(1 - \frac{1}{2} \mathbf{n}(\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{s}) \right). \quad (1.4.19)$$

Аналогичным образом находим разложение двух скалярных произведений, участвующих в интегральной амплитуде (1.4.12), с точностью до первого порядка малости

$$(a\hat{c}) \simeq -\mathbf{n}\mathbf{a}, \quad (v\hat{c}) \simeq 1 + \mathbf{n}(\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}). \quad (1.4.20)$$

Здесь при подсчете порядков малости мы учли, что высшие производные координат заряда должны быть также малыми величинами. Чтобы увидеть это явно рассмотрим Фурье-преобразование мировой линии

$$z^k(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{z}^k(\omega) e^{-i\omega t}, \quad \tilde{z}^k(\omega) = \int dt z^k(t) e^{i\omega t}. \quad (1.4.21)$$

Если частица совершает периодическое движение внутри ограниченной области пространства $|\mathbf{z}| \leq d$, то Фурье-образ ее мировой линии удовлетворяет неравенству

$$\tilde{z}^k(\omega) \leq d \int dt e^{i\omega t} = 2\pi d \delta(\omega), \quad (1.4.22)$$

где правая часть соответствует частице, покоящейся на границе данной области. Тогда Фурье-образ мировой линии периодически движущейся частицы должен иметь вид

$$\tilde{z}^k(\omega) = 2\pi d f^k(\omega), \quad (1.4.23)$$

где функции $f^k(\omega)$ локализованы в окрестности характерной частоты периодического движения ω_{ch} . В результате, n -ая производная мировой линии частицы записывается как

$$\frac{d^n z^k}{dt^n} = (-i)^n \int d\omega d\omega^n f^k(\omega) e^{-i\omega t} \sim -i \frac{|\mathbf{v}|}{d} \frac{d^{n-1} z^k}{dt^{n-1}}, \quad (1.4.24)$$

где, за счет локализации области интегрирования около точки ω_{ch} произведение $d\omega$ должно быть порядка скорости частицы $|\mathbf{v}|$. Случай кругового движения является наиболее наглядным примером

$$z^k(t) = R_0 \cos(\omega_0 t + \phi), \quad (1.4.25)$$

$$\frac{d^n z^k}{dt^n} = \omega_0^{n-1} |\mathbf{v}| \cos\left(\omega_0 t + \phi + \frac{\pi n}{2}\right), \quad (1.4.26)$$

где $\omega_0 R_0$ – скорость частицы. Таким образом, в нерелятивистском пределе все кинематические характеристики частицы по порядку величины совпадают со скоростью частицы $d^n z^k / dt^n \sim |\mathbf{v}| \ll 1$. Аналогично, можно показать, что $z^k d^n z^l / dt^n \sim |\mathbf{v}|^2$, $n \geq 2$.

В результате интегральная амплитуда (1.4.12) с точностью до первого порядка малости имеет вид

$$\mathcal{A}_3 \simeq - \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \frac{\mathbf{n}\mathbf{a}}{\sqrt{\bar{t}-t'}}. \quad (1.4.27)$$

Подставляя ее в ур. (1.4.12), находим нерелятивистское приближение для тензора энергии-импульса излучения в размерности $D = 3$

$$T_{\mu\nu}^{\text{rad}} = \frac{g^2 \bar{c}_\mu \bar{c}_\nu}{4\pi r} \left[\int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \frac{\mathbf{n}\mathbf{a}}{\sqrt{\bar{t}-t'}} \right]^2, \quad \bar{c}^\mu = \{1, \mathbf{n}\}. \quad (1.4.28)$$

Отсюда, в соответствии с ур. (1.3.7), мы находим угловое распределение мощности скалярного излучения нерелятивистского заряда в размерности три в виде

$$\frac{dW_3}{d\Omega_1} = \frac{g^2}{4\pi} \left[\int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \frac{\mathbf{n}\mathbf{a}}{\sqrt{\bar{t}-t'}} \right]^2. \quad (1.4.29)$$

Как будет показано далее, ур. (1.4.29) дает конечное выражение для мощности излучения заряда. По аналогии с четырехмерным случаем, из ур. (1.4.29) следует, что в размерности $D = 3$ заряд движущийся равномерно прямолинейно $\mathbf{a} = 0$ не излучает. В нерелятивистском пределе мощность излучения заряда зависит от его полной истории движения, предшествующей запаздывающему времени \bar{t} , в отличие от ультрарелятивистского случая, который будет рассмотрен далее. Заметим также, что в нерелятивистском пределе дамлинг-фактор принимает простой вид $(\bar{t} - t')^{-1/2}$.

Излучение заряда на круговой орбите

В качестве простого примера вычислим мощность излучения нерелятивистского заряда на круговой орбите. В размерности три траектория такого заряда имеет вид

$$\mathbf{z}(t) = \{R_0 \cos \omega_0 t, R_0 \sin \omega_0 t\}, \quad (1.4.30)$$

где R_0 – радиус орбиты, а ω_0 – частота орбитального движения. Тогда интегральная амплитуда потока энергии излучения (1.4.27) записывается как

$$\mathcal{A}_3 = R_0 \omega_0^2 \left[\cos \phi \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \frac{\cos \omega_0 t'}{\sqrt{\bar{t}-t'}} + \sin \phi \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \frac{\sin \omega_0 t'}{\sqrt{\bar{t}-t'}} \right], \quad (1.4.31)$$

где мы учли, что в размерности три $\mathbf{n} = \{\cos \phi, \sin \phi\}$. С помощью замены переменной интегрирования $s = \omega_0(\bar{t} - t')$ мы приводим интегральную амплитуду потока энергии излучения к виду

$$\mathcal{A}_3 = R_0 \omega_0^{3/2} \left[\cos(\phi - \bar{p}) \int_0^\infty ds \frac{\cos s}{\sqrt{s}} - \sin(\phi - \bar{p}) \int_0^\infty ds \frac{\sin s}{\sqrt{s}} \right]. \quad (1.4.32)$$

Оставшиеся здесь интегралы являются интегралами Френеля [150] и легко вычисляются

$$\int_0^\infty ds \frac{\cos s}{\sqrt{s}} = \int_0^\infty ds \frac{\sin s}{\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (1.4.33)$$

В результате, интегральная амплитуда потока энергии излучения нерелятивистского заряда на круговой орбите в размерности $D = 3$ имеет простой вид

$$\mathcal{A}_3 = -\sqrt{\pi} R_0 \omega_0^{3/2} \sin\left(\phi - \omega_0 \bar{t} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (1.4.34)$$

Наконец, из ур. (1.4.29) мы находим угловое распределение мощности излучения заряда на круговой орбите

$$\frac{dW_3^{\text{nr}}}{d\Omega_1} = \frac{1}{4} g^2 R_0^2 \omega_0^3 \sin^2\left(\phi - \omega_0 \bar{t} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (1.4.35)$$

Отсюда следует, что в размерности $D = 3$ максимумы углового распределения мощности излучения

$$\phi_{\text{max}} = \omega_0 \bar{t} + \frac{3\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1.4.36)$$

сдвинуты относительно мгновенного направления движения заряда на угол $\pi/4$, в отличие в четырехмерной теории, где мощность излучения максимальна в направлениях перпендикулярных мгновенному направлению движения заряда. Такой вид углового распределения мощности излучения является следствием нарушения принципа Гюйгенса в нечетных размерностях и связан с нелокальным характером потока энергии излучения (1.4.29).

Интегрируя угловое распределение (1.4.35), мы находим выражение для мощности излучения нерелятивистского заряда на круговой орбите в размерности три

$$W_3^{\text{nr}} = \frac{\pi}{4} g^2 \omega_0 v^2, \quad (1.4.37)$$

где $v = R_0 \omega_0$ – линейная скорость заряда. Далее ур. (1.4.37) будет проверено с помощью суммирования спектрального распределения мощности излучения.

1.4.3. Синхротронное излучение

При вычислении синхротронного излучения ультрарелятивистского заряда удобнее переписать излучаемую часть поля в виде, аналогичном представленному в [90]. А именно, с помощью ур. (1.4.1) и (1.1.4) записываем запаздывающее поле как

$$\varphi(x) = -g \int d\tau \frac{\theta(X^0)\theta(X^2)}{\sqrt{X^2}}, \quad X^\mu = x^\mu - z^\mu. \quad (1.4.38)$$

Отсюда находим производную поля в виде

$$\partial_\mu \varphi = 2g \int d\tau \theta(X^0) \left[\frac{1}{2} \frac{\theta(X^2)}{(X^2)^{3/2}} - \frac{\delta(X^2)}{\sqrt{X^2}} \right] X_\mu. \quad (1.4.39)$$

Наконец, с помощью ур. (1.4.8) и соотношения для δ -функции сложного аргумента

$$\theta(X^0)\delta(X^2) = \frac{\delta(\tau - \hat{\tau})}{2\hat{\rho}}, \quad (1.4.40)$$

мы находим следующее выражение для излучаемой части поля

$$[\partial_\mu\varphi]^{\text{rad}} = \frac{g\hat{c}_\mu}{\sqrt{2}\hat{\rho}} \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \left[\frac{1}{2(Z\hat{c})^{3/2}} - \frac{\delta(\tau - \hat{\tau})}{\sqrt{Z\hat{c}}} \right]. \quad (1.4.41)$$

Здесь вся физическая информация о поле излучения содержится в первом нелокальном члене подынтегрального выражения, в то время как второй локальный член лишь сокращает расходимость, содержащуюся в первом члене на верхнем пределе интегрирования, выполняя роль контрчлена.

Преобразуем вид локального контрчлена в ур. (1.4.41). Для этого введем регуляризующий член, совершая инфинитезимальный сдвиг носителя δ -функции $\hat{\tau} \rightarrow \hat{\tau} - \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow +0$. Вычисляя полученный интеграл, мы находим

$$\int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \frac{\delta(\tau - \hat{\tau} + \varepsilon)}{\sqrt{Z\hat{c}}} = \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}, \quad (1.4.42)$$

где мы учли, что $Z\hat{c} \rightarrow \hat{v}\hat{c}(\hat{\tau} - \tau) = \varepsilon$ при $\tau \rightarrow \hat{\tau} - \varepsilon$. Полученный результат может быть представлен в виде интеграла по истории движения заряда без δ -функции

$$\frac{1}{\varepsilon^{1/2}} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\hat{\tau}-\varepsilon} \frac{d\tau}{(\hat{\tau} - \tau)^{3/2}}. \quad (1.4.43)$$

Таким образом, мы можем записать излучаемую часть поля как

$$[\partial_\mu\varphi]^{\text{rad}} = \frac{g\hat{c}_\mu}{2^{3/2}\hat{\rho}^{1/2}} \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \left[\frac{1}{(Z\hat{c})^{3/2}} - \frac{1}{(\hat{\tau} - \tau)^{3/2}} \right], \quad (1.4.44)$$

где для краткости мы опустили регуляризующий параметр ε в верхнем пределе интегрирования, подразумевая его во всех дальнейших вычислениях. Полученное ур. (1.4.44) для излучаемой части скалярного поля аналогично, представленному в [90]. Для того, чтобы сделать конечность полученного интеграла явной, необходимо совершить дополнительное преобразование подынтегрального выражения (обычно этим преобразованием является интегрирование по частям с выделением сингулярных вкладов). Можно показать, что в случае равномерного прямолинейного движения заряда излучаемая часть поля равна нулю, как и ожидается при рассмотрении излучения.

В соответствии с подходом Рорлиха-Тейтельбойма к излучению, подставляя (1.4.44) в ур. (1.1.5), мы находим излучаемую часть тензора энергии-импульса поля в виде

$$T_{\mu\nu}^{\text{rad}} = \frac{g^2\hat{c}_\mu\hat{c}_\nu}{16\pi\hat{\rho}} \tilde{\mathcal{A}}_3^2, \quad \tilde{\mathcal{A}}_3 = \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \left[\frac{1}{(Z\hat{c})^{3/2}} - \frac{1}{(\hat{\tau} - \tau)^{3/2}} \right]. \quad (1.4.45)$$

где мы ввели новую интегральную амплитуду потока энергии излучения $\tilde{\mathcal{A}}_3$. Полученные выражения для излучаемой части тензора энергии-импульса поля (1.4.12) и (1.4.45) эквивалентны. Однако, для исследования излучения ультрарелятивистских зарядов удобнее использовать интегральную амплитуду потока энергии излучения в виде (1.4.45).

Перейдем к вычислению синхротронного излучения ультрарелятивистского заряда, движущегося по окружности с постоянной по величине скоростью. Мировая линия такого заряда, параметризованная собственным временем τ , имеет вид

$$z^\mu(\tau) = \{\gamma\tau, R_0 \cos(\omega_0\gamma\tau), R_0 \sin(\omega_0\gamma\tau)\}, \quad (1.4.46)$$

где $\gamma = E/m = (1 - v^2)^{-1/2}$ – Лоренц-фактор частицы. Соответствующая 3-скорость заряда записывается как

$$v^\mu(\tau) = \gamma \{1, -v \sin(\omega_0\gamma\tau), v \cos(\omega_0\gamma\tau)\}. \quad (1.4.47)$$

Для удобства вычислений выразим запаздывающее собственное время $\hat{\tau}$ как функцию координатного времени t и расстояния от центра круговой траектории частицы до точки наблюдения r . С помощью ур. (1.3.1) в приближении $r \gg R_0$ мы находим

$$\hat{\tau} = \frac{t - r}{\gamma}. \quad (1.4.48)$$

Подставляя полученное выражение в ур. (1.3.3), мы находим выражения для $\hat{\rho}$ и \hat{c}^μ

$$\hat{\rho} = \gamma r (1 + v \sin(\omega_0\gamma\hat{\tau} - \phi)), \quad (1.4.49)$$

$$\hat{c}^\mu = \frac{r}{\hat{\rho}} \{1, \cos \phi, \sin \phi\}, \quad (1.4.50)$$

где мы ввели полярные координаты $x^\mu = \{t, r \cos \phi, r \sin \phi\}$. Используя ур. (1.4.46) и вводя новую угловую переменную a и новую переменную интегрирования s

$$a = \omega_0\gamma\hat{\tau} - \phi + \pi/2, \quad s = \omega_0\gamma(\hat{\tau} - \tau), \quad (1.4.51)$$

мы представляем скалярное произведение $(Z\hat{c})$, входящее в выражение для амплитуды излучения, как

$$(Z\hat{c}) = \frac{s - v \sin a - v \sin(s - a)}{\omega_0\gamma(1 - v \cos a)}. \quad (1.4.52)$$

Подставляя полученное выражение в ур. (1.4.45), мы приходим к следующему выражению для интегральной амплитуды излучения

$$\tilde{\mathcal{A}}_3 = \sqrt{\omega_0\gamma} \int_0^\infty ds \left[\frac{(1 - v \cos a)^{3/2}}{(s - v \sin a - v \sin(s - a))^{3/2}} - \frac{1}{s^{3/2}} \right]. \quad (1.4.53)$$

По аналогии с синхротронным излучением в четырех измерениях [146, 151], мы ожидаем, что в ультрарелятивистском пределе $\gamma \gg 1$ поток энергии излучения будет сфокусирован

в направлении движения заряда, и, следовательно, интегральная амплитуда тензора энергии-импульса излучения (1.4.53) может быть приведена к более простому виду. Действительно, из уравнений (1.4.49) и (1.4.53) с учетом определений переменных a и s следует, что основной вклад в амплитуду потока энергии излучения дается малым интервалом собственного времени, предшествующим запаздывающему времени \hat{t} (в новых обозначениях – малым интервалом s). Также заметим, что в данном случае поток излучения будет сфокусирован в направлении движения заряда, которое соответствует значению $a = 0$ или $\phi = \omega_0 \gamma \hat{t} + \pi/2$.

Фокусировка излучения может быть продемонстрирована с помощью анализа ур. (1.3.1), определяющего \hat{t} , по аналогии с рассуждениями в работе [72]. Дифференцируя его, находим

$$\frac{da}{d\phi} = -\frac{1}{1 - v \cos a}. \quad (1.4.54)$$

Отсюда следует, что в случае ультррелятивистского заряда $v \rightarrow 1$ поток энергии излучения сфокусирован в узком конусе с углом раствора $\delta\phi \sim \delta a/\gamma^2$, ось которого совпадает с направлением движения заряда. Раскладывая знаменатель первого члена подынтегрального выражения (1.4.53) в ряд в окрестности точки $s = a = 0$, находим, что знаменатель имеет минимум ширины $\delta s \sim \delta a \sim 1/\gamma$. Таким образом, по аналогии с синхротронным излучением в четырех измерениях, нам достаточно найти амплитуду потока энергии излучения с точностью до ведущего вклада по γ .

Раскладывая в ряд первый член в подынтегральном выражении (1.4.53) в окрестности точки $s = a = 0$ с точностью до лидирующего вклада по параметру $1/\gamma$ (т.е. в окрестности $\delta s \sim \delta a \sim 1/\gamma$), мы находим амплитуду потока энергии излучения в виде

$$\tilde{\mathcal{A}}_3 = \gamma \omega_0^{1/2} \int_0^\infty dx F(x), \quad (1.4.55)$$

$$F(x) = \frac{1}{x^{3/2}} \left[\frac{(\hat{a}^2 + 1)^{3/2}}{(x^2/3 - \hat{a}x + \hat{a}^2 + 1)^{3/2}} - 1 \right], \quad (1.4.56)$$

где мы перемасштабировали переменные как $x = \gamma s$ и $\hat{a} = \gamma a$. Угловое распределение мощности излучения может быть получено из ур. (1.3.7) с помощью соотношений (1.4.49), (1.4.50) и (1.4.54) в виде

$$\frac{dW_3}{da} = \frac{g^2 \omega_0 \gamma \tilde{\mathcal{A}}_3^2}{4\pi(1 - v \cos a)^2}. \quad (1.4.57)$$

Переходя с помощью соотношения

$$1 - v \cos a \simeq \frac{\hat{a}^2 + 1}{\gamma^2} \quad (1.4.58)$$

к ведущей γ -асимптотике углового распределения мощности излучения, мы приходим к вы-

ражению для мощности трехмерного скалярного синхротронного излучения в виде

$$W_3 = \frac{g^2 \omega_0 \gamma^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{a} \frac{\tilde{\mathcal{A}}_3^2}{(\hat{a}^2 + 1)^2}, \quad (1.4.59)$$

где интегрирование по \mathbb{R} вместо конечного интервала, определяемого уравнением (1.4.51), связано с тем, что переменная \hat{a} линейно зависит от Лоренц-фактора заряда $\gamma \gg 1$. Интеграл в выражении (1.4.59) является численным множителем и не зависит от физических параметров системы.

Покажем, что расходимости в выражении для мощности излучения (1.4.59), связанные с нижним пределом интегрирования в $\tilde{\mathcal{A}}_3$, взаимно сокращаются. Для этого дважды проинтегрируем по частям первое слагаемое в подынтегральном выражении (1.4.55). В результате, мы получим следующий сходящийся интеграл

$$\int_0^{\infty} dx F(x) = \int_0^{\infty} dx \frac{x^{1/2}}{(x^2/3 - \hat{a}x + \hat{a}^2 + 1)^{5/2}} \left[4 - \frac{15(2x/3 - \hat{a})^2}{x^2/3 - \hat{a}x + \hat{a}^2 + 1} \right]. \quad (1.4.60)$$

Значение численного множителя в выражении для мощности излучения (1.4.59) может быть получено с помощью численного интегрирования, которое дает результат $4\pi/\sqrt{3}$ с точностью до пяти цифр после запятой. В итоге, мы приходим к простому выражению для мощности трехмерного скалярного синхротронного излучения

$$W_3^s = \frac{g^2 \omega_0 \gamma^2}{\sqrt{3}}. \quad (1.4.61)$$

Заметим важное отличие между излучением нерелятивистского и ультрарелятивистского заряда в нечетных размерностях. В ультрарелятивистском пределе основной вклад в излучение дает малый интервал собственного времени, предшествующий запаздывающему времени \hat{t} , в то время как в нерелятивистском пределе излучение определяется всей историей движения заряда, предшествующей запаздывающему времени. В результате, хвостовая часть излучения в ультрарелятивистском пределе оказывается эффективно локализована, и угловое распределение синхротронного излучения в нечетных размерностях совпадает с угловым распределением синхротронного излучения в размерности $D = 4$ [146, 151].

1.4.4. Спектральные распределения

Проверим полученные выражения для мощности скалярного излучения заряда, движущегося по круговой траектории в нерелятивистском и ультрарелятивистском пределах, с помощью суммирования спектральных распределений мощности излучения.

Нерелятивистский предел

Воспользуемся спектральным распределением мощности излучения заряда, движущегося по окружности, в виде (1.2.33). В размерности три оно записывается как

$$W_3 = \frac{\pi\omega_0 g^2}{\gamma^2} \sum_{l=1}^{\infty} l J_l^2(vl). \quad (1.4.62)$$

В нерелятивистском пределе $v \ll 1$ мы можем воспользоваться следующей аппроксимацией функций Бесселя целого порядка при малых значениях аргумента [149, 150]

$$J_n(x)|_{x \rightarrow 0} = \frac{x^n}{2^n n!}. \quad (1.4.63)$$

Из ур. (1.4.63) следует, что в нерелятивистском пределе основной вклад в излучение дает первая гармоника спектра $l = 1$. В результате, мощность излучения дается выражением

$$W_3^{\text{nr}} = \frac{\pi}{4} g^2 \omega_0 v^2, \quad (1.4.64)$$

совпадающим с ур. (1.4.37), полученным в координатном представлении.

Синхротронное излучение

Так как в ультррелятивистском пределе $v \rightarrow 1$ основная часть излучения сфокусирована в направлении движения заряда, а вклад истории движения заряда в излучение ограничен малым интервалом собственного времени $\delta s \sim 1/\gamma$, то мгновенная мощность излучения в заданном направлении определяется короткой дугой круговой траектории длины $\delta l \sim R_0/\gamma$ [146, 151]. Следовательно, мы можем упростить выражение для спектрально-углового распределения мощности скалярного синхротронного излучения.

Начнем со спектрально-углового распределения полной энергии излучения заряда, движущегося по произвольной траектории, в виде (1.2.16)

$$\frac{dE_3}{d\omega d\Omega_1} = \frac{\omega g^2}{4\pi\gamma^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 e^{i\omega(t_1-t_2) - i\mathbf{k}(\mathbf{z}(t_1) - \mathbf{z}(t_2))}. \quad (1.4.65)$$

Преобразуя переменные интегрирования как

$$t_1 = t - t_0/2, \quad t_2 = t + t_0/2, \quad (1.4.66)$$

мы переписываем выражение для спектрально-углового распределения мощности излучения заряда в виде

$$\frac{dW_3}{d\omega d\Omega_1} = \frac{dE_3/dt}{d\omega d\Omega_1} = \frac{\omega g^2}{4\pi\gamma^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 e^{-i\omega t_0 - i\mathbf{k}(\mathbf{z}(t-t_0/2) - \mathbf{z}(t+t_0/2))}. \quad (1.4.67)$$

В ультрарелятивистском пределе основной вклад в данный интеграл дает малая окрестность $\delta t_0 \sim 1/\gamma$ точки $t_0 = 0$. Раскладывая показатель экспоненты в ряд Тейлора в окрестности $t_0 = 0$, мы находим с точностью до лидирующего порядка по γ

$$-i\omega t_0 - i\mathbf{k}(\mathbf{z}(t - t_0/2) - \mathbf{z}(t + t_0/2)) \simeq -i\omega t_0 \left(\frac{1}{2} \left(a^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right) + \frac{\omega_0^2 t_0^2}{24} \right), \quad (1.4.68)$$

где $\mathbf{k} = \omega\{\cos \phi, \sin \phi\}$, $\mathbf{z}(t) = R_0\{\cos \omega_0 t, \sin \omega_0 t\}$ и мы ввели новую угловую переменную $a = \omega_0 t - \phi + \pi/2$. Тогда спектральное распределение мощности излучения в ведущем порядке по γ принимает вид

$$\frac{dW_3}{d\omega} = \frac{\omega g^2}{4\pi\gamma^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \exp \left[-i\omega t_0 \left(\frac{1}{2} (a^2 + 1/\gamma^2) + \frac{\omega_0^2 t_0^2}{24} \right) \right]. \quad (1.4.69)$$

По аналогии с четырехмерной теорией [146, 151], после перемасштабирования переменных интегрирования $\hat{a} = a\gamma$ и $t' = \frac{1}{2}(\omega/\omega_0)^{1/3}\omega_0 t_0$ мы можем выразить интеграл по времени через функцию Эйри [152]

$$\text{Ai}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \exp \left[i \left(ut' + \frac{t'^3}{3} \right) \right], \quad (1.4.70)$$

приходя к уравнению

$$\frac{dW_3}{d\omega} = \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{2/3} \frac{g^2}{\gamma^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{a} \text{Ai} \left(\left(\frac{\omega}{\omega_0\gamma^3} \right)^{2/3} (\hat{a}^2 + 1) \right). \quad (1.4.71)$$

Вводя переменную $s = x(\hat{a}^2 + 1)$, где $x = (\omega/\omega_0\gamma^3)^{2/3}$, и применяя формулу [153]

$$\int_x^{\infty} ds \frac{\text{Ai}(s)}{(s-x)^{1/2}} = 2^{2/3}\pi \text{Ai}^2 \left(\frac{x}{2^{2/3}} \right), \quad (1.4.72)$$

мы вычисляем интеграл в (1.4.71) и получаем выражение для спектрального распределения мощности трехмерного скалярного синхротронного излучения

$$\frac{dW_3}{d\omega} = \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{2/3} \frac{g^2}{x^{1/2}\gamma^3} 2^{2/3}\pi \text{Ai}^2 \left(\frac{x}{2^{2/3}} \right). \quad (1.4.73)$$

Проинтегрируем распределение (1.4.73), переходя к новой переменной $x = (\omega/\omega_0\gamma^3)^{2/3}$.

В результате, мощность синхротронного излучения записывается как

$$W_3 = \frac{3}{2} 2^{2/3}\pi g^2 \omega_0 \gamma^2 \int_0^{\infty} dx x \text{Ai}^2 \left(\frac{x}{2^{2/3}} \right). \quad (1.4.74)$$

Используя известную формулу для интеграла от квадрата функции Эйри [153]

$$\int_0^{\infty} ds s \text{Ai}^2(s) = \frac{1}{6\sqrt{3}\pi}, \quad (1.4.75)$$

мы получаем следующее выражение для мощности скалярного синхротронного излучения в размерности $D = 3$

$$W_3^s = \frac{g^2 \omega_0 \gamma^2}{\sqrt{3}}, \quad (1.4.76)$$

которое совпадает с выражением (1.4.61), полученным в координатном представлении.

1.5. Пятимерная теория

Рассмотрим теперь процесс излучения скалярного поля точечным зарядом в размерности $D = 5$. Здесь все вычисления аналогичны проведенным в предыдущем разделе, поэтому мы лишь кратко опишем основные шаги.

1.5.1. Излучаемая часть поля

В соответствии с ур. (1.1.6), в размерности пять запаздывающее поле точечного заряда дается интегралом

$$\varphi(x) = -2\pi^2 \int d^5x' G_5(x-x')j(x'), \quad G_5(x) = \frac{\theta(t)}{2\pi^2} \left[\frac{\delta(x^2)}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{2} \frac{\theta(x^2)}{(x^2)^{3/2}} \right]. \quad (1.5.1)$$

Подставляя сюда выражение для скалярного тока точечного заряда (1.1.4), с помощью ур. (1.4.40) находим запаздывающее поле в виде

$$\varphi(x) = \frac{g}{2} \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \left[\frac{1}{(X^2)^{3/2}} - \frac{\delta(\tau - \hat{\tau})}{\hat{\rho}\sqrt{X^2}} \right], \quad X^\mu = x^\mu - z^\mu. \quad (1.5.2)$$

Заметим, что в силу ур. (1.3.1) каждый член подынтегрального выражения расходится на верхнем пределе интегрирования. Однако, по аналогии с трехмерным случаем, здесь вся физическая информация о поле излучения содержится в первом нелокальном члене, в то время как второй локальный член с δ -функцией лишь сокращает расходимость, содержащуюся в первом. Вводя регуляризующий параметр в верхний предел интегрирования $\hat{\tau} \rightarrow \hat{\tau} - \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow +0$ и интегрируя первый член по частям с помощью соотношения (1.4.5), мы устраняем расходимость, содержащуюся в нем, с помощью локального члена. В результате, запаздывающее поле точечного заряда в размерности пять имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{g}{2} \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \frac{aX - 1}{(vX)^2\sqrt{X^2}}. \quad (1.5.3)$$

Вычисляя производную поля и устраняя из нее локальный член, возникающий при дифференцировании верхнего предела интегрирования, интегрированием по частям с помощью соотношения (1.4.5), мы получаем

$$\partial_\mu \varphi = \frac{g}{2} \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \left[\frac{\dot{a}X}{(vX)^3\sqrt{X^2}} X_\mu - 3 \frac{(aX - 1)^2}{(vX)^4\sqrt{X^2}} X_\mu - 3 \frac{aX - 1}{(vX)^3\sqrt{X^2}} v_\mu + \frac{a_\mu}{(vX)^2\sqrt{X^2}} \right]. \quad (1.5.4)$$

В соответствии с подходом Рорлиха-Тейтельбойма, выделяя ведущую $\hat{\rho}$ -асимптотику производной поля с помощью соотношений (1.4.8), мы находим излучаемую часть запаздывающего поля точечного заряда в размерности $D = 5$ в виде

$$[\partial_\mu \varphi]^{\text{rad}} = \frac{g\hat{c}_\mu}{2^{3/2}\hat{\rho}^{3/2}} \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \left[\frac{\dot{a}\hat{c}}{(v\hat{c})^3} - 3 \frac{(a\hat{c})^2}{(v\hat{c})^4} \right] \frac{1}{\sqrt{Z\hat{c}}}. \quad (1.5.5)$$

По аналогии с трехмерным случаем, в силу нарушения принципа Гюйгенса в нечетных размерностях излучаемая часть пятимерного запаздывающего поля зависит от полной истории движения заряда, предшествующей запаздывающему времени \hat{t} . Также в подынтегральном выражении в ур. (1.5.5) мы отдельно вынесли дамлинг-фактор $(Z\hat{c})^{-1/2}$, определяющий вклад истории движения заряда в поле излучения. Полученное выражение для излучаемой части поля является конечным и не содержит сингулярностей.

Подставляя ур. (1.5.5) в тензор энергии-импульса (1.1.5), мы находим выражение для излучаемой части тензора энергии-импульса поля

$$T_{\mu\nu}^{\text{rad}} = \frac{g^2 \hat{c}_\mu \hat{c}_\nu}{16\pi^2 \hat{\rho}^3} \mathcal{A}_5^2, \quad \mathcal{A}_5 = \int_{-\infty}^{\hat{t}} d\tau \left[\frac{\dot{a}\hat{c}}{(v\hat{c})^3} - 3 \frac{(a\hat{c})^2}{(v\hat{c})^4} \right] \frac{1}{\sqrt{Z\hat{c}}}, \quad (1.5.6)$$

где мы ввели интегральную амплитуду потока энергии излучения в размерности пять \mathcal{A}_5 . Полученный тензор энергии-импульса (1.5.6) удовлетворяет всем критериям тензора энергии-импульса излучения из подхода Рорлиха-Тейтельбойма.

1.5.2. Излучение нерелятивистского заряда

По аналогии с трехмерным случаем, с помощью разложений запаздывающих ковариантных величин (1.4.13 – 1.4.15), а также разложений дамлинг-фактора (1.4.19) и скалярных произведений кинематических характеристик заряда (1.4.20) мы получаем нерелятивистское приближение для интегральной амплитуды потока энергии излучения с точностью до вкладов первого порядка малости в виде

$$\mathcal{A}_5 \simeq - \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \frac{\mathbf{n}\dot{\mathbf{a}}}{\sqrt{\bar{t} - t'}}, \quad (1.5.7)$$

где $\bar{t} = t - r$ – запаздывающее время, вычисленное с точностью до лидирующего вклада.

В результате, мощность скалярного излучения произвольно движущегося нерелятивистского заряда в размерности $D = 5$ имеет дается выражением

$$\frac{dW_5}{d\Omega_3} = \frac{g^2}{16\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \frac{\mathbf{n}\dot{\mathbf{a}}}{\sqrt{\bar{t} - t'}} \right]^2. \quad (1.5.8)$$

По аналогии с трехмерным случаем (1.4.29), в нерелятивистском пределе мощность излучения заряда зависит от его полной истории движения, предшествующей запаздывающему времени. Однако, заметим интересную особенность высших нечетных размерностей: в отличие от трехмерной и четырехмерной теорий, в размерности пять заряд, движущийся с постоянным ускорением, в нерелятивистском приближении не излучает. Однако, вклады более высоких порядков малости не равны нулю и в случае движения заряда с постоянным ускорением.

Излучение заряда на круговой орбите

В качестве простого примера вычислим мощность излучения нерелятивистского заряда на круговой орбите. Траектория такого заряда имеет вид

$$\mathbf{z}(t) = \{R_0 \cos \omega_0 t, R_0 \sin \omega_0 t, 0, 0\}, \quad (1.5.9)$$

и интегральная амплитуда потока энергии излучения (1.5.7) записывается как

$$\mathcal{A}_5 = -R_0 \omega_0^3 \sin \theta \sin \zeta \left[\cos \phi \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \frac{\sin \omega_0 t'}{\sqrt{\bar{t} - t'}} - \sin \phi \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \frac{\cos \omega_0 t'}{\sqrt{\bar{t} - t'}} \right], \quad (1.5.10)$$

где мы учли, что в размерности пять $\mathbf{n} = \{\cos \phi \sin \theta \sin \zeta, \sin \phi \sin \theta \sin \zeta, \cos \theta \sin \zeta, \cos \zeta\}$ [148]. По аналогии с трехмерным случаем, с помощью замены переменной интегрирования $s = \omega_0(\bar{t} - t')$ мы сводим интегральную амплитуду потока энергии излучения к комбинации интегралов Френеля (1.4.33). В результате, интегральная амплитуда потока энергии излучения нерелятивистского заряда на круговой орбите в размерности $D = 5$ имеет вид

$$\mathcal{A}_3 = \sqrt{\pi} R_0 \omega_0^{5/2} \sin \theta \sin \zeta \cos \left(\phi - \omega_0 \bar{t} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (1.5.11)$$

Отсюда с помощью ур. (1.5.8) мы получаем угловое распределение мощности излучения заряда круговой орбите

$$\frac{dW_5^{\text{nr}}}{d\Omega_3} = \frac{g^2}{16\pi} R_0^2 \omega_0^5 \sin^2 \theta \sin^2 \zeta \cos^2 \left(\phi - \omega_0 \bar{t} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (1.5.12)$$

Аналогично размерности три, максимумы углового распределения мощности излучения

$$\phi_{\text{max}} = \omega_0 \bar{t} + \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1.5.13)$$

сдвинуты относительно мгновенного направления движения заряда на угол $\pi/4$, что также является следствием нарушения принципа Гюйгенса в нечетных размерностях.

Интегрируя угловое распределение (1.5.12), мы находим выражение для мощности излучения нерелятивистского заряда на круговой орбите в размерности пять

$$W_5^{\text{nr}} = \frac{\pi}{32} g^2 \omega_0^3 v^2. \quad (1.5.14)$$

Далее ур. (1.5.14) будет проверено с помощью суммирования спектрального распределения мощности излучения.

1.5.3. Синхротронное излучение

По аналогии с трехмерным случаем, для вычисления мощности синхротронного излучения заряда получим другое выражение для излучаемой части поля. Для этого из ур. (1.5.1), не устрояя локальные члены интегрированием по частям, находим

$$\partial_\mu \varphi = -g \int d\tau \theta(X^0) \left[\frac{3}{2} \frac{\theta(X^2)}{(X^2)^{5/2}} + 2 \frac{\delta'(X^2)}{\sqrt{X^2}} - 2 \frac{\delta(X^2)}{(X^2)^{3/2}} \right] X_\mu, \quad (1.5.15)$$

где $\delta'(x) = d\delta(x)/dx$. Используя соотношение

$$\frac{dX^2}{d\tau} = -2vX, \quad (1.5.16)$$

интегрируем по частям член в (1.5.15), содержащий производную δ -функции, приходя к следующему выражению для производной поля

$$\partial_\mu \varphi = -g \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \frac{1}{2\sqrt{X^2}} \left[\frac{3}{(X^2)^2} X_\mu - \frac{\delta(\tau - \hat{\tau})}{\hat{\rho} X^2} X_\mu - \frac{\delta(\tau - \hat{\tau})}{\hat{\rho}(vX)^2} (aX - 1) X_\mu - \frac{\delta(\tau - \hat{\tau})}{\hat{\rho} vX} v_\mu \right], \quad (1.5.17)$$

где мы использовали ур. (1.4.40). Раскладывая полученное выражение по обратным степеням $\hat{\rho}$, мы находим излучаемую часть поля в виде

$$[\partial_\mu \varphi]^{\text{rad}} = -\frac{g\hat{c}_\mu}{2^{5/2}\hat{\rho}^{3/2}} \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \left[\frac{3}{2} \frac{1}{(Z\hat{c})^{5/2}} - \frac{\delta(\tau - \hat{\tau})}{(Z\hat{c})^{3/2}} - \frac{2a\hat{c}\delta(\tau - \hat{\tau})}{\sqrt{Z\hat{c}}(v\hat{c})^2} \right]. \quad (1.5.18)$$

Перепишем два локальных члена в (1.5.18) по аналогии с преобразованиями, проведенными в уравнениях (1.4.42) и (1.4.43)

$$\int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \frac{\delta(\tau - \hat{\tau})}{(Z\hat{c})^{3/2}} = \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} \frac{d\tau}{(\hat{\tau} - \tau)^{5/2}}, \quad (1.5.19)$$

$$\int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \frac{2a\hat{c}\delta(\tau - \hat{\tau})}{\sqrt{Z\hat{c}}(v\hat{c})^2} = \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \frac{\hat{a}\hat{c}}{(\hat{\tau} - \tau)^{3/2}}. \quad (1.5.20)$$

В результате, мы приходим к следующему выражению для излучаемой части поля

$$[\partial_\mu \varphi]^{\text{rad}} = -\frac{g\hat{c}_\mu}{2^{5/2}\hat{\rho}^{3/2}} \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \left[\frac{3}{2} \frac{1}{(Z\hat{c})^{5/2}} - \frac{3}{2} \frac{1}{(\hat{\tau} - \tau)^{5/2}} - \frac{\hat{a}\hat{c}}{(\hat{\tau} - \tau)^{3/2}} \right], \quad (1.5.21)$$

аналогичному полученному в работе [90] в размерности три. Заметим, что в размерности $D = 5$ мы получили сумму трех расходящихся на верхнем пределе интегралов, в отличие от трехмерной теории (1.4.44). Аналогично трехмерному случаю, эти расходимости взаимно сокращаются: второй член является контрчленом к ведущей расходимости первого интеграла, в то время как третий интеграл устраняет остаточную расходимость.

Отсюда находим выражение для излучаемой части тензора энергии-импульса поля, подставляя (1.5.21) в ур. (1.1.5),

$$T_{\mu\nu}^{\text{rad}} = \frac{g^2 \hat{c}_\mu \hat{c}_\nu}{64\pi^2 \hat{\rho}^3} \tilde{\mathcal{A}}_5^2, \quad \tilde{\mathcal{A}}_5 = \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \left[\frac{3}{2} \frac{1}{(Z\hat{c})^{5/2}} - \frac{3}{2} \frac{1}{(\hat{\tau} - \tau)^{5/2}} - \frac{\hat{a}\hat{c}}{(\hat{\tau} - \tau)^{3/2}} \right]. \quad (1.5.22)$$

Полученные выражения для излучаемой части тензора энергии-импульса поля (1.5.6) и (1.5.22) эквивалентны. Однако, в случае ультрарелятивистского движения заряда удобнее использовать ур. (1.5.22).

Вычислим мощность скалярного синхротронного излучения заряда в размерности пять. Предполагая, что траектория заряда лежит в экваториальной плоскости

$$z^\mu(\tau) = \{\gamma\tau, R_0 \cos(\omega_0\gamma\tau), R_0 \sin(\omega_0\gamma\tau), 0, 0\}, \quad (1.5.23)$$

и используя выражение для запаздывающего собственного времени в виде $\hat{\tau} = (t - r)/\gamma$, мы находим выражения для $\hat{\rho}$ и \hat{c}^μ

$$\hat{\rho} = \gamma r (1 + v \sin(\omega_0\gamma\hat{\tau} - \phi) \sin \theta \sin \zeta), \quad (1.5.24)$$

$$\hat{c}^\mu = \frac{r}{\hat{\rho}} \{1, \cos \phi \sin \theta \sin \zeta, \sin \phi \sin \theta \sin \zeta, \cos \theta \sin \zeta, \cos \zeta\}, \quad (1.5.25)$$

где мы использовали сферические координаты [148] точки наблюдения

$$x^\mu = \{t, r \cos \phi \sin \theta \sin \zeta, r \sin \phi \sin \theta \sin \zeta, r \cos \theta \sin \zeta, r \cos \zeta\}. \quad (1.5.26)$$

Вычислив скалярные произведения $Z\hat{c}$ и $\hat{a}\hat{c}$, мы переходим к новой переменной интегрирования $s = \omega_0\gamma(\hat{\tau} - \tau)$ и вводим угловую переменную $a = \omega_0\gamma\hat{\tau} - \phi + \pi/2$, нуль которой соответствует направлению движения заряда в запаздывающий момент времени $\hat{\tau}$. После несложных, но громоздких вычислений мы приходим к следующему выражению для интегральной амплитуды потока энергии-импульса излучения

$$\tilde{\mathcal{A}}_5 = (\omega_0\gamma)^{3/2} \int_0^\infty ds G(s), \quad (1.5.27)$$

$$G(s) = \frac{3}{2} \left[\left(\frac{1 - v\Delta \cos a}{s - v\Delta(\sin a + \sin(s - a))} \right)^{5/2} - \frac{1}{s^{5/2}} \right] - \frac{v\Delta \sin a}{s^{3/2}(1 - v\Delta \cos a)}, \quad (1.5.28)$$

где мы ввели обозначения $\Delta = \sin \theta \sin \zeta$ и $\delta = 1 - v \cos a$.

В случае ультрарелятивистского заряда удобно перейти к угловым переменным $\theta \rightarrow \theta - \pi/2$ и $\zeta \rightarrow \zeta - \pi/2$, нули которых соответствуют плоскости движения заряда. В результате, координаты точки наблюдения принимают вид

$$x^\mu = \{t, R \cos \phi \cos \theta \cos \zeta, R \sin \phi \cos \theta \cos \zeta, -R \sin \theta \cos \zeta, -R \sin \zeta\}. \quad (1.5.29)$$

Тогда изотропный вектор \hat{c}^μ и Лоренц-инвариантное расстояние $\hat{\rho}$ переписываются как

$$\hat{\rho} = \gamma r (1 + v \sin(\omega_0\gamma\hat{\tau} - \phi) \cos \theta \cos \zeta), \quad (1.5.30)$$

$$\hat{c}^\mu = \frac{r}{\hat{\rho}} \{1, \cos \phi \cos \theta \cos \zeta, \sin \phi \cos \theta \cos \zeta, -\sin \theta \cos \zeta, -\sin \zeta\}. \quad (1.5.31)$$

Аналогично, величина Δ преобразуется как $\Delta = \cos \theta \cos \zeta$.

По аналогии с трехмерной задачей, из выражения для амплитуды потока энергии излучения (1.5.27) следует, что основная часть потока энергии синхротронного излучения сфокусирована в узком конусе с осью вдоль мгновенного направления движения заряда $a = 0$, $\theta = 0$, $\zeta = 0$ и углом раствора порядка $\delta a \sim 1/\gamma$, $\delta \theta \sim 1/\gamma$, $\delta \zeta \sim 1/\gamma$. Также, по аналогии с трехмерным случаем, можно показать, что основной вклад в амплитуду (1.5.27) дает малая окрестность нижнего предела интегрирования $s = 0$ ширины $\delta s \sim 1/\gamma$.

Используя соотношение между угловыми переменными a и ϕ , следующее из ур. (1.3.1), с точностью до ведущего порядка по γ

$$\frac{da}{d\phi} = -\frac{1}{1 - v\Delta \cos a} \simeq -\frac{1}{2\gamma^2} (\hat{a}^2 + \hat{\theta}^2 + \hat{\zeta}^2 + 1), \quad (1.5.32)$$

и перемасштабируя переменные интегрирования как $\{s, a, \theta, \zeta\} \rightarrow \{x = s\gamma, \hat{a} = a\gamma, \hat{\theta} = \theta\gamma, \hat{\zeta} = \zeta\gamma\}$, мы находим из ур. (1.5.27) с точностью до ведущего порядка по Лоренц-фактору заряда

$$G(x) = \frac{\gamma^{5/2}}{x^{3/2}} \left(\frac{3}{2x} \left[\frac{\hat{A}}{x^2/3 - \hat{a}x + \hat{A}} \right]^{5/2} - \frac{3}{2x} - \frac{2\hat{a}}{\hat{A}} \right), \quad (1.5.33)$$

где мы ввели обозначение $\hat{A} = \hat{a}^2 + \hat{\theta}^2 + \hat{\zeta}^2 + 1$. Расходимости в различных членах интегральной амплитуды (1.5.33), содержащиеся на нижнем пределе интегрирования $s = 0$, взаимно сокращаются в результате тройного интегрирования по частям первого слагаемого в подынтегральном выражении.

В результате, после интегрирования по частям в амплитуде потока энергии излучения из ур. (1.3.7) мы получаем мощность скалярного синхротронного излучения в размерности пять в виде

$$W_5^s = \frac{g^2 \omega_0^3 \gamma^6}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} d\hat{a} d\hat{\theta} d\hat{\zeta} \hat{A} \left[\int_0^\infty dx \frac{315x^{1/2} \Phi}{2\Lambda^{9/2}} \left(\frac{\Phi^2}{\Lambda} - \frac{140}{315} \right) \right]^2, \quad (1.5.34)$$

где мы ввели обозначения $\Phi = 2x/3 - \hat{a}$ и $\Lambda = x^2/3 - \hat{a}x + \hat{A}$. Вычисление интегралов в (1.5.34) приведено в Приложении 1. Итоговый численный множитель можно получить с помощью преобразований, сводящих данный четырехкратный интеграл к двукратному, и последующего численного интегрирования. В результате, численный множитель, с точностью до пяти цифр после запятой, имеет значение $1/\sqrt{27}$, и мы находим простое выражение для мощности пятимерного скалярного синхротронного излучения

$$W_5^s = \frac{g^2 \omega_0^3 \gamma^6}{\sqrt{27}}. \quad (1.5.35)$$

Заметим, что в данном случае, по аналогии с трехмерной задачей, зависимость мощности излучения от истории движения заряда оказывается эффективно локализована в малом интервале собственного времени $\delta s \sim 1/\gamma$, предшествующем запаздывающему времени $s = 0$.

1.5.4. Спектральные распределения

Для проверки результатов, полученных при вычислениях в координатном представлении, найдем выражения для мощности излучения заряда в нерелятивистском и ультрарелятивистском пределах с помощью суммирования спектрально-угловых распределений мощности излучения.

Нерелятивистский предел

По аналогии с трехмерным случаем, воспользуемся спектральным распределением мощности излучения скалярного заряда, движущегося по окружности, в виде (1.2.33). Так, в размерности пять ур. (1.2.33) принимает вид

$$W_5 = \frac{g^2 \omega_0^3}{4} \sum_{l=1}^{+\infty} l^3 \int d\theta d\zeta \sin \theta \sin^2 \zeta J_l^2(vl\Delta), \quad (1.5.36)$$

где мы воспользовались введенным ранее в ур. (1.5.27) обозначением Δ . В нерелятивистском пределе $v \rightarrow 0$ мы можем воспользоваться аппроксимацией функций Бесселя (1.4.63). В результате, в нерелятивистском пределе основной вклад в мощность излучения дает первая гармоника спектра $l = 1$, и мы можем представить выражение для мощности излучения в виде

$$W_5^{\text{nr}} = \frac{g^2 \omega_0^3 v^2}{16} \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta \int_0^\pi d\zeta \sin^4 \zeta. \quad (1.5.37)$$

Вычисляя интегралы по угловым переменным [150], мы приходим к простому выражению для мощности излучения пятимерного нерелятивистского заряда, движущегося по окружности,

$$W_5^{\text{nr}} = \frac{\pi}{32} g^2 \omega_0^3 v^2, \quad (1.5.38)$$

совпадающему с ур. (1.5.14), полученным в координатном представлении.

Синхротронное излучение

По аналогии с трехмерной задачей, из ур. (1.2.16) мы находим спектрально-угловое распределение полной энергии излучения в виде

$$\frac{dE_5}{d\omega d\Omega_3} = \frac{\omega^3 g^2}{16\pi^2 \gamma^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 e^{i\omega(t_1-t_2) - i\mathbf{k}(\mathbf{z}(t_1) - \mathbf{z}(t_2))}. \quad (1.5.39)$$

После преобразования переменных интегрирования (1.4.66) мы можем представить спектрально-угловое распределение мощности излучения в виде

$$\frac{dW_5}{d\omega d\Omega_3} = \frac{dE_5/dt}{d\omega d\Omega_3} = \frac{\omega^3 g^2}{16\pi^2 \gamma^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 e^{-i\omega t_0 - \mathbf{k}(\mathbf{z}(t-t_0/2) - \mathbf{z}(t+t_0/2))}. \quad (1.5.40)$$

Основной вклад в полученный интеграл дает окрестность $\delta t_0 \sim 1/\gamma$ точки $t_0 = 0$. Тогда, раскладывая показатель экспоненты в подынтегральном выражении в ряд Тейлора в точке $t_0 = 0$ с точностью до лидирующего порядка по γ , приходим к выражению

$$-i\omega t_0 - i\mathbf{k}(\mathbf{z}(t - t_0/2) - \mathbf{z}(t + t_0/2)) = -\frac{i\omega t_0}{2\gamma^2} \left(\hat{a}^2 + \hat{\theta}^2 + \hat{\zeta}^2 + 1 + \frac{\omega_0^2 t_0^2 \gamma^2}{12} \right) \quad (1.5.41)$$

где угловые переменные выбраны в соответствии с вычислениями в волновой зоне. Мы также перемасштабировали угловые переменные, умножая их на γ и растягивая область интегрирования $\hat{a}, \hat{\theta}, \hat{\zeta} \in (-\infty, \infty)$. В результате, мы приходим к следующему выражению для спектрального распределения мощности излучения

$$\frac{dW_5}{d\omega} = \frac{\omega^3 g^2}{16\pi^2 \gamma^5} \int_{\mathbb{R}^3} d\hat{a} d\hat{\theta} d\hat{\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \exp \left[-\frac{i\omega t_0}{2\gamma^2} \left(1 + \hat{a}^2 + \hat{\theta}^2 + \hat{\zeta}^2 + \frac{\omega_0^2 t_0^2 \gamma^2}{12} \right) \right]. \quad (1.5.42)$$

Вводя сферические координаты для интегрирования по угловым переменным

$$\hat{a} = \rho \cos \alpha \sin \beta, \quad \hat{\theta} = \rho \sin \alpha \sin \beta, \quad \hat{\zeta} = \rho \cos \beta, \quad (1.5.43)$$

где $\rho \in [0; +\infty)$, $\alpha \in [0; 2\pi)$ и $\beta \in [0; \pi]$, мы находим спектральное распределение мощности излучения в виде следующего интеграла

$$\frac{dW_5}{d\omega} = \frac{\omega^3 g^2}{4\pi \gamma^5} \int_0^{\infty} d\rho \rho^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \exp \left[-\frac{i\omega t_0}{2\gamma^2} \left(1 + \rho^2 + \frac{\omega_0^2 t_0^2 \gamma^2}{12} \right) \right]. \quad (1.5.44)$$

Интеграл по t_0 вычисляется с помощью определения функции Эйри (1.4.70)

$$\frac{dW_5}{d\omega} = \frac{\omega^3 g^2}{\omega_0 \gamma^5} \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^{1/3} \int_0^{\infty} d\rho \rho^2 \text{Ai} \left(\left(\frac{\omega}{\gamma^3 \omega_0} \right)^{2/3} (\rho^2 + 1) \right). \quad (1.5.45)$$

Перемасштабируя переменную интегрирования $r = \rho(\omega/\omega_0\gamma^3)^{1/3}$ и вводя безразмерный параметр $x = (\omega/\omega_0\gamma^3)^{2/3}$, переписываем данное выражение как

$$\frac{dW_5}{d\omega} = \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^{1/3} \frac{\omega^2 g^2}{\gamma^2} \int_0^{\infty} dr r^2 \text{Ai}(r^2 + x). \quad (1.5.46)$$

В результате, интегрирование по r может быть произведено с помощью интеграла [153]

$$\int_0^{\infty} dr r^2 \text{Ai}(r^2 + x) = \frac{\pi}{2^{2/3}} (\text{Ai}'(x/2^{2/3}))^2 - \frac{\pi x}{2^{4/3}} \text{Ai}^2(x/2^{2/3}). \quad (1.5.47)$$

Переходя к новому безразмерному параметру $s = (\omega/2\omega_0\gamma^3)^{2/3}$, мы находим спектральное распределение мощности излучения в виде

$$\frac{dW_5}{d\omega} = 2\pi g^2 \gamma^3 \omega_0^2 s^{5/2} ((\text{Ai}'(s))^2 - s \text{Ai}^2(s)). \quad (1.5.48)$$

В итоге, мощность пятимерного скалярного синхротронного излучения

$$W_5 = 6\pi g^2 \omega_0^3 \gamma^6 \int_0^{\infty} ds s^3 ((\text{Ai}'(s))^2 - s \text{Ai}^2(s)), \quad (1.5.49)$$

вычисляется с помощью известных формул для интегралов от функции Эйри [153]

$$\int_0^\infty ds s^3 (\text{Ai}'(s))^2 = \frac{5}{18\sqrt{3}\pi}, \quad \int_0^\infty ds s^4 \text{Ai}^2(s) = \frac{2}{9\sqrt{3}\pi}, \quad (1.5.50)$$

и совпадает с результатом, полученным в координатном представлении (1.5.35).

$$W_5^s = \frac{g^2 \omega_0^3 \gamma^6}{\sqrt{27}}. \quad (1.5.51)$$

1.5.5. Скалярное синхротронное излучение в произвольной размерности

В итоге, на основе полученных формул (1.4.76) и (1.5.51) для мощности скалярного синхротронного излучения в размерностях три и пять, соответственно, а также на основе известного результата для случая $D = 4$ [154] мы предполагаем, что мощность скалярного синхротронного излучения в произвольной размерности $D = n + 1$ дается формулой

$$W_{n+1}^s = g^2 \left(\frac{\omega_0 \gamma^2}{\sqrt{3}} \right)^{n-1}. \quad (1.5.52)$$

1.6. Выводы

В данной Главе была исследована роль нарушения принципа Гюйгенса в формировании излучения и структуре запаздывающего поля в волновой зоне в пространстве-времени нечетной размерности. В модели безмассового скалярного поля в пространстве Минковского размерности три и пять получены формулы для мощности излучения нерелятивистского заряда (1.4.29) и (1.5.8), а также формулы для мощности скалярного синхротронного излучения (1.4.61) и (1.5.35). На основе последних была предложена общая формула для мощности скалярного синхротронного излучения в произвольной размерности $D = n + 1$ (1.5.52). Данные результаты были получены за счет применения подхода Рорлиха-Тейтельбойма к излучения, основанного на Лоренц-инвариантном разложении тензора энергии-импульса запаздывающего поля локализованного источника. Корректность полученных результатов была проверена за счет суммирования спектральных распределений мощности излучения, свободных от проблем, присущих координатному подходу.

Было показано, что в нечетных размерностях за счет нарушения принципа Гюйгенса запаздывающее поле точечного источника и поток энергии излучения зависит от его полной истории движения, предшествующей запаздывающему времени, а также явно продемонстрировано взаимное сокращение расходимостей, содержащихся в запаздывающем поле на световом конусе источника. Помимо этого, была обнаружена интересная особенность излучения ультрарелятивистских источников: в то время как мощность излучения нерелятивистского

заряда зависит от его полной истории движения, зависимость мощности синхротронного излучения заряда от его истории движения оказывается эффективно локализованной на малом интервале его мировой линии, предшествующем запаздывающему времени. За счет этого угловое распределение мощности синхротронного излучения в нечетных размерностях оказывается также сфокусированным в направлении движения заряда, по аналогии с четырехмерным случаем [146, 151].

Заметим, что в [90] также рассматривалась задача излучения скалярного поля в размерности $D = 3$. Однако, полученное в данной работе выражение для излучаемой части поля содержит интегральные контрчлены, которые возникают в нем за счет определения запаздывающих функций Грина как регуляризованных распределений и лишь неявно сокращают расходимости, содержащиеся в основном вкладе, и не несут информации об истории движения источника. Мы же получили явно конечное выражение для запаздывающего поля в волновой зоне, не содержащее подобных контрчленов и полностью определяющееся кинематическими характеристиками источника. Отметим также, что полученная нами формула (1.4.61) для мощности скалярного синхротронного излучения в размерности $D = 3$ согласуется с результатом, полученным в [72] за счет вычисления силы реакции излучения. Также наши результаты согласуются с качественными оценками для мощности синхротронного излучения, полученными в [64] и с общей схемой для мощности синхротронного излучения в четных размерностях [66].

Глава 2

Хвостовые сигналы в излучении в нечетных размерностях

Нарушение принципа Гюйгенса в нечетных размерностях приводит к тому, что в любой заданной точке пространства-времени запаздывающее безмассовое поле локализованного источника зависит от его полной истории движения, предшествующей запаздывающему времени (см., например, ур. (1.4.11) и (1.5.5)). Такой нелокальный характер запаздывающих полей должен приводить к образованию хвостовых сигналов в излучении локализованных источников. В частности, в теориях гравитации с нечетным числом дополнительных измерений гравитационное излучение двойных систем черных дыр и нейтронных звезд должно содержать хвостовые вклады. В этой Главе мы демонстрируем формирование хвостового сигнала в излучении точечного заряда, движущегося по фиксированной эллиптической орбите, в модели скалярного поля в пространстве Минковского размерности $D = 3$. Несмотря на свою заведомую простоту данная модель улавливает основные эффекты, связанные с нарушением принципа Гюйгенса, которые ожидаются в гравитационном излучении двойных систем в реалистичных моделях гравитации с нечетным числом некомпактных дополнительных измерений, таких как RS2 и DGP-модели.

2.1. Пример хвостового сигнала в излучении

Формирование хвостовых сигналов в излучении локализованных источников должно приводить к характерной зависимости мощности излучения источника от времени. Однако, в Главе 1 на примере излучения нерелятивистского заряда на круговой орбите было показано, что хвостовые сигналы не формируются в излучении, когда источник движется с постоянными по величине скоростью и ускорением (мощность излучения заряда на круговой орбите не зависит от времени – см. (1.4.37) и (1.5.14)). Также было показано, что в случае ультрарелятивистского заряда зависимость мощности излучения от истории движения источника локализована на малом интервале собственного времени, предшествующем запаздывающему времени, эффективно устраняя хвостовой вклад. Таким образом, наиболее отчетливо хвостовые сигналы должны проявляться в излучении нерелятивистских источников с изменяющимися во времени кинематическими характеристиками.

В частности, хвостовые сигналы должны присутствовать в излучении заряда на эллиптической орбите. Однако, в силу периодического движения заряда, хвостовой сигнал в его излучении может проявляться не достаточно отчетливо. Поэтому для определения основных признаков хвостовых сигналов в излучении рассмотрим сначала простой пример заряда с ускорением, зависящим от времени как функцию Гаусса.

2.1.1. Излучение нерелятивистского заряда в $D = 4$

Напомним сначала выражения для излучаемой части поля и мощности излучения нерелятивистского заряда в $D = 4$ (см., например, [88]). Их сравнение с аналогичными выражениями в $D = 3$ поможет лучше понять особенности излучения в нечетных размерностях.

В соответствии с ур. (1.1.6), запаздывающее поле точечного заряда в размерности $D = 4$ дается интегралом

$$\varphi(x) = -4\pi \int d^4x' G_4(x - x') j(x'), \quad G_4(x) = \frac{\theta(t)}{2\pi} \delta(x^2). \quad (2.1.1)$$

Подставляя сюда выражение для скалярного тока (1.1.4) и используя соотношение (1.4.40), мы находим поле точечного заряда в размерности четыре в виде

$$\varphi(x) = -\frac{g}{\hat{\rho}}. \quad (2.1.2)$$

Таким образом, в $D = 4$ поле зависит лишь от состояния источника в запаздывающий момент времени. С помощью ур. (1.3.1), (1.3.3) и (1.4.4) находим производную поля в виде

$$\partial_\mu \varphi = \frac{g}{\hat{\rho}^2} [\hat{\rho}(\hat{a}\hat{c})\hat{c}_\mu + \hat{v}_\mu - \hat{c}_\mu]. \quad (2.1.3)$$

Наконец, с помощью ур. (1.4.8) мы выделяем излучаемую часть поля точечного заряда

$$[\partial_\mu \varphi]^{\text{rad}} = \frac{g(\hat{a}\hat{c})}{\hat{\rho}} \hat{c}_\mu. \quad (2.1.4)$$

Из ур. (1.4.13–1.4.15) и (1.4.20) мы находим нерелятивистское приближение для излучаемой части поля

$$[\partial_\mu \varphi]^{\text{rad}} \simeq -g \frac{\mathbf{n}\bar{\mathbf{a}}}{r} \hat{c}_\mu. \quad (2.1.5)$$

Отсюда с помощью ур. (1.1.5) и (1.3.7) получаем мощность излучения нерелятивистского скалярного заряда в размерности четыре в виде

$$\frac{dW_4}{d\Omega_2} = \frac{g^2}{4\pi} (\mathbf{n}\bar{\mathbf{a}})^2. \quad (2.1.6)$$

Из ур. (1.4.29) и (2.1.6) следует, что выражения для мощности излучения нерелятивистского заряда в размерностях три и четыре имеют схожий вид. Однако, в первом случае присутствует также интеграл по истории движения заряда, который и должен приводить к формированию хвостовых сигналов в излучении.

2.1.2. Излучение заряда с Гауссовым ускорением

Рассмотрим теперь излучение нерелятивистского заряда, движущегося по прямой с ускорением, зависящим от времени как функция Гаусса, в размерности $D = 3$

$$\mathbf{a}(t) = \{a_0 \exp[-t^2/2\sigma^2], 0\}. \quad (2.1.7)$$

Здесь a_0 максимальное значение ускорения, а σ – интервал времени, в течение которого ускорение заряда значительно отлично от нуля. Нерелятивистское приближение справедливо при выполнении условия $a_0\sigma \ll 1$.

Из ур. (1.4.29) мы находим следующее выражение для мощности излучения заряда

$$W_3^g(\bar{t}) = \frac{g^2 a_0^2}{4} \left[\int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \frac{\exp[-t'^2/2\sigma^2]}{\sqrt{\bar{t} - t'}} \right]^2 \quad (2.1.8)$$

где мы учли, что в размерности три $\mathbf{n} = \{\cos \phi, \sin \phi\}$. Аналогично, в размерности $D = 4$ находим мощность излучения такого заряда с помощью ур. (2.1.6) в виде

$$W_4^g(\bar{t}) = \frac{g^2 a_0^2}{3} \exp\left[-\frac{\bar{t}^2}{\sigma^2}\right], \quad (2.1.9)$$

где мы также учли, что в размерности четыре $\mathbf{n} = \{\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta\}$. Для удобства сравнения трехмерного и четырехмерного случаев мы нормируем мощности излучения и модуль ускорения заряда на их максимальные значения

$$\bar{W}_3^g(\bar{t}) = \frac{W_3^g(\bar{t})}{W_{3\max}^g}, \quad \bar{W}_4^g(\bar{t}) = \frac{3}{g^2 a_0^2} W_4^g(\bar{t}), \quad \bar{a}(\bar{t}) = \exp\left[-\frac{\bar{t}^2}{2\sigma^2}\right], \quad (2.1.10)$$

$$W_{3\max}^g = \max_{\bar{t}} W_3^g(\bar{t}). \quad (2.1.11)$$

В размерности $D = 3$ мы численно находим зависимость нормированной мощности излучения от запаздывающего времени \bar{t} для значения $\sigma = 1$ (см. рис. (2.1)). Отсюда видно, что в $D = 3$ в излучении заряда образуется продолжительный, убывающий с течением времени хвостовой сигнал, наблюдающийся даже когда ускорение заряда уже пренебрежимо мало. Также из рис. (2.1) видно, что в $D = 3$ точка экстремума мощности излучения сдвинута во времени от момента $\bar{t} = 0$, когда ускорение заряда принимает максимальное значение, в отличие от четырехмерного случая.

Мы ожидаем подобного поведения и от излучения заряда на эллиптической орбите. Однако, в этом случае периодическое движение заряда препятствует формированию столь продолжительного и отчетливого хвостового сигнала, как в излучении заряда с Гауссовым ускорением. Поэтому наиболее явным признаком хвостового сигнала в излучении заряда на эллиптической орбите должны быть сдвиги точек экстремума мощности излучения во времени от моментов прохождения зарядом перицентра и апоцентра орбиты, когда его ускорение принимает максимальное и минимальное значения соответственно.

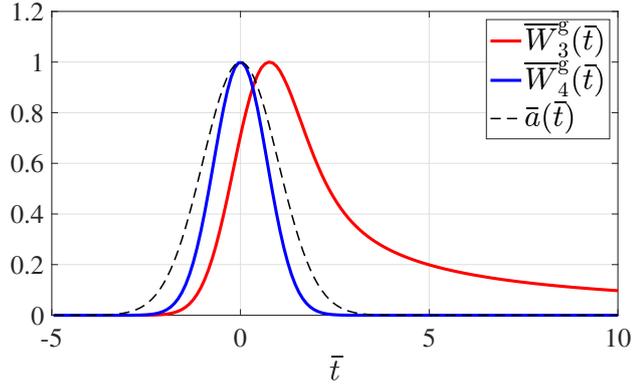


Рис. 2.1. Зависимость нормированных мощностей излучения заряда и модуля его ускорения от запаздывающего времени в размерностях три и четыре.

2.2. Излучение заряда на эллиптической орбите

Рассмотрим излучение нерелятивистского заряда, движущегося по фиксированной эллиптической орбите в размерности три. Зависимость координат заряда от времени может быть записана в параметрическом виде через эксцентриситетную аномалию $\xi(t)$ [155]

$$\mathbf{z}(t) = \{\rho(t) \cos \psi(t), \rho(t) \sin \psi(t)\}, \quad (2.2.1)$$

$$\rho(t) = a(1 - e \cos \xi), \quad \cos \psi(t) = \frac{\cos \xi - e}{1 - e \cos \xi}, \quad (2.2.2)$$

$$\omega_0 t = \xi - e \sin \xi, \quad \omega_0^2 = \alpha / ma^3, \quad (2.2.3)$$

где m – масса заряда, a – большая полуось эллипса, и ω_0 – частота орбитального движения. Для простоты будем считать, что движение заряда обусловлено некоторым внешним взаимодействием, имеющим Кулоновский характер с нерелятивистским уравнением движения заряда

$$m\mathbf{a} = -\frac{\alpha}{z^3}\mathbf{z}, \quad (2.2.4)$$

где α является константой взаимодействия. Мы не конкретизируем это взаимодействие, предполагая лишь, что оно приводит к фиксированной эллиптической орбите заряда. Мы также пренебрегаем реакцией излучения скалярного поля на движение заряда.

Так как эксцентриситетная аномалия является однозначной дифференцируемой функцией времени, то в ур. (1.4.29) удобно перейти от интеграла по времени к интегралу по аномалии. Якобиан такого преобразования имеет вид

$$\frac{dt}{d\xi} = \frac{1}{\omega_0}(1 - e \cos \xi). \quad (2.2.5)$$

Интегрирование ведется по области $\xi \in (-\infty, \bar{\xi})$, где запаздывающее значение аномалии $\bar{\xi}$

определяется из трансцендентного уравнения

$$\omega_0 \bar{t} = \xi - e \sin \xi \quad \Longrightarrow \quad \bar{\xi} = \xi(\bar{t}). \quad (2.2.6)$$

Получим выражения для координат заряда (2.2.1) как функций аномалии. Для этого воспользуемся ур. (2.2.2)

$$\cos \psi(t) = \frac{\cos \xi(t) - e}{1 - e \cos \xi(t)} \quad \Longrightarrow \quad \psi(t) = \arccos \frac{\cos \xi(t) - e}{1 - e \cos \xi(t)}, \quad (2.2.7)$$

$$\sin \psi(t) = \sin \left(\arccos \frac{\cos \xi(t) - e}{1 - e \cos \xi(t)} \right) = \pm \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin \xi(t)}{1 - e \cos \xi(t)}. \quad (2.2.8)$$

Движению заряда в сторону возрастания полярного угла ψ соответствует знак плюс в ур. (2.2.8). В результате, координаты заряда как функции аномалии принимают вид

$$\mathbf{z}(\xi) = \left\{ a(\cos \xi - e), a\sqrt{1 - e^2} \sin \xi \right\}. \quad (2.2.9)$$

Ускорение заряда как функцию аномалии находим из уравнения движения (2.2.4), подставляя в него координаты заряда (2.2.9)

$$\mathbf{a}(\xi) = -\frac{\omega_0^2 a}{(1 - e \cos \xi)^3} \left\{ \cos \xi - e, \sqrt{1 - e^2} \sin \xi \right\}. \quad (2.2.10)$$

В итоге, мощность излучения нерелятивистского заряда на эллиптической орбите в размерности $D = 3$ определяется следующим выражением

$$W_3 = \frac{g^2 \omega_0^3 a^2}{4\pi} \int d\phi J^2(\bar{\xi}, \phi, e), \quad (2.2.11)$$

$$J(\bar{\xi}, \phi, e) = \int_{-\infty}^{\bar{\xi}} d\xi' \frac{\cos \phi (\cos \xi' - e) + \sqrt{1 - e^2} \sin \phi \sin \xi'}{\sqrt{\bar{\xi} - \xi' - e(\sin \bar{\xi} - \sin \xi')}(1 - e \cos \xi')^2} = \int_{-\infty}^{\bar{\xi}} d\xi' j(\xi', \phi, e), \quad (2.2.12)$$

где мы учли, что $\mathbf{n} = \{\cos \phi, \sin \phi\}$. Аналитическое вычисление интеграла $J(\bar{\xi}, \phi, e)$ в общем случае затруднительно. Будем вычислять его, раскладывая подынтегральную функцию $j(\xi', \phi, e)$ в ряд по степеням эксцентриситета орбиты вокруг точки $e = 0$. При этом каждый порядок разложения будет хорошо аппроксимировать точное выражение (2.2.12) лишь в определенном диапазоне значений эксцентриситета.

2.2.1. Линейное приближение

Вычислим интеграл по истории движения заряда $J(\bar{\xi}, \phi, e)$ в линейном приближении по эксцентриситету орбиты. Это приближение справедливо для области значений эксцентриситета $e \lesssim 10^{-2}$.

Подынтегральная функция $j(\xi', \phi, e)$ раскладывается в ряд по эксцентриситету с точностью до первого порядка как

$$j^{(1)}(\xi', \phi, e) = i^{(0)}(\xi', \phi) + e i^{(1)}(\xi', \phi) + \mathcal{O}(e^2), \quad (2.2.13)$$

$$i^{(0)}(\xi', \phi) = \frac{\cos \phi \cos \xi' + \sin \phi \sin \xi'}{\sqrt{\bar{\xi} - \xi'}}, \quad (2.2.14)$$

$$i^{(1)}(\xi', \phi) = \frac{\cos \phi \cos 2\xi' + \sin \phi \sin 2\xi'}{\sqrt{\bar{\xi} - \xi'}} + \frac{1}{2} \frac{(\sin \bar{\xi} - \sin \xi')(\cos \phi \cos \xi' + \sin \phi \sin \xi')}{(\bar{\xi} - \xi')^{3/2}}. \quad (2.2.15)$$

Соответственно, интеграл по истории движения заряда с точностью до первого порядка по эксцентриситету принимает вид

$$\begin{aligned} J^{(1)}(\bar{\xi}, \phi, e) &= \int_{-\infty}^{\bar{\xi}} d\xi' j^{(1)}(\xi', \phi, e) = \int_{-\infty}^{\bar{\xi}} d\xi' i^{(0)}(\xi', \phi) + e \int_{-\infty}^{\bar{\xi}} d\xi' i^{(1)}(\xi', \phi) + \mathcal{O}(e^2) \\ &= I^{(0)}(\bar{\xi}, \phi) + e I^{(1)}(\bar{\xi}, \phi) + \mathcal{O}(e^2). \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Начнем с вычисления интеграла $I^{(0)}(\bar{\xi}, \phi)$

$$I^{(0)}(\bar{\xi}, \phi) = \int_{-\infty}^{\bar{\xi}} d\xi' i^{(0)}(\xi', \phi) = \int_{-\infty}^{\bar{\xi}} d\xi' \frac{\cos \phi \cos \xi' + \sin \phi \sin \xi'}{\sqrt{\bar{\xi} - \xi'}}. \quad (2.2.17)$$

После замены переменной интегрирования $s = \bar{\xi} - \xi'$ мы приходим к выражению

$$I^{(0)}(\bar{\xi}, \phi) = \cos \phi \int_0^{+\infty} ds \frac{\cos(\bar{\xi} - s)}{\sqrt{s}} + \sin \phi \int_0^{+\infty} ds \frac{\sin(\bar{\xi} - s)}{\sqrt{s}}. \quad (2.2.18)$$

Раскрывая косинус и синус разности и вычисля оставшиеся интегралы Френеля (1.4.33), получаем простое выражение для интеграла $I^{(0)}(\bar{\xi}, \phi)$

$$I^{(0)}(\bar{\xi}, \phi) = \sqrt{\pi} \left[\sin \bar{\xi} \sin \left(\phi + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \bar{\xi} \sin \left(\phi - \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (2.2.19)$$

Интеграл $I^{(0)}(\bar{\xi}, \phi)$ совпадает с точным выражением для интеграла по истории движения заряда (2.2.12) в случае его движения по круговой орбите $e = 0$.

Вычислим теперь интеграл $I^{(1)}(\bar{\xi}, \phi)$. Для удобства разделим $i^{(1)}(\xi', \phi)$ на две части с различными обратными степенями $\sqrt{\bar{\xi} - \xi'}$

$$i^{(1)}(\xi', \phi) = i^{(1,1)}(\xi', \phi) + i^{(1,3)}(\xi', \phi), \quad (2.2.20)$$

$$i^{(1,1)}(\xi', \phi) = \frac{\cos \phi \cos 2\xi' + \sin \phi \sin 2\xi'}{\sqrt{\bar{\xi} - \xi'}}, \quad (2.2.21)$$

$$i^{(1,3)}(\xi', \phi) = \frac{1}{2} \frac{(\sin \bar{\xi} - \sin \xi')(\cos \phi \cos \xi' + \sin \phi \sin \xi')}{(\bar{\xi} - \xi')^{3/2}}. \quad (2.2.22)$$

Соответственно, $I^{(1)}(\bar{\xi}, \phi)$ также разобьется на два интеграла

$$I^{(1)}(\bar{\xi}, \phi) = I^{(1,1)}(\bar{\xi}, \phi) + I^{(1,3)}(\bar{\xi}, \phi), \quad (2.2.23)$$

$$I^{(1,1)}(\bar{\xi}, \phi) = \int_{-\infty}^{\bar{\xi}} d\xi' i^{(1,1)}(\xi', \phi), \quad I^{(1,3)}(\bar{\xi}, \phi) = \int_{-\infty}^{\bar{\xi}} d\xi' i^{(1,3)}(\xi', \phi). \quad (2.2.24)$$

Интеграл $I^{(1,1)}(\bar{\xi}, \phi)$ вычисляется в полной аналогии с $I^{(0)}(\bar{\xi}, \phi)$ и принимает вид

$$I^{(1,1)}(\bar{\xi}, \phi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\sin 2\bar{\xi} \sin \left(\phi + \frac{\pi}{4} \right) - \cos 2\bar{\xi} \sin \left(\phi - \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (2.2.25)$$

При вычислении $I^{(1,3)}(\bar{\xi}, \phi)$ сначала интегрируем его по частям, чтобы привести его к виду комбинации интегралов Френеля

$$\begin{aligned} I^{(1,3)}(\bar{\xi}, \phi) &= \int_{-\infty}^{\bar{\xi}} d\xi' \frac{1}{2} \frac{(\sin \bar{\xi} - \sin \xi')(\cos \phi \cos \xi' + \sin \phi \sin \xi')}{(\bar{\xi} - \xi')^{3/2}} \\ &= \sqrt{\varepsilon} \cos \bar{\xi} (\cos \phi \cos \bar{\xi} + \sin \phi \sin \bar{\xi}) + \int_{-\infty}^{\bar{\xi}} \frac{d\xi'}{\sqrt{\bar{\xi} - \xi'}} \left[\cos \xi' (\cos \phi \cos \xi' + \right. \\ &\quad \left. + \sin \phi \sin \xi') - (\sin \bar{\xi} - \sin \xi') (\sin \phi \cos \xi' - \cos \phi \sin \xi') \right]. \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

В первой строке мы неявно ввели в верхний предел интегрирования регуляризующий член $\bar{\xi} - \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow +0$. В результате, первый член во второй строке обращается в нуль, и после несложных преобразований $I^{(1,3)}(\bar{\xi}, \phi)$ записывается как

$$I^{(1,3)}(\bar{\xi}, \phi) = I^{(1,1)}(\bar{\xi}, \phi) + \cos \phi \sin \bar{\xi} \int_{-\infty}^{\bar{\xi}} d\xi' \frac{\sin \xi'}{\sqrt{\bar{\xi} - \xi'}} - \sin \phi \sin \bar{\xi} \int_{-\infty}^{\bar{\xi}} d\xi' \frac{\cos \xi'}{\sqrt{\bar{\xi} - \xi'}}. \quad (2.2.27)$$

Оставшиеся интегралы сводятся к интегралам Френеля (1.4.33) заменой переменной $s = \bar{\xi} - \xi'$. В результате, интеграл $I^{(1,3)}(\bar{\xi}, \phi)$ оказывается равен

$$I^{(1,3)}(\bar{\xi}, \phi) = I^{(1,1)}(\bar{\xi}, \phi) - \sqrt{\pi} \left[\frac{1}{2} \sin 2\bar{\xi} \sin \left(\phi + \frac{\pi}{4} \right) + \sin^2 \bar{\xi} \sin \left(\phi - \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (2.2.28)$$

Таким образом, комбинируя $I^{(1,1)}(\bar{\xi}, \phi)$ и $I^{(1,3)}(\bar{\xi}, \phi)$, находим интеграл $I^{(1)}(\bar{\xi}, \phi)$ в виде

$$\begin{aligned} I^{(1)}(\bar{\xi}, \phi) &= \left(\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \right) \sin 2\bar{\xi} \sin \left(\phi + \frac{\pi}{4} \right) - \left(\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \right) \cos 2\bar{\xi} \sin \left(\phi - \frac{\pi}{4} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \sin \left(\phi - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

В результате, интеграл по истории движения заряда с точностью до первого порядка малости по эксцентриситету $J^{(1)}(\bar{\xi}, \phi, e)$ оказывается равен

$$J^{(1)}(\bar{\xi}, \phi, e) = A(\bar{\xi}, e) \sin \left(\phi + \frac{\pi}{4} \right) - B(\bar{\xi}, e) \sin \left(\phi - \frac{\pi}{4} \right), \quad (2.2.30)$$

$$A(\bar{\xi}, e) = \sqrt{\pi} \left[\sin \bar{\xi} + e \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right) \sin 2\bar{\xi} \right], \quad (2.2.31)$$

$$B(\bar{\xi}, e) = \sqrt{\pi} \left[\cos \bar{\xi} + e \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right) \cos 2\bar{\xi} + \frac{1}{2}e \right]. \quad (2.2.32)$$

Вычисляя угловые интегралы с помощью соотношений [150]

$$\int_0^{2\pi} d\phi \sin^2 \left(\phi \pm \frac{\pi}{4} \right) = \pi, \quad \int_0^{2\pi} d\phi \sin \left(\phi + \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\phi - \frac{\pi}{4} \right) = 0, \quad (2.2.33)$$

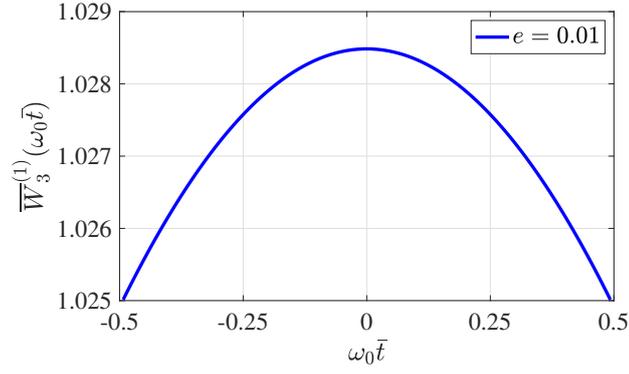


Рис. 2.2. Зависимость нормированной мощности излучения заряда в линейном приближении по эксцентриситету от запаздывающего времени для $e = 0.01$.

из ур. (2.2.11) находим выражение для мощности излучения нерелятивистского заряда на эллиптической орбите в линейном приближении по эксцентриситету

$$W_3^{(1)}(\bar{\xi}) = \frac{\pi}{4} g^2 \omega_0^3 a^2 \left[1 + 2\sqrt{2}e \cos \bar{\xi} + (\sqrt{2} - 1/2)e^2 \cos 2\bar{\xi} + (5/2 - \sqrt{2})e^2 \right]. \quad (2.2.34)$$

При $e = 0$ ур. (2.2.34) совпадает с мощностью излучения заряда на круговой орбите (1.4.37). Нормируя мощность излучения на ее значение для круговой орбиты

$$\bar{W}_3^{(1)}(\bar{\xi}) = \frac{4}{\pi g^2 \omega_0^3 a^2} W_3^{(1)}(\bar{\xi}), \quad (2.2.35)$$

с помощью ур. (2.2.6) находим зависимость мощности излучения заряда от запаздывающего времени (см. рис. (2.2)). Заметим, что одному полному обороту заряда по орбите соответствуют одинаковые интервалы фазы $\omega_0 \bar{t}$ и аномалии $\bar{\xi}$ равные 2π .

Найдем положения точек экстремума мощности излучения (2.2.34) во времени. Для этого находим нули первой производной нормированной мощности излучения

$$\frac{d\bar{W}_3^{(1)}}{d\bar{\xi}} = -2e \sin \bar{\xi} \left[\sqrt{2} + (2\sqrt{2} - 1)e \cos \bar{\xi} \right] = 0. \quad (2.2.36)$$

Часть точек экстремума соответствует моментам прохождения зарядом перицентра и апоцентра орбиты

$$\sin \bar{\xi} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \bar{\xi} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad \omega_0 \bar{t} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.2.37)$$

Остальные точки экстремума определяются из уравнения

$$\sqrt{2} + (2\sqrt{2} - 1)e \cos \bar{\xi} = 0, \quad (2.2.38)$$

имеющего решения лишь при выполнении неравенства

$$\frac{\sqrt{2}}{(2\sqrt{2} - 1)e} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad e \geq e_{\text{cr}} = \frac{\sqrt{2}}{(2\sqrt{2} - 1)} \simeq 0,77. \quad (2.2.39)$$

Таким образом, дополнительные точки экстремума возникают лишь при превышении эксцентриситетом критического значения e_{cr} . Очевидно, что в области применимости линейного приближения для интеграла по истории движения $e \lesssim 10^{-2}$ неравенство (2.2.39) не выполняется. В результате, так как мощность излучения (2.2.34) и соотношение между временем и аномалией (2.2.6) являются четными функциями аномалии, а также так как положения точек экстремума мощности излучения во времени совпадают с моментами прохождения зарядом перицентра и апоцентра орбиты, то в линейном приближении по эксцентриситету орбиты хвостовой вклад в излучение не проявляется.

2.2.2. Численные расчеты – линейное приближение неточно

Из линейного приближения для мощности излучения заряда на эллиптической орбите (2.2.34) мы нашли первое приближение для порогового значения эксцентриситета орбиты $e_{cr} \simeq 0,77$, при превышении которого начинает проявляться хвостовой сигнал в излучении. Для аппроксимации интеграла по истории движения заряда $J(\bar{\xi}, \phi, e)$ рядом Тейлора по эксцентриситету в области $e \sim e_{cr}$ требуются высокие порядки разложения в ряд, делающие аналитические вычисления крайне громоздкими. Однако, линейное приближение для порогового значения эксцентриситета не является достаточно точным, и хвостовой вклад в излучение проявляется при значительно более низких значениях эксцентриситета.

Чтобы это показать, мы численно определили зависимость мощности излучения заряда от запаздывающего времени для различных значений эксцентриситета. Для этого мы ввели, по аналогии с ур. (2.2.35), нормированную мощность излучения

$$\bar{W}_3(\bar{\xi}) = \frac{4}{\pi g^2 \omega_0^3 a^2} W_3(\bar{\xi}), \quad (2.2.40)$$

где $W_3(\bar{\xi})$ определяется из ур. (2.2.11) и (2.2.12). В результате, было обнаружено, что хвостовой вклад в излучение проявляется уже при эксцентриситетах $e \sim 0,1$ (см. рис. (2.3)). При этом, в данной области значений эксцентриситета интеграл по истории движения заряда $J(\bar{\xi}, \phi, e)$ хорошо аппроксимируется рядом Тейлора по эксцентриситету с точностью до второго порядка. Таким образом, в этой области значений эксцентриситета орбиты хвостовой сигнал в излучении может быть изучен аналитически.

По аналогии с хвостовым сигналом в излучении заряда с Гауссовым ускорением, характерной чертой хвостового сигнала в излучении заряда на эллиптической орбите являются сдвиги точек экстремума мощности излучения во времени от моментов, когда ускорение заряда принимает минимальное/максимальное значения – моментов прохождения зарядом через апоцентр и перицентр орбиты, соответственно.

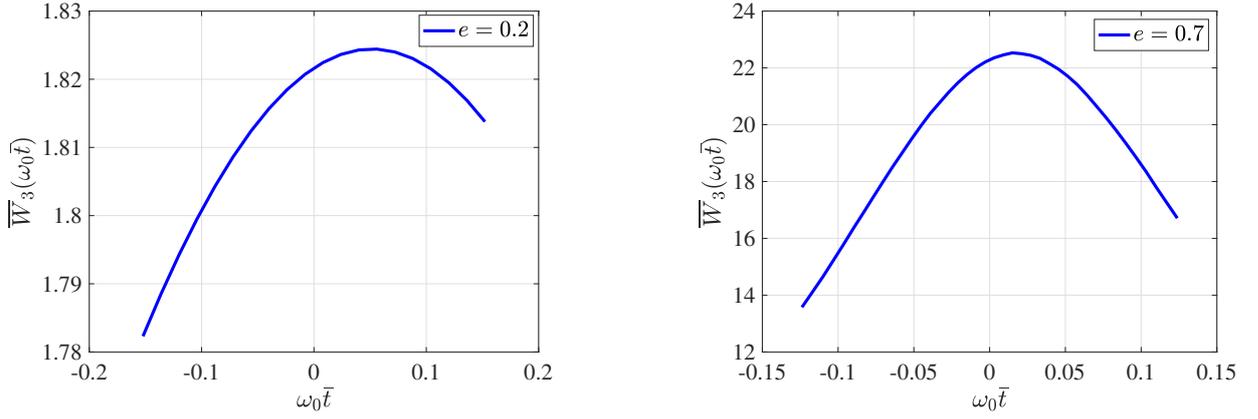


Рис. 2.3. Зависимость нормированной мощности излучения заряда от запаздывающего времени для $e = 0,2, 0,7$.

2.2.3. Квадратичное приближение

Вычислим мощность излучения заряда на эллиптической орбите с точностью до следующего порядка по эксцентриситету. Это приближение будет справедливо для зарядов на орбитах с эксцентриситетом $e \lesssim 0,3$.

Для этого разложим подынтегральное выражение $j(\xi', \phi, e)$ в интеграле по истории движения заряда $J(\xi', \phi, e)$ в ряд Тейлора по эксцентриситету до второго порядка

$$j^{(2)}(\xi', \phi, e) = i^{(0)}(\xi', \phi) + e i^{(1)}(\xi', \phi) + e^2 i^{(2)}(\xi', \phi) + \mathcal{O}(e^3), \quad (2.2.41)$$

$$\begin{aligned} i^{(2)}(\xi', \phi) = & -\frac{\sin \xi' \sin \phi + 4 \cos \xi' \cos \phi - 6 \cos^2 \xi' (\sin \xi' \sin \phi + \cos \xi' \cos \phi)}{2\sqrt{\bar{\xi} - \xi'}} \\ & + \frac{(\sin \bar{\xi} - \sin \xi')(2 \cos \xi' (\sin \xi' \sin \phi + \cos \xi' \cos \phi) - \cos \phi)}{2(\bar{\xi} - \xi')^{3/2}} \\ & + \frac{3(\sin \bar{\xi} - \sin \xi')^2 (\sin \xi' \sin \phi + \cos \xi' \cos \phi)}{8(\bar{\xi} - \xi')^{5/2}}. \end{aligned} \quad (2.2.42)$$

Здесь члены $i^{(0)}(\xi', \phi)$ и $i^{(1)}(\xi', \phi)$ определяются ур. (2.2.14) и (2.2.15). Соответственно, интеграл по истории движения заряда также разобьется на три члена

$$J^{(2)}(\bar{\xi}, \phi, e) = \int_{-\infty}^{\bar{\xi}} d\xi' j^{(2)}(\xi', \phi, e) = I^{(0)}(\bar{\xi}, \phi) + e I^{(1)}(\bar{\xi}, \phi) + e^2 I^{(2)}(\bar{\xi}, \phi) + \mathcal{O}(e^3), \quad (2.2.43)$$

$$I^{(2)}(\bar{\xi}, \phi) = \int_{-\infty}^{\bar{\xi}} d\xi' i^{(2)}(\xi', \phi). \quad (2.2.44)$$

Интегралы $I^{(0)}(\bar{\xi}, \phi)$ и $I^{(1)}(\bar{\xi}, \phi)$ были вычислены в предыдущем разделе и определяются ур. (2.2.19) и (2.2.29). Таким образом, нам необходимо вычислить лишь интеграл $I^{(2)}(\bar{\xi}, \phi)$.

По аналогии с вычислением интеграла $I^{(1)}(\bar{\xi}, \phi)$, разделим $i^{(2)}(\xi', \phi)$ на три части с раз-

личными обратными степенями $\sqrt{\bar{\xi} - \xi'}$

$$i^{(2)}(\xi', \phi) = i^{(2,1)}(\xi', \phi) + i^{(2,3)}(\xi', \phi) + i^{(2,5)}(\xi', \phi), \quad (2.2.45)$$

$$i^{(2,1)}(\xi', \phi) = -\frac{\sin \xi' \sin \phi + 4 \cos \xi' \cos \phi - 6 \cos^2 \xi' (\sin \xi' \sin \phi + \cos \xi' \cos \phi)}{2\sqrt{\bar{\xi} - \xi'}}, \quad (2.2.46)$$

$$i^{(2,3)}(\xi', \phi) = \frac{(\sin \bar{\xi} - \sin \xi')(2 \cos \xi' (\sin \xi' \sin \phi + \cos \xi' \cos \phi) - \cos \phi)}{2(\bar{\xi} - \xi')^{3/2}}, \quad (2.2.47)$$

$$i^{(2,5)}(\xi', \phi) = \frac{3(\sin \bar{\xi} - \sin \xi')^2 (\sin \xi' \sin \phi + \cos \xi' \cos \phi)}{8(\bar{\xi} - \xi')^{5/2}}. \quad (2.2.48)$$

Соответственно, интеграл $I^{(2)}(\bar{\xi}, \phi)$ также разобьется на три интеграла

$$I^{(2)}(\bar{\xi}, \phi) = I^{(2,1)}(\bar{\xi}, \phi) + I^{(2,3)}(\bar{\xi}, \phi) + I^{(2,5)}(\bar{\xi}, \phi), \quad (2.2.49)$$

$$I^{(2,1)}(\bar{\xi}, \phi) = \int_{-\infty}^{\bar{\xi}} d\xi' i^{(2,1)}(\xi', \phi), \quad I^{(2,3)}(\bar{\xi}, \phi) = \int_{-\infty}^{\bar{\xi}} d\xi' i^{(2,3)}(\xi', \phi), \quad (2.2.50)$$

$$I^{(2,5)}(\bar{\xi}, \phi) = \int_{-\infty}^{\bar{\xi}} d\xi' i^{(2,5)}(\xi', \phi). \quad (2.2.51)$$

Полученные интегралы вычисляются по общей схеме – интегрированием по частям необходимое число раз приводятся к виду комбинации интегралов Френеля (1.4.33).

Начнем с вычисления интеграла $I^{(2,1)}(\bar{\xi}, \phi)$. Здесь нет необходимости интегрировать по частям. После замены переменной интегрирования $s = \bar{\xi} - \xi'$ и несложных преобразования с помощью ур. (1.4.33) получаем

$$I^{(2,1)}(\bar{\xi}, \phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\pi} \left[\sin \left(\bar{\xi} - \phi + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{3} \cos \left(\phi + \frac{\pi}{4} - 3\bar{\xi} \right) \right]. \quad (2.2.52)$$

Для вычисления интеграла $I^{(2,3)}(\bar{\xi}, \phi)$ необходимо сначала один раз проинтегрировать его по частям, чтобы привести его к виду комбинации интегралов Френеля

$$\begin{aligned} I^{(2,3)}(\bar{\xi}, \phi) &= \int_{-\infty}^{\bar{\xi}} d\xi' \frac{(\sin \bar{\xi} - \sin \xi')(2 \cos \xi' (\sin \xi' \sin \phi + \cos \xi' \cos \phi) - \cos \phi)}{2(\bar{\xi} - \xi')^{3/2}} \\ &= \sqrt{\bar{\xi}} \cos \bar{\xi} \left(2 \cos \bar{\xi} (\sin \bar{\xi} \sin \phi + \cos \bar{\xi} \cos \phi) - \cos \phi \right) + \int_{-\infty}^{\bar{\xi}} \frac{d\xi'}{\sqrt{\bar{\xi} - \xi'}} \\ &\times \left[\cos \xi' \left(2 \cos \xi' (\cos \xi' \cos \phi + \sin \xi' \sin \phi) - \cos \phi \right) - (\sin \bar{\xi} - \sin \xi') \right. \\ &\times \left. \left(2 \cos \xi' (\cos \xi' \sin \phi - \cos \phi \sin \xi') - 2 \sin \xi' (\cos \xi' \cos \phi + \sin \xi' \sin \phi) \right) \right]. \quad (2.2.53) \end{aligned}$$

Здесь мы неявно ввели в верхний предел интегрирования регуляризующий член $\bar{\xi} - \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow +0$. При этом, граничный член, возникающий при интегрировании по частям во второй строке, исчезает. После замены переменной $s = \bar{\xi} - \xi'$ с помощью ур. (1.4.33) приводим интеграл $I^{(2,3)}(\bar{\xi}, \phi)$ к виду

$$I^{(2,3)}(\bar{\xi}, \phi) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \left[\left(\sqrt{2} - 1 \right) \sin \left(\bar{\xi} - \phi + \frac{\pi}{4} \right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2} \right) \cos \left(-3\bar{\xi} + \phi + \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (2.2.54)$$

При вычислении интеграла $I^{(2,5)}(\bar{\xi}, \phi)$ необходимо предварительно проинтегрировать его по частям дважды. При первом интегрировании по частям получаем

$$\begin{aligned} I^{(2,5)}(\bar{\xi}, \phi) &= \frac{3(\sin \bar{\xi} - \sin \xi')^2(\sin \xi' \sin \phi + \cos \xi' \cos \phi)}{8(\bar{\xi} - \xi')^{5/2}} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{\varepsilon} \cos^2 \bar{\xi}(\sin \bar{\xi} \sin \phi + \cos \bar{\xi} \cos \phi) - \int_{-\infty}^{\bar{\xi}} d\xi' \frac{(\sin \bar{\xi} - \sin \xi')}{4(\bar{\xi} - \xi')^{3/2}} \left[(\sin \bar{\xi} - \sin \xi') \right. \\ &\quad \times (\cos \xi' \sin \phi - \cos \phi \sin \xi') - 2 \cos \xi'(\cos \xi' \cos \phi + \sin \xi' \sin \phi) \left. \right]. \end{aligned} \quad (2.2.55)$$

Здесь граничный член, возникший при интегрировании по частям, исчезает. После второго интегрирования по частям интеграл $I^{(2,5)}(\bar{\xi}, \phi)$ принимает вид

$$\begin{aligned} I^{(2,5)}(\bar{\xi}, \phi) &= \sqrt{\varepsilon} \cos^2 \bar{\xi}(\sin \bar{\xi} \sin \phi + \cos \bar{\xi} \cos \phi) - \frac{1}{2}\varepsilon^{3/2} \cos^2 \bar{\xi}(\cos \bar{\xi} \sin \phi - \sin \bar{\xi} \cos \phi) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\bar{\xi}} \frac{d\xi'}{2\sqrt{\bar{\xi} - \xi'}} \left[2 \cos^2 \xi'(\cos \xi' \cos \phi + \sin \xi' \sin \phi) - 4 \cos \xi' \right. \\ &\quad \times (\cos \xi' \sin \phi - \cos \phi \sin \xi')(\sin \bar{\xi} - \sin \xi') - (\cos \xi' \cos \phi + \sin \xi' \sin \phi) \\ &\quad \times (\sin \bar{\xi} - \sin \xi')^2 + 2 \sin \xi'(\cos \xi' \cos \phi + \sin \xi' \sin \phi)(\sin \bar{\xi} - \sin \xi') \left. \right]. \end{aligned} \quad (2.2.56)$$

Аналогично предыдущим интегралам, возникающие здесь граничные члены также исчезают. В итоге, после замены переменной $s = \bar{\xi} - \xi'$ и несложных преобразований интеграл $I^{(2,5)}(\bar{\xi}, \phi)$ сводится к комбинации интегралов Френеля (1.4.33). Вычисляя их, получаем

$$\begin{aligned} I^{(2,5)}(\bar{\xi}, \phi) &= \frac{1}{8}\sqrt{\pi} \left[\sin \left(\bar{\xi} + \phi + \frac{\pi}{4} \right) + 4(\sqrt{2} - 1) \sin \left(\bar{\xi} - \phi + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(\bar{\xi} + \phi + \frac{\pi}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. - (4\sqrt{2} - 3\sqrt{3} - 1) \cos \left(-3\bar{\xi} + \phi + \frac{\pi}{4} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.2.57)$$

Комбинируя ур. (2.2.52), (2.2.54) и (2.2.57), мы получаем следующее выражение для интеграла $I^{(2)}(\bar{\xi}, \phi)$

$$\begin{aligned} I^{(2)}(\bar{\xi}, \phi) &= \frac{1}{8}\sqrt{\pi} \left[-6 \sin \left(\bar{\xi} - \phi + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(\bar{\xi} + \phi + \frac{\pi}{4} \right) + 8\sqrt{2} \sin \left(\bar{\xi} - \phi + \frac{\pi}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cos \left(\bar{\xi} + \phi + \frac{\pi}{4} \right) - (8\sqrt{2} - 9\sqrt{3} - 1) \cos \left(-3\bar{\xi} + \phi + \frac{\pi}{4} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.2.58)$$

Отсюда, используя ур. (2.2.19), (2.2.29) и (2.2.43), находим выражение для интеграла по истории движения заряда с точностью до второго порядка по эксцентриситету

$$\begin{aligned} J^{(2)}(\bar{\xi}, \phi, e) &= \frac{1}{8}\sqrt{\pi} \left[4\sqrt{2} \cos(\phi - \bar{\xi}) - 4\sqrt{2} \sin(\phi - \bar{\xi}) + 2\sqrt{2}e \cos \phi - 2\sqrt{2}e \sin \phi \right. \\ &\quad + (8 - 2\sqrt{2})e \cos(\phi - 2\bar{\xi}) - (8 - 2\sqrt{2})e \sin(\phi - 2\bar{\xi}) + e^2 \sin \left(\bar{\xi} + \phi + \frac{\pi}{4} \right) \\ &\quad + e^2 \cos \left(\bar{\xi} + \phi + \frac{\pi}{4} \right) + (8\sqrt{2} - 6)e^2 \sin \left(\bar{\xi} - \phi + \frac{\pi}{4} \right) \\ &\quad \left. - (8\sqrt{2} - 9\sqrt{3} - 1)e^2 \cos \left(3\bar{\xi} - \phi - \frac{\pi}{4} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.2.59)$$

Наконец, интегрируя квадрат интеграла $J^{(2)}(\bar{\xi}, \phi, e)$ по полярному углу ϕ с помощью соотношений (2.2.33), мы приходим к квадратичному приближению для мощности излучения нерелятивистского заряда на эллиптической орбите

$$\begin{aligned}
W_3^{(2)}(\bar{\xi}) = & \frac{\pi}{128} g^2 \omega_0^3 a^2 \left[32 + 64\sqrt{2}e \cos \bar{\xi} + 32(1 + \sqrt{2})e^2 + 8(9\sqrt{3} - 4\sqrt{2})e^2 \cos 2\bar{\xi} \right. \\
& + 8e^2 \sin 2\bar{\xi} + 4e^3 \sin \bar{\xi} - 4(2\sqrt{2} + 9\sqrt{3} - 18\sqrt{6})e^3 \cos \bar{\xi} + 4(2\sqrt{2} - 1)e^3 \sin 3\bar{\xi} \\
& + 12(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})e^3 \cos 3\bar{\xi} + (269 + 9\sqrt{3} - 56\sqrt{2} - 72\sqrt{6})e^4 + (8\sqrt{2} - 6)e^4 \sin 2\bar{\xi} \\
& + 2(32\sqrt{2} - 27\sqrt{3} + 36\sqrt{6} - 70)e^4 \cos 2\bar{\xi} + (9\sqrt{3} + 1 - 8\sqrt{2})e^4 \sin 4\bar{\xi} \\
& \left. + (9\sqrt{3} + 1 - 8\sqrt{2})e^4 \cos 4\bar{\xi} \right]. \tag{2.2.60}
\end{aligned}$$

Нормируя мощность излучения на ее значение для $e = 0$

$$\bar{W}_3^{(2)}(\bar{\xi}) = \frac{4}{\pi g^2 \omega_0^3 a^2} W_3^{(2)}(\bar{\xi}), \tag{2.2.61}$$

с помощью ур. (2.2.6) находим зависимость мощности излучения от запаздывающего времени для различных значений эксцентриситета $e \leq 0,3$ (см. рис. (2.4)). Отсюда видно, что мощность излучения заряда принимает максимальное значение после прохождения зарядом перицентра орбиты, соответствующего моменту времени $\bar{t} = 0$. Это является признаком проявления хвостового вклада в излучение заряда на эллиптической орбите.

Найдем зависимость положений точек экстремума мощности излучения от эксцентриситета орбиты. Для этого найдем нули первой производной нормированной мощности излучения (2.2.61)

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{W}_3^{(2)}}{d\bar{\xi}} = & \frac{1}{32} \left[-64\sqrt{2}e \sin \bar{\xi} + 16e^2 \cos 2\bar{\xi} - 16(9\sqrt{3} - 4\sqrt{2})e^2 \sin 2\bar{\xi} + 4e^3 \cos \bar{\xi} \right. \\
& + 4(2\sqrt{2} + 9\sqrt{3} - 18\sqrt{6})e^3 \sin \bar{\xi} + 12(2\sqrt{2} - 1)e^3 \cos 3\bar{\xi} - 36(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) \\
& \times e^3 \sin 3\bar{\xi} + 4(70 - 32\sqrt{2} + 27\sqrt{3} - 36\sqrt{6})e^4 \sin 2\bar{\xi} + 4(4\sqrt{2} - 3)e^4 \cos 2\bar{\xi} \\
& \left. - 4(9\sqrt{3} + 1 - 8\sqrt{2})e^4 \sin 4\bar{\xi} + 4(9\sqrt{3} + 1 - 8\sqrt{2})e^4 \cos 4\bar{\xi} \right] = 0. \tag{2.2.62}
\end{aligned}$$

Для начала мы находим корни ур. (2.2.62) графически. Из рис. (2.5) видно, что максимум мощности излучения достигается после прохождения зарядом перицентра орбиты $\bar{\xi} = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, по аналогии с максимумом мощности излучения заряда с Гауссовым ускорением (см. рис. (2.2)). При этом чем больше эксцентриситет орбиты, тем большим оказывается сдвиг точек экстремума. Интересно, что точки минимума мощности излучения сдвигаются в обратную сторону – мощность излучения принимает минимальное значение до прохождения зарядом апоцентра орбиты $\bar{\xi} = (2n + 1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

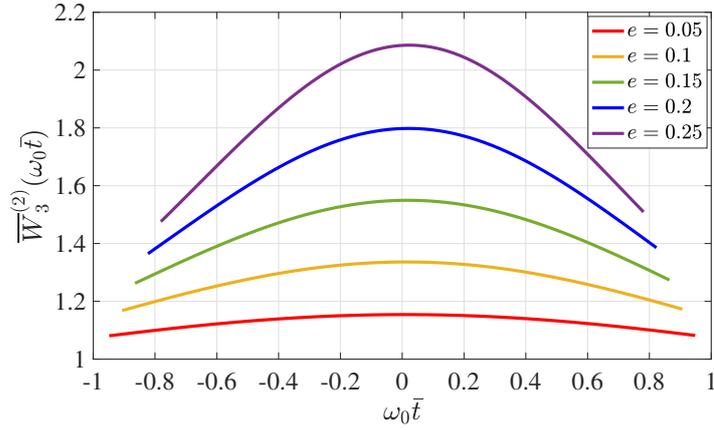


Рис. 2.4. Зависимость нормированной мощности излучения заряда в квадратичном приближении по эксцентриситету от запаздывающего времени для $e = 0,05, 0,1, 0,15, 0,2, 0,25$.

Найдем приближенные положения точек экстремума мощности излучения (2.2.60). Для этого нам достаточно рассмотреть ур. (2.2.62) с точностью до вкладов квадратичных по эксцентриситету

$$-64\sqrt{2}\sin\bar{\xi} + 16e\cos 2\bar{\xi} - 16(9\sqrt{3} - 4\sqrt{2})e\sin 2\bar{\xi} + 4e^2\cos\bar{\xi} + 4(2\sqrt{2} + 9\sqrt{3} - 18\sqrt{6})e^2\sin\bar{\xi} + 12(2\sqrt{2} - 1)e^2\cos 3\bar{\xi} - 36(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})e^2\sin 3\bar{\xi} + \mathcal{O}(e^3) = 0. \quad (2.2.63)$$

Группируя слагаемые, переписываем его как

$$-\sin\bar{\xi} + \frac{e}{4\sqrt{2}}\left[\cos 2\bar{\xi} - (9\sqrt{3} - 4\sqrt{2})\sin 2\bar{\xi}\right] + \frac{e^2}{16\sqrt{2}}\left[\cos\bar{\xi} + (2\sqrt{2} + 9\sqrt{3} - 18\sqrt{6})\sin\bar{\xi}\right] + \frac{3e^2}{16\sqrt{2}}\left[(2\sqrt{2} - 1)\cos 3\bar{\xi} - 3(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})\sin 3\bar{\xi}\right] = 0. \quad (2.2.64)$$

Преобразуем члены в квадратных скобках к виду синуса суммы или разности. Первая скобка в ур. (2.2.64) записывается как

$$\cos 2\bar{\xi} - (9\sqrt{3} - 4\sqrt{2})\sin 2\bar{\xi} = -\frac{1}{N_1}\sin(2\bar{\xi} - \alpha), \quad (2.2.65)$$

$$\sin\alpha = N_1, \quad \cos\alpha = N_1(9\sqrt{3} - 4\sqrt{2}), \quad (2.2.66)$$

$$N_1 = \left(1 + (9\sqrt{3} - 4\sqrt{2})^2\right)^{-1/2}. \quad (2.2.67)$$

Аналогично, вторая скобка в ур. (2.2.64) принимает вид

$$\cos\bar{\xi} + (2\sqrt{2} + 9\sqrt{3} - 18\sqrt{6})\sin\bar{\xi} = \frac{1}{N_2}\sin(\bar{\xi} + \beta), \quad (2.2.68)$$

$$\sin\beta = N_2, \quad \cos\beta = N_2(2\sqrt{2} + 9\sqrt{3} - 18\sqrt{6}), \quad (2.2.69)$$

$$N_2 = \left(1 + (2\sqrt{2} + 9\sqrt{3} - 18\sqrt{6})^2\right)^{-1/2}. \quad (2.2.70)$$

Наконец, представляем третью скобку в ур. (2.2.64) как

$$(2\sqrt{2} - 1) \cos 3\bar{\xi} - 3(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) \sin 3\bar{\xi} = -\frac{1}{N_3} \sin(3\bar{\xi} - \delta), \quad (2.2.71)$$

$$\sin \delta = N_3(2\sqrt{2} - 1), \quad \cos \delta = 3N_3(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}), \quad (2.2.72)$$

$$N_3 = \left((2\sqrt{2} - 1)^2 + 9(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})^2 \right)^{-1/2}. \quad (2.2.73)$$

В результате, ур. (2.2.64) запишется как

$$-\sin \bar{\xi} - e_1 \sin(2\bar{\xi} - \alpha) + e_2^2 \sin \bar{\xi} + \beta - e_3^2 \sin(3\bar{\xi} - \delta) = 0, \quad (2.2.74)$$

$$e_1 = \frac{e}{4\sqrt{2}N_1}, \quad e_2^2 = \frac{e^2}{16\sqrt{2}N_2}, \quad e_3^2 = \frac{3e^2}{16\sqrt{2}N_3}. \quad (2.2.75)$$

Из рис. (2.5) следует, что точки экстремума мощности излучения лежат близко к точкам πn , $n \in \mathbb{Z}$. Тогда будем искать их в следующем виде

$$\bar{\xi} = \pi n + \Delta\bar{\xi}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2.2.76)$$

где $\Delta\bar{\xi} \ll 1$ являются малыми сдвигами точек экстремума от моментов прохождения зарядом перицентра и апоцентра орбиты. Раскладывая ур. (2.2.74) в ряд до первого порядка малости по $\Delta\bar{\xi}$, находим точки экстремума мощности излучения в виде

$$\bar{\xi} = \pi n + (-1)^n \frac{e_1 \alpha + (-1)^n e_2^2 \beta + (-1)^n e_3^2 \delta}{1 + 2(-1)^n e_1 - e_2^2 + 3e_3^2}. \quad (2.2.77)$$

Здесь с достаточной точностью можно использовать следующие приближения

$$\alpha \simeq N_1, \quad \beta \simeq N_2, \quad \delta \simeq (2\sqrt{2} - 1)N_3. \quad (2.2.78)$$

В соответствии с рис. (2.5), из ур. (2.2.77) следует, что максимумы мощности излучения сдвигаются вперед во времени относительно моментов прохождения зарядом перицентра $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

$$\Delta\bar{\xi}_{\max} = \frac{e_1 \alpha + e_2^2 \beta + e_3^2 \delta}{1 + 2e_1 - e_2^2 + 3e_3^2} > 0. \quad (2.2.79)$$

При этом величина сдвига растет квадратично с эксцентриситетом орбиты. Аналогично, минимумы мощности излучения сдвигаются назад во времени относительно моментов прохождения зарядом апоцентра орбиты $(2n + 1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

$$\Delta\bar{\xi}_{\min} = -\frac{e_1 \alpha - e_2^2 \beta - e_3^2 \delta}{1 - 2e_1 - e_2^2 + 3e_3^2} < 0, \quad (2.2.80)$$

в соответствии с рис. (2.5). Полученные уравнения (2.2.79) и (2.2.80) для сдвигов точек экстремума мощности излучения в области значений эксцентриситета $e \in (0, 0,3)$ хорошо согласуются с графическим решением ур. (2.2.62).

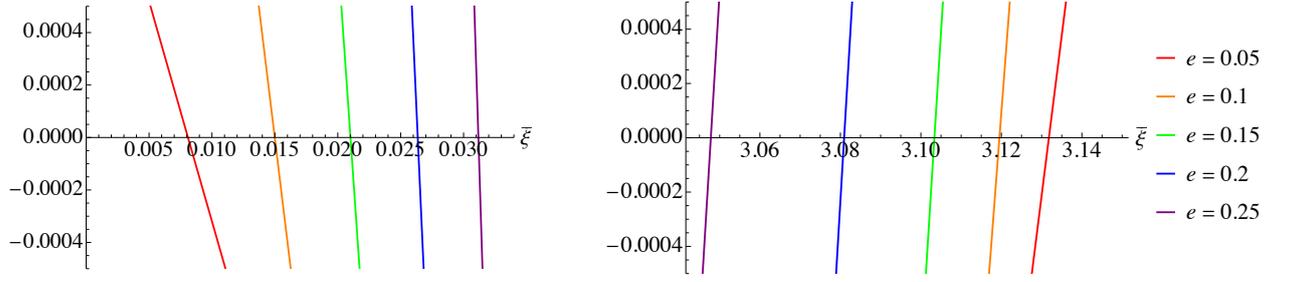


Рис. 2.5. Нули первой производной нормированной мощности излучения заряда на орбитах с эксцентриситетом $e = 0,05, 0,1, 0,15, 0,2, 0,25$.

2.3. Спектральное распределение излучения

Сравним также спектральные распределения мощности излучения заряда на эллиптической орбите в размерностях $D = 3$ и $D = 4$. Для этого воспользуемся ур. (1.2.25) для спектрального распределения мощности скалярного излучения заряда, совершающего произвольное периодическое движение. Таким образом, нам необходимо вычислить интеграл I_{n+1}^l , определяемый ур. (1.2.20), для случаев $n = 2$ и $n = 3$.

В случае заряда, движущегося по эллиптической орбите, интеграл I_{n+1}^l можно вычислить единым образом для $D = 3$ и $D = 4$. Для этого заметим, что если в размерности четыре мировая линия заряда имеет вид $\mathbf{z}(t) = \{\rho(t) \cos \psi(t), \rho(t) \sin \psi(t), 0\}$, то мы получаем

$$\mathbf{nz}(t) = \rho(t) \cos \psi(t) \cos \phi \sin \theta + \rho(t) \sin \psi(t) \sin \phi \sin \theta. \quad (2.3.1)$$

Здесь ϕ и θ – углы на двумерной сфере. В свою очередь, в $D = 3$, как следует из ур. (2.2.1),

$$\mathbf{nz}(t) = \rho(t) \cos \psi(t) \cos \phi + \rho(t) \sin \psi(t) \sin \phi. \quad (2.3.2)$$

Таким образом, интеграл I_3^l получается из интеграла I_4^l подстановкой $\theta = \pi/2$

$$I_3^l = I_4^l|_{\theta=\pi/2}. \quad (2.3.3)$$

Поэтому далее нам достаточно вычислить лишь интеграл I_4^l .

В случае заряда на эллиптической орбите удобно перейти в I_4^l от интеграла по времени к интегралу по эксцентриситетной аномалии ξ с помощью соотношений (2.2.3) и (2.2.9). Также с помощью этих соотношений находим зависимость квадрата скорости заряда от аномалии

$$\mathbf{v}^2(\xi) = a^2 \omega_0^2 \frac{1 + e \cos \xi}{1 - e \cos \xi}. \quad (2.3.4)$$

В результате, интеграл I_4^l принимает следующий вид

$$I_4^l = \frac{1}{\omega_0} \int_0^{2\pi} d\xi (1 - e \cos \xi) \sqrt{1 - a^2 \omega_0^2 \frac{1 + e \cos \xi}{1 - e \cos \xi}} \exp [il(\xi - e \sin \xi - \omega_0 a (\cos \xi - e) \cos \phi \sin \theta - \omega_0 b \sin \xi \sin \phi \sin \theta)], \quad (2.3.5)$$

где $b = a\sqrt{1 - e^2}$ – малая полуось эллипса. Ур. (2.3.5) определяет спектральное распределение излучения релятивистского заряда, движущегося по фиксированной эллиптической орбите с произвольной скоростью. Вычисление данного интеграла в общем случае кажется затруднительным. Однако, мы можем вычислить его в двух частных случаях – в пределе заряда на круговой орбите и в пределе нерелятивистского заряда на эллиптической орбите. Основные характерные различия между спектральными распределениями излучения заряда в размерностях $D = 3$ и $D = 4$ будут видны уже в этих двух простых случаях.

2.3.1. Заряд на круговой орбите

В случае заряда на круговой орбите $e = 0$ интеграл (2.3.5) может быть вычислен точно для произвольного значения скорости заряда. Здесь мы имеем

$$e = 0 \implies a = b = R_0, \quad R_0\omega_0 = |\mathbf{v}| = v = \text{Const}, \quad (2.3.6)$$

где R_0 – радиус круговой орбиты, а v – постоянная скорость движения заряда. В результате интеграл I_4^l значительно упрощается

$$I_4^l = \frac{1}{\gamma\omega_0} \int_0^{2\pi} d\xi \exp \left[il \left(\xi - v \sin \left(\xi - \phi + \frac{\pi}{2} \right) \sin \theta \right) \right], \quad (2.3.7)$$

где $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ – это релятивистский Лоренц-фактор заряда. С помощью соотношений (1.2.30) и (1.2.31) мы вычисляем интеграл I_4^l , приводя его к виду

$$I_4^l = \frac{2\pi}{\gamma\omega_0} e^{il(\phi - \pi/2)} J_l(vl \sin \theta). \quad (2.3.8)$$

Отсюда мы находим спектральные распределения излучения в размерностях три и четыре.

Так в размерности $D = 3$ интеграл I_3^l записывается как

$$I_3^l = I_4^l \Big|_{\theta=\pi/2} = \frac{2\pi}{\gamma\omega_0} e^{il(\phi - \pi/2)} J_l(vl). \quad (2.3.9)$$

Соответственно, спектральное распределение мощности излучения заряда имеет вид

$$W_3 = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\omega_0 l g^2}{2\gamma^2} \int d\phi J_l^2(vl) = \frac{\pi\omega_0 g^2}{\gamma^2} \sum_{l=1}^{\infty} l J_l^2(vl). \quad (2.3.10)$$

Для удобства сравнения спектральных распределений в размерностях три и четыре введем нормированное спектральное распределение мощности излучения

$$\bar{W}_{n+1}^l = \frac{W_{n+1}^l}{W_{n+1}} \implies \bar{W}_3^l = \frac{l J_l^2(vl)}{\sum_{n=1}^{\infty} n J_n^2(vn)}. \quad (2.3.11)$$

Аналитического выражения для суммы такого спектра в литературе не известно. Однако, при построении спектров она может быть оценена численно.

Рассмотрим теперь случай $D = 4$. Здесь спектральное распределение мощности излучения определяется выражением

$$W_4 = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\omega_0^2 l^2 g^2}{\gamma^2} \int d\theta \sin \theta J_l^2(vl \sin \theta). \quad (2.3.12)$$

С помощью двух последовательных замен переменной интегрирования

$$x = \cos \theta \quad \Longrightarrow \quad y = \sqrt{1 - x^2} \quad (2.3.13)$$

интеграл по полярному углу может быть вычислен как [150]

$$\int d\theta \sin \theta J_l^2(vl \sin \theta) = 2 \frac{(vl)^{2l}}{(2l+1)!} {}_1F_2 \left(l + \frac{1}{2}; l + \frac{3}{2}, 1 + 2l; -l^2 v^2 \right), \quad (2.3.14)$$

где ${}_1F_2(a; b_1, b_2; z)$ является обобщенной гипергеометрической функцией. В результате, спектральное распределение мощности излучения принимает вид

$$W_4 = 2 \frac{\omega_0^2 g^2}{\gamma^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^{2(l+1)}}{(2l+1)!} v^{2l} {}_1F_2 \left(l + \frac{1}{2}; l + \frac{3}{2}, 1 + 2l; -l^2 v^2 \right). \quad (2.3.15)$$

Для построения нормированного распределения нам необходимо просуммировать этот спектр. Для этого вернемся к ур. (2.3.12) и просуммируем ряд до вычисления интеграла по полярному углу [151]

$$\sum_{l=1}^{\infty} l^2 J_l^2(l \cdot v \sin \theta) = \frac{v^2 \sin^2 \theta (4 + v^2 \sin^2 \theta)}{2^4 (1 - v^2 \sin^2 \theta)^{7/2}}. \quad (2.3.16)$$

Получившийся интеграл по полярному углу легко вычисляется [151]. В результате, мощность излучения заряда принимает вид

$$W_4 = \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2 g^2}{\gamma^2} \frac{v^2}{(1 - v^2)^3}. \quad (2.3.17)$$

Отсюда мы легко находим нормированное спектральное распределение мощности излучения заряда на круговой орбите в размерности четыре

$$\overline{W}_4^l = 6 \frac{l^{2(l+1)}}{(2l+1)!} (1 - v^2)^3 v^{2(l-1)} {}_1F_2 \left(l + \frac{1}{2}; l + \frac{3}{2}, 1 + 2l; -l^2 v^2 \right). \quad (2.3.18)$$

Из Рис. (2.6) следует, что в размерностях три и четыре спектральные распределения излучения имеют одинаковую характерную форму. В нерелятивистском пределе в обоих случаях основной вклад в излучение дает низшая гармоника $l = 1$. Различия между размерностями проявляются с увеличением скорости заряда. Так в размерности $D = 3$ максимум спектра излучения приходится на более низкие гармоники, чем в размерности $D = 4$. Исходя из общего выражения для спектрального распределения мощности излучения в размерности $D = n + 1$ (1.2.24), можно предположить, что в высших размерностях картина будет противоположной – максимум спектра будет сдвигаться в сторону более высоких гармоник.

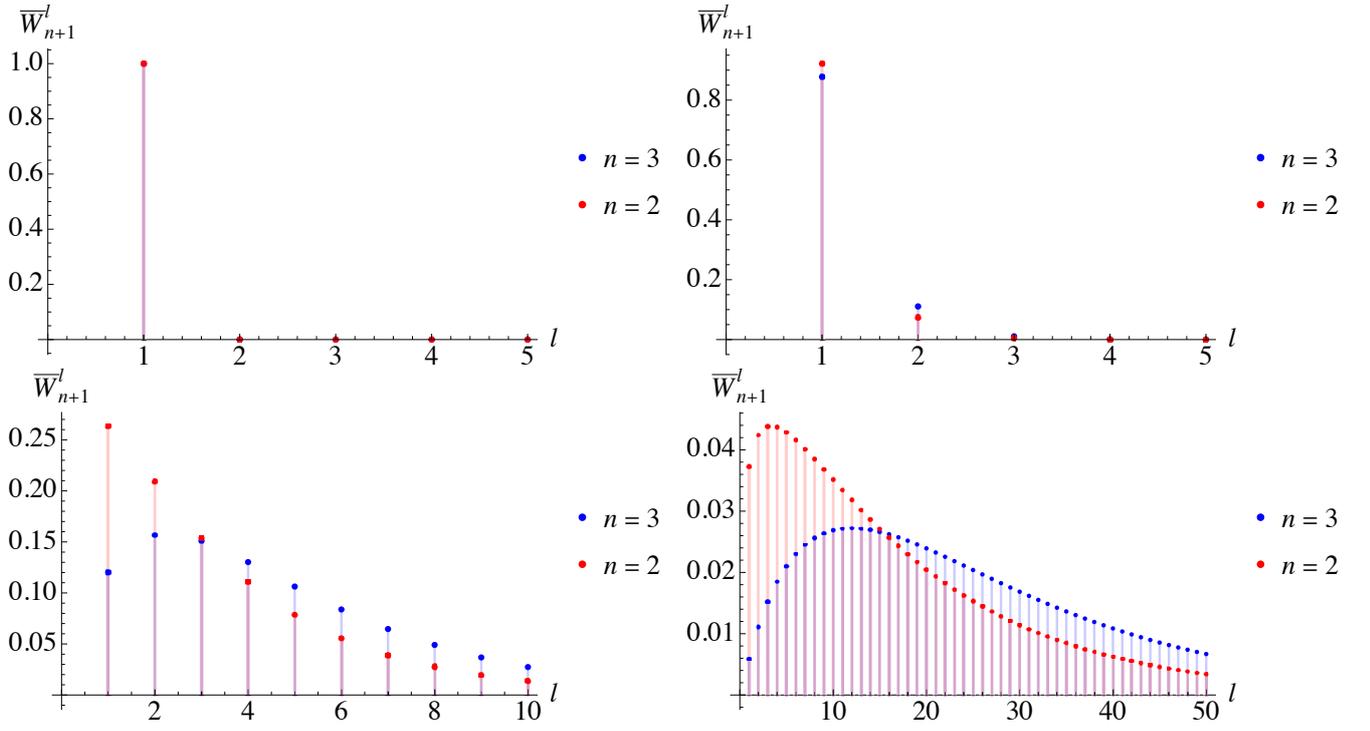


Рис. 2.6. Спектральные распределения мощности излучения заряда на круговой орбите в размерностях три и четыре для значений скорости заряда $v = 0,01, 0,2, 0,7, 0,9$.

2.3.2. Нерелятивистский заряд на эллиптической орбите

Рассмотрим теперь второй частный случай – излучение нерелятивистского заряда на эллиптической орбите. Именно этот случай представляет основной интерес. Во-первых, проявление хвостового сигнала в излучении было явно продемонстрировано нами лишь в нерелятивистском пределе. Во-вторых, для круговых орбит в Главе 1 нами было показано, что в ультрарелятивистском пределе зависимость излучения от истории движения заряда локализуется на малом отрезке собственного времени, предшествующем запаздывающему времени. Логично ожидать, что и в случае эллиптических орбит хвостовой вклад в излучение должен локализовываться в ультрарелятивистском пределе.

В нерелятивистском пределе

$$|\mathbf{v}| = a\omega_0 \sqrt{\frac{1+e\cos\xi}{1-e\cos\xi}} \ll 1 \quad \Longrightarrow \quad a\omega_0 \equiv v_c \ll 1 \quad (2.3.19)$$

интеграл I_4^l с точностью до вкладов первого порядка малости имеет вид

$$I_4^l = \frac{1}{\omega_0} e^{ilv_c e \cos\phi \sin\theta} \int_0^{2\pi} d\xi (1-e\cos\xi) e^{i l(\xi - e \sin\xi)} \left[1 - ilv_c \sqrt{1-e^2} \sin\xi \sin\phi \sin\theta - ilv_c \cos\xi \cos\phi \sin\theta + \mathcal{O}(v_c^2) \right]. \quad (2.3.20)$$

Здесь мнимую экспоненту перед интегралом можно отбросить, так как далее нас будет интересовать лишь квадрат модуля I_4^l . Также можно легко показать, что вклад нулевого порядка

по характерной скорости заряда v_c равен нулю

$$\int_0^{2\pi} d\xi (1 - e \cos \xi) e^{il(\xi - e \sin \xi)} = 0. \quad (2.3.21)$$

В результате, интеграл I_4^l в нерелятивистском пределе сводится к сумме двух интегралов

$$I_4^l = -i \frac{lv_c}{\omega_0} \sin \theta \left[\sqrt{1 - e^2} \sin \phi \int_0^{2\pi} d\xi (1 - e \cos \xi) \sin \xi e^{il(\xi - e \sin \xi)} + \cos \phi \int_0^{2\pi} d\xi (1 - e \cos \xi) \cos \xi e^{il(\xi - e \sin \xi)} \right]. \quad (2.3.22)$$

Данные интегралы после несложных преобразований сводятся к комбинациям интегралов вида [150]

$$\int_0^\pi dx \sin(nx) \sin(z \sin x) = \frac{\pi}{2} (1 - (-1)^n) J_n(z), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2.3.23)$$

$$\int_0^\pi dx \cos(nx) \cos(z \sin x) = \frac{\pi}{2} (1 + (-1)^n) J_n(z), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.3.24)$$

Подробное вычисление интеграла (2.3.22) см. в Приложении 2. В результате для двух интегралов в ур. (2.3.22) получаем

$$\int_0^{2\pi} d\xi (1 - e \cos \xi) \sin \xi e^{il(\xi - e \sin \xi)} = i\pi A_l(e), \quad (2.3.25)$$

$$\int_0^{2\pi} d\xi (1 - e \cos \xi) \cos \xi e^{il(\xi - e \sin \xi)} = \pi B_l(e), \quad (2.3.26)$$

где мы ввели обозначения

$$A_l(e) = \left[J_{l-1}(el) - J_{l+1}(el) - \frac{e}{2} J_{l-2}(el) + \frac{e}{2} J_{l+2}(el) \right], \quad (2.3.27)$$

$$B_l(e) = \left[J_{l-1}(el) + J_{l+1}(el) - e J_l(el) - \frac{e}{2} J_{l-2}(el) - \frac{e}{2} J_{l+2}(el) \right]. \quad (2.3.28)$$

Таким образом, в нерелятивистском пределе интеграл I_4^l имеет вид

$$I_4^l = \frac{\pi lv_c}{\omega_0} \sin \theta \left[A_l(e) \sqrt{1 - e^2} \sin \phi - i B_l(e) \cos \phi \right]. \quad (2.3.29)$$

По аналогии с круговыми орбитами, отсюда мы находим нормированные спектральные распределения мощности излучения нерелятивистского заряда на эллиптической орбите в размерностях три и четыре

$$\bar{W}_3^l = \frac{l^3 [A_l^2(e)(1 - e^2) + B_l^2(e)]}{\sum_{n=1}^{\infty} n^3 [A_n^2(e)(1 - e^2) + B_n^2(e)]}, \quad \bar{W}_4^l = \frac{l^4 [A_l^2(e)(1 - e^2) + B_l^2(e)]}{\sum_{n=1}^{\infty} n^4 [A_n^2(e)(1 - e^2) + B_n^2(e)]}. \quad (2.3.30)$$

Здесь нормировочные множители также могут быть легко просуммированы численно.

Из Рис. (2.7) следует, что в размерностях $D = 3$ и $D = 4$ спектральные распределения излучения также имеют схожий характерный вид. В обоих случаях для орбит с низким

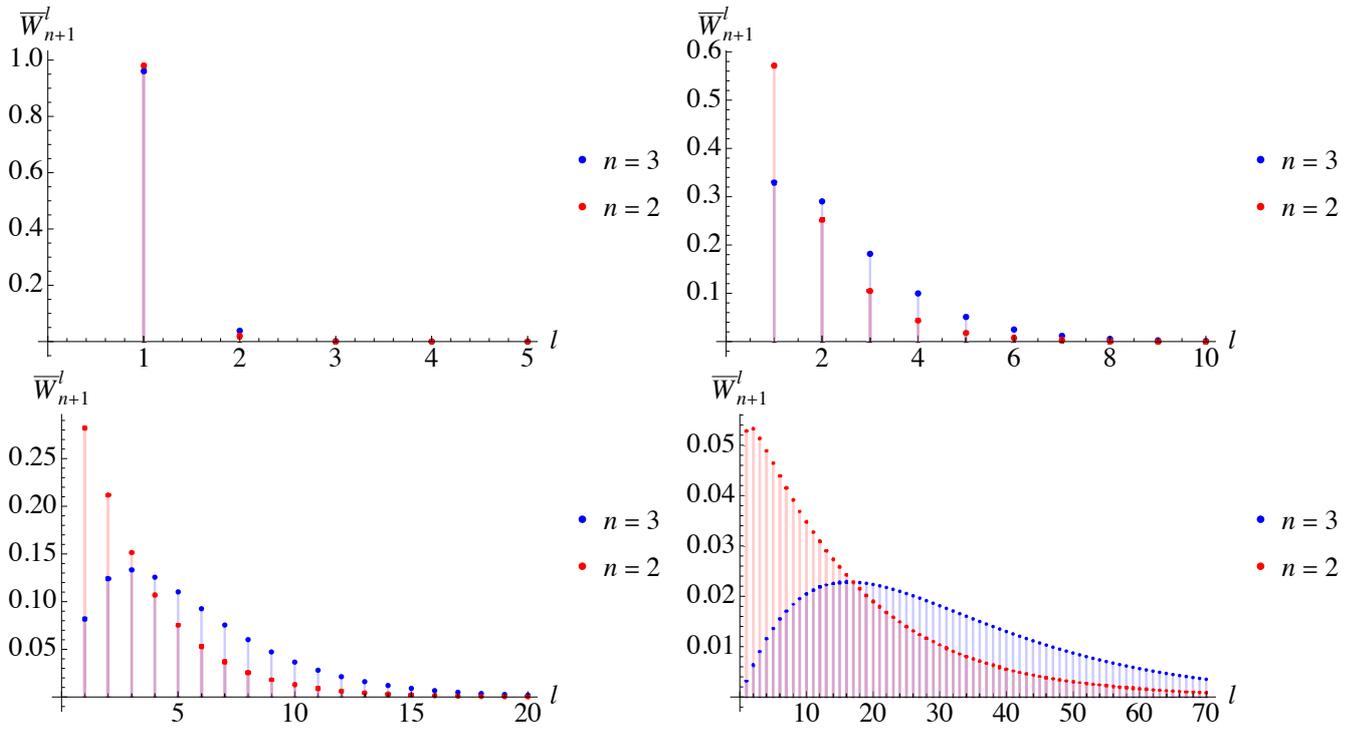


Рис. 2.7. Спектральные распределения мощности излучения нерелятивистского заряда на эллиптической орбите в размерностях $D = 3$ и $D = 4$ для значений эксцентриситета $e = 0,1, 0,5, 0,7, 0,9$.

эксцентриситетом $e \rightarrow 0$ основной вклад в излучение дают низшие гармоники $l = 1$. Различия между размерностями начинают проявляться по мере увеличения эксцентриситета орбиты. Так для орбит с высоким эксцентриситетом $e \rightarrow 1$ в размерности $D = 3$ максимум спектра приходится на более низкие гармоники, чем в $D = 4$, по аналогии со спектрам излучения ультрарелятивистских зарядов на круговых орбитах. Из ур. (1.2.25) и (2.3.30) также можно предположить, что в высших размерностях будет противоположная картина – максимумы спектров будут сдвигаться в сторону высших гармоник.

2.4. Выводы

В Главе 2 нашей целью было исследование нелокальных эффектов в гравитационном излучении двойных систем в теориях с нечетным числом некомпактных дополнительных измерений пространства-времени, связанных с нарушением принципа Гюйгенса. Мы рассмотрели простую модель скалярного поля, взаимодействующего с точечным зарядом, движущимся по фиксированной эллиптической орбите в трехмерном пространстве-времени Минковского. Хотя эта модель физически нежизнеспособна, она все же улавливает эффекты, возникающие в результате нарушения принципа Гюйгенса, которые ожидаются в гравитационном излучении эллиптических двойных систем в реалистичных моделях гравитации с нечетным числом некомпактных дополнительных измерений, таких как RS2 и DGP модели.

Было показано, что нарушение принципа Гюйгенса в трех измерениях приводит к формированию характерного хвостового сигнала в излучении заряда. В частности, он проявляется в смещении точек экстремума мощности излучения заряда во времени от моментов прохождения зарядом перицентра и апоцентра орбиты (2.2.77). Также получено спектральное распределение мощности излучения заряда. Установлено, что в трех измерениях пространства-времени спектральное распределение мощности излучения заряда на эллиптической орбите имеет характерный вид, аналогичный его четырехмерному аналогу. Однако его максимум соответствует более низким гармоникам спектра по сравнению с четырехмерным случаем (см. рис. (2.6) и (2.7)).

Заметим, что аналогичное проявление хвостовых сигналов в излучении в нечетных размерностях было найдено в работах [28] и [84] на простых примерах источников излучения. Так в работе [28] было продемонстрировано проявление хвостового вклада в излучение скалярного заряда, живущего конечный интервал времени, в рамках скалярного аналога RS1-модели. В свою очередь, в работе [84] был найден хвостовой вклад в электромагнитное и гравитационное излучение гармонически осциллирующего источника в нечетных размерностях. Однако, в нашей работе было доказано проявление хвостовых сигналов в излучении астрофизически реалистичного источника гравитационных волн в нечетных размерностях.

Глава 3

Гравитационное излучение в пятимерной ОТО

В этой Главе мы исследуем признаки нечетного числа дополнительных измерений в гравитационном излучении, связанные с нарушением принципа Гюйгенса в балке нечетной размерности. Используемую нами модель можно рассматривать как ADD-модель [13] в пределе бесконечного радиуса компактификации. Хотя данная модель явно феноменологически нежизнеспособна, она полезна как простая аналитически решаемая модель, улавливающая основные особенности более реалистичных сценариев. Мы рассматриваем систему двух точечных масс, движущихся внутри плоской 3-браны, вложенной в пятимерное пространство Минковского, и взаимодействующих друг с другом через безмассовое скалярное поле, локализованное на бране. При этом гравитационное излучение испускается в полный пятимерный балк. Такая модель позволяет избежать трудностей, связанных с учетом натяжений гравитационного поля, связывающих систему и требующих разложения гравитационного Лагранжиана с точностью до кубических членов, и позволяет ограничиться линеаризованной теорией. Мы вычисляем гравитационное излучение в линеаризованной пятимерной ОТО, выделяя излучаемую часть запаздывающего гравитационного поля в соответствии с подходом Рорлиха-Тейтельбойма. В нерелятивистском пределе мы получаем аналог квадрупольной формулы, содержащий интеграл по истории движения частиц, предшествующей запаздывающему времени. Мы также показываем, что для наблюдателя на бране гравитационное излучение содержит третью поляризацию – так называемую «дышащую» моду.

3.1. Модель двойной системы на бране

Как известно, гравитационное излучение системы точечных частиц, взаимодействующих гравитационно, отличается от электромагнитного излучения точечных зарядов нелокальностью источника в соответствующем уравнении Даламбера, учитывающего вклад натяжений гравитационного поля, связывающих систему. А именно, в первом случае мы не можем ограничиться линейным приближением для уравнений движения гравитационного поля, а должны включить в источник излучения квадратичную часть тензора Риччи, представляющую эти натяжения [156]. Чтобы упростить задачу, мы вводим скалярное поле, локализованное на бране и задающее связывающие двойную систему силы, предполагая, что эти силы намного больше сил гравитационного взаимодействия частиц, и пренебрегая по-

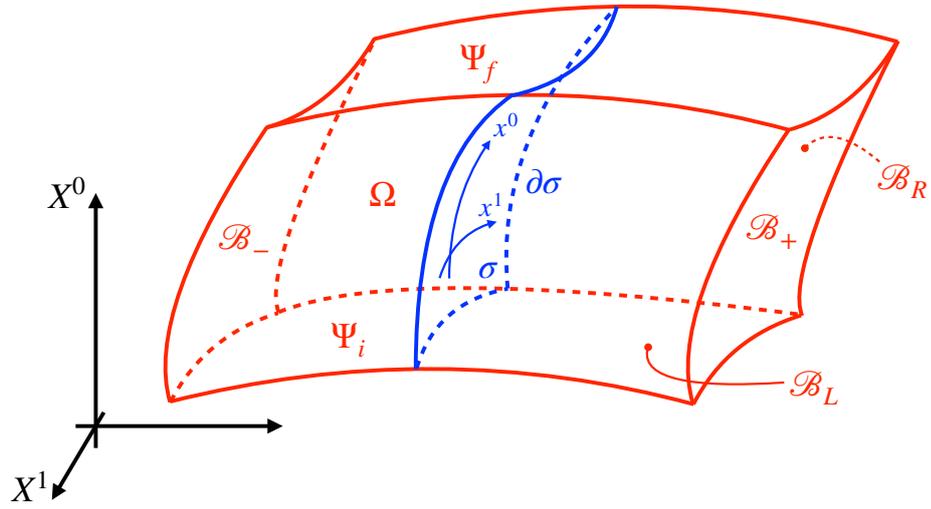


Рис. 3.1. Область постановки вариационной задачи для модели мира на бране.

следними. В нашей модели гравитационное излучение можно последовательно описать, используя лишь линеаризованную гравитацию и учитывая при этом нелокальность источника гравитационного поля, связанную со вкладом натяжений скалярного поля. Мы не уточняем физический механизм локализации частиц и скалярного поля на бране, фокусируясь на выявлении особенностей гравитационного излучения в пространстве-времени нечетной размерности, связанных с нарушением принципа Гюйгенса.

3.1.1. Полная нелинейная модель

Начнем с геометрической формулировки полной нелинейной теории. В нашей модели мы рассматриваем незамкнутую бесконечную 3-брану Σ , погруженную в пятимерный балк \mathcal{M} с одним бесконечным дополнительным измерением. Мы считаем двойную систему точечных частиц и скалярное поле, через которое они взаимодействуют, локализованными на бране.

Мы покрываем \mathcal{M} координатами X^A , $A = \overline{0, 4}$ и обозначаем метрику в балке как

$$ds^2 = \mathcal{G}_{AB} dX^A dX^B, \quad \mathcal{G}_{AB} \propto (- + + + +). \quad (3.1.1)$$

Брана Σ является времени-подобной гиперповерхностью, заданной как с помощью уравнения вложения в балк, так и параметризацией координат Z^A ее мировой поверхности

$$y(X) = 0 \quad \iff \quad Z^A = Z^A(x), \quad (3.1.2)$$

где x^α , $\alpha = \overline{0, 3}$ – координаты на бране (см. рис. (3.1)). Считаем, что функция $y(X)$ возрастает в направлении возрастания координаты вдоль дополнительного измерения. Определим единичный вектор нормали n^A к 3-бране Σ , ориентированный в направлении возрастания

$y(X)$ (см., например, [157])

$$n^A = \frac{\varepsilon \mathcal{G}^{AB} \partial_{By}}{|\mathcal{G}^{MN} \partial_{My} \partial_{Ny}|^{1/2}}, \quad \varepsilon = n_A^2 = \text{sgn}((\partial_{My})^2) = 1. \quad (3.1.3)$$

Также определяем индуцированную метрику на бране

$$g_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu Z^A(x) \partial_\nu Z^B(x) \mathcal{G}_{AB}(Z(x)) \equiv e_\mu^A(x) e_\nu^B(x) \mathcal{G}_{AB}. \quad (3.1.4)$$

Далее все Якобианы преобразования координат мы будем обозначать как e^{\dots} , где верхний и нижний индексы будут определять конкретное преобразование координат. Наконец, мы определяем внешнюю кривизну браны как [157]

$$K_{\alpha\beta} = e_\alpha^A e_\beta^B \nabla_B n_A. \quad (3.1.5)$$

Аналогично, далее индексы у ковариантных производных будут определять, по каким координатам и какой метрике они вычисляются.

Вариационная задача для нашей модели ставится в ограниченной области Ω балка \mathcal{M} с границей $\partial\Omega$ (см. рис. (3.1)). Область Ω выбираем так, чтобы она охватывала брану Σ с двух сторон. Граница $\partial\Omega$ состоит из двух пространственно-подобных гиперповерхностей $\Psi_{i/f}$ и времени-подобной гиперповерхности \mathcal{B} , замыкающей $\partial\Omega$ (см. рис. (3.1))

$$\partial\Omega = \Psi_i \cup \mathcal{B} \cup \Psi_f, \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}_- \cup \mathcal{B}_L \cup \mathcal{B}_R \cup \mathcal{B}_+. \quad (3.1.6)$$

Мы вводим на границе $\partial\Omega$ координатную систему \mathcal{Y}^a и единичный вектор нормали \mathcal{N}^A , направленный наружу из Ω

$$\mathcal{N}_A e_a^A = 0, \quad \mathcal{N}_A^2 = \mathcal{E} = \pm 1. \quad (3.1.7)$$

Здесь Якобиан преобразования координат e_a^A также задает набор 5-векторов, касательных к границе $\partial\Omega$ [157]. Мы также определяем на $\partial\Omega$ индуцированную метрику \mathcal{H}_{ab} и внешнюю кривизну \mathcal{K}_{ab}

$$\mathcal{H}_{ab} = e_a^A e_b^B \mathcal{G}_{AB}, \quad \mathcal{K}_{ab} = e_a^A e_b^B \nabla_B \mathcal{N}_A. \quad (3.1.8)$$

Область Ω вырезает из браны Σ ограниченную часть σ с границей $\partial\sigma$

$$\sigma = \Omega \cap \Sigma, \quad \partial\sigma = \partial\Omega \cap \Sigma. \quad (3.1.9)$$

Мы считаем, что динамика гравитационного поля в балке \mathcal{M} описывается пятимерной ОТО. Таким образом, действие нашей модели имеет вид

$$\begin{aligned} S[\mathcal{G}_{AB}, Z^A] &= \frac{1}{2\kappa_5} \int_\Omega d^5 X \sqrt{-\mathcal{G}} \mathcal{R} + \frac{1}{\kappa_5} \oint_{\partial\Omega} d^4 \mathcal{Y} \sqrt{|\mathcal{H}|} \mathcal{E} \mathcal{K} \\ &\quad - \Lambda \int_\sigma d^4 x \sqrt{-g} + \int_\sigma d^4 x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{mat}}. \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Здесь \mathcal{R} является скаляром Риччи, построенным из метрики \mathcal{G}_{AB} в балке, \mathcal{L}_{mat} схематически обозначает Лагранжиан материи, локализованной на бране, и мы ввели действие Намбу-Гото для браны с натяжением Λ . Также для корректной постановки вариационной задачи мы добавили в действие граничный член Гиббонса-Хокинга на $\partial\Omega$ [157–159]. Заметим, что действие (3.1.10) инвариантно относительно пятимерных диффеоморфизмов балка, а также относительно четырехмерных диффеоморфизмов на бране. Мы накладываем граничное условие Дирихле на вариацию метрики на $\partial\Omega$ и граничное условие Неймана на вариации координат мировой поверхности браны на \mathcal{B}

$$\delta\mathcal{G}_{AB}|_{\partial\Omega} = \delta Z^A|_{\Psi_{i/f}} = \delta\phi|_{\partial\sigma} = 0, \quad \sqrt{-g}g^{\mu 1/2/3}\mathcal{G}_{AB}\partial_\mu Z^A|_{\mathcal{B}} = 0. \quad (3.1.11)$$

Действие двойной системы точечных частиц, локализованных на бране и взаимодействующих через скалярное поле φ , имеет вид

$$S_p = -\sum_{a=1}^2 \int d\tau_a (m_a + g_a\varphi(z_a)) \sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{z}_a^\mu\dot{z}_a^\nu}, \quad \dot{z}_a^\mu = \frac{dz_a^\mu}{d\tau_a}. \quad (3.1.12)$$

Здесь индекс $a = 1, 2$ нумерует частицы, мировые линии частиц z_a^μ параметризованы их собственным временем τ_a , а m_a и g_a обозначают массу и скалярный заряд a -ой частицы, соответственно. Действие безмассового скалярного поля, локализованного на бране, записывается как

$$S_\varphi = -\frac{1}{8\pi} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi(x) \partial_\nu \varphi(x). \quad (3.1.13)$$

В результате, полное действие материи на бране складывается из ур. (3.1.12) и (3.1.13)

$$\int_\sigma d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{mat}} = S_p[z_a^\mu, \varphi] + S_\varphi[\varphi]. \quad (3.1.14)$$

Из действия (3.1.10) мы получаем уравнение движения гравитационного поля в виде

$$\mathcal{R}_{AB} - \frac{1}{2}\mathcal{G}_{AB}\mathcal{R} = \kappa_5 T_{AB} - \kappa_5 \Lambda \int_\sigma d^4x \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} e_\alpha^M e_\beta^N \mathcal{G}_{MA}\mathcal{G}_{NB} \frac{\delta^{(5)}(X - Z(x))}{\sqrt{-\mathcal{G}}}, \quad (3.1.15)$$

где тензор энергии-импульса материи на бране определяется как

$$T_{AB} = -\frac{2}{\sqrt{-\mathcal{G}}} \frac{\delta S_{\text{mat}}}{\delta \mathcal{G}^{AB}}. \quad (3.1.16)$$

Также из ур. (3.1.12) и (3.1.13) мы находим уравнения движения точечных частиц и скалярного поля на бране

$$m_a(\tau_a) \frac{D\dot{z}_a^\mu}{d\tau_a} = g_a (g^{\mu\nu} + \dot{z}_a^\mu \dot{z}_a^\nu) \partial_\nu \varphi, \quad m_a(\tau_a) = m_a + g_a \varphi(z_a), \quad (3.1.17)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi) = 4\pi \sum_{a=1}^2 g_a \int d\tau_a \frac{\delta^{(4)}(x - z_a)}{\sqrt{-g}}. \quad (3.1.18)$$

Систему уравнений движения (3.1.15), (3.1.17) и (3.1.18) необходимо также дополнить уравнением движения браны $\delta S/\delta Z^A = 0$. В случае произвольного выбора координатных систем в балке и на бране последнее уравнение имеет сложный вид. Для удобства вычислений перейдем в балке в Гауссову систему координат браны, в которой ее мировая поверхность имеет фиксированные координаты. При остальные уравнения движения также значительно упростятся.

Гауссова система координат браны

Как было указано выше, действие (3.1.10) обладает двумя видами симметрии – оно инвариантно относительно диффеоморфизмов в балке и диффеоморфизмов на бране

$$X^M \rightarrow X'^M = X'^M(X), \quad x^\mu \rightarrow x'^\mu = x'^\mu(x). \quad (3.1.19)$$

Их инфинитезимальные версии генерируются векторными полями. Вместе с соответствующими преобразованиями тензоров они имеют следующий вид [122, 157, 160]:

- инфинитезимальные диффеоморфизмы балка

$$X^M \rightarrow X'^M = X^M + \Xi^M(X), \quad |\Xi^M| \ll 1, \quad (3.1.20)$$

$$T'^{M\dots}(X') = T^{M\dots}(X) + \Xi^A(X)\partial_A T^{M\dots}(X) - \mathcal{L}_\Xi T^{M\dots}(X), \quad (3.1.21)$$

- инфинитезимальные диффеоморфизмы браны

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x), \quad |\xi^\mu| \ll 1, \quad (3.1.22)$$

$$T'^{\mu\dots}(x') = T^{\mu\dots}(x) + \xi^\alpha(x)\partial_\alpha T^{\mu\dots}(x) - \mathcal{L}_\xi T^{\mu\dots}(x). \quad (3.1.23)$$

В частности, под действием инфинитезимальных диффеоморфизмов балка координаты мировой поверхности браны преобразуются как Штюкельберговские поля

$$Z^A(x) \xrightarrow{\Xi} Z^A(x) + \Xi^A(Z). \quad (3.1.24)$$

Перейдем в балке в Гауссову систему координат браны (ее систему покоя), зафиксировав калибровочную симметрию (3.1.24) наложением калибровочного условия

$$Z^A = 0, \quad Z^\mu = x^\mu. \quad (3.1.25)$$

При этом в балке сохраняется остаточная калибровочная симметрия, генерируемая векторами, удовлетворяющими следующим условиям

$$\Xi^4(Z) = 0, \quad \Xi^\mu(Z) = -\xi^\mu(x). \quad (3.1.26)$$

Таким образом, остаются возможны лишь преобразования координат в балке, согласованные с преобразованиями координат на бране, не выводящие за пределы Гауссовой системы координат браны [122].

После фиксации такой системы отсчета брана становится фиксированной гиперповерхностью в \mathcal{M} . Соответствующая система координат строится $(4 + 1)$ -расслоением балка на семейство непересекающихся времени-подобных гиперповерхностей. При этом индуцированная метрика на бране становится частью метрики в балке

$$g_{\mu\nu} = \partial_\mu Z^M \partial_\nu Z^N \mathcal{G}_{MN} = \delta_\mu^M \delta_\nu^N \mathcal{G}_{MN}. \quad (3.1.27)$$

$(4 + 1)$ -расслоение балка

Построим $(4 + 1)$ -расслоение области Ω на семейство непересекающихся времени-подобных гиперповерхностей, по аналогии с АДМ-формализмом в Гамильтоновом подходе к ОТО [157, 160, 161]. Полученная таким образом система координат будет являться Гауссовой системой координат браны.

Считаем, что вложение браны в Ω задается уравнением (3.1.2), где $y(X)$ является однозначной *функцией расслоения*, задающей семейство непересекающихся времени-подобных гиперповерхностей

$$\sigma_y = \{X^M | y(X) = y = \text{Const}\} \iff \Omega = \bigcup_y \sigma_y \quad (3.1.28)$$

с пространственно-подобным единичным вектором нормали (3.1.3). В этом семействе брана является гиперповерхностью σ_0 . Покрываем брану σ_0 координатами x^α , $\alpha = \overline{0, 3}$. Для их согласования с координатами на остальных гиперповерхностях σ_y введем семейство непересекающихся пространственно-подобных кривых $\{\gamma_A\}$, проходящих через каждую точку на σ_0 и параметризованных значениями функции расслоения в каждой их точке

$$\{\gamma_A, \forall A \in \sigma_0\} = \{X^M(y)\} \iff y(X(0)) = 0. \quad (3.1.29)$$

Тогда системы координат x^α на остальных гиперповерхностях мы вводим так, чтобы данные кривые являлись линиями постоянных координат

$$\gamma_A : x^\alpha(A) = x^\alpha(A'), \quad A \in \sigma_0, \quad A' \in \sigma_y, \quad A, A' \in \gamma_A, \quad (3.1.30)$$

$$\gamma_B : x^\alpha(B) = x^\alpha(B'), \quad B \in \sigma_0, \quad B' \in \sigma_y, \quad B, B' \in \gamma_B. \quad (3.1.31)$$

Семейство касательных векторов к этим кривым образует поле *вектора расслоения* y^M

$$y^M = \frac{dX^M}{dy}, \quad \forall \gamma_A, \quad y^M \partial_{My} = \frac{dX^M}{dy} \frac{\partial y}{\partial X^M} = \frac{dy}{dy} = 1. \quad (3.1.32)$$

Таким образом, мы получаем расслоение Ω на семейство времени-подобных гиперповерхностей σ_y , параметризованных согласованными координатами x^α .

В результате мы получили $(4 + 1)$ -расслоенную координатную систему на Ω

$$X^M = X^M(x^\alpha, y). \quad (3.1.33)$$

Элементы Якобиана такого координатного преобразования являются касательными векторами к σ_y и вектором расслоения

$$e_\alpha^M(x^\alpha, y) = \frac{\partial X^M}{\partial x^\alpha}, \quad y^M(x^\alpha, y) = \frac{\partial X^M}{\partial y}. \quad (3.1.34)$$

В расслоенной координатной системе $\{x^\alpha, y\}$ они имеют простой вид

$$e_\alpha^M \stackrel{*}{=} \delta_\alpha^M, \quad y^M \stackrel{*}{=} \delta_y^M, \quad (3.1.35)$$

где $\stackrel{*}{=}$ обозначает равенство в определенной систем координат. При этом, касательные векторы к σ_y Ли-переносимы вдоль вектора расслоения

$$\mathcal{L}_y e_\alpha^A = y^M \partial_M e_\alpha^A - e_\alpha^M \partial_M y^A = \frac{\partial^2 X^A}{\partial y \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 X^A}{\partial x^\alpha \partial y} = 0. \quad (3.1.36)$$

Переписывая вектор нормали к σ_y (3.1.3) и вектор расслоения как

$$n_A = N(x, y) \partial_A y, \quad y^A = N n^A + N^\alpha e_\alpha^A, \quad (3.1.37)$$

вводим функцию хода $N(x, y)$ и вектор сдвига $N^\alpha(x, y)$. В результате, метрика в балке записывается в $(4 + 1)$ -расслоенных координатах как

$$ds^2 = \mathcal{G}_{AB} dX^A dX^B = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + 2N_\alpha dx^\alpha dy + (N_\alpha^2 + N^2) dy^2, \quad (3.1.38)$$

где мы ввели индуцированную метрику на гиперповерхностях σ_y как

$$g_{\mu\nu}(x, y) = e_\mu^M e_\nu^N \mathcal{G}_{MN}. \quad (3.1.39)$$

Отсюда находим выражение для детерминанта метрики в балке в расслоенном виде

$$\sqrt{-\mathcal{G}} = N \sqrt{-g}. \quad (3.1.40)$$

Так как действие гравитационного поля (3.1.10) содержит граничный член, определенный на $\partial\Omega$, необходимо также построить расслоение границы. Будем считать, что ее части \mathcal{B}_- и \mathcal{B}_+ , не пересекающие брану (см. рис. (3.1)), являются граничными гиперповерхностями расслоения: $\mathcal{B}_- = \sigma_{y_-}$ и $\mathcal{B}_+ = \sigma_{y_+}$, где $y \in (y_-, y_+)$. В свою очередь, объединение остальных частей границы $\mathcal{C} = \Psi_i \cup \mathcal{B}_L \cup \Psi_f \cup \mathcal{B}_R$ будет расслаиваться границами $\partial\sigma_y$ гиперповерхностей

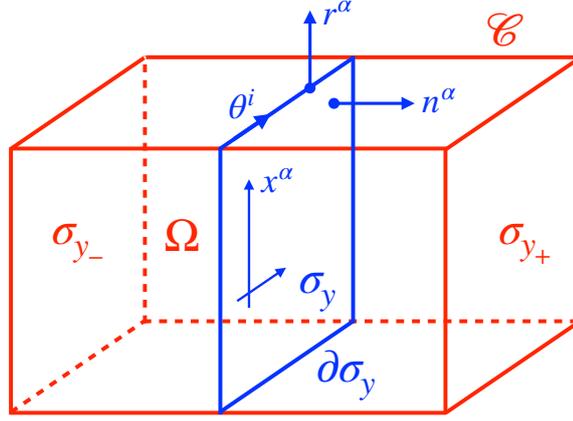


Рис. 3.2. Расслоение области постановки вариационной задачи Ω и ее границы $\partial\Omega$.

σ_y . А именно, определим поверхность $\partial\sigma_y$ как границу σ_y , образованную ее пересечением с \mathcal{C} (см. рис. (3.2))

$$\partial\sigma_y = \sigma_y \cap \mathcal{C}. \quad (3.1.41)$$

Покрываем $\partial\sigma_y$ координатами θ^i и вводим единичный 4-вектор нормали r^μ к ней

$$\partial\sigma_y : x^\mu = x^\mu(\theta), \quad r_\mu^2 = \epsilon = \pm 1. \quad (3.1.42)$$

Соответствующий 5-вектор нормали ортогонален вектору нормали к $\partial\sigma_y$

$$r^M = r^\mu e_\mu^M \implies r^M n_M = r^\mu e_\mu^M n_M = 0. \quad (3.1.43)$$

Отсюда мы определяем 4- и 5-векторы касательные к поверхности $\partial\sigma_y$

$$e_i^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \theta^i}, \quad r_\alpha e_i^\alpha = 0, \quad (3.1.44)$$

$$e_i^A = e_i^\alpha e_\alpha^A = \frac{\partial X^A}{\partial \theta^i}, \quad r_A e_i^A = \mathcal{G}_{AB} r^\alpha e_\alpha^A e_i^B e_i^\beta = g_{\alpha\beta} r^\alpha e_i^\beta = 0. \quad (3.1.45)$$

Из полученных касательных векторов строим индуцированную метрику на $\partial\sigma_y$

$$\mathbb{H}_{ij} = g_{\mu\nu} e_i^\mu e_j^\nu = \mathcal{G}_{MN} e_\mu^M e_\nu^N e_i^\mu e_j^\nu = \mathcal{G}_{MN} e_i^M e_j^N, \quad (3.1.46)$$

$$ds^2|_{\partial\sigma_y} = \mathcal{G}_{AB} e_i^A e_j^B d\theta^i d\theta^j = \mathbb{H}_{ij} d\theta^i d\theta^j. \quad (3.1.47)$$

Соответствующие условия полноты для обратных метрик на $\partial\sigma_y$ имеют вид [157]

$$g^{\mu\nu}|_{\partial\sigma_y} = \epsilon r^\mu r^\nu + \mathbb{H}^{ij} e_i^\mu e_j^\nu, \quad \mathcal{G}^{AB}|_{\partial\sigma_y} = n^A n^B + \epsilon r^A r^B + \mathbb{H}^{ij} e_i^A e_j^B. \quad (3.1.48)$$

Также мы строим внешнюю кривизну на $\partial\sigma_y$

$$\mathbb{K}_{ij} = e_i^\alpha e_j^\beta \nabla_\beta r_\alpha = e_i^\alpha e_j^\beta \mathbb{K}_{\alpha\beta}, \quad \mathbb{K} = \mathbb{H}^{ij} \mathbb{K}_{ij}. \quad (3.1.49)$$

Наконец, по аналогии с координатами на σ_y , мы согласуем координатные системы на границах $\partial\sigma_y$ с помощью семейства пространственно-подобных кривых $\{\beta_P\} \in \mathcal{C}$, являющихся интегральными кривыми вектора нормали n^A к гиперповерхностям σ_y и лежащими на \mathcal{C}

$$\beta_P : \quad \theta^i(P) = \theta^i(P'), \quad P \in \partial\sigma_y, \quad P' \in \partial\sigma_{y'}, \quad P, P' \in \beta_P. \quad (3.1.50)$$

В частности, вектор нормали n^A на границе \mathcal{C} принимает следующий вид

$$n_A = N(x^\alpha, y)\partial_{Ay}, \quad n^A n_A = 1 \quad \Longrightarrow \quad n^A|_{\partial\sigma_y} = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial X^A}{\partial y} \right)_{\theta^i}. \quad (3.1.51)$$

Саму границу \mathcal{C} мы покрываем координатами \mathcal{Y}^a

$$X^M = X^M(\mathcal{Y}^a) \in \mathcal{C}. \quad (3.1.52)$$

При этом, так как граница \mathcal{C} образуется множеством границ гиперповерхностей σ_y

$$\mathcal{C} = \bigcup_y \partial\sigma_y, \quad (3.1.53)$$

то вектором нормали к ней является введенный нами ранее единичный вектор r^A (см. ур. (3.1.43)). Мы также определяем векторы касательные к \mathcal{C} стандартным образом

$$e_a^A = \frac{\partial X^A}{\partial \mathcal{Y}^a} \quad (3.1.54)$$

и с их помощью строим индуцированную метрику на \mathcal{C}

$$\mathcal{H}_{ab} = \mathcal{G}_{AB} e_a^A e_b^B, \quad \mathcal{G}^{AB}|_{\mathcal{C}} = \epsilon r^A r^B + \mathcal{H}^{ab} e_a^A e_b^B, \quad (3.1.55)$$

а также внешнюю кривизну на \mathcal{C}

$$\mathcal{K}_{ab} = e_a^A e_b^B \nabla_B r_A, \quad \mathcal{K} = \mathcal{H}^{ab} \mathcal{K}_{ab}. \quad (3.1.56)$$

За счет согласования координатных систем на всех границах $\partial\sigma_y$ они вместе с функцией расслоения $y(X)$ могут служить частным случаем координат на \mathcal{C}

$$\mathcal{Y}^a = \mathcal{Y}^a(\theta^i, y). \quad (3.1.57)$$

С помощью ур. (3.1.51) можно легко показать, что в таких расслоенных координатах индуцированная метрика на \mathcal{C} принимает следующий вид

$$ds^2|_{\mathcal{C}} = \mathbb{H}_{ij} d\theta^i d\theta^j + N^2 dy^2, \quad (3.1.58)$$

$$\mathcal{H}_{ab} d\mathcal{Y}^a d\mathcal{Y}^b \stackrel{*}{=} \mathbb{H}_{ij} d\theta^i d\theta^j + N^2 dy^2. \quad (3.1.59)$$

Здесь мы специально используем те же обозначения для координат на \mathcal{C} , ее индуцированной метрики и внешней кривизны, что и для координат на $\partial\Omega$ и ее характеристик (см. ур. (3.1.8) и (3.1.10)), т.к. поверхность \mathcal{C} является частью границы $\partial\Omega$. Отсюда легко находим выражение для детерминанта индуцированной метрики на \mathcal{C} в расслоенных координатах

$$\mathcal{H} = \mathbb{H} N^2 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{|\mathcal{H}|} = N \sqrt{|\mathbb{H}|}. \quad (3.1.60)$$

Действие модели в $(4 + 1)$ -расслоенном виде

Исходя из проведенных построений, запишем действие (3.1.10) в $(4 + 1)$ -расслоенном виде. При этом действие гравитационного поля примет вид, аналогичный $(3 + 1)$ -расслоенному действию в Гамильтоновом подходе к ОТО [157, 160, 161].

Начнем преобразование действия (3.1.10) к $(4 + 1)$ -расслоенному виду с члена Гиббонса-Хокинга на границе балка $\partial\Omega$. Для этого учтем, что $\partial\Omega$ образуется тремя гиперповерхностями

$$\partial\Omega = (-\sigma_{y_-}) \cup \mathcal{C} \cup \sigma_{y_+}, \quad (3.1.61)$$

где знак минус у σ_{y_-} нужен для того, чтобы развернуть вектор нормали к ней наружу из Ω . Тогда, с помощью уравнений (3.1.5) и (3.1.56) мы переписываем граничный член Гиббонса-Хокинга как

$$\frac{1}{\kappa_5} \oint_{\partial\Omega} d^4\mathcal{Y} \sqrt{|\mathcal{H}|} \mathcal{E} \mathcal{K} = -\frac{1}{\kappa_5} \int_{\sigma_{y_-}} d^4x \sqrt{-g} K + \frac{1}{\kappa_5} \int_{\mathcal{C}} d^4\mathcal{Y} \sqrt{|\mathcal{H}|} \epsilon \mathcal{K} + \frac{1}{\kappa_5} \int_{\sigma_{y_+}} d^4x \sqrt{-g} K. \quad (3.1.62)$$

Преобразуем теперь член Эйнштейна-Гильберта в балке. Для этого учтем, что область Ω является объединением гиперповерхностей σ_y (см. ур. (3.1.28)). Тогда с учетом ур. (3.1.40) инвариантная мера интегрирования принимает вид

$$\int_{\Omega} d^5X \sqrt{-\mathcal{G}} = \int_{y_-}^{y_+} dy \int_{\sigma_y} d^4x \sqrt{-g} N. \quad (3.1.63)$$

Также выразим скаляр Риччи \mathcal{R} по метрике в балке через скаляр Риччи R по индуцированной метрике на σ_y с помощью уравнения Гаусса-Кодацци [157]

$$\mathcal{R} = R + K^2 - K^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} + 2\nabla_A (\nabla_B n^A n^B - \nabla_B n^B n^A). \quad (3.1.64)$$

В результате, член Эйнштейна-Гильберта в балке записывается как

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\kappa_5} \int_{\Omega} d^5X \sqrt{-\mathcal{G}} \mathcal{R} &= \frac{1}{2\kappa_5} \int_{y_-}^{y_+} dy \int_{\sigma_y} d^4x \sqrt{-g} N (R + K^2 - K^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}) \\ &+ \frac{1}{\kappa_5} \int_{\Omega} d^5X \sqrt{-\mathcal{G}} \nabla_A (\nabla_B n^A n^B - \nabla_B n^B n^A). \end{aligned} \quad (3.1.65)$$

Преобразуем здесь второй интеграл с помощью теоремы Гаусса

$$\int_{\Omega} d^5X \sqrt{-\mathcal{G}} \nabla_A (\nabla_B n^A n^B - \nabla_B n^B n^A) = \oint_{\partial\Omega} d^4\mathcal{Y} \sqrt{|\mathcal{H}|} \mathcal{E} \mathcal{N}_A (\nabla_B n^A n^B - \nabla_B n^B n^A), \quad (3.1.66)$$

где \mathcal{N}_A является единичным вектором нормали к $\partial\Omega$ (см. ур. (3.1.7)). С учетом уравнения (3.1.61) полученный граничный интеграл записывается как

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} d^4\mathcal{Y} \sqrt{|\mathcal{H}|} \mathcal{E} \mathcal{N}_A (\nabla_B n^A n^B - \nabla_B n^B n^A) &= \int_{\sigma_{y_-}} d^4x \sqrt{-g} \nabla_B n^B + \int_{\mathcal{C}} d^4\mathcal{Y} \sqrt{|\mathcal{H}|} \epsilon r_A \nabla_B n^A n^B \\ &- \int_{\sigma_{y_+}} d^4x \sqrt{-g} \nabla_B n^B, \end{aligned} \quad (3.1.67)$$

где мы также учли, что $n_A \nabla_B n^A = 0$ и $n_A r^A = 0$. Наконец, преобразуем интегралы по $\sigma_{y_{\pm}}$ к интегралам от внешней кривизны с помощью соотношения

$$K = g^{\alpha\beta} e_{\alpha}^A e_{\beta}^B \nabla_B n_A = (\mathcal{G}^{AB} - n^A n^B) \nabla_B n_A = \nabla_B n^B. \quad (3.1.68)$$

В результате, второй интеграл, возникающий в разложении действия Эйнштейна-Гильберта в балке (3.1.65), принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa_5} \int_{\Omega} d^5 X \sqrt{-\mathcal{G}} \nabla_A (\nabla_B n^A n^B - \nabla_B n^B n^A) &= \frac{1}{\kappa_5} \int_{\sigma_{y_-}} d^4 x \sqrt{-g} K - \frac{1}{\kappa_5} \int_{\sigma_{y_+}} d^4 x \sqrt{-g} K \\ &+ \frac{1}{\kappa_5} \int_{\mathcal{C}} d^4 \mathcal{Y} \sqrt{|\mathcal{H}|} \epsilon r_A \nabla_B n^A n^B. \end{aligned} \quad (3.1.69)$$

Комбинируем член Эйнштейна-Гильберта с граничным членом Гиббонса-Хокинга

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\kappa_5} \int_{\Omega} d^5 X \sqrt{-\mathcal{G}} \mathcal{R} + \frac{1}{\kappa_5} \oint_{\partial\Omega} d^4 \mathcal{Y} \sqrt{|\mathcal{H}|} \mathcal{E} \mathcal{K} &= \frac{1}{2\kappa_5} \int_{y_-}^{y_+} dy \int_{\sigma_y} d^4 x \sqrt{-g} N (R + K^2 - K^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}) \\ &+ \frac{1}{\kappa_5} \int_{\mathcal{C}} d^4 \mathcal{Y} \sqrt{|\mathcal{H}|} \epsilon (\mathcal{K} - \nabla_B r_A n^A n^B), \end{aligned} \quad (3.1.70)$$

где мы также учли, что $r_A \nabla_B n^A = -n^A \nabla_B r_A$. Для преобразования второго интеграла в ур. (3.1.70) мы перейдем в расслоенную систему координат на \mathcal{C}

$$\mathcal{Y}^a = \{\theta^i, y\} \in \mathcal{C} \quad \Longrightarrow \quad \int_{\mathcal{C}} d^4 \mathcal{Y} \sqrt{|\mathcal{H}|} = \int_{y_-}^{y_+} dy \int_{\partial\sigma_y} d^3 \theta \sqrt{|\mathbb{H}|} N. \quad (3.1.71)$$

Тогда с помощью ур. (3.1.48) и (3.1.55) переписываем подынтегральное выражение как

$$\mathcal{K} - n^A n^B \nabla_B r_A = (\mathcal{G}^{AB} - n^A n^B - \epsilon r^A r^B) \nabla_B r_A = \mathbb{H}^{ij} \mathbb{K}_{ij} = \mathbb{K}. \quad (3.1.72)$$

В результате, гравитационная часть действия (3.1.10) в $(4 + 1)$ -расслоенных координатах принимает вид

$$\frac{1}{2\kappa_5} \int_{y_-}^{y_+} dy \int_{\sigma_y} d^4 x \sqrt{-g} N (R + K^2 - K^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}) + \frac{1}{\kappa_5} \int_{y_-}^{y_+} dy \int_{\partial\sigma_y} d^3 \theta \sqrt{|\mathbb{H}|} \epsilon \mathbb{K} N. \quad (3.1.73)$$

Действие Намбу-Гото для браны и действие материи, локализованной на бране, очевидным образом переписываются в расслоенном виде как

$$- \Lambda \int_{\sigma_0} d^4 x \sqrt{-g} = - \Lambda \int_{y_-}^{y_+} dy \int_{\sigma_y} d^4 x \sqrt{-g} \delta(y), \quad (3.1.74)$$

$$\int_{\sigma_0} d^4 x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{mat}} = \int_{y_-}^{y_+} dy \int_{\sigma_y} d^4 x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{mat}} \delta(y). \quad (3.1.75)$$

В результате, действие рассматриваемой модели в Гауссовой системе координат браны принимает вид

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\kappa_5} \int_{y_-}^{y_+} dy \int_{\sigma_y} d^4 x \sqrt{-g} N (R + K^2 - K^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}) + \frac{1}{\kappa_5} \int_{y_-}^{y_+} dy \int_{\partial\sigma_y} d^3 \theta \sqrt{|\mathbb{H}|} \epsilon \mathbb{K} N \\ &- \Lambda \int_{y_-}^{y_+} dy \int_{\sigma_y} d^4 x \sqrt{-g} \delta(y) + \int_{y_-}^{y_+} dy \int_{\sigma_y} d^4 x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{mat}} \delta(y). \end{aligned} \quad (3.1.76)$$

Здесь также необходимо учесть, что внешняя кривизна гиперповерхностей σ_y зависит от индуцированной метрики на них и вектора сдвига

$$\mathcal{L}_y g_{\mu\nu} = 2N K_{\mu\nu} + \nabla_\mu N_\nu + \nabla_\nu N_\mu \stackrel{*}{=} \partial_y g_{\mu\nu} \implies K_{\mu\nu} = \frac{1}{2N} (\partial_y g_{\mu\nu} - \nabla_\mu N_\nu - \nabla_\nu N_\mu). \quad (3.1.77)$$

Вариация действия (3.1.76) по индуцированной метрике, вектору сдвига и функции хода вычисляются по аналогии с Гамильтоновым подходом к ОТО. Мы приведем лишь получающиеся из него уравнения движения гравитационного поля

$$R - K^2 + K^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} = 0, \quad (3.1.78)$$

$$\nabla_\alpha (K^{\mu\alpha} - g^{\mu\alpha} K) = 0, \quad (3.1.79)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{-g} N \left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} K^2 + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} K^{\mu\nu} K_{\mu\nu} \right) \\ & + \sqrt{-g} (g_{\alpha\beta} \nabla_\sigma \nabla^\sigma N - \nabla_\beta \nabla_\alpha N) + g_{\alpha\beta} \partial_y (\sqrt{-g} K) - g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \partial_y (\sqrt{-g} K^{\mu\nu}) \\ & - 2\sqrt{-g} N g^{\mu\nu} K_{\alpha\mu} K_{\beta\nu} - 2\sqrt{-g} K_{\nu(\alpha} \nabla^\nu N_{\beta)} + \sqrt{-g} \nabla_\rho ((K_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} K) N^\rho) \\ & = \sqrt{-g} \kappa_5 T_{\alpha\beta} \delta(y) - \sqrt{-g} \kappa_5 \Lambda g_{\alpha\beta} \delta(y). \end{aligned} \quad (3.1.80)$$

Здесь мы ввели следующее обозначение для тензора энергии-импульса материи на бране

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{mat}}}{\delta g^{\alpha\beta}}. \quad (3.1.81)$$

Интегрируя ур. (3.1.80) по малому интервалу $y \in (-0, +0)$ вокруг браны, получаем условия сшивки Израэля [157, 162] на бране

$$g_{\alpha\beta}|_{y=-0} = g_{\alpha\beta}|_{y=+0}, \quad (3.1.82)$$

$$- [K_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} K]_{y=0} = \kappa_5 T_{\alpha\beta} - \kappa_5 \Lambda g_{\alpha\beta}|_{y=0}, \quad (3.1.83)$$

где $[\dots]_{y=0}$ обозначает скачок соответствующей величины на бране

$$[A]_{y=0} = A|_{y=+0} - A|_{y=-0}. \quad (3.1.84)$$

Далее для простоты мы будем рассматривать предельный случай браны без натяжения $\Lambda = 0$. Можно показать, что в таком случае плоская брана, вложенная в пятимерное пространство Минковского, будет являться решением вакуумных уравнений движения гравитационного поля

$$T_{\alpha\beta} = 0, \quad \Lambda = 0 \implies g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, \quad N = 1, \quad N^\alpha = 0, \quad K_{\mu\nu} = 0. \quad (3.1.85)$$

Такой предел позволяет нам сосредоточиться на рассмотрении процесса генерации слабых гравитационных волн материей, локализованной на бране, и выявлении их особенностей, связанных с нарушением принципа Гюйгенса в пятимерном балке модели, пренебрегая динамикой браны и связанными с ней дополнительными осложнениями в динамике гравитационных волн.

3.1.2. Линейное приближение

Далее будем рассматривать малые возмущения гравитационного поля на фоне выбранного вакуумного решения уравнений Эйнштейна

$$\mathcal{G}_{AB} = \eta_{AB} + H_{AB}, \quad |H_{AB}| \ll 1. \quad (3.1.86)$$

В $(4 + 1)$ -расслоенном виде мы обозначаем возмущения гравитационного поля как

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad N = 1 + n, \quad N^\mu = n^\mu, \quad |h_{\mu\nu}|, |n|, |n^\mu| \ll 1. \quad (3.1.87)$$

Из ур. (3.1.38) следует, что возмущения пятимерной метрики и возмущения гравитационного поля в $(4 + 1)$ -расслоенном виде связаны друг с другом следующим образом

$$H_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}, \quad H_{\mu y} = n_\mu, \quad H_{yy} = 2n. \quad (3.1.88)$$

Линейные приближения для тензора и скаляра Риччи представлены в литературе (см., например, [160, 163]), поэтому здесь мы их не приводим. В свою очередь, в соответствии с ур. (3.1.77), внешняя кривизна и ее след в линейном приближении принимают вид

$$K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\partial_y h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha n_\beta - \partial_\beta n_\alpha), \quad K = \frac{1}{2} \partial_y h - \partial_\alpha n^\alpha. \quad (3.1.89)$$

Здесь и далее все четырехмерные индексы сворачиваются и поднимаются/опускаются по четырехмерной фоновой метрике Минковского.

В результате, уравнения движения гравитационного поля (3.1.78–3.1.80) в линейном приближении принимают вид

$$\partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} - \partial^\alpha \partial_\alpha h = 0, \quad (3.1.90)$$

$$\partial_y \partial_\alpha h^{\alpha\mu} - \partial_y \partial^\mu h + \partial^\mu \partial_\alpha n^\alpha - \partial^\alpha \partial_\alpha n^\mu = 0, \quad (3.1.91)$$

$$\begin{aligned} & \partial^\sigma \partial_\alpha h_{\beta\sigma} + \partial^\sigma \partial_\beta h_{\alpha\sigma} - \partial^\sigma \partial_\sigma h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \partial_\beta h - \eta_{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} + \eta_{\alpha\beta} \partial^\sigma \partial_\sigma h \\ & + 2\eta_{\alpha\beta} \partial^\sigma \partial_\sigma n - 2\partial_\alpha \partial_\beta n + \eta_{\alpha\beta} \partial_y^2 h - \partial_y^2 h_{\alpha\beta} - 2\eta_{\alpha\beta} \partial_y \partial_\mu n^\mu + \partial_y \partial_\alpha n_\beta + \partial_y \partial_\beta n_\alpha \\ & = 2\kappa_5 T_{\alpha\beta} \delta(y). \end{aligned} \quad (3.1.92)$$

Мы также находим линейное приближение для второго условия сшивки Израэля (3.1.83)

$$[\eta_{\alpha\beta} \partial_y h - \partial_y h_{\alpha\beta} - 2\eta_{\alpha\beta} \partial_\sigma n^\sigma + \partial_\alpha n_\beta + \partial_\beta n_\alpha]_{y=0} = 2\kappa_5 T_{\alpha\beta}. \quad (3.1.93)$$

Очевидно, что с учетом второго условия сшивки (3.1.93) уравнение (3.1.92) можно рассматривать как уравнение движения гравитационного поля в балке.

Данные уравнения движения обладают калибровочной симметрией

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu, \quad n^\mu \rightarrow n^\mu + \partial_y \xi^\mu, \quad n \rightarrow n, \quad (3.1.94)$$

которая является остаточной инвариантностью уравнений движения относительно инфинитезимальных диффеоморфизмов балка (3.1.26), не выводящих за рамки Гауссовой системы координат браны

$$H_{AB} \rightarrow H_{AB} - \partial_A \Xi_B - \partial_B \Xi_A, \quad \Xi^\mu(Z) = -\xi^\mu, \quad \Xi^4(Z) = 0. \quad (3.1.95)$$

Зафиксируем ее с помощью наложения пятимерного калибровочного условия Лоренца

$$\partial^A H_{AB} - \frac{1}{2} \partial_B H = 0, \quad H = \eta^{AB} H_{AB}, \quad (3.1.96)$$

которое в $(4+1)$ -расслоенном виде соответствует следующим двум условиям

$$\partial^\alpha h_{\alpha\beta} + \partial_y n_\beta - \frac{1}{2} \partial_\beta (h + 2n) = 0, \quad \partial^\alpha n_\alpha + 2\partial_y n - \frac{1}{2} \partial_y (h + 2n) = 0. \quad (3.1.97)$$

С их помощью из ур. (3.1.90) и (3.1.91) находим

$${}_5\Box(2n - h) = 0 \implies n = \frac{1}{2}h, \quad {}_5\Box n^\mu = 0 \implies n^\mu = 0, \quad (3.1.98)$$

$$\partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} = \partial_\beta h, \quad \partial_y \partial^\alpha h_{\alpha\beta} = \partial_y \partial_\beta h, \quad (3.1.99)$$

где ${}_5\Box = \partial^A \partial_A$. Отсюда видно, что выбор пятимерного калибровочного условия Лоренца (3.1.96) позволяет расцепить уравнения движения. Подставляя (3.1.98) в ур. (3.1.92), получаем уравнение движения для возмущений индуцированной метрики

$${}_5\Box (h_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta} h) = -2\kappa_5 T_{\alpha\beta} \delta(y). \quad (3.1.100)$$

Также из условия сохранения тензора энергии-импульса материи на бране находим уравнение связи для возмущений индуцированной метрики, согласующееся с ур. (3.1.99)

$$\partial^\alpha T_{\alpha\beta} = 0 \implies \partial^\alpha h_{\alpha\beta} = \partial_\beta h. \quad (3.1.101)$$

Наконец, условие сшивки Израэля (3.1.93) в калибровке Лоренца принимает вид

$$[\partial_y h_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta} \partial_y h]_{y=0} = -2\kappa_5 T_{\alpha\beta}. \quad (3.1.102)$$

Однако, т.к. оно является прямым следствием уравнения движения (3.1.100), то далее мы будем рассматривать лишь пятимерное уравнение движения.

Расписывая покомпонентно с помощью ур. (3.1.88), можно показать, что уравнения движения гравитационного поля (3.1.98) и (3.1.100) и калибровочное условие Лоренца (3.1.96) могут быть записаны единым образом как

$${}_5\Box\bar{H}_{AB} = -2\kappa_5\delta_A^\alpha\delta_B^\beta T_{\alpha\beta}\delta(y), \quad (3.1.103)$$

$$\bar{H}_{AB} = H_{AB} - \frac{1}{2}\eta_{AB}H, \quad \partial^A\bar{H}_{AB} = 0. \quad (3.1.104)$$

Далее мы будем использовать (3.1.103) в качестве уравнения движения гравитационного поля. Заметим, что за счет структуры источника в уравнении движения калибровочное условие Лоренца в балке (3.1.104) согласуется с четырехмерным законом сохранения тензора энергии-импульса материи на бране

$$\partial^A\bar{H}_{AB} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \partial^\alpha T_{\alpha\beta} = 0. \quad (3.1.105)$$

Условие Лоренца (3.1.104) не фиксирует калибровочную симметрию уравнений движения полностью. А именно, имеется остаточная калибровочная симметрия

$$H_{AB} \rightarrow H_{AB} - \partial_A\Xi_B - \partial_B\Xi_A, \quad {}_5\Box\Xi^M = 0. \quad (3.1.106)$$

В вакууме ее можно зафиксировать с помощью поперечно-бесследовой калибровки

$$H_{0M}^{\text{tt}} = 0, \quad H_{ii}^{\text{tt}} = 0, \quad \partial^j H_{ij}^{\text{tt}} = 0, \quad (3.1.107)$$

сохраняющей лишь динамические степени свободы гравитационного поля H_{ij}^{tt} [164]. В пространстве-времени пяти измерений их оказывается пять. Здесь мы ввели разделение координат $X^M = \{t, x^i\}$, $i = \overline{1,4}$. Далее строчные латинские индексы будут нумеровать пространственные координаты в балке. За счет построения $(4+1)$ -расслоенной системы координат мы больше не будем различать координаты на бране и в балке, а координату вдоль дополнительного измерения будем обозначать для общности как $y = x^4$.

Поток энергии-импульса, переносимый в балке пятимерным гравитационным полем в поперечно-бесследовой калибровке, определяется тензором энергии-импульса, аналогичным приведенному в [163] (см. также [165, 166])

$$t_{MN} = \frac{1}{4\kappa_5} \langle \partial_M H_{ij}^{\text{tt}} \partial_N H_{ij}^{\text{tt}} \rangle, \quad (3.1.108)$$

где предполагается периодическое движение источника гравитационного поля, а скобки $\langle \dots \rangle$ обозначают усреднение по нескольким периодам его движения. Таким образом, данный тензор энергии-импульса будет описывать поток энергии гравитационного излучения в балке, переносимый пятью поляризациями гравитационных волн.

3.1.3. Поляризации гравитационных волн

На удалении от источника гравитационного поля явный вид пяти поляризаций гравитационных волн в поперечно-бесследовой калибровке можно получить, действуя на гравитационное поле следующим проектором [156, 163]

$$H_{ij}^{\text{tt}}(x) = \Lambda_{ij,kl}(\mathbf{n})H_{kl}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \quad (3.1.109)$$

$$\Lambda_{ij,kl}(\mathbf{n}) \equiv P_{ik}P_{jl} - \frac{1}{3}P_{ij}P_{kl}, \quad P_{ij}(\mathbf{n}) \equiv \delta_{ij} - n_in_j, \quad (3.1.110)$$

имеющим нулевой след по обоим парам индексов

$$\Lambda_{ii,kl}(\mathbf{n}) = \Lambda_{ij,kk}(\mathbf{n}) = 0. \quad (3.1.111)$$

В частности, за счет этого поперечно-бесследовые возмущения метрики могут быть эквивалентно получены из приведенных возмущений метрики (3.1.104)

$$H_{ij}^{\text{tt}}(x) = \Lambda_{ij,kl}(\mathbf{n})\bar{H}_{kl}(x). \quad (3.1.112)$$

Из пяти поляризаций гравитационного поля в балке три доступны для регистрации наблюдателем на бране [27]. В частности, в случае когда вектор в направлении распространения гравитационной волны \mathbf{n} сонаправлен с x^3 -осью, из ур. (3.1.109) получаем

$$\bar{H}_{ij}^{\text{tt}}(x) = \begin{pmatrix} H_+ - \frac{1}{2}H_{\circ} & H_{\times} & 0 & H_{14} \\ H_{\times} & -H_+ - \frac{1}{2}H_{\circ} & 0 & H_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{14} & H_{24} & 0 & H_{\circ} \end{pmatrix}, \quad (3.1.113)$$

где «крест» и «плюс» поляризации задаются стандартными выражениями [163]

$$H_+ = \frac{1}{2}(H_{11} - H_{22}), \quad H_{\times} = H_{12}, \quad (3.1.114)$$

а H_{\circ} является дополнительной «дышащей» поляризацией гравитационных волн [27]

$$H_{\circ} = \frac{2}{3}H_{44} - \frac{1}{3}(H_{11} + H_{22}). \quad (3.1.115)$$

Таким образом, наблюдатель на бране будет детектировать три поляризации – «крест» и «плюс» поляризации, а также «дышащую» моду [27]. Из уравнения девиации геодезических [27, 163] можно показать, что под действием «дышащей» моды кольцо из пробных масс, локализованных на бране в плоскости ортогональной направлению распространения гравитационной волны, будет равномерно сжиматься и растягиваться.

Поляризационные амплитуды произвольного симметричного тензора второго ранга \mathcal{A}_{ij} в поперечно-бесследовой калибровке для произвольного направления распространения гравитационной волны \mathbf{n} приведены в Приложении 3.

3.1.4. Динамика нерелятивистской двойной системы

В линейном приближении (3.1.103) частицы и скалярное поле распространяются в пространстве Минковского, а их уравнения движения (3.1.18) и (3.1.17) принимают вид

$${}_4\Box\varphi(x) = 4\pi \sum_{a=1}^2 g_a \int d\tau_a \delta^{(4)}(x - z_a), \quad (3.1.116)$$

$$(m_a + g_a\varphi(z_a)) \ddot{z}_a^\mu = -g_a \partial^\mu \varphi(z_a) - g_a \partial_\nu \varphi(z_a) \dot{z}_a^\nu \dot{z}_a^\mu, \quad (3.1.117)$$

где ${}_4\Box = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ – оператор Даламбера в четырехмерном пространстве Минковского. Мы считаем, что движение частиц полностью определяется их взаимодействием друг с другом через скалярное поле, задаваемое запаздывающим решением ур. (3.1.116), пренебрегая их гравитационным взаимодействием.

Далее мы будем вычислять гравитационное излучение нерелятивистской двойной системы. В этом случае ее уравнение движения (3.1.117) значительно упрощается. А именно, мы делаем следующие предположения о движении частиц:

- частицы являются нерелятивистскими $|\dot{\mathbf{z}}_a| \ll 1$;
- частицы достаточно удалены друг от друга $|\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1| \gg -g_1 g_2 / m_a, \forall a$;
- скалярное поле лишь определяет движение частиц и не излучается.

Тогда мы можем пренебречь в ур. (3.1.117) вкладами, пропорциональными квадрату скорости частиц $\propto \dot{z}_a \dot{z}_a$, и вкладами типа самодействия

$$\varphi(z_a) z_a = \varphi_b(z_a) z_a, \quad b \neq a, \quad (3.1.118)$$

где $\varphi_a(x)$ обозначает скалярное поле, создаваемое a -ой частицей. В свою очередь, скалярное поле a -ой частицы является Кулоновским полем [147]

$$\varphi_a(x) = -\frac{g_a}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}_a(t)|}, \quad (3.1.119)$$

где $t = x^0$ и мы пренебрегли запаздыванием поля. Таким образом, с учетом уравнений (3.1.118) и (3.1.119) и условия пространственной удаленности частиц мы можем пренебречь влиянием скалярного поля на массы частиц

$$(m_a + g_a\varphi_b(z_a)) \simeq m_a. \quad (3.1.120)$$

В результате, мы получаем простое уравнение движения нерелятивистских частиц

$$m_a \ddot{\mathbf{z}}_a = -g_a \nabla \varphi_b(\mathbf{z}_a), \quad (3.1.121)$$

где $\varphi_b(x)$ дается уравнением (3.1.119). Заметим, что такие четырехмерные уравнения движения допускают устойчивые эллиптические орбиты частиц [155].

В свою очередь, тензоры энергии-импульса частиц и скалярного поля в линейном приближении принимают вид

$$T_{\mu\nu}^P = \sum_{a=1}^2 m_a \int d\tau \dot{z}_{a\mu} \dot{z}_{a\nu} \delta^{(4)}(x - z_a) \delta(x^4), \quad (3.1.122)$$

$$T_{\mu\nu}^F = \frac{1}{4\pi} \delta_M^\mu \delta_N^\nu \left(\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \varphi \partial_\alpha \varphi \right) \delta(x^4). \quad (3.1.123)$$

В итоге, мы рассматриваем двойную систему нерелятивистских, пространственно удаленных друг от друга точечных частиц, движущихся внутри плоской браны и взаимодействующих друг с другом только через скалярное поле, локализованное на той же бране. Динамика двойной системы описывается ур. (3.1.121), а скалярные поля, создаваемые частицами, определяются ур. (3.1.119). Гравитационные волны, излучаемые такой двойной системой в пятимерный балк, являются решением пятимерного уравнения Даламбера (3.1.103) с тензором энергии-импульса материи на бране $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^P + T_{\mu\nu}^F$, заданным как сумма уравнений (3.1.122) и (3.1.123), содержащих дельта-функции с носителем на бране.

3.1.5. Гравитационные волны, генерируемые двойной системой

Гравитационные волны, генерируемые двойной системой, являются запаздывающим решением уравнения (3.1.103), построенным с помощью соответствующей функции Грина [58, 62, 68, 69]

$$\bar{H}_{MN}(x) = -2\kappa_5 \int d^5 x' T_{MN}(x') G_5(x - x'), \quad T_{MN} = \delta_M^\mu \delta_N^\nu T_{\mu\nu} \quad (3.1.124)$$

$$G_5(x) = \frac{\theta(t)}{2\pi^2} \left(\frac{1}{2} \frac{\theta(-x^2)}{(-x^2)^{3/2}} - \frac{\delta(-x^2)}{\sqrt{-x^2}} \right). \quad (3.1.125)$$

Как было указано ранее, функция Грина (3.1.125) локализована не только на световом конусе $x^2 = 0$, но и внутри него, что приводит к распространению запаздывающего гравитационного поля в пространстве со всеми скоростями вплоть до скорости света. Однако, далее мы демонстрируем, используя подход Рорлиха-Тейтельбойма к излучению, что производная запаздывающего поля содержит компоненту, распространяющуюся точно со скоростью света и представляющую собой излучаемую часть гравитационного поля.

Далее мы будем рассматривать вклады точечных частиц и скалярного поля в гравитационное поле по отдельности, разделяя (3.1.124) на два вклада

$$\bar{H}_{MN}(x) = \bar{H}_{MN}^P(x) + \bar{H}_{MN}^F(x). \quad (3.1.126)$$

Вклад точечных частиц вычисляется с помощью подхода Рорлиха-Тейтельбойма к излучению, а вклад скалярного поля рассчитывается с использованием подхода DIRE к пост-Ньютоновским разложениям (см., например, [167]).

3.1.6. ADD-модель с бесконечным радиусом компактификации

Покажем, что нашу модель можно интерпретировать как предельный случай ADD-модели [13] с бесконечным радиусом компактификации дополнительного измерения. Начнем с пятимерной ADD-модели с радиусом компактификации R . Скалярная запаздывающая функция Грина уравнения Даламбера в такой теории записывается как [101]

$$G_{\text{ADD}}(x; y) = -\frac{1}{2\pi R} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{im_n y} e^{ik_\alpha x^\alpha}}{k_\mu^2 + m_n^2}, \quad (3.1.127)$$

где y – координата вдоль дополнительного измерения, а $m_n = n/R$ – Калуца-Клейновские массы. Интегрируя по k^0 в соответствии с условием запаздывания, мы получаем

$$G_{\text{ADD}}(x; y) = -\frac{\theta(t)}{2\pi R} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\sin \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_n^2} t}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_n^2}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} e^{im_n y}. \quad (3.1.128)$$

Выполняя интегрирование по угловым переменным, мы находим

$$G_{\text{ADD}}(x; y) = \frac{\theta(t)}{4\pi^3 R r} \frac{\partial}{\partial r} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{im_n y} \int dk \cos kr \frac{\sin \sqrt{k^2 + m_n^2} t}{\sqrt{k^2 + m_n^2}}. \quad (3.1.129)$$

Вычисляя оставшийся интеграл [58, 150]

$$\int dk \cos kr \frac{\sin \sqrt{k^2 + m_n^2} t}{\sqrt{k^2 + m_n^2}} = \frac{\pi}{2} J_0(m_n \sqrt{t^2 - r^2}) (\theta(t - r) + \theta(t + r) - 1) \quad (3.1.130)$$

и дифференцируя по пространственному расстоянию, мы приходим к следующему выражению для функции Грина

$$\begin{aligned} G_{\text{ADD}}(x; y) &= \frac{\theta(t)\theta(t - r)}{8\pi^2 R} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{im_n y} \frac{m_n J_1(m_n \sqrt{t^2 - r^2})}{\sqrt{t^2 - r^2}} - \\ &- \frac{\theta(t)\delta(t - r)}{8\pi^2 R r} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{im_n y} J_0(m_n \sqrt{t^2 - r^2}). \end{aligned} \quad (3.1.131)$$

Два ряда по Калуца-Клейновским массам могут быть объединены в один с помощью следующих соотношений для произведений δ -функции и функции Хевисайда

$$\theta(t)\theta(t - r) = \theta(t)\theta(t^2 - r^2), \quad \frac{\theta(t)\delta(t - r)}{r} = 2\theta(t)\delta(t^2 - r^2). \quad (3.1.132)$$

В результате, запаздывающая функция Грина пятимерной ADD-модели принимает вид

$$G_{\text{ADD}}(x; y) = -\frac{1}{\sqrt{t^2 - r^2}} \frac{\partial}{\partial \sqrt{t^2 - r^2}} \left[\frac{\theta(t)\theta(t^2 - r^2)}{8\pi^2 R} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{im_n y} J_0(m_n \sqrt{t^2 - r^2}) \right]. \quad (3.1.133)$$

В пределе бесконечного радиуса компактификации $R \rightarrow \infty$ можно перейти к непрерывному спектру Калуца-Клейновских масс $m_n \rightarrow m \in \mathbb{R}$ и интегрировать по m

$$G_{\text{ADD}}^{R \rightarrow \infty}(x; y) = -\frac{1}{\sqrt{t^2 - r^2}} \frac{\partial}{\partial \sqrt{t^2 - r^2}} \left[\frac{\theta(t)\theta(t^2 - r^2)}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} dm \cos(my) J_0(m\sqrt{t^2 - r^2}) \right], \quad (3.1.134)$$

где мы учли, что функция Бесселя $J_0(x)$ является четной. Вычисляя полученный интеграл [150], мы приходим к функции Грина в виде

$$G_{\text{ADD}}^{R \rightarrow \infty}(x; y) = -\frac{1}{\sqrt{t^2 - r^2}} \frac{\partial}{\partial \sqrt{t^2 - r^2}} \frac{\theta(t)\theta(t^2 - r^2 - y^2)}{4\pi^2 \sqrt{t^2 - r^2 - y^2}}. \quad (3.1.135)$$

Наконец, после дифференцирования мы получаем выражение эквивалентное запаздывающей функции Грина уравнения Даламбера в пятимерном пространстве Минковского (3.1.125)

$$G_{\text{ADD}}^{R \rightarrow \infty}(x; y) = \frac{\theta(t)}{2\pi^2} \left[\frac{1}{2} \frac{\theta(t^2 - r^2 - y^2)}{(t^2 - r^2 - y^2)^{3/2}} - \frac{\delta(t^2 - r^2 - y^2)}{\sqrt{t^2 - r^2 - y^2}} \right]. \quad (3.1.136)$$

3.2. Вклад точечных частиц

Вклад частиц в гравитационное поле, создаваемое двойной системой, имеет вид

$$\bar{H}_{MN}^P(x) = -2\kappa_5 \int d^5 x' T_{MN}^P(x') G_5(x - x'), \quad (3.2.1)$$

где тензор энергии-импульса частиц и запаздывающая функция Грина даются уравнениями (3.1.122) и (3.1.125) соответственно. Так как тензор энергии-импульса частиц (3.1.122) дается суммой тензоров энергии-импульса отдельных частиц, удобно сначала вычислить гравитационное поле одной частицы, а затем взять сумму двух аналогичных вкладов.

Запаздывающее гравитационное поле точечной частицы с массой m , движущейся вдоль произвольной мировой линии $z^M(\tau)$, в соответствии с ур. (3.2.1) записывается как

$$\bar{H}_{AB}^P = \frac{m\kappa_5}{\pi^2} \int d\tau v_A v_B \theta(X^0) \left[\frac{\delta(-X^2)}{(-X^2)^{1/2}} - \frac{1}{2} \frac{\theta(-X^2)}{(-X^2)^{3/2}} \right]. \quad (3.2.2)$$

По аналогии со скалярным полем (1.5.15), его производная имеет вид

$$\partial_M \bar{H}_{AB}^P = -\frac{2m\kappa_5}{\pi^2} \int d\tau v_A v_B \theta(X^0) \left[\frac{3}{4} \frac{\theta(-X^2)}{(-X^2)^{5/2}} - \frac{\delta(-X^2)}{(-X^2)^{3/2}} + \frac{\delta'(-X^2)}{(-X^2)^{1/2}} \right] X_M. \quad (3.2.3)$$

Проинтегрируем член с производной δ -функции по частям с помощью соотношения (1.5.16). Также воспользуемся ур. (1.4.40) для преобразования произведения δ -функции и функции Хевисайда. В результате производная гравитационного поля принимает вид

$$\partial_M \bar{H}_{AB}^P = -\frac{m\kappa_5}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \left[3 \frac{v_A v_B X_M}{(-X^2)^{5/2}} - \frac{v_A v_B X_M}{\hat{\rho}(-X^2)^{3/2}} \delta(\tau - \hat{\tau}) - \frac{2a_{(A} v_{B)} X_M - v_A v_B v_M}{\hat{\rho} v X (-X^2)^{1/2}} \delta(\tau - \hat{\tau}) + \frac{v_A v_B X_M (aX + 1)}{\hat{\rho} (vX)^2 (-X^2)^{1/2}} \delta(\tau - \hat{\tau}) \right], \quad (3.2.4)$$

где $a^M = d^2 z^M / d\tau^2$ является 5-вектором ускорения частицы, и мы определяем симметризацию по двум индексам как $A_{(M} B_{N)} = \frac{1}{2}(A_M B_N + A_N B_M)$. Здесь в силу выбора расслоенной системы координат в балке мы можем работать с пятимерной мировой линией частицы, предполагая что $z^4(\tau) = 0$. Также мы ввели здесь обозначение $X^M = x^M - z^M$.

Мы выделяем излучаемую часть гравитационного поля (3.2.4) с помощью ур. (1.4.8), раскладывая подынтегральное выражение по обратным степеням Лоренц-инвариантного расстояния $\hat{\rho}$ (1.3.3). По аналогии со скалярным полем в Главе 1, она записывается как

$$\begin{aligned} [\partial_M \bar{H}_{AB}^P]^{\text{rad}} = & -\frac{m\kappa_5 \hat{c}_M}{2^{3/2} \pi^2 \hat{\rho}^{3/2}} \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \left[\frac{3}{4} \frac{v_A v_B}{(-Z\hat{c})^{5/2}} - \frac{1}{2} \frac{v_A v_B}{(-Z\hat{c})^{3/2}} \delta(\tau - \hat{\tau}) \right. \\ & \left. - \frac{2a_{(A} v_{B)}}{v\hat{c}(-Z\hat{c})^{1/2}} \delta(\tau - \hat{\tau}) + \frac{v_A v_B a\hat{c}}{(v\hat{c})^2 (-Z\hat{c})^{1/2}} \delta(\tau - \hat{\tau}) \right]. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Вклады, содержащие δ -функции, преобразуются по аналогии с ур. (1.5.19) и (1.5.20) как

$$\int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \frac{1}{2} \frac{v_A v_B}{(-Z\hat{c})^{3/2}} \delta(\tau - \hat{\tau}) = \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \frac{3}{4} \frac{\hat{v}_A \hat{v}_B}{(\hat{\tau} - \tau)^{5/2}}, \quad (3.2.6)$$

$$\int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \frac{2a_{(A} v_{B)}}{(v\hat{c})(-Z\hat{c})^{1/2}} \delta(\tau - \hat{\tau}) = - \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \frac{\hat{a}_{(A} \hat{v}_{B)}}{(\hat{\tau} - \tau)^{3/2}}, \quad (3.2.7)$$

$$\int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \frac{v_A v_B (a\hat{c})}{(v\hat{c})^2 (-Z\hat{c})^{1/2}} \delta(\tau - \hat{\tau}) = \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \frac{1}{2} \frac{\hat{v}_A \hat{v}_B (\hat{a}\hat{c})}{(\hat{\tau} - \tau)^{3/2}}. \quad (3.2.8)$$

В результате, излучаемая часть запаздывающего гравитационного поля точечной частицы принимает вид

$$[\partial_M \bar{H}_{AB}^P]^{\text{rad}} = -\frac{m\kappa_5 \hat{c}_M}{2^{5/2} \pi^2 \hat{\rho}^{3/2}} \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \left[\frac{3}{2} \frac{v_A v_B}{(-Z\hat{c})^{5/2}} - \frac{3}{2} \frac{\hat{v}_A \hat{v}_B}{(\hat{\tau} - \tau)^{5/2}} + \frac{2\hat{a}_{(A} \hat{v}_{B)} + \hat{v}_A \hat{v}_B \hat{a}\hat{c}}{(\hat{\tau} - \tau)^{3/2}} \right]. \quad (3.2.9)$$

Заметим, что по аналогии с пятимерным скалярным полем (1.5.21) вся физическая информация о гравитационном поле в волновой зоне содержится в первом члене подынтегрального выражения в ур. (3.2.9), а остальные члены лишь сокращают расходимости, содержащиеся в первом члене на верхнем пределе интегрирования. Также, как и в случае скалярного поля, излучаемая часть пятимерного гравитационного поля зависит от полной истории движения частицы, предшествующей запаздывающему времени $\hat{\tau}$.

3.2.1. Гравитационное излучение нерелятивистской частицы

Перейдем теперь к вычислению гравитационного излучения нерелятивистской частицы. По аналогии со скалярным полем в Главе 1, мы предполагаем, что: (а) частица является нерелятивистской $|\mathbf{v}| \ll 1, \forall \tau$; (б) она движется внутри ограниченной области пространства $|\mathbf{z}| \leq d, \forall \tau$; (в) точка наблюдения находится на удалении от этой области $d \ll r$. Нас интересуют лишь пространственные компоненты возмущений метрики

$$[\partial_M \bar{H}_{ij}^P]^{\text{rad}} = -\frac{m\kappa_5 \hat{c}_M}{2^{5/2} \pi^2 \hat{\rho}^{3/2}} \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \left[\frac{3}{2} \frac{v_i v_j}{(-Z\hat{c})^{5/2}} - \frac{3}{2} \frac{\hat{v}_i \hat{v}_j}{(\hat{\tau} - \tau)^{5/2}} + \frac{2\hat{a}_{(i} \hat{v}_{j)} + \hat{v}_i \hat{v}_j \hat{a}\hat{c}}{(\hat{\tau} - \tau)^{3/2}} \right], \quad (3.2.10)$$

так как лишь они дают вклад в эффективный тензор энергии-импульса гравитационного поля (3.1.108).

По аналогии со скалярным полем, используя разложения запаздывающих ковариантных величин (1.4.13–1.4.15) и вводя пространственно-подобный вектор $\mathbf{s}(t')$, определяемый уравнением (1.4.17) (здесь мы заменили собственное время на координатное), получаем нерелятивистское приближение для излучаемой части гравитационного поля с точностью до ведущего порядка малости по $|\mathbf{z}|/r$, $|\mathbf{v}|$, $|\mathbf{s}| \ll 1$ в виде

$$[\partial_M \bar{H}_{ij}^{\text{P}}]^{\text{rad}} = -\frac{m\kappa_5 \bar{c}_M}{2^{5/2} \pi^2 r^{3/2}} \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \left[\frac{15}{4} v_i v_j \frac{\mathbf{ns} - \mathbf{n}\bar{\mathbf{v}}}{(\bar{t} - t')^{5/2}} + \frac{3}{2} \frac{v_i v_j}{(\bar{t} - t')^{5/2}} - \frac{3}{2} \frac{\bar{v}_i \bar{v}_j}{(\bar{t} - t')^{5/2}} + \frac{2\bar{a}_{(i} \bar{v}_{j)} + \bar{v}_i \bar{v}_j \mathbf{n}\bar{\mathbf{a}}}{(\bar{t} - t')^{3/2}} \right]. \quad (3.2.11)$$

Здесь вся информация о гравитационном поле в волновой зоне содержится в первых двух слагаемых подынтегрального выражения, а оставшиеся два члена лишь сокращают содержащиеся в них расходимости на верхнем пределе интегрирования.

Чтобы сделать сходимость интеграла (3.2.11) явной, по аналогии со скалярным полем нужно проинтегрировать первые два члена подынтегральной функции по частям, уменьшая степени знаменателей до $1/2$. Подробное обсуждение этого интегрирования вынесено в Приложение 4, а здесь мы лишь приводим результат, остающийся после взаимного сокращения расходимостей

$$(\partial_M \bar{H}_{ij}^{\text{P}})^{\text{rad}} = -\frac{m\kappa_5 \bar{c}_M}{2^{5/2} \pi^2 r^{3/2}} \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \left[2v_i v_j \frac{\mathbf{n}\dot{\mathbf{a}}}{(\bar{t} - t')^{1/2}} + 12a_{(i} v_{j)} \frac{\mathbf{na}}{(\bar{t} - t')^{1/2}} + (\dot{a}_i v_j + 2a_i \dot{a}_j + v_i \dot{a}_j) \frac{6\mathbf{nv} - 5\mathbf{n}\bar{\mathbf{v}} + 2}{(\bar{t} - t')^{1/2}} - 2(\ddot{a}_i v_j + 3\dot{a}_i \dot{a}_j + 3a_i \ddot{a}_j + v_i \ddot{a}_j) \frac{\mathbf{n}\bar{\mathbf{z}} - \mathbf{nz}}{(\bar{t} - t')^{1/2}} \right]. \quad (3.2.12)$$

Заметим, что в нерелятивистском приближении все члены подынтегрального выражения в ур. (3.2.12) имеют различный порядок малости, так как в нерелятивистском приближении все кинематические характеристики частицы по порядку величины совпадают с ее скоростью $d^n z^i / dt^n \sim |\mathbf{v}| \ll 1$, как было показано в Главе 1. В результате, в нерелятивистском пределе только один член подынтегрального выражения в ур. (3.2.12) дает ведущий вклад в излучаемую часть гравитационного поля

$$[\partial_M \bar{H}_{ij}^{\text{P}}]^{\text{rad}} = -\frac{m\kappa_5 \bar{c}_M}{2^{3/2} \pi^2 r^{3/2}} \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \frac{\dot{a}_i v_j + 2a_i \dot{a}_j + v_i \dot{a}_j}{(\bar{t} - t')^{1/2}}. \quad (3.2.13)$$

3.2.2. Гравитационное излучение двойной системы

Получив нерелятивистское приближение для гравитационного поля отдельной частицы (3.2.13), рассмотрим случай нерелятивистской двойной системы. Без ограничения общности

все предыдущие расчеты можно было провести в системе центра масс частиц

$$\mathbf{x}_{\text{CM}} = \frac{m_1 \mathbf{z}_1 + m_2 \mathbf{z}_2}{M} = 0, \quad M = m_1 + m_2. \quad (3.2.14)$$

В этой системе отсчета координаты частиц переписываются через относительную координату $\mathbf{z} = \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1$ как [155]

$$\mathbf{z}_1 = -\frac{m_2}{M} \mathbf{z}, \quad \mathbf{z}_2 = \frac{m_1}{M} \mathbf{z}. \quad (3.2.15)$$

В итоге, в системе центра масс суперпозиция гравитационных полей отдельных частиц, образующих двойную систему, дается интегралом (3.2.13), вычисленным на относительных координатах частиц

$$[\partial_M \bar{H}_{ij}^{\text{P}}]^{\text{rad}} = -\frac{\mu \kappa_5 \bar{c}_M}{2^{3/2} \pi^2 r^{3/2}} \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \frac{\dot{a}_i v_j + 2a_i \dot{a}_j + v_i \dot{a}_j}{(\bar{t} - t')^{1/2}}, \quad (3.2.16)$$

где $\mu = m_1 m_2 / M$ – приведенная масса системы. В результате, вклад точечных частиц в гравитационное излучение нерелятивистской двойной системы дается уравнением (3.2.16).

3.3. Вклад скалярного поля

По аналогии с ур. (3.2.1), вклад скалярного поля в гравитационное излучение двойной системы записывается как

$$\bar{H}_{MN}^{\text{F}}(x) = -2\kappa_5 \int d^5 x' T_{MN}^{\text{F}}(x') G_{\text{ret}}^{4+1}(x - x'), \quad (3.3.1)$$

где тензор энергии-импульса скалярного поля дается ур. (3.1.123), а запаздывающая функция Грина определяется ур. (3.1.125).

Напомним, что в эффективном тензоре энергии-импульса гравитационного поля (3.1.108) участвуют лишь пространственные компоненты возмущений метрики в поперечно-бесследовой калибровке, а также что поперечно-бесследовый проектор (3.1.111) имеет нулевой след по обоим парам индексов. В результате, за счет этого при вычислении вклада скалярного поля в поток энергии гравитационного излучения мы можем отбросить второе слагаемое в тензоре энергии-импульса скалярного поля T_{ij}^{F} , пропорциональное δ -символу Кронекера. Таким образом, тензор энергии-импульса скалярного поля эффективно сводится к

$$T_{ij}^{\text{F}} = \frac{1}{4\pi} \partial_i \varphi \partial_j \varphi \delta(x^4). \quad (3.3.2)$$

Воспользуемся также условием отсутствия скалярного излучения. На основании этого мы опускаем члены типа собственной энергии в тензоре энергии-импульса скалярного поля

$$T_{ij}^{\text{F}} = \frac{1}{4\pi} \partial_i \varphi_1 \partial_j \varphi_2 \delta(x^4) + (i \leftrightarrow j), \quad (3.3.3)$$

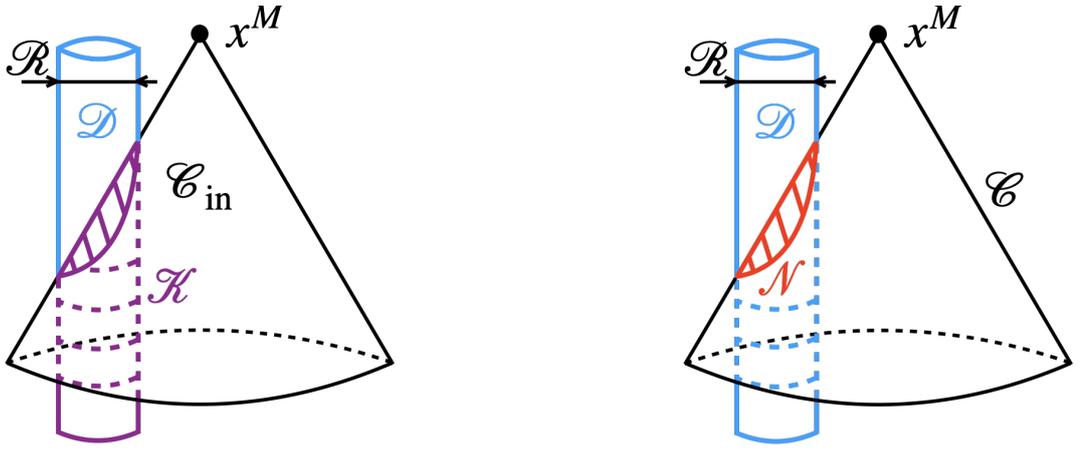


Рис. 3.3. Разделение пространства-времени на ближнюю зону и зону излучения. Область определения хвостового интеграла \mathcal{C}_{in} и ее пересечение с ближней зоной \mathcal{K} (рисунок слева). Область определения конусного интеграла \mathcal{C} и ее пересечение с ближней зоной \mathcal{N} (рисунок справа).

оставляя только вклады типа взаимодействия. Таким образом, мы получаем вклад скалярного поля в гравитационное излучение двойной системы в виде

$$\bar{H}_{ij}^{\text{F}}(x) = J_{ij}(x) + (i \leftrightarrow j), \quad (3.3.4)$$

$$J_{ij}(x) = -\frac{\kappa_5}{2\pi} \int d^5 x' \partial'_i \varphi_1(x') \partial'_j \varphi_2(x') G_{\text{ret}}^5(x - x') \delta(x'^4). \quad (3.3.5)$$

Далее мы вычисляем интеграл $J_{ij}(x)$ и симметризуем полученный результат по индексам, чтобы найти гравитационное излучение, создаваемое скалярным полем.

Учитывая структуру запаздывающей функции Грина (3.1.125), мы разбиваем интеграл $J_{ij}(x)$ на два слагаемых с разными геометрическими интерпретациями

$$J_{ij}(x) = J_{ij}^{\text{T}}(x) + J_{ij}^{\text{C}}(x), \quad (3.3.6)$$

$$J_{ij}^{\text{T}}(x) = -\frac{\kappa_5}{8\pi^3} \int d^5 x' T_{ij}(x') \theta(X^0) \theta(-X^2) \delta(x'^4), \quad (3.3.7)$$

$$J_{ij}^{\text{C}}(x) = \frac{\kappa_5}{4\pi^3} \int d^5 x' C_{ij}(x') \theta(X^0) \delta(-X^2) \delta(x'^4), \quad (3.3.8)$$

где мы ввели вектор $X^M = x^M - x'^M$. Хвостовой интеграл (3.3.7) соответствует интегрированию тензора

$$T_{ij}(x') = \frac{\partial'_i \varphi_1(x') \partial'_j \varphi_2(x')}{(-X^2)^{3/2}} \quad (3.3.9)$$

по пересечению светового конуса прошлого с вершиной в точке наблюдения x^M и его внутренней части с гиперповерхностью $x'^4 = 0$. Соответствующая область интегрирования обозначается как \mathcal{C}_{in} , см. рис. (3.3). Аналогично, конусный интеграл (3.3.8) соответствует интегрированию тензора

$$C_{ij}(x') = \frac{\partial'_i \varphi_1(x') \partial'_j \varphi_2(x')}{(-X^2)^{1/2}} \quad (3.3.10)$$

по пересечению данного светового конуса с гиперповерхностью $x'^4 = 0$. Эта область интегрирования обозначается как \mathcal{C} , см. рис. (3.3). Далее мы покажем, что по аналогии с вкладом точечных частиц хвостовой интеграл содержит всю информацию о гравитационном поле в волновой зоне, а конусный интеграл является лишь контрчленом, сокращающимся содержащимся в хвостовом интеграле расходимости на световом конусе.

3.3.1. Разделение пространства-времени – ближняя зона и зона излучения

В дальнейших расчетах мы используем подход DIRE к пост-Ньютоновским разложениям в четырехмерной ОТО [167] (см. также сборник формул в [168, 169]), ограничиваясь лишь вычислением вкладов ведущего порядка. Так как этот подход основан на разделении пространства-времени на зоны, дающие вклады разного порядка в гравитационное поле, то кратко напомним их определения.

Будем работать в системе центра масс двойной системы (3.2.14) и обозначим ее характерный размер как \mathcal{S} . Тогда *зона источника* \mathcal{T} определяется как мировая трубка, охватывающая область движения частиц

$$\mathcal{T} = \{x^M | r < \mathcal{S}; -\infty < x^0 < +\infty\}. \quad (3.3.11)$$

Очевидно, что вне зоны источника \mathcal{T} тензор энергии-импульса частиц обращается в нуль $T_{MN}^P = 0$. В системе центра масс начало координат лежит внутри \mathcal{T} .

Мы предполагаем, что нерелятивистские частицы движутся с характерной скоростью $v \ll 1$, определяющей характерную длину гравитационных волн $\lambda_{\text{GW}} \sim \mathcal{S}/v \gg \mathcal{S}$, генерируемых системой. Тогда *ближняя зона* \mathcal{D} определяется как мировая трубка радиуса $\mathcal{R} = \mathcal{S}/v$ порядка длины волны гравитационного излучения

$$\mathcal{D} = \{x^M | r < \mathcal{R}; -\infty < x^0 < +\infty\}, \quad (3.3.12)$$

см. рис. (3.3). Внутри \mathcal{D} мы рассматриваем гравитационное и скалярное поля как мгновенные функции координат частиц, т.е. пренебрегаем запаздыванием полей внутри ближней зоны. Наконец, *зона излучения* определяется как область, внешняя по отношению к ближней зоне, $r > \mathcal{R}$. Поскольку нас интересует гравитационное излучение системы, предполагается, что точка наблюдения находится в зоне излучения $|\mathbf{x}| \gg \mathcal{R}$.

Основываясь на введенных выше пространственно-временных зонах, мы разделяем области интегрирования для конусного и хвостового интегралов. Пересечение ближней зоны с областью определения хвостового интеграла обозначим как $\mathcal{K} = \mathcal{C}_{\text{in}} \cap \mathcal{D}$, см. рис. (3.3).

Аналогично, пересечение ближней зоны с областью определения конусного интеграла обозначается как $\mathcal{N} = \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, см. рис. (3.3). Тогда ур. (3.3.7) и (3.3.8) разделяются на интегралы по ближней зоне и зоне излучения

$$J_{ij}^{\Gamma}(x) = -\frac{\kappa_5}{8\pi^3} \int_{\mathcal{K}} d^5x' T_{ij}(x') - \frac{\kappa_5}{8\pi^3} \int_{\mathcal{C}_{\text{in}} \setminus \mathcal{K}} d^5x' T_{ij}(x'), \quad (3.3.13)$$

$$J_{ij}^{\mathcal{C}}(x) = \frac{\kappa_5}{4\pi^3} \int_{\mathcal{N}} d^5x' C_{ij}(x') + \frac{\kappa_5}{4\pi^3} \int_{\mathcal{C} \setminus \mathcal{N}} d^5x' C_{ij}(x'). \quad (3.3.14)$$

При этом, поскольку мы считаем частицы нерелятивистскими и нас интересуют лишь ведущие вклады в хвостовой и конусный интегралы, мы предполагаем, что радиус ближней зоны \mathcal{R} настолько велик, что тензор энергии-импульса скалярного поля T_{ij}^{F} исчезающе мал в зоне излучения. Таким образом, хвостовой и конусный интегралы сводятся к

$$J_{ij}^{\Gamma}(x) = -\frac{\kappa_5}{8\pi^3} \int_{\mathcal{K}} d^5x' T_{ij}(x'), \quad J_{ij}^{\mathcal{C}}(x) = \frac{\kappa_5}{4\pi^3} \int_{\mathcal{N}} d^5x' C_{ij}(x'). \quad (3.3.15)$$

Кроме того, на основе приведенных выше рассуждений мы предполагаем, что граничные члены, возникающие в результате интегрирования по частям пространственных интегралов в (3.3.15), определяются областями $|\mathbf{x}'| \sim \mathcal{R}$ и, следовательно, пренебрежимо малы. Аналогично, мы пренебрегаем в полученных интегралах вкладом пропорциональными \mathcal{R}^{-n} , $n > 0$.

3.3.2. Хвостовой интеграл

Начнем с вычисления хвостового интеграла (3.3.15) и его вклада в излучаемую часть гравитационного поля. Восстанавливая его явный вид, приходим к

$$J_{ij}^{\Gamma}(x) = -\frac{\kappa_5}{8\pi^3} \int_{\mathcal{K}} d^4x' \partial'_i \varphi_1(x') \partial'_j \varphi_2(x') \theta(X^0) \frac{\theta(-X^2)}{(-X^2)^{3/2}} \Big|_{x'^4=0}, \quad (3.3.16)$$

где индекс \mathcal{K} означает, что мы ограничиваем область интегрирования ближней зоной, и мы совершили интегрирование по x'^4 -координате с помощью δ -функции.

Функции Хевисайда в ур. (3.3.16) определяют следующую область интегрирования по временной координате

$$t' \leq t - \sqrt{(\vec{x} - \vec{x}')^2 + (x^4)^2} = t_{\text{ret}}(\vec{x}'), \quad (3.3.17)$$

где $t = x^0$, и мы обозначили координаты на бране как \vec{x} . Разделив пространственный и временной интегралы, переписываем хвостовой интеграл в виде

$$J_{ij}^{\Gamma}(x) = -\frac{\kappa_5}{8\pi^3} \int_{\mathcal{K}} d^3x' \int_{-\infty}^{t_{\text{ret}}} dt' \frac{\partial'_i \varphi_1(x') \partial'_j \varphi_2(x')}{[(t - t')^2 - (\vec{x} - \vec{x}')^2 - (x^4)^2]^{3/2}}. \quad (3.3.18)$$

Заметим, что для точки наблюдения в зоне излучения $|\vec{x}'| \leq \mathcal{R} \ll r$. Тогда, раскладывая запаздывающее время (3.3.17) и знаменатель в ур. (3.3.18) с точностью до ведущего порядка

по малому параметру $|\vec{x}'|/r \ll 1$ как

$$t_{\text{ret}}(\vec{x}') \simeq \bar{t} + \vec{x}\vec{x}'/r, \quad (3.3.19)$$

$$(t - t')^2 - (\vec{x} - \vec{x}')^2 - (x^4)^2 \simeq (t - t')^2 - r^2 + 2\vec{x}\vec{x}', \quad (3.3.20)$$

мы приходим к хвостовому интегралу в виде

$$J_{ij}^{\Gamma}(x) = -\frac{\kappa_5}{8\pi^3} \int_{\mathcal{K}} d^3x' \int_{-\infty}^{\bar{t} + \vec{x}\vec{x}'/r} dt' \frac{\partial'_i \varphi_1(x') \partial'_j \varphi_2(x')}{[(t - t')^2 - r^2 + 2\vec{x}\vec{x}']^{3/2}}. \quad (3.3.21)$$

Так как нас интересуют лишь ведущие вклады в хвостовой и конусный интегралы, мы раскладываем интеграл по времени в ур. (3.3.21) с точностью до ведущего вклада по $|\vec{x}'|/r$, получая

$$J_{ij}^{\Gamma}(x) = -\frac{\kappa_5}{8\pi^3} \int_{\mathcal{K}} d^3x' \left[\int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \frac{\partial'_i \varphi_1(x') \partial'_j \varphi_2(x')}{[(t - t')^2 - r^2]^{3/2}} + \mathcal{O}\left(\frac{\vec{x}'}{r}\right) \right]. \quad (3.3.22)$$

В результате в уравнении (3.3.22) пространственный и временной интегралы расцепляются, и мы можем вычислить их независимо.

Чтобы преобразовать ур. (3.3.22) к виду, аналогичному вкладу точечных частиц (3.2.16), вычислим пространственный интеграл. Для этого интегрируем по частям

$$J_{ij}^{\Gamma}(x) = \frac{\kappa_5}{8\pi^3} \int_{\mathcal{K}} d^3x' \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \frac{\varphi_1(x') \partial'_i \partial'_j \varphi_2(x')}{[(t - t')^2 - r^2]^{3/2}}, \quad (3.3.23)$$

опуская, как обсуждалось выше, граничные члены. Учитывая, что внутри \mathcal{K} запаздывание полей пренебрежимо мало, скалярные поля определяются ур. (3.1.119), и полученный интеграл легко вычисляется с использованием методов, разработанных в подходе DIRE. Подробное вычисление мы выносим в приложение 5, а здесь лишь приводим конечный результат

$$\int_{\mathcal{K}} d^3x' \varphi_1(x') \partial'_i \partial'_j \varphi_2(x') = -\pi\mu [a_i(t') z_j(t') + z_i(t') a_j(t')], \quad (3.3.24)$$

выраженный через относительную координату двойной системы $z_i(t')$, где μ является ее приведенной массой. Таким образом, хвостовой интеграл принимает вид

$$J_{ij}^{\Gamma}(x) = -\frac{\mu\kappa_5}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \frac{a_i z_j + z_i a_j}{[(t - t')^2 - r^2]^{3/2}}. \quad (3.3.25)$$

Преобразуем знаменатель в ур. (3.3.25), переписывая время наблюдения t через запаздывающее время $t = \bar{t} + r$, в следующем виде

$$J_{ij}^{\Gamma}(x) = -\frac{\mu\kappa_5}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \frac{a_i z_j + z_i a_j}{(\bar{t} - t')^{3/2} [\bar{t} - t' + 2r]^{3/2}}. \quad (3.3.26)$$

Очевидно, что основной вклад в этот интеграл вносит малая окрестность запаздывающего времени $\bar{t} - t' \ll 2r$. Поэтому ведущий вклад в хвостовой интеграл имеет вид

$$J_{ij}^{\Gamma}(x) = -\frac{\mu\kappa_5}{2^{9/2}\pi^2 r^{3/2}} \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \frac{a_i z_j + z_i a_j}{(\bar{t} - t')^{3/2}} \quad (3.3.27)$$

аналогичный вкладу точечных частиц в гравитационное поле двойной системы (3.2.16). Заметим, что полученный интеграл расходится на верхнем пределе интегрирования.

3.3.3. Конусный интеграл

Перейдем теперь к вычислению конусного интеграла (3.3.15), который в явном виде записывается как

$$J_{ij}^C(x) = \frac{\kappa_5}{4\pi^3} \int_{\mathcal{N}} d^4x' \partial'_i \varphi_1(x') \partial'_j \varphi_2(x') \theta(X^0) \frac{\delta(-X^2)}{(-X^2)^{1/2}} \Big|_{x'^4=0}, \quad (3.3.28)$$

где мы совершили интегрирование по x'^4 -координате с помощью δ -функции. Представим произведение δ -функции и функции Хевисайда в виде

$$\theta(X^0) \delta(-X^2) \Big|_{x'^4=0} = \frac{\delta(t' - t_{\text{ret}})}{2\sqrt{(\vec{x} - \vec{x}')^2 + (x^4)^2}}, \quad (3.3.29)$$

где t_{ret} – запаздывающее время (3.3.17). Тогда конусный интеграл запишется как

$$J_{ij}^C(x) = \frac{\kappa_5}{8\pi^3} \int_{\mathcal{N}} d^3x' \int dt' \frac{\partial'_i \varphi_1(x') \partial'_j \varphi_2(x') \delta(t' - t_{\text{ret}})}{\sqrt{(\vec{x} - \vec{x}')^2 + (x^4)^2} \sqrt{(t - t')^2 - (\vec{x} - \vec{x}')^2 - (x^4)^2}}. \quad (3.3.30)$$

По аналогии с хвостовым интегралом раскладываем ур. (3.3.30) по малому параметру $|\vec{x}'|/r \ll 1$, сохраняя лишь ведущий вклад

$$J_{ij}^C(x) = \frac{\kappa_5}{8\pi^3 r} \int_{\mathcal{N}} d^3x' \int dt' \frac{\partial'_i \varphi_1(x') \partial'_j \varphi_2(x') \delta(t' - \bar{t})}{\sqrt{(t - t')^2 - r^2}}, \quad (3.3.31)$$

в котором пространственный и временной интегралы расцепляются.

Пространственный интеграл в ур. (3.3.31) эквивалентен пространственному интегралу, полученному при вычислении хвостового интеграла, и дается уравнением (3.3.24). Таким образом, конусный интеграл записывается как

$$J_{ij}^C(x) = \frac{\mu\kappa_5}{8\pi^2 r} \int dt' \frac{a_i z_j + z_i a_j}{\sqrt{(t - t')^2 - r^2}} \delta(t' - \bar{t}), \quad (3.3.32)$$

где $z^i(t')$ – относительная координата двойной системы. Переписывая координатное время через запаздывающее $t = \bar{t} + r$ и учитывая, что в силу наличия δ -функции ведущий вклад в интеграл (3.3.32) вносит точка $t' = \bar{t}$, преобразуем знаменатель подынтегральной функции по аналогии с ур. (3.3.27)

$$J_{ij}^C(x) = \frac{\mu\kappa_5}{2^{7/2} \pi^2 r^{3/2}} \int dt' \frac{a_i z_j + z_i a_j}{(\bar{t} - t')^{1/2}} \delta(t' - \bar{t}). \quad (3.3.33)$$

Преобразовывая ур. (3.3.33) по аналогии с ур. (1.5.19) и (1.5.20), приходим к конусному интегралу в виде

$$J_{ij}^C(x) = \frac{\mu\kappa_5}{2^{9/2} \pi^2 r^{3/2}} \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \frac{\bar{a}_i \bar{z}_j + \bar{z}_i \bar{a}_j}{(\bar{t} - t')^{3/2}}. \quad (3.3.34)$$

Очевидно, что по аналогии со вкладом точечных частиц конусный интеграл (3.3.34) представляет собой лишь контрчлен, сокращающий расходимость, содержащуюся в хвостовом интеграле (3.3.27) на верхнем пределе интегрирования.

3.3.4. Излучаемая часть гравитационного поля

Объединяя ур. (3.3.27) и (3.3.34), с учетом ур. (3.3.4) мы находим вклад скалярного поля в гравитационное излучение двойной системы

$$\bar{H}_{ij}^F(x) = -\frac{\mu\kappa_5}{2^{7/2}\pi^2 r^{3/2}} \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \left[\frac{a_i z_j + z_i a_j}{(\bar{t} - t')^{3/2}} - \frac{\bar{a}_i \bar{z}_j + \bar{z}_i \bar{a}_j}{(\bar{t} - t')^{3/2}} \right]. \quad (3.3.35)$$

В соответствии с подходом Рорлиха-Тейтельбойма, нам необходимо найти излучаемую часть производной гравитационного поля. Заметим, что вся зависимость ур. (3.3.35) от точки наблюдения содержится в префакторе, пропорциональном обратному расстоянию $1/r$, и в запаздывающем времени \bar{t} . Дифференцирование префактора увеличивает скорость затухания поля и, таким образом, не дает вклада в излучаемую часть. Кроме того, дифференцирование верхнего предела интегрирования, содержащего запаздывающее время, дает сумму двух расходящихся членов, которые компенсируют друг друга и, следовательно, также не вносят вклада в гравитационное излучение. Поэтому излучаемая часть гравитационного поля, создаваемая натяжениями скалярного поля, имеет вид

$$[\partial_M \bar{H}_{ij}^F]^{\text{rad}} = \frac{\mu\kappa_5 (\partial_M \bar{t})^{\text{rad}}}{2^{7/2}\pi^2 r^{3/2}} \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \left[\frac{3}{2} \frac{a_i z_j + z_i a_j}{(\bar{t} - t')^{5/2}} - \frac{3}{2} \frac{\bar{a}_i \bar{z}_j + \bar{z}_i \bar{a}_j}{(\bar{t} - t')^{5/2}} + \frac{\bar{a}_i \bar{z}_j + \bar{a}_i \bar{v}_j + \bar{v}_i \bar{a}_j + \bar{z}_i \bar{a}_j}{(\bar{t} - t')^{3/2}} \right]. \quad (3.3.36)$$

По аналогии с вкладом точечных частиц первое слагаемое в ур. (3.3.36) содержит всю физическую информацию о гравитационном поле в волновой зоне, а два оставшихся члена являются лишь контрчленами, сокращающими расходимости, содержащиеся в первом члене на верхнем пределе интегрирования. Чтобы сделать сходимость интеграла (3.3.36) явной, введем регуляризующий параметр $\epsilon \rightarrow +0$ в верхний предел интегрирования $\bar{t} \rightarrow \bar{t} - \epsilon$ и дважды проинтегрируем первое слагаемое по частям, приходя к

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\bar{t}-\epsilon} dt' \frac{a_i z_j + z_i a_j}{(\bar{t} - t')^{5/2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\bar{a}_i \bar{z}_j + \bar{z}_i \bar{a}_j}{\epsilon^{3/2}} - 2 \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\bar{a}_i \bar{z}_j + \bar{a}_i \bar{v}_j + \bar{v}_i \bar{a}_j + \bar{z}_i \bar{a}_j}{\epsilon^{1/2}} + 2 \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \frac{\ddot{a}_i z_j + 2\dot{a}_i v_j + 2a_i \dot{a}_j + 2v_i \dot{a}_j + z_i \ddot{a}_j}{(\bar{t} - t')^{1/2}}. \quad (3.3.37)$$

Первые два расходящихся члена в ур. (3.3.37) компенсируются двумя последними членами в интеграле (3.3.36), оставляя лишь сходящийся интеграл.

Наконец, производная запаздывающего времени \bar{t} имеет простой вид

$$(\partial_M \bar{t})^{\text{rad}} = \partial_M \bar{t} = -\bar{c}_M. \quad (3.3.38)$$

Таким образом, излучаемая часть гравитационного поля, определяемая вкладом натяжений скалярного поля, связывающего двойную систему, принимает вид

$$[\partial_M \bar{H}_{ij}^{\text{F}}]^{\text{rad}} = -\frac{\mu \kappa_5 \bar{c}_M}{2^{5/2} \pi^2 r^{3/2}} \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \frac{\ddot{a}_i z_j + 2\dot{a}_i v_j + 2a_i a_j + 2v_i \dot{a}_j + z_i \ddot{a}_j}{(\bar{t} - t')^{1/2}}, \quad (3.3.39)$$

аналогичный излучаемой части гравитационного поля точечных частиц (3.2.16).

3.4. Пятимерная квадрупольная формула

Вычислив вклады частиц и скалярного поля в излучаемую часть гравитационного поля, перейдем теперь к вычислению полной мощности гравитационного излучения двойной системы. Основываясь на полученной квадрупольной формуле для мощности гравитационного излучения двойной системы на бране, изучим также эволюцию ее орбиты под действием гравитационного излучения в пятимерный балк.

3.4.1. Излучаемая часть полного гравитационного поля

Объединяя ур. (3.2.16) и (3.3.39), мы приходим к излучаемой части полного гравитационного поля двойной системы

$$[\partial_M \bar{H}_{ij}]^{\text{rad}} = -\frac{\mu \kappa_5 \bar{c}_M}{2^{5/2} \pi^2 r^{3/2}} \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \frac{\ddot{a}_i z_j + 4\dot{a}_i v_j + 6a_i a_j + 4v_i \dot{a}_j + z_i \ddot{a}_j}{(\bar{t} - t')^{1/2}}. \quad (3.4.1)$$

Переписывая числитель в ур. (3.4.1) как

$$\ddot{a}_i z_j + 4\dot{a}_i v_j + 6a_i a_j + 4v_i \dot{a}_j + z_i \ddot{a}_j = \partial_t^4 (z_i z_j), \quad (3.4.2)$$

мы приходим к следующему выражению

$$(\partial_M \bar{H}_{ij})^{\text{rad}} = -\frac{\mu \kappa_5 \bar{c}_M}{2^{5/2} \pi^2 r^{3/2}} \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \frac{\partial_t^4 (z_i z_j)}{(\bar{t} - t')^{1/2}}. \quad (3.4.3)$$

Так как мы рассматриваем нерелятивистские частицы, то мы определяем по аналогии с четырехмерной теорией [163] второй момент массы системы как

$$M^{ij} = \sum_{a=1}^2 m_a \int d^4 x x^i x^j \delta^{(4)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}_a) = \sum_{a=1}^2 m_a z_a^i z_a^j. \quad (3.4.4)$$

В системе центра масс (3.2.14) он принимает простой вид

$$M_{ij} = \mu z_i z_j, \quad (3.4.5)$$

где z^i – относительная координата двойной системы (3.2.15), а μ – ее приведенная масса. В результате, излучаемая часть полного гравитационного поля записывается как

$$[\partial_M \bar{H}_{ij}]^{\text{rad}} = -\frac{\kappa_5 \bar{c}_M}{2^{5/2} \pi^2 r^{3/2}} \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \frac{\ddot{M}_{ij}}{(\bar{t} - t')^{1/2}}. \quad (3.4.6)$$

Таким образом, по аналогии с гравитационным излучением в четырехмерной теории [163], пятимерное гравитационное излучение нерелятивистской двойной системы определяется её вторым моментом массы. Более того, так как нас интересует излучаемая часть гравитационного поля в поперечно-бесследовой калибровке (3.1.112), то с учетом нулевых следов проектора (3.1.111) мы можем заменить второй момент массы системы на ее квадрупольный момент

$$Q_{ij} = M_{ij} - \frac{1}{4} \delta_{ij} M_{kk}, \quad (3.4.7)$$

приходя к излучаемой части полного гравитационного поля в поперечно-бесследовой калибровке в виде

$$[\partial_M H_{ij}^{\text{tt}}]^{\text{rad}} = -\frac{\kappa_5 \bar{c}_M}{2^{5/2} \pi^2 r^{3/2}} \mathcal{A}_{ij}^{\text{tt}}, \quad \mathcal{A}_{ij}^{\text{tt}} = \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \frac{\ddot{\ddot{Q}}_{ij}^{\text{tt}}}{(\bar{t} - t')^{1/2}}, \quad (3.4.8)$$

где $Q_{ij}^{\text{tt}} = \Lambda_{ij,kl}(\mathbf{n}) Q_{kl}$. Полученная излучаемая часть полного гравитационного поля схожа со своим четырехмерным аналогом [163]. Однако, в то время как в четырех измерениях гравитационное излучение в заданной пространственно-временной точке наблюдения полностью определяется состоянием источника в соответствующий запаздывающий момент времени, то в пяти измерениях оно зависит от полной истории движения источника, предшествующей запаздывающему времени.

3.4.2. Квадрупольная формула

С помощью ур. (3.1.108) и (1.3.7) мы находим пятимерный аналог квадрупольной формулы для углового распределения мощности гравитационного излучения нерелятивистской двойной системы на бране

$$\frac{dW_5}{d\Omega_3} = \frac{\kappa_5}{128\pi^4} \langle \mathcal{A}_{ij}^{\text{tt}} \mathcal{A}_{ij}^{\text{tt}} \rangle, \quad (3.4.9)$$

где $\mathcal{A}_{ij}^{\text{tt}}(x)$ дается уравнением (3.4.8).

Чтобы переписать ур. (3.4.9) в терминах поляризаационных амплитуд мы следуем выводу, предложенному в четырехмерной теории в [163]. Заметим, что свертка тензоров $\mathcal{A}_{ij}^{\text{tt}}$ инвариантна относительно SO(4)-преобразований. В частности, свертка, вычисленная в произвольно ориентированной координатной системе x , равна свертке, вычисленной в координатной системе x' , где вектор в направлении наблюдения \mathbf{n} сонаправлен с x'^4 координатой

(см. ур. (3.1))

$$\mathcal{A}_{ij}^{\text{tt}}(x)\mathcal{A}_{ij}^{\text{tt}}(x) = \mathcal{A}'_{ij}{}^{\text{tt}}(x')\mathcal{A}'_{ij}{}^{\text{tt}}(x'), \quad (3.4.10)$$

Тогда, по аналогии с вычислением поляризационных амплитуд в Приложении 3, вычислим ее в x' -системе и перепишем компоненты тензора $\mathcal{A}'_{ij}{}^{\text{tt}}$ через компоненты $\mathcal{A}_{ij}^{\text{tt}}$ с помощью ур. (3.7). В результате, с учетом ур. (3.2) мы получаем

$$\mathcal{A}'_{ij}{}^{\text{tt}}\mathcal{A}'_{ij}{}^{\text{tt}} = \text{tr} \left(\mathcal{A}'^{\text{tt}} \mathcal{A}'^{\text{tt}} \right) = 2 \left(\mathcal{A}_+^2 + \mathcal{A}_\times^2 + \frac{3}{4}\mathcal{A}_\circ^2 + \mathcal{A}_\oplus^2 + \mathcal{A}_\otimes^2 \right), \quad (3.4.11)$$

где мы также учли ур. (3.8 – 3.12) и симметрию тензора $\mathcal{A}'_{ij}{}^{\text{tt}}$.

В итоге, мощность гравитационного излучения двойной системы принимает вид

$$\frac{dW_5}{d\Omega_3} = \frac{\kappa_5}{64\pi^4} \left\langle \mathcal{A}_+^2 + \mathcal{A}_\times^2 + \frac{3}{4}\mathcal{A}_\circ^2 + \mathcal{A}_\oplus^2 + \mathcal{A}_\otimes^2 \right\rangle. \quad (3.4.12)$$

Полученное ур. (3.4.12) определяет вклады независимых поляризаций в гравитационное излучение системы. В частности, отсюда видно, что «дышащая» мода \mathcal{A}_\circ переносит на 25% меньше энергии, чем другие поляризации гравитационного поля.

3.4.3. Двойная система на круговой орбите

В качестве простого, но иллюстративного примера рассмотрим пятимерное гравитационное излучение нерелятивистской двойной системы на круговой орбите. Относительная координата такой системы имеет простой вид

$$z^i = \{R_s \cos \omega_s t, R_s \sin \omega_s t, 0, 0\}, \quad (3.4.13)$$

где R_s – радиус орбиты, а ω_s – частота орбитального движения.

Как обсуждалось выше, при вычислении гравитационного излучения можно эквивалентно использовать тензор $\mathcal{A}_{ij}(x)$, определенный через второй момент массы (3.4.5) или квадрупольный момент (3.4.7) системы. В дальнейшем для простоты мы будем использовать первый вариант

$$\mathcal{A}_{ij}(x) = \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \frac{\ddot{M}_{ij}}{(\bar{t} - t')^{1/2}}. \quad (3.4.14)$$

Ненулевые компоненты второго момента массы в нашем случае имеют вид

$$\ddot{M}_{11} = -\ddot{M}_{22} = 8\mu R_s^2 \omega_s^4 \cos 2\omega_s t', \quad \ddot{M}_{12} = \ddot{M}_{21} = 8\mu R_s^2 \omega_s^4 \sin 2\omega_s t' \quad (3.4.15)$$

Из ур. (3.4.15) мы находим ненулевые компоненты тензора $\mathcal{A}_{ij}(x)$

$$\mathcal{A}_{11}(x) = -\mathcal{A}_{22}(x) = \sqrt{32\pi\mu R_s^2 \omega_s^7/2} \sin \left(2\omega_s \bar{t} + \frac{\pi}{4} \right), \quad (3.4.16)$$

$$\mathcal{A}_{12}(x) = \mathcal{A}_{21}(x) = \sqrt{32\pi\mu R_s^2 \omega_s^7/2} \sin \left(2\omega_s \bar{t} - \frac{\pi}{4} \right), \quad (3.4.17)$$

Для подробного вывода ур. (3.4.16) и (3.4.17) см. Приложение 6.

В соответствии с ур. (3.4.12), для вычисления мощности гравитационного излучения двойной системы мы находим амплитуды поляризации гравитационного поля. Подставляя в ур. (3.8–3.12) ненулевые компоненты тензора $\mathcal{A}_{ij}(x)$ (3.4.16) и (3.4.17), мы получаем

$$\mathcal{A}_+ = -\sqrt{8\pi}\mu R_s^2 \omega_s^{7/2} (1 + \cos^2 \theta) \sin \left(2\omega_s \bar{t} + \frac{\pi}{4} - 2\phi \right), \quad (3.4.18)$$

$$\mathcal{A}_\times = \sqrt{32\pi}\mu R_s^2 \omega_s^{7/2} \cos \theta \cos \left(2\omega_s \bar{t} + \frac{\pi}{4} - 2\phi \right), \quad (3.4.19)$$

$$\mathcal{A}_\circ = \frac{\sqrt{32\pi}}{3} \mu R_s^2 \omega_s^{7/2} (2 \sin^2 \theta \cos^2 \zeta - \cos^2 \theta + 1) \sin \left(2\omega_s \bar{t} + \frac{\pi}{4} - 2\phi \right), \quad (3.4.20)$$

$$\mathcal{A}_\oplus = \sqrt{32\pi}\mu R_s^2 \omega_s^{7/2} \sin \theta \cos \zeta \cos \left(2\omega_s \bar{t} + \frac{\pi}{4} - 2\phi \right), \quad (3.4.21)$$

$$\mathcal{A}_\otimes = \sqrt{8\pi}\mu R_s^2 \omega_s^{7/2} \sin 2\theta \cos \zeta \sin \left(2\omega_s \bar{t} + \frac{\pi}{4} - 2\phi \right). \quad (3.4.22)$$

Заметим, что в случае точки наблюдения на бране $\zeta = \pi/2$ «дышащая» мода (3.4.20) сохраняется, а \mathcal{A}_\oplus и \mathcal{A}_\otimes поляризации оказываются равными нулю. Таким образом, наблюдатель на бране регистрирует три независимых поляризации гравитационных волн, как было обнаружено ранее в [27].

Усредняя квадраты поляризационных амплитуд в уравнении (3.4.12) по периоду орбитального движения с помощью следующего соотношения

$$\left\langle \sin^2 \left(2\omega_s \bar{t} + \frac{\pi}{4} - 2\phi \right) \right\rangle = \left\langle \cos^2 \left(2\omega_s \bar{t} + \frac{\pi}{4} - 2\phi \right) \right\rangle = \frac{1}{2}, \quad (3.4.23)$$

мы приходим к угловому распределению мощности гравитационного излучения двойной системы на круговой орбите на бране в виде

$$\begin{aligned} \frac{dW_5^{\text{circ}}}{d\Omega_3} = \frac{\kappa_5 \mu^2 R_s^4 \omega_s^7}{4\pi^3} & \left[\left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right)^2 + \cos^2 \theta + \sin^4 \theta \frac{(1 + 2 \cos^2 \zeta)^2}{12} \right. \\ & \left. + \sin^2 \theta \cos^2 \zeta (1 + \cos^2 \theta) \right]. \end{aligned} \quad (3.4.24)$$

Интегрируя уравнение (3.4.24), мы находим полную мощность гравитационного излучения нерелятивистской двойной системы на круговой орбите на бране

$$W_5^{\text{circ}} = \frac{5}{9\pi} \kappa_5 \mu^2 R_s^4 \omega_s^7. \quad (3.4.25)$$

3.4.4. Эволюция квазикруговой орбиты

Как мы подчеркивали изначально, представленную систему следует рассматривать как математически непротиворечивую, но физически нереалистичную модель, поэтому мы воздерживаемся от каких-либо количественных физических предсказаний. В частности, закон

орбитальной эволюции двойной системы на бране под действием гравитационного излучения в пятимерный балк, который мы получаем в данном подразделе в качестве простого примера применения полученной пятимерной квадрупольной формулы, не рассматривается как попытка извлечь доступные для экспериментальной проверки предсказания и дает результат, явно противоречащий данным наблюдений двойных пульсаров. Мы представляем этот расчет лишь для демонстрации того, как наличие дополнительного измерения меняет время жизни двойной системы.

Поскольку в нерелятивистском пределе потери двойной системой энергии на гравитационное излучение за период движения системы по орбите малы по сравнению с ее полной энергией, мы предполагаем, что система движется по квазикруговой орбите. А именно, по аналогии с четырехмерной теорией [163] будем рассматривать радиус орбиты $R_s(t)$ и частоту орбитального движения $\omega_s(t)$ как медленно меняющиеся функции времени, удовлетворяющие условию

$$-\dot{R}_s \ll \omega_s R_s, \quad (3.4.26)$$

соответствующему медленному сжатию орбиты.

Эволюция орбиты подчиняется закону сохранения энергии

$$\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = -W_5^{\text{circ}}, \quad (3.4.27)$$

где E_{tot} – полная механическая энергия нерелятивистской двойной системы, а мощность гравитационного излучения определяется уравнением (3.4.25). Перепишем механическую энергию системы и мощность ее излучения через частоту орбитального движения, используя ее связь с радиусом орбиты. Подставив в уравнение (3.1.121) относительную координату системы (3.4.13), с точностью до вкладов ведущего порядка приходим к

$$\omega_s^2 = \frac{g_1 g_2}{\mu R_s^3}. \quad (3.4.28)$$

С помощью ур. (3.4.28) перепишем энергию системы и мощность ее излучения как

$$E_{\text{tot}} = \frac{\mu \mathbf{v}^2}{2} - \frac{g_1 g_2}{|\mathbf{z}|} = -\frac{1}{2} (\sqrt{\mu} g_1 g_2)^{2/3} \omega_s^{2/3}, \quad (3.4.29)$$

$$W_5^{\text{circ}} = \frac{5}{9\pi} \kappa_5 (\sqrt{\mu} g_1 g_2)^{4/3} \omega_s^{13/3}. \quad (3.4.30)$$

В результате, подставляя ур. (3.4.29) и (3.4.30) в закон сохранения энергии (3.4.27), мы приходим к уравнению эволюции частоты орбитального движения

$$\dot{\omega}_s = \frac{5\kappa_5}{3\pi} (\sqrt{\mu} g_1 g_2)^{2/3} \omega_s^{14/3}, \quad \dot{\omega}_s \ll \omega_s^2, \quad (3.4.31)$$

где второе неравенство является условием квазикругового движения (3.4.26) в терминах орбитальной частоты. Решение уравнения (3.4.31) записывается как

$$\omega_s(t) = \left(\frac{9\pi}{55\kappa_5} \right)^{3/11} (\sqrt{\mu}g_1g_2)^{-2/11}(t_c - t)^{-3/11}, \quad (3.4.32)$$

где t_c – момент слияния двойной системы. Полученный закон эволюции орбитальной частоты (3.4.32) значительно отличается от своего четырехмерного аналога [163]

$$\omega_{s,4D}(t) \sim (t_c - t)^{-3/8}, \quad (3.4.33)$$

не удовлетворяя современным ограничениям на эволюцию двойных систем под действием гравитационного излучения, полученным с помощью наблюдения двойных пульсаров [170, 171]. Очевидно, этого и следовало ожидать, учитывая что в нашем случае гравитация описывается физически нереалистичной ОТО с одним дополнительным измерением бесконечного объема.

Из ур. (3.4.28) и (3.4.32) получаем также уравнение эволюции радиуса квазикруговой орбиты и его решение в виде

$$\dot{R}_s = -\frac{2}{3}R_s \frac{\dot{\omega}_s}{\omega_s} \implies R_s(t) = R_0 \left(\frac{t_c - t}{t_c - t_0} \right)^{2/11}. \quad (3.4.34)$$

где R_0 – радиус орбиты в некоторый начальный момент времени t_0 . Сравним скорость сжатия орбиты двойной системы на бране, излучающей гравитационные волны в пятимерный балк, с эволюцией двойной системы, излучающей гравитационные волны в четырехмерном пространстве-времени. Так, во втором случае зависимости радиуса квазикруговой орбиты от времени имеет вид [163]

$$R_s(t) = R_0 \left(\frac{t_c - t}{t_c - t_0} \right)^{1/4}. \quad (3.4.35)$$

Для сравнения скоростей сжатия орбит двух систем положим в обоих случаях моменты слияния системы равными нулю $t_c = 0$. Также введем безразмерные время $\bar{t} = t/|t_0|$ и радиусы орбит $\bar{R} = R_s/R_0$. В результате, из ур. (3.4.34) и (3.4.35) находим законы сжатия квазикруговых орбит двойных систем под действием четырехмерного и пятимерного гравитационного излучения, соответственно, в виде

$$\bar{R}_{4D}(\bar{t}) = (-\bar{t})^{1/4}, \quad \bar{R}_{5D}(\bar{t}) = (-\bar{t})^{2/11}. \quad (3.4.36)$$

Данные уравнения характеризуют скорости сжатия орбит в относительных единицах: на сколько процентов уменьшится радиус орбиты за определенную долю интервала времени длительностью $|t_0|$ от начального момента времени $t_0 < 0$ до момента слияния двойной

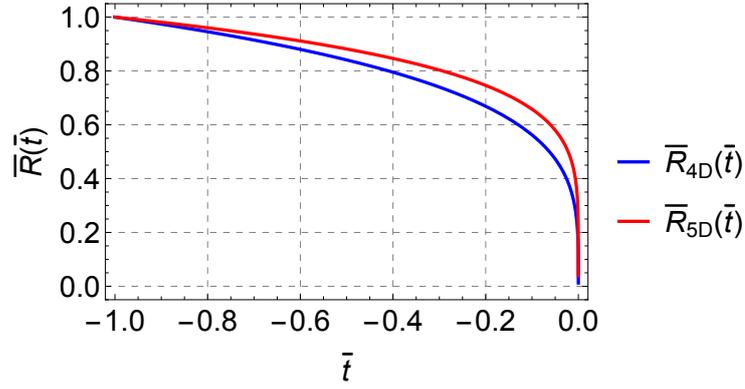


Рис. 3.4. Эволюция нормированного радиуса двойной системы под действием четырехмерного и пятимерного гравитационного излучения.

системы $t_c = 0$. В результате, из рис. (3.4) видно, что в относительных единицах двойная система будет сжиматься быстрее под действием четырехмерного гравитационного излучения, чем под действием гравитационного излучения в пятимерный балк. Чтобы понять причину такого поведения, перепишем мощности излучения двойных систем на круговых орбитах в размерности четыре [163] и пять (3.4.25) через линейную скорость $v_s = \omega_s R_s$ эффективной частицы с приведенной массой μ

$$W_4 = \frac{32}{5} G \mu^2 \frac{v_s^6}{R_s^2}, \quad W_5 = \frac{5}{9\pi} \kappa_5 \mu^2 \frac{v_s^7}{R_s^3}, \quad (3.4.37)$$

где G – это четырехмерная Ньютоновская постоянная. Отсюда видно, что в нерелятивистском приближении $v_s \ll 1$ гравитационное излучение в размерности пять является эффектом на порядок малости выше, по сравнению с четырехмерным случаем, что замедляет потерю системой энергии на гравитационное излучение и, соответственно, сжатие орбиты.

3.5. Выводы

В данной Главе мы рассмотрели простую модель пятимерной ОТО с четырехмерной материей, состоящей из точечных частиц и безмассового скалярного поля, локализованных на плоской 3-бране. Хотя данная модель явно феноменологически нежизнеспособна, математически она представляет собой последовательную самосогласованную модель, дающую возможность вычислять пятимерное гравитационное излучение в балк в рамках линеаризованной гравитации. Более того, данная модель все так же улавливает важную особенность излучения в нечетных размерностях – появление хвостовых вкладов в излучении, связанных с нарушением принципа Гюйгенса. Мы обобщили подход Рорлиха-Тейтельбойма к излучения на случай гравитационного поля в пространстве-времени нечетной размерности, а также про-

демонстрировали, что вклад натяжений скалярного поля, посредством которого две частицы взаимодействуют, в гравитационное излучение можно явно учесть, используя модификацию подхода DIRE к пост-Ньютоновским разложениям в четырехмерной ОТО.

Мы рассмотрели гравитационное излучение двойной системы нерелятивистских точечных частиц, получив пятимерный аналог квадрупольной формулы для мощности ее гравитационного излучения (3.4.9). По аналогии с моделью скалярного поля, рассмотренной в Главе 1, было показано, что гравитационное излучение двойной системы зависит от полной истории ее движения, предшествующей запаздывающему времени. Таким образом, присутствие нечетного числа дополнительных измерений в данной модели будет проявляться за счет формирования характерных нелокальных хвостовых сигналов в гравитационном излучении двойной системы, аналогичных рассмотренным в Главе 2. Еще одним признаком присутствия дополнительного измерения в гравитационных волнах оказываются дополнительные поляризации. В то время как в пяти измерениях гравитационные волны имеют пять поляризаций, наблюдатель на бране будет детектировать лишь три из них — две стандартные «крест» и «плюс» поляризации, а также дополнительную «дышащую» моду. При этом было доказано, что последняя генерируется источником на бране, имеет ненулевое значения для наблюдателя на бране, и переносит на 25% меньше энергии по сравнению с остальными поляризациями.

Обсудим связь наших результатов с другими работами. Наличие дополнительной «дышащей» поляризации у гравитационных волн в присутствии дополнительных измерений было показано ранее в [27]. Однако, в нашей работе впервые были доказаны ее генерация источниками, локализованными на бране, а также возможность ее регистрации наблюдателем на бране. Также полученная нами квадрупольная формула (3.4.9) согласуется с формулой, полученной в [84] с использованием Фурье-преобразований запаздывающих функций Грина. Кроме того, наши результаты укладываются в рекуррентные схемы для квадрупольной формулы и мощности излучения системы на круговой орбите, полученные в [62] для произвольных четных размерностей. Мы также ожидаем, что наша формула для мощности излучения системы на круговой орбите может быть проверена с помощью результатов работы [81], полученных в рамках подхода эффективной теории поля.

Глава 4

Утечка излучения в скалярной DGP-модели

В DGP-модели эффективный гравитон на 3-бране является метастабильной частицей, что приводит к модификации законов гравитации на космологических расстояниях. В частности, это приводит к утечке гравитационных волн с браны в дополнительное измерение на космологических расстояниях от источника. Однако, расчет интенсивности утечки гравитационных волн является нетривиальной задачей из-за нарушения принципа Гюйгенса в пятимерном балке DGP-модели. В этой Главе мы рассматриваем упрощенную задачу скалярного излучения точечного заряда, локализованного на бране, в рамках скалярно-полевого аналога DGP-модели. В случае движения заряда по круговой траектории мы находим зависимость эффективного четырехмерного потока энергии излучения через 2-сферу на бране от ее радиуса, характеризующую интенсивность утечки скалярного излучения с браны с расстоянием от источника излучения. В соответствии с инфракрасной прозрачностью балка в DGP-модели, интенсивность утечки оказывается выше для низкочастотных сигналов. Мы также анализируем возможность обнаружения данного эффекта современными и будущими гравитационно-волновыми обсерваториями.

4.1. Скалярный аналог DGP-модели

Наша цель – оценить интенсивность утечки гравитационного излучения в дополнительное измерение в DGP-модели. Для простоты мы пренебрегаем тензорной структурой гравитационного поля и рассматриваем скалярно-полевого аналог DGP-модели, живущий в пятимерном пространстве Минковского. Мы также пренебрегаем флуктуациями браны, представляя ее как плоское подпространство в балке, а не как динамический объект. В качестве источника скалярного поля мы рассматриваем точечный заряд, движущийся вдоль фиксированной мировой линии на бране. Мы не конкретизируем механизмы локализации заряда и индуцированного кинетического члена скалярного поля на бране, ограничиваясь лишь рассмотрением процесса излучения скалярного поля зарядом.

Действие рассматриваемой скалярной DGP-модели имеет вид [17]

$$\begin{aligned}
 S = & M_5^3 \int d^4 x dy \partial^M \varphi(x; y) \partial_M \varphi(x; y) + M_4^2 \int d^4 x dy \delta(y) \partial^\mu \varphi(x; y) \partial_\mu \varphi(x; y) \\
 & - \int d\tau (m + g\varphi(z)) \sqrt{\eta_{AB} \dot{z}^A \dot{z}^B}, \quad \dot{z}^M = \frac{dz^M}{d\tau},
 \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

где первый член является аналогом пятимерного действия Эйнштейна-Гильберта в балке, а второй – аналогом четырехмерного действия Эйнштейна-Гильберта, индуцированного на 3-бране. Здесь M_5 и M_4 – пятимерная и четырехмерная Планковская масса, соответственно, а m и g – масса и скалярный заряд точечной частицы. Подобная неканоническая нормировка скалярного поля приводит к тому, что в дальнейшем отношение двух Планковских масс будет определять характерный переходный масштаб энергии/расстояний в теории. Фиксированная мировая линия заряда $z^M(\tau)$ параметризована его собственным временем. В той Главе мы используем метрику пространства Минковского с сигнатурой $\eta_{MN} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$, заглавные латинские индексы принимают значения $A = \overline{0, 4}$, а строчные греческие индексы нумеруют координаты на бране $\mu = \overline{0, 3}$. Для простоты мы обозначаем координату вдоль дополнительного измерения в балке как $x^4 \equiv y$. Брана вводится как подпространство $y = 0$ в пятимерном пространстве Минковского, на котором локализован индуцированный кинетический член скалярного поля, и не рассматривается как динамический объект.

Уравнение движения скалярного поля, определяемое действием (4.1.1), имеет вид

$$M_5^3 \mathop{\square}_5 \varphi + M_4^2 \delta(y) \mathop{\square}_4 \varphi = -\frac{g}{2} \int d\tau \delta^{(5)}(x - z), \quad (4.1.2)$$

где $\mathop{\square}_5 = \eta^{AB} \partial_A \partial_B$ и $\mathop{\square}_4 = \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta$. Учитывая что заряд локализован на бране $z^M(\tau) = \delta_\mu^M z^\mu(\tau)$, мы переписываем источник в правой части ур. (4.1.2) как

$$-\frac{g}{2} \int d\tau \delta^{(5)}(x - z) = -\frac{1}{2} j(x) \delta(y), \quad j(x) = g \int d\tau \delta^{(4)}(x - z), \quad (4.1.3)$$

где $j(x)$ – это стандартный четырехмерный скалярный ток на бране (ср. с ур. (1.1.4)). Определяя характерные масштабы энергии и расстояний в DGP-модели как отношения двух Планковских масс

$$m_c = \frac{M_5^3}{M_4^2}, \quad r_c = \frac{1}{m_c}, \quad (4.1.4)$$

мы переписываем ур. (4.1.2) как

$$\mathop{\square}_5 \varphi + r_c \delta(y) \mathop{\square}_4 \varphi = -\frac{1}{2M_5^3} j(x) \delta(y). \quad (4.1.5)$$

Далее мы будем использовать ур. (4.1.5) как уравнение движения поля, определяющее процесс его излучения точечным зарядом.

4.1.1. Эффективная четырехмерная скалярная теория на бране

Так как в дальнейшем нас будет интересовать лишь динамика скалярного поля на бране, построим эффективное четырехмерное уравнение движения поля на бране, а также его эффективный четырехмерный тензор энергии-импульса, локализованный на бране.

Начнем с эффективного уравнения движения поля на бране. Наш вывод отличается от представленного в работах [122, 123, 125] и направлен на прояснение физического смысла нормального бранча DGP-модели. Мы интегрируем ур. (4.1.5) вдоль координаты в балке по малому интервалу вокруг браны $y \in (-\epsilon, \epsilon)$, $\epsilon \rightarrow +0$, приходя к уравнению

$${}_4\Box\varphi|_{y=0} - m_c[\partial_y\varphi]_{y=0} = -\frac{1}{2M_4^2}j(x), \quad (4.1.6)$$

где $[\dots]_{y=0}$ обозначает скачок соответствующей величины на бране. Чтобы прояснить четырехмерный смысл скачка производной поля по координате в балке, совершим Фурье-преобразование поля по координатам на бране

$$\varphi(x; y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \tilde{\varphi}(p; y). \quad (4.1.7)$$

Подставляя его в уравнение движения поля в балке

$${}_5\Box\varphi = 0, \quad y \neq 0 \quad (4.1.8)$$

и разрешая его, мы находим общее выражение для Фурье-образа поля

$$\tilde{\varphi}(p; y) = \begin{cases} A(p)e^{i\sqrt{p^2}y} + B(p)e^{-i\sqrt{p^2}y}, & y > 0 \\ C(p)e^{i\sqrt{p^2}y} + D(p)e^{-i\sqrt{p^2}y}, & y < 0. \end{cases} \quad (4.1.9)$$

Коэффициенты $A(p), \dots, D(p)$ могут быть выбраны различными способами, приводя к выбору нормального или самоускоренного бранча DGP-модели. При их выборе мы используем два физических условия: мы требуем непрерывности поля на бране

$$\varphi|_{y \rightarrow -0} = \varphi|_{y \rightarrow +0}, \quad (4.1.10)$$

а также, чтобы поле в балке представляло собой суперпозицию плоских волн, уходящих с браны на бесконечность

$$\varphi \propto \begin{cases} \int e^{-i\omega t + iky}, & y > 0, \\ \int e^{-i\omega t - iky}, & y < 0. \end{cases} \quad (4.1.11)$$

Второе условие является граничным условием излучения в балке и соответствует отсутствию источников поля в балке. Вместе эти условия накладывают следующие ограничения на коэффициенты

$$B(p) = C(p) = 0, \quad A(p) = D(p) \equiv \tilde{\varphi}(p). \quad (4.1.12)$$

Для однозначности операций с Фурье-образом (4.1.9) необходимо задать определение квадратного корня на комплексной плоскости (его выбор также влияет на выбор ветви DGP-модели). Выбираем его с разрезом вдоль положительной части действительной оси

$$\sqrt{\rho e^{i\alpha}} = \sqrt{\rho} e^{i\alpha/2}, \quad \rho \in \mathbb{R}^+, \quad \alpha \in [0, 2\pi). \quad (4.1.13)$$

В результате, с помощью ур. (4.1.9) мы можем формально представить скачок производной поля на бране как

$$[\partial_y \varphi]_{y=0} = 2\sqrt{4\Box} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \tilde{\varphi}(p) = 2\sqrt{4\Box} \varphi|_{y=0}. \quad (4.1.14)$$

В итоге, эффективное уравнение движения скалярного поля на бране принимает вид

$$4\Box\varphi|_{y=0} - M_c\sqrt{4\Box}\varphi|_{y=0} = -\frac{1}{2M_4^2}j(x), \quad M_c = 2m_c. \quad (4.1.15)$$

С учетом определения квадратного корня от оператора Даламбера через Фурье-преобразование, мы получили уравнение движения скалярного поля на бране с переменной массой, зависящей от импульса.

Получим теперь эффективный четырехмерный тензор энергии-импульса поля, локализованный на бране. Начнем с канонического тензора энергии-импульса поля в балке (достаточно найти лишь его часть вне мировой линии заряда)

$$T_{MN} = 2M_4^2 \delta(y) \left[\eta_{MA} \delta_\alpha^A \partial^\alpha \varphi \partial_N \varphi - \frac{1}{2} \eta_{MN} \partial^\alpha \varphi \partial_\alpha \varphi \right] + 2M_5^3 \left[\partial_M \varphi \partial_N \varphi - \frac{1}{2} \eta_{MN} \partial^A \varphi \partial_A \varphi \right], \quad x^\mu \neq z^\mu. \quad (4.1.16)$$

Проецируя его на брану, выделяем его эффективную четырехмерную часть

$$\delta_\mu^M \delta_\nu^N T_{MN} = 2M_4^2 \delta(y) \left[\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \varphi \partial_\alpha \varphi \right] + 2M_5^3 \left[\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial^A \varphi \partial_A \varphi \right]. \quad (4.1.17)$$

Наконец, интегрируя ур. (4.1.17) по малому интервалу вокруг браны, мы находим эффективный четырехмерный тензор энергии-импульса поля, локализованный на бране

$$\Theta_{\mu\nu} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dy \delta_\mu^M \delta_\nu^N T_{MN} = 2M_4^2 \left[\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \varphi \partial_\alpha \varphi \right] \Big|_{y=0}. \quad (4.1.18)$$

В дальнейшем именно тензор энергии-импульса $\Theta_{\mu\nu}$ будет использоваться для вычисления эффективного четырехмерного потока энергии излучения через 2-сферу на бране.

4.1.2. Инфракрасная прозрачность балка – двумерный пример

Прежде чем перейти к вычислению запаздывающего поля точечного заряда, рассмотрим упрощенную модель, позволяющую лучше понять поведение поля в балке и роль браны в нашей модели. Здесь мы следуем выводу, представленному в работе [103].

Рассмотрим двумерную скалярную DGP-модель, где единственное пространственное измерение соответствует координате в балке – здесь брана сводится к точке $y = 0$. Уравнение движения свободного поля в такой модели записывается как

$$(\partial_t^2 - \partial_y^2)\varphi + r_c \delta(y) \partial_t^2 \varphi = 0. \quad (4.1.19)$$

Требую непрерывности поля на бране, мы разделяем ур. (4.1.19) на уравнение движения в балке и условия сшивки на бране по аналогии с квантовомеханической задачей о частице в дельта-потенциале [172]

$$(\partial_t^2 - \partial_y^2)\varphi = 0, \quad y \neq 0 \quad (4.1.20)$$

$$\varphi|_{y \rightarrow -0} = \varphi|_{y \rightarrow +0}, \quad (4.1.21)$$

$$- [\partial_y \varphi]_{y=0} + r_c \partial_t^2 \varphi|_{y=0} = 0. \quad (4.1.22)$$

Общее решение ур. (4.1.20) в виде плоской монохроматической волны в балке имеет вид

$$\varphi(t; y) = \begin{cases} A(\omega)e^{-i\omega(t-y)} + B(\omega)e^{-i\omega(t+y)}, & y < 0 \\ D(\omega)e^{-i\omega(t-y)} + C(\omega)e^{-i\omega(t+y)}, & y > 0. \end{cases} \quad (4.1.23)$$

Выберем коэффициенты таким образом, чтобы данное решение соответствовало плоской волне, падающей на брану слева $y < 0$, и содержало отраженную и прошедшую части

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad B(\omega) = \frac{R(\omega)}{\sqrt{2\pi}}, \quad C(\omega) = 0, \quad D(\omega) = \frac{T(\omega)}{\sqrt{2\pi}}. \quad (4.1.24)$$

Оставшиеся коэффициенты находятся из условий сшивки (4.1.21) и (4.1.22)

$$T(\omega) = \frac{2i}{2i - \omega r_c}, \quad R(\omega) = \frac{\omega r_c}{2i - \omega r_c}. \quad (4.1.25)$$

Отсюда получаем коэффициенты отражения и прохождения через брану для плоских монохроматических волн в виде

$$|T(\omega)|^2 = \frac{M_c^2}{M_c^2 + \omega^2}, \quad |R(\omega)|^2 = \frac{\omega^2}{M_c^2 + \omega^2}. \quad (4.1.26)$$

Таким образом, брана оказывается прозрачной для волн с частотой $\omega \lesssim M_c$ и непроницаемой для волн с частотой $\omega \gtrsim M_c$. Далее мы увидим, что это приводит к тому, что только низкочастотные сигналы, излучаемые в брану, способны утекать с нее в дополнительное измерение, а высокочастотные сигналы остаются квазилокализованы на бране, в соответствии с инфракрасной прозрачностью балка в DGP-модели [92].

4.2. Запаздывающая функция Грина DGP-модели

Запаздывающее решение уравнения движения (4.1.5) строится с помощью запаздывающей функции Грина

$$\varphi(x; y) = -\frac{1}{2M_5^3} \int d^4 x' G_{\text{DGP}}(x - x'; y) j(x'), \quad (4.2.1)$$

которая удовлетворяет уравнениям

$${}_5\Box G_{\text{DGP}}(x; y) + r_c \delta(y) {}_4\Box G_{\text{DGP}}(x; y) = \delta^{(4)}(x) \delta(y), \quad (4.2.2)$$

$$G_{\text{DGP}}(x; y) = 0, \quad x^0 < 0. \quad (4.2.3)$$

Прежде чем вычислять функцию Грина в пяти измерениях, рассмотрим пару примеров меньшей размерности, чтобы прояснить связи между поведением поля в балке и на бране и проиллюстрировать основные этапы расчета.

4.2.1. Функция Грина двумерной DGP-модели

В двумерном пространстве-времени уравнение на функцию Грина имеет вид

$$(\partial_t^2 - \partial_y^2)G(t; y) + r_c \delta(y) \partial_t^2 G(t; y) = \delta(t) \delta(y). \quad (4.2.4)$$

Совершая Фурье-преобразование функции Грина по временной координате

$$G(t; y) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{G}(\omega; y) \quad (4.2.5)$$

и подставляя его в ур. (4.2.4), находим уравнение для Фурье-образа

$$\partial_y^2 \tilde{G}(\omega; y) + \omega^2 \tilde{G}(\omega; y) + r_c \delta(y) \omega^2 \tilde{G}(\omega; y) = -\delta(y). \quad (4.2.6)$$

По аналогии с уравнениями (4.1.20–4.1.22) разделяем его на уравнение движения в балке и условия сшивки на бране

$$\partial_y^2 \tilde{G} + \omega^2 \tilde{G} = 0, \quad y \neq 0, \quad (4.2.7)$$

$$\tilde{G}|_{y \rightarrow -0} = \tilde{G}|_{y \rightarrow +0}, \quad (4.2.8)$$

$$[\partial_y \tilde{G}]|_{y=0} + r_c \omega^2 \tilde{G}|_{y=0} = -1, \quad (4.2.9)$$

где мы потребовали непрерывности функции Грина на бране. Общее решение ур. (4.2.7) записывается как

$$\tilde{G}(\omega; y) = \begin{cases} A(\omega) e^{-i\omega y} + B(\omega) e^{i\omega y}, & y < 0, \\ C(\omega) e^{-i\omega y} + D(\omega) e^{i\omega y}, & y > 0. \end{cases} \quad (4.2.10)$$

Накладывая на Фурье-образ граничное условие излучения в балке, с учетом ур. (4.2.8) мы получаем

$$B(\omega) = C(\omega) = 0, \quad A(\omega) = D(\omega). \quad (4.2.11)$$

Оставшийся коэффициент находится из ур. (4.2.9). В результате, Фурье-образ функции Грина принимает вид

$$\tilde{G}(\omega; y) = -\frac{e^{i\omega|y|}}{\omega^2 r_c + 2i\omega}, \quad (4.2.12)$$

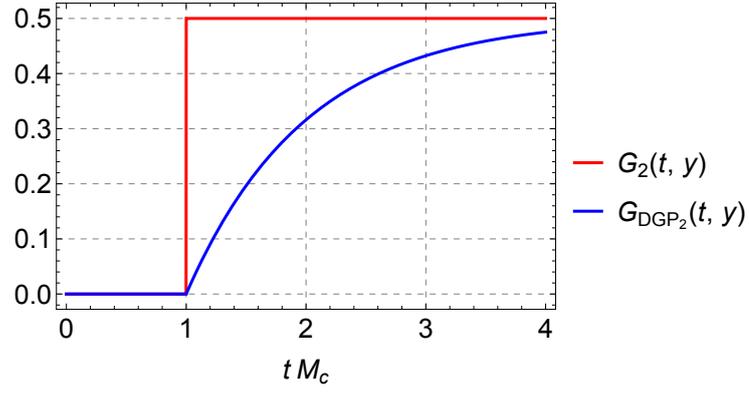


Рис. 4.1. Запаздывающие функции Грина двумерной DGP-модели и двумерного безмассового скалярного поля (здесь $|y| = M_c^{-1}$).

так что в итоге мы получаем следующий интеграл для функции Грина

$$G(t; y) = - \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega(t-|y|)}}{\omega^2 r_c + 2i\omega}. \quad (4.2.13)$$

Подынтегральное выражение в ур. (4.2.13) имеет две особые точки

$$\omega = 0, \quad \omega = -iM_c. \quad (4.2.14)$$

Для выполнения условия запаздывания замкнем контур интегрирования в верхней комплексной полуплоскости при $t < |y|$ и в нижней полуплоскости при $t > |y|$. В результате, функция Грина принимает вид

$$G(t; y) = \frac{1}{2} \theta(t - |y|) [1 - e^{-M_c(t-|y|)}]. \quad (4.2.15)$$

Сравним ур. (4.2.15) с функцией Грина двумерного канонического безмассового скалярного поля [58]

$$G_2(t, y) = \frac{1}{2} \theta(t - |y|), \quad (4.2.16)$$

где мы обозначаем пространственную координату так же как y . Из рис. (4.1) видно, что в двумерной скалярной DGP-модели возмущения поля остаются временно квазилокализованы на бране в течение интервала времени $\Delta t \sim M_c^{-1}$, в соответствии с метастабильным характером эффективного гравитона на бране в DGP-модели [94, 100].

4.2.2. Функция Грина трехмерной DGP-модели

Здесь наши расчеты аналогичны приведенным в работе [173]. В трехмерной DGP-модели уравнение для функции Грина записывается как

$${}_3\Box G(x; y) + r_c \delta(y) {}_2\Box G(x; y) = \delta^{(2)}(x) \delta(y). \quad (4.2.17)$$

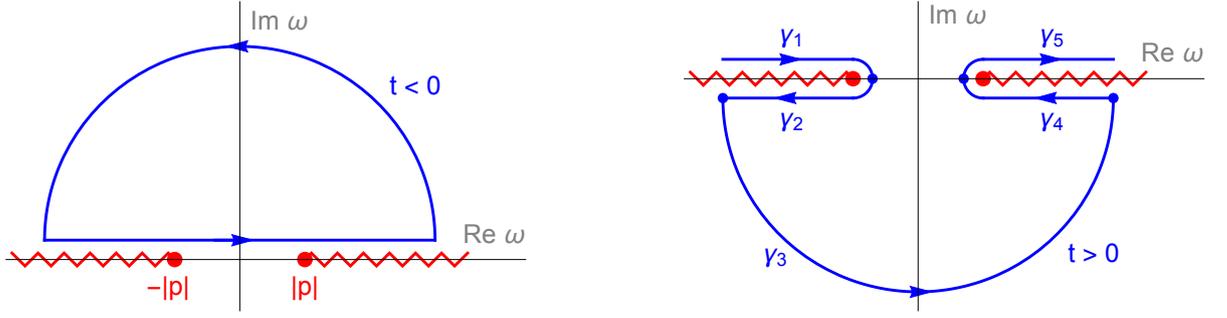


Рис. 4.2. Контуры интегрирования на комплексной ω -плоскости, соответствующие условию запаздывания.

По аналогии с двумерной моделью, совершая Фурье-преобразование функции Грина по координатам на бране

$$G(x; y) = \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} e^{-ipx} \tilde{G}(p; y), \quad (4.2.18)$$

мы получаем уравнение движения для Фурье-образа функции Грина в балке и условия сшивки на бране

$$\partial_y^2 \tilde{G} + p^2 \tilde{G} = 0, \quad y \neq 0 \quad (4.2.19)$$

$$\tilde{G}|_{y \rightarrow -0} = \tilde{G}|_{y \rightarrow +0}, \quad (4.2.20)$$

$$[\partial_y \tilde{G}]|_{y=0} + r_c p^2 \tilde{G}|_{y=0} = -1. \quad (4.2.21)$$

Решая уравнение движения в балке (4.2.19) и используя условия сшивки на бране (4.2.20) и (4.2.21) вместе с граничным условием излучения в балке, мы приходим к следующему Фурье-интегралу для функции Грина

$$G(x; y) = - \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{e^{-ipx} e^{i\sqrt{p^2}|y|}}{r_c p^2 + 2i\sqrt{p^2}}, \quad (4.2.22)$$

где квадратный корень определяется ур. (4.1.13). В высших размерностях Фурье-интеграл для функции Грина будет иметь аналогичный вид. Далее нас будет интересовать лишь динамика поля на бране $y = 0$. В этом случае интеграл для функции Грина упрощается

$$G(x; 0) = -\frac{M_c}{2} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i\omega t} e^{ipx}}{\omega^2 - p^2 + iM_c \sqrt{\omega^2 - p^2}}, \quad \omega = p^0, \quad p = p^1. \quad (4.2.23)$$

В силу определения квадратного корня, на комплексной ω -плоскости присутствуют разрывы. В соответствии с ур. (4.1.13), они лежат на действительной оси (см. рис. (4.2))

$$\omega^2 - p^2 \geq 0 \quad \implies \quad \omega \in (-\infty, -|p|] \cup [|p|, \infty). \quad (4.2.24)$$

При нахождении особых точек подынтегрального выражения учитываем, что в соответствии с определением квадратного корня его мнимая часть должна быть неотрицательной $\text{Im} \sqrt{z} \geq$

0. Тогда из нулей знаменателя подынтегрального выражения

$$\omega^2 - p^2 + iM_c\sqrt{\omega^2 - p^2} = 0 \implies \omega = \pm|p|, \quad \sqrt{\omega^2 - p^2} = -iM_c, \quad (4.2.25)$$

мы находим, что первые две особые точки являются началами разрезов, а две другие не лежат на выбранном листе Римановой поверхности, в соответствии с нормальным бранчем DGP-модели [94].

Поскольку разрезы лежат на вещественной оси, нам необходимо инфинитезимально сдвинуть контур интегрирования для интеграла по $\omega \in (-\infty, \infty)$ выше или ниже разрезов. Направление сдвига выбираем так, чтобы при замыкании контура функция Грина удовлетворяла условию запаздывания. Этому условию удовлетворяет сдвиг контура вверх над разрезами, см. рис. (4.2). Действительно, сдвигая контур вверх и замыкая его в верхней полуплоскости при $t < 0$, получаем

$$G(x; 0) \propto - \int dp \operatorname{Res} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - p^2 + iM_c\sqrt{\omega^2 - p^2}} = 0, \quad t < 0. \quad (4.2.26)$$

Однако, разрезы не позволяют замкнуть контур в нижней полуплоскости при $t > 0$. Деформируем его так, чтобы он охватывал разрезы с обеих сторон, см. рис. (4.2). Вклад дуги, возникающей в нижней полуплоскости в результате деформации контура, исчезает при $t > 0$. В результате запаздывающая функция Грина задается интегралом

$$G(x; 0) = -\frac{M_c}{2} \theta(t) \left(\int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2^-} - \int_{\gamma_4^-} + \int_{\gamma_5} \right) \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i\omega t} e^{ipx}}{\omega^2 - p^2 + iM_c\sqrt{\omega^2 - p^2}}, \quad (4.2.27)$$

где индекс γ_n^- обозначает интегрирование по контуру γ_n в обратном направлении. На верхней и нижней сторонах разрезов квадратный корень принимает разные значения

$$\gamma_1 : \quad \sqrt{\omega^2 - p^2} = \xi, \quad \xi^2 \equiv \omega^2 - p^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^-, \quad (4.2.28)$$

$$\gamma_2^- : \quad \sqrt{\omega^2 - p^2} = -\xi, \quad \xi^2 \equiv \omega^2 - p^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^-, \quad (4.2.29)$$

$$\gamma_4^- : \quad \sqrt{\omega^2 - p^2} = -\xi, \quad \xi^2 \equiv \omega^2 - p^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^+, \quad (4.2.30)$$

$$\gamma_5 : \quad \sqrt{\omega^2 - p^2} = \xi, \quad \xi^2 \equiv \omega^2 - p^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^+. \quad (4.2.31)$$

Здесь переменная ξ введена таким образом, что на двух разрезах вместе она принимала все вещественные значения $\xi \in (-\infty, \infty)$. С учетом ур. (4.2.28–4.2.31), функция Грина записывается как

$$G(x; 0) = -\frac{M_c}{8\pi^2} \theta(t) \int dp e^{ipx} \left(\int_{-\infty}^{-|p|} + \int_{|p|}^{\infty} \right) d\omega e^{-i\omega t} \Delta \left[\frac{1}{\xi^2 + iM_c\sqrt{\omega^2 - p^2}} \right], \quad (4.2.32)$$

где $\Delta[\dots]$ обозначает скачок подынтегральной функции на соответствующем разрезе – значение функции над разрезом минус значение ниже разреза.

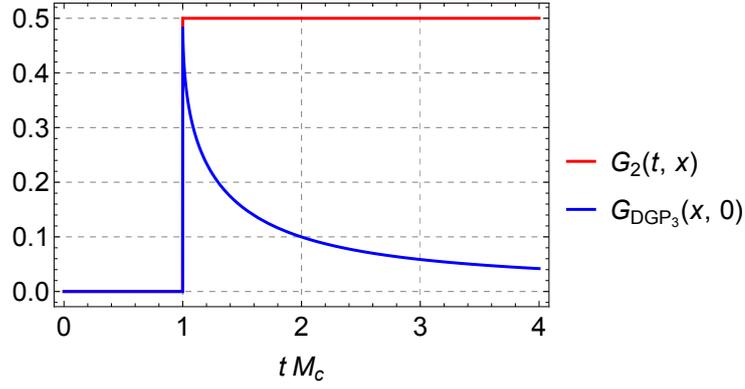


Рис. 4.3. Запаздывающие функции Грина трехмерной DGP-модели на бране и двумерного безмассового скалярного поля (здесь $|x| = M_c^{-1}$).

Вычисляя скачки на разрезах с помощью ур. (4.2.28–4.2.31), мы приходим к следующему интегралу для функции Грина

$$G(x; 0) = \frac{M_c^2}{4\pi^2} \theta(t) \int dp e^{ipx} \int d\xi \frac{\sin \sqrt{\xi^2 + p^2} t}{\sqrt{\xi^2 + p^2}} \frac{1}{\xi^2 + M_c^2}, \quad (4.2.33)$$

где мы учли, что $\omega = \text{sgn}(\xi) \sqrt{\xi^2 + p^2}$. Поскольку синус является четной функцией, подынтегральная функция здесь однозначна и аналитична во всех комплексных ξ - и p -плоскостях.

Оставшиеся интегралы легко вычисляются [150], и функция Грина принимает вид

$$G(x; 0) = \frac{M_c}{4} \theta(t - |x|) \left[I_0(M_c \sqrt{t^2 - x^2}) - \mathbb{L}_0(M_c \sqrt{t^2 - x^2}) \right], \quad (4.2.34)$$

где $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода, а $\mathbb{L}_0(x)$ — функция Струве [150]. Сравнивая ур. (4.2.34) с функцией Грина двумерного безмассового скалярного поля (4.2.16), мы находим, что возмущение поля на бране, достигнув точки наблюдения со скоростью света, затухает в ней со временем, в отличие от случая двумерного безмассового поля, см. рис. (4.3). Это затухание соответствует утечке поля с браны в дополнительное измерение, в соответствии с метастабильным характером эффективного гравитона в DGP-модели [94, 100]. В соответствии с двумерной DGP-моделью (4.2.15), возмущение поля остается квазилокализованным на бране в течение интервала времени $\Delta t \sim M_c^{-1}$.

Однако, ур. (4.2.34) неудобно для дальнейших вычислений, и мы перепишем его в другом виде. Заметим, что в ур. (4.2.33) интеграл по импульсу пропорционален функции Грина двумерного массивного поля [58], и ξ играет роль эффективной массы. Тогда перепишем функцию Грина на бране как

$$G(x; 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\mu \rho(\mu) G_2(x|\mu), \quad \rho(\mu) = \frac{M_c^2}{M_c^2 + \mu^2}, \quad (4.2.35)$$

$$G_2(x|\mu) = \frac{1}{2} \theta(t) \theta(t^2 - x^2) J_0(\mu \sqrt{t^2 - x^2}), \quad (4.2.36)$$

где $G_2(x|\mu)$ – запаздывающая функция Грина двумерного массивного скалярного поля [58], и мы переобозначили эффективную массу как $\xi = \mu$. Таким образом, поле на бране раскладывается на непрерывный спектр двумерных массивных калуца-клейновских мод, по аналогии с эффективным гравитоном на бране в DGP-модели [93, 94, 100, 102]. Спектральная функция $\rho(\mu)$ в интеграле по калуца-клейновским массам определяет характерный диапазон мод, вносящих вклад в возмущения поля на бране.

4.2.3. Функция Грина пятимерной DGP-модели

Наконец, перейдем к вычислению запаздывающей функции Грина пятимерной DGP-модели. По аналогии с ур. (4.2.18–4.2.21), совершаем Фурье-преобразование функции Грина по координатам на бране, подставляем ее в ур. (4.2.2) и разделяем его на уравнение в балке и условия сшивки на бране. Из полученных уравнений находим Фурье-интеграл для функции Грина, аналогичный ур. (4.2.22)

$$G_{\text{DGP}}(x; y) = - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx} e^{i\sqrt{p^2}|y|}}{r_c p^2 + 2i\sqrt{p^2}}. \quad (4.2.37)$$

В случае функции Грина на бране данный Фурье-интеграл значительно упрощается

$$G_{\text{DGP}}(x; 0) = - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i\omega t} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}}{r_c(\omega^2 - \mathbf{p}^2) + 2i\sqrt{\omega^2 - \mathbf{p}^2}}. \quad (4.2.38)$$

Можно показать, что ур. (4.2.38) совпадает с Фурье-интегралом для функции Грина эффективного четырёхмерного уравнения движения поля на бране (4.1.15).

Интеграл (4.2.38) вычисляется по аналогии с трехмерной функцией Грина. Единственным отличием здесь является тройной интеграл по пространственным компонентам импульса в ур. (4.2.33), который легко вычисляется [58, 150]. В итоге, мы находим следующее калуца-клейновское разложение для запаздывающей функции Грина на бране

$$G_{\text{DGP}}(x; 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\mu \rho(\mu) G_4(x|\mu), \quad \rho(\mu) = \frac{M_c^2}{\mu^2 + M_c^2} \quad (4.2.39)$$

$$G_4(x|\mu) = \frac{\theta(t)}{2\pi} \left[\delta(x^2) J_0(\mu\sqrt{x^2}) - \frac{1}{2} \frac{\theta(x^2)}{\sqrt{x^2}} \mu J_1(\mu\sqrt{x^2}) \right], \quad (4.2.40)$$

где $G_4(x|\mu)$ – запаздывающая функция Грина четырехмерного массивного скалярного поля [58]. Вычисляя интеграл по калуца-клейновским массам [150], мы находим явный вид функции Грина на бране

$$G_{\text{DGP}}(x; 0) = \frac{M_c}{4\pi} \theta(t) \left\{ \delta(x^2) \left[I_0(M_c\sqrt{x^2}) - \mathbb{L}_0(M_c\sqrt{x^2}) \right] + \frac{M_c \theta(x^2)}{2 \sqrt{x^2}} \left[I_1(M_c\sqrt{x^2}) - \frac{1}{2} \mathbb{L}_{-1}(M_c\sqrt{x^2}) - \frac{1}{2} \mathbb{L}_1(M_c\sqrt{x^2}) - \frac{1}{\pi} \right] \right\}. \quad (4.2.41)$$

Однако, в дальнейших вычислениях мы будем пользоваться калуца-клейновским разложением функции Грина (4.2.39). Заметим, что в соответствии с нарушением принципа Гюйгенса в пятимерном балке DGP-модели, функция Грина (4.2.41) локализована не только на световом конусе, но и внутри него. Корректность ур. (4.2.39–4.2.40) может быть проверена за счет вычисления поля статического заряда (см. Приложение 7). Полученное поле совпадает с выражением, найденным в нормальномbranche DGP-модели [17], что подтверждает его связь с граничным условием излучения в балке.

В соответствии с ур. (4.2.1), запаздывающее поле на бране записывается как

$$\varphi(x; 0) = -\frac{1}{2\pi M_5^3} \int_0^\infty d\mu \rho(\mu) \int d^4 x' G_4(x - x'|\mu) j(x'). \quad (4.2.42)$$

Для удобства дальнейших вычислений перепишем его в виде непрерывного спектра четырехмерных массивных калуца-клейновских мод с источниками $j(x)$

$$\varphi(x; 0) = -\frac{1}{2\pi M_5^3} \int_0^\infty d\mu \rho(\mu) \psi(x|\mu), \quad (4.2.43)$$

$${}_4\Box\psi(x|\mu) + \mu^2\psi(x|\mu) = j(x), \quad (4.2.44)$$

$$\psi(x|\mu) = \int d^4 x' G_4(x - x'|\mu) j(x'). \quad (4.2.45)$$

Для вычисления эффективного четырехмерного потока энергии скалярного излучения через 2-сферу на бране достаточно найти излучаемую часть производной поля на бране, так как его эффективный четырехмерный тензор энергии-импульса на бране (4.1.18) является билинейной формой производных поля. В свою очередь, излучаемая часть производной поля на бране определяется излучаемой частью производной четырехмерного массивного скалярного поля

$$[\partial_\mu \varphi(x; 0)]^{\text{rad}} = -\frac{1}{2\pi M_5^3} \int_0^\infty d\mu \rho(\mu) [\partial_\mu \psi(x|\mu)]^{\text{rad}}. \quad (4.2.46)$$

В результате проблема излучения в скалярной DGP-модели сводится к задаче об излучении четырехмерного массивного скалярного поля. В свою очередь, излучаемая часть производной четырехмерного массивного поля может быть найдена за счет его связи с безмассовыми полями в размерностях четыре и пять, излучаемые части которых известны (см. ур. (2.1.4) и (1.5.5), соответственно).

4.3. Излучение четырехмерного массивного поля

Полное решение проблемы излучения четырехмерного массивного поля (4.2.44–4.2.45) представляется нетривиальной задачей обобщения подхода Рорлиха-Тейтельбойма, поскольку здесь даже свободное поле не распространяется точно со скоростью света. Однако понятие

излучаемой части *производной поля* может быть непосредственно экстраполировано на массивную теорию за счет ее связи с безмассовыми полями в размерностях четыре и пять.

4.3.1. Размерная редукция пятимерного безмассового поля

Рассмотрим пятимерное безмассовое скалярное поле с источником $j(x)$ на плоской 3-бране. Его уравнение движения имеет вид

$${}_5\Box\Psi(x; y) = j(x)\delta(y). \quad (4.3.1)$$

Совершим Фурье-преобразование поля по координате вдоль дополнительного измерения

$$\Psi(x; y) = \int \frac{d\mu}{2\pi} e^{i\mu y} \tilde{\Psi}(x; \mu), \quad (4.3.2)$$

где мы обозначили компоненту 5-импульса в балке как μ . Подставив его в ур. (4.3.1), получаем эффективное четырехмерное уравнение движения для Фурье-образа

$${}_4\Box\tilde{\Psi}(x; \mu) + \mu^2\tilde{\Psi}(x; \mu) = j(x), \quad (4.3.3)$$

совпадающее с уравнением для четырехмерного массивного поля (4.2.44). Запаздывающее решение ур. (4.3.1) можно построить из запаздывающего решения эффективного уравнения движения для Фурье-образа (4.3.3), которое записывается как

$$\tilde{\Psi}(x; \mu) = \int d^4x' G_4(x - x'|\mu) j(x') = \psi(x|\mu), \quad (4.3.4)$$

где $\psi(x|\mu)$ определяется из ур. (4.2.44–4.2.45). Поскольку четырехмерная массивная функция Грина (4.2.40) является четной функцией массы поля, запаздывающее решение ур. (4.3.1) может быть представлено в виде

$$\Psi(x; y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\mu \cos \mu y \psi(x|\mu). \quad (4.3.5)$$

В частности, отсюда следует, что поле на бране дается следующим интегралом

$$\Psi(x; 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\mu \psi(x|\mu). \quad (4.3.6)$$

Оно имеет вид аналогичный полю на бране в DGP-модели (4.2.43) с тем отличием, что здесь спектральная функция имеет простой вид $\rho(\mu) = 1$. Таким образом, пятимерное безмассовое поле на бране представляется как непрерывный спектр массивных калуца-клейновских мод.

Таким образом, излучаемая часть пятимерного безмассового поля на бране также должна иметь калуца-клейновское разложение в непрерывный спектр излучаемых частей четырехмерных массивных полей

$$[\partial_\mu \Psi(x; 0)]^{\text{rad}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\mu [\partial_\mu \psi(x|\mu)]^{\text{rad}}. \quad (4.3.7)$$

Поскольку излучаемая часть пятимерного безмассового поля, в соответствии с подходом Рорлиха-Тейтельбойма, выделяется как ведущая $\hat{\rho}$ -асимптотика его производной [60, 85, 86, 90], то мы предполагаем, что в силу ур. (4.3.7) излучаемая часть производной четырехмерного массивного поля также может быть выделена аналогичным способом. Ниже мы покажем, что излучаемая часть четырехмерного массивного поля, выделенная в соответствии с подходом Рорлиха-Тейтельбойма, вместе с ур. (4.3.7) приводит к правильному выражению для излучаемой части пятимерного безмассового поля.

Заметим, что ур. (4.3.7) справедливо при движении заряда на бране, поскольку тогда в силу определений запаздывающих ковариантных величин (1.3.1 – 1.3.3) мы имеем

$$\hat{\rho}_{5D}|_{y=0} = \hat{v}_M(x^M - \hat{z}^M)|_{y=0} = \hat{v}_\mu(x^\mu - \hat{z}^\mu) = \hat{\rho}_{4D} \equiv \hat{\rho}, \quad (4.3.8)$$

$$\hat{c}_{5D}^M|_{y=0} = \frac{1}{\hat{\rho}}(x^M - \hat{z}^M)|_{y=0} = \frac{1}{\hat{\rho}}\delta_\mu^M(x^\mu - \hat{z}^\mu) = \{\hat{c}_{4D}^\mu; 0\}, \quad (4.3.9)$$

где $\hat{\rho}_{5D}$ и \hat{c}_{5D}^M – ковариантные запаздывающие величины в пятимерном балке, а $\hat{\rho}_{4D}$ и \hat{c}_{4D}^μ определены на бране.

4.3.2. Безмассовый предел четырехмерного поля

Корректность применения подхода Рорлиха-Тейтельбойма для выделения излучаемой части четырехмерного массивного поля может быть дополнительно проверена путем расчета его безмассового предела. Действительно, в безмассовом пределе $\mu \rightarrow 0$ излучаемая часть массивного поля должна совпадать с излучаемой частью безмассового поля

$$[\partial_\mu \psi(x|\mu)]^{\text{rad}} \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} [\partial_\mu \psi(x)]^{\text{rad}}, \quad (4.3.10)$$

$${}_4\Box\psi(x|\mu) + \mu^2\psi(x|\mu) = j(x) \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} {}_4\Box\psi(x) = j(x). \quad (4.3.11)$$

В свою очередь, излучаемая часть четырехмерного безмассового скалярного поля была получена нами ранее в разделе 2.1.1 (см. ур. (2.1.4)). В частности, когда источником поля является точечный скалярный заряд, излучаемая часть четырехмерного безмассового скалярного поля имеет вид

$$[\partial_\mu \psi(x)]^{\text{rad}} = -\frac{g\hat{c}_\mu(\hat{a}\hat{c})}{4\pi\hat{\rho}}. \quad (4.3.12)$$

4.3.3. Излучаемая часть четырехмерного массивного поля

Выделим ведущую $\hat{\rho}$ -асимптотику производной четырехмерного массивного поля и покажем, что она удовлетворяет ур. (4.3.7) и (4.3.10) и, таким образом, соответствует излучаемой части производной четырехмерного массивного поля.

Подставляя скалярный ток (4.1.3) в ур. (4.2.45) и используя ур. (1.4.40), мы приходим к запаздывающему четырехмерному массивному полю точечного заряда в виде

$$\psi(x|\mu) = -\frac{g}{4\pi} \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \left[\frac{\mu J_1(\mu\sqrt{X^2})}{\sqrt{X^2}} - \frac{\delta(\tau - \hat{\tau})}{\hat{\rho}} \right], \quad (4.3.13)$$

где мы использовали условие $J_0(0) = 1$ [150]. По аналогии с пятимерным безмассовым полем, интегрируя по частям с помощью соотношения

$$\frac{\mu J_1(\mu\sqrt{X^2})}{\sqrt{X^2}} = \frac{1}{(vX)} \frac{d}{d\tau} J_0(\mu\sqrt{X^2}), \quad (4.3.14)$$

мы устраняем локальный член и приходим к следующему выражению

$$\psi(x|\mu) = -\frac{g}{4\pi} \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \frac{(aX) - 1}{(vX)^2} J_0(\mu\sqrt{X^2}). \quad (4.3.15)$$

Покажем, что полученное запаздывающее четырехмерное массивное поле удовлетворяет ур. (4.3.6). Используя соотношение для функции Бесселя нулевого порядка [150]

$$\int_0^{\infty} dx J_0(bx) = \frac{1}{b}, \quad (4.3.16)$$

вычисляем интеграл по калуца-клейновским массам, получая уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\mu \psi(x|\mu) = -\frac{g}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \frac{(aX) - 1}{(vX)^2 \sqrt{X^2}}, \quad (4.3.17)$$

правая часть которого совпадает с запаздывающим пятимерным безмассовым полем точечного заряда (1.5.3). Проверим также, что в безмассовом пределе уравнение (4.3.15) совпадает с ур. (2.1.2). Для этого проинтегрируем по его частям

$$\psi(x|0) = -\frac{g}{4\pi} \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \frac{(aX) - 1}{(vX)^2} = \frac{g}{4\pi} \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \frac{d}{d\tau} \frac{1}{(vX)} = \frac{g}{4\pi} \frac{1}{(vX)} \Big|_{-\infty}^{\hat{\tau}} = \frac{g}{4\pi\hat{\rho}}. \quad (4.3.18)$$

Здесь мы предполагали, что заряд движется внутри ограниченной области пространства.

Вычисляя производную запаздывающего поля (4.3.15) и устраняя из нее локальный вклад, возникающий в результате дифференцирования верхнего предела интегрирования, с помощью интегрирования по частям с учетом ур. (4.3.14), мы приходим к выражению

$$\partial_{\mu} \psi(x|\mu) = -\frac{g}{4\pi} \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \left[\frac{(\dot{a}X)}{(vX)^3} X_{\mu} - 3 \frac{((aX) - 1)^2}{(vX)^4} X_{\mu} - 3 \frac{(aX) - 1}{(vX)^3} v_{\mu} + \frac{a_{\mu}}{(vX)^2} \right] J_0(\mu\sqrt{X^2}). \quad (4.3.19)$$

Здесь все члены подынтегральной функции содержат один дампинг-фактор $J_0(\mu\sqrt{X^2})$, определяющий вклад истории движения заряда в поле. Такая форма производной поля позволяет лучше контролировать выделение ее ведущей $\hat{\rho}$ -асимптотики.

При выделении ведущей $\hat{\rho}$ -асимптотики производной поля мы считаем, что величина $\mu\hat{\rho}$ в аргументе функции Бесселя имеет конечное значение, поскольку спектральные функции в пятимерной безмассовой теории (4.3.6) и в DGP-модели (4.2.39) имеют конечное значение в диапазоне масс $\mu \rightarrow 0$. В этом диапазоне отношение Лоренц-инвариантного расстояния $\hat{\rho}$ к характерному масштабу расстояний $1/\mu$, определяемому калуца-клейновской массой, конечно. В результате именно это соотношение будет определять интенсивность утечки излучения в балк по мере его удаления от источника. Таким образом, выделив ведущую $\hat{\rho}$ -асимптотику ур. (4.3.19), мы получаем

$$[\partial_\mu \psi(x|\mu)]^{\text{rad}} = -\frac{g\hat{c}_\mu}{4\pi\hat{\rho}} \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \left[\frac{(\dot{a}\hat{c})}{(v\hat{c})^3} - 3\frac{(a\hat{c})^2}{(v\hat{c})^4} \right] J_0(\mu\sqrt{2\hat{\rho}(Z\hat{c})}). \quad (4.3.20)$$

Убедимся, что полученная ведущая $\hat{\rho}$ -асимптотика удовлетворяет ур. (4.3.7) и (4.3.10). Уравнение (4.3.7) легко доказывается с помощью ур. (4.3.16) и (4.3.8–4.3.9)

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\mu [\partial_\mu \psi(x|\mu)]^{\text{rad}} = -\frac{g\hat{c}_\mu}{2^{5/2}\pi^2\hat{\rho}^{3/2}} \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \left[\frac{(\dot{a}\hat{c})}{(v\hat{c})^3\sqrt{(Z\hat{c})}} - 3\frac{(a\hat{c})^2}{(v\hat{c})^4\sqrt{(Z\hat{c})}} \right], \quad (4.3.21)$$

где полученный интеграл совпадает с излучаемой частью пятимерного безмассового поля (1.5.5). Корректность безмассового предела доказывается по аналогии с ур. (4.3.18)

$$\begin{aligned} [\partial_\mu \psi(x|0)]^{\text{rad}} &= -\frac{g\hat{c}_\mu}{4\pi\hat{\rho}} \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \left[\frac{(\dot{a}\hat{c})}{(v\hat{c})^3} - 3\frac{(a\hat{c})^2}{(v\hat{c})^4} \right] = -\frac{g\hat{c}_\mu}{4\pi\hat{\rho}} \int_{-\infty}^{\hat{\tau}} d\tau \frac{d}{d\tau} \frac{(a\hat{c})}{(v\hat{c})^3} \\ &= -\frac{g\hat{c}_\mu}{4\pi\hat{\rho}} \frac{d}{d\tau} \frac{(a\hat{c})}{(v\hat{c})^3} \Big|_{-\infty}^{\hat{\tau}} = -\frac{g(\hat{a}\hat{c})\hat{c}_\mu}{4\pi\hat{\rho}}, \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

где полученное уравнение совпадает с ур. (4.3.12). Здесь для получения корректного безмассового предела на мировую линию заряда было наложено дополнительное асимптотическое условие, аналогичное найденному работе [86] и соответствующее равномерному прямолинейному движению заряда в удаленном прошлом

$$a^\mu \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow -\infty. \quad (4.3.23)$$

Однако на практике мировая линия заряда во многих случаях может быть аппроксимирована более простыми законами движения, для которых это условие не выполняется, за счет наличия в подынтегральном выражении в ур. (4.3.20) дампинг-фактора $J_0(\mu\sqrt{2\hat{\rho}(Z\hat{c})})$, делающего две мировые линии эффективно эквивалентными в прошлом.

Таким образом, мы показали, что излучаемая часть производной четырехмерного массивного поля может быть выделена по аналогии с безмассовыми полями как его ведущая $\hat{\rho}$ -асимптотика, в соответствии с подходом Рорлиха-Тейтельбойма к излучению.

4.4. Утечка излучения с браны

Перейдем к вычислению излучения точечного заряда в скалярной DGP-модели. В соответствии с ур. (4.2.46) и (4.3.20), излучаемая часть поля на бране имеет вид

$$[\partial_\mu \varphi(x; 0)]^{\text{rad}} = \frac{g\hat{c}_\mu}{8\pi^2 M_5^3 \hat{\rho}} \int_0^\infty d\mu \rho(\mu) \int_{-\infty}^{\hat{t}} d\tau \left[\frac{(\dot{a}\hat{c})}{(v\hat{c})^3} - 3 \frac{(a\hat{c})^2}{(v\hat{c})^4} \right] J_0(\mu \sqrt{2\hat{\rho}(Z\hat{c})}), \quad (4.4.1)$$

где спектральная функция дается ур. (4.2.39). В соответствии с нарушением принципа Гюйгенса в пятимерном балке DGP-модели, излучаемая часть поля на бране (4.4.1) зависит от полной истории движения заряда, предшествующей запаздывающему времени. В ур. (4.4.1) можно сначала вычислить интеграл по калуца-клейновским массам, чтобы получить явный вид дампинг-фактора в интеграле по истории движения заряда. Однако, удобнее сначала вычислить интеграл по истории движения, а уже затем вычислять интеграл по калуца-клейновским массам.

В нерелятивистском пределе уравнение для излучаемой части поля на бране существенно упрощается. По аналогии с безмассовыми полями в размерностях три и пять, с помощью ур. (1.4.13–1.4.15) и (1.4.19) мы находим нерелятивистское приближение для излучаемой части поля на бране в виде

$$[\partial_\mu \varphi(x; 0)]^{\text{rad}} \simeq -\frac{g\bar{c}_\mu}{8\pi^2 M_5^3 r} \int_0^\infty d\mu \rho(\mu) \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \dot{\mathbf{a}}\mathbf{n} J_0(\mu \sqrt{2r(\bar{t} - t')}), \quad \bar{c}_\mu = \{1, -\mathbf{n}\}. \quad (4.4.2)$$

Заметим, что в скалярной DGP-модели, с точностью до ведущего вклада в нерелятивистском приближении, заряд, движущийся с постоянным ускорением, не излучает, в отличие от четырехмерной безмассовой теории (4.3.12). Аналогичный результат был получен нами в Главе 1 в теории пятимерного безмассового скалярного поля (1.5.8). Однако, в Главе 3 было продемонстрировано, что в пятимерной ОТО точечная масса с постоянным ускорением генерирует гравитационное излучение. В итоге, мы предполагаем, что в DGP-модели гравитации равноускоренно движущаяся масса также излучает гравитационные волны.

4.4.1. Излучение заряда на круговой орбите

Вычислим эффективный четырехмерный поток энергии скалярного излучения через 2-сферу на бране – наблюдаемую эффективную мощность скалярного излучения – для нерелятивистского заряда, движущегося по фиксированной круговой траектории. Полученное уравнение будет характеризовать интенсивность утечки скалярного излучения с браны в дополнительное измерение.

Мировая линия нерелятивистского заряда на круговой орбите на бране имеет вид

$$\mathbf{z}(t) = \{R_0 \cos \omega_0 t, R_0 \sin \omega_0 t, 0\}, \quad (4.4.3)$$

где R_0 – радиус орбиты, а ω_0 – частота орбитального движения. Подставляя эту мировую линию в ур. (4.4.2), для интеграла по истории движения мы находим [150]

$$\int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \dot{\mathbf{a}} \mathbf{n} J_0(\mu \sqrt{2r(\bar{t} - t)}) = R_0 \omega_0^2 \sin \theta \left[\sin(\omega_0 \bar{t} - \phi) \sin \frac{r\mu^2}{2\omega_0} - \cos(\omega_0 \bar{t} - \phi) \cos \frac{r\mu^2}{2\omega_0} \right], \quad (4.4.4)$$

где мы используем сферические координаты на бране $\mathbf{n} = \{\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta\}$. Вычисляя интеграл по калуца-клейновским массам [150], приходим к излучаемой части производной поля на бране в виде

$$\begin{aligned} [\partial_\mu \varphi(x; 0)]^{\text{rad}} &= \frac{g \bar{c}_\mu}{8\pi M_4^2 r} R_0 \omega_0^2 \sin \theta \left[\cos(\omega_0 \bar{t} - \phi - x^2) - \sqrt{2} \cos\left(\omega_0 \bar{t} - \phi - x^2 - \frac{\pi}{4}\right) C(x) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2} \sin\left(\omega_0 \bar{t} - \phi - x^2 - \frac{\pi}{4}\right) S(x) \right], \quad x \equiv \sqrt{\frac{r M_c^2}{2\omega_0}}, \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

где $C(x)$ и $S(x)$ – косинусный и синусный интегралы Френеля, соответственно [150].

Подставляя ур. (4.4.5) в (4.1.18), мы находим излучаемую часть эффективного четырехмерного тензора энергии-импульса поля на бране

$$\begin{aligned} \Theta_{\mu\nu}^{\text{rad}} &= \frac{g^2 \bar{c}_\mu \bar{c}_\nu}{32\pi^2 M_4^2 r^2} R_0^2 \omega_0^4 \sin^2 \theta \left[\cos(\omega_0 \bar{t} - \phi - x^2) - \sqrt{2} \cos\left(\omega_0 \bar{t} - \phi - x^2 - \frac{\pi}{4}\right) C(x) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2} \sin\left(\omega_0 \bar{t} - \phi - x^2 - \frac{\pi}{4}\right) S(x) \right]^2. \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

По аналогии с задачей излучения безмассовых полей в Главе 1, мы находим эффективный четырехмерный поток энергии скалярного излучения через 2-сферу на бране как

$$W_{\text{br}}(r) = \int d\Omega_2 \Theta_{\text{rad}}^{0i} n^i r^2, \quad n^i = \frac{x^i}{|\mathbf{x}|}. \quad (4.4.7)$$

Подставляя полученную излучаемую часть эффективного тензора энергии-импульса в ур. (4.4.7), после интегрирования по угловым переменным [150] мы приходим к эффективному четырехмерному потоку энергии скалярного излучения через 2-сферу радиуса r на бране – эффективной четырехмерной мощности скалярного излучения заряда на бране

$$W_{\text{br}}^{\text{circ}}(r) = \frac{g^2 R_0^2 \omega_0^4}{24\pi M_4^2} \left[1 - 2C(x) - 2S(x) + 2C^2(x) + 2S^2(x) \right]. \quad (4.4.8)$$

Прежде всего отметим, что в пределе $M_5 \rightarrow 0$, который переводит рассматриваемую модель в четырехмерную теорию безмассового скалярного поля

$$M_5^3 {}_5\Box\varphi + M_4^2 \delta(y) {}_4\Box\varphi = -\frac{1}{2} j(x) \delta(y) \xrightarrow{M_5 \rightarrow 0} {}_4\Box\varphi = -\frac{1}{2M_4^2} j(x), \quad (4.4.9)$$

эффективный поток энергии излучения также переходит в стандартную четырехмерную форму, теряя зависимость от радиуса сферы, через которую он проходит

$$\lim_{x \rightarrow 0} C(x), S(x) = 0 \quad \implies \quad W_{\text{br}}^{\text{circ}}(r) \xrightarrow{M_5 \rightarrow 0} \frac{g^2 R_0^2 \omega_0^4}{24\pi M_4^2} = \text{Const}. \quad (4.4.10)$$

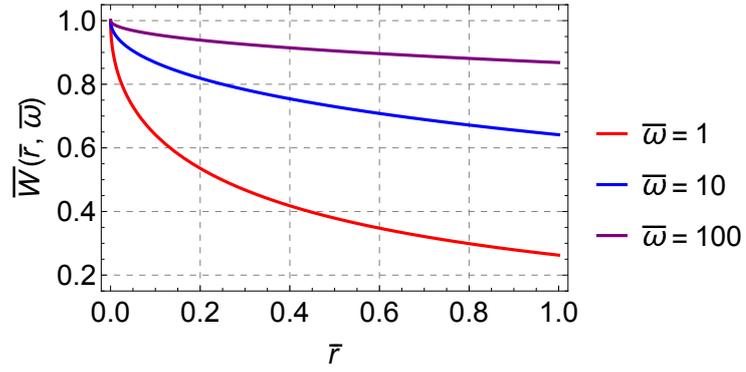


Рис. 4.4. Зависимость эффективного четырехмерного потока энергии излучения через 2-сферу на бране от ее радиуса для различных значений частоты сигнала.

Проанализируем полученную формулу для эффективной мощности излучения на бране. Для этого построим нормированный поток энергии излучения

$$\bar{W}_{\text{br}}^{\text{circ}}(r) = \frac{W_{\text{br}}^{\text{circ}}(r)}{W_{\text{br}}^{\text{circ}}(0)} = 1 - 2C(x) - 2S(x) + 2C^2(x) + 2S^2(x). \quad (4.4.11)$$

Также введем безразмерные параметры расстояния $\bar{r} = rM_c$ и частоты $\bar{\omega} = \omega_0/M_c$. В результате, нормированная эффективная мощность излучения на бране принимает вид

$$\bar{W}_{\text{br}}^{\text{circ}}(\bar{r}, \bar{\omega}) = 1 - 2C(\sqrt{\bar{r}/2\bar{\omega}}) - 2S(\sqrt{\bar{r}/2\bar{\omega}}) + 2C^2(\sqrt{\bar{r}/2\bar{\omega}}) + 2S^2(\sqrt{\bar{r}/2\bar{\omega}}). \quad (4.4.12)$$

Из рис. (4.4) мы находим, что эффективный поток энергии монотонно убывает с радиусом сферы, через которую он проходит, в соответствии с постепенным утеканием в балк возмущений поля, распространяющихся вдоль браны (метастабильная скалярная частица распадается на бране [94, 100]). Отметим также, что чем выше частота орбитального движения, а следовательно и частота сигнала, тем меньше интенсивность утечки скалярного излучения в балк по мере его удаления от источника (см. рис. (4.4)), в соответствии с инфракрасной прозрачностью балка в DGP-модели [92, 103]. В частности, в соответствии с коэффициентом прохождения браны (4.1.26), имеющим максимум на нулевой частоте и монотонно убывающим с частотой сигнала, высокочастотные сигналы оказываются квазилокализованными на бране.

На основании полученной эффективной четырехмерной мощности скалярного излучения на бране (4.4.12) можно предварительно проанализировать возможность экспериментального наблюдения эффекта утечки гравитационных волн в дополнительное измерение. Мы выбираем параметры DGP-модели таким образом, чтобы переходный масштаб соответствовал современному радиусу Хаббла $r_c \sim H_0^{-1} \sim 10^{26}$ м или же, эквивалентно, $M_c \sim 10^{-42}$ ГэВ [110, 111]. Определим долю излучения, которая утекла с браны за время удаления волнового

фронта на расстояние r_c от источника, как

$$\Delta\bar{W}(\bar{\omega}) = 1 - \bar{W}_{\text{br}}^{\text{circ}}(\bar{r} = 1, \bar{\omega}). \quad (4.4.13)$$

В результате, мы находим, что для сигналов с частотами в диапазоне чувствительности современных и будущих гравитационно-волновых обсерваторий [29] интенсивность утечки излучения в балк крайне мала:

- Обсерватория LIGO: $\nu_{\text{ch}} \sim 10^2$ Гц $\implies \bar{\omega}_0 \sim 10^{20} \implies \Delta\bar{W} \sim 10^{-10}$,
- Обсерватория LISA: $\nu_{\text{ch}} \sim 10^{-3}$ Гц $\implies \bar{\omega}_0 \sim 10^{15} \implies \Delta\bar{W} \sim 10^{-8}$.

Таким образом, экспериментальное наблюдение утечки гравитационных волн в дополнительное измерение с использованием современных и будущих гравитационно-волновых обсерваторий представляется крайне маловероятным.

В свою очередь, сигналы, утечка которых на масштабах $r \sim r_c$ оказывала бы хоть сколько-нибудь значительный эффект, т.е. для которых

$$\Delta\bar{W} \gtrsim 10^{-2}, \quad (4.4.14)$$

должны иметь частоты порядка $\omega_0 \lesssim 10^{-13}$ Гц, что значительно ниже диапазонов чувствительности гравитационно-волновых обсерваторий [29]. С другой стороны, чтобы было возможно обнаружить утечку сигналов из диапазонов чувствительности современных гравитационно-волновых обсерваторий, переходный радиус r_c должен иметь гораздо меньшую величину. В частности, чтобы утечка гравитационных волн могла быть обнаружена с помощью наблюдений на обсерватории LISA, переходный радиус DGP-модели должен быть порядка $r_c \sim 10^{17}$ м. Однако, столь малые значения не согласуются с ограничениями на r_c , полученными с помощью наблюдений в Солнечной системе [174, 175]. В частности, из результатов работы [175] следует, что для согласования наблюдений прецессии перицентра орбиты Луны с предсказаниями DGP-модели переходный радиус должен удовлетворять ограничению снизу $r_c \gtrsim 10^{25}$ м.

4.5. Выводы

Целью данной Главы было исследование эффекта утечки гравитационных волн в дополнительное измерение, соответствующего метастабильному характеру эффективного гравитона на бране, в рамках скалярного аналога DGP-модели. В качестве источника поля мы рассматривали точечный заряд, движущийся по фиксированной мировой линии на плоской

бране. Эта модель корректно воспроизводит основные особенности DGP-гравитации, обеспечивая тем самым оценку данного эффекта для гравитационных волн. Мы уточнили ряд технических деталей данной модели и выявили особенности, связанные с нарушением принципа Гюйгенса в балке. Основные особенности поведения поля в балке и на бране были также проиллюстрированы с помощью низкоразмерных моделей.

Поскольку в DGP-модели поле на бране раскладывается на непрерывный спектр массивных калуца-клейновских мод, для выделения его излучаемой части мы обобщили подход Рорлиха-Тейтельбойма к излучению на случай четырехмерного массивного поля, используя его связи с безмассовыми полями в размерностях четыре и пять. В частности, мы продемонстрировали, что за счет нарушения принципа Гюйгенса в пятимерном балке излучаемая часть поля на бране зависит от истории движения заряда, предшествующей запаздывающему времени, а не от его состояния в этот момент, в отличие от четырехмерной безмассовой теории. В результате, в соответствии с результатами Главы 2, в DGP-модели также ожидается формирование нелокальных хвостовых сигналов в гравитационном излучении эллиптических двойных систем. Помимо этого, мы получили формулу для эффективного четырехмерного потока энергии скалярного излучения через 2-сферу на бране, создаваемого нерелятивистским зарядом на круговой орбите (4.4.8). Было обнаружено, что полученная эффективная мощность излучения на бране монотонно убывает с радиусом сферы, через которую оно проходит (см. рис. (4.4)), в соответствии с метастабильным характером соответствующей эффективной скалярной частицы на бране, что приводит к утечке излучения в дополнительное измерение. Также было показано, что в соответствии с инфракрасной прозрачностью балка в DGP-модели интенсивность утечки излучения оказывается выше для низкочастотных сигналов (см. рис. (4.4)).

Используя полученную формулу для эффективной мощности излучения на бране, мы оценили интенсивность утечки излучения в дополнительное измерение и проанализировали возможность экспериментального наблюдения данного эффекта. Мы показали, что при «реалистичном» выборе переходного радиуса $r_c \sim 10^{26}$ м в рамках нашей модели эффект утечки излучения в дополнительное измерение пренебрежимо мал даже для сигналов в диапазоне частот, доступных для регистрации гравитационно-волновой обсерваторией LISA [29]. Более того, данный эффект может быть существенным либо в случае сигналов крайне низкой частоты, недоступных для экспериментального наблюдения современными и будущими гравитационно-волновыми обсерваториями, либо в случае малых значений переходного радиуса r_c , которые делают гравитационную DGP-модель феноменологически нежизнеспособной.

Аналогичный эффект был также обнаружен в работе [105] в модифицированной RS2-мо-

дели, которая содержит метастабильный эффективный гравитон на видимой бране. Однако, в нашей работе впервые было получено явное выражение для эффективной мощности излучения на бране, позволяющее оценить интенсивность утечки излучения в дополнительное измерение.

Глава 5

Гравитационное излучение в DGP-гравитации

Данная Глава посвящена изучению процесса гравитационного излучения в DGP-модели гравитации. А именно, мы получаем аналог квадрупольной формулы для эффективной мощности гравитационного излучения произвольного нерелятивистского источника на бране. Для этого мы развиваем процедуру построения эффективного тензора энергии-импульса гравитационного поля на бране из нелокального эффективного действия DGP-модели на основе метода Нетер, используемого для определения законов сохранения, соответствующих симметриям действия. С ее помощью мы строим эффективный тензор энергии-импульса динамических степеней свободы DGP-гравитации на бране и находим из него эффективный четырехмерный поток энергии гравитационного излучения. Мы также получаем оценки для параметров эмпирической формулы Деффайе-Меноу (3.2). В частности, в соответствии с результатами Главы 4, мы обнаруживаем, что частота гравитационно-волнового сигнала управляет эффективным переходным радиусом DGP-модели, за которым проявляется утечка гравитационных волн в дополнительное измерение.

5.1. DGP-модель гравитации

В обозначениях, используемых в Главе 3, действие DGP-гравитации с одним бесконечным дополнительным измерением, дополненное граничными членами, имеет вид [17]

$$\begin{aligned}
 S = & \frac{1}{2} M_5^3 \int_{\Omega} d^5 X \sqrt{-\mathcal{G}} \mathcal{R} + M_5^3 \oint_{\partial\Omega} d^4 \mathcal{Y} \sqrt{|\mathcal{H}|} \mathcal{E} \mathcal{K} + \frac{1}{2} M_4^2 \int_{\sigma} d^4 x \sqrt{-g} R \\
 & + M_4^2 \oint_{\partial\sigma} d^3 \theta \sqrt{|\mathbb{H}|} \epsilon \mathbb{K} - \Lambda \int_{\sigma} d^4 x \sqrt{-g} + \int_{\sigma} d^4 x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{mat}}.
 \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

После преобразований, аналогичных проведенным в Главе 3, действие DGP-модели в Гауссовой системе координат браны записывается как (см., например, [122])

$$\begin{aligned}
 S = & \frac{1}{2} M_5^3 \int_{y_-}^{y_+} dy \int_{\sigma_y} d^4 x \sqrt{-g} N (R + K^2 - K^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}) + M_5^3 \int_{y_-}^{y_+} dy \int_{\partial\sigma_y} d^3 \theta \sqrt{|\mathbb{H}|} \epsilon \mathbb{K} N \\
 & + \frac{1}{2} M_4^2 \int_{y_-}^{y_+} dy \int_{\sigma_y} d^4 x \sqrt{-g} R \delta(y) + M_4^2 \int_{y_-}^{y_+} dy \oint_{\partial\sigma_y} d^3 \theta \sqrt{|\mathbb{H}|} \epsilon \mathbb{K} \delta(y) \\
 & - \Lambda \int_{y_-}^{y_+} dy \int_{\sigma_y} d^4 x \sqrt{-g} \delta(y) + \int_{y_-}^{y_+} dy \int_{\sigma_y} d^4 x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{mat}} \delta(y).
 \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

Здесь также необходимо учесть связь внешней кривизны браны с производной индуцированной метрики по координате y в балке (3.1.77).

Уравнения движения гравитационного поля в DGP-модели имеют вид

$$R - K^2 + K^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} = 0, \quad (5.1.3)$$

$$\nabla_\alpha (K^{\mu\alpha} - g^{\mu\alpha} K) = 0, \quad (5.1.4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} M_5^3 \sqrt{-g} N \left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} K^2 + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} K^{\mu\nu} K_{\mu\nu} \right) \\ & + \frac{1}{2} M_5^3 \sqrt{-g} (g_{\alpha\beta} \nabla_\sigma \nabla^\sigma N - \nabla_\alpha \nabla_\beta N) + \frac{1}{2} M_5^3 g_{\alpha\beta} \partial_y (\sqrt{-g} K) - \frac{1}{2} M_5^3 g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \partial_y (\sqrt{-g} K^{\mu\nu}) \\ & - M_5^3 \sqrt{-g} N g^{\mu\nu} K_{\alpha\mu} K_{\beta\nu} - M_5^3 \sqrt{-g} K_{\nu(\alpha} \nabla^\nu N_{\beta)} + \frac{1}{2} M_5^3 \sqrt{-g} \nabla_\rho ((K_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} K) N^\rho) \\ & + \frac{1}{2} M_4^2 \sqrt{-g} \left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \right) \delta(y) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{\text{м}\alpha\beta} \delta(y) - \frac{1}{2} \sqrt{-g} \Lambda g_{\alpha\beta} \delta(y). \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

По аналогии с Главой 3, тензор энергии-импульса материи $T_{\text{м}\alpha\beta}$ определяется ур. (3.1.81).

Из ур. (5.1.5) получаем также условия сшивки Израэля на бране [109, 123, 157, 162]

$$g_{\alpha\beta}|_{y=-0} = g_{\alpha\beta}|_{y=+0}, \quad (5.1.6)$$

$$- M_5^3 [K_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} K]_{y=0} + M_4^2 \left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \right) \Big|_{y=0} = T_{\text{м}\alpha\beta} - \Lambda g_{\alpha\beta}|_{y=0}. \quad (5.1.7)$$

В пределе нулевого натяжения $\Lambda = 0$ плоская брана, вложенная в пятимерное пространство Минковского, является решением вакуумных уравнений движения (5.1.3–5.1.5)

$$T_{\text{м}\alpha\beta} = 0, \quad \Lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, \quad N = 1, \quad N^\alpha = 0, \quad K_{\mu\nu} = 0. \quad (5.1.8)$$

Далее мы будем работать в этом предельном случае, линеаризуя уравнения движения гравитационного поля на данном фоне.

5.1.1. Линеаризованная DGP-гравитация

Рассмотрим малые возмущения гравитационного поля на выбранном фоне

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad N = 1 + n, \quad N^\mu = n^\mu, \quad |h_{\mu\nu}|, |n^\mu|, |n| \ll 1. \quad (5.1.9)$$

Наш вывод линеаризованных уравнений движения DGP-гравитации следует работе [123].

В линейном приближении уравнения движения (5.1.3–5.1.5) принимают вид

$$\partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} - \partial^\alpha \partial_\alpha h = 0, \quad (5.1.10)$$

$$\partial_y \partial_\alpha h^{\alpha\mu} - \partial_y \partial^\mu h + \partial^\mu \partial_\alpha n^\alpha - \partial^\alpha \partial_\alpha n^\mu = 0, \quad (5.1.11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} M_5^3 (\partial^\sigma \partial_\alpha h_{\beta\sigma} + \partial^\sigma \partial_\beta h_{\alpha\sigma} - \partial^\sigma \partial_\sigma h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \partial_\beta h - \eta_{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} + \eta_{\alpha\beta} \partial^\sigma \partial_\sigma h) \\ & + M_5^3 (\eta_{\alpha\beta} \partial^\sigma \partial_\sigma n - \partial_\alpha \partial_\beta n) + \frac{1}{2} M_5^3 (\eta_{\alpha\beta} \partial_y^2 h - \partial_y^2 h_{\alpha\beta} - 2\eta_{\alpha\beta} \partial_y \partial_\mu n^\mu + \partial_y \partial_\alpha n_\beta + \partial_y \partial_\beta n_\alpha) \\ & + \frac{1}{2} M_4^2 (\partial^\sigma \partial_\alpha h_{\beta\sigma} + \partial^\sigma \partial_\beta h_{\alpha\sigma} - \partial^\sigma \partial_\sigma h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \partial_\beta h - \eta_{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} + \eta_{\alpha\beta} \partial^\mu \partial_\mu h) \delta(y) \\ & = T_{\text{м}\alpha\beta} \delta(y). \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

Аналогично, условие сшивки Израэля (5.1.7) в линейном приближении записывается как

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}M_5^3[\eta_{\alpha\beta}\partial_y h - \partial_y h_{\alpha\beta} - 2\eta_{\alpha\beta}\partial_\sigma n^\sigma + \partial_\alpha n_\beta + \partial_\beta n_\alpha]_{y=0} + \frac{1}{2}M_4^2(\partial^\sigma\partial_\alpha h_{\beta\sigma} + \partial^\sigma\partial_\beta h_{\alpha\sigma} \\ & - \partial^\sigma\partial_\sigma h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\partial_\beta h - \eta_{\alpha\beta}\partial^\mu\partial^\nu h_{\mu\nu} + \eta_{\alpha\beta}\partial^\mu\partial_\mu h)|_{y=0} = T_{m\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

По аналогии с пятимерной ОТО, рассмотренной в Главе 3, полученные уравнения движения обладают калибровочной симметрией

$$h_{\alpha\beta} \rightarrow h_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \xi_\beta + \partial_\beta \xi_\alpha, \quad n^\mu \rightarrow n^\mu + \partial_y \xi^\mu, \quad n \rightarrow n. \quad (5.1.14)$$

Чтобы ее зафиксировать, по аналогии с Главой 3, мы накладываем пятимерное калибровочное условие Лоренца в балке

$$\partial^A H_{AB} - \frac{1}{2}\partial_B H = 0, \quad H = \eta^{AB} H_{AB}, \quad (5.1.15)$$

где возмущения пятимерной $\mathcal{G}_{AB} = \eta_{AB} + H_{AB}$ и индуцированной $h_{\alpha\beta}$ метрик связаны друг с другом уравнениями (3.1.88). В результате, уравнения движения принимают вид

$${}_5\Box(h_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}h) = 0, \quad y \neq 0, \quad (5.1.16)$$

$$({}_4\Box h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\partial_\beta h)|_{y=0} + m_c[\partial_y h_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}\partial_y h]|_{y=0} = -\frac{2}{M_4^2}T_{m\alpha\beta}, \quad (5.1.17)$$

$$\partial^\alpha h_{\alpha\beta} = \partial_\beta h, \quad n = \frac{1}{2}h, \quad n^\mu = 0. \quad (5.1.18)$$

Здесь мы разделили ур. (5.1.12) на уравнение движения в балке (5.1.16) и условие сшивки на бране (5.1.17), а последнее уравнение в (5.1.18) фиксирует остаточную калибровочную симметрию (5.1.14) с параметрами ${}_5\Box\xi_\mu = 0$. Для самосогласованности полученных уравнений требуется также сохранение тензора энергии-импульса материи на бране $\partial^\alpha T_{m\alpha\beta} = 0$.

По аналогии с Главой 4, накладывая на гравитационное поле условие излучения в балке, мы переписываем скачок производной индуцированной метрики на бране как

$$[\partial_y h_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}\partial_y h]|_{y=0} = 2\sqrt{-{}_4\Box}(h_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}h)|_{y=0}. \quad (5.1.19)$$

В итоге, условие сшивки (5.1.17), являющееся эффективным четырехмерным уравнением движения гравитационного поля на бране, принимает вид [123]

$$({}_4\Box h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\partial_\beta h)|_{y=0} + M_c\sqrt{-{}_4\Box}(h_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}h)|_{y=0} = -\frac{2}{M_4^2}T_{m\alpha\beta}. \quad (5.1.20)$$

Заметим, что наличие режима сильной связи в DGP-модели [124–126] накладывает ограничения на область применимости линейного приближения. Так, проводимые нами далее вычисления будут справедливы лишь для процессов излучения гравитационных волн источниками, представляющими собой систему гравитирующих тел, удаленных друг от друга на расстояние $r \gg (R_c^2/M_4)^{1/3}$, с характерными частотами движения таких систем $\omega \ll (M_c^2 M_4)^{1/3}$.

5.2. Эффективная теория на бране

Для вычисления эффективной четырехмерной мощности гравитационного излучения материи на бране необходимо построить эффективный тензор энергии-импульса (ТЭИ) гравитационного поля на бране. Это можно сделать по аналогии с эффективным ТЭИ скалярной DGP-модели, полученным в Главе 4 с помощью проецирования и локализации на бране полного пятимерного ТЭИ скалярного поля в балке. Однако, далее на основе метода Нетермы разработаем процедуру построения эффективного ТЭИ из нелокального эффективного действия DGP-модели на бране.

5.2.1. Эффективный тензор энергии-импульса DGP-скаляра

Для начала проиллюстрируем данный метод построения эффективного ТЭИ на бране на примере скалярной DGP-модели. За счет своей простоты она дает возможность легко дополнительно проверить предложенный метод с помощью вычисления локализованной на бране части полного пятимерного Гамильтониана скалярного поля в балке.

Эффективное действие на бране

Для удобства читателя напомним сначала метод построения эффективного действия на бране для скалярной DGP-модели [125] (см. также [122]).

Представим действие свободной скалярной DGP-модели (4.1.1) в виде

$$S = M_5^3 \int d^4x dy ((\partial_\alpha \varphi)^2 - (\partial_y \varphi)^2) + M_4^2 \int d^4x dy \delta(y) (\partial_\alpha \varphi)^2, \quad \eta_{\mu\nu} = (+ - - -). \quad (5.2.1)$$

Как было показано в Главе 4, решение соответствующего уравнения движения в балке

$${}_5\Box \varphi(x; y) = 0, \quad y \neq 0, \quad (5.2.2)$$

удовлетворяющее граничному условию излучения, может быть записано как

$$\varphi(x; y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{\varphi}(p) e^{-ipx} e^{\sqrt{-p^2}|y|} = e^{\sqrt{4}\Box|y|} \psi(x), \quad \psi(x) = \varphi(x; 0). \quad (5.2.3)$$

Чтобы найти эффективное действие для поля $\psi(x)$ на бране, подставим ур. (5.2.3) в пятимерное действие (5.2.1) и вычислим в нем интеграл вдоль дополнительного измерения.

Для этого разделяем часть действия в балке на два вклада слева и справа от браны и вычисляем в них интегралы по y

$$\begin{aligned} S &= M_5^3 \int d^4x \int_{\mathbb{R}^-} dy (\partial^\alpha \varphi \partial_\alpha \varphi - \partial_y \varphi \partial_y \varphi) + M_5^3 \int d^4x \int_{\mathbb{R}^+} dy (\partial^\alpha \varphi \partial_\alpha \varphi - \partial_y \varphi \partial_y \varphi) \\ &+ M_4^2 \int d^4x dy \delta(y) \partial^\alpha \varphi \partial_\alpha \varphi. \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Используя Фурье-образ решения в балке (5.2.3), с помощью леммы Римана-Лебега мы находим, что части действия в балке слева и справа от браны имеют одинаковый вид

$$M_5^3 \int d^4x \int_{\mathbb{R}^\pm} dy (\partial^\alpha \varphi \partial_\alpha \varphi - \partial_y \varphi \partial_y \varphi) = M_5^3 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \sqrt{-p^2} \tilde{\varphi}(p) \tilde{\varphi}(-p). \quad (5.2.5)$$

Совмещая их, мы переписываем часть действия в балке в координатном представлении с помощью применения в импульсном интеграле Фурье-образа δ -функции

$$\begin{aligned} M_5^3 \int d^4x dy (\partial^\alpha \varphi \partial_\alpha \varphi - \partial_y \varphi \partial_y \varphi) &= 2M_5^3 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int d^4k \delta^{(4)}(k+p) \sqrt{-p^2} \tilde{\varphi}(p) \tilde{\varphi}(k) \\ &= 2M_5^3 \int d^4x \psi \sqrt{{}_4\Box} \psi. \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Заметим, что из определения квадратного корня от даламбертиана, основанного на Фурье-преобразовании поля, следует возможность «интегрировать по частям» содержащие его выражения без изменения знака

$$\int d^4x A(x) \sqrt{{}_4\Box} B(x) = \int d^4x B(x) \sqrt{{}_4\Box} A(x). \quad (5.2.7)$$

В итоге, эффективное действие DGP-скаляра на бране принимает вид [125]

$$S_{\text{eff}} = M_4^2 \int d^4x \left(\partial^\alpha \psi \partial_\alpha \psi + M_c \psi \sqrt{{}_4\Box} \psi \right). \quad (5.2.8)$$

Отсюда находим эффективное уравнение движения на бране, совпадающее с полученным ранее ур. (4.1.15)

$$\frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta \psi} = 0 \quad \implies \quad {}_4\Box \psi - M_c \sqrt{{}_4\Box} \psi = 0. \quad (5.2.9)$$

Здесь при вариации действия мы воспользовались возможностью интегрировать по частям корень от даламбертиана без изменения знака.

Эффективный тензор энергии-импульса на бране

Эффективный ТЭИ DGP-скаляра на бране не может быть построен из действия (5.2.8) по стандартной формуле для канонического ТЭИ (см., например, [176]), т.к. эффективный Лагранжиан содержит не только первые производные поля, но и нелокальный член

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = M_4^2 \partial^\alpha \psi \partial_\alpha \psi + 2M_5^3 \psi \sqrt{{}_4\Box} \psi. \quad (5.2.10)$$

Построим его с помощью метода Нетер, используемого для определения законов сохранения, соответствующих симметриям действия [176]. В частности, в стандартной локальной теории сохранению ТЭИ соответствует инвариантность действия относительно глобальных сдвигов координат.

Совершим в действии (5.2.8) инфинитезимальные сдвиги координат, временно считая параметры преобразования функциями координат

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x), \quad \psi(x) \rightarrow \psi'(x') = \psi(x), \quad |\xi^\mu| \ll 1. \quad (5.2.11)$$

Производные поля и Якобиан преобразования координат раскладываются по ξ с точностью до первого порядка малости как

$$\partial'_\alpha = \partial_\alpha - \partial_\alpha \xi^\mu \partial_\mu + \mathcal{O}(\xi^2), \quad \det \left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} \right) = 1 + \partial_\sigma \xi^\sigma + \mathcal{O}(\xi^2), \quad (5.2.12)$$

$$\sqrt{4\Box'} = \sqrt{4\Box} - \partial^\alpha \xi^\beta \frac{1}{\sqrt{4\Box}} \partial_\alpha \partial_\beta - \frac{1}{2} \Box \xi^\alpha \frac{1}{\sqrt{4\Box}} \partial_\alpha + \mathcal{O}(\xi^2). \quad (5.2.13)$$

В результате таких преобразований действие (5.2.8) получает инфинитезимальное приращение, которое с точностью до граничных вкладов записывается как

$$S'_{\text{eff}}[\psi'] = S_{\text{eff}}[\psi] + \delta S_{\text{eff}}[\psi] + \mathcal{O}(\xi^2), \quad (5.2.14)$$

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{eff}}[\psi] = \int d^4x \left(-2M_4^2 \partial^\alpha \xi^\beta \partial_\alpha \psi \partial_\beta \psi + M_4^2 \partial_\sigma \xi^\sigma \partial^\alpha \psi \partial_\alpha \psi + 2M_5^3 \partial_\sigma \xi^\sigma \psi \sqrt{4\Box} \psi \right. \\ \left. - M_5^3 \partial^\alpha \xi^\beta \psi \frac{1}{\sqrt{4\Box}} \partial_\alpha \partial_\beta \psi + M_5^3 \partial^\alpha \xi^\beta \partial_\alpha \psi \frac{1}{\sqrt{4\Box}} \partial_\beta \psi \right). \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

Интегрируя по частям, переносим производные с ξ^α и далее считаем, что параметры преобразования являются константами

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{eff}} \stackrel{\Rightarrow}{=} \int d^4x \xi^\beta \partial^\alpha \left(2M_4^2 \partial_\alpha \psi \partial_\beta \psi - \eta_{\alpha\beta} M_4^2 \partial^\sigma \psi \partial_\sigma \psi - \eta_{\alpha\beta} 2M_5^3 \psi \sqrt{4\Box} \psi \right. \\ \left. + M_5^3 \psi \frac{1}{\sqrt{4\Box}} \partial_\alpha \partial_\beta \psi - M_5^3 \partial_\alpha \psi \frac{1}{\sqrt{4\Box}} \partial_\beta \psi \right), \quad \xi^\alpha = \text{Const}. \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

Здесь и далее $\stackrel{\Rightarrow}{=}$ обозначает результат интегрирования по частям с точностью до отбрасываемых в действии граничных членов. В пределе безмассового скалярного поля $M_5 \rightarrow 0$ мы бы получили в ур. (5.2.16) под знаком дивергенции канонический тензор энергии-импульса, сохраняющийся на уравнениях движения.

В случае DGP-модели $M_5 \neq 0$ мы можем устранить в ур. (5.2.16) часть вкладов под знаком дивергенции. После интегрирования по частям дивергенция нелокальной части приращения действия автоматически обращается в нуль без применения уравнений движения

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{eff}}^{\text{nl}} = \int d^4x \xi^\beta \partial^\alpha \left(-\eta_{\alpha\beta} 2M_5^3 \psi \sqrt{4\Box} \psi + M_5^3 \psi \frac{1}{\sqrt{4\Box}} \partial_\alpha \partial_\beta \psi - M_5^3 \partial_\alpha \psi \frac{1}{\sqrt{4\Box}} \partial_\beta \psi \right) \\ \stackrel{\Rightarrow}{=} \int d^4x \xi^\beta \left(-2M_5^3 \partial_\beta \psi \sqrt{4\Box} \psi - 2M_5^3 \psi \sqrt{4\Box} \partial_\beta \psi \right) \stackrel{\Rightarrow}{=} 0. \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

В результате, приращение эффективного действия DGP-скаляра принимает простой вид

$$\delta S_{\text{eff}} = \int d^4x \xi^\beta \partial^\alpha \left(2M_4^2 \partial_\alpha \psi \partial_\beta \psi - \eta_{\alpha\beta} M_4^2 \partial^\sigma \psi \partial_\sigma \psi \right). \quad (5.2.18)$$

Выражение под знаком дивергенции, не обращающееся автоматически в нуль при ее действии на него, является эффективным ТЭИ DGP-скаляра на бране

$$T_{\alpha\beta} = 2M_4^2 \left(\partial_\alpha \psi \partial_\beta \psi - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \partial^\sigma \psi \partial_\sigma \psi \right). \quad (5.2.19)$$

Тензор энергии-импульса (5.2.19) совпадает с эффективным ТЭИ (4.1.18), полученным в Главе 4 с помощью проецирования канонического ТЭИ DGP-скаляра в балке на брану и выделения из него части локализованной на бране. Заметим, что полученный эффективный ТЭИ (5.2.19) не сохраняется на уравнении движения (5.2.9)

$$\partial^\alpha T_{\alpha\beta} = 2M_4^2 \square \psi \partial_\beta \psi \neq 0, \quad (5.2.20)$$

в соответствии с метастабильным характером эффективного гравитона на бране [94].

Отметим также, что эффективный ТЭИ на бране (5.2.19) мог быть получен из эффективного Лагранжиана (5.2.10) по стандартной формуле для канонического ТЭИ [176] в пренебрежении нелокальным массовым членом. Далее аналогичный результат будет получен и для эффективного ТЭИ DGP-гравитации.

Локализованная часть пятимерного Гамильтониана

Для проверки полученного выражения для эффективного ТЭИ поля на бране (5.2.19) вычислим Гамильтониан пятимерной теории (5.2.1) и выделим из него часть, локализованную на бране. Она должна совпасть с компонентной T^{00} эффективного ТЭИ на бране, т.к. они обе определяют локализованную на бране плотность энергии DGP-скаляра.

Из действия (5.2.1) мы находим сопряженный импульс поля в балке

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi)} = 2M_5^3 \partial_0 \varphi + 2M_4^2 \delta(y) \partial_0 \varphi. \quad (5.2.21)$$

Соответственно, Гамильтониан DGP-скаляра в балке записывается как

$$\mathcal{H} = M_5^3 \left((\partial_0 \varphi)^2 + (\nabla \varphi)^2 + (\partial_y \varphi)^2 \right) + M_4^2 \delta(y) \left((\partial_0 \varphi)^2 + (\nabla \varphi)^2 \right). \quad (5.2.22)$$

Интегрируя его по малому интервалу вокруг браны $y \in (-\epsilon, \epsilon)$, $\epsilon \rightarrow +0$ с помощью ур. (5.2.3), мы находим часть Гамильтониана, локализованную на бране

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dy \mathcal{H} = M_4^2 \left((\partial_0 \psi)^2 + (\nabla \psi)^2 \right). \quad (5.2.23)$$

Очевидно, что компонента T^{00} эффективного ТЭИ DGP-скаляра (5.2.19) совпадает с полученным Гамильтонианом, локализованным на бране. Отсюда мы заключаем, что ур. (5.2.19) представляет собой корректное выражение для эффективного ТЭИ поля на бране.

5.2.2. Эффективный тензор энергии-импульса DGP-гравитации

Получим теперь аналогичным образом эффективный ТЭИ DGP-гравитации на бране. Начнем так же с краткого напоминания процедуры построения квадратичного эффективного действия DGP-гравитации на бране [122, 123, 125].

Эффективное действие на бране

Для построения квадратичного эффективного действия DGP-гравитации на бране воспользуемся действием (5.1.2) в форме

$$S = \frac{1}{2}M_5^3 \int d^4x \int dy \sqrt{-g} N (R + K^2 - K^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}M_4^2 \int d^4x \int dy \sqrt{-g} R \delta(y), \quad (5.2.24)$$

где мы опустили граничные члены в балке и на бране.

Раскладывая часть действия в балке по возмущениям гравитационного поля (5.1.9) с точностью до квадратичных вкладов, после интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} S_{\text{bulk}} \stackrel{\Rightarrow}{=} & \frac{1}{2}M_5^3 \int d^4x \int dy \left(-\frac{1}{4}\partial^\sigma h^{\mu\nu} \partial_\sigma h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\alpha h^{\mu\alpha} \partial^\sigma h_{\mu\sigma} + \frac{1}{2}h\partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}\partial^\sigma h \partial_\sigma h \right. \\ & - \frac{1}{4}\partial_y h^{\mu\nu} \partial_y h_{\mu\nu} + \frac{1}{4}(\partial_y h - 2\partial_\alpha n^\alpha)^2 + n\partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} - n\partial^\sigma \partial_\sigma h + \partial^\alpha n^\beta \partial_y h_{\alpha\beta} \\ & \left. - \frac{1}{2}\partial^\alpha n^\beta \partial_\alpha n_\beta - \frac{1}{2}\partial^\alpha n^\beta \partial_\beta n_\alpha \right). \end{aligned} \quad (5.2.25)$$

Для расцепки уравнений движения добавляем к действию в балке член, фиксирующий калибровку Лоренца (5.1.15)

$$\begin{aligned} S_{\text{gf}} = & -\frac{1}{4}M_5^3 \int d^4x \int dy \left(\left(\partial^\alpha h_{\alpha\beta} + \partial_y n_\beta - \frac{1}{2}\partial_\beta(h + 2n) \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\partial^\alpha n_\alpha + 2\partial_y n - \frac{1}{2}\partial_y(h + 2n) \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (5.2.26)$$

Совмещая их, после интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} S_{\text{bulk}} + S_{\text{gf}} \stackrel{\Rightarrow}{=} & \frac{1}{2}M_5^3 \int d^4x \int dy \left[-\frac{1}{4}\partial^\sigma h^{\mu\nu} \partial_\sigma h_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\partial_y h^{\mu\nu} \partial_y h_{\mu\nu} + \frac{1}{8}\partial^\sigma h \partial_\sigma h + \frac{1}{8}\partial_y h \partial_y h \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}\partial^\alpha n^\beta \partial_\alpha n_\beta - \frac{1}{2}\partial_y n^\beta \partial_y n_\beta - \frac{1}{2}\partial^\beta n \partial_\beta n - \frac{1}{2}\partial_y n \partial_y n + \frac{1}{2}\partial_\sigma n \partial^\sigma h + \frac{1}{2}\partial_y h \partial_y n \right]. \end{aligned} \quad (5.2.27)$$

Отсюда находим уравнения движения для полей n^α и n

$${}_5\Box n^\alpha = 0 \implies n^\alpha = 0, \quad {}_5\Box \left(n - \frac{1}{2}h \right) = 0 \implies n = \frac{1}{2}h. \quad (5.2.28)$$

Эти уравнения не изменяются в присутствие материи на бране, т.к. она взаимодействует лишь с индуцированной метрикой $g_{\mu\nu}$, поэтому далее мы будем использовать их решения.

Подставляя решения данных уравнений в действие в балке, после интегрирования по частям получаем

$$S_{\text{bulk}} + S_{\text{gf}} \stackrel{\Rightarrow}{=} \frac{1}{8} M_5^3 \int d^4x \int dy (h^{\mu\nu} \square h_{\mu\nu} - h_5 \square h). \quad (5.2.29)$$

Очевидно, что это действие приводит к полученному ранее уравнению движения возмущений индуцированной метрики в балке (5.1.16).

Раскладывая часть действия на бране с точностью до квадратичных вкладов

$$S_{\text{br}} = \frac{1}{8} M_4^2 \int d^4x \int dy \delta(y) (-\partial^\sigma h^{\mu\nu} \partial_\sigma h_{\mu\nu} + 2\partial_\alpha h^{\mu\alpha} \partial^\sigma h_{\mu\sigma} + 2h \partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} + \partial^\sigma h \partial_\sigma h) \quad (5.2.30)$$

и совмещая его с действием в балке (5.2.29), мы находим пятимерное уравнение движения свободного DGP-гравитона

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} M_4^2 ({}_4 \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial^\sigma h_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial^\sigma h_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} + \partial_\mu \partial_\nu h - \eta_{\mu\nu} {}_4 \square h) \delta(y) \\ & + \frac{1}{4} M_5^3 \square (h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h) = 0. \end{aligned} \quad (5.2.31)$$

Действуя на него 4-дивергенцией, получаем условие

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = \partial_\nu h, \quad (5.2.32)$$

которое в присутствии материи на бране соответствует условию сохранения ее ТЭИ. Подставляя его обратно в уравнение движения, получаем найденное ранее линеаризацией полного уравнения движения DGP-гравитации уравнение

$$M_4^2 ({}_4 \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h) \delta(y) + M_5^3 \square (h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h) = 0. \quad (5.2.33)$$

Отсюда следует, что возмущения метрики в балке, по аналогии с DGP-скаляром (5.2.3), могут быть записаны как

$$h_{\mu\nu}(x; y) = e^{\sqrt{-4} \square |y|} h_{\mu\nu}(x; 0). \quad (5.2.34)$$

Подставляя ур. (5.2.34) в квадратичное действие в балке и вычисляя интеграл по y , находим квадратичное эффективное действие DGP-гравитации на бране [122, 125]

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}} = & \frac{1}{8} M_4^2 \int d^4x \left(-\partial^\sigma h^{\mu\nu} \partial_\sigma h_{\mu\nu} + 2\partial_\alpha h^{\mu\alpha} \partial^\sigma h_{\mu\sigma} - 2\partial^\alpha h \partial^\beta h_{\alpha\beta} + \partial^\sigma h \partial_\sigma h \right. \\ & \left. - M_c (h \sqrt{-4} \square h - h^{\mu\nu} \sqrt{-4} \square h_{\mu\nu}) \right). \end{aligned} \quad (5.2.35)$$

Заметим, что оно совпадает с действием массивной гравитации Фирца-Паули [122, 123, 177] с точностью до замены нелокальной массы на стандартную «жесткую» массу

$$-M_c \sqrt{-4} \square \leftrightarrow m^2. \quad (5.2.36)$$

В частности, за счет отсутствия у него калибровочной симметрии эффективный DGP-гравитон на бране имеет пять динамических степеней свободы, по аналогии с массивным гравитоном.

Эффективный тензор энергии-импульса на бране

Получим эффективный ТЭИ DGP-гравитона на бране методом Нетер из эффективно-го действия (5.2.35). Для этого совершаем локальные сдвиги координат и соответствующее преобразование гравитационного поля

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x), \quad h_{\mu\nu}(x) \rightarrow h'_{\mu\nu}(x') = h_{\mu\nu}(x), \quad |\xi^\mu| \ll 1. \quad (5.2.37)$$

Законы преобразования производных поля и нелокальных членов даются уравнениями (5.2.12) и (5.2.13). Рассмотрим по отдельности приращения, которые получают под действием таких преобразований локальная и нелокальная части эффективного действия.

Начнем с нелокальной части эффективного действия

$$S_{\text{eff}}^{\text{nl}} = \frac{1}{4} M_5^3 \int d^4x \left(h^{\mu\nu} \sqrt{-4\Box} h_{\mu\nu} - h \sqrt{-4\Box} h \right), \quad (5.2.38)$$

т.к. приращение локальной части ожидаемо даст канонический ТЭИ безмассового гравитона. Находим приращение нелокальной части с точностью до первого порядка малости по инфинитезимальным сдвигам координат

$$S_{\text{eff}}^{\text{nl}}[h'_{\mu\nu}] = S_{\text{eff}}^{\text{nl}}[h_{\mu\nu}] + \delta S_{\text{eff}}^{\text{nl}}[h_{\mu\nu}] + \mathcal{O}(\xi^2), \quad (5.2.39)$$

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{eff}}^{\text{nl}} = \frac{1}{4} M_5^3 \int d^4x \left(h^{\mu\nu} \partial^\alpha \xi^\beta \frac{1}{\sqrt{-4\Box}} \partial_\alpha \partial_\beta h_{\mu\nu} - h \partial^\alpha \xi^\beta \frac{1}{\sqrt{-4\Box}} \partial_\alpha \partial_\beta h + \partial_\sigma \xi^\sigma h^{\mu\nu} \sqrt{-4\Box} h_{\mu\nu} \right. \\ \left. - \partial_\sigma \xi^\sigma h \sqrt{-4\Box} h + \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \partial_\beta \partial^\beta \xi^\alpha \frac{1}{\sqrt{-4\Box}} \partial_\alpha h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \partial_\beta \partial^\beta \xi^\alpha \frac{1}{\sqrt{-4\Box}} \partial_\alpha h \right). \end{aligned} \quad (5.2.40)$$

Интегрированием по частям снимаем производные с приращений координат ξ^α и далее считаем их постоянными

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{eff}}^{\text{nl}} \overset{\cong}{=} \frac{1}{4} M_5^3 \int d^4x \xi^\beta \partial^\alpha \left(-\frac{1}{2} h^{\mu\nu} \frac{1}{\sqrt{-4\Box}} \partial_\alpha \partial_\beta h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} h \frac{1}{\sqrt{-4\Box}} \partial_\alpha \partial_\beta h + \frac{1}{2} \partial_\alpha h^{\mu\nu} \frac{1}{\sqrt{-4\Box}} \partial_\beta h_{\mu\nu} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \partial_\alpha h \frac{1}{\sqrt{-4\Box}} \partial_\beta h - \eta_{\alpha\beta} h^{\mu\nu} \sqrt{-4\Box} h_{\mu\nu} + \eta_{\alpha\beta} h \sqrt{-4\Box} h \right), \quad \xi^\alpha = \text{Const}. \end{aligned} \quad (5.2.41)$$

За счет постоянства ξ^α можем привести первые два члена к виду билинейной формы по первым производным поля и объединить их со следующими двумя членами

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{eff}}^{\text{nl}} \overset{\cong}{=} \frac{1}{4} M_5^3 \int d^4x \xi^\beta \partial^\alpha \left(\partial_\alpha h^{\mu\nu} \frac{1}{\sqrt{-4\Box}} \partial_\beta h_{\mu\nu} - \partial_\alpha h \frac{1}{\sqrt{-4\Box}} \partial_\beta h - \eta_{\alpha\beta} h^{\mu\nu} \sqrt{-4\Box} h_{\mu\nu} \right. \\ \left. + \eta_{\alpha\beta} h \sqrt{-4\Box} h \right). \end{aligned} \quad (5.2.42)$$

Наконец, с помощью интегрирования по частям можно показать, что стоящая в приращении нелокальной части действия 4-дивергенция автоматически обращается в нуль без примене-

ния уравнений движения

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{eff}}^{\text{nl}} \rightleftharpoons & \frac{1}{4} M_5^3 \int d^4 x \xi^\beta \left({}_4\Box h^{\mu\nu} \frac{1}{\sqrt{-4\Box}} \partial_\beta h_{\mu\nu} - {}_4\Box h^{\mu\nu} \frac{1}{\sqrt{-4\Box}} \partial_\beta h_{\mu\nu} - {}_4\Box h \frac{1}{\sqrt{-4\Box}} \partial_\beta h \right. \\ & + {}_4\Box h \frac{1}{\sqrt{-4\Box}} \partial_\beta h - \partial_\beta h^{\mu\nu} \sqrt{-4\Box} h_{\mu\nu} + \partial_\beta h^{\mu\nu} \sqrt{-4\Box} h_{\mu\nu} + \partial_\beta h \sqrt{-4\Box} h \\ & \left. - \partial_\beta h \sqrt{-4\Box} h \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.2.43)$$

Таким образом, по аналогии с эффективным ТЭИ DGP-скаляра (5.2.19), нелокальная часть эффективного действия не дает вклада в эффективный ТЭИ DGP-гравитона.

Рассмотри теперь локальную часть действия

$$S_{\text{eff}}^{\text{loc}} = \frac{1}{8} M_4^2 \int d^4 x \left(-\partial^\sigma h^{\mu\nu} \partial_\sigma h_{\mu\nu} + 2\partial_\alpha h^{\mu\alpha} \partial^\sigma h_{\mu\sigma} - 2\partial^\alpha h \partial^\beta h_{\alpha\beta} + \partial^\sigma h \partial_\sigma h \right). \quad (5.2.44)$$

Под действием сдвигов координат (5.2.37) она приобретает следующее приращение

$$S_{\text{eff}}^{\text{loc}'}[h'_{\mu\nu}] = S_{\text{eff}}^{\text{loc}}[h_{\mu\nu}] + \delta S_{\text{eff}}^{\text{loc}}[h_{\mu\nu}] + \mathcal{O}(\xi^2), \quad (5.2.45)$$

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{eff}}^{\text{loc}} = & \frac{1}{2} M_4^2 \int d^4 x \partial^\alpha \xi^\beta \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha h^{\mu\nu} \partial_\beta h_{\mu\nu} - \partial_\beta h_{\mu\alpha} \partial_\nu h^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial^\mu h \partial_\beta h_{\mu\alpha} + \frac{1}{2} \partial_\beta h \partial^\mu h_{\mu\alpha} \right. \\ & - \frac{1}{2} \partial_\alpha h \partial_\beta h - \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta} \partial^\sigma h^{\mu\nu} \partial_\sigma h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\mu\nu} \partial^\sigma h_{\mu\sigma} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \partial^\mu h \partial^\nu h_{\mu\nu} \\ & \left. + \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta} \partial^\sigma h \partial_\sigma h \right). \end{aligned} \quad (5.2.46)$$

Снимаем производную с ξ^α интегрированием по частям и далее считаем их постоянными.

Интегрируя по частям, объединяем третий и четвертый члены приращения действия

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{eff}}^{\text{loc}} \rightleftharpoons & \frac{1}{2} M_4^2 \int d^4 x \xi^\beta \partial^\alpha \left(-\frac{1}{2} \partial_\alpha h^{\mu\nu} \partial_\beta h_{\mu\nu} + \partial_\beta h_{\mu\alpha} \partial_\nu h^{\mu\nu} - \partial_\beta h \partial^\mu h_{\mu\alpha} + \frac{1}{2} \partial_\alpha h \partial_\beta h \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta} \partial^\sigma h^{\mu\nu} \partial_\sigma h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\mu\nu} \partial^\sigma h_{\mu\sigma} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \partial^\mu h \partial^\nu h_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta} \partial^\sigma h \partial_\sigma h \right). \end{aligned} \quad (5.2.47)$$

С учетом в основном положительной сигнатуры метрики Минковского выражение под дивергенцией равно эффективному ТЭИ DGP-гравитона на бране с обратным знаком

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} = & \frac{1}{2} M_4^2 \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha h^{\mu\nu} \partial_\beta h_{\mu\nu} - \partial_\beta h_{\mu\alpha} \partial_\nu h^{\mu\nu} + \partial_\beta h \partial^\mu h_{\mu\alpha} - \frac{1}{2} \partial_\alpha h \partial_\beta h \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta} \partial^\sigma h^{\mu\nu} \partial_\sigma h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\mu\nu} \partial^\sigma h_{\mu\sigma} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \partial^\mu h \partial^\nu h_{\mu\nu} + \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta} \partial^\sigma h \partial_\sigma h \right). \end{aligned} \quad (5.2.48)$$

По аналогии с DGP-скаляром, полученный эффективный ТЭИ совпадает с ТЭИ, вычисляемым из эффективного Лагранжиана (5.2.35) по стандартной формуле для канонического ТЭИ в пренебрежении нелокальными членами.

Заметим, что в соответствии с принципом эквивалентности физический смысл имеет лишь плотность энергии гравитационного поля, усредненная по области пространства-времени в окрестности точки наблюдения $O_S(x)$ с характерным размером \mathcal{S} порядка нескольких

длин волн гравитационного поля [163, 165, 166]

$$\langle T_{\alpha\beta}(x) \rangle = \frac{1}{\mathcal{S}^4} \int_{O_{\mathcal{S}}(x)} d^4x' T_{\alpha\beta}(x'), \quad \mathcal{S} > \lambda. \quad (5.2.49)$$

При этом под знаком усреднения становится возможным интегрирование по частям с точностью до граничных членов порядка λ/\mathcal{S} , которыми можно пренебречь при выборе достаточно большой области усреднения. В результате, с помощью уравнений движения усредненный эффективный ТЭИ DGP-гравитации на бране может быть приведен к более простому виду

$$\langle T_{\alpha\beta} \rangle \cong \frac{1}{4} M_4^2 \left\langle \partial_\alpha h^{\mu\nu} \partial_\beta h_{\mu\nu} - \partial_\alpha h \partial_\beta h - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \partial^\sigma h^{\mu\nu} \partial_\sigma h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \partial^\sigma h \partial_\sigma h \right\rangle. \quad (5.2.50)$$

5.3. Динамические степени свободы DGP-гравитации

Как было указано выше, по аналогии с массивной гравитацией Фирца-Паули [177] эффективное действие DGP-гравитона (5.2.35) не обладает калибровочной симметрией. В результате, DGP-гравитон имеет больше степеней свободы, по сравнению с безмассовым гравитоном. Некоторые из них являются нединамическими и, соответственно, не переносят гравитационное излучение от источника поля на бесконечность. Однако, их вклад в эффективный ТЭИ (5.2.50) невозможно устранить калибровочным преобразованием, в отличие от безмассовой гравитации [164], в силу отсутствия у действия (5.2.35) калибровочной симметрии. При этом, учет вклада нединамических степеней свободы в гравитационное излучение может приводить к нефизическим результатам. Поэтому при вычислении гравитационного излучения в DGP-модели необходимо отдельно выделять эффективный ТЭИ динамических степеней свободы DGP-гравитона и с его помощью вычислять эффективную мощность гравитационного излучения источника на бране.

Будем строить эффективный ТЭИ динамических степеней свободы DGP-гравитации по динамической части эффективного действия (5.2.35). При этом вклады динамических (дСС) и нединамических (ндСС) степеней свободы в полное действие должны быть расцеплены, что является нетривиальной задачей в случае DGP-гравитации. Под дСС мы понимаем степени свободы поля, уравнения движения которых содержат их вторые производные по времени и для которых нет уравнений связи, выражающих их первые производные по времени через другие степени свободы.

5.3.1. Динамические степени свободы электродинамики

Продemonстрируем наш подход на примере электродинамики. Здесь вклад ндСС в ТЭИ устраняется автоматически, в отличие от гравитации. В результате, это дает возможность

вычислять электромагнитное излучение без перехода в унитарную калибровку.

Подсчет степеней свободы

Рассмотрим свободное электромагнитное поле с уравнением движения [59, 147]

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \eta_{\mu\nu} = (+ - - -). \quad (5.3.1)$$

Для определения дСС электромагнитного поля произведем его скалярно-векторное (СВ) разложение [164]

$$A_\mu = \{A_0, \partial_i \varphi + A_i^t\}, \quad \partial_i A_i^t = 0, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad (5.3.2)$$

где четыре степени свободы электромагнитного поля разделяются на две скалярных, относительно преобразований пространственных координат, степени свободы A_0 и φ и две векторных A_i^t . Соответственно, уравнения движения (5.3.1) переписываются как

$$-\Delta A_0 + \partial_0 \Delta \varphi = 0, \quad -\partial_0^2 \partial_i \varphi - \partial_0^2 A_i^t + \Delta A_i^t + \partial_i \partial_0 A_0 = 0, \quad \Delta \equiv \partial_i \partial_i. \quad (5.3.3)$$

Здесь вторые производные по времени имеют поля φ и A_i^t . Однако, за счет калибровочной симметрии электромагнитного поля

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha \quad \Longrightarrow \quad A_0 \rightarrow A_0 + \partial_0 \alpha, \quad \varphi \rightarrow \varphi + \alpha, \quad A_i^t \rightarrow A_i^t \quad (5.3.4)$$

поле φ оказывается Штюкельберговским полем и не является дСС. В частности, в унитарной калибровке $\varphi = 0$ уравнения движения принимают вид

$$\Delta A_0 = 0, \quad -\partial_0^2 A_i^t + \Delta A_i^t + \partial_i \partial_0 A_0 = 0. \quad (5.3.5)$$

Таким образом, электромагнитное поле имеет лишь две дСС A_i^t [164].

Это можно показать и без перехода в унитарную калибровку. Для этого разрешаем первое уравнение движения в (5.3.3) с учетом граничного условия $A_0, \varphi \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$

$$\Delta (\partial_0 \varphi - A_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad A_0 = \partial_0 \varphi. \quad (5.3.6)$$

Подставляя его решение во второе уравнение в (5.3.3), приходим к следующей системе уравнений движения

$$\partial_0^2 A_i^t - \Delta A_i^t = 0, \quad A_0 = \partial_0 \varphi. \quad (5.3.7)$$

Здесь так же лишь A_i^t имеет вторую производную по времени и, соответственно, являются дСС, в то время как A_0 и φ оказываются ндСС.

Заметим, что калибровочные преобразования (5.3.4) затрагивают лишь нединамические степени свободы A_0 и φ , в то время как A_i^t не меняется под их действием.

Вклад динамических степеней свободы в ТЭИ

Покажем, что на уравнениях движения ндСС электромагнитного поля не дают вклад в симметризованный ТЭИ [176]

$$T_{\alpha\beta} = F_{\alpha\mu}F_{\cdot\beta}^{\mu} + \frac{1}{4}\eta_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}^2. \quad (5.3.8)$$

Подставляя в него СВ-разложение электромагнитного поля (5.3.2) и расписывая его покомпонентно с помощью уравнений движения (5.3.7), получаем

$$T_{00} = \frac{1}{2}\partial_0 A_i^t \partial_0 A_i^t + \frac{1}{4}(\partial_i A_j^t - \partial_j A_i^t)(\partial_i A_j^t - \partial_j A_i^t), \quad T_{0k} = \partial_0 A_i^t (\partial_k A_i^t - \partial_i A_k^t), \quad (5.3.9)$$

$$T_{kl} = -\partial_0 A_k^t \partial_0 A_l^t + (\partial_k A_i^t - \partial_i A_k^t)(\partial_l A_i^t - \partial_i A_l^t) + \frac{1}{2}\delta_{kl}\partial_0 A_i^t \partial_0 A_i^t - \frac{1}{4}\delta_{kl}(\partial_i A_j^t - \partial_j A_i^t)(\partial_i A_j^t - \partial_j A_i^t). \quad (5.3.10)$$

Таким образом, все компоненты симметризованного ТЭИ электромагнитного поля в вакууме зависят лишь от дСС A_i^t . В совокупности с калибровочной инвариантностью симметризованного ТЭИ, это позволяет вычислять электромагнитное излучение, не переходя в унитарную калибровку.

Заметим, что часть вкладов в компоненты ТЭИ можно отбросить, т.к. они содержат производные поперечного вектора вдоль него самого $A_j^t \partial_j A_i^t$, которые должны обращаться в нуль. Это можно легко понять на примере плоской монохроматической волны

$$A_i^t = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \tilde{A}_i^t(k), \quad \tilde{A}_i^t(k) = \tilde{A}_i^t(k_0)\delta^{(4)}(k - k_0), \quad (5.3.11)$$

$$\partial_i A_i^t = 0 \quad \implies \quad \tilde{A}_i^t(k_0)k_{0i} = 0. \quad (5.3.12)$$

В этом случае для производной поперечного вектора вдоль него самого получаем

$$A_j^t \partial_j A_i^t = \int \frac{d^4 k d^4 k'}{(2\pi)^8} e^{-ix(k+k')} \tilde{A}_j^t(k') i k_j \tilde{A}_i^t(k) = \frac{e^{-2ik_0x}}{(2\pi)^8} i k_{0j} \tilde{A}_j^t(k_0) \tilde{A}_i^t(k_0) = 0. \quad (5.3.13)$$

В результате, компоненты симметризованного ТЭИ свободного электромагнитного поля могут быть записаны как

$$T_{00} = \frac{1}{2}\partial_0 A_i^t \partial_0 A_i^t + \frac{1}{2}\partial_i A_j^t \partial_i A_j^t, \quad (5.3.14)$$

$$T_{0k} = \partial_0 A_i^t \partial_k A_i^t, \quad (5.3.15)$$

$$T_{kl} = \partial_k A_i^t \partial_l A_i^t + \frac{1}{2}\delta_{kl}\partial_0 A_i^t \partial_0 A_i^t - \frac{1}{2}\delta_{kl}\partial_i A_j^t \partial_i A_j^t. \quad (5.3.16)$$

В (kl) -компонентах ТЭИ дополнительное сокращение вкладов происходит за счет уравнения движения (5.3.7) и соответствующего дисперсионного соотношения

$${}_4\Box A_i^t = 0 \quad \implies \quad k_{0\mu}^2 = 0. \quad (5.3.17)$$

Отсюда несложно увидеть, что будучи выраженным через дСС A_i^t симметризованный ТЭИ электромагнитного поля может быть представлен как

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu A_i^t \partial_\nu A_i^t - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha A_i^t \partial_\alpha A_i^t. \quad (5.3.18)$$

По своей структуре он совпадает с каноническим ТЭИ набора безмассовых «скалярных полей» $\{A_i^t\}$. Далее будет показано, что ТЭИ дСС как безмассовой гравитации, так и DGP-гравитации также имеет подобную структуру.

Действие и ТЭИ динамических степеней свободы

Наконец, выделим из действия свободного электромагнитного поля [59, 147]

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^2 \quad (5.3.19)$$

часть, соответствующую дСС, и получим из нее канонический ТЭИ дСС электромагнитного поля.

После интегрирования по частям с учетом условия поперечности дСС A_i^t действие свободного электромагнитного поля записывается как

$$S \overset{\Rightarrow}{=} \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_0 \partial_i \varphi \partial_0 \partial_i \varphi + \frac{1}{2} \partial_i A_0 \partial_i A_0 - \partial_0 \partial_i \varphi \partial_i A_0 + \frac{1}{2} \partial_0 A_i^t \partial_0 A_i^t - \frac{1}{2} \partial_j A_i^t \partial_j A_i^t \right). \quad (5.3.20)$$

Здесь вклады динамических и нединамических степеней свободы расцепились, и мы можем рассматривать действия для них по отдельности

$$S = S_d[A_i^t] + S_{nd}[\varphi, A_0], \quad (5.3.21)$$

$$S_d = \frac{1}{2} \int d^4x \partial^\mu A_i^t \partial_\mu A_i^t, \quad (5.3.22)$$

$$S_{nd} = \frac{1}{2} \int d^4x (\partial_0 \partial_i \varphi \partial_0 \partial_i \varphi + \partial_i A_0 \partial_i A_0 - 2 \partial_0 \partial_i \varphi \partial_i A_0). \quad (5.3.23)$$

Можно показать, что нединамическая часть действия инвариантна относительно калибровочных преобразований (5.3.4). Также можно убедиться, что полученные действия приводят к уравнениям движения (5.3.7).

Получим из динамической части действия канонический ТЭИ дСС электромагнитного поля по стандартной формуле [176]

$$T_d^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_d}{\partial(\partial_\mu A_i^t)} \partial_\nu A_i^t - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}_d, \quad \mathcal{L}_d = \frac{1}{2} \partial^\mu A_i^t \partial_\mu A_i^t. \quad (5.3.24)$$

В результате, мы находим канонический ТЭИ динамических степеней свободы электромагнитного поля, совпадающий с симметризованным ТЭИ (5.3.18)

$$T_{d\mu\nu} = \partial_\mu A_i^t \partial_\nu A_i^t - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha A_i^t \partial_\alpha A_i^t. \quad (5.3.25)$$

Таким образом, в электродинамике доступны два эквивалентных метода вычисления излучения:

- *С разделением степеней свободы.* Необходимо выделить действие дСС и получить соответствующие уравнения движения и канонический ТЭИ. После это следует решить уравнения движения дСС и вычислить переносимый ими поток энергии излучения.
- *Без разделения степеней свободы.* Необходимо построить симметризованный ТЭИ электромагнитного поля и решить уравнения движения поля, не разделяя динамические и нединамические степени свободы. Вычислить соответствующий поток энергии излучения. Вклады ндСС в него взаимно сократятся автоматически.

Далее мы покажем, что в случае гравитации второй способ вычисления гравитационного излучения недоступен (по крайней мере, при использовании ТЭИ Исааксона).

5.3.2. Динамические степени свободы гравитации

Покажем, что в случае гравитации ТЭИ Исааксона, будучи калибровочно инвариантным, все же содержит вклады ндСС, в отличие от электродинамики. В результате, для корректного вычисления гравитационного излучения необходимо либо переходить в унитарную калибровку для применения ТЭИ Исааксона, либо строить канонический ТЭИ дСС гравитационного поля.

ТЭИ Исааксона гравитационного поля

В соответствии с подходом Исааксона [165, 166] (см. также [163]), в ОТО ТЭИ гравитационного поля строится по квадратичной части разложения тензора Эйнштейна по малым возмущениям метрики

$$t_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi G} \langle (2)G_{\mu\nu} \rangle, \quad G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (5.3.26)$$

где $\bar{g}_{\mu\nu}$ является некоторой фоновой метрикой, а $(2)G_{\mu\nu}$ – квадратичное приближение тензора Эйнштейна по $h_{\mu\nu}$. При этом, наличие усреднения (5.2.49) должно гарантировать калибровочную инвариантность полученного ТЭИ.

На фоне пространства Минковского $\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ТЭИ Исааксона дается выражением

$$t_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi G} \left\langle (2)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(2)R - \frac{1}{2}h_{\mu\nu(1)}R \right\rangle, \quad \eta_{\mu\nu} = (- + + +), \quad (5.3.27)$$

где $(1)R$, $(2)R$ и $(2)R_{\mu\nu}$ обозначают разложения скаляра и тензора Риччи с точностью до первого и второго порядка малости по $h_{\mu\nu}$, соответственно. После интегрирования по частям под знаком усреднения ТЭИ Исааксона записывается как

$$t_{\mu\nu} \stackrel{\Rightarrow}{=} \frac{1}{8\pi G} \left\langle \frac{1}{4} \partial_\mu h^{\alpha\beta} \partial_\nu h_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} \partial_\mu h \partial^\beta h_{\beta\nu} - \frac{1}{4} \partial_\nu h \partial^\beta h_{\mu\beta} + \frac{3}{4} \partial^\beta h \partial_\beta h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial^\beta h_{\mu\nu} \partial^\alpha h_{\alpha\beta} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \partial^\beta h_{\beta\nu} \partial^\sigma h_{\mu\sigma} - \frac{1}{2} \partial_\sigma h_{\beta\nu} \partial^\sigma h_\mu^\beta - \frac{1}{8} \eta_{\mu\nu} \partial^\sigma h \partial_\sigma h + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha h^{\alpha\beta} \partial^\sigma h_{\sigma\beta} - \frac{1}{8} \eta_{\mu\nu} \partial_\sigma h_{\alpha\beta} \partial^\sigma h^{\alpha\beta} \right\rangle. \quad (5.3.28)$$

Заметим, что до этого момента считалось, что возмущения метрики удовлетворяют наиболее общему линейному уравнению движения (см., например, [163])

$$\partial^\sigma \partial_\mu h_{\sigma\nu} + \partial^\sigma \partial_\nu h_{\sigma\mu} - {}_4\Box h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu} {}_4\Box h = 0. \quad (5.3.29)$$

Можем упростить уравнение движения с помощью перехода в калибровку Лоренца

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\nu h \quad \Longrightarrow \quad {}_4\Box \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \right) = 0. \quad (5.3.30)$$

При этом ТЭИ (5.3.28) с учетом ур. (5.3.30) также значительно упрощается [165, 166]

$$t_{\mu\nu} \stackrel{\Rightarrow}{=} \frac{1}{32\pi G} \left\langle \partial_\mu h^{\alpha\beta} \partial_\nu h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial_\nu h \right\rangle. \quad (5.3.31)$$

Данный ТЭИ инвариантен относительно остаточных калибровочных преобразований

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu, \quad {}_4\Box \xi_\mu = 0 \quad (5.3.32)$$

с точностью до полной дивергенции, которой можно пренебречь под знаком усреднения

$$t_{\mu\nu} \rightarrow \frac{1}{32\pi G} \left\langle \partial_\mu h^{\alpha\beta} \partial_\nu h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial_\nu h + 2\partial_\mu h^{\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\alpha \xi_\beta + 2\partial_\nu h^{\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\alpha \xi_\beta - \partial_\mu h \partial_\nu \partial_\sigma \xi^\sigma \right. \\ \left. - \partial_\nu h \partial_\mu \partial_\sigma \xi^\sigma + 2\partial_\mu \partial^\alpha \xi^\beta \partial_\nu \partial_\alpha \xi_\beta + 2\partial_\mu \partial^\alpha \xi^\beta \partial_\nu \partial_\beta \xi_\alpha - 2\partial_\mu \partial_\sigma \xi^\sigma \partial_\nu \partial_\gamma \xi^\gamma \right\rangle \\ \stackrel{\Rightarrow}{=} \frac{1}{32\pi G} \left\langle \partial_\mu h^{\alpha\beta} \partial_\nu h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial_\nu h + \partial_\mu h \partial_\nu \partial_\alpha \xi^\alpha + \partial_\nu h \partial_\mu \partial_\alpha \xi^\alpha - \partial_\mu h \partial_\nu \partial_\sigma \xi^\sigma \right. \\ \left. - \partial_\nu h \partial_\mu \partial_\sigma \xi^\sigma - 2\partial_\mu \xi^\beta \partial_\nu {}_4\Box \xi_\beta + 2\partial_\mu \partial_\beta \xi^\beta \partial_\nu \partial^\alpha \xi_\alpha - 2\partial_\mu \partial_\sigma \xi^\sigma \partial_\nu \partial_\gamma \xi^\gamma \right\rangle = t_{\mu\nu}. \quad (5.3.33)$$

Таким образом, логично ожидать, что поток энергии гравитационного излучения, вычисленный с помощью ТЭИ Исааксона как в калибровке Лоренца (5.3.31), сохраняющей часть ндСС, так и в поперечно-бесследовой калибровке, устраняющей все ндСС, должен быть одним и тем же. Однако, ТЭИ (5.3.31) не приводит к корректной квадрупольной формуле для мощности гравитационного излучения нерелятивистского источника без перехода в поперечно-бесследовую калибровку. В частности, в Приложении 8 мы демонстрируем, что

данный ТЭИ дает нефизический отрицательный результат для мощности гравитационного излучения нерелятивистской точечной массы, совершающей гармонические колебания. Как будет показано далее, это связано с неустраненными вкладами ндСС гравитационного поля в ТЭИ Исааксона.

Подсчет степеней свободы

Для определения дСС безмассового гравитационного поля произведем его скалярно-векторно-тензорное (СВТ) разложение [164, 178–180]

$$h_{00} = -2\Phi, \quad h_{0i} = \partial_i B + S_i, \quad h_{ij} = -2\delta_{ij}\Psi + 2\partial_i\partial_j E + \partial_i F_j + \partial_j F_i + h_{ij}^{tt}, \quad (5.3.34)$$

$$\partial_i S_i = 0, \quad \partial_i F_i = 0, \quad \partial_i h_{ij}^{tt} = 0, \quad h_{ii}^{tt} = 0. \quad (5.3.35)$$

В результате, линеаризованные уравнения Эйнштейна (5.3.29) переписываются как

$$2\Delta\Psi = 0, \quad 4\partial_0\partial_i\Psi + \Delta(\partial_0 F_i - S_i) = 0, \quad (5.3.36)$$

$$\begin{aligned} \partial_0^2 h_{ij}^{tt} - \Delta h_{ij}^{tt} + 2\delta_{ij}(\Delta(\Phi - \Psi) + 2\partial_0^2\Psi - \partial_0^2\Delta E + \partial_0\Delta B) - 2\partial_i\partial_j(\Phi - \Psi) - 2\partial_0\partial_i\partial_j B \\ - \partial_0(\partial_i S_j + \partial_j S_i) + 2\partial_0^2\partial_i\partial_j E + \partial_0^2(\partial_i F_j + \partial_j F_i) = 0. \end{aligned} \quad (5.3.37)$$

Частично разрешим данные уравнения движения, чтобы получить уравнения связи компонент гравитационного поля. Так из первого уравнения в (5.3.36) с учетом граничного условия $h_{\mu\nu} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ находим

$$\Delta\Psi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Psi = 0. \quad (5.3.38)$$

Подставляя его решение во второе уравнение в (5.3.36), получаем

$$\Delta(\partial_0 F_i - S_i) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \partial_0 F_i = S_i. \quad (5.3.39)$$

С помощью ур. (5.3.38) и (5.3.39) мы находим след уравнения (5.3.37) в виде

$$\Delta(\Phi - \partial_0^2 E + \partial_0 B) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Phi + \partial_0 B = \partial_0^2 E. \quad (5.3.40)$$

В итоге, подставляя ур. (5.3.38), (5.3.39) и (5.3.40) в уравнение (5.3.37), мы переписываем систему уравнений движения гравитационного поля в виде

$$\partial_0^2 h_{ij}^{tt} - \Delta h_{ij}^{tt} = 0, \quad \Psi = 0, \quad \partial_0 F_i = S_i, \quad \Phi + \partial_0 B = \partial_0^2 E. \quad (5.3.41)$$

Здесь вторые производные по времени содержат поля h_{ij}^{tt} и E . Однако, поле E не является дСС. Чтобы это увидеть, воспользуемся калибровочной симметрией

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu, \quad \xi_\mu = \{\xi_0, \partial_i \xi + \xi_i^t\}, \quad \partial_i \xi_i^t = 0, \quad (5.3.42)$$

которая в СВТ-разложении (5.3.34) записывается как

$$\Phi \rightarrow \Phi - \partial_0 \xi_0, \quad B \rightarrow B + \xi_0 + \partial_0 \xi, \quad S_i \rightarrow S_i + \partial_0 \xi_i^t, \quad (5.3.43)$$

$$\Psi \rightarrow \Psi, \quad E \rightarrow E + \xi, \quad F_i \rightarrow F_i + \xi_i^t, \quad h_{ij}^{tt} \rightarrow h_{ij}^{tt}. \quad (5.3.44)$$

Отсюда видно, что E является Штюкельберговским полем и не может быть дСС. В частности, в унитарной калибровке $B = E = F_i = 0$ на уравнениях движения (5.3.41) все поля, кроме h_{ij}^{tt} , обращаются в нуль, в то время как последнее удовлетворяет свободному волновому уравнению. Таким образом, гравитационное поле имеет две дСС h_{ij}^{tt} [164].

Вклад нединамических степеней свободы в ТЭИ Исааксона

Подставляя СВТ-разложение гравитационного поля (5.3.34) в ТЭИ Исааксона (5.3.31), после интегрирования по частям и применения уравнений движения (5.3.41) мы приходим к следующему выражению

$$t_{\mu\nu} \stackrel{\Rightarrow}{=} \frac{1}{32\pi G} \langle \partial_\mu h_{ij}^{tt} \partial_\nu h_{ij}^{tt} + 2\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - 2\partial_\mu \partial_i B \partial_\nu \partial_i B - 2\partial_\mu S_i \partial_\nu S_i + 2\partial_\mu \partial_i F_j \partial_\nu \partial_i F_j - 2\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Delta E - 2\partial_\mu \Delta E \partial_\nu \Phi + 2\partial_\mu \Delta E \partial_\nu \Delta E \rangle. \quad (5.3.45)$$

Здесь мы воспользовались выражением для ТЭИ Исааксона в калибровке Лоренца (5.3.30), которая в СВТ-разложении (5.3.34) записывается как

$$\partial_0 \Phi + \Delta B + 3\partial_0 \Psi - \partial_0 \Delta E = 0, \quad -\partial_0 S_i + \Delta F_i = 0, \quad -\partial_0 B + \Psi + \Delta E - \Phi = 0. \quad (5.3.46)$$

Вне поперечно-бесследовой (унитарной) калибровки в ТЭИ Исааксона (5.3.31) сохраняются вклады ндСС, исчезающие лишь при переходе в унитарную калибровку на уравнениях движения (5.3.41)

$$B = E = F_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad t_{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi G} \langle \partial_\mu h_{ij}^{tt} \partial_\nu h_{ij}^{tt} \rangle. \quad (5.3.47)$$

Таким образом, в отличие от электродинамики, калибровочно-инвариантный ТЭИ Исааксона в общем случае сохраняет вклады ндСС, что приводит к необходимости либо вычислять гравитационное излучение в унитарной калибровке, либо отдельно выделять ТЭИ дСС.

Действие и ТЭИ динамических степеней свободы

Выделим динамическую часть действия безмассового гравитационного поля. Для этого воспользуемся квадратичным приближением действия Эйнштейна-Гильберта [163]

$$S = -\frac{1}{64\pi G} \int d^4x (\partial^\mu h^{\alpha\beta} \partial_\mu h_{\alpha\beta} + 2\partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu h - 2\partial_\mu h^{\mu\nu} \partial^\sigma h_{\sigma\nu} - \partial^\mu h \partial_\mu h). \quad (5.3.48)$$

Подставляя в него ур. (5.3.34) и (5.3.35), мы получаем [164]

$$S = S_d[h_{ij}^{tt}] + S_{nd}[\Phi, B, S_i, \Psi, E, F_i], \quad (5.3.49)$$

$$S_d = -\frac{1}{64\pi G} \int d^4x \partial^\alpha h_{ij}^{tt} \partial_\alpha h_{ij}^{tt}, \quad (5.3.50)$$

$$S_{nd} = \frac{1}{64\pi G} \int d^4x (16\partial_0\Psi\partial_0\Delta E - 24\partial_0\Psi\partial_0\Psi + 2\partial_0\partial_i F_j\partial_0\partial_i F_j + 2\partial_k S_i\partial_k S_i - 16\Delta B\partial_0\Psi - 4\partial_0 S_i\Delta F_i + 8\partial_i\Psi\partial_i\Psi - 16\partial_i\Phi\partial_i\Psi). \quad (5.3.51)$$

Таким образом, в безмассовой гравитации вклады дСС и ндСС в действие автоматически расщепляются, по аналогии с электродинамикой (5.3.21–5.3.23), и мы можем определить динамическую часть действия. Заметим, что калибровочная симметрия (5.3.43–5.3.44) полностью содержится в нединамической части действия, в то время как динамическая часть не затрагивается калибровочными преобразованиями, по аналогии с электродинамикой. Можно показать, что из действия (5.3.49) следуют уравнения движения

$${}_4\Box h_{ij}^{tt} = 0, \quad \Delta\Psi = 0, \quad \partial_0 B + \Phi = \partial_0^2 E, \quad S_i = \partial_0 F_i, \quad (5.3.52)$$

совпадающие с ур. (5.3.41), полученными линеаризацией полных уравнений Эйнштейна.

Построим канонический ТЭИ дСС безмассового гравитационного поля [176]

$$T_{d\cdot\nu}{}^\mu = -\frac{\partial\mathcal{L}_d}{\partial(\partial_\mu h_{ij}^{tt})} \partial_\nu h_{ij}^{tt} + \delta_\nu^\mu \mathcal{L}_d, \quad \mathcal{L}_d = -\frac{1}{64\pi G} \partial^\alpha h_{ij}^{tt} \partial_\alpha h_{ij}^{tt}. \quad (5.3.53)$$

Здесь канонический ТЭИ определяется с противоположным знаком, по сравнению с ур. (5.3.24), в силу применения метрики Минковского с в основном положительной сигнатурой. В итоге, канонический ТЭИ дСС безмассового гравитационного поля имеет вид

$$T_{d\mu\nu} = \frac{1}{32\pi G} \left(\partial_\mu h_{ij}^{tt} \partial_\nu h_{ij}^{tt} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha h_{ij}^{tt} \partial_\alpha h_{ij}^{tt} \right). \quad (5.3.54)$$

По аналогии с ТЭИ дСС электромагнитного поля (5.3.25), он также имеет структуру ТЭИ набора «скалярных полей» $\{h_{ij}^{tt}\}$. При усреднении (5.2.49) полученный ТЭИ на уравнениях движения (5.3.52) совпадает с ТЭИ Исааксона в унитарной калибровке [163, 165, 166]

$${}_4\Box h_{ij}^{tt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle T_{d\mu\nu} \rangle \stackrel{\cong}{=} \frac{1}{32\pi G} \langle \partial_\mu h_{ij}^{tt} \partial_\nu h_{ij}^{tt} \rangle. \quad (5.3.55)$$

Таким образом, в безмассовой гравитации, помимо применения ТЭИ Исааксона в унитарной калибровке, гравитационное излучение может быть эквивалентно вычислено как поток энергии через удаленную сферу, определяемый по каноническому ТЭИ дСС гравитационного поля.

5.3.3. Динамические степени свободы массивной электродинамики

Так как эффективное действие DGP-гравитации (5.2.35) не обладает калибровочной симметрией, в отличие от электродинамики и безмассовой гравитации, то перед тем, как переходить к выделению его динамической части, рассмотрим предварительно пару примеров калибровочно-неинвариантных теорий. Начнем с массивной электродинамики.

Действие свободной массивной электродинамики имеет вид [122, 123]

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} m^2 A_\mu^2 \right), \quad \eta_{\mu\nu} = (+ - - -). \quad (5.3.56)$$

Соответствующее ему уравнение движения записывается как

$$\partial^\alpha F_{\alpha\mu} + m^2 A_\mu = 0. \quad (5.3.57)$$

Действуя на него 4-дивергенцией, мы получаем уравнение связи $\partial^\mu A_\mu = 0$ для компонент векторного поля. С его помощью ур. (5.3.57) переписывается как система уравнений

$${}_4\Box A_\mu + m^2 A_\mu = 0, \quad \partial^\mu A_\mu = 0. \quad (5.3.58)$$

Как будет показано далее, для расцепки динамической и нединамической частей действия (5.3.56) необходимо ввести в него калибровочную симметрию с помощью Штюкельберговской замены полевых переменных [122, 123], после чего зафиксировать ее выбором такого калибровочного условия, что в терминах новых полевых переменных вклады динамических и нединамических степеней свободы в действие расцепляются.

Подсчет степеней свободы

Для определения дСС массивного векторного поля произведем его СВ-разложение, в соответствии с ур. (5.3.2). В результате, ур. (5.3.58) записываются как

$$\partial_0^2 A_0 - \Delta A_0 + m^2 A_0 = 0, \quad (5.3.59)$$

$$\partial_0^2 \partial_i \varphi + \partial_0^2 A_i^t - \Delta \partial_i \varphi - \Delta A_i^{tt} + m^2 \partial_i \varphi + m^2 A_i^{tt} = 0, \quad (5.3.60)$$

$$\partial_0 A_0 = \Delta \varphi. \quad (5.3.61)$$

Действуя 3-дивергенцией на (5.3.60), разделяем его на уравнения движения для φ и A_i^t

$$\Delta ({}_4\Box \varphi + m^2 \varphi) = 0 \quad \implies \quad {}_4\Box \varphi + m^2 \varphi = 0, \quad {}_4\Box A_i^t + m^2 A_i^t = 0. \quad (5.3.62)$$

Наконец, подставляя уравнение связи (5.3.61) в (5.3.59), мы приходим к следующей системе уравнений движения для массивного векторного поля

$$\partial_0 \Delta \varphi - \Delta A_0 + m^2 A_0 = 0, \quad \partial_0 A_0 = \Delta \varphi, \quad (5.3.63)$$

$${}_4\Box \varphi + m^2 \varphi = 0, \quad {}_4\Box A_i^t + m^2 A_i^t = 0. \quad (5.3.64)$$

Отсюда следует, что массивное векторное поле имеет три дСС φ и A_i^t , в отличие от безмассовой электродинамики, где поле φ являлось Штюкельберговским полем (5.3.4) [122, 123].

Действие и ТЭИ динамических степеней свободы

Расписывая действие массивной электродинамики (5.3.56) с помощью ур. (5.3.2), мы находим, что вклады динамических и нединамических степеней свободы не расцепляются

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_0 A_i^t \partial_0 A_i^t - \frac{1}{2} \partial_j A_i^t \partial_j A_i^t - \frac{1}{2} m^2 A_i^t A_i^t + \frac{1}{2} \partial_0 \partial_i \varphi \partial_0 \partial_i \varphi - \frac{1}{2} m^2 \partial_i \varphi \partial_i \varphi + \frac{1}{2} \partial_i A_0 \partial_i A_0 + \frac{1}{2} m^2 A_0 A_0 - \partial_0 \partial_i \varphi \partial_i A_0 \right). \quad (5.3.65)$$

А именно, последний член действия (5.3.65) содержит взаимодействие динамической степени свободы φ и нединамической A_0 . Подобный член присутствует также в действии безмассовой электродинамики (5.3.20), однако там поле φ является ндСС.

Расцепим вклады дСС и ндСС в действие с помощью метода Штюкельберга [122, 123], производя замену полевых переменных таким образом, чтобы у действия появилась калибровочная симметрия. А именно, совершим замену переменных

$$A_\mu = \tilde{A}_\mu + \partial_\mu \phi, \quad (5.3.66)$$

в результате которой действие (5.3.56) переписывается как

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} \tilde{F}_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} m^2 \tilde{A}_\mu^2 + m^2 \tilde{A}^\mu \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi \right). \quad (5.3.67)$$

Здесь появилось кинетическое взаимодействие полей \tilde{A}_μ и ϕ , а также действие приобрело калибровочную симметрию

$$\tilde{A}_\mu \rightarrow \tilde{A}_\mu + \partial_\mu \alpha, \quad \phi \rightarrow \phi - \alpha. \quad (5.3.68)$$

Уравнения движения, соответствующие полученному действию, имеют вид

$$\partial^\alpha \tilde{F}_{\alpha\mu} + m^2 \tilde{A}_\mu + m \partial_\mu \varphi = 0, \quad {}_4\Box \varphi + m \partial^\mu \tilde{A}_\mu = 0, \quad (5.3.69)$$

где мы перемасштабировали скалярное поле как $\phi = \varphi/m$. Действуя 4-дивергенцией на первое уравнение движения в (5.3.69), мы получаем из него второе уравнение. Наконец, подставляя в (5.3.69) обратную замену переменных $\tilde{A}_\mu = A_\mu - \partial_\mu \phi$, мы восстанавливаем систему уравнений движения (5.3.58).

Зафиксируем калибровочную симметрию (5.3.68), накладывая калибровочное условие, расцепляющее уравнения движения (5.3.69) и аналогичное по форме калибровке Лоренца в безмассовой электродинамике [122, 123]

$$\partial^\mu \tilde{A}_\mu = m\varphi \quad \implies \quad {}_4\Box \tilde{A}_\mu + m^2 \tilde{A}_\mu = 0, \quad {}_4\Box \varphi + m^2 \varphi = 0. \quad (5.3.70)$$

Добавляя в действие (5.3.67) соответствующий член, фиксирующий калибровку

$$S_{\text{gf}} = -\frac{1}{2} \int d^4x \left(\partial^\mu \tilde{A}_\mu - m\varphi \right)^2, \quad (5.3.71)$$

после интегрирования по частям приводим действие к виду

$$S + S_{\text{gf}} \rightleftharpoons \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \partial^\mu \tilde{A}^\nu \partial_\mu \tilde{A}_\nu + \frac{1}{2} m^2 \tilde{A}_\mu^2 + \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right). \quad (5.3.72)$$

В результате, мы расцепили вклады \tilde{A}_μ и φ , получив в обоих случаях канонические кинетический и массовый члены в действии. При этом у полученного действия есть остаточная калибровочная симметрия (5.3.68) с параметрами преобразования, удовлетворяющими свободному массивному волновому уравнению

$$\tilde{A}_\mu \rightarrow \tilde{A}_\mu + \partial_\mu \alpha, \quad \varphi \rightarrow \varphi - m\alpha, \quad \square \alpha + m^2 \alpha = 0. \quad (5.3.73)$$

Так как поле φ также удовлетворяет свободному массивному волновому уравнению, то мы можем полностью зафиксировать калибровочную симметрию, переходя в унитарную калибровку $\varphi = 0$. Заметим, что такая возможность остается и при наличии источника массивного векторного поля в виде сохраняющегося векторного тока. В итоге, в унитарной калибровке действие массивной электродинамики принимает вид [122, 123]

$$S + S_{\text{gf}} = \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \partial^\mu \tilde{A}^\nu \partial_\mu \tilde{A}_\nu + \frac{1}{2} m^2 \tilde{A}_\mu^2 \right). \quad (5.3.74)$$

За счет выбора унитарной калибровки мы вернулись к исходным полевым переменным $\tilde{A}_\mu = A_\mu$, удовлетворяющим в силу (5.3.70) системе уравнений движения (5.3.58).

$$\square A_\mu + m^2 A_\mu = 0, \quad \partial^\mu A_\mu = 0. \quad (5.3.75)$$

В результате такой замены полевых переменных вклады дСС и ндСС в действие (5.3.74) расцепляются. А именно, производя СВ-разложение векторного поля

$$\tilde{A}_\mu = \{ \tilde{A}_0, \partial_i \tilde{A} + \tilde{A}_i^t \}, \quad \partial_i \tilde{A}_i^t = 0, \quad (5.3.76)$$

перепишем действие (5.3.74) как

$$S + S_{\text{gf}} \rightleftharpoons \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \partial^\mu \tilde{A}_0 \partial_\mu \tilde{A}_0 + \frac{1}{2} m^2 \tilde{A}_0^2 + \frac{1}{2} \partial^\mu \tilde{A}_i^1 \partial_\mu \tilde{A}_i^1 - \frac{1}{2} m^2 \tilde{A}_i^1 \tilde{A}_i^1 + \frac{1}{2} \partial^\mu \tilde{A}_i^t \partial_\mu \tilde{A}_i^t - \frac{1}{2} m^2 \tilde{A}_i^t \tilde{A}_i^t \right), \quad \tilde{A}_i^1 = \partial_i \tilde{A}. \quad (5.3.77)$$

Из соответствующих уравнений движения

$$\square \tilde{A}_0 + m^2 \tilde{A}_0 = 0, \quad \square \tilde{A}_i^1 + m^2 \tilde{A}_i^1 = 0, \quad \square \tilde{A}_i^t + m^2 \tilde{A}_i^t = 0 \quad (5.3.78)$$

и калибровочного условия $\partial^\mu \tilde{A}_\mu = 0$ следует, что динамическими степенями свободы являются \tilde{A}_i^1 и \tilde{A}_i^t . В результате, действие массивной электродинамики (5.3.74) разделяется на динамическую и нединамическую части

$$S + S_{\text{gf}} = S_{\text{d}}[\tilde{A}_i^1, \tilde{A}_i^t] + S_{\text{nd}}[\tilde{A}_0], \quad (5.3.79)$$

$$S_{\text{d}} = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial^\mu \tilde{A}_i^1 \partial_\mu \tilde{A}_i^1 - \frac{1}{2} m^2 \tilde{A}_i^1 \tilde{A}_i^1 + \frac{1}{2} \partial^\mu \tilde{A}_i^t \partial_\mu \tilde{A}_i^t - \frac{1}{2} m^2 \tilde{A}_i^t \tilde{A}_i^t \right), \quad (5.3.80)$$

$$S_{\text{nd}} = \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \partial^\mu \tilde{A}_0 \partial_\mu \tilde{A}_0 + \frac{1}{2} m^2 \tilde{A}_0^2 \right). \quad (5.3.81)$$

Заметим, что нединамическая часть действия входит с противоположным знаком $-\tilde{A}_0$ является духовой степенью свободы. Однако, здесь это не представляет опасности, т.к. она не взаимодействует с другими степенями свободы, а также является нединамической.

Наконец, из действия (5.3.80) находим канонический ТЭИ динамических степеней свободы массивной электродинамики

$$\begin{aligned} T_{\text{d}\alpha\beta} &= \partial_\alpha \tilde{A}_i^1 \partial_\beta \tilde{A}_i^1 - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \partial^\mu \tilde{A}_i^1 \partial_\mu \tilde{A}_i^1 + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} m^2 \tilde{A}_i^1 \tilde{A}_i^1 + \partial_\alpha \tilde{A}_i^t \partial_\beta \tilde{A}_i^t - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \partial^\mu \tilde{A}_i^t \partial_\mu \tilde{A}_i^t \\ &+ \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} m^2 \tilde{A}_i^t \tilde{A}_i^t. \end{aligned} \quad (5.3.82)$$

По аналогии с безмассовой электродинамикой (5.3.25), по своей структуре он совпадает с ТЭИ набора массивных «скалярных полей» $\{\tilde{A}_i^1, \tilde{A}_i^t\}$. В соответствии с возникновением третьей динамической степени свободы \tilde{A}_i^1 у массивного векторного поля, в безмассовом пределе он не переходит в ТЭИ безмассовой электродинамики (5.3.25)

$$\begin{aligned} T_{\text{d}\alpha\beta} &\xrightarrow{m \rightarrow 0} \partial_\alpha \tilde{A}_i^1 \partial_\beta \tilde{A}_i^1 - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \partial^\mu \tilde{A}_i^1 \partial_\mu \tilde{A}_i^1 + \partial_\alpha \tilde{A}_i^t \partial_\beta \tilde{A}_i^t - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \partial^\mu \tilde{A}_i^t \partial_\mu \tilde{A}_i^t \\ &\neq \partial_\alpha \tilde{A}_i^t \partial_\beta \tilde{A}_i^t - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \partial^\mu \tilde{A}_i^t \partial_\mu \tilde{A}_i^t. \end{aligned} \quad (5.3.83)$$

Таким образом, для расцепки вкладов динамических и нединамических степеней свободы в действие теории без калибровочной симметрии, такой как массивная электродинамика и гравитация, а также DGP-гравитация, можно использовать трюк Штюкельберга, вводя калибровочную симметрию в действие и затем фиксируя ее с помощью расцепляющего калибровочного условия.

5.3.4. Динамические степени свободы массивной гравитации

Построим теперь канонический ТЭИ дСС массивной гравитации. Так как эффективное действие DGP-гравитации (5.2.35) с точностью до замены массы (5.2.36) совпадает с действием массивной гравитации Фирца-Паули, то для нее ТЭИ дСС будет получен по аналогии с проведенными в этом разделе вычислениями.

Действие свободной массивной гравитации Фирца-Паули имеет вид [122, 123, 177]

$$S = \frac{1}{64\pi G} \int d^4x \left(-\partial^\sigma h^{\alpha\beta} \partial_\sigma h_{\alpha\beta} + 2\partial^\alpha h_{\mu\alpha} \partial_\beta h^{\mu\beta} - 2\partial_\alpha h^{\alpha\beta} \partial_\beta h + \partial^\alpha h \partial_\alpha h + m^2(h^2 - h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}) \right), \quad \eta_{\mu\nu} = (-+++)$$
 (5.3.84)

Отсюда получаем уравнение движения массивного гравитационного поля в виде

$${}_4\Box h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \partial^\sigma h_{\sigma\beta} - \partial_\beta \partial^\sigma h_{\alpha\sigma} + \partial_\alpha \partial_\beta h + \eta_{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} - \eta_{\alpha\beta} {}_4\Box h - m^2(h_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta} h) = 0. \quad (5.3.85)$$

По аналогии с массивной электродинамикой, его можно привести к более простому виду, получив из него уравнения связи для компонент гравитационного поля. А именно, действуя на ур. (5.3.85) 4-дивергенцией, находим первое уравнение связи

$$\partial^\alpha h_{\alpha\beta} = \partial_\beta h. \quad (5.3.86)$$

Подставляя его в (5.3.85), приходим к системе уравнений движения

$${}_4\Box h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \partial_\beta h - m^2(h_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta} h) = 0, \quad \partial^\alpha h_{\alpha\beta} = \partial_\beta h. \quad (5.3.87)$$

Вычисляя след полученного уравнения, мы находим второе уравнение связи

$$h = 0. \quad (5.3.88)$$

В результате, мы переписываем уравнение движения массивной гравитации (5.3.85) в виде свободного массивного волнового уравнения и двух уравнений связи

$${}_4\Box h_{\alpha\beta} - m^2 h_{\alpha\beta} = 0, \quad \partial^\alpha h_{\alpha\beta} = 0, \quad h = 0. \quad (5.3.89)$$

Подсчет степеней свободы

Подставляя СВТ-разложение (5.3.34–5.3.35) в ур. (5.3.89), мы получаем уравнения движения массивной гравитации в виде

$${}_4\Box \Phi - m^2 \Phi = 0, \quad (5.3.90)$$

$${}_4\Box \partial_i B + {}_4\Box S_i - m^2 \partial_i B - m^2 S_i = 0, \quad (5.3.91)$$

$$\begin{aligned} & -2\delta_{ij} {}_4\Box \Psi + 2{}_4\Box \partial_i \partial_j E + {}_4\Box \partial_i F_j + {}_4\Box \partial_j F_i + {}_4\Box h_{ij}^{\text{tt}} + 2\delta_{ij} m^2 \Psi - 2m^2 \partial_i \partial_j E \\ & - m^2 \partial_i F_j - m^2 \partial_j F_i - m^2 h_{ij}^{\text{tt}} = 0, \end{aligned} \quad (5.3.92)$$

в то время как уравнения связи для компонент гравитационного поля записываются как

$$2\partial_0 \Phi + \Delta B = 0, \quad (5.3.93)$$

$$-\partial_0 \partial_i B - \partial_0 S_i - 2\partial_i \Psi + 2\Delta \partial_i E + \Delta F_i = 0, \quad (5.3.94)$$

$$\Phi - 3\Psi + \Delta E = 0. \quad (5.3.95)$$

Расцепим уравнения движения с помощью уравнений связи. Действуя 3-дивергенцией на ур. (5.3.91), расцепляем уравнения движения для B и S_i

$$\Delta ({}_4\Box B - m^2 B) = 0 \implies {}_4\Box B - m^2 B = 0, \quad {}_4\Box S_i - m^2 S_i = 0. \quad (5.3.96)$$

Вычисляя след уравнения движения (5.3.92), получаем

$$\frac{1}{3}\Delta ({}_4\Box E - m^2 E) = {}_4\Box \Psi - m^2 \Psi. \quad (5.3.97)$$

Подставляя найденное соотношение обратно в (5.3.92), приходим к уравнению

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3}\delta_{ij}\Delta ({}_4\Box E - m^2 E) + 2\partial_i\partial_j ({}_4\Box E - m^2 E) + {}_4\Box\partial_i F_j + {}_4\Box\partial_j F_i + {}_4\Box h_{ij}^{tt} \\ - m^2\partial_i F_j - m^2\partial_j F_i - m^2 h_{ij}^{tt} = 0. \end{aligned} \quad (5.3.98)$$

Действуя на него дважды 3-дивергенцией, расцепляем уравнения движения для Ψ и E

$$\Delta^2 ({}_4\Box E - m^2 E) = 0 \implies {}_4\Box E - m^2 E = 0, \quad {}_4\Box \Psi - m^2 \Psi = 0. \quad (5.3.99)$$

Наконец, с учетом полученных уравнений движения, действуя на ур. (5.3.92) 3-дивергенцией, расцепляем уравнения движения для F_i и h_{ij}^{tt}

$$\Delta ({}_4\Box F_j - m^2 F_j) = 0 \implies {}_4\Box F_j - m^2 F_j = 0, \quad {}_4\Box h_{ij}^{tt} - m^2 h_{ij}^{tt} = 0. \quad (5.3.100)$$

Таким образом, все компоненты гравитационного поля удовлетворяют свободным массивным волновым уравнениям.

Определим теперь из уравнений связи какие из них являются дСС. Для этого разделим ур. (5.3.94) на два уравнения связи, действуя на него 3-дивергенцией

$$\Delta (-\partial_0 B - 2\Psi + 2\Delta E) = 0 \implies -\partial_0 B - 2\Psi + 2\Delta E = 0, \quad -\partial_0 S_i + \Delta F_i = 0. \quad (5.3.101)$$

С учетом ур. (5.3.93) отсюда следует, что Φ , B и S_i являются ндСС. Чтобы получить еще одно уравнение связи, подействуем производной по времени на ур. (5.3.95). Тогда из системы уравнений

$$\partial_0 \Phi - 3\partial_0 \Psi + \partial_0 \Delta E = 0, \quad 2\partial_0 \Phi + \Delta B = 0, \quad -\partial_0 B - 2\Psi + 2\Delta E = 0, \quad (5.3.102)$$

мы находим следующие выражения для первых производных по времени полей Ψ и E

$$\partial_0 \Psi = -\frac{1}{4}m^2 B, \quad \partial_0 \Delta E = \frac{1}{2}\partial_0^2 B - \frac{1}{4}m^2 B. \quad (5.3.103)$$

Таким образом, Ψ также является ндСС, в отличие от E , т.к. подстановка выражения для его производной по времени в уравнение движения увеличивает его порядок по производным. В итоге, массивное гравитационное поле имеет пять дСС E , F_i и h_{ij}^{tt} [122, 123].

Действие и ТЭИ динамических степеней свободы

По аналогии с массивной электродинамикой, при подстановке СВТ-разложения гравитационного поля (5.3.34) в действие (5.3.84) вклады дСС и ндСС не расщепляются. Это можно понять уже по разложению действия безмассовой гравитации (5.3.49). Там в нединамической части (5.3.51) присутствует член со взаимодействием $\propto \partial_0 \Psi \partial_0 \Delta E$. В свою очередь, в массивной гравитации поле E становится дСС, что не позволяет прямым образом разделить действие (5.3.84) на динамическую и нединамическую части.

Для разделения действия (5.3.84) на динамическую и нединамическую части воспользуемся методом Штюкельберга [122, 123], по аналогии с массивной электродинамикой. Однако, в данном случае для расцепки вкладов дСС и ндСС в действие нам потребуется совершить три замены полевых переменных. Первая замена переменных имеет вид

$$h_{\mu\nu} = \tilde{h}_{\mu\nu} + \partial_\mu \tilde{A}_\nu + \partial_\nu \tilde{A}_\mu. \quad (5.3.104)$$

В результате такой замены действие массивной гравитации (5.3.84) переписывается как

$$S = \frac{1}{64\pi G} \int d^4x \left(-\partial^\sigma \tilde{h}^{\alpha\beta} \partial_\sigma \tilde{h}_{\alpha\beta} + 2\partial^\alpha \tilde{h}_{\mu\alpha} \partial_\beta \tilde{h}^{\mu\beta} - 2\partial_\alpha \tilde{h}^{\alpha\beta} \partial_\beta \tilde{h} + \partial^\alpha \tilde{h} \partial_\alpha \tilde{h} \right. \\ \left. + m^2 (\tilde{h}^2 - \tilde{h}^{\alpha\beta} \tilde{h}_{\alpha\beta}) - m^2 \tilde{F}_{\alpha\beta}^2 + 4m^2 (\partial^\alpha \tilde{A}_\alpha \tilde{h} - \tilde{h}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{A}_\beta) \right) \quad (5.3.105)$$

и приобретает калибровочную симметрию

$$\tilde{h}_{\alpha\beta} \rightarrow \tilde{h}_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \xi_\beta + \partial_\beta \xi_\alpha, \quad \tilde{A}_\alpha \rightarrow \tilde{A}_\alpha - \xi_\alpha. \quad (5.3.106)$$

Совершая вторую замену полевых переменных

$$\tilde{A}_\mu = \bar{A}_\mu + \partial_\mu \phi, \quad (5.3.107)$$

приводим действие (5.3.105) в следующем виде

$$S = \frac{1}{64\pi G} \int d^4x \left(-\partial^\sigma \tilde{h}^{\alpha\beta} \partial_\sigma \tilde{h}_{\alpha\beta} + 2\partial^\alpha \tilde{h}_{\mu\alpha} \partial_\beta \tilde{h}^{\mu\beta} - 2\partial_\alpha \tilde{h}^{\alpha\beta} \partial_\beta \tilde{h} + \partial^\alpha \tilde{h} \partial_\alpha \tilde{h} + m^2 (\tilde{h}^2 - \tilde{h}^{\alpha\beta} \tilde{h}_{\alpha\beta}) \right. \\ \left. - m^2 \bar{F}_{\alpha\beta}^2 + 4m^2 (\partial^\alpha \bar{A}_\alpha \tilde{h} - \tilde{h}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \bar{A}_\beta) + 4m^2 (\partial^\alpha \partial_\alpha \phi \tilde{h} - \tilde{h}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \phi) \right) \quad (5.3.108)$$

привнося в него вторую независимую калибровочную симметрию

$$\bar{A}_\mu \rightarrow \bar{A}_\mu + \partial_\mu \alpha, \quad \phi \rightarrow \phi - \alpha. \quad (5.3.109)$$

Наконец, чтобы устранить кинетическое взаимодействие $\tilde{h}_{\mu\nu}$ и ϕ , совершим третью замену переменных

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + m^2 \eta_{\mu\nu} \phi, \quad (5.3.110)$$

в результате которой действие массивной гравитации записывается в следующем виде

$$S = \frac{1}{64\pi G} \int d^4x \left(-\partial^\sigma \bar{h}^{\alpha\beta} \partial_\sigma \bar{h}_{\alpha\beta} + 2\partial^\alpha \bar{h}_{\mu\alpha} \partial_\beta \bar{h}^{\mu\beta} - 2\partial_\alpha \bar{h}^{\alpha\beta} \partial_\beta \bar{h} + \partial^\alpha \bar{h} \partial_\alpha \bar{h} + m^2 (\bar{h}^2 - \bar{h}^{\alpha\beta} \bar{h}_{\alpha\beta}) - m^2 \bar{F}_{\alpha\beta}^2 + 4m^2 (\partial^\alpha \bar{A}_\alpha \bar{h} - \bar{h}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \bar{A}_\beta) - 6m^4 \partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi + 12m^6 \phi^2 + 12m^4 \partial^\alpha \bar{A}_\alpha \phi + 6m^4 \bar{h} \phi \right). \quad (5.3.111)$$

Полученное действие (5.3.111) инвариантно относительно двух независимых калибровочных преобразований, совместное действие которых имеет вид

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu + m^2 \eta_{\mu\nu} \alpha, \quad \bar{A}_\mu \rightarrow \bar{A}_\mu - \xi_\mu + \partial_\mu \alpha, \quad \phi \rightarrow \phi - \alpha. \quad (5.3.112)$$

Далее именно наличие двух калибровочных симметрий позволит расцепить вклады динамических и нединамических степеней свободы в действие массивной гравитации за счет наложения соответствующих расцепляющих калибровочных условий.

Действие (5.3.111) приводит к следующим уравнениям движения

$$4\Box \bar{h}_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \partial^\sigma \bar{h}_{\sigma\beta} - \partial_\beta \partial^\sigma \bar{h}_{\alpha\sigma} + \partial_\alpha \partial_\beta \bar{h} + \eta_{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\alpha\beta} 4\Box \bar{h} + m^2 (\eta_{\alpha\beta} \bar{h} - \bar{h}_{\alpha\beta}) + 2m^2 \eta_{\alpha\beta} \partial^\mu \bar{A}_\mu - m^2 \partial_\alpha \bar{A}_\beta - m^2 \partial_\beta \bar{A}_\alpha + 3m^4 \eta_{\alpha\beta} \phi = 0, \quad (5.3.113)$$

$$\partial^\alpha \bar{F}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \bar{h} + \partial^\alpha \bar{h}_{\alpha\beta} - 3m^2 \partial_\beta \phi = 0, \quad (5.3.114)$$

$$6m^2 4\Box \phi + 12m^4 \phi + 6m^2 \partial^\alpha \bar{A}_\alpha + 3m^2 \bar{h} = 0. \quad (5.3.115)$$

Расцепляем их, накладывая два калибровочных условия, в соответствии с двумя симметриями действия [122, 123]

$$\partial^\alpha \bar{h}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \partial_\beta \bar{h} - m^2 \bar{A}_\beta, \quad \partial^\mu \bar{A}_\mu = -\frac{1}{2} \bar{h} - 3m^2 \phi. \quad (5.3.116)$$

В результате, уравнения движения принимают простой вид

$$(4\Box - m^2) \left(\bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \bar{h} \right) = 0, \quad (4\Box - m^2) \bar{A}_\mu = 0, \quad (4\Box - m^2) \phi = 0. \quad (5.3.117)$$

Соответственно, добавляя в действие (5.3.111) два члена, фиксирующих калибровку

$$S_{\text{gf1}} = -\frac{1}{32\pi G} \int d^4x \left(\partial^\alpha \bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \partial_\beta \bar{h} + m^2 \bar{A}_\beta \right)^2, \quad (5.3.118)$$

$$S_{\text{gf2}} = -\frac{1}{32\pi G} \int d^4x \left(m \partial^\mu \bar{A}_\mu + \frac{1}{2} m \bar{h} + 3m^3 \phi \right)^2, \quad (5.3.119)$$

переписываем действие массивной гравитации как

$$S + S_{\text{gf1}} + S_{\text{gf2}} = \frac{1}{64\pi G} \int d^4x \left(-\partial^\sigma \bar{h}^{\alpha\beta} \partial_\sigma \bar{h}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \partial^\alpha \bar{h} \partial_\alpha \bar{h} - m^2 \bar{h}^{\alpha\beta} \bar{h}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} m^2 \bar{h}^2 - 2m^2 \partial^\alpha \bar{A}^\beta \partial_\alpha \bar{A}_\beta - 2m^4 \bar{A}^\alpha \bar{A}_\alpha - 6m^4 \partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi - 6m^6 \phi^2 \right). \quad (5.3.120)$$

Полученное действие обладает остаточной калибровочной симметрией с параметрами преобразования, удовлетворяющими свободным массивным волновым уравнениям

$${}_4\Box\xi_\mu - m^2\xi_\mu = 0, \quad {}_4\Box\alpha - m^2\alpha = 0. \quad (5.3.121)$$

Перейдем с помощью данных преобразований в унитарную калибровку $\bar{A}_\mu = 0$, которая фиксирует одну из остаточных симметрий (при наличии взаимодействия массивного гравитационного поля с сохраняющимся ТЭИ материи это единственно возможный выбор унитарной калибровки). В результате, действие массивной гравитации принимает вид

$$S + S_{\text{gf1}} + S_{\text{gf2}} = \frac{1}{64\pi G} \int d^4x \left(-\partial^\sigma \bar{h}^{\alpha\beta} \partial_\sigma \bar{h}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \partial^\alpha \bar{h} \partial_\alpha \bar{h} - m^2 \bar{h}^{\alpha\beta} \bar{h}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} m^2 \bar{h}^2 - 6m^4 \partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi - 6m^6 \phi^2 \right). \quad (5.3.122)$$

При этом, у действия все еще сохраняется одна остаточная калибровочная симметрия

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} + 2\partial_\mu \partial_\nu \alpha + m^2 \eta_{\mu\nu} \alpha, \quad \phi \rightarrow \phi - \alpha, \quad {}_4\Box\alpha - m^2\alpha = 0, \quad (5.3.123)$$

а наложенные ранее расцепляющие калибровочные условия (5.3.116) принимают вид

$$\partial^\alpha \bar{h}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \partial_\beta \bar{h}, \quad \bar{h} = -6m^2 \phi. \quad (5.3.124)$$

Здесь первое условие совпадает с калибровкой Лоренца в безмассовой гравитации.

Для определения дСС произведем СВТ-разложение тензорного поля

$$\bar{h}_{00} = -2\bar{\Phi}, \quad \bar{h}_{0i} = \partial_i \bar{B} + \bar{S}_i, \quad \bar{h}_{ij} = -2\delta_{ij} \bar{\Psi} + 2\partial_i \partial_j \bar{E} + \partial_i \bar{F}_j + \partial_j \bar{F}_i + \bar{h}_{ij}^{\text{tt}}, \quad (5.3.125)$$

$$\partial_i \bar{S}_i = 0, \quad \partial_i \bar{F}_i = 0, \quad \partial_i \bar{h}_{ij}^{\text{tt}} = 0, \quad \bar{h}_{ii}^{\text{tt}} = 0. \quad (5.3.126)$$

В таком виде остаточная калибровочная симметрия (5.3.123) записывается как

$$\bar{\Phi} \rightarrow \bar{\Phi} - \partial_0^2 \alpha + \frac{1}{2} m^2 \alpha, \quad \bar{B} \rightarrow \bar{B} + 2\partial_0 \alpha, \quad \bar{S}_i \rightarrow \bar{S}_i, \quad \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi} - \frac{1}{2} m^2 \alpha, \quad (5.3.127)$$

$$\bar{E} \rightarrow \bar{E} + \alpha, \quad \bar{F}_i \rightarrow \bar{F}_i, \quad \bar{h}_{ij}^{\text{tt}} \rightarrow \bar{h}_{ij}^{\text{tt}}, \quad \phi \rightarrow \phi, \quad {}_4\Box\alpha - m^2\alpha = 0. \quad (5.3.128)$$

Подставляя разложение (5.3.125–5.3.126) в действие (5.3.122), переписываем его в виде

$$S + S_{\text{gf1}} + S_{\text{gf2}} = \frac{1}{64\pi G} \int d^4x \left(-2\partial^\sigma \bar{\Phi} \partial_\sigma \bar{\Phi} - 2m^2 \bar{\Phi}^2 + \partial^\sigma \partial_i \bar{B} \partial_\sigma \partial_i \bar{B} + m^2 \partial_i \bar{B} \partial_i \bar{B} + \partial^\sigma \bar{S}_i \partial_\sigma \bar{S}_i + m^2 \bar{S}_i \bar{S}_i + 6\partial^\sigma \bar{\Psi} \partial_\sigma \bar{\Psi} + 6m^2 \bar{\Psi}^2 - 2\partial^\sigma \Delta \bar{E} \partial_\sigma \Delta \bar{E} - 2m^2 (\Delta \bar{E})^2 - 2\partial^\sigma \partial_i \bar{F}_j \partial_\sigma \partial_i \bar{F}_j - 2m^2 \partial_i \bar{F}_j \partial_i \bar{F}_j - \partial^\sigma \bar{h}_{ij}^{\text{tt}} \partial_\sigma \bar{h}_{ij}^{\text{tt}} - m^2 \bar{h}_{ij}^{\text{tt}} \bar{h}_{ij}^{\text{tt}} - 6m^4 \partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi - 6m^6 \phi^2 - 4m^2 \bar{\Psi} \Delta \bar{E} - 4\partial^\sigma \bar{\Psi} \partial_\sigma \Delta \bar{E} - 12\partial^\sigma \bar{\Phi} \partial_\sigma \bar{\Psi} + 4\partial^\sigma \bar{\Phi} \partial_\sigma \Delta \bar{E} - 12m^2 \bar{\Phi} \bar{\Psi} + 4m^2 \bar{\Phi} \Delta \bar{E} \right). \quad (5.3.129)$$

Соответствующие уравнения движения имеют вид

$${}_4\Box_m \bar{\Phi} + 3{}_4\Box_m \bar{\Psi} - {}_4\Box_m \Delta \bar{E} = 0, \quad -3{}_4\Box_m \bar{\Phi} + 3{}_4\Box_m \bar{\Psi} - {}_4\Box_m \Delta \bar{E} = 0, \quad (5.3.130)$$

$$-{}_4\Box_m \bar{\Phi} + {}_4\Box_m \bar{\Psi} + {}_4\Box_m \Delta \bar{E} = 0, \quad {}_4\Box_m \bar{B} = 0, \quad {}_4\Box_m \bar{S}_i = 0, \quad (5.3.131)$$

$${}_4\Box_m \bar{F}_i = 0, \quad {}_4\Box_m \bar{h}_{ij}^{tt} = 0, \quad {}_4\Box_m \phi = 0, \quad (5.3.132)$$

где мы ввели краткое обозначение для массивного волнового оператора ${}_4\Box_m = {}_4\Box - m^2$.

Разрешая систему из первых трех уравнений, мы находим, что все компоненты массивного гравитационного поля удовлетворяют свободному массивному волновому уравнению

$${}_4\Box_m \bar{\Phi} = 0, \quad {}_4\Box_m \bar{\Psi} = 0, \quad {}_4\Box_m \bar{E} = 0. \quad (5.3.133)$$

Для определения дСС воспользуемся калибровочными условиями (5.3.124), которые в СВТ-разложении записываются как

$$\partial_0 \bar{\Phi} + 3\partial_0 \bar{\Psi} - \partial_0 \Delta \bar{E} = -\Delta \bar{B}, \quad -\partial_0 \bar{B} = \bar{\Phi} - \bar{\Psi} - \Delta \bar{E}, \quad (5.3.134)$$

$$\partial_0 \bar{S}_i = \Delta \bar{F}_i, \quad -3m^2 \phi = \bar{\Phi} - 3\bar{\Psi} + \Delta \bar{E}. \quad (5.3.135)$$

Отсюда видно, что \bar{B} и \bar{S}_i являются ндСС. Действуя производными по времени на второе и четвертое калибровочные условия, с помощью уравнений движения находим выражения для производных по времени полей $\bar{\Phi}$, $\bar{\Psi}$ и \bar{E}

$$\partial_0 \bar{\Psi} = -\frac{1}{4}m^2 \bar{B}, \quad \partial_0 \Delta \bar{E} = -\frac{3}{2}m^2 \partial_0 \phi - \frac{3}{4}m^2 \bar{B} + \frac{1}{2}\Delta \bar{B}, \quad (5.3.136)$$

$$\partial_0 \bar{\Phi} = -\frac{3}{2}m^2 \partial_0 \phi - \frac{1}{2}\Delta \bar{B}. \quad (5.3.137)$$

Таким образом, после Штюкельберговских преобразований дСС массивного гравитационного поля оказываются поля ϕ , \bar{F}_i и \bar{h}_{ij}^{tt} . При этом их вклады в действие (5.3.129) оказываются автоматически расцепленными от ндСС.

В результате, динамическая часть действия массивной гравитации имеет вид

$$S_d = \frac{1}{64\pi G} \int d^4x \left(-\partial^\sigma \bar{h}_{ij}^{lt} \partial_\sigma \bar{h}_{ij}^{lt} - m^2 \bar{h}_{ij}^{lt} \bar{h}_{ij}^{lt} - \partial^\sigma \bar{h}_{ij}^{tt} \partial_\sigma \bar{h}_{ij}^{tt} - m^2 \bar{h}_{ij}^{tt} \bar{h}_{ij}^{tt} - 6m^4 \partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi - 6m^6 \phi^2 \right), \quad \bar{h}_{ij}^{lt} = \partial_i \bar{F}_j + \partial_j \bar{F}_i. \quad (5.3.138)$$

Отсюда мы находим канонический ТЭИ динамических степеней свободы массивного гравитационного поля

$$T_{d\mu\nu} = \frac{3m^4}{16\pi G} \left(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi - \frac{1}{2} m^2 \eta_{\mu\nu} \phi^2 \right) + \frac{1}{32\pi G} \left(\partial_\mu \bar{h}_{ij}^{lt} \partial_\nu \bar{h}_{ij}^{lt} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \bar{h}_{ij}^{lt} \partial_\alpha \bar{h}_{ij}^{lt} - \frac{1}{2} m^2 \eta_{\mu\nu} \bar{h}_{ij}^{lt} \bar{h}_{ij}^{lt} \right) + \frac{1}{32\pi G} \left(\partial_\mu \bar{h}_{ij}^{tt} \partial_\nu \bar{h}_{ij}^{tt} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \bar{h}_{ij}^{tt} \partial_\alpha \bar{h}_{ij}^{tt} - \frac{1}{2} m^2 \eta_{\mu\nu} \bar{h}_{ij}^{tt} \bar{h}_{ij}^{tt} \right). \quad (5.3.139)$$

По аналогии с массивной электродинамикой, он имеет структуру ТЭИ набора массивных «скалярных полей» $\{\phi, \bar{h}_{ij}^{\text{lt}}, \bar{h}_{ij}^{\text{tt}}\}$. Заметим, что в безмассовом пределе $m \rightarrow 0$, $m^2\phi \neq 0$ полученный ТЭИ сохраняет вклады дополнительных дСС

$$T_{\text{d}\mu\nu} \xrightarrow{m \rightarrow 0} \frac{3m^4}{16\pi G} \left(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi \right) + \frac{1}{32\pi G} \left(\partial_\mu \bar{h}_{ij}^{\text{lt}} \partial_\nu \bar{h}_{ij}^{\text{lt}} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \bar{h}_{ij}^{\text{lt}} \partial_\alpha \bar{h}_{ij}^{\text{lt}} \right) + \frac{1}{32\pi G} \left(\partial_\mu \bar{h}_{ij}^{\text{tt}} \partial_\nu \bar{h}_{ij}^{\text{tt}} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \bar{h}_{ij}^{\text{tt}} \partial_\alpha \bar{h}_{ij}^{\text{tt}} \right) \quad (5.3.140)$$

и не переходит в ТЭИ дСС безмассовой гравитации (5.3.54), в соответствии с известным vDVZ-разрывом в массивной гравитации [120–123]. При усреднении (5.2.49) за счет уравнений движения ТЭИ дСС массивной гравитации принимает простой вид

$$\langle T_{\text{d}\mu\nu} \rangle = \frac{3m^4}{16\pi G} \langle \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \rangle + \frac{1}{32\pi G} \langle \partial_\mu \bar{h}_{ij}^{\text{lt}} \partial_\nu \bar{h}_{ij}^{\text{lt}} \rangle + \frac{1}{32\pi G} \langle \partial_\mu \bar{h}_{ij}^{\text{tt}} \partial_\nu \bar{h}_{ij}^{\text{tt}} \rangle. \quad (5.3.141)$$

Заметим, что в случае взаимодействия массивного гравитационного поля с сохраняющимся ТЭИ материи остаточная калибровочная симметрия (5.3.123) может быть полностью зафиксирована за счет наложения условия

$$\phi = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad T_{\text{m}} = 0, \quad (5.3.142)$$

так как источником поля ϕ будет являться след тензора энергии-импульса материи $T_{\text{m}\alpha\beta}$.

5.3.5. Динамические степени свободы DGP-гравитации

Наконец, получим ТЭИ дСС DGP-гравитации. Так как эффективное действие DGP-гравитации (5.2.35) с точностью до замены массы (5.2.36) совпадает с действием массивной гравитации (5.3.84), мы будем следовать выводам, представленным в предыдущем разделе, и лишь кратко опишем основные этапы вычислений.

Совершая три Штюкельберговских замены полевых переменных, по аналогии с уравнениями (5.3.104), (5.3.107) и (5.3.110) (единственное отличие заключается в замене жесткой массы на массу, зависящую от импульса, (5.2.36)), и фиксируя возникающие за их счет калибровочные симметрии с помощью условия, аналогичного ур. (5.3.116), переписываем эффективное действие DGP-гравитации на бране в унитарной калибровке как

$$S_{\text{eff}} + S_{\text{gfl}} + S_{\text{gft}} = \frac{1}{8} M_4^2 \int d^4x \left(-\partial^\sigma \bar{h}^{\alpha\beta} \partial_\sigma \bar{h}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \partial^\alpha \bar{h} \partial_\alpha \bar{h} + M_c \bar{h}^{\alpha\beta} \sqrt{-4\Box} \bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} M_c \bar{h} \sqrt{-4\Box} \bar{h} - 6M_c^2 \partial^\alpha \partial^\beta \phi \partial_\alpha \partial_\beta \phi + 6M_c^3 \partial^\alpha \phi \sqrt{-4\Box} \partial_\alpha \phi \right), \quad (5.3.143)$$

где исходные возмущения индуцированной метрики на бране $h_{\mu\nu}$ выражаются через новые полевые переменные как

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - M_c \eta_{\mu\nu} \sqrt{-4\Box} \phi + 2\partial_\mu \partial_\nu \phi. \quad (5.3.144)$$

Соответствующие уравнения движения принимают вид

$$\left(4\Box + M_c\sqrt{-4\Box}\right) \left(\bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}\right) = 0, \quad \left(4\Box + M_c\sqrt{-4\Box}\right) \phi = 0. \quad (5.3.145)$$

Заметим, что в действии (5.3.143) скалярное поле входит с высшими производными. Однако, их можно устранить с помощью следующего перемасштабирования поля

$$\phi = \frac{\varphi}{M_c\sqrt{-4\Box}}. \quad (5.3.146)$$

В результате, эффективное действие DGP-гравитации записывается как

$$S_{\text{eff}} + S_{\text{gf1}} + S_{\text{gf2}} = \frac{1}{8}M_4^2 \int d^4x \left(-\partial^\sigma \bar{h}^{\alpha\beta} \partial_\sigma \bar{h}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \partial^\alpha \bar{h} \partial_\alpha \bar{h} + M_c \bar{h}^{\alpha\beta} \sqrt{-4\Box} \bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} M_c \bar{h} \sqrt{-4\Box} \bar{h} - 6\partial^\alpha \varphi \partial_\alpha \varphi + 6M_c \varphi \sqrt{-4\Box} \varphi \right). \quad (5.3.147)$$

Совершая СВТ-разложение тензорного поля (5.3.125), приводим действие DGP-гравитации к виду

$$S_{\text{eff}} + S_{\text{gf1}} + S_{\text{gf2}} = \frac{1}{8}M_4^2 \int d^4x \left(-2\partial^\sigma \bar{\Phi} \partial_\sigma \bar{\Phi} + 2M_c \bar{\Phi} \sqrt{-4\Box} \bar{\Phi} + \partial^\sigma \partial_i \bar{B} \partial_\sigma \partial_i \bar{B} - M_c \partial_i \bar{B} \sqrt{-4\Box} \partial_i \bar{B} + \partial^\sigma \bar{S}_i \partial_\sigma \bar{S}_i - M_c \bar{S}_i \sqrt{-4\Box} \bar{S}_i + 6\partial^\sigma \bar{\Psi} \partial_\sigma \bar{\Psi} - 6M_c \bar{\Psi} \sqrt{-4\Box} \bar{\Psi} - 2\partial^\sigma \Delta \bar{E} \partial_\sigma \Delta \bar{E} + 2M_c \Delta \bar{E} \sqrt{-4\Box} \Delta \bar{E} - 2\partial^\sigma \partial_i \bar{F}_j \partial_\sigma \partial_i \bar{F}_j + 2M_c \partial_i \bar{F}_j \sqrt{-4\Box} \partial_i \bar{F}_j - \partial^\sigma \bar{h}_{ij}^{\text{tt}} \partial_\sigma \bar{h}_{ij}^{\text{tt}} + M_c \bar{h}_{ij}^{\text{tt}} \sqrt{-4\Box} \bar{h}_{ij}^{\text{tt}} - 6\partial^\sigma \varphi \partial_\sigma \varphi + 6M_c \varphi \sqrt{-4\Box} \varphi + 4M_c \bar{\Psi} \sqrt{-4\Box} \Delta \bar{E} - 4\partial^\sigma \bar{\Psi} \partial_\sigma \Delta \bar{E} - 12\partial^\sigma \bar{\Phi} \partial_\sigma \bar{\Psi} + 4\partial^\sigma \bar{\Phi} \partial_\sigma \Delta \bar{E} + 12M_c \bar{\Phi} \sqrt{-4\Box} \bar{\Psi} - 4M_c \bar{\Phi} \sqrt{-4\Box} \Delta \bar{E} \right). \quad (5.3.148)$$

По аналогии с массивной гравитацией, из соответствующих уравнений движения и калибровочных условий находим, что дСС DGP-гравитации на бране являются φ , \bar{F}_i и \bar{h}_{ij}^{tt} . Таким образом, динамическая часть эффективного действия DGP-гравитации имеет вид

$$S_d = \frac{1}{8}M_4^2 \int d^4x \left(-\partial^\sigma \bar{h}_{ij}^{\text{lt}} \partial_\sigma \bar{h}_{ij}^{\text{lt}} + M_c \bar{h}_{ij}^{\text{lt}} \sqrt{-4\Box} \bar{h}_{ij}^{\text{lt}} - \partial^\sigma \bar{h}_{ij}^{\text{tt}} \partial_\sigma \bar{h}_{ij}^{\text{tt}} + M_c \bar{h}_{ij}^{\text{tt}} \sqrt{-4\Box} \bar{h}_{ij}^{\text{tt}} - 6\partial^\sigma \varphi \partial_\sigma \varphi + 6M_c \varphi \sqrt{-4\Box} \varphi \right), \quad \bar{h}_{ij}^{\text{lt}} = \partial_i \bar{F}_j + \partial_j \bar{F}_i. \quad (5.3.149)$$

Как было показано ранее, ТЭИ подобной нелокальной теории можно вычислить по стандартной формуле для канонического ТЭИ в пренебрежении нелокальными членами в Лагранжиане. В результате, мы находим следующее выражение для эффективного ТЭИ дСС DGP-гравитации на бране

$$T_{d\mu\nu} = \frac{3}{2}M_4^2 \left(\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \varphi \partial_\alpha \varphi \right) + \frac{1}{4}M_4^2 \left(\partial_\mu \bar{h}_{ij}^{\text{lt}} \partial_\nu \bar{h}_{ij}^{\text{lt}} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \bar{h}_{ij}^{\text{lt}} \partial_\alpha \bar{h}_{ij}^{\text{lt}} \right) + \frac{1}{4}M_4^2 \left(\partial_\mu \bar{h}_{ij}^{\text{tt}} \partial_\nu \bar{h}_{ij}^{\text{tt}} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \bar{h}_{ij}^{\text{tt}} \partial_\alpha \bar{h}_{ij}^{\text{tt}} \right). \quad (5.3.150)$$

По аналогии с массивной гравитацией, полученный ТЭИ не переходит в ТЭИ безмассовой гравитации (5.3.54) в четырехмерном пределе $M_5 \rightarrow 0$, $\varphi \neq 0$ в силу появления у эффективного гравитона на бране дополнительных динамических степеней свободы.

5.4. Гравитационное излучение в DGP-гравитации

Получим аналог квадрупольной формулы для эффективной мощности гравитационного излучения произвольного нерелятивистского источника на бране в DGP-гравитации. Для этого выделим излучаемые части дСС φ , \bar{h}_{ij}^{lt} и \bar{h}_{ij}^{tt} и построим из них, в соответствии с ур. (5.3.150), плотность потока энергии гравитационного излучения на бране.

Взаимодействие гравитационного поля с сохраняющимся тензором энергии-импульса материи на бране $T_{m\alpha\beta}$ может быть введено в действие (5.3.147) как

$$S_{\text{int}} = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \bar{h}^{\alpha\beta} T_{m\alpha\beta} - \frac{1}{2} \varphi T_m \right), \quad \partial^\alpha T_{m\alpha\beta} = 0. \quad (5.4.1)$$

При выделении действия дСС гравитационного поля они будут взаимодействовать с соответствующими частями тензора энергии-импульса материи

$$S_{\text{int}} = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \bar{h}_{ij}^{\text{lt}} T_{mij}^{\text{lt}} + \frac{1}{2} \bar{h}_{ij}^{\text{tt}} T_{mij}^{\text{tt}} - \frac{1}{2} \varphi T_m \right), \quad (5.4.2)$$

$$\partial_i T_{mij}^{\text{lt}} \neq 0, \quad \partial_i T_{mij}^{\text{tt}} = 0, \quad T_{mii}^{\text{lt}} = T_{mii}^{\text{tt}} = 0. \quad (5.4.3)$$

В результате, уравнения движения дСС DGP-гравитации на бране записываются как

$${}_4\Box\varphi + M_c \sqrt{-{}_4\Box} \varphi = \frac{1}{3M_4^2} T_m, \quad (5.4.4)$$

$${}_4\Box \bar{h}_{ij}^{\text{lt/tt}} + M_c \sqrt{-{}_4\Box} \bar{h}_{ij}^{\text{lt/tt}} = -\frac{2}{M_4^2} T_{mij}^{\text{lt/tt}}. \quad (5.4.5)$$

5.4.1. Тензорное поле в волновой зоне

Решения уравнений движения (5.4.5) для тензорных полей \bar{h}_{ij}^{lt} и \bar{h}_{ij}^{tt} могут быть получены из решения уравнения движения, следующего из действия (5.3.147)

$$\left({}_4\Box + M_c \sqrt{-{}_4\Box} \right) \psi_{\mu\nu} = -\frac{2}{M_4^2} T_{m\mu\nu}, \quad \psi_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{h}, \quad (5.4.6)$$

с помощью действия на него соответствующими проекторами [156, 163]

$$\bar{h}_{ij}^{\text{lt}} = \Lambda_{ij,kl}^{\text{lt}} \psi_{kl}, \quad \bar{h}_{ij}^{\text{tt}} = \Lambda_{ij,kl}^{\text{tt}} \psi_{kl} \quad (5.4.7)$$

$$\partial_i \Lambda_{ij,kl}^{\text{lt}} \neq 0, \quad \partial_i \Lambda_{ij,kl}^{\text{tt}} = 0, \quad \Lambda_{ii,kl}^{\text{lt}} = \Lambda_{ij,kk}^{\text{lt}} = \Lambda_{ii,kl}^{\text{tt}} = \Lambda_{ij,kk}^{\text{tt}} = 0. \quad (5.4.8)$$

В частности, на удалении от источника данные проекторы могут быть записаны как

$$\Lambda_{ij,kl}^{\text{lt}} = n_i n_k P_{jl} + n_j n_k P_{il}, \quad n_i \Lambda_{ij,kl}^{\text{lt}} = n_k P_{jl}, \quad \Lambda_{ii,kl}^{\text{lt}} = \Lambda_{ij,kk}^{\text{lt}} = 0, \quad (5.4.9)$$

$$\Lambda_{ij,kl}^{\text{tt}} = P_{ik} P_{jl} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{kl}, \quad n_i \Lambda_{ij,kl}^{\text{tt}} = 0, \quad \Lambda_{ii,kl}^{\text{tt}} = \Lambda_{ij,kk}^{\text{tt}} = 0, \quad (5.4.10)$$

$$n_i = x_i/r, \quad P_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j. \quad (5.4.11)$$

В результате, мы можем единым образом вычислять излучаемые части полей \bar{h}_{ij}^{lt} и \bar{h}_{ij}^{tt} как соответствующие проекции излучаемой части поля ψ_{ij} . Будем вычислять их по аналогии с расчетом, проведенным в Главе 3 для учета вклада ТЭИ скалярного поля, связывающего двойную систему на бране, в источник гравитационного излучения.

В соответствии с ур. (4.2.39), запаздывающее решение ур. (5.4.6) дается интегралом

$$\psi_{ij} = \frac{2}{\pi M_5^3} \int_0^\infty d\mu \rho(\mu) \int d^4x' G_4(x - x'|\mu) T_{mij}(x'), \quad (5.4.12)$$

где запаздывающая функция Грина четырехмерного массивного поля $G_4(x|\mu)$ определяется уравнением (4.2.40), а спектральная функция $\rho(\mu)$ уравнением (4.2.39). Определяя запаздывающее координатное время как

$$t_{\text{ret}}(\mathbf{x}') = t - \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}, \quad (5.4.13)$$

переписываем запаздывающее поле ψ_{ij} в следующем виде

$$\begin{aligned} \psi_{ij} = & \frac{1}{2\pi^2 M_5^3} \int_0^\infty d\mu \rho(\mu) \int d^3x' \left(\int dt' \frac{\delta(t' - t_{\text{ret}})}{\sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}} J_0\left(\mu\sqrt{(t - t')^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}\right) \right. \\ & \left. - \int_{-\infty}^{t_{\text{ret}}} dt' \frac{\mu J_1\left(\mu\sqrt{(t - t')^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}\right)}{\sqrt{(t - t')^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}} \right) T_{mij}(x'). \end{aligned} \quad (5.4.14)$$

Для устранения локального вклада с δ -функцией проинтегрируем по частям второй член с помощью соотношения

$$\frac{\mu J_1\left(\mu\sqrt{(t - t')^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}\right)}{\sqrt{(t - t')^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}} = \frac{1}{(t - t')} \frac{d}{dt'} J_0\left(\mu\sqrt{(t - t')^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}\right). \quad (5.4.15)$$

В результате, после интегрирования по частям мы получаем

$$\begin{aligned} \psi_{ij} = & \frac{1}{2\pi^2 M_5^3} \int_0^\infty d\mu \rho(\mu) \int d^3x' \int_{-\infty}^{t_{\text{ret}}} dt' \frac{1}{t - t'} J_0\left(\mu\sqrt{(t - t')^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}\right) \\ & \times \left(\frac{d}{dt'} T_{mij}(x') + \frac{1}{t - t'} T_{mij}(x') \right). \end{aligned} \quad (5.4.16)$$

Считаем, что точка наблюдения находится в зоне излучения $r \gg \mathcal{R}$, где $\mathcal{R} \sim \lambda_{\text{GW}}$ означает радиус ближней зоны (см. определение ближней зоны и зоны излучения в Главе 3). В нерелятивистском приближении $\mathcal{R} \gg \mathcal{S}$ (\mathcal{S} – характерный размер источника) запаздывающее координатное время может быть записано с точностью до вкладов ведущего порядка как $t_{\text{ret}} \simeq t - r = t_r$. Соответственно, поле в зоне излучения дается интегралом

$$\begin{aligned} \psi_{ij} = & \frac{1}{2\pi^2 M_5^3} \int_0^\infty d\mu \rho(\mu) \int d^3x' \int_{-\infty}^{t_r} dt' \frac{1}{t_r - t' + r} J_0\left(\mu\sqrt{(t_r - t')^2 + 2r(t_r - t')}\right) \\ & \times \left(\frac{d}{dt'} T_{mij}(x') + \frac{1}{t_r - t' + r} T_{mij}(x') \right). \end{aligned} \quad (5.4.17)$$

Отсюда видно, что за счет наличия в подынтегральном выражении функции Бесселя J_0 ведущий вклад в интеграл по времени дает область $t_r - t' \ll r$. Тогда в ведущем приближении поле в волновой зоне определяется следующим интегралом

$$\psi_{ij} = \frac{1}{2\pi^2 M_5^3 r} \int_0^\infty d\mu \rho(\mu) \int_{-\infty}^{t_r} dt' J_0\left(\mu\sqrt{2r(t_r - t')}\right) \frac{d}{dt'} \int d^3x' T_{mij}(x'). \quad (5.4.18)$$

Заметим, что здесь расцепились интегралы по времени и пространственным координатам.

Удобно переписать источник поля в следующем виде. А именно, за счет сохранения тензора энергии-импульса материи $\partial^\alpha T_{m\alpha\beta} = 0$ мы можем представить его как [163]

$$\int d^3x' T_{mij}(x') = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt'^2} \int d^3x' T_{m00}(x') x'_i x'_j = \frac{1}{2} \ddot{M}_{ij}(t'). \quad (5.4.19)$$

В результате, поле в волновой зоне принимает вид

$$\psi_{ij} = \frac{1}{4\pi^2 M_5^3 r} \int_0^\infty d\mu \rho(\mu) \int_{-\infty}^{t_r} dt' \ddot{M}_{ij}(t') J_0\left(\mu\sqrt{2r(t_r - t')}\right). \quad (5.4.20)$$

В свою очередь, т.к. проекторы, выделяющие из поля ψ_{ij} дСС тензорного поля, являются бесследовыми по обоим парам индексов, то в выражениях для \bar{h}_{ij}^{lt} и \bar{h}_{ij}^{tt} мы можем эквивалентно заменить второй момент массы источника M_{ij} на его квадрупольный момент

$$\bar{h}_{ij}^{lt/tt} = \frac{1}{4\pi^2 M_5^3 r} \int_0^\infty d\mu \rho(\mu) \int_{-\infty}^{t_r} dt' \ddot{Q}_{ij}^{lt/tt}(t') J_0\left(\mu\sqrt{2r(t_r - t')}\right), \quad (5.4.21)$$

$$Q_{ij} = M_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} M_{kk}, \quad Q_{ij}^{lt/tt} = \Lambda_{ij,kl}^{lt/tt} Q_{kl}. \quad (5.4.22)$$

При выделении излучаемых частей производных полей \bar{h}_{ij}^{lt} и \bar{h}_{ij}^{tt} учтем, что дифференцирование проекторов будет увеличивать асимптотику поля по обратным степеням пространственного расстояния r

$$\partial_i n_j \propto r^{-1}. \quad (5.4.23)$$

Таким образом, соответствующие члены не дадут вклада в дальнодействующую часть производной поля. В результате, после устранения локальных членов, возникающих в производных поля из-за дифференцирования верхнего предела в интеграле по времени, с помощью интегрирования по частям с учетом ур. (5.4.15) мы получаем следующие выражения для излучаемых частей производных полей \bar{h}_{ij}^{lt} и \bar{h}_{ij}^{tt} в нерелятивистском приближении

$$\partial_\mu \bar{h}_{ij}^{lt/tt} = -\frac{c_\mu}{4\pi^2 M_5^3 r} Q_{ij}^{lt/tt}(t_r, r), \quad c^\mu = \{1, \mathbf{n}\}, \quad (5.4.24)$$

$$Q_{ij}^{lt/tt} = \int_0^\infty d\mu \rho(\mu) \int_{-\infty}^{t_r} dt' \ddot{\ddot{Q}}_{ij}^{lt/tt}(t') J_0\left(\mu\sqrt{2r(t_r - t')}\right). \quad (5.4.25)$$

5.4.2. Скалярное поле в волновой зоне

Для скалярного поля φ вычисления аналогичны проведенным выше, поэтому здесь мы лишь кратко опишем основные шаги.

Из уравнения движения (5.4.4) с учетом ур. (5.4.15) находим, что скалярное поле в волновой зоне в нерелятивистском приближении дается следующим интегралом

$$\varphi = -\frac{1}{12\pi^2 M_5^3 r} \int_0^\infty d\mu \rho(\mu) \int_{-\infty}^{t_r} dt' J_0\left(\mu\sqrt{2r(t_r - t')}\right) \frac{d}{dt'} \int d^3x' T_m(x'). \quad (5.4.26)$$

С помощью закона сохранения тензора энергии-импульса материи на бране переписываем пространственный интеграл от его следа как [163]

$$\int d^3x' T_m(x') = -M(t') + \frac{1}{2} \ddot{M}_{kk}(t'), \quad M(t') = \int d^3x' T_{m00}(x'). \quad (5.4.27)$$

В результате, с учетом закона сохранения ТЭИ материи на бране [163] скалярное поле в волновой зоне переписывается как

$$\varphi = -\frac{1}{24\pi^2 M_5^3 r} \int_0^\infty d\mu \rho(\mu) \int_{-\infty}^{t_r} dt' \ddot{M}_{kk}(t') J_0\left(\mu\sqrt{2r(t_r - t')}\right). \quad (5.4.28)$$

Наконец, устрояя локальные вклады за счет интегрирования по частям с помощью ур. (5.4.15), выделяем дальнедействующую часть производной скалярного поля в виде

$$\partial_\mu \varphi = \frac{c_\mu}{24\pi^2 M_5^3 r} \mathbb{M}(t_r, r), \quad c^\mu = \{1, \mathbf{n}\}, \quad (5.4.29)$$

$$\mathbb{M} = \int_0^\infty d\mu \rho(\mu) \int_{-\infty}^{t_r} dt' \ddot{\ddot{M}}_{kk}(t') J_0\left(\mu\sqrt{2r(t_r - t')}\right). \quad (5.4.30)$$

5.4.3. Квадрупольная формула в DGP-гравитации

Выделив излучаемые части дСС DGP-гравитации, вычислим эффективную мощность гравитационного излучения произвольного нерелятивистского источника на бране.

Подставляя ур. (5.4.24) и (5.4.29) в эффективный ТЭИ дСС DGP-гравитации (5.3.150), мы находим эффективную плотность потока энергии гравитационного излучения на бране в виде

$$T_d^{0k} = \frac{M_4^2}{64\pi^4 M_5^6 r^2} n^k \left(\frac{1}{6} \mathbb{M}^2 + \mathbb{Q}_{ij}^{lt} \mathbb{Q}_{ij}^{lt} + \mathbb{Q}_{ij}^{tt} \mathbb{Q}_{ij}^{tt} \right). \quad (5.4.31)$$

Отсюда с помощью ур. (1.3.7) мы получаем аналог квадрупольной формулы для углового распределения эффективной мощности гравитационного излучения произвольного нерелятивистского источника на бране

$$\frac{dW_{\text{DGP}}}{d\Omega_2} = \frac{M_4^2}{64\pi^4 M_5^6} \left(\frac{1}{6} \mathbb{M}^2 + \mathbb{Q}_{ij}^{lt} \mathbb{Q}_{ij}^{lt} + \mathbb{Q}_{ij}^{tt} \mathbb{Q}_{ij}^{tt} \right). \quad (5.4.32)$$

Здесь явно выделены вклады трех дополнительных дСС гравитационного поля φ и \bar{h}_{ij}^{tt} , соответствующих трем дополнительным поляризациям гравитационных волн в DGP-модели. В свою очередь, член $\propto \mathbb{Q}_{ij}^{tt}\mathbb{Q}_{ij}^{tt}$ является здесь аналогом стандартной квадрупольной формулы для мощности гравитационного излучения в ОТО [163].

Заметим, что интегралы по истории движения источника в далекодействующей части гравитационного поля (5.4.24) и (5.4.29) содержат тот же дамлинг-фактор $J_0(\mu\sqrt{2r(t_r - t')})$, что и далекодействующая часть скалярного аналога DGP-модели (4.4.2). Таким образом, полученные в Главе 4 в рамках скалярного-полевого аналога DGP-модели оценки для интенсивности утечки гравитационных волн в дополнительное измерение (4.4.8) будут справедливы и в случае DGP-модели гравитации.

5.4.4. Оценка параметров формулы Деффайе-Мену

Получим с помощью выражения для гравитационного поля в волновой зоне (5.4.21) оценку для параметра n эмпирической формулы Деффайе-Мену (3.2) [36], характеризующей интенсивность утечки гравитационных волн в дополнительное измерение.

Так как в качестве фонового решения мы рассматривали плоскую брану, вложенную в пятимерное пространство Минковского, то заменим в формуле Деффайе-Мену (3.2) расстояние светимости d_L на пространственное расстояние r

$$\bar{h} \propto \frac{1}{r(1 + (r/R_c)^{n/2})^{1/n}}. \quad (5.4.33)$$

Для оценки параметра n , характеризующего резкость перехода асимптотики гравитационного поля от четырехмерного режима к пятимерному, воспользуемся разложением ур. (5.4.33) в области $r \ll R_c$, которое с точностью до первого порядка малости записывается как

$$\bar{h} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{n}(r/R_c)^{n/2} + \mathcal{O}((r/R_c)^n) \right). \quad (5.4.34)$$

Получим подобное разложение для ур. (5.4.21) и определим из него соответствующий параметр n .

Будем считать, что мы находимся в промежуточной области $\mathcal{R} \ll r \ll R_c$, и пренебрежем тензорной структурой гравитационного поля (5.4.21)

$$\bar{h} \propto \frac{1}{r} \int_0^\infty d\mu \rho(\mu) \int_{-\infty}^{t_r} dt' \ddot{Q}(t') J_0\left(\mu\sqrt{2r(t_r - t')}\right). \quad (5.4.35)$$

Для простоты рассмотрим периодический источник $Q(t') \propto \sin \omega t'$. Тогда после замены переменной $s = t_r - t'$ интеграл по истории движения в ур. (5.4.35) вычисляется как [150]

$$\int_{-\infty}^{t_r} dt' \ddot{Q}(t') J_0\left(\mu\sqrt{2r(t_r - t')}\right) \propto \int_0^\infty ds \sin(\omega s) J_0\left(\mu\sqrt{2rs}\right) \propto \cos \frac{r\mu^2}{2\omega}. \quad (5.4.36)$$

Здесь мы опустили факторы, зависящие от частоты движения источника ω и других его характеристик, интересуясь лишь зависимостью гравитационного поля от расстояния до источника. Вычисляя интеграл по Калуца-Клейновским массам [150], получаем

$$\bar{h} \propto \frac{1}{r} \left[\cos x^2 - \sqrt{2} \cos\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right) C(x) - \sqrt{2} \sin\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right) S(x) \right], \quad x = \sqrt{\frac{rM_c^2}{2\omega}}, \quad (5.4.37)$$

где $C(x)$ и $S(x)$ являются косинусным и синусным интегралами Френеля, соответственно [150]. Вводя безразмерные расстояние $\bar{r} = r/R_c$ и частоту $\bar{\omega} = \omega/M_c$, раскладываем ур. (5.4.37) в ряд по $\bar{r} \ll 1$ с точностью до первого порядка малости [150]

$$\bar{h} \propto \frac{1}{r} \left(1 - \sqrt{\frac{\bar{r}}{2\bar{\omega}}} + \mathcal{O}(\bar{r}) \right). \quad (5.4.38)$$

Сравнивая ур. (5.4.34) и (5.4.38), находим, что параметр резкости перехода из формулы Деффайе-Меноу (3.2) должен иметь значение $n = 1$. Однако, при этом переходный радиус DGP-модели R_c должен быть заменен на эффективный переходный радиус

$$R_c \implies R_{\text{eff}} = 2\bar{\omega}R_c. \quad (5.4.39)$$

В соответствии с результатами Главы 4, эффективный переходный радиус R_{eff} , за которым начинает значительно проявляться эффект утечки гравитационных волн в дополнительное измерение, определяется не только параметрами DGP-модели, но также и частотой гравитационной волны. В частности, в области чувствительности современных гравитационно-волновых обсерваторий [29] эффективный переходный радиус R_{eff} на порядки превышает переходный радиус R_c , определяемый параметрами DGP-модели

$$\omega \sim 10^2 \text{ Гц}, \quad M_c \sim 10^{-42} \text{ ГэВ} \implies R_{\text{eff}} \sim 10^{20} R_c, \quad (5.4.40)$$

что сильно затрудняет потенциальное экспериментальное обнаружение эффекта утечки гравитационных волн [37–39].

Таким образом, исходя из разложения гравитационного поля в волновой зоне (5.4.38), мы предполагаем, что формула Деффайе-Меноу (3.2) должна быть переписана как

$$h \propto \frac{1}{r(1 + \sqrt{r/R_{\text{eff}}})}, \quad R_{\text{eff}} = 2\bar{\omega}R_c, \quad \bar{\omega} = \omega/M_c \quad (5.4.41)$$

в случае распространения гравитационных волн по плоской бране, вложенной в пятимерное пространство Минковского.

5.5. Выводы

Целью данной Главы было исследование процесса гравитационного излучения в DGP-модели гравитации. Рассматривая малые возмущения гравитационного поля на фоне плоской браны без натяжения, вложенной в пятимерное пространство Минковского, мы получили аналог квадрупольной формулы для эффективной мощности гравитационного излучения произвольного нерелятивистского источника на бране (5.4.32). Также, основываясь на полученном выражении для гравитационного поля на бране в волновой зоне (5.4.24) и (5.4.29), мы оценили параметры эмпирической формулы Деффайе-Меноу (3.2) [36]. Показано, что параметр n , характеризующий резкость перехода асимптотики гравитационного поля от четырехмерного к пятимерному режиму, имеет значение $n = 1$, а переходный радиус DGP-модели R_c должен быть заменен в данной формуле на эффективный переходный радиус $R_{\text{eff}} = 2\bar{\omega}R_c$ (где $\bar{\omega} = \omega/M_c$), зависящий от частоты гравитационно-волнового сигнала ω .

Поскольку эффективное квадратичное действие DGP-гравитации на бране (5.2.35) представляет собой нелокальную теорию, нами было дано обобщение метода Нетер для построения тензора энергии-импульса на случай данной нелокальной теории. В результате, было показано, что эффективный тензор энергии-импульса DGP-гравитации на бране (5.2.50) может быть вычислен из эффективного нелокального действия (5.2.35) с помощью стандартной формулы для канонического тензора энергии-импульса [176] в пренебрежении нелокальными членами действия. Предложенный метод построения эффективного тензора энергии-импульса был проверен в скалярной DGP-модели с помощью вычисления части ее полного пятимерного Гамильтониана, локализованной на бране (5.2.23). Основываясь на предложенной процедуре, мы построили эффективный тензор энергии-импульса динамических степеней свободы DGP-гравитации (5.3.150), определяющий поток энергии гравитационного излучения на бране.

Заметим, что проблема гравитационного излучения в DGP-модели также рассматривалась в работе [181] в рамках подхода эффективной теории поля к задачам излучения [80, 81]. Однако, будучи основанными на вычислениях в импульсном пространстве, результаты данной работы не дают информации о структуре гравитационного поля в волновой зоне и роли метастабильного характера эффективного гравитона на бране в формировании и утечке гравитационного излучения с браны. В свою очередь, наша работа предлагает решение проблемы гравитационного излучения в DGP-модели исключительно методами классической теории поля.

Заключение

Данная диссертация посвящена изучению гравитационно-волновых эффектов в моделях мира на бране с большими дополнительными измерениями пространства-времени. Исследованы нелокальные эффекты, возникающие в гравитационном излучении за счет нарушения принципа Гюйгенса в балке нечетной размерности, а также эффект утечки гравитационных волн с браны в дополнительные измерения, связанный с метастабильным характером эффективного гравитона на бране в DGP-модели гравитации. При изучении данных эффектов был развит ряд пробных моделей скалярного поля, улавливающих основные черты рассматриваемых эффектов, а также дано обобщение ряда методов классической теории поля на случай нелокальных эффективных теорий скалярного и гравитационного полей на бране. Основные результаты диссертации заключаются в следующем:

1. В моделях безмассового скалярного поля в пространстве Минковского размерности три и пять показано, что за счет нарушения принципа Гюйгенса поле в волновой зоне и поток энергии излучения зависят от истории движения источника, предшествующей запаздывающему времени. Получены формулы для мощности скалярного излучения нерелятивистского заряда и формулы для мощности скалярного синхротронного излучения. Обнаружено, что нарушение принципа Гюйгенса приводит к формированию характерных хвостовых сигналов в излучении заряда на эллиптической орбите. В частности, точки экстремума мощности излучения заряда сдвигаются во времени от моментов прохождения зарядом перицентра и апоцентра орбиты. Получены выражения для данных сдвигов с точностью до вкладов квадратичных по эксцентриситету орбиты.
2. В ОТО с одним бесконечным дополнительным измерением получен пятимерный аналог квадрупольной формулы для мощности гравитационного излучения нерелятивистской двойной системы, локализованной на 3-бране. Показано, что двойная система на бране генерирует все пять поляризаций гравитационных волн в пятимерном балке. Однако, для регистрации наблюдателем на бране доступны лишь три из них – две стандартные «крест» и «плюс» поляризации, а также так называемая «дышащая» мода [27]. Обнаружено, что последняя имеет ненулевое значение на бране, но переносит на 25% меньше энергии, чем остальные поляризации. Получен закон эволюции квазикруговой орбиты двойной системы на бране при потере ею энергии на гравитационное излучение в пятимерный балк. Обнаружено, что относительная скорость сжатия двойной системы на бране при потере ею энергии на гравитационное излучение в пятимерный балк

оказывается ниже по сравнению со своим четырехмерным аналогом.

3. В скалярном аналоге DGP-модели получена формула для эффективной мощности излучения нерелятивистского заряда на круговой орбите на бране, характеризующая интенсивность утечки гравитационных волн в дополнительное измерение. В соответствии с инфракрасной прозрачностью балка в DGP-модели, обнаружено, что интенсивность утечки зависит от частоты гравитационно-волнового сигнала и оказывается выше для низкочастотных сигналов. Оценена возможность экспериментального наблюдения эффекта утечки гравитационных волн современными и будущими гравитационно-волновыми обсерваториями. Показано, что при реалистичном выборе параметров DGP-модели $m_c \sim 10^{-42}$ ГэВ [108, 110] интенсивность утечки гравитационных волн с частотами в диапазонах чувствительности LIGO и LISA крайне мала.
4. В DGP-гравитации получен аналог квадрупольной формулы для эффективной мощности гравитационного излучения произвольного нерелятивистского источника на бране. Для этого на основе метода Нетер была разработана процедура построения эффективного тензора энергии-импульса гравитационного поля на бране из нелокального эффективного действия DGP-гравитации. Показано, что нелокальные массовые члены эффективного действия не дают вклад в эффективный тензор энергии-импульса, и он может быть вычислен по стандартной формуле для канонического тензора энергии-импульса в пренебрежении последними. На основе полученной квадрупольной формулы найдены оценки для параметров эмпирической формулы Деффайе-Меноу (3.2).

Благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Дмитрию Владимировичу Гальцову за помощь в проведении исследований, плодотворные обсуждения научных задач и полученных результатов, помощь в подготовке научных статей к публикации, а также внимательную вычитку диссертации и ценные предложения и комментарии. Автор также благодарен родным, друзьям и близким за их бескрайнюю моральную поддержку. В особенности, жене Анастасии за ее любовь и веру в него, а также тот пример настойчивости и целеустремленности, который она всегда показывает автору.

Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «Базис», грант № 20-2-10-8-1.

Приложения

1. Мощность пятимерного синхротронного излучения

Следующее вычисление было предложено И. Богушем. Рассмотрим интеграл

$$J = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} d\hat{a}d\hat{\theta}d\hat{\zeta} (\hat{A} + 1)I^2, \quad I = \int_0^\infty dx \sqrt{x} \frac{f'}{f^{9/2}} \left(\frac{315}{2} \frac{f'^2}{f} - 70 \right), \quad (1.1)$$

$$f(x) = x^2/3 - ax + \hat{A} + 1, \quad (1.2)$$

где $\hat{A} = \hat{a}^2 + \hat{\theta}^2 + \hat{\zeta}^2$. Вводя цилиндрические координаты в пространстве $(\hat{a}, \hat{\theta}, \hat{\zeta})$ с помощью выражения $b^2 = \hat{\theta}^2 + \hat{\zeta}^2$, мы получаем

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty d\hat{a} \int_0^\infty db b (\hat{a}^2 + b^2 + 1) I^2, \quad f(x) = \frac{3}{4}(2x/3 - \hat{a})^2 + \frac{1}{4}\hat{a}^2 + b^2 + 1. \quad (1.3)$$

Переходя к переменной $y = 2x/3 - \hat{a}$ и вводя обозначение $c^2 = \hat{a}^2 + 4(b^2 + 1)$, мы находим

$$f(x) = \frac{1}{4}(3y^2 + c^2), \quad f'(x) = y, \quad (1.4)$$

$$I = 70 \cdot 2^9 \left(\frac{3}{2} \right)^{3/2} \int_{-\hat{a}}^\infty dy \frac{y\sqrt{y+\hat{a}}}{(3y^2 + c^2)^{9/2}} \left(\frac{9y^2}{3y^2 + c^2} - 1 \right).$$

Полученный интеграл может быть выражен в терминах полных эллиптических интегралов $E(d)$ и $K(d)$ как [150]

$$I = \frac{1}{4 \cdot 3^{1/4} C} (A(2E(d) + K(d)) + BK(d)), \quad (1.5)$$

$$A = -288\hat{a}(b^2 + 1)(\hat{a}^2 + 3b^2 + 3), \quad (1.6)$$

$$B = \sqrt{3}\sqrt{\hat{a}^2 + b^2 + 1} (28\hat{a}^4 + 44\hat{a}^2(b^2 + 1) - 80(b^2 + 1)^2), \quad (1.7)$$

$$C = (\hat{a}^2 + 4(b^2 + 1))^2 (\hat{a}^2 + b^2 + 1)^{15/4}, \quad (1.8)$$

$$d = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}\hat{a}}{2\sqrt{\hat{a}^2 + b^2 + 1}} + 1 \right). \quad (1.9)$$

В результате, мы получаем амплитуду мощности излучения в форме двойного интеграла

$$J = \frac{1}{32\sqrt{3}\pi} \int_{-\infty}^\infty d\hat{a} \int_0^\infty db \frac{b(A(2E(d) + K(d)) + BK(d))^2}{(\hat{a}^2 + 4(b^2 + 1))^4 (\hat{a}^2 + b^2 + 1)^{13/2}}, \quad (1.10)$$

который может быть легко оценен численно, приводя к значению $J = 1/\sqrt{27}$ с точностью до пяти цифр после запятой.

2. Вычисление I_4^l для заряда на эллиптической орбите

Спектральное распределение мощности излучения нерелятивистского заряда на эллиптической орбите определяется интегралом (2.3.22), который является линейной комбинацией

двух интегралов

$$I_{4,s}^l = \int_0^{2\pi} d\xi (1 - e \cos \xi) \sin \xi e^{il(\xi - e \sin \xi)}, \quad (2.1)$$

$$I_{4,c}^l = \int_0^{2\pi} d\xi (1 - e \cos \xi) \cos \xi e^{il(\xi - e \sin \xi)}. \quad (2.2)$$

Здесь мы продемонстрируем лишь вычисление интеграла (2.1). Интеграл (2.2) вычисляется аналогичным образом.

Учитывая, что интеграл нечетной периодической функции по периоду равен нулю, раскрывая экспоненту по формуле Эйлера, приходим к интегралу вида

$$I_{4,s}^l = i \int_0^{2\pi} d\xi (1 - e \cos \xi) \sin \xi \sin(l\xi - el \sin \xi). \quad (2.3)$$

Вводя новую переменную интегрирования $\xi' = \xi - \pi$, переписываем $I_{4,s}^l$ как

$$I_{4,s}^l = i(-1)^{l+1} \int_{-\pi}^{\pi} d\xi' (1 + e \cos \xi') \sin \xi' \sin(l\xi' + el \sin \xi'). \quad (2.4)$$

Так как мы получили интеграл от четной функции по симметричному интервалу, то раскрывая $\sin(l\xi' + el \sin \xi')$, после замены $\xi' \rightarrow \xi$ записываем $I_{4,s}^l$ как

$$I_{4,s}^l = 2i(-1)^{l+1} \int_0^{\pi} d\xi \left[\sin \xi \sin l\xi \cos(el \sin \xi) + \sin \xi \cos l\xi \sin(el \sin \xi) + \frac{e}{2} \sin 2\xi \sin l\xi \cos(el \sin \xi) + \frac{e}{2} \sin 2\xi \cos l\xi \sin(el \sin \xi) \right]. \quad (2.5)$$

Наконец, представляя произведения $\sin m\xi \cos l\xi$ в виде комбинаций синусов/косинусов суммы или разности, получаем

$$I_{4,s}^l = i(-1)^{l+1} \int_0^{\pi} d\xi \left[\cos(l-1)\xi \cos(el \sin \xi) - \cos(l+1)\xi \cos(el \sin \xi) - \sin(l-1)\xi \sin(el \sin \xi) + \sin(l+1)\xi \sin(el \sin \xi) + \frac{e}{2} \cos(l-2)\xi \cos(el \sin \xi) - \frac{e}{2} \cos(l+2)\xi \cos(el \sin \xi) - \frac{e}{2} \sin(l-2)\xi \sin(el \sin \xi) + \frac{e}{2} \sin(l+2)\xi \sin(el \sin \xi) \right]. \quad (2.6)$$

Полученные здесь интегралы легко вычисляются [150], и мы находим следующее выражение для интеграла (2.1)

$$I_{4,s}^l = i\pi A_l(e), \quad (2.7)$$

где $A_l(e)$ дается уравнением (2.3.27).

3. Поляризации гравитационных волн в $D = 5$

Следующий вывод аналогичен представленному в [163]. Вычислим поляризационные амплитуды произвольного симметричного тензора второго ранга $\mathcal{A}_{ij}^{\text{tt}}$ в подобранной специальным образом систем координат. Затем перепишем его компоненты, участвующие в этих амплитудах, через его компоненты в произвольной координатной системе.

Начнем с тензора \mathcal{A}'_{ij} в x' -системе, где вектор в направлении наблюдения \mathbf{n}' сонаправлен с координатной x'^4 -осью

$$n'^i = \{0, 0, 0, 1\}. \quad (3.1)$$

С помощью (3.1.109) мы находим тензор \mathcal{A}'_{ij} в поперечно-бесследовой калибровке в виде

$$\mathcal{A}'_{ij}{}^{\text{tt}} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_+ - \frac{1}{2}\mathcal{A}_\circ & \mathcal{A}_\times & \mathcal{A}_\oplus & 0 \\ \mathcal{A}_\times & -\mathcal{A}_+ - \frac{1}{2}\mathcal{A}_\circ & \mathcal{A}_\otimes & 0 \\ \mathcal{A}_\oplus & \mathcal{A}_\otimes & \mathcal{A}_\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

где поляризационные амплитуды определяются по аналогии с ур. (3.1.114) и (3.1.115) как

$$\mathcal{A}_+ = \frac{1}{2}(\mathcal{A}'_{11} - \mathcal{A}'_{22}), \quad \mathcal{A}_\times = \mathcal{A}'_{12}, \quad \mathcal{A}_\circ = \frac{2}{3}\mathcal{A}'_{33} - \frac{1}{3}(\mathcal{A}'_{11} + \mathcal{A}'_{22}), \quad (3.3)$$

$$\mathcal{A}_\oplus = \mathcal{A}'_{13}, \quad \mathcal{A}_\otimes = \mathcal{A}'_{23}. \quad (3.4)$$

Перепишем компоненты \mathcal{A}'_{ij} через компоненты \mathcal{A}_{ij} , определенные относительно произвольно ориентированной x -системы отсчёта, в которой вектор в направлении наблюдения \mathbf{n} имеет вид [148]

$$n^i = \{\cos \phi \sin \theta \sin \zeta, \sin \phi \sin \theta \sin \zeta, \cos \theta \sin \zeta, \cos \zeta\}. \quad (3.5)$$

Он связан с вектором \mathbf{n}' как $n^i = R_j^i n'^j$, где матрица поворота R_j^i записывается как

$$R_j^i = \begin{pmatrix} \sin \phi & \cos \phi \cos \theta & \cos \phi \sin \theta \cos \zeta & \cos \phi \sin \theta \sin \zeta \\ -\cos \phi & \sin \phi \cos \theta & \sin \phi \sin \theta \cos \zeta & \sin \phi \sin \theta \sin \zeta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \cos \zeta & \cos \theta \sin \zeta \\ 0 & 0 & -\sin \zeta & \cos \zeta \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Аналогично, компоненты тензора \mathcal{A}'_{ij} переписываются через компоненты \mathcal{A}_{ij} как

$$\mathcal{A}'_{mn} = (R^T \mathcal{A} R)_{mn}, \quad (3.7)$$

где $(PQ)_{ij} = P_{ik}Q_{kj}$ является матричным произведением, а R^T – транспонированная матрица преобразования.

В результате, мы получаем поляризационные амплитуды для произвольного направления наблюдения \mathbf{n} . Так, стандартные «плюс» и «крест» поляризации принимают вид

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_+ = & \frac{1}{2} [\mathcal{A}_{11}(\sin^2 \phi - \cos^2 \phi \cos^2 \theta) + \mathcal{A}_{22}(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi \cos^2 \theta) - \mathcal{A}_{33} \sin^2 \theta - \\ & - \mathcal{A}_{12}(1 + \cos^2 \theta) \sin 2\phi + (\mathcal{A}_{13} \cos \phi + \mathcal{A}_{23} \sin \phi) \sin 2\theta], \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\mathcal{A}_\times = \frac{1}{2}(\mathcal{A}_{11} - \mathcal{A}_{22}) \sin 2\phi \cos \theta - \mathcal{A}_{12} \cos 2\phi \cos \theta - (\mathcal{A}_{13} \sin \phi - \mathcal{A}_{23} \cos \phi) \sin \theta. \quad (3.9)$$

Заметим, что полученные выражения (3.8) и (3.9) совпадают со своими четырехмерными аналогами [163]. «Дышащая» мода записывается как

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 = & \frac{1}{3} \{ \mathcal{A}_{11} [(2 \cos^2 \zeta + 1) \cos^2 \phi \sin^2 \theta - 1] + \mathcal{A}_{22} [(2 \cos^2 \zeta + 1) \sin^2 \phi \sin^2 \theta - 1] + \mathcal{A}_{33} \times \\ & \times [(2 \cos^2 \zeta + 1) \cos^2 \theta - 1] + 2\mathcal{A}_{44} \sin^2 \zeta + [\mathcal{A}_{12} \sin 2\phi \sin^2 \theta + (\mathcal{A}_{13} \cos \phi + \mathcal{A}_{23} \sin \phi) \times \\ & \times \sin 2\theta] (2 \cos^2 \zeta + 1) - 2[(\mathcal{A}_{14} \cos \phi + \mathcal{A}_{24} \sin \phi) \sin \theta + \mathcal{A}_{34} \cos \theta] \sin 2\zeta \}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Заметим, что она имеет ненулевое значение когда точка наблюдения и источник поля находятся на бране $\zeta = \pi/2$, $\mathcal{A}_{i4} = 0$. Оставшиеся поляризации \mathcal{A}_\oplus и \mathcal{A}_\otimes принимают вид

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\oplus = & \frac{1}{2} (\mathcal{A}_{11} - \mathcal{A}_{22}) \sin 2\phi \sin \theta \cos \zeta - \mathcal{A}_{12} \cos 2\phi \sin \theta \cos \zeta + (\mathcal{A}_{13} \sin \phi - \mathcal{A}_{23} \cos \phi) \times \\ & \times \cos \theta \cos \zeta - (\mathcal{A}_{14} \sin \phi - \mathcal{A}_{24} \cos \phi) \sin \zeta, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\otimes = & \frac{1}{2} \{ (\mathcal{A}_{11} \cos^2 \phi + \mathcal{A}_{22} \sin^2 \phi - \mathcal{A}_{33}) \sin 2\theta \cos \zeta + \mathcal{A}_{12} \sin 2\phi \sin 2\theta \cos \zeta + 2(\mathcal{A}_{13} \cos \phi + \\ & + \mathcal{A}_{23} \sin \phi) \cos 2\theta \cos \zeta - 2(\mathcal{A}_{14} \cos \phi + \mathcal{A}_{24} \sin \phi) \cos \theta \sin \zeta + \mathcal{A}_{34} \sin \theta \sin \zeta \}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

В отличие от «дышащей» моды, они принимают нулевые значения, когда источник и точка наблюдения находятся на бране.

4. Регуляризация вклада точечных частиц

Рассмотрим первые два члена в ур. (3.2.11) и разделим их на три интеграла

$$I_{ij} = \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \left[\frac{15}{4} v_i v_j \frac{\mathbf{ns}(t') - \mathbf{n}\bar{\mathbf{v}}}{(\bar{t} - t')^{5/2}} + \frac{3}{2} \frac{v_i v_j}{(\bar{t} - t')^{5/2}} \right] = I_{ij}^1 + I_{ij}^2 + I_{ij}^3, \quad (4.1)$$

$$I_{ij}^1 = \frac{15}{4} \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' v_i v_j \frac{\mathbf{ns}(t')}{(\bar{t} - t')^{5/2}}, \quad I_{ij}^2 = -\frac{15}{4} \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' v_i v_j \frac{\mathbf{n}\bar{\mathbf{v}}}{(\bar{t} - t')^{5/2}}, \quad (4.2)$$

$$I_{ij}^3 = \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \frac{v_i v_j}{(\bar{t} - t')^{5/2}}. \quad (4.3)$$

По аналогии с регуляризацией скалярного поля в Главе 1, мы вводим параметр $\epsilon \rightarrow +0$ в верхний предел интегрирования $\bar{t} \rightarrow \bar{t} - \epsilon$ и интегрируем ур. (4.1–4.3) по частям, сводя степени знаменателей подынтегральных выражений к $1/2$.

Интегрируя I_{ij}^1 по частям трижды с помощью ур. (1.4.17), мы выделяем его расходимость, содержащиеся в верхнем пределе интегрирования

$$\begin{aligned} I_{ij}^1 = & \frac{5}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \bar{v}_i \bar{v}_j \frac{\mathbf{n}\bar{\mathbf{v}}}{\epsilon^{3/2}} - 2 \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \bar{v}_i \bar{v}_j \frac{\mathbf{n}\bar{\mathbf{a}}}{\epsilon^{1/2}} - 10 \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \bar{a}_{(i} \bar{v}_{j)} \frac{\mathbf{n}\bar{\mathbf{v}}}{\epsilon^{1/2}} + 2 \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' v_i v_j \frac{\mathbf{n}\dot{\mathbf{a}}}{(\bar{t} - t')^{1/2}} + \\ & + 12 \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' a_{(i} v_{j)} \frac{\mathbf{n}\mathbf{a}}{(\bar{t} - t')^{1/2}} + 6 \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' (\dot{a}_i v_j + 2a_i \dot{a}_j + v_i \dot{a}_j) \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{(\bar{t} - t')^{1/2}} - \\ & - 2 \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' (\ddot{a}_i v_j + 3\dot{a}_i \dot{a}_j + 3a_i \ddot{a}_j + v_i \ddot{a}_j) \frac{\mathbf{n}\bar{\mathbf{z}} - \mathbf{n}\mathbf{z}}{(\bar{t} - t')^{1/2}}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где мы учли, что $\mathbf{s}(t) \rightarrow \bar{\mathbf{v}}$, $t \rightarrow \bar{t}$. После аналогичных преобразований I_{ij}^2 принимает вид

$$I_{ij}^2 = -\frac{5}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \bar{v}_i \bar{v}_j \frac{\mathbf{n}\bar{\mathbf{v}}}{\epsilon^{3/2}} + 10 \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \bar{a}_{(i} \bar{v}_{j)} \frac{\mathbf{n}\bar{\mathbf{v}}}{\epsilon^{1/2}} - 5 \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' (\dot{a}_i v_j + 2a_i a_j + v_i \dot{a}_j) \frac{\mathbf{n}\bar{\mathbf{v}}}{(\bar{t} - t')^{1/2}}. \quad (4.5)$$

Первые два члена ур. (4.5) сокращаются с двумя сингулярными вкладами в ур. (4.4). Последний интеграл I_{ij}^3 преобразуется к следующему виду

$$I_{ij}^3 = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\bar{v}_i \bar{v}_j}{\epsilon^{3/2}} - 4 \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\bar{a}_{(i} \bar{v}_{j)}}{\epsilon^{1/2}} + 2 \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \frac{\dot{a}_i v_j + 2a_i a_j + v_i \dot{a}_j}{(\bar{t} - t')^{1/2}}. \quad (4.6)$$

Оставшиеся сингулярные члены в ур. (4.5) и (4.6) сокращаются «контрчленами», содержащимися в ур. (3.2.11)

$$-\frac{3}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\bar{t}-\epsilon} dt' \frac{\bar{v}_i \bar{v}_j}{(\bar{t} - t')^{5/2}} = - \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\bar{v}_i \bar{v}_j}{\epsilon^{3/2}}, \quad (4.7)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\bar{t}-\epsilon} dt' \frac{2\bar{a}_{(i} \bar{v}_{j)} + \bar{v}_i \bar{v}_j \mathbf{n}\bar{\mathbf{a}}}{(\bar{t} - t')^{3/2}} = 2 \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{2\bar{a}_{(i} \bar{v}_{j)} + \bar{v}_i \bar{v}_j \mathbf{n}\bar{\mathbf{a}}}{\epsilon^{1/2}}, \quad (4.8)$$

оставляя лишь сходящийся интеграл (3.2.12) в излучаемой части гравитационного поля точечной частицы.

5. Интеграл по ближней зоне

Пространственный интеграл, возникающий в ур. (3.3.23) и (3.3.31), имеет вид

$$\int_{\mathcal{R}} d^3 x' \varphi_1(x') \partial'_i \partial'_j \varphi_2(x'), \quad (5.1)$$

где \mathcal{R} означает интегрирование по внутренности 2-сферы радиуса \mathcal{R} с центром в начале координат. Учитывая нерелятивистское движение частиц и пренебрегая запаздыванием полей в ближней зоне, скалярные поля, стоящие под интегралом, даются ур. (3.1.119). Переписывая координаты частиц через относительную координату (3.2.15), мы получаем

$$\int_{\mathcal{R}} d^3 x' \frac{g_1}{|\vec{x}' + s_2 \vec{z}(t')|} \partial'_i \partial'_j \frac{g_2}{|\vec{x}' - s_1 \vec{z}(t')|}, \quad (5.2)$$

где $s_1 = m_1/M$ и $s_2 = m_2/M$. Мы сдвигаем начало координат как

$$\vec{y} = \vec{x}' - s_1 \vec{z}, \quad (5.3)$$

чтобы получить под производными обратное расстояние до начала координат. Мы также меняем область интегрирования на внутренность сферы с центром в $\vec{y} = 0$. Новая область интегрирования отличается от начальной лишь областями $|\vec{y}| \sim \mathcal{R}$, где плотность энергии-импульса скалярного поля исчезающе мала. Мы пренебрегаем этими различиями в областях интегрирования, приводя пространственный интеграл к виду

$$3g_1 g_2 \delta_{ii} \delta_{jj} \int dy d\Omega_2 \frac{\hat{n}^i \hat{n}^j}{y |\vec{y} + \vec{z}|}, \quad y = |\vec{y}|, \quad \hat{n}^i = \frac{y^i}{y}, \quad (5.4)$$

где индексы $\mathbf{i}, \mathbf{j} = \overline{1, 3}$ нумеруют координаты на бране, а также мы используем сферические координаты (Ω_2 является угловым элементом на 2-сфере).

Для вычисления интеграла по сфере в ур. (5.4) мы раскладываем подынтегральное выражение по сферическим гармоникам (см., например, [167–169]) как

$$\frac{1}{|\vec{y} + \vec{z}|} = \sum_{l,m} \frac{4\pi(-1)^l}{2l+1} \frac{r_{\leq}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(n_z^{\mathbf{i}}) Y_{lm}(\hat{n}^{\mathbf{i}}), \quad (5.5)$$

где $r_{>(<)}$ обозначает большее (меньшее) из y и $z = |\vec{z}|$. Тогда интеграл в ур. (5.4) разделяется на два вклада, соответствующих интегрированию по внутренности сферы радиуса z и по сферической оболочке $y \in (z, \mathcal{R})$

$$\begin{aligned} \int dy d\Omega_2 \frac{\hat{n}^{\mathbf{i}} \hat{n}^{\mathbf{j}}}{y|\vec{y} + \vec{z}|} &= 4\pi \sum_{l,m} \int_0^z dy \frac{y^{l-1}}{z^{l+1}} \int d\Omega_2 \frac{(-1)^l}{2l+1} \left(\hat{n}^{\mathbf{i}} \hat{n}^{\mathbf{j}} - \frac{1}{3} \delta^{\mathbf{ij}} \right) Y_{lm}^*(n_z^{\mathbf{i}}) Y_{lm}(\hat{n}^{\mathbf{i}}) + \\ &+ 4\pi \sum_{l,m} \int_z^{\mathcal{R}} dy \frac{z^l}{y^{l+2}} \int d\Omega_2 \frac{(-1)^l}{2l+1} \left(\hat{n}^{\mathbf{i}} \hat{n}^{\mathbf{j}} - \frac{1}{3} \delta^{\mathbf{ij}} \right) Y_{lm}^*(n_z^{\mathbf{i}}) Y_{lm}(\hat{n}^{\mathbf{i}}), \end{aligned} \quad (5.6)$$

где мы добавили δ -символы Кронекера к произведениям двух единичных векторов, учитывая что $\delta_{\mathbf{i}\mathbf{i}} \delta_{\mathbf{j}\mathbf{j}} \delta^{\mathbf{ij}} = \delta_{\mathbf{ij}}$ и что в поперечно-бесследовой калибровке эти вклады исчезнут.

Угловой интеграл в первом слагаемом в ур. (5.6) вычисляется с помощью формул, представленных в [167–169]

$$\sum_m \int d\Omega_2 \left(\hat{n}^{\mathbf{i}} \hat{n}^{\mathbf{j}} - \frac{1}{3} \delta^{\mathbf{ij}} \right) Y_{lm}^*(n_z^{\mathbf{i}}) Y_{lm}(\hat{n}^{\mathbf{i}}) = \left(\hat{n}_z^{\mathbf{i}} \hat{n}_z^{\mathbf{j}} - \frac{1}{3} \delta^{\mathbf{ij}} \right) \delta_{l2}. \quad (5.7)$$

Оставшийся интеграл по радиальной координате в первом члене в ур. (5.6) принимает вид

$$\frac{4\pi}{5} \left(\hat{n}_z^{\mathbf{i}} \hat{n}_z^{\mathbf{j}} - \frac{1}{3} \delta^{\mathbf{ij}} \right) \int_0^z dy \frac{y}{z^3} = \frac{2\pi}{5} \frac{z^{\mathbf{i}} z^{\mathbf{j}}}{z^3}, \quad (5.8)$$

где мы опустили δ -символ Кронекера в правой части уравнения. С помощью ур. (5.7), мы вычисляем второе слагаемое в ур. (5.6), приходя к следующему выражению

$$-\frac{4\pi}{15} \frac{z^{\mathbf{i}} z^{\mathbf{j}}}{\mathcal{R}^3} + \frac{4\pi}{15} \frac{z^{\mathbf{i}} z^{\mathbf{j}}}{z^3}. \quad (5.9)$$

Опуская, как обсуждалось выше, вклад обратно пропорциональный радиусу ближней зоны и совмещая ур. (5.8) и (5.9), мы приходим к следующему выражению для пространственного интеграла (5.1)

$$\int_{\mathcal{R}} d^3 x' \varphi_1(x') \partial'_i \partial'_j \varphi_2(x') = 2\pi g_1 g_2 \frac{z^{\mathbf{i}} z^{\mathbf{j}}}{z^3}, \quad (5.10)$$

Наконец, с помощью уравнения движения частиц мы переписываем его как

$$\int_{\mathcal{R}} d^3 x' \varphi_1(x') \partial'_i \partial'_j \varphi_2(x') = -\pi \mu (a^{\mathbf{i}} z^{\mathbf{j}} + z^{\mathbf{i}} a^{\mathbf{j}}). \quad (5.11)$$

6. Излучение двойной системы на круговой орбите

Здесь мы вычисляем лишь компоненту $\mathcal{A}_{11}(x)$. Остальные компоненты вычисляются аналогичным образом. Подставляя в ур. (3.4.14) производную второго момента массы (3.4.15), мы получаем

$$\mathcal{A}_{11}(x) = 8\mu R_s^2 \omega_s^4 \int_{-\infty}^{\bar{t}} dt' \frac{\cos 2\omega_s t'}{(\bar{t} - t')^{1/2}}. \quad (6.1)$$

Заменяя переменную интегрирования $s = \bar{t} - t'$ и раскладывая косинус разности, находим

$$\mathcal{A}_{11}(x) = 8\mu R_s^2 \omega_s^4 \int_0^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{s}} (\cos 2\omega_s \bar{t} \cos 2\omega_s s + \sin 2\omega_s \bar{t} \sin 2\omega_s s). \quad (6.2)$$

Два полученных интеграла являются интегралами Френеля (1.4.33). Таким образом, с помощью формулы для суммы синуса и косинуса мы получаем

$$\mathcal{A}_{11}(x) = \sqrt{32\pi} \mu R_s^2 \omega_s^{7/2} \sin \left(2\omega_s \bar{t} + \frac{\pi}{4} \right). \quad (6.3)$$

7. Поле неподвижного заряда на бране

Чтобы вычислить поле статического заряда на бране, начнем с ур. (4.2.42) и ур. (4.2.39–4.2.40). В случае заряда, покоящегося на бране в начале координат $z^\mu(\tau) = \{\tau, \mathbf{0}\}$, скалярный ток (4.1.3) принимает простой вид

$$j(x) = g\delta^{(3)}(\mathbf{x}). \quad (7.1)$$

Подставляя его в ур. (4.2.42), для интеграла с четырехмерной массивной функцией Грина мы находим [150]

$$\int d^4x' G_4(x - x'|\mu) j(x') = \frac{ge^{-\mu r}}{4\pi r}, \quad r = |\mathbf{x}|. \quad (7.2)$$

Как и следовало ожидать, ур. (7.2) соответствует Юкавскому потенциалу статического заряда, взаимодействующего с четырехмерным массивным полем. В результате, поле на бране дается интегралом по непрерывному Калуца-Клейновскому спектру от Юкавских потенциалов

$$\varphi(x; 0) = -\frac{gM_c^2}{8\pi^2 M_5^3 r} \int_0^\infty d\mu \frac{e^{-\mu r}}{\mu^2 + M_c^2}. \quad (7.3)$$

Вычисляя этот интеграл [150], получаем поле статического заряда на бране в виде

$$\varphi(x; 0) = -\frac{g}{4\pi^2 M_4^2 r} \left[\text{Ci}(M_c r) \sin M_c r + \frac{1}{2} (\pi - 2 \text{Si}(M_c r)) \cos M_c r \right], \quad (7.4)$$

где $\text{Si}(x)$ и $\text{Ci}(x)$ – синусный и косинусный интегралы, соответственно [150]. Ур. (7.4) совпадает с полем статического заряда на бране, полученным в нормальном бранче DGP-модели [17]. Таким образом, граничное условие излучения в балке соответствует выбору нормального бранча DGP-модели.

8. Гравитационное излучение осциллирующей массы

В ОТО линейное уравнение движения гравитационного поля на фоне пространства Минковского в калибровке Лоренца имеет вид [163]

$${}_{4}\square\bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi GT_{\text{м}\mu\nu}, \quad \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad \partial^\mu\bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (8.1)$$

ТЭИ Исааксона (5.3.31) переписывается через приведенные возмущения метрики как

$$\bar{h} = -h \implies t_{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi G} \left\langle \partial_\mu\bar{h}^{\alpha\beta}\partial_\nu\bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\partial_\mu\bar{h}\partial_\nu\bar{h} \right\rangle. \quad (8.2)$$

В соответствии с подходом Рорлиха-Тейтельбойма, гравитационное поле частицы массы m , движущейся по мировой линии $z^\mu(\tau)$, имеет вид

$$T_{\text{м}\mu\nu} = m \int d\tau v_\mu v_\nu \delta^{(4)}(x - z), \quad v^\mu = \frac{dz^\mu}{d\tau} \implies \bar{h}_{\mu\nu} = 4Gm \frac{\hat{v}_\mu \hat{v}_\nu}{\hat{\rho}}, \quad (8.3)$$

где запаздывающее собственное время \hat{t} определяется ур. (1.3.1), а Лоренц-инвариантное расстояние $\hat{\rho}$ ур. (1.3.3). Отсюда находим излучаемую часть гравитационного поля

$$[\partial_\mu\bar{h}_{\alpha\beta}]^{\text{rad}} = -4Gm \frac{\hat{c}^\mu}{\hat{\rho}} [\hat{a}_\alpha\hat{v}_\beta + \hat{v}_\alpha\hat{a}_\beta + (\hat{a}\hat{c})\hat{v}_\alpha\hat{v}_\beta]. \quad (8.4)$$

В нерелятивистском пределе $|\mathbf{v}| \ll 1$ на удалении от области движения частицы $|\mathbf{x}| \gg |z|$ компоненты излучаемой части гравитационного поля записываются как

$$[\partial_\mu\bar{h}_{00}]^{\text{rad}} = -\frac{4Gm}{r} c_\mu n_k \bar{a}_k, \quad c^\mu = \{1, n^i\}, \quad n^i = x^i/r, \quad \bar{t} = t - r, \quad (8.5)$$

$$[\partial_\mu\bar{h}_{0i}]^{\text{rad}} = \frac{4Gm}{r} c_\mu \bar{a}_i, \quad [\partial_\mu\bar{h}_{ij}]^{\text{rad}} = -\frac{4Gm}{r} c_\mu (\bar{a}_i \bar{v}_j + \bar{v}_i \bar{a}_j), \quad (8.6)$$

Заметим, что в нерелятивистском пределе различные компоненты гравитационного поля имеют различные порядки малости.

Подставляя (8.5–8.6) в ур. (8.2), в нерелятивистском пределе мы находим следующее выражение для потока энергии гравитационного излучения точечной частицы

$$\frac{dW}{d\Omega_2} = t^{0i} n^i r^2 = \frac{Gm^2}{2\pi} \left\langle \frac{1}{2} (\mathbf{n}\bar{\mathbf{a}})^2 - 2\bar{\mathbf{a}}^2 \right\rangle. \quad (8.7)$$

Заметим, что мы получили вклад более низкого порядка малости, по сравнению с квадрупольной формулой [163]. Это связано с тем, что в Лоренцевской калибровке сохраняются ндСС гравитационного поля, которые и дают данный вклад в поток энергии гравитационного излучения. В частности, мощность гравитационного излучения осциллирующей точечной массы $\mathbf{z} = \{0, 0, R_0 \cos \omega_0 t\}$, вычисленная по полученной неверной формуле (8.7), оказывается отрицательной

$$W = -\frac{11}{6} Gm^2 R_0^2 \omega_0^4 < 0, \quad (8.8)$$

Таким образом, для корректного вычисления гравитационного излучения вне поперечно-бесследовой калибровки необходимо выделять ТЭИ дСС гравитационного поля.

Список литературы

1. *Kaluza T.* Zum Unitätsproblem der Physik // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) — 1921. — Т. 1921. — С. 966—972.
2. *Klein O.* Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity. (In German and English) // Z. Phys. / под ред. J. C. Taylor. — 1926. — Т. 37. — С. 895—906.
3. *Duff M. J., Nilsson B. E. W., Pope C. N.* Kaluza-Klein Supergravity // Phys. Rept. — 1986. — Т. 130. — С. 1—142.
4. *Green M. B., Schwarz J. H., Witten E.* Superstring Theory. Vol. 1: Introduction. — 1988. — (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
5. *Aref'eva I. Y.* Holographic approach to quark–gluon plasma in heavy ion collisions // Phys. Usp. — 2014. — Т. 57. — С. 527—555.
6. Holographic collisions in confining theories / V. Cardoso [и др.] // JHEP. — 2014. — Т. 01. — С. 138.
7. *Rubakov V. A.* Large and infinite extra dimensions: An Introduction // Phys. Usp. — 2001. — Т. 44. — С. 871—893.
8. *Barvinsky A. O.* Cosmological branes and macroscopic extra dimensions // Phys. Usp. — 2005. — Т. 48. — С. 545—575.
9. *Maartens R., Koyama K.* Brane-World Gravity // Living Rev. Rel. — 2010. — Т. 13. — С. 5.
10. *Cheng H.-C.* Introduction to Extra Dimensions // Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: Physics of the Large and the Small. — 2011. — С. 125—162.
11. Modified Gravity and Cosmology / T. Clifton [и др.] // Phys. Rept. — 2012. — Т. 513. — С. 1—189.
12. *Ezquiaga J. M., Zumalacárregui M.* Dark Energy in light of Multi-Messenger Gravitational-Wave astronomy // Front. Astron. Space Sci. — 2018. — Т. 5. — С. 44.
13. *Arkani-Hamed N., Dimopoulos S., Dvali G. R.* The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter // Phys. Lett. B. — 1998. — Т. 429. — С. 263—272.
14. *Arkani-Hamed N., Dimopoulos S., Dvali G. R.* Phenomenology, astrophysics and cosmology of theories with submillimeter dimensions and TeV scale quantum gravity // Phys. Rev. D. — 1999. — Т. 59. — С. 086004.

15. *Randall L., Sundrum R.* A Large mass hierarchy from a small extra dimension // Phys. Rev. Lett. — 1999. — Т. 83. — С. 3370—3373.
16. *Randall L., Sundrum R.* An Alternative to compactification // Phys. Rev. Lett. — 1999. — Т. 83. — С. 4690—4693.
17. *Dvali G. R., Gabadadze G., Porrati M.* 4-D gravity on a brane in 5-D Minkowski space // Phys. Lett. B. — 2000. — Т. 485. — С. 208—214.
18. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant / A. G. Riess [и др.] // Astron. J. — 1998. — Т. 116. — С. 1009—1038.
19. Measurements of Ω and Λ from 42 high redshift supernovae / S. Perlmutter [и др.] // Astrophys. J. — 1999. — Т. 517. — С. 565—586.
20. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger / B. P. Abbott [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Т. 116, № 6. — С. 061102.
21. GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral / B. P. Abbott [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Т. 119, № 16. — С. 161101.
22. An Ordinary Short Gamma-Ray Burst with Extraordinary Implications: Fermi-GBM Detection of GRB 170817A / A. Goldstein [и др.] // Astrophys. J. Lett. — 2017. — Т. 848, № 2. — С. L14.
23. Gravitational Waves and Gamma-rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB 170817A / B. P. Abbott [и др.] // Astrophys. J. Lett. — 2017. — Т. 848, № 2. — С. L13.
24. GWTC-3: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the Second Part of the Third Observing Run / R. Abbott [и др.]. — 2021. — Ноябрь.
25. *Yu H., Lin Z.-C., Liu Y.-X.* Gravitational waves and extra dimensions: a short review // Commun. Theor. Phys. — 2019. — Т. 71, № 8. — С. 991—1006.
26. *Alesci E., Montani G.* Can be gravitational waves markers for an extra-dimension? // Int. J. Mod. Phys. D. — 2005. — Т. 14. — С. 923—932.
27. *Andriot D., Lucena Gómez G.* Signatures of extra dimensions in gravitational waves // JCAP. — 2017. — Т. 06. — С. 048. — [Erratum: JCAP 05, E01 (2019)].
28. *Barvinsky A. O., Solodukhin S. N.* Echoing the extra dimension // Nucl. Phys. B. — 2003. — Т. 675. — С. 159—178.

29. *Moore C. J., Cole R. H., Berry C. P. L.* Gravitational-wave sensitivity curves // *Class. Quant. Grav.* — 2015. — Т. 32, № 1. — С. 015014.
30. Radion induced graviton oscillations in the two brane world / *A. O. Barvinsky [и др.]* // *Phys. Lett. B.* — 2003. — Т. 571. — С. 229.
31. Radion induced gravitational wave oscillations and their phenomenology / *A. O. Barvinsky [и др.]* // *Annalen Phys.* — 2003. — Т. 12. — С. 343–370.
32. *Shiromizu T., Maeda K.-i., Sasaki M.* The Einstein equation on the 3-brane world // *Phys. Rev. D.* — 2000. — Т. 62. — С. 024012.
33. *Maeda K.-i., Mizuno S., Torii T.* Effective gravitational equations on brane world with induced gravity // *Phys. Rev. D.* — 2003. — Т. 68. — С. 024033.
34. *Garcia-Aspeitia M. A.* Gravitational Waves Bounds in Brane-Worlds // *Rev. Mex. Fis.* — 2014. — Т. 60, № 3. — С. 205–209.
35. Quadrupole formula for Kaluza-Klein modes in the braneworld / *S. Kinoshita [и др.]* // *Class. Quant. Grav.* — 2005. — Т. 22. — С. 3911–3922.
36. *Deffayet C., Menou K.* Probing Gravity with Spacetime Sirens // *Astrophys. J.* — 2007. — Т. 668. — С. L143–L146.
37. Limits on the number of spacetime dimensions from GW170817 / *K. Pardo [и др.]* // *JCAP.* — 2018. — Т. 07. — С. 048.
38. *Corman M., Escamilla-Rivera C., Hendry M. A.* Constraining extra dimensions on cosmological scales with LISA future gravitational wave siren data // *JCAP.* — 2021. — Т. 02. — С. 005.
39. Constraining cosmological extra dimensions with gravitational wave standard sirens: From theory to current and future multimessenger observations / *M. Corman [и др.]* // *Phys. Rev. D.* — 2022. — Т. 105, № 6. — С. 064061.
40. Probing extra dimension through gravitational wave observations of compact binaries and their electromagnetic counterparts / *H. Yu [и др.]* // *JCAP.* — 2017. — Т. 02. — С. 039.
41. *Visinelli L., Bolis N., Vagnozzi S.* Brane-world extra dimensions in light of GW170817 // *Phys. Rev. D.* — 2018. — Т. 97, № 6. — С. 064039.
42. *Lin Z.-C., Yu H., Liu Y.-X.* Constraint on the radius of five-dimensional dS spacetime with GW170817 and GRB 170817A // *Phys. Rev. D.* — 2020. — Т. 101, № 10. — С. 104058.
43. *Lin Z.-C., Yu H., Liu Y.-X.* Shortcut in codimension-2 brane cosmology in light of GW170817 // *Eur. Phys. J. C.* — 2023. — Т. 83, № 3. — С. 190.

44. Tidal Love numbers of black holes and neutron stars in the presence of higher dimensions: Implications of GW170817 / K. Chakravarti [и др.] // *Phys. Rev. D.* — 2019. — Т. 99, № 2. — С. 024036.
45. *Cardoso V., Gualtieri L., Moore C. J.* Gravitational waves and higher dimensions: Love numbers and Kaluza-Klein excitations // *Phys. Rev. D.* — 2019. — Т. 100, № 12. — С. 124037.
46. Constraining extra-spatial dimensions with observations of GW170817 / K. Chakravarti [и др.] // *Class. Quant. Grav.* — 2020. — Т. 37, № 10. — С. 105004.
47. Signatures of extra dimensions in gravitational waves from black hole quasinormal modes / S. Chakraborty [и др.] // *Phys. Rev. D.* — 2018. — Т. 97, № 10. — С. 104053.
48. *Mishra A. K., Ghosh A., Chakraborty S.* Constraining extra dimensions using observations of black hole quasi-normal modes // *Eur. Phys. J. C.* — 2022. — Т. 82, № 9. — С. 820.
49. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole / K. Akiyama [и др.] // *Astrophys. J. Lett.* — 2019. — Т. 875. — С. L1.
50. First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way / K. Akiyama [и др.] // *Astrophys. J. Lett.* — 2022. — Т. 930, № 2. — С. L12.
51. *Aliev A. N., Gumrukcuoglu A. E.* Charged rotating black holes on a 3-brane // *Phys. Rev. D.* — 2005. — Т. 71. — С. 104027.
52. *Vagnozzi S., Visinelli L.* Hunting for extra dimensions in the shadow of M87* // *Phys. Rev. D.* — 2019. — Т. 100, № 2. — С. 024020.
53. *Banerjee I., Chakraborty S., SenGupta S.* Silhouette of M87*: A New Window to Peek into the World of Hidden Dimensions // *Phys. Rev. D.* — 2020. — Т. 101, № 4. — С. 041301.
54. *Neves J. C. S.* Constraining the tidal charge of brane black holes using their shadows // *Eur. Phys. J. C.* — 2020. — Т. 80, № 8. — С. 717.
55. *Banerjee I., Chakraborty S., SenGupta S.* Hunting extra dimensions in the shadow of Sgr A* // *Phys. Rev. D.* — 2022. — Т. 106, № 8. — С. 084051.
56. *Hadamard J.* Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations. — Dover Publications, 2014.
57. *Courant R., Hilbert D.* Methods of Mathematical Physics: Partial Differential Equations. — Wiley, 2008. — (Wiley Classics Library).

58. *Иваненко Д. Д., Соколов А. А.* Классическая теория поля. — ГИТТЛ, 1951.
59. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. — Физматлит, 2012. — (Теоретическая физика).
60. *Kosyakov B. P.* Radiation in electrodynamics and in Yang-Mills theory // *Sov. Phys. Usp.* — 1992. — Т. 35. — С. 135—142.
61. *Kosyakov B. P.* Exact solutions of classical electrodynamics and the Yang-Mills-Wong theory in even-dimensional space-time // *Theoretical and Mathematical Physics.* — 1999. — Т. 119, № 1. — С. 493—505.
62. *Cardoso V., Dias O. J. C., Lemos J. P. S.* Gravitational radiation in D-dimensional spacetimes // *Phys. Rev. D.* — 2003. — Т. 67. — С. 064026.
63. *Gurses M., Sarioglu O.* Lienard-Wiechert potentials in even dimensions // *J. Math. Phys.* — 2003. — Т. 44. — С. 4672—4680.
64. *Mironov A., Morozov A.* Is Strong Gravitational Radiation predicted by TeV-Gravity? // *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* — 2007. — Т. 85. — С. 9—14. — [JETP Lett.85,6(2007)].
65. *Mironov A., Morozov A.* Radiation beyond four space-time dimensions // *Theor. Math. Phys.* — 2008. — Т. 156. — С. 1209—1217.
66. *Cardoso V., Cavaglia M., Guo J.-Q.* Gravitational Larmor formula in higher dimensions // *Phys. Rev. D.* — 2007. — Т. 75. — С. 084020.
67. *Kosyakov B. P.* Electromagnetic radiation in even-dimensional spacetimes // *Int. J. Mod. Phys. A.* — 2008. — Т. 23. — С. 4695—4708.
68. *Galtsov D. V.* Radiation reaction in various dimensions // *Phys. Rev. D.* — 2002. — Т. 66. — С. 025016.
69. *Kazinski P. O., Lyakhovich S. L., Sharapov A. A.* Radiation reaction and renormalization in classical electrodynamics of point particle in any dimension // *Phys. Rev. D.* — 2002. — Т. 66. — С. 025017.
70. *Kazinski P. O., Sharapov A. A.* Radiation back-reaction and renormalization in classical field theory with singular sources // *Theor. Math. Phys.* — 2005. — Т. 143. — С. 798—820. — [Teor. Mat. Fiz.143,375(2005)].
71. *Yaremko Y.* Radiation reaction in 2+1 electrodynamics // *Journal of Mathematical Physics.* — 2007. — Т. 48, № 9. — С. 092901—092901.

72. *Shuryak E., Yee H.-U., Zahed I.* Self-force and synchrotron radiation in odd space-time dimensions // *Phys. Rev. D.* — 2012. — T. 85. — C. 104007.
73. *Dai D.-C., Stojkovic D.* Origin of the tail in Green's functions in odd-dimensional spacetimes // *Eur. Phys. J. Plus.* — 2013. — T. 128. — C. 122.
74. *Harte A. I., Flanagan É. É., Taylor P.* Self-forces on static bodies in arbitrary dimensions // *Phys. Rev. D.* — 2016. — T. 93, № 12. — C. 124054.
75. *Kosyakov B. P.* Introduction to the classical theory of particles and fields. — 2007.
76. *Kosyakov B. P.* Self-interaction in classical gauge theories and gravitation // *Phys. Rept.* — 2019. — T. 812. — C. 1–55.
77. *DeWitt B. S., Brehme R. W.* Radiation damping in a gravitational field // *Annals Phys.* — 1960. — T. 9. — C. 220–259.
78. *Barack L., Pound A.* Self-force and radiation reaction in general relativity // *Rept. Prog. Phys.* — 2019. — T. 82, № 1. — C. 016904.
79. *Gal'tsov D. V., Spirin P. A.* Radiation reaction in curved even-dimensional spacetime // *Grav. Cosmol.* — 2007. — T. 13. — C. 241–252.
80. *Porto R. A.* The effective field theorist's approach to gravitational dynamics // *Phys. Rept.* — 2016. — T. 633. — C. 1–104.
81. *Cardoso V., Dias O. J. C., Figueras P.* Gravitational radiation in $d > 4$ from effective field theory // *Phys. Rev. D.* — 2008. — T. 78. — C. 105010.
82. *Birnholtz O., Hadar S.* Action for reaction in general dimension // *Phys. Rev. D.* — 2014. — T. 89, № 4. — C. 045003.
83. *Birnholtz O., Hadar S.* Gravitational radiation-reaction in arbitrary dimension // *Phys. Rev. D.* — 2015. — T. 91, № 12. — C. 124065.
84. *Chu Y.-Z.* Electromagnetic and gravitational radiation in all dimensions: A classical field theory treatment // *Phys. Rev. D.* — 2021. — T. 104, № 8. — C. 084074.
85. *Rohrlich F.* The definition of electromagnetic radiation // *Il Nuovo Cimento (1955-1965).* — 1961. — T. 21, № 5. — C. 811–822.
86. *Teitelboim C.* Splitting of the Maxwell Tensor: Radiation Reaction without Advanced Fields // *Phys. Rev. D.* — 1970. — T. 1, вып. 6. — C. 1572–1582.
87. *Rohrlich F.* Classical Charged Particles. — World Scientific, 2007.

88. *Kosyakov B. P.* Radiation in electrodynamics and in Yang–Mills theory // *Phys. Usp.* — 1992. — T. 35, № 2. — C. 135–142.
89. *Gal'tsov D. V., Spirin P.* Radiation reaction reexamined: Bound momentum and Schott term // *Grav. Cosmol.* — 2006. — T. 12. — C. 1–10.
90. *Spirin P. A.* Massless field emission in the space-time of extra dimensions // *Grav. Cosmol.* — 2009. — T. 15. — C. 82–86.
91. *Gal'tsov D.* Radiation Reaction and Energy-Momentum Conservation // *Fundam. Theor. Phys.* — 2011. — T. 162. — C. 367–393. — [367(2010)].
92. *Dvali G. R., Gabadadze G.* Gravity on a brane in infinite volume extra space // *Phys. Rev. D.* — 2001. — T. 63. — C. 065007.
93. The Power of brane induced gravity / G. R. Dvali [и др.] // *Phys. Rev. D.* — 2001. — T. 64. — C. 084004.
94. *Gabadadze G.* Looking at the cosmological constant from infinite-volume bulk // *From Fields to Strings: Circumnavigating Theoretical Physics: A Conference in Tribute to Ian Kogan.* — 08.2004. — C. 1061–1130.
95. *Carter B., Gregory R.* Curvature corrections to dynamics of domain walls // *Phys. Rev. D.* — 1995. — T. 51. — C. 5839–5846.
96. *Bonjour F., Charmousis C., Gregory R.* The Dynamics of curved gravitating walls // *Phys. Rev. D.* — 2000. — T. 62. — C. 083504.
97. *Kiritsis E., Tetradis N., Tomaras T. N.* Induced brane gravity: Realizations and limitations // *JHEP.* — 2001. — T. 08. — C. 012.
98. *Kolanovic M.* Gravity induced over a smooth soliton // *Phys. Rev. D.* — 2003. — T. 67. — C. 106002.
99. *Kolanovic M., Porrati M., Rombouts J.-W.* Regularization of brane induced gravity // *Phys. Rev. D.* — 2003. — T. 68. — C. 064018.
100. *Gabadadze G., Shifman M.* Softly massive gravity // *Phys. Rev. D.* — 2004. — T. 69. — C. 124032.
101. *Giudice G. F., Rattazzi R., Wells J. D.* Quantum gravity and extra dimensions at high-energy colliders // *Nucl. Phys. B.* — 1999. — T. 544. — C. 3–38.
102. Scales of gravity / G. R. Dvali [и др.] // *Phys. Rev. D.* — 2002. — T. 65. — C. 024031.

103. *Brown K., Mathur H., Verostek M.* Exploring extra dimensions with scalar fields // Am. J. Phys. — 2018. — T. 86, № 5. — C. 327–337.
104. *Dvali G. R., Gabadadze G., Porrati M.* Metastable gravitons and infinite volume extra dimensions // Phys. Lett. B. — 2000. — T. 484. — C. 112–118.
105. *Gregory R., Rubakov V. A., Sibiryakov S. M.* Opening up extra dimensions at ultra large scales // Phys. Rev. Lett. — 2000. — T. 84. — C. 5928–5931.
106. *Csaki C., Erlich J., Hollowood T. J.* Quasilocalization of gravity by resonant modes // Phys. Rev. Lett. — 2000. — T. 84. — C. 5932–5935.
107. *Csaki C., Erlich J., Hollowood T. J.* Graviton propagators, brane bending and bending of light in theories with quasilocalized gravity // Phys. Lett. B. — 2000. — T. 481. — C. 107–113.
108. *Deffayet C.* Cosmology on a brane in Minkowski bulk // Phys. Lett. B. — 2001. — T. 502. — C. 199–208.
109. DGP Specterosecopy / C. Charmousis [и др.] // JHEP. — 2006. — T. 10. — C. 066.
110. *Deffayet C., Dvali G. R., Gabadadze G.* Accelerated universe from gravity leaking to extra dimensions // Phys. Rev. D. — 2002. — T. 65. — C. 044023.
111. Supernovae, CMB, and gravitational leakage into extra dimensions / C. Deffayet [и др.] // Phys. Rev. D. — 2002. — T. 66. — C. 024019.
112. *Alcaniz J. S.* Some observational consequences of brane world cosmologies // Phys. Rev. D. — 2002. — T. 65. — C. 123514.
113. *Lue A., Scoccimarro R., Starkman G.* Differentiating between modified gravity and dark energy // Phys. Rev. D. — 2004. — T. 69. — C. 044005.
114. *Lue A., Scoccimarro R., Starkman G. D.* Probing Newton's constant on vast scales: DGP gravity, cosmic acceleration and large scale structure // Phys. Rev. D. — 2004. — T. 69. — C. 124015.
115. *Zhu Z.-H., Alcaniz J. S.* Accelerating universe from gravitational leakage into extra dimensions: Confrontation with SNeIa // Astrophys. J. — 2005. — T. 620. — C. 7–11.
116. *Alcaniz J. S., Pires N.* Cosmic acceleration in brane cosmology // Phys. Rev. D. — 2004. — T. 70. — C. 047303.
117. *Alcaniz J. S., Zhu Z.-H.* Complementary constraints on brane cosmology // Phys. Rev. D. — 2005. — T. 71. — C. 083513.

118. *Pires N., Zhu Z.-H., Alcaniz J. S.* Lookback time as a test for brane cosmology // *Phys. Rev. D.* — 2006. — Т. 73. — С. 123530.
119. Constraints on the dgp model from recent supernova observations and baryon acoustic oscillations / Z.-K. Guo [и др.] // *Astrophys. J.* — 2006. — Т. 646. — С. 1—7.
120. *Dam H. van, Veltman M. J. G.* Massive and massless Yang-Mills and gravitational fields // *Nucl. Phys. B.* — 1970. — Т. 22. — С. 397—411.
121. *Zakharov V. I.* Linearized gravitation theory and the graviton mass // *JETP Lett.* — 1970. — Т. 12. — С. 312.
122. *Hinterbichler K.* Theoretical Aspects of Massive Gravity // *Rev. Mod. Phys.* — 2012. — Т. 84. — С. 671—710.
123. *Rham C. de.* Massive Gravity // *Living Rev. Rel.* — 2014. — Т. 17. — С. 7.
124. *Rubakov V. A.* Strong coupling in brane induced gravity in five-dimensions. — 2003.
125. *Luty M. A., Porrati M., Rattazzi R.* Strong interactions and stability in the DGP model // *JHEP.* — 2003. — Т. 09. — С. 029.
126. *Nicolis A., Rattazzi R.* Classical and quantum consistency of the DGP model // *JHEP.* — 2004. — Т. 06. — С. 059.
127. Nonperturbative continuity in graviton mass versus perturbative discontinuity / C. Deffayet [и др.] // *Phys. Rev. D.* — 2002. — Т. 65. — С. 044026.
128. *Dvali G.* Predictive Power of Strong Coupling in Theories with Large Distance Modified Gravity // *New J. Phys.* — 2006. — Т. 8. — С. 326.
129. *Gabadadze G.* Weakly coupled metastable graviton // *Phys. Rev. D.* — 2004. — Т. 70. — С. 064005.
130. *Gorbunov D., Koyama K., Sibiryakov S.* More on ghosts in DGP model // *Phys. Rev. D.* — 2006. — Т. 73. — С. 044016.
131. *Koyama K.* Ghosts in the self-accelerating universe // *Class. Quant. Grav.* — 2007. — Т. 24, № 24. — R231—R253.
132. Cascading gravity: Extending the Dvali-Gabadadze-Porrati model to higher dimension / C. de Rham [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Т. 100. — С. 251603.
133. Gravitational wave friction in light of GW170817 and GW190521 / S. Mastrogiovanni [и др.] // *JCAP.* — 2021. — Т. 02. — С. 043.

134. *Magana Hernandez I.* Constraining the number of spacetime dimensions from GWTC-3 binary black hole mergers // *Phys. Rev. D.* — 2023. — Т. 107, № 8. — С. 084033.
135. *Gal'tsov D. V., Khlopunov M.* Synchrotron radiation in odd dimensions // *Phys. Rev. D.* — 2020. — Т. 101, № 8. — С. 084054.
136. *Khlopunov M., Gal'tsov D. V.* Gravitational radiation from a binary system in odd-dimensional spacetime // *JCAP.* — 2022. — Т. 04. — С. 014.
137. *Khlopunov M., Gal'tsov D. V.* Leakage of gravitational waves into an extra dimension in the DGP model // *JCAP.* — 2022. — Т. 10. — С. 062.
138. *Khlopunov M.* Non-local tails in radiation in odd dimensions // *JCAP.* — 2023. — Т. 10. — С. 019.
139. *Хлопунов М. Ю.* Синхротронное излучение в нечетномерном пространстве-времени // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2020» Секция физики. Сборник тезисов докладов – М.: МАКС Пресс. — 2020.
140. *Хлопунов М. Ю.* Скалярное излучение нерелятивистских источников в нечетных размерностях // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2021» Секция физики. Сборник тезисов докладов – М.: МАКС Пресс. — 2021.
141. *Gal'tsov D. V., Khlopunov M.* Retarded potentials and radiation in odd dimensions // 16th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics and Relativistic Field Theories. — 2021. — С. 699.
142. *Gal'tsov D. V., Khlopunov M.* Odd-dimensional gravitational waves from a binary system on a three-brane // 16th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics and Relativistic Field Theories. — 2023. — С. 3301.
143. *Хлопунов М. Ю.* Гравитационное излучение двойной системы в нечетномерном пространстве-времени // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2022» Секция физики. Сборник тезисов докладов – М.: МАКС Пресс. — 2022.
144. *Хлопунов М. Ю.* Утечка гравитационных волн в дополнительное измерение в DGP модели // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2023» Секция физики. Сборник тезисов докладов – М.: МАКС Пресс. — 2023.
145. Geodesic synchrotron radiation / R. A. Breuer [и др.] // *Phys. Rev. D.* — 1973. — Т. 8. — С. 4309—4319.

146. Квантовая электродинамика / А. А. Соколов [и др.]. — Изд-во Моск. ун-та, 1983.
147. *Jackson J. D.* Classical Electrodynamics. — Wiley, 1998.
148. *Landim R. R.* On the Laplace equation in d-dimension. — 2009.
149. *Watson G.* A Treatise on the Theory of Bessel Functions. — Cambridge University Press, 1995. — (Cambridge Mathematical Library).
150. *Zwillinger D.* Table of Integrals, Series, and Products. — Elsevier Science, 2014.
151. Теория излучения релятивистских частиц. / Под ред. В. А. Бордовицына / В. Г. Багров [и др.]. — Физматлит, 2002.
152. *Abramowitz M., Stegun I. A.* Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. — Ninth Dover printing, tenth GPO printing. — New York : Dover, 1964.
153. *Olivier V., Manuel S.* Airy Functions And Applications To Physics (2nd Edition). — World Scientific Publishing Company, 2010.
154. *Barut A. O., Villarroel D.* Radiation Reaction and Mass Renormalization in Scalar and Tensor Fields and Linearized Gravitation // J. Phys. — 1975. — Т. А8. — С. 156.
155. *Ландау Л. Д., Lifshitz E. M.* Механика. — Физматлит, 2004. — (Теоретическая физика).
156. *Weinberg S.* Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity. — New York : John Wiley, Sons, 1972.
157. *Poisson E.* A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics. — Cambridge University Press, 12.2009.
158. *Gibbons G. W., Hawking S. W.* Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity // Phys. Rev. D. — 1977. — Т. 15. — С. 2752—2756.
159. *Hawking S. W., Horowitz G. T.* The Gravitational Hamiltonian, action, entropy and surface terms // Class. Quant. Grav. — 1996. — Т. 13. — С. 1487—1498.
160. *Wald R. M.* General Relativity. — Chicago, USA : Chicago Univ. Pr., 1984.
161. *Arnowitt R. L., Deser S., Misner C. W.* The Dynamics of general relativity // Gen. Rel. Grav. — 2008. — Т. 40. — С. 1997—2027.
162. *Israel W.* Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity // Nuovo Cim. B. — 1966. — Т. 44S10. — С. 1. — [Erratum: Nuovo Cim.B 48, 463 (1967)].

163. *Maggiore M.* Gravitational Waves: Volume 1: Theory and Experiments. — OUP Oxford, 2008. — (Gravitational Waves).
164. *Flanagan E. E., Hughes S. A.* The Basics of gravitational wave theory // *New J. Phys.* — 2005. — Т. 7. — С. 204.
165. *Isaacson R. A.* Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. I. The Linear Approximation and Geometrical Optics // *Phys. Rev.* — 1968. — Т. 166. — С. 1263—1271.
166. *Isaacson R. A.* Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. II. Nonlinear Terms and the Effective Stress Tensor // *Phys. Rev.* — 1968. — Т. 166. — С. 1272—1279.
167. *Pati M. E., Will C. M.* PostNewtonian gravitational radiation and equations of motion via direct integration of the relaxed Einstein equations. 1. Foundations // *Phys. Rev. D.* — 2000. — Т. 62. — С. 124015.
168. *Thorne K. S.* Multipole Expansions of Gravitational Radiation // *Rev. Mod. Phys.* — 1980. — Т. 52. — С. 299—339.
169. *Will C. M., Wiseman A. G.* Gravitational radiation from compact binary systems: Gravitational wave forms and energy loss to second postNewtonian order // *Phys. Rev. D.* — 1996. — Т. 54. — С. 4813—4848.
170. *Weisberg J. M., Nice D. J., Taylor J. H.* Timing Measurements of the Relativistic Binary Pulsar PSR B1913+16 // *Astrophys. J.* — 2010. — Т. 722. — С. 1030—1034.
171. *Weisberg J. M., Huang Y.* Relativistic Measurements from Timing the Binary Pulsar PSR B1913+16 // *Astrophys. J.* — 2016. — Т. 829, № 1. — С. 55.
172. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика (нерелятивистская теория). — Физматлит, 2004. — (Теоретическая физика).
173. *Hinterbichler K., Nicolis A., Porrati M.* Superluminality in DGP // *JHEP.* — 2009. — Т. 09. — С. 089.
174. *Gruzinov A.* On the graviton mass // *New Astron.* — 2005. — Т. 10. — С. 311—314.
175. *Dvali G., Gruzinov A., Zaldarriaga M.* The Accelerated universe and the moon // *Phys. Rev. D.* — 2003. — Т. 68. — С. 024012.
176. *Степаньянц К. В.* Классическая теория поля. — Физматлит, 2009.
177. *Fierz M., Pauli W.* On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field // *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* — 1939. — Т. 173. — С. 211—232.

178. *Lifshitz E. M.* Republication of: On the gravitational stability of the expanding universe // J. Phys. (USSR). — 1946. — T. 10, № 2. — C. 116.
179. *Bardeen J. M.* Gauge Invariant Cosmological Perturbations // Phys. Rev. D. — 1980. — T. 22. — C. 1882—1905.
180. *Stewart J. M.* Perturbations of Friedmann-Robertson-Walker cosmological models // Class. Quant. Grav. — 1990. — T. 7. — C. 1169—1180.
181. *Poddar T. K., Mohanty S., Jana S.* Gravitational radiation from binary systems in massive graviton theories // JCAP. — 2022. — T. 03. — C. 019.