Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

**Промыслов Валентин Валерьевич**

# Графы и алгебраические конструкции

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел
и дискретная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2023

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научные руководители: **Михалёв Александр Васильевич,**
доктор физико-математических наук, профессор.

**Маркова Ольга Викторовна,**
кандидат физико-математических наук, доцент.

Официальные оппоненты: **Кожухов Игорь Борисович,**
доктор физико-математических наук, профессор, «Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники»», Кафедра высшей математики № 1, профессор.

**Туганбаев Аскар Аканович,**
доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МЭИ»», Кафедра высшей математики, профессор.

**Монастырева Анна Сергеевна,**
кандидат физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Алтайский государственный университет», Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Институт математики и информационных технологий, кафедра алгебры и математической логики, доцент.

Защита диссертации состоится 22 декабря 2023 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: *vladimir.manuilov@gmail.com*

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: `https://dissovet.msu.ru/dissertation/011.4/2764`

Автореферат разослан 22 ноября 2023 года.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук, **В. М. Мануйлов**
профессор

# Общая характеристика работы

## Актуальность темы исследования и степень её разработанности

Диссертация является исследованием в теории графов и отображений, сохраняющих матричные инварианты. Одной из целей работы является характеризация автоморфизмов тотального графа, и доказательство гипотезы о том, что автоморфизмы имеют стандартный вид. Отдельно решается задача описания отображений матричной алгебры, сохраняющих пучковые условия на вырожденность. Теорема, которая является результатом решения этой задачи, обобщает некоторые полученные ранее в этой области результаты.

Тотальным графом кольца матриц над полем называется граф, множеством вершин которого являются все матрицы, а ребрами соединены в точности те матрицы, сумма которых вырождена. Подграф тотального графа, порожденный множеством невырожденных матриц, называется регулярным графом кольца матриц. Изначально понятия тотального и регулярного графов были введены Андерсоном и Бадави[1] для коммутативного кольца с единицей. В 2014 году Акбари рассмотрел[2] аналогичные графы и над некоммутативными кольцами. Тотальный и регулярный графы кольца матриц над полем станут одними из основных объектов исследования в этой работе.

Некоторые свойства структуры графа заложена в его автоморфизмах. По определению автоморфизмом графа является биективное отображение его вершин в себя, сохраняющее множество ребер. В случае тотального графа автоморфизмом будет являться такое биективное отображение $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$, что для любых

[1]D.F. Anderson, A. Badawi, The total graph of a commutative ring, J. Algebra 320 (2008) 2706–2719.

[2]S. Akbari, F. Heydari, The regular graph of a noncommutative ring, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 89(1) (2014) 132-140.

различных матриц $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ выполнено:

$$\det(A + B) = 0 \Leftrightarrow \det(T(A) + T(B)) = 0. \tag{1}$$

Это наблюдение показывает тесную связь задачи описания автоморфизмов тотального графа с широким классом задач описания отображений матричной алгебры, сохраняющим различные соотношения. История здесь восходит еще к классическому результату Фробениуса об описании линейных отображений кольца матриц над полем комплексных чисел $T\colon M_n(\mathbb{C}) \to\ M_n(\mathbb{C})$, сохраняющих определитель. Оказывается, что все такие отображения могут быть получены как композиция транспонирования и умножения на матрицу с единичным определителем справа или слева:

$$T(A) = PAQ \quad \text{для всех } A \in M_n(\mathbb{C})$$

или

$$T(A) = PA^TQ \quad \text{для всех } A \in M_n(\mathbb{C}),$$

где $P, Q$ такие невырожденные матрицы, что $\det(PQ) = 1$. Как оказалось, довольно широкий класс отображений имеет похожий вид, поэтому далее мы будем называть его *стандартным*. Китайские математики Джоу, Вонг и Ма показали[3], что в случае матриц размера $2 \times 2$ над конечным полем $\mathbb{F}_q$ с $\mathrm{char}(\mathbb{F}_q) \neq 2$ автоморфизмы $\sigma$ тотального графа $T_2(\mathbb{F}_q)$ имеют вид, очень схожий со стандартным, а именно:

$$\sigma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = P \begin{pmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(d) \end{pmatrix} Q$$

или

$$\sigma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = P \begin{pmatrix} f(a) & f(c) \\ f(b) & f(d) \end{pmatrix} Q,$$

[3] J. Zhou, D. Wong, X. Ma, Automorphism group of the total graph over a matrix ring, Linear and Multilinear Algebra 65(3) (2017) 572-581.

где $P, Q$ — невырожденные матрицы над $\mathbb{F}_q$, а $f$ — автоморфизм поля $\mathbb{F}_q$.

Этот результат наводит сразу на два предположения. Первое состоит в том, что и для произвольного $n$ автоморфизмы тотального графа $T_2(\mathbb{F}_q)$ будут иметь такой вид. Недавно эта гипотеза была подтверждена в статье[4]. В этой работе данная гипотеза будет доказана.

Учитывая схожий со стандартным вид автоморфизмов, второе предположение заключается в том, что подходом к доказательству гипотезы может служить изучение обобщений теоремы Фробениуса. Эта область сейчас довольна популярна, в ней получено довольно много интересных результатов[5]. Некоторые результаты из этой области мы приведем ниже.

В 1949 Дьёдонне доказал, что если отображение линейно, биективно и сохраняет вырожденность, то оно тоже будет иметь стандартный вид, за исключением условия $\det(PQ) = 1$. Кроме того, Дьёдонне доказал свой результат над произвольным полем и требовал только сохранения вырожденности, но не определителя. Однако стоит отметить, что от отображения все еще требуется такое сильное условие, как линейность, в то время, как автоморфизмы тотального графа могут не являться линейными отображениями. Тем не менее, оказалось, что и от этого условия можно избавиться.

В 2002 году Долинар и Шемрл[6] рассмотрели условие, которое далее мы будем называть *пучковым условием на определитель*:

$$\det(A + \lambda B) = \det(T(A) + \lambda T(B)) \quad \text{для всех } A, B \in M_n(\mathbb{C}) \text{ и любого } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Оказалось, что если сюръективное отображение $T\colon M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ удовлетворяет условию выше, то оно также является линейным и, как следует из теоремы

[4] C. Costara, A.E. Guterman, A.M. Maksaev, V.V. Promyslov. Automorphisms of the total digraph for the ring of square matrices over a field, Linear Algebra Appl., 666, 129-143 (2023).

[5] Pierce S, et al. A survey of linear preserver problems. Linear Multilinear Algebra 33 (1992) 1–119.

[6] G. Dolinar, P. Šemrl, Determinant preserving maps on matrix algebras, Linear Algebra Appl. 348 (2002), pp. 189–192.

Фробениуса, имеет стандартный вид. До этого результата также рассматривались аддитивные отображения [7], однако то, что условие на линейность можно убрать, определенно удивительно.

Впоследствии этот результат тоже был обобщен на произвольное поле и усилен Таном и Вангом[8]. Кроме того, они показали, что достаточно требовать выполнения пучкового условия только для двух значений $\lambda$.

Следующее продвижение по пучковому условию на определитель было сделано в 2019 году Костарой[9]. Он исследовал сразу пару отображений $T_1$ и $T_2$, хотя бы одно из которых сюръективно, и показал, что при выполнении условия

$$\det(T_1(A) + T_2(B)) = \det(A + B) \quad \text{для всех } A, B \in M_n(\mathbb{F})$$

отображения $T_1$ и $T_2$ будут равны и стандартны. В качестве следствия Костара получил, что в теореме Долинара и Шемрла достаточно требовать выполнения пучкового условия только для одного значения параметра $\lambda$. Более того, уже через год Костара получил результат, пожалуй, наиболее близкий к вопросу описания автоморфизмов тотального графа. Он рассмотрел отображения матриц над полем комплексных чисел, сохраняющие условие, которое мы будем называть *пучковым условием на вырожденность*:

$$\det(A + \lambda B) = 0 \iff \det(T_1(A) + \lambda T_2(B)) = 0 \quad \text{для всех } A, B \in M_n(\mathbb{C}) \text{ и } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Костара показал, что если хотя бы одно из отображений непрерывно или сюръективно, а также удовлетворяет пучковому условию на вырожденность, то $T_1 = T_2$ и оба отображения стандартны.

[7]Cao, C., Zhang, X., Additive Surjections Preserving Rank One and Applications, Georgian Mathematical Journal, 11(2) (2004), pp. 209-217.

[8]V. Tan, F. Wang, On determinant preserver problems, Linear Algebra Appl., 369 (2003), pp. 311-317.

[9]C. Costara, Nonlinear determinant preserving maps on matrix algebras, Linear Algebra Appl., 583 (2019), pp. 165–170.

Одна из задач, которой посвящена эта работа, — обобщить описанные выше результаты в сторону условия на автоморфизм тотального графа.

Еще одним подходом к этой теме может быть изучение структуры и числовых характеристик тотального и регулярного графов. В 2009 году математики Акбари, Джамаали и Факхари показали, что кликовое число регулярного графа конечно вне зависимости от поля (за исключением полей характеристики два). Естественным развитием этой темы будет вопрос о конечности хроматического числа регулярного графа. В 2015 году Томон дал отрицательный ответ на этот вопрос, показав что над алгебраически замкнутым полем конечной характеристики хроматическое число регулярного графа является конечным. Тем не менее, пока не известно, является ли конечным хроматическое число регулярного графа кольца матриц над полем рациональных, вещественных или комплексных чисел. Для исследования этого вопроса в статье[10] были введены понятия тотального и регулярного графов множества. В зависимости от структуры множества эти графы обладают разными свойствами. Отдельный интерес представляют множества, являющиеся нулями некоторого многочлена — в этом случае соответствующие графы для краткости будем называть тотальными или регулярными графами многочлена. Как тотальный, так и регулярный графы многочлена обладают рядом интересных свойств. Например, кликовое число регулярного графа многочлена конечно вне зависимости от поля (за исключением полей характеристики два), а в случае, если множество нулей многочлена не содержит прямых, при некоторых ограничениях на поле конечно будет и множество нулей тотального графа. Более того, оказалось, что вопрос о бесконечности хроматического числа регулярного графа кольца матриц можно свести к аналогичному вопросу для регулярного графа обычной окружности на евклидовой плоскости. В работе эти факты будут

[10]А.М. Максаев, В.В. Промыслов. О тотальном и регулярном графах многочлена, Фундаментальная и прикладная математика, 23(4), 113—142 (2021).

доказаны.

Исследование тотального и регулярного графов для произвольного множества является несколько более сложной задачей. Отчасти это иллюстрирует тот факт, что уже при рассмотрении трехточечного множества на вещественной прямой изоморфные графы можно получить, переставляя континуальное количество компонент связности. Потому даже минимальный нетривиальный случай трехточечного множества уже представляет интерес для исследования. Над полями нулевой характеристики в этой работе будет получена полная классификация регулярных и тотальных графов трехточечных множеств с точностью до изоморфизма.

В диссертации представлены доказательства результатов по всем перечисленным выше темам. В частности, получено описание отображений кольца матриц над алгебраически замкнутым полем, удовлетворяющих обобщению пучкового условия на вырожденность. Доказана гипотеза о виде автоморфизмов тотального графа кольца матриц над полем, в котором есть хотя бы три элемента. Доказана связность тотального и регулярного графов многочлена в указанных выше случаях. Получена полная классификация тотальных и регулярных графов трехточечных множеств над полем нулевой характеристики.

## Цели и задачи работы

В работе решаются следующие задачи:

- доказывается, что отображения матричной алгебры, сохраняющие вырожденность пучка матриц, имеют так называемый стандартный вид;
- доказывается гипотеза о структуре автоморфизмов тотального графа кольца матриц над полями, в которых есть хотя бы три элемента;
- доказываются некоторые свойства тотального и регулярного графов много-

члена, в частности, связность, оценки на диаметр и хроматическое число;

- с точностью до изоморфизма найдены структуры регулярных и тотальных графов трёхточечных множеств.

## Положения, выносимые на защиту

- Характеризация пар отображений матриц над алгебраически замкнутым полем, удовлетворяющих пучковому условию для вырожденности.
- Характеризация автоморфизмов тотального графа кольца матриц над полем, в котором есть хотя бы три элемента.
- Описание тотальных и регулярных графов трехточечных множеств с точностью до изоморфизма.

## Объект и предмет исследования

Объект исследования — кольцо квадратных матриц над произвольным полем, тотальный граф кольца квадратных матриц, тотальный и регулярный графы множества и многочлена.

Предмет исследования — кликовое и хроматическое числа тотального и регулярного графов многочлена, отображения кольца матриц, автоморфизмы тотального графа кольца матриц.

## Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми. Среди них:

1. Теорема об описании пар отображений кольца квадратных матриц над алгебраически замкнутым полем, удовлетворяющих пучковому условию на невырожденность.

2. Теорема об описании пар отображений кольца квадратных матриц, сохраняющих вырожденность суммы матриц для полей, в которых есть хотя бы три элемента.

3. Теорема о структуре автоморфизмов ориентированного тотального графа кольца матриц над полем, в котором есть хотя бы три элемента.

4. Классификация тотальных и регулярных графов трехточечного множества с точностью до изоморфизма для полей нулевой характеристики.

## Методы исследования

В работе применяются как классические методы линейной и общей алгебры, комбинаторики и теории графов, так и некоторые новые методы доказательства, использующие технику оперирования многочленами над областью целостности и их дискриминантами. Для доказательства теорем о виде отображений матричной алгебры, сохраняющих пучковые условия, используется теорема Фробениуса. Для описания автоморфизмов тотального графа используется теорема Хуа.

## Теоретическая и практическая значимость

Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты относятся к теории графов и теории отображений, сохраняющих матричные инварианты, и могут быть использованы в задачах линейной и общей алгебры, комбинаторики.

## Степень достоверности

Все результаты диссертации являются оригинальными, обоснованы с помощью строгих математических доказательств и опубликованы в открытой печати.

Результаты других авторов, используемые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

## Апробация результатов

Результаты опубликованы в 5 статьях автора [1, 2, 3, 4, 5] в журналах, индексируемых Web of Science, Scopus и RSCI. Из них 4 статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационных советах МГУ по физико-математическим специальностям. Автор выступал с докладами по результатам работы на спецсеминаре «Кольца, модули и матрицы» кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Кроме того, автором были сделаны доклады по теме диссертации на следующих международных конференциях:

- XXVII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2020», Москва, Россия, 16 ноября 2020;
- 8th European Congress of Mathematics, Порторож, Словения, 24 июня 2021;
- XIII Белорусская математическая конференция, г. Минск, Беларусь, 23 ноября 2021;
- XII Международная научная конференция «Интеллектуальные системы и компьютерные науки», г. Москва, Россия, 2 декабря 2021;

## Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, разбитых на параграфы, заключения, списка литературы и списка публикаций автора. Общий объем работы: 127 страниц. Список литературы включает 40 наименований.

## Содержание диссертации

**Введение** содержит информацию об актуальности рассматриваемой темы, краткую историю вопроса, изложение цели работы, методов и основных результатов.

**Глава 1**. В этой главе более подробно описываются история задачи исследования тотального и регулярного графов кольца матриц, вводятся необходимые обозначения и определения, формулируются некоторые известные на момент написания работы результаты.

В разделе 1.1 вводятся основные определения и обозначения, используемые на протяжении всего текста.

В разделе 1.2 рассматривается задача описания автоморфизмов тотального графа. Показывается связь этой задачи и задачи описания отображений матричной алгебры, сохраняющих различные условия. Приводится обзор известных результатов: классический результат Фробениуса, теоремы Дьёдонне, Долинара, Шемрла, Тана, Ванга и Костары.

В разделе 1.3 представлен другой подход к изучению структуры тотального и регулярного графов — нахождение их числовых параметров. Приводятся результаты Акбари о конечности кликового числа регулярного графа и Томона о бесконечности хроматического числа регулярного графа над алгебраически замкнутым полем конечной характеристики. Ставится вопрос о бесконечности хроматического числа регулярного графа над полями нулевой характеристики. Вводятся определения тотального и регулярного графов, а также формулируются основные свойства этих объектов.

**Определение** (1.3.3)**.** Пусть $n$ — натуральное число, $A \subseteq \mathbb{F}^n$.

- *Тотальным* графом множества $A$ называется граф $T_A(\mathbb{F}^n)$ с множеством вершин $\mathbb{F}^n$ такой, что две произвольные различные точки $x, y \in \mathbb{F}^n$ соединены ребром, если и только если $\frac{x+y}{2} \in A$.

- *Регулярным* графом множества $A$ называется граф $\Gamma_A(\mathbb{F}^n)$ с множеством вершин $\mathbb{F}^n \setminus A$ такой, что две произвольные различные точки $x, y \in \mathbb{F}^n \setminus A$ соединены ребром, если и только если $\frac{x+y}{2} \in A$.

Обозначим через $V(p)$ множество нулей многочлена

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n],$$

т. е. множество $\{x \in \mathbb{F}^n \,|\, p(x) = 0\}$.

**Определение** (1.3.4)**.** Пусть $p(x) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. *Тотальным и регулярным графами многочлена* $p(x)$ будем называть графы $T_{V(p)}(\mathbb{F}^n)$ и $\Gamma_{V(p)}(\mathbb{F}^n)$ соответственно. Для краткости далее мы будем обозначать их соответственно через $T_p(\mathbb{F}^n)$ и $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$.

**Глава 2**. Эта глава посвящена описанию отображений матричной алгебры, сохраняющих пучковое условие на вырожденность.

Основным результатом главы является доказательство того, что отображения кольца матриц над алгебраическим полем в себя, сохраняющие пучковое условие на вырожденность, имеют стандартный вид.

Кроме того, при некоторых дополнительных условиях для того, чтобы отображение имело стандартный вид, будет достаточно требовать только выполнения одностороннего пучкового условия на вырожденность.

В разделе 2.1 вводятся определения и формулируются основные результаты.

**Определение** (2.1.1)**.** Пусть $\mathbb{F}$ некоторое поле, $\mathcal{Y} \subseteq M_n$. Будем говорить, что отображения $T_1, T_2 \colon \mathcal{Y} \to M_n$ удовлетворяют *пучковому условию для вырожденности* на множестве $\mathcal{Y}$, если для любых двух матриц $A, B \in \mathcal{Y}$ и любого ненулевого $\lambda \in \mathbb{F}^*$, выполнено:

$$A + \lambda B \ \text{ вырождена } \iff T_1(A) + \lambda T_2(B) \ \text{ вырождена.}$$

**Определение** (2.1.2)**.** Пусть $\mathbb{F}$ некоторое поле, $\mathcal{Y} \subseteq M_n$. Будем говорить, что отображения $T_1, T_2 \colon \mathcal{Y} \to M_n$ удовлетворяют *одностороннему пучковому условию для вырожденности* на множестве $\mathcal{Y}$, если для любых двух матриц $A, B \in \mathcal{Y}$ и любого ненулевого $\lambda \in \mathbb{F}^*$, выполнено:

$$A + \lambda B \ \text{ вырождена } \implies T_1(A) + \lambda T_2(B) \ \text{ вырождена.}$$

В разделе 2.2 описывается ключевая для доказательства основных результатов техника, позволяющая находить базис матричной алгебры с некоторыми заданными свойствами. Эта техника основана на работе с определенным классом многочленов, которые мы назовем сбалансированными по степени.

Пусть $K$ — область целостности (т. е. коммутативное кольцо с единицей и без делителей нуля). Рассмотрим кольцо многочленов $K[\lambda]$. Через $R(f(\lambda), g(\lambda))$ обозначим результант многочленов $f(\lambda), g(\lambda) \in K[\lambda]$. Для многочлена

$$f(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} \ldots + a_1\lambda + a_0 \in K[\lambda],\ a_n \neq 0$$

при $n > 1$ дискриминант $\Delta_\lambda(f) \in K$ (однозначно) определим равенством

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n \cdot \Delta_\lambda(f) = R(f(\lambda), f'(\lambda)),$$

где $f'(\lambda) = na_n\lambda^{n-1} + (n-1)a_{n-1}\lambda^{n-2} + \ldots + a_1$ — формальная производная многочлена $f(\lambda)$.

Если $f(\lambda) = a_1\lambda + a_0$, положим $\Delta_\lambda(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } a_1 = a_0 = 0; \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$

**Определение** (2.2.7)**.** Пусть $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda]$. Назовем $F$ сбалансированным по степени, если для цепочки многочленов

$$F^{\{k\}}(x_1, \ldots, x_k, \lambda) = F(x_1, \ldots, x_k, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-k}, \lambda) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_k, \lambda], \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

выполнены следующие условия:

- $\deg_\lambda F^{\{k-1\}} = \deg_\lambda F^{\{k\}}$ или $\deg_\lambda F^{\{k-1\}} = \deg_\lambda F^{\{k\}} - 1$ при $k = 2, \ldots, n$;
- $\Delta_\lambda(F^{\{1\}}) \not\equiv 0$ (здесь дискриминант рассматривается для $F^{\{1\}}$ как многочлена от $\lambda$, т.е. $\Delta(F^{\{1\}}) \in \mathbb{F}[x_1]$)

Основным инструментом для получения искомых базисов матричной алгебры будет служить следующая лемма.

**Лемма** (2.2.9)**.** Пусть

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda), F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda), \ldots, F_N(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda]$$

— набор сбалансированных по степени многочленов,

$$G_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), G_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, G_M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

— набор не тождественно нулевых многочленов. Тогда существуют $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^* \in \in \mathbb{F}$ такие, что каждый из многочленов $F_\ell(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$ не имеет кратных корней (в частности, не является тождественным нулем) при $\ell = 1, 2, \ldots, N$ и $G_r(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \neq 0$ при $r = 1, 2, \ldots, M$.

Раздел 2.3 посвящен схеме доказательства вспомогательной теоремы. Поскольку эта теорема получена Максаевым и подробно описана в его диссертации, мы приведем лишь эскиз доказательства этой теоремы, но подробно покажем, как используется техника сбалансированных по степени многочленов.

**Теорема** (2.3.1)**.** Предположим, что существует $D \in GL_n$ такая, что $T_2(D) \in GL_n$. Тогда $T_1$ и $T_2$ имеют стандартный вид (4) на $GL_n$.

В разделе 2.4 приводится доказательство основных результатов.

**Теорема** (2.1.4)**.** Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, $GL_n \subseteq \mathcal{Y} \subseteq M_n$, а отображения $T_1, T_2 \colon \mathcal{Y} \to M_n$ удовлетворяют одностороннему пучковому условию (8) для вырожденности на множестве $\mathcal{Y}$. Предположим, что найдется такая матрица $D \in GL_n$, что $T_2(D) \in GL_n$. Тогда $T_1|_{\mathcal{Y}\setminus\{O\}} = T_2|_{\mathcal{Y}\setminus\{O\}}$ и эти отображения имеют стандартный вид (4) на $\mathcal{Y} \setminus \{O\}$.

Следующие две теоремы фактически являются следствиями теоремы 2.1.4.

**Теорема** (2.1.5)**.** Пусть $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, $GL_n \subseteq \mathcal{Y} \subseteq M_n$, и определены отображения $T_1, T_2 \colon \mathcal{Y} \to M_n$. Тогда $T_1, T_2$ удовлетворяют пучковому условию (7) для вырожденности на $\mathcal{Y}$ тогда и только тогда, когда $T_1 = T_2$ и эти отображения имеют стандартный вид (4) на $\mathcal{Y}$.

**Теорема** (2.1.6)**.** Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, а биективные отображения

$$T_1, T_2 \colon M_n \to M_n$$

таковы, что для любых двух матриц $A, B \in M_n$ и любого $\lambda \in \mathbb{F}^*$ выполнено:

$$A + \lambda B \in GL_n \implies T_1(A) + \lambda T_2(B) \in GL_n.$$

Тогда $T_1 = T_2$ и эти отображения имеют стандартный вид (4) на $M_n$.

В доказательстве этих теорем используются леммы, которые представляют интерес сами по себе.

**Лемма** (2.4.1)**.** Пусть $|\mathbb{F}| > n \geqslant 1$ и $X, Y \in M_n$ таковы, что для всех $Z \in GL_n$, выполнены следующие условия

$$X + Z \in \Omega_n \implies Y + Z \in \Omega_n.$$

Тогда либо $X = O$, либо $X = Y$.

**Лемма** (2.4.2)**.** Пусть $\mathbb{F}$ алгебраически замкнутое поле. Предположим, что отображения $T_1, T_2 \colon GL_n \to M_n$ удовлетворяют пучковому условию (7) для вырожденности на $GL_n$, тогда для всех $A \in GL_n$, мы имеем $T_1(A)$, $T_2(A) \in GL_n$.

**Глава 3**. Данная глава посвящена описанию автоморфизмов тотального графа кольца матриц над полем, в котором есть хотя бы три элемента. Будет доказано, что автоморфизмы тотального графа имеют вид, схожий с приведенным в фундаментальной теореме Хуа. Решение этой задачи будет разбито на две части:

1. описание пар отображений, сохраняющих вырожденность необязательно различных пар матриц;

2. усиление этого результата на различные пары матриц и доказательство теоремы о виде автоморфизмов тотального графа.

В разделе 3.1 будут классифицированы пары отображений, сохраняющие вырожденность пар матриц. Для этого будут исследованы множества соседей произвольной матрицы $Y \in M_n$ в тотальном графе $T_n(\mathbb{F})$

$$\mathcal{N}(Y) = \{S \in M_n \mid \det(S + Y) = 0\}.$$

Общих соседей непустого множества $\mathcal{Y} \subseteq M_n$ обозначим через

$$\mathcal{N}(\mathcal{Y}) = \bigcap_{Y \in \mathcal{Y}} \mathcal{N}(Y).$$

Для различных $A, B \in M_n$, через $\ell(A, B)$ обозначим прямую в $M_n$, проходящую через $A$ и $B$, т. е.,

$$\ell(A, B) = \{A + \mu(B - A) \mid \mu \in \mathbb{F}\}.$$

Доказательство основного результата данного раздела будет основано на теореме Хуа и следующей лемме.

**Лемма** (3.1.7)**.** Пусть $A, B \in M_n$ различны. Тогда

$$\mathcal{N}(\mathcal{N}(\{A,B\})) = \begin{cases} \{A,B\}, & \text{если } \operatorname{rk}(A-B) \geq 2; \\ \ell(A,B), & \text{если } \operatorname{rk}(A-B) = 1. \end{cases}$$

Эта лемма по сути позволит свести условие сохранения вырожденности пар матриц к сохранению когерентности, а основную задачу к теореме Хуа. Основной результат раздела заключается в следующей теореме.

**Теорема** (3.1.10)**.** Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \colon M_n \to M_n$ такие сюръективные отображения, что для любых матриц $A, B \in M_n$ выполнено условие (12). Тогда найдутся $R \in M_n$ и невырожденные $P, Q \in M_n$ такие, что

$$\varphi_1(A) = PA^\tau Q + R,\ \varphi_2(A) = PA^\tau Q - R \quad (A \in M_n),$$

или

$$\varphi_1(A) = P(A^\tau)^t Q + R,\ \varphi_2(A) = P(A^\tau)^t Q - R \quad (A \in M_n),$$

для некоторого автоморфизма $\tau$ поля $\mathbb{F}$. (Напомним, что $A^\tau = [a_{ij}]^\tau = [\tau(a_{ij})]$ — матрица, полученная поэлементным применением автоморфизма $\tau$ к $A$.)

В разделе 3.2 будет доказана гипотеза о структуре автоморфизмов тотального графа кольца матриц. Более того, поскольку в предыдущем разделе получена классификация сразу пары отображений, будет получен даже несколько более общий результат — характеризация автоморфизмов ориентированного тотального графа.

**Определение** (3.2.1)**.** Фиксируем $\lambda_0 \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Ориентированным тотальным графом кольца $M_n$ называется ориентированный граф $\mathcal{T}_n(\mathbb{F}, \lambda_0)$ с множеством вершин $M_n$ и множеством ребер $\{(A,B) \mid A + \lambda_0 B \text{ вырождена}\}$. Отметим, что петли в этом графе запрещены. Если $\lambda_0 = 1$, ориентированный граф $\mathcal{T}_n(\mathbb{F}, \lambda_0)$ можно рассматривать как обычный неориентированный тотальный граф $\mathcal{T}_n(\mathbb{F})$.

Для доказательства основного результата будет необходимо показать, что если условие на сохранение вырожденности суммы выполнено только для различных пар матриц, то оно также выполнено и для одинаковых матриц.

Основной результат раздела заключается в следующей теореме.

**Теорема** (3.2.8)**.** Пусть $\mathbb{F}$ произвольное поле с условием $|\mathbb{F}| \geqslant 3$. Тогда $T$ является автоморфизмом графа $\mathcal{T}_n(\mathbb{F}, \lambda_0)$ в точности тогда, когда найдутся такие $P, Q \in \in GL_n$, $R \in M_n$ и автоморфизм $\tau$ поля $\mathbb{F}$, что

- если $\lambda_0 \neq -1$, то либо

$$T(A) = PA^{\tau}Q \quad \text{для всех } A \in M_n$$

  либо

$$T(A) = P(A^t)^{\tau}Q \quad \text{для всех } A \in M_n;$$

- если $\lambda_0 = -1$, то либо

$$T(A) = PA^{\tau}Q + R \quad \text{для всех } A \in M_n$$

  либо

$$T(A) = P(A^t)^{\tau}Q + R \quad \text{для всех } A \in M_n.$$

**Глава 4**. Данная глава посвящена свойствам тотального и регулярного графов многочлена.

В разделе 4.1 доказывается связность регулярного графа кольца матриц, а также формулируется критерий связности тотального и регулярного графов многочлена.

**Предложение** (4.1.1)**.** Если $n \neq 1$, то $\Gamma_n(\mathbb{F})$ связен. Более того, $\mathrm{diam}(\Gamma_n(\mathbb{F})) = 2$.

**Теорема** (4.1.7)**.** Пусть $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — однородный многочлен.

**1.** $T_p(\mathbb{F}^n)$ связен $\iff \dim\langle V(p)\rangle = n$. Более того, в этом случае выполняется неравенство $\operatorname{diam}(T_p(\mathbb{F}^n)) \leqslant n$.

**2.** Пусть дополнительно $|\mathbb{F}| > 2\deg p$ (в частности, $\mathbb{F}$ может быть бесконечным). Тогда $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$ связен $\iff \dim\langle V(p)\rangle = n$. Более того, в этом случае $\operatorname{diam}(\Gamma_p(\mathbb{F}^n)) \leqslant 2n$.

В разделе 4.2 исследуется вопрос о конечности кликового числа тотального графа многочлена от двух переменных. В разделе получена оценка на хроматическое число таких графов.

В разделе 4.3 показывается связь хроматического числа регулярного графа кольца матриц и хроматического числа регулярных графов кривых второго порядка. Исходя из этой связи, исследуются свойства регулярных графов кривых второго порядка.

**Глава 5**. В этой главе классифицируются регулярный и тотальный графы для наименьшего нетривиального множества — трехточечного. Доказывается теорема о полной классификации таких графов с точностью до автоморфизма.

**Определение.** Пусть $n$ — натуральное число, $A \subseteq \mathbb{F}^n$.

- *Тотальным* графом множества $A$ называется граф $T_A(\mathbb{F}^n)$ с множеством вершин $\mathbb{F}^n$ такой, что две произвольные различные точки $x, y \in \mathbb{F}^n$ соединены ребром, если и только если $\frac{x+y}{2} \in A$.

- *Регулярным* графом множества $A$ называется граф $\Gamma_A(\mathbb{F}^n)$ с множеством вершин $\mathbb{F}^n \setminus A$ такой, что две произвольные различные точки $x, y \in \mathbb{F}^n \setminus A$ соединены ребром, если и только если $\frac{x+y}{2} \in A$.

Поскольку далее мы будем работать с графами трехточечного множества $A = \{a, b, c\}$, для удобства введем следующие обозначения

$$T_A(\mathbb{F}^n) = T^n(a, b, c), \quad \Gamma_A(\mathbb{F}^n) = \Gamma^n(a, b, c).$$

В разделе 5.1 классифицируются графы множества, лежащего в одномерном пространстве, или, что то же, на аффинной прямой.

**Теорема** (5.1.9)**.** Пусть $\mathbb{F}$ — поле нулевой характеристики, $a, b, c \in \mathbb{F}$ различны. Тогда граф $T^1(a, b, c)$ изоморфен одному из следующих неизоморфных друг другу типов графов:

- $T^1(0, 1, f)$ для некоторого $f \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{Q}$, причем все графы такого типа изоморфны;
- $T^1(0, 1, q)$ для некоторого $q \in \mathbb{Q}, q > 1$, причем при различных $q$ все графы такого типа попарно неизоморфны.

Граф $\Gamma^1(a, b, c)$, в свою очередь, изоморфен одному из следующих неизоморфных друг другу типов графов:

- $\Gamma^1(0, 1, f)$ для некоторого $f \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{Q}$, причем все графы такого типа изоморфны;
- $\Gamma^1(0, 1, q)$ для некоторого $q \in \mathbb{Q}, q > 1$, причем при различных $q$ все графы такого типа попарно неизоморфны.

В разделе 5.2 фокус переносится на пространство произвольной размерности.

**Теорема** (5.2.10)**.** Пусть $a, b, c \in \mathbb{F}^n$ различны. Тогда граф $T^n(a, b, c)$ изоморфен одному из следующих неизоморфных друг другу типов графов:

- $T^1(0, 1, f)$ для некоторого $f \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{Q}$, причем все графы такого типа изоморфны;

- $T^1(0,1,q)$ для некоторого $q \in \mathbb{Q}, q > 1$, причем при различных $q$ все графы такого типа попарно неизоморфны.

- $T^2((0,0),(1,0),(0,1))$ только в случае, если $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, а векторы $b-a$ и $c-a$ линейно независимы.

Граф $\Gamma^n(a,b,c)$, в свою очередь, изоморфен одному из неизоморфных друг другу типов графов:

- $\Gamma^1(0,1,f)$ для некоторого $f \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{Q}$, причем все графы такого типа изоморфны;

- $\Gamma^1(0,1,q)$ для некоторого $q \in \mathbb{Q}, q > 1$, причем при различных $q$ все графы такого типа попарно неизоморфны.

- $\Gamma^2((0,0),(1,0),(0,1))$ только в случае, если $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, а векторы $b-a$ и $c-a$ линейно независимы.

# Заключение

Одним из ключевых объектов исследования в этой диссертации была гипотеза о виде автоморфизмов тотального графа. Эта гипотеза стала отправной точкой для ряда исследуемых в этой работе вопросов. Гипотезу удалось доказать даже в более общем случае: для ориентированных тотальных графов.

Задача описания автоморфизмов входит в класс задач об описании отображений, сохраняющих матричные отношения. Благодаря этой связи, в работе также были охарактеризованы пары отображений, сохраняющие пучковые условия на вырожденность. Этот результат обобщает некоторые полученные ранее в этой области результаты. Он не является вспомогательным для описания автоморфизмов и, тем самым, представляет самостоятельный интерес. Также были описаны пары отображений, сохраняющие вырожденность суммы матриц. Именно на этот результат опиралось доказательство теоремы об описании автоморфизмов тотального графа. В частности, тот факт, что теорему удалось доказать сразу для пары отображений, позволил осуществить описание автоморфизмов не только тотального графа, но и ориентированного тотального графа.

Еще одним аспектом работы является исследование свойств тотального и регулярного графов — их связности, диаметра, хроматического числа. В работе была доказана связность регулярного графа кольца матриц, установлен критерий связности регулярного и тотального графов многочлена, найдены оценки на радиус и диаметр, в отдельных случаях найдены их точные значения. Также над полем нулевой характеристики (или характеристики, превышающей степень многочлена) найдена оценка на кликовое число тотального графа многочлена от двух переменных, множество нулей которого не содержит прямых. С точностью до изоморфизма классифицированы тотальные и регулярные графы трехэлементных множеств над полями нулевой характеристики.

Полученные в диссертации результаты могут быть интересны специалистам в области линейной алгебры, теории графов и теории отображений, сохраняющих матричные инварианты. Результаты могут быть использованы в задачах линейной и общей алгебры, комбинаторики.

## Благодарность

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям: доктору физико-математических наук, профессору Михалёву Александру Васильевичу и кандидату физико-математических наук, доценту Марковой Ольге Викторовне за постоянное внимание к работе, постановку некоторых задач и ценные со-

веты; сотрудникам кафедры высшей алгебры за интерес к работе; доктору физико-математических наук, профессору Гутерману Александру Эмилевичу и Максаеву Артёму Максимовичу за помощь, многолетнюю совместную работу, интересное и плодотворное сотрудничество, а также Валерии Алексеевне Промысловой за внимательное чтение текста, исправление опечаток и поддержку.

# Список публикаций автора по теме диссертации

## Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ

[1] C. Costara, A.E. Guterman, A.M. Maksaev, V.V. Promyslov. Automorphisms of the total digraph for the ring of square matrices over a field, *Linear Algebra Appl.*, **666**, 129-143 (2023). В.В. Промысловым доказана теорема 3.8.

DOI: 10.1016/j.laa.2023.03.007

Журнал индексируется в **WoS, Scopus**. IF: WoS 1.307, SJR 0.851.

[2] A.E. Guterman, A.M. Maksaev, V.V. Promyslov. Pairs of maps preserving singularity on subsets of matrix algebras, *Linear Algebra Appl.*, **644**, 1-27 (2022). В.В. Промысловым доказаны теоремы 2.4, 2.5 и следствие 2.8.

DOI: 10.1016/j.laa.2022.02.035

Журнал индексируется в **WoS, Scopus**. IF: WoS 1.307, SJR 0.851.

[3] А.М. Максаев, В.В. Промыслов. О тотальном и регулярном графах многочлена, *Фундаментальная и прикладная математика*, **23(4)**, 113—142 (2021). В.В Промысловым доказаны теоремы 3.6, 4.7 и 4.8. Результаты раздела 2, а также теорема 4.8 получены совместно с А.М. Максаевым.

English transl.: On Total and Regular Graphs of a Polynomial, *J. Math. Sc.*, **269**, 523-543 (2023).

DOI: 10.1007/s10958-023-06298-0

Журнал индексируется в **Scopus, RSCI**. IF: SJR 0.357.

[4] В.В. Промыслов. Классификация тотальных и регулярных графов трёхточечных множеств, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **514**, 167-192 (2022);

English transl.: Classification of the Total and Regular Graphs of Three-Point Sets, *J. Math. Sc.*, **272**, 592-607 (2023).

DOI: 10.1007/s10958-023-06452-8

Журнал индексируется в **Scopus, RSCI**. IF: SJR 0.357.

## Другие публикации

[5] В.В. Промыслов. Классификация регулярных графов трёхточечных множеств, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, том 25, № 4, с. 205-208 (2021).

http://intsysjournal.org/pdfs/25-4/Promyslov.pdf

Журнал индексируется в **РИНЦ**.