

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ  
«ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»

*На правах рукописи*

Коньков Артем Евгеньевич

**Полунатурное моделирование цифровых систем магнитного  
управления плазмой в токамаках**

Специальность 1.2.2 —

«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор технических наук, чл.-корр. РАН  
Галяев Андрей Алексеевич

Москва — 2024

## Оглавление

	Стр.
<b>Введение</b> . . . . .	<b>4</b>
<b>Глава 1. Метод синтеза дискретных матричных ПИД-регуляторов</b> . . .	<b>12</b>
1.1 Постановка задачи . . . . .	12
1.2 Алгоритм . . . . .	31
1.3 Комплекс программ . . . . .	37
1.4 Выводы по главе 1 . . . . .	37
<b>Глава 2. Стенд реального времени для проведения полунатурного моделирования цифровых систем управления</b> . . . . .	<b>39</b>
2.1 Полунатурное моделирование цифровых систем управления . . . . .	39
2.2 Описание стенда реального времени . . . . .	42
2.3 Комплекс программ для проведения полунатурного моделирования цифровых систем управления с обратной связью . . . . .	45
2.4 Выводы по главе 2 . . . . .	47
<b>Глава 3. Полунатурное моделирование систем управления положением плазмы с инвертором напряжения</b> . . . . .	<b>48</b>
3.1 Сравнительное исследование и полунатурное моделирование систем управления неустойчивым вертикальным положением плазмы в токамаке с разными типами источников питания обмотки горизонтального управляющего поля . . . . .	49
3.2 Комплекс программ для реализации цифрового многоуровневого ШИМ-контроллера . . . . .	59
3.3 Моделирование системы управления положением плазмы в токамаке ИГНИТОР . . . . .	64
3.4 Выводы по главе 3 . . . . .	68
<b>Глава 4. Моделирование систем управления формой плазмы в токамаке Глобус-М2</b> . . . . .	<b>69</b>
4.1 Полунатурное моделирование системы магнитного управления плазмой с алгоритмом восстановления равновесия плазмы в обратной связи . . . . .	69

	Стр.	
4.2	Комплекс программ для визуализации восстановленного равновесия плазмы в токамаке . . . . .	76
4.3	Метод идентификации алгоритма восстановления равновесия с помощью наблюдателя состояния . . . . .	80
4.4	Моделирование системы управления формой плазмы с внутренним каскадом управления по потокам на магнитных петлях	84
4.5	Выводы по главе 4 . . . . .	90
<b>Заключение . . . . .</b>		<b>91</b>
<b>Список сокращений и условных обозначений . . . . .</b>		<b>93</b>
<b>Словарь терминов . . . . .</b>		<b>94</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>		<b>96</b>
<b>Публикации автора по теме диссертации . . . . .</b>		<b>104</b>
<b>Список рисунков . . . . .</b>		<b>107</b>
<b>Приложение А. Акт о внедрении алгоритма FCDI . . . . .</b>		<b>112</b>

## Введение

Полунатурное моделирование, также известное как Hardware-in-the-Loop (HIL) simulation [1], является важным инструментом для разработки систем управления, особенно в областях, где предъявляются высокие требования к надежности и безопасности. Этот метод позволяет проводить испытания в условиях, максимально приближенных к реальным. Полунатурное моделирование объединяет цифровое моделирование физических процессов с реальным оборудованием, что дает возможность оценивать поведение системы в целом и отдельных ее частей в замкнутом контуре.

Полунатурное моделирование заключается во включении реального оборудования, например, регулятора в контур моделирования. При этом математическая модель объекта управления моделируется в реальном времени и взаимодействует с физическим оборудованием, воспроизводя динамические свойства реальной системы. Такой подход позволяет тестировать аппаратные компоненты в условиях, близких к эксплуатационным, без риска повреждения оборудования или угрозы безопасности.

Одним из ключевых преимуществ полунатурного моделирования является возможность проведения испытаний в экстремальных режимах работы и при аварийных ситуациях, которые могут быть опасны для реального оборудования. Это особенно важно для сложных систем управления, таких как системы магнитного управления плазмой в токамаках, где любые сбои могут привести к серьезным последствиям. Полунатурное моделирование позволяет заранее выявить недостатки алгоритмов управления и адаптировать систему для повышения ее надежности и безопасности.

Токамаки [2] были изобретены в СССР в ИАЭ им. И.В. Курчатова (ныне НИЦ «Курчатовский институт») в 1954 г. [3], и в настоящее время считаются наиболее перспективными устройствами для осуществления управляемого термоядерного синтеза [4]. В первых поколениях токамаков плазма имела круглое полоидальное сечение, а в современных D-образных токамаках плазма вытянута по вертикали, что обеспечивает улучшенные возможности по удержанию и повышению характеристик плазмы [5], но приводит к возникновению неустойчивости по вертикальному положению. При рассмотрении плазмы в D-образных токамаках как динамического объекта управления выделяются следующие особенности:

плазма представляет собой неустойчивый, многосвязный и нестационарный объект управления, который подвержен различным внешним возмущениям. Для обеспечения устойчивого протекания плазменных разрядов в требуемой конфигурации необходимо осуществлять управление положением, током и формой плазмы. Для этой цели применяются системы управления с обратной связью [6—9].

Полунатурное моделирование ранее применялось для разработки систем управления плазмой в токамаке EAST [10] и в проекте токамака ITER [11]. Помимо этого, оно использовалось для тестирования источников питания обмоток полоидального поля токамака [12]. Одной из первых отечественных работ в данной области является исследование Ю.В. Митришкина [13]. Настоящая диссертация развивает эти идеи, предлагая новые подходы к использованию полунатурного моделирования систем магнитного управления плазмой в токамаках.

Магнитное управление плазмой осуществляется посредством изменения токов в системе обмоток полоидального поля. Токи, протекающие в тороидальном направлении через обмотки, создают полоидальное магнитное поле сложной конфигурации, которое воздействует на плазму внутри вакуумной камеры токамака и обеспечивает формирование требуемой конфигурации плазмы в течение разряда [14]. Форму плазмы в течение разряда нельзя измерить напрямую, для этого применяются алгоритмы восстановления плазменного равновесия [15], которые включаются в обратную связь системы управления и должны оценивать форму плазмы в реальном времени [16].

В решение задач магнитного управления плазмой в токамаках внесли вклад многие исследователи, среди которых: Ю.В. Митришкин, Р.Р. Хайрутдинов, А.А. Кавин, Ю.А. Косцов, Е.А. Кузнецов, М. Ariola, А. Pironti, А. Portone, D.A. Humphreys, M.L. Walker, J.B. Lister, E. Schuster, Q.P. Yuan, B.J. Xiao, и др.

В данной работе для синтеза матричных ПИД-регуляторов (MIMO PID) в системах магнитного управления плазмой применяется метод линейных матричных неравенств. Существенный вклад в развитие данного метода внесли: А.М. Ляпунов, S. Boyd, Б.Т. Поляк, А.С. Немировский, Ю.Е. Нестеров, Р. Arkarian, P. Gahinet, П.С. Щербаков, М.В. Хлебников и др.

Интерес к настройке матричных ПИД-регуляторов появился давно. Похоже, что к одним из первых алгоритмов настройки матричных ПИД-регуляторов можно отнести работы [17; 18]. Практически применимые алгоритмы появились с активным внедрением метода линейных матричных неравенств в теорию управления [19]. Пионерской работой можно считать [20], где задача синтеза

матричных ПИД-регуляторов была сформулирована как задача синтеза статической обратной связи по выходу. Эта идея получила дальнейшее развитие в последующих работах [21], включая метод синтеза матричных ПИД-регуляторов в дискретном времени [22]. Эти алгоритмы используют менее оптимальные методы, такие как случайная генерация набора начальных матриц параметров регулятора. Другой подход предложен в [23], используя немонотонную теорему Ляпунова-Красовского через ЛМН. Хотя этот подход интересен, он не позволяет проводить синтез в частотной области, а критерии качества управления определяются в терминах весовых матриц. Вопросы робастной устойчивости синтезированной системы в той работе не исследовались.

Концепция формирования контура замкнутой системы (Loop Shaping) восходит к [24; 25]. Ее суть заключается в определении требований к качеству управления и запасам робастной устойчивости замкнутой системы в терминах требований к сингулярным значениям передаточной функции разомкнутого контура. Использование формирования контура при синтезе регулятора позволяет напрямую манипулировать частотными характеристиками системы, облегчая компромисс между качеством управления и запасом робастной устойчивости [24]. Формирование контуров приобрело популярность, особенно после работы в [26]. Одной из ранних работ, использующих формирование контура при синтезе матричных ПИД-регуляторов, было исследование [27]. В этой работе, подобно классическому формированию контура, использовалась факторизация, а функции формы определялись в виде предкомпенсатора и посткомпенсатора. Работа [21] интересна тем, что в ней использовалась взвешенная функция чувствительности.

Представленный в данной работе метод синтеза дискретных матричных ПИД-регуляторов основан на концепциях, изложенных в [28], которые, в свою очередь, развивают идеи, представленные в [29]. В последней работе использовалась выпукло-вогнутая процедура настройки непрерывных одномерных ПИД-регуляторов в частотной области. Основным принципом этого метода заключается в ограничении  $\mathcal{H}_\infty$ -нормы передаточных функций замкнутого контура путем ограничения спектральных норм частотных откликов на конечном, но достаточно обширном множестве частот. В данной работе применяется тот же принцип, но для синтеза дискретного ПИД-регулятора. Кроме того, формирование контура осуществляется путем непосредственного задания функции формы без использования предкомпенсаторов или посткомпенсаторов.

Синтез ПИД-регуляторов для модели объекта управления с переменными параметрами рассматривается редко, но такая возможность была упомянута в [28]. Новизна предлагаемого метода заключается в переформулировании ключевых концепций для проведения синтеза в дискретном времени и формулировке матричных ограничений для синтеза матричного ПИД-регулятора для нестационарного объекта управления, когда регулятор представлен моделью с постоянными параметрами, а объект – линейной моделью с переменными параметрами. Также метод включает возможность формирования контура разомкнутой системы, используя новый подход, при котором функции формы могут определяться произвольно. Метод имеет широкую постановку задачи, включая возможность ограничения всех  $\mathcal{H}_\infty$ -норм передаточных функций системы, при этом особое внимание уделяется обеспечению необходимого запаса робастной устойчивости замкнутой системы управления.

**Актуальность** данной работы обусловлена тем, что системы магнитного управления плазмой в токамаках являются сложными системами управления с силовыми источниками питания обмоток в обратной связи, в которых любые сбои могут привести к серьезным последствиям для оборудования. Полунатурное моделирование позволяет выявлять недостатки алгоритмов управления на этапе тестирования и модернизировать систему для повышения ее надежности и безопасности.

**Объектом исследования** являются системы магнитного управления плазмой в токамаках и их цифровые модели, а **предметом исследования** выступают численные методы и комплексы программ для проведения полунатурного моделирования и синтеза дискретных регуляторов в многомерных и многосвязных цифровых системах управления.

**Цель** диссертационной работы состоит в применении численных методов и комплексов программ для полунатурного моделирования цифровых систем магнитного управления плазмой токамаках. Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработать метод синтеза дискретных многомерных регуляторов на основе техники линейных матричных неравенств и реализовать его в комплексе программ;
2. Создать комплекс программ для полунатурного моделирования цифровых систем управления с обратной связью на стенде реального времени;

3. Провести полунатурное моделирование разработанных цифровых систем управления положением плазмы в токамаке с инвертором напряжения и разработать комплекс программ для реализации цифрового многоуровневого ШИМ-контроллера;
4. Провести полунатурное моделирование разработанных цифровых систем магнитного управления плазмой в токамаке с алгоритмом восстановления равновесия плазмы в обратной связи.

**Степень разработанности темы исследования.** Полунатурное моделирование широко используется для тестирования различных технических систем, таких как автомобильные и авиационные системы управления. В последнее время проводятся исследования по его использованию для систем управления плазмой в токамаках. Системы управления положением и током плазмы применяются на D-образных токамаках с момента их появления. Наибольший интерес исследователей в настоящее время сосредоточен на системах управления формой плазмы, в обратной связи которых должен находиться алгоритм восстановления равновесия плазмы, часто нелинейный. Необходимо синтезировать многомерный регулятор на модели объекта с переменными параметрами, неопределенностями и связанными каналами управления. Система магнитного управления должна обладать значительным запасом робастной устойчивости и способностью эффективно отражать внешние возмущения, но синтез регуляторов часто проводится на моделях в непрерывном времени из-за недостаточной проработки методов синтеза многомерных дискретных регуляторов, что приводит к проблемам с их дискретизацией.

**Научная новизна:**

1. Создан и реализован в виде комплекса программ метод синтеза дискретных матричных ПИД-регуляторов на основе техники линейных матричных неравенств. Метод позволяет настраивать регулятор на массиве линейных моделей объекта управления со связанными каналами управления, обеспечивает заданный запас робастной устойчивости замкнутой системы управления и позволяет осуществлять формирование контура (Loop Shaping) [пп. 2, 3 паспорта специальности 1.2.2];
2. Разработан комплекс программ для проведения полунатурного моделирования цифровых систем управления на стенде реального времени. Комплекс программ реализован в Simulink в виде двух Simulink-схем верхнего уровня для целевых машин реального времени «Регулятор» и «Модель объекта». Simulink-схема «Регулятор» содержит внутреннюю

- модель объекта управления, что позволяет осуществлять моделирование в нескольких режимах [пп. 1, 2, 3, 8 паспорта специальности 1.2.2];
3. Проведено полунатурное моделирование разработанных цифровых систем управления положением плазмы с инвертором напряжения в качестве источника питания обмотки горизонтального управляющего поля и качественное сравнение результатов моделирования систем управления с инверторами напряжения разных типов. Создан комплекс программ для реализации цифрового многоуровневого ШИМ-контроллера, который осуществляет управление инвертором напряжения [пп. 1, 2, 3, 4, 5, 8 паспорта специальности 1.2.2];
  4. Проведено полунатурное моделирование разработанной системы магнитного управления плазмой в токамаке Глобус-М2 с алгоритмом восстановления равновесия плазмы в обратной связи. Создан комплекс программ для визуализации восстановленного равновесия плазмы, который был внедрён в систему магнитной диагностики токамака Глобус-М2. Разработан метод идентификации алгоритма восстановления равновесия плазмы с помощью робастного наблюдателя состояния. Проведено моделирование системы управления формой плазмы с внутренним каскадом управления по потокам на магнитных петлях [пп. 1, 2, 3, 8 паспорта специальности 1.2.2].

**Теоретическая и практическая значимость.** Разработанные и промоделированные в реальном времени системы магнитного управления плазмой готовы к применению в экспериментах на токамаках. В настоящее время автором осуществляется внедрение цифровой системы магнитного управления на токамак Глобус-М2 в ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН. Стенд реального времени с комплексом программ позволяет осуществлять полунатурное моделирование широкого класса многомерных цифровых систем управления с обратной связью. Численный метод синтеза дискретных многомерных регуляторов, реализованный в виде комплекса программ, может применяться для широкого класса многомерных и многосвязных цифровых систем управления с обратной связью.

**Методология исследования** заключается в использовании методов полунатурного моделирования в реальном времени, линейных матричных неравенств и численных методов их решения.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Метод синтеза дискретных матричных ПИД-регуляторов и его реализация в виде комплекса программ;
2. Комплекс программ для полунатурного моделирования цифровых систем управления с обратной связью на стенде реального времени;
3. Результаты полунатурного моделирования систем управления положением плазмы в токамаках и комплекс программ для реализации цифрового многоуровневого ШИМ-контроллера для управления инверторами напряжения;
4. Результаты полунатурного моделирования систем магнитного управления плазмой с алгоритмом восстановления равновесия плазмы в обратной связи в токамаке Глобус-М2, комплекс программ для визуализации восстановленного равновесия плазмы в токамаке и метод идентификации алгоритма восстановления равновесия плазмы с помощью робастного наблюдателя состояния.

**Достоверность полученных результатов** подтверждается результатами полунатурного моделирования синтезированных систем управления на стенде реального времени под управлением операционных системы реального времени SimulinkRT, RTLinux и QNX Neutrino. Достоверность метода синтеза дискретных матричных ПИД-регуляторов обеспечивается строгостью используемого аппарата линейных матричных неравенств. Для решения систем матричных неравенств использовались программные среды выпуклой оптимизации CVX и YALMIP с численными решателями SDPT3 и MOSEK. Общая структура и подход к решению вышеозначенных задач опубликованы в рецензируемых журналах. Результаты находятся в преимущественном соответствии с общеизвестными результатами, дополняют и развивают их.

**Апробация работы.** Основные результаты работы неоднократно докладывались на научных семинарах ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН в лаборатории № 41, на семинаре Б.Т. Поляка «Теория автоматического управления» в лаборатории № 7, на семинаре ФТИ им. А.Ф. Иоффе в лаборатории физики высокотемпературной плазмы, на инженерно-физическом семинаре по токамакам в НИЦ «Курчатовский институт», на всемирном конгрессе IFAC 2020, на симпозиуме по силовой электронике (CPES) IFAC 2022, ИНТЕЛС 2021, а также на отечественных конференциях: Ломоносовские чтения (2018, 2019, 2020, 2024),

Управление большими системами (2021), Всероссийское совещание по проблемам управления (2019, 2024). Также были получены два патента на изобретения.

**Личный вклад.** Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Синтез систем управления и их полунатурное моделирование в реальном времени были проведены автором самостоятельно. Разработка метода и комплекса программ для синтеза дискретных матричных ПИД-регуляторов также была осуществлена автором самостоятельно. Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 19-31-90136 и РФФИ № 21-79-20180.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 10 печатных изданиях, 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 5 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, 1 — в тезисах докладов. Зарегистрированы 2 патента.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и 1 приложения. Полный объем диссертации составляет 114 страниц, включая 44 рисунка и 1 таблицу. Список литературы содержит 84 наименования.

## Глава 1. Метод синтеза дискретных матричных ПИД-регуляторов

Глава посвящена постановке задачи и разработке численного метода синтеза дискретного многомерного регулятора с фиксированной структурой на примере матричного (многомерного) ПИД-регулятора. Для реализации метода создан программный комплекс в виде пакета дополнения (toolbox) к MATLAB. Результаты главы изложены в оригинальной работе автора [73].

### 1.1 Постановка задачи

Матричный (MIMO) ПИД-регулятор с  $q$  входами и  $m$  выходами состоит из  $q \cdot m$  SISO ПИД-регуляторов, соединенных перекрестно таким образом, что  $q$ -ый вход подается на каждый  $q$ -ый SISO ПИД-регулятор, а все  $m$ -ые выходы суммируются. Пример матричного ПИД-регулятора с  $q = 2$  и  $m = 3$  показан на рис. 1.1. Основной мотивацией к применению матричных ПИД-регуляторов является необходимость одновременного управления несколькими выходами многомерного объекта со связанными контурами управления.

В общем случае объект управления описывается линейной моделью в пространстве состояний в непрерывном времени с переменными параметрами:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  – вектор выхода,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  – вектор входа,  $x(t) \in \mathbb{R}^s$  – вектор состояния,  $q$  — количество выходов,  $m$  — количество входов, а  $s$  — количество

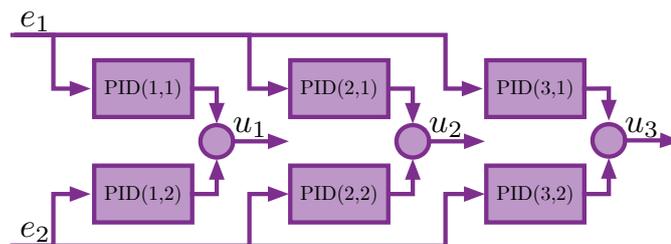


Рисунок 1.1 — Пример матричного ПИД-регулятора с двумя входами ( $e_1, e_2$ ) и тремя выходами ( $u_1, u_2, u_3$ ).

состояний (порядок модели). Матрицы  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  и  $D(t)$  изменяются во времени. Рассматриваются два наиболее практически значимых случая, позволяющих представить LTV модель как массив LTI моделей (Linear Time-Invariant – Линейная модель с постоянными параметрами).

Первый случай — это LPV-модель (Linear Time-Varying):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t), \\ y(t) = C(\theta(t))x(t) + D(\theta(t))u(t), \end{cases} \quad (1.2)$$

где  $\theta(t)$  — функция, описывающая изменение параметров объекта во времени [30]. Здесь важно, что функция  $\theta(t)$  является детерминированной, и, следовательно, изменяющиеся матрицы состояния также являются детерминированными ([31, Раздел 1.2]). Чаще всего LPV модель получается путем линеаризации нелинейной модели в нескольких временных точках. Она также может быть получена методами идентификации [32] или в случае, когда матрицы модели в пространстве состояний содержат параметры с явно определенными изменениями во времени.

Используя индекс  $n$  для обозначения временной точки  $t_n$ , в которой была рассчитана LTI модель, получаем массив матриц:

$$\theta_n = \theta(t_n), \quad \left\{ A_n = A(\theta_n), B_n = B(\theta_n), C_n = C(\theta_n), D_n = D(\theta_n) \right\}.$$

Второй случай — это модель с неопределённостями:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\delta(t))x(t) + B(\delta(t))u(t), \\ y(t) = C(\delta(t))x(t) + D(\delta(t))u(t), \end{cases} \quad (1.3)$$

где  $\delta(t)$  — функция, представляющая неопределённые параметры объекта. Здесь важно, что функция  $\delta(t)$  является недетерминированной, но границы интервала, в которых она меняется, должны быть известны. Все матрицы состояния такой системы должны быть представлены в виде:

$$A(\delta(t)) = A_0 + A_\Delta(\delta(t)), \quad A_\Delta(\delta(t)) = \delta_1(t)A_1 + \delta_2(t)A_2 + \dots + \delta_{N_i}(t)A_{N_i},$$

где  $A_0$  — номинальная часть, а  $A_\Delta(\delta(t))$  — возмущённая часть, которая может изменяться случайным образом в пределах указанных границ  $\delta(t)$  [33, Раздел 4.3.1].

Такое представление модели объекта типично для ситуаций, когда параметры модели имеют погрешности измерения. В этом случае параметры возмущения образуют множество, представленное полиэдром:

$$\Delta_I = \left\{ \delta(t) \mid \delta_i(t) \in [\delta_i^-, \delta_i^+], i = 1, \dots, N_i \right\},$$

с множеством экстремальных точек:  $\Delta_E = \left\{ \delta_i \mid \delta_i = \delta_i^- \text{ или } \delta_i^+, i = 1, \dots, N_i \right\}$ .

Если параметры возмущения нормализованы, они образуют политоп:

$$\Delta_P = \left\{ \delta(t) \mid \sum_{i=1}^{N_i} \delta_i(t) = 1, \delta_i(t) \geq 0 \right\},$$

с множеством экстремальных точек  $\Delta_E = \left\{ e_i^T \mid e_i \in \mathbb{R}^{N_i}, i = 1, \dots, N_i \right\}$ , где  $e_i$  — это базисный вектор, с каждым  $i$ -м элементом равным 1, в то время как все остальные равны нулю. Детали этих представлений описаны в [33, Раздел 4.3].

Согласно [33, Теорема 4.3], для гарантии качества управления и запаса робастной устойчивости системы управления замкнутой системы достаточно синтезировать регулятор на массиве LTI моделей, рассчитанных в экстремальных точках множества параметров возмущения.

Используя индекс  $n$  для обозначения экстремальных точек  $\delta_n$  множества параметров возмущения, в которых была рассчитана LTI модель, получим массив матриц моделей:

$$\delta_n \in \Delta_E, \quad \left\{ A_n = A(\delta_n), B_n = B(\delta_n), C_n = C(\delta_n), D_n = D(\delta_n) \right\}.$$

Оба описанных случая приводят к аппроксимации LTV модели объекта массивом LTI моделей с индексом  $n$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_n(t) = A_n x_n(t) + B_n u_n(t), \\ y_n(t) = C_n x_n(t) + D_n u_n(t), \end{cases}$$

где  $x_n(t)$ ,  $u_n(t)$  и  $y_n(t)$  — это векторы состояния, входа и выхода  $n$ -ой LTI модели объекта. Эти случаи могут быть также комбинированы. Фактически, объединяя их, можно представить любую LTV модель как массив LTI моделей.

После этого необходимо дискретизировать каждую LTI модель в массиве с использованием метода фиксатора нулевого порядка (ЗОН) или фиксатора первого порядка (ФОН), в зависимости от типа АЦП и ЦАП, используемых в цифровой системе управления. При использовании метода ЗОН [34, Раздел 4.3.3], получаем:

$$t(T_s k) \leq t \leq t(T_s k + T_s), k \in \mathbb{Z},$$

$$A_n^d = \exp(A_n T_s), \quad B_n^d = A_n^{-1}(A_n^d - I_s)B_n, \quad C_n^d = C_n, \quad D_n^d = D_n.$$

Здесь индекс  $k$  обозначает порядковый номер отсчёта. Получаем массив ЛТИ моделей в дискретном времени:

$$\begin{cases} x_n(T_s k + T_s) = A_n^d x_n(T_s k) + B_n^d u_n(T_s k), \\ y_n(T_s k) = C_n^d x_n(T_s k) + D_n^d u_n(T_s k). \end{cases}$$

Так как метод работает с передаточными функциями, получим массив дискретных передаточных функций:

$$P_n(z) = C_n^d (zI_s - A_n^d)^{-1} B_n^d + D_n^d, \quad P_n(z) \in \mathbb{C}^{q \times m}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.4)$$

где  $z$  – переменная Z-преобразования [35], которое получается из дискретного преобразования Лапласа [36], через подстановку

$$\exp(sT_s) \longrightarrow z, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \exp(-sT_s n) \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n},$$

где  $s$  - переменная преобразования Лапласа. Чтобы получить значение дискретного частотного отклика на частоте  $\omega$ , нужно осуществить подстановку  $z \longrightarrow \exp(j\omega T_s)$  в дискретной передаточной функции. Эта подстановка следует из определений Z-преобразования и дискретного преобразования Фурье, как показано ниже:

$$z \longrightarrow \exp(j\omega T_s), \quad \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \exp(-j\omega T_s n).$$

Подробности этой подстановки представлены в [37, Глава 8].

Используется схема обратной связи, показанная на рис. 1.2, являющаяся классической схемой для следящих систем управления. Вектор  $r$  обозначает зада-

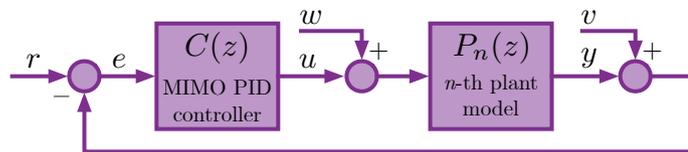


Рисунок 1.2 — Структурная схема следящей системы управления.

ющее воздействие, вектор  $e$  – ошибку, вектор  $u$  — вход, вектор  $y$  — выход, вектор  $w$  - входное возмущение, а вектор  $v$  — выходное возмущение.

Дискретная ЛТИ модель матричного ПИД-регулятора в законе управления

$$u(z) = C(z) e(z), \quad u(z) \in \mathbb{C}^m, \quad e(z) \in \mathbb{C}^q$$

определяется как дискретная передаточная функция вида

$$C(z) = K_P + K_I \frac{zT_s}{z-1} + K_D \frac{z-1}{zT_s}, \quad C(z) \in \mathbb{C}^{m \times q}, \quad (1.5)$$

где коэффициенты матричного ПИД-регулятора  $\{K_P, K_I, K_D\} \in \mathbb{R}^{m \times q}$  являются произвольными (не диагональными) матрицами. Очевидным требованием для систем отслеживания управления матричным регулятором является соответствие числа входов ( $m$ ) и выходов ( $q$ ) объекта условию

$$m \geq q.$$

Здесь используется обратный метод Эйлера для численного дифференцирования и интегрирования

$$\frac{zT_s}{z-1}.$$

Можно использовать и другие методы интегрирования и дифференцирования [34, Раздел 6.1], например:

$$\text{прямой метод Эйлера : } \frac{T_s}{z-1}, \quad \text{или метод Тастина : } \frac{T_s}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}.$$

Желательно избегать использования метода прямого Эйлера в дифференциаторе, так как это потребует введения низкочастотного фильтра. Постоянная времени фильтра не может быть настраиваемым параметром в этой постановке задачи из-за нелинейности относительно матрицы  $K_D$ , и её нужно будет задавать вручную в виде скаляра или матрицы, если требуется разные постоянные времени в каждом контуре управления.

Кроме того, можно добавлять или удалять компоненты матричного ПИД-регулятора; например, можно удалить компоненты  $K_P$  и  $K_D$ , когда они не нужны, превращая «ПИД» регулятор в «ПИ», «ИД» или «И». Можно добавить компоненты интегратора или дифференциатора второго порядка и выше. Эта постановка задачи обязательно требует наличия интегратора, что естественно, так как без него невозможно минимизировать вектор ошибки в установившемся режиме в многомерной системе управления.

В соответствии со схемой на рис. 1.2, определяется следующий массив дискретных передаточных функций:

- Передаточная функция разомкнутой системы  $L(z)$ , которая является передаточной функцией от вектора ошибки  $e$  до вектора выхода  $y$ :

$$y(z) = L_n(z)e(z), \quad L_n(z) = P_n(z)C(z), \quad y(z) \in \mathbb{C}^q, \quad L_n(z) \in \mathbb{C}^{q \times q},$$

где  $P_n(z)$  представляет собой  $n$ -ю модель объекта из массива линейных моделей объекта (1.4).

- Функция чувствительности  $S(z)$ , которая является замкнутой передаточной функцией от вектора задающего воздействия  $r$  до вектора ошибки  $e$ :

$$e(z) = S_n(z)r(z), \quad S_n(z) = \left(I_q + L_n(z)\right)^{-1}, \quad S_n(z) \in \mathbb{C}^{q \times q}.$$

- Дополнительная функция чувствительности  $T(z)$ , которая является замкнутой передаточной функцией от вектора задающего воздействия  $r$  до вектора выхода  $y$ :

$$y(z) = T_n(z)r(z), \quad T_n(z) = I_q - S_n(z) = L_n(z)S_n(z), \quad T_n(z) \in \mathbb{C}^{q \times q}.$$

- Функция статической и низкочастотной чувствительности  $F(z)$ , которая является функцией чувствительности для малых частот. Если  $C(z)$  задана передаточной функцией (1.5), она принимает форму:

$$\begin{aligned} F_n(z) &= \left(P_n(1)K_I T_s\right)^{-1} (z - 1), \\ F_n(z) &\approx S_n(z) \text{ для малых } \omega, \quad z = \exp(j\omega T_s), \end{aligned} \tag{1.6}$$

где  $P_n(1)$  — статическое усиление  $n$ -й модели объекта (спектральная норма частотного отклика на нулевой частоте). Вывод функции статической и низкочастотной чувствительности приведен в приложении в статье [73].

- $Q$ -параметр (термин из подхода параметризации Юлы [38]), который является замкнутой передаточной функцией от вектора задающего воздействия  $r$  до вектора управления  $u$ :

$$u(z) = Q_n(z)r(z), \quad Q_n(z) = C(z)S_n(z), \quad Q_n(z) \in \mathbb{C}^{m \times q}.$$

- Замкнутая передаточная функция от вектора входных возмущений  $w$  до вектора ошибки  $e$ :

$$e(z) = W_n(z)w(z), \quad W_n(z) = -S_n(z)P_n(z), \quad w(z) \in \mathbb{C}^m, \quad W_n(z) \in \mathbb{C}^{q \times m}.$$

- Замкнутая передаточная функция от вектора выходных возмущений  $v$  до вектора ошибки  $e$ :

$$e(z) = V_n(z)v(z), \quad V_n(z) = -S_n(z), \quad v(z) \in \mathbb{C}^q, \quad V_n(z) \in \mathbb{C}^{q \times q}.$$

Теорема о малом коэффициенте усиления, впервые предложенная в [39], представляет собой простой и интуитивно понятный инструмент для вычисления запасов робастной устойчивости в терминах  $\mathcal{H}_\infty$ -норм. Для применения этой теоремы в робастном анализе используется так называемая  $M - \Delta$  конфигурация [40, Глава 7], [41, Раздел 8.2], когда система управления с неопределенностями делится на номинальную часть, представленную передаточной функцией  $M(z)$ , и часть с неопределенностями, представленную передаточной функцией  $\Delta(z)$ . Такая система управления будет устойчивой тогда и только тогда, когда [42, Раздел 10.4]:

$$\|M(z)\|_\infty \cdot \|\Delta(z)\|_\infty < 1.$$

Рассматриваются только два случая неопределенностей, что достаточно для целей данной работы (и для большинства практических случаев): выходная мультипликативная неопределенность (рис. 1.3) и выходная аддитивная неопределенность (рис. 1.4) в модели объекта. Предполагается, что параметры регулятора известны точно и не имеют неопределенностей.

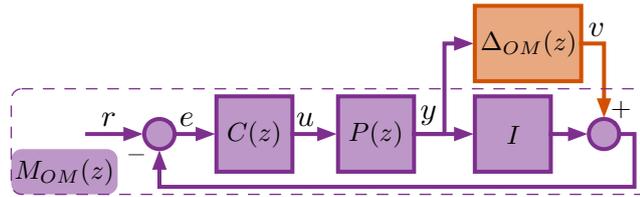


Рисунок 1.3 — Система управления с выходной мультипликативной неопределенностью в модели объекта.

В случае выходной мультипликативной (ОМ) неопределенности передаточные функции  $M_{OM}(z)$  и  $\Delta_{OM}(z)$  связывают векторы  $v$  и  $y$  следующим образом:  $v = \Delta_{OM}(z)y$ ,  $y = M_{OM}(z)v$ , а передаточная функция  $M_{OM}(z)$  имеет вид

$$M_{OM}(z) = -P(z)C(z)\left(I + P(z)C(z)\right)^{-1} = -\left(I + P(z)C(z)\right)^{-1}P(z)C(z). \quad (1.7)$$

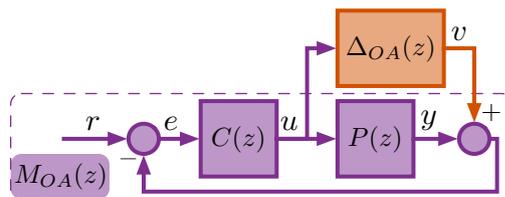


Рисунок 1.4 — Система управления с выходной аддитивной неопределенностью в модели объекта.

В случае выходной аддитивной (ОА) неопределенности передаточные функции  $M_{OA}(z)$  и  $\Delta_{OA}(z)$  связывают векторы  $v$  и  $u$  следующим образом:  $v = \Delta_{OA}(z)u$ ,  $u = M_{OA}(z)v$ , и передаточная функция  $M(z)$  принимает вид

$$M_{OA}(z) = -C(z) \left( I + P(z)C(z) \right)^{-1}. \quad (1.8)$$

Таким образом, если  $\mathcal{H}_\infty$ -норма  $M(z)$  в системе управления ограничена, то значение  $1/\|M(z)\|_\infty$  будет определять запас робастной устойчивости для замкнутой системы с неопределенностями. Это связано с тем, что оно служит границей для  $\mathcal{H}_\infty$ -нормы  $\Delta(z)$ , представляющей максимальное усиление возможных возмущений в системе обратной связи:

$$\|\Delta(z)\|_\infty < \frac{1}{\|M(z)\|_\infty}.$$

Используя эти замкнутые передаточные функции, формулируются критерии качества управления [42] замкнутой системы управления с матричным ПИД-регулятором в терминах ограничений на  $\mathcal{H}_\infty$ -нормы передаточных функций.

Ограничение  $\mathcal{H}_\infty$ -нормы функции чувствительности  $S_n(z)$  гарантирует качество управления замкнутой системы для всех моделей объекта  $P_n(z)$ . Это также определяет максимальное перерегулирование в замкнутой системе управления. Ограничение  $\mathcal{H}_\infty$ -нормы дополнительной функции чувствительности  $T_n(z)$  гарантирует запас робастной устойчивости замкнутой системы для всех моделей объекта  $P_n(z)$ . Кроме того, согласно теореме о малом коэффициенте усиления, значение  $1/\|T(z)\|_\infty$  определяет запас робастной устойчивости системы управления в случае выходных мультипликативных неопределенностей в модели объекта (1.7), так как

$$\|M_{OM}(z)\|_\infty = \|T(z)\|_\infty \quad (1.9)$$

и служит ограничением для максимального усиления возможных выходных мультипликативных возмущений в модели объекта

$$\|\Delta_{OM}(z)\|_\infty < \frac{1}{\|T(z)\|_\infty}.$$

Передаточные функции  $S(z)$  и  $T(z)$  связаны соотношением

$$S(z) + T(z) = I_q.$$

В идеальном случае,  $\|S(z)\|_\infty = \|T(z)\|_\infty = 1$ , что означает идеальное слежение по всей частотной области. В реальности такое ограничение было бы слишком жестким и могло бы потребовать чрезмерно больших значений входных сигналов. Значения для  $\|S(z)\|_\infty$  и  $\|T(z)\|_\infty$  обычно находятся в диапазоне от 1,1 до 1,8.

Применяя ограничение на  $\mathcal{H}_\infty$ -норму для  $Q(z)$ , можно ограничить величину входного сигнала модели объекта. Это полезно для учета физических ограничений, таких как ограничения исполнительных устройств. Кроме того, согласно теореме о малом коэффициенте усиления, значение  $1/\|Q(z)\|_\infty$  определяет запас робастной устойчивости системы управления в случае выходных аддитивных неопределенностей в модели объекта (1.8), так как

$$\|M_{OA}(z)\|_\infty = \|Q(z)\|_\infty \quad (1.10)$$

и служит ограничением для максимального усиления возможных выходных аддитивных возмущений в модели объекта

$$\|\Delta_{OA}(z)\|_\infty < \frac{1}{\|Q(z)\|_\infty}.$$

Рациональные значения для  $\|Q(z)\|_\infty$  должны быть кратны  $1/\sigma(P(1))$  (см. Раздел 3.1 в [28]).

Ограничивая  $\mathcal{H}_\infty$ -нормы для  $W(z)$  и  $V(z)$ , можно ограничить влияние векторов входных и выходных возмущений на вектор ошибки. Следует отметить, что нет необходимости ограничивать  $\mathcal{H}_\infty$ -норму для  $V_n(z)$ , так как

$$\|V_n(z)\|_\infty = \|-S_n(z)\|_\infty = \|S_n(z)\|_\infty.$$

Необходимо достичь минимально возможного времени переходных процессов в замкнутой системе при соблюдении ограничений на  $\mathcal{H}_\infty$ -нормы других передаточных функций. Невозможно ограничить  $\mathcal{H}_\infty$ -норму для  $F(z)$ , так как, согласно определению в (1.6), неограниченное увеличение  $z$  приводит к бесконечному значению  $\|F(z)\|_\infty$ . Вместо этого минимизируется спектральная норма матрицы

$$\left(P_n(1)K_I T_s\right)^{-1}, \quad (1.11)$$

которая далее будет называться матрицей статической и низкочастотной чувствительности (SLFS). Это приведет к достижению наилучшей возможной статической и низкочастотной чувствительности, что требует минимизации

$$\min \left\| \left(P_n(1)K_I T_s\right)^{-1} \right\|_2.$$

Минимизация спектральной нормы матрицы SLFS вместе с ограничением  $\mathcal{H}_\infty$ -нормы для  $S(z)$  и  $T(z)$  обеспечивает развязку контуров управления в замкнутой системе, по крайней мере на низких частотах.

Теперь можно сформулировать задачу синтеза матричного ПИД-регулятора как задачу полу-определенного программирования (SDP):

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad \|(P_n(1)K_I T_s)^{-1}\|_2, \\ \text{s.t.} \quad \|S_n(z)\|_\infty \leq S_{\max}, \\ \quad \quad \|T_n(z)\|_\infty \leq T_{\max}, \\ \quad \quad \|Q_n(z)\|_\infty \leq Q_{\max}, \\ \quad \quad \|W_n(z)\|_\infty \leq W_{\max}, \\ \text{for each } n. \end{array} \right. \quad (1.12)$$

Постановка задачи (1.12) в целом повторяет постановку задачи из [28] для систем в непрерывном времени. Такая постановка задачи достаточна для синтеза системы управления с максимально возможным качеством при обеспечении запасов робастной устойчивости в терминах теоремы о малом коэффициенте усиления. Однако формулировка (1.12) не обеспечивает размещения разомкнутой передаточной функции  $L(z)$  в строго определенном частотном диапазоне, что затрудняет, например, задание полосы пропускания замкнутой системы. Чтобы преодолеть это, постановка задачи будет расширена процедурой формирования контура (Loop Shaping).

Подход к формированию контура включает определение требований к качеству и запасам робастной устойчивости замкнутой системы управления в терминах сингулярных чисел разомкнутой передаточной функции [43]. Использование формирования контура при синтезе регулятора позволяет напрямую манипулировать частотными характеристиками замкнутой системы управления. Суть формирования контура заключается в синтезе системы управления с ограничением на максимальное усиление замкнутых передаточных функций в заданной частотной области. Функции, ограничивающие максимальное усиление передаточных функций в замкнутой системе, обычно называются «функциями формы». Таким образом, можно синтезировать замкнутую систему с желаемой областью частот среза, локализовать размещение  $\mathcal{H}_\infty$ -норм замкнутых передаточных функций, ограничить сами  $\mathcal{H}_\infty$ -нормы и достичь желаемой полосы пропускания с необходимым балансом между качеством управления и робастностью.

Начинаем с определения частотной области  $\Omega$ , на которой будет проводиться синтез дискретного регулятора:

$$\Omega = \{\omega \mid 0 < \omega_0 \leq \omega \leq \omega_{nyq}\}. \quad (1.13)$$

Из-за симметрии дискретного преобразования Фурье [44, Раздел 3.2] частотная область ограничена частотой Найквиста  $\omega_{nyq}$ . Согласно фундаментальной теореме Котельникова [45], максимальная частотная составляющая, которая может быть восстановлена из дискретного сигнала, ограничена частотой Найквиста.  $\omega_0$  является достаточно малой частотой,  $\omega_0 \neq 0$ , так как в случае  $\omega_0 = 0$  будут получены бесконечные значения для частотной характеристики передаточной функции с единичными полюсами ( $z = 1$ ). Например, дискретная передаточная функция матричного ПИД-регулятора всегда имеет единичные полюса, которые даёт интегратор (1.5). Типичное значение для  $\omega_0$  составляет  $10^{\lg(T_s)}$ .

Замкнутая система управления с  $q$  выходами имеет  $q$  частот среза  $\omega_{c j}$ , определяемых как частоты, когда сингулярные значения разомкнутой передаточной функции  $L(z)$  впервые пересекают уровень 1 (0 дБ) сверху:

$$\sigma_1(L(\omega_{c1})) = 1, \dots, \sigma_q(L(\omega_{cq})) = 1.$$

Они также определяют временные характеристики переходного процесса для каждого контура управления [46, Раздел 4.9]. Теперь определим область перехода с границами  $\omega_b^{\min}$  и  $\omega_b^{\max}$ :

$$\omega_b^{\min} \leq \omega_{c1} \leq \dots \leq \omega_{cq} \leq \omega_b^{\max}.$$

Таким образом, частотная область делится на три части  $\Omega = \Omega_L \cup \Omega_C \cup \Omega_H$ :

$$\begin{aligned} \text{низкие частоты:} \quad \Omega_L &= \{\omega \mid \omega_0 \leq \omega < \omega_b^{\min}\}; \\ \text{желаемая область частот среза:} \quad \Omega_C &= \{\omega \mid \omega_b^{\min} \leq \omega \leq \omega_b^{\max}\}; \\ \text{высокие частоты:} \quad \Omega_H &= \{\omega \mid \omega_b^{\max} < \omega \leq \omega_{nyq}\}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

В отличие от классического loop shaping, где функции формы определяются как весовые функции [43], в данном подходе функции формы могут задаваться произвольно. Это одно из самых важных преимуществ предлагаемого метода. Более того, можно задать функции формы для любых передаточных функций замкнутой системы.

Для массива замкнутых передаточных функций

$$G_n(z) = \{S_n(z), T_n(z), Q_n(z), W_n(z)\},$$

определяется набор функций формы,

$$b_G(\omega) = \{b_S(\omega), b_T(\omega), b_Q(\omega), b_W(\omega)\}$$

таким образом, чтобы для любого  $n$

$$\left\| G_n(\exp(j\omega T_s)) \right\|_2 \leq b_G(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad b_G(\omega) \in \mathbb{R}^1$$

и для  $\mathcal{H}_\infty$ -норм  $G_n(z)$  выполнялось условие

$$\left\| G_n(z) \right\|_\infty \leq G_{\max}, \quad G_{\max} = \sup_{\omega} \{b_G(\omega)\}, \quad G_{\max} = \{S_{\max}, T_{\max}, Q_{\max}, W_{\max}\}.$$

Ниже приведены примеры некоторых наиболее часто используемых функций формы:

- Константа, при этом сохраняется постановка задачи (1.12):

$$b_G(\omega) = G_{\max}, \quad \omega \in \Omega$$

- Ограничение желаемой области частот среза, задающее границы для  $\mathcal{H}_\infty$ -норм замкнутой системы:

$$b_G(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \Omega_L \\ G_{\max}, & \omega \in \Omega_C \\ 1, & \omega \in \Omega_H \end{cases}, \quad (1.15)$$

- Ограничение желаемой области среза только со стороны высоких частот, задающее полосу пропускания замкнутой системы:

$$b_G(\omega) = \begin{cases} G_{\max}, & \omega \in \Omega_L \cup \Omega_C \\ 1, & \omega \in \Omega_H \end{cases},$$

- Размещения сингулярных значений замкнутых передаточных функций на высоких частотах:

$$b_G(\omega) = (\omega_b^{\max}/\omega)^\alpha, \quad \omega \in \Omega_H, \quad (1.16)$$

или на низких частотах:

$$b_G(\omega) = (\omega/\omega_b^{\min})^\alpha, \quad \omega \in \Omega_L.$$

Эти зависимости получены через небольшую модификацию фильтра Баттерворта, где  $\alpha$  обозначает порядок фильтра.

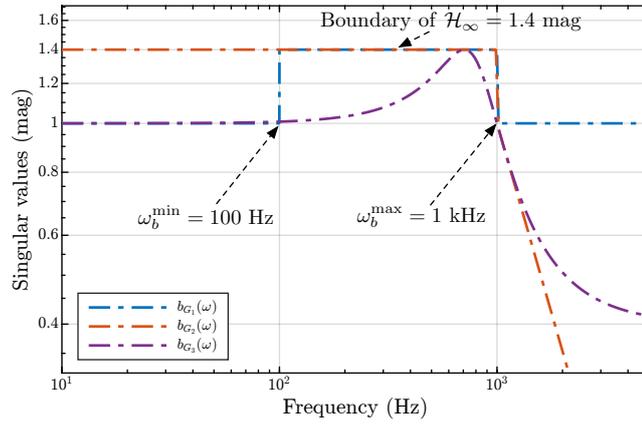


Рисунок 1.5 — Примеры трех функций формы.

- Использование фильтра Чебышева первого рода (см. Раздел 6.2 в [47]), с небольшой модификацией:

$$b_G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \cos(\alpha \arccos(\omega/\omega_b^{\max}))^2}} + G_{\max} - 1, \quad (1.17)$$

где

$$\epsilon = \sqrt{1/(2 - G_{\max})^2 - 1}$$

является коэффициентом ряби, а  $\alpha$  - порядком фильтра. Одним из заметных недостатков этого фильтра является наличие ряби в полосе пропускания. Однако в данном контексте это может быть полезно, так как позволяет точно разместить  $\mathcal{H}_\infty$ -норму замкнутой передаточной функции.

В приведенных примерах функции формы определены в трех частотных областях, но при необходимости можно задать больше областей. Также нет никаких ограничений на вид функций формы. На рис. 1.5 показаны три примера функций формы с параметрами  $G_{\max} = 1,4$ ,  $\omega_b^{\min} = 100$  Гц, и  $\omega_b^{\max} = 1$  кГц;  $b_{G1}(\omega)$  имеет форму (1.15),

$$b_{G2}(\omega) = \begin{cases} G_{\max}, & \omega \in \Omega_L \cup \Omega_C, \\ (\omega_b^{\max}/\omega)^\alpha, & \omega \in \Omega_H, \end{cases}$$

и  $b_{G3}(\omega)$  имеет форму (1.17).

Проблема достижения компромисса между качеством управления и робастностью основывается на том, что, по определению, функция чувствительности  $S(z)$  аппроксимирует разомкнутую передаточную функцию  $L(z)$  на низких частотах, тогда как дополнительная функция чувствительности  $T(z)$  аппроксимирует

её на высоких частотах, при выполнении следующих условий.

Для  $\omega \in \Omega_L$ ,

$$\begin{aligned} \text{если } \underline{\sigma}\left(L(\exp(j\omega T_s))\right) \gg 1, \quad \bar{\sigma}\left(L^{-1}(\exp(j\omega T_s))\right) \ll 1 : \\ S(z) = \left(I_q + L(z)\right)^{-1} \approx L^{-1}(z), \\ T(z) = I_q - S(z) \approx I_q, \\ \left\|S^{-1}\left(\exp(j\omega T_s)\right)\right\|_2 \approx \left\|L\left(\exp(j\omega T_s)\right)\right\|_2. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Для  $\omega \in \Omega_H$ ,

$$\begin{aligned} \text{если } \bar{\sigma}\left(L(\exp(j\omega T_s))\right) \ll 1 : \\ T(z) = L(z)\left(I_q + L(z)\right)^{-1} \approx L(z), \\ S(z) = I_q - T(z) \approx I_q, \\ \left\|T\left(\exp(j\omega T_s)\right)\right\|_2 \approx \left\|L\left(\exp(j\omega T_s)\right)\right\|_2. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Таким образом, ограничение на  $S(z)$  в  $\Omega_L$  определяет качество управления замкнутой системы. Аналогично, ограничение на  $T(z)$  в  $\Omega_H$  определяет запас робастной устойчивости замкнутой системы. Эти ограничения обычно называются «границей качества» и «границей робастности». Области, которые они ограничивают, предлагается называть *областью качества* и *областью робастности*. Эти области выделены на рис. 1.6. Следует отметить, что область качества всегда симметрична.

Обозначим границу робастности как  $b_R(\omega)$ . Как упоминалось выше в (1.19), под границей робастности понимается функция формы для  $T(z)$  на высоких частотах:

$$b_R(\omega) = b_T(\omega) \quad \text{для } \omega \in \Omega_H. \quad (1.20)$$

Граница робастности является нижней границей области робастности, которая заштрихована фиолетовым цветом на рис. 1.6. Значение интеграла

$$A_R = \int_{\omega_b^{\max}}^{\omega_{nyq}} \left(1 - b_R(\omega)\right) d\omega \quad (1.21)$$

даёт численную оценку гарантированного запаса робастной устойчивости замкнутой системы. Например, если функция формы  $b_T(\omega)$  для  $\omega \in \Omega_H$  принимает

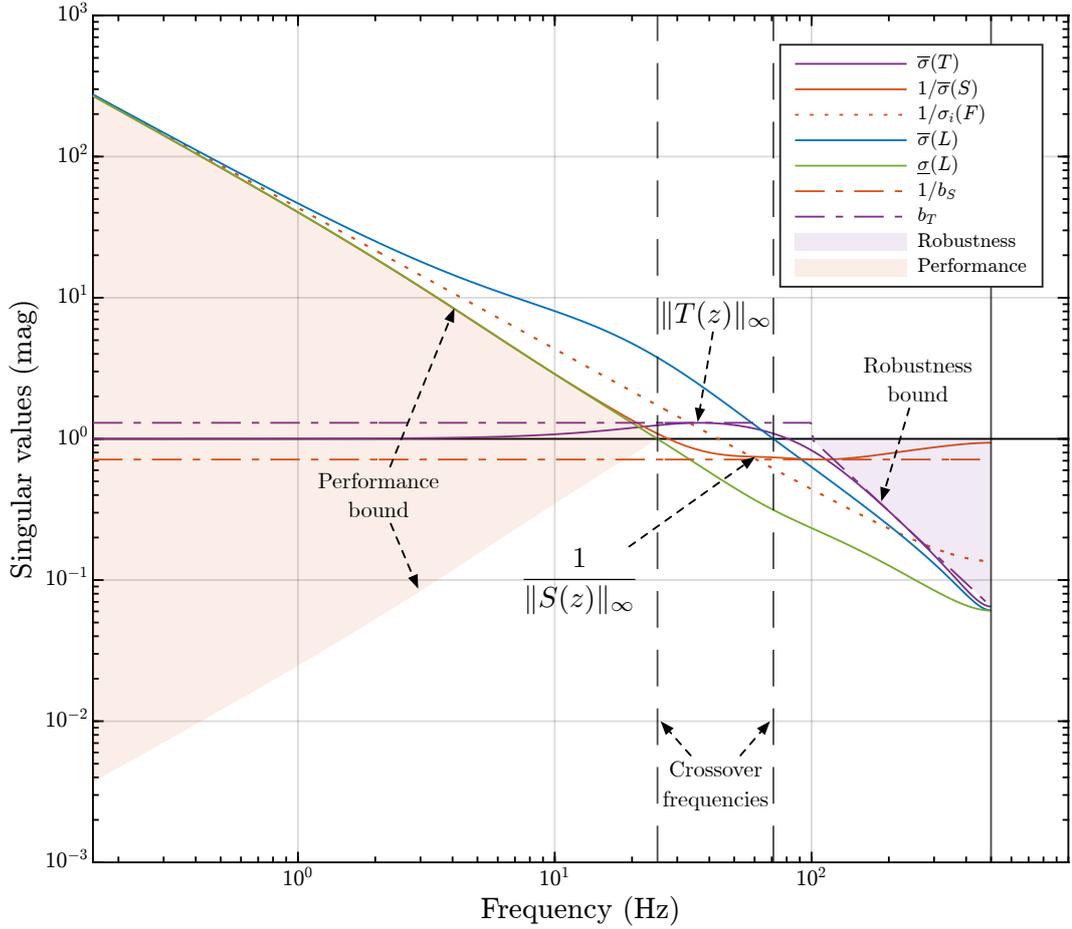


Рисунок 1.6 — Пример, иллюстрирующий формирование контура. Сингулярные значения частотных откликов передаточных функций  $L(z)$ ,  $S(z)$  и  $T(z)$  многомерной цифровой системы управления и функции формы ( $b_S$ ,  $b_T$ ). Области качества и робастности залиты цветом.

вид (1.16), то граница робастности примет следующую форму:

$$b_R(\omega) = (\omega_b^{\max}/\omega)^\alpha,$$

и тогда площадь области робастности рассчитывается по формуле:

$$A_R = \int_{\omega_b^{\max}}^{\omega_{nyq}} (1 - b_R(\omega)) d\omega = \omega_{nyq} - \frac{\omega_{nyq}(\omega_b^{\max}/\omega_{nyq})^\alpha}{1 - \alpha} + \frac{\omega_b^{\max}}{1 - \alpha} - \omega_b^{\max}, \quad \alpha > 1.$$

Таким образом, обеспечивается то, что сингулярные значения массива передаточных функций  $T_n(z)$  синтезированной системы будут ограничены по всей частотной области  $\Omega$ :

$$\left\| T_n(\exp(j\omega T_s)) \right\|_2 \leq b_T(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (1.22)$$

что предотвращает попадание сингулярных значений массива разомкнутых передаточных функций  $L_n(z)$  в область робастности на высоких частотах:

$$\left\| L_n \left( \exp(j\omega T_s) \right) \right\|_2 \leq b_R(\omega), \quad b_T(\omega) = b_R(\omega) \quad \text{для } \omega \in \Omega_H. \quad (1.23)$$

На протяжении всей главы индекс  $n$  обозначает номер модели объекта в массиве, указанном в (1.4).

В этом методе граница качества управления имеет более сложное значение. В отличие от границы робастности, её нельзя определить столь же прямолинейно, поскольку синтез регулятора выполняется итерационно. Функция чувствительности замкнутой системы значительно изменяется на каждой итерации, поэтому функция формы для  $S(z)$  на низких частотах всегда должна быть равна единице:

$$b_S(\omega) = 1 \quad \text{для } \omega \in \Omega_L.$$

Начнём с определения области малых частот  $\Omega_S$  как подмножества области низких частот  $\Omega_L$  (1.14):

$$\Omega_S = \{ \omega \mid \omega_0 \leq \omega < \omega_s < \omega_b^{\min} \}, \quad \Omega_S \subset \Omega_L, \quad (1.24)$$

где  $\omega_s$  является границей области малых частот.

В разделе 1.1 была введена функция статической и низкочастотной чувствительности (SLFS)  $F(z)$  (1.6). Также была обоснована необходимость её минимизации через минимизацию спектральной нормы матрицы SLFS (1.11). Согласно определению, для малых частот должно выполняться приближенное равенство:

$$F(z) \approx S(z), \quad \omega \in \Omega_S.$$

Это означает, что для их спектральных норм (максимальных усилений) выполняется следующее:

$$\left\| S \left( \exp(j\omega T_s) \right) \right\|_2 \approx \left\| F \left( \exp(j\omega T_s) \right) \right\|_2, \quad \omega \in \Omega_S. \quad (1.25)$$

Функция  $F(z)$  (1.6) является линейной по определению. Поэтому использование её сингулярных значений в области низких частот  $\Omega_L$  в качестве границы качества управления дало бы чрезмерно оптимистичную оценку области качества управления. Поэтому граница качества управления  $b_P(\omega)$  определяется как минимальное сингулярное значение разомкнутых передаточных функций  $L(z)$  в  $\Omega_L$ ,

в соответствии с (1.18). Учитывая, что работа ведется с массивом моделей, выбирается наихудший случай, т.е. передаточная функция разомкнутой системы с наименьшими сингулярными значениями из массива  $L_n(z)$ :

$$b_P(\omega) = \min_n \left\{ \underline{\sigma} \left( L_n(\exp(j\omega T_s)) \right) \right\}, \quad \omega \in \Omega_L. \quad (1.26)$$

Поскольку целью задачи SDP в (1.12) является минимизация спектральной нормы матрицы SLFS, и эта минимизация будет выполняться итерационно, граница качества управления будет плавающей, и с каждой итерацией область качества управления, ограниченная границей качества управления, будет увеличиваться. Область качества управления – это симметричная область, ограниченная снизу функцией  $b_P^{-1}(\omega)$  и сверху функцией  $b_P(\omega)$ . Значение области качества управления определяется как:

$$A_P = 2 \int_{\omega_0}^{\omega_b^{\min}} (1 - b_P(\omega)) d\omega. \quad (1.27)$$

Цель итерационной минимизации спектральной нормы матрицы SLFS заключается в максимизации наклона

$$\bar{\sigma} \left( F(\exp(j\omega T_s)) \right)$$

и приближении числа обусловленности к единице

$$\kappa \left( F(\exp(j\omega T_s)) \right) \approx 1.$$

Таким образом, итеративно минимизируя спектральную норму матрицы SLFS, можно гарантировать, что область качества управления будет итерационно увеличиваться. На рис. 1.6 показаны сингулярные значения передаточных функций системы, для которой спектральная норма матрицы SLFS была достаточно хорошо минимизирована.

Следует отметить, что на рис. 1.6 показаны обратные сингулярные значения для  $S(z)$  и  $F(z)$ , чтобы подчеркнуть, что

$$S(z) \approx F(z) \approx L^{-1}(z) \quad \text{или} \quad S^{-1}(z) \approx F^{-1}(z) \approx L(z) \quad \text{для} \quad \omega \in \Omega_S,$$

и область качества управления затенена красным цветом. В этом случае граница области малых частот  $\omega_s$  (1.24) составляет примерно 1 Гц.

Важно объяснить, почему эта постановка задачи позволяет не проводить предварительную развязку контуров управления и как сама постановка задачи обеспечивает развязку контуров в замкнутой системе управления. Для следящих систем управления необходимо обеспечить развязку контуров управления в установившемся режиме, поэтому достаточно обеспечить хорошую развязку только на низких частотах. Развязка контуров управления в многомерной системе по всему частотному диапазону обычно невозможна, да и не требуется.

Каналы управления в замкнутой системе развязаны на частоте  $\omega$ , когда частотная характеристика дополнительной функции чувствительности имеет диагональную форму [40, Раздел 3.4.1]. Понять это проще в терминах числа обусловленности и матрицы относительного коэффициента усиления (RGA) [40, Раздел 3.6].

Число обусловленности передаточной функции  $T(z)$  на частоте  $\omega$  определяется как отношение максимального и минимального сингулярных значений её частотного отклика на частоте  $\omega$ :

$$\kappa\left(T(\exp(j\omega T_s))\right) = \frac{\bar{\sigma}\left(T(\exp(j\omega T_s))\right)}{\underline{\sigma}\left(T(\exp(j\omega T_s))\right)}.$$

Удобным численным критерием для оценки развязки контуров управления является матрица относительного коэффициента усиления (RGA) (см. Раздел А.4.2 в [40]):

$$\text{RGA}\left(T(\exp(j\omega T_s))\right) = T(\exp(j\omega T_s)) \times \left(T(\exp(j\omega T_s))^\dagger\right)^H, \quad (1.28)$$

где  $\times$  обозначает произведение Шура (покомпонентное умножение). Если контуры управления полностью развязаны на частоте  $\omega$ , матрица RGA на этой частоте будет единичной матрицей.

Если число обусловленности на частоте  $\omega$  равно единице, частотная характеристика  $T(\exp(j\omega T_s))$  на частоте  $\omega$  является унитарной матрицей. Следовательно, все её сингулярные значения равны единице, и матрица RGA на частоте  $\omega$  будет единичной матрицей. То же самое верно и для приближения:

$$\kappa\left(T(\exp(j\omega T_s))\right) \approx 1 \quad \text{тогда} \quad \text{RGA}\left(T(\exp(j\omega T_s))\right) \approx I_q. \quad (1.29)$$

Минимизация спектральной нормы матрицы SLFS обеспечивает то, что на малых частотах число обусловленности передаточной функции  $S(z)$  близко к единице. Это свойство также справедливо для  $L(z)$  и  $T(z)$ . Для  $L(z)$  это можно

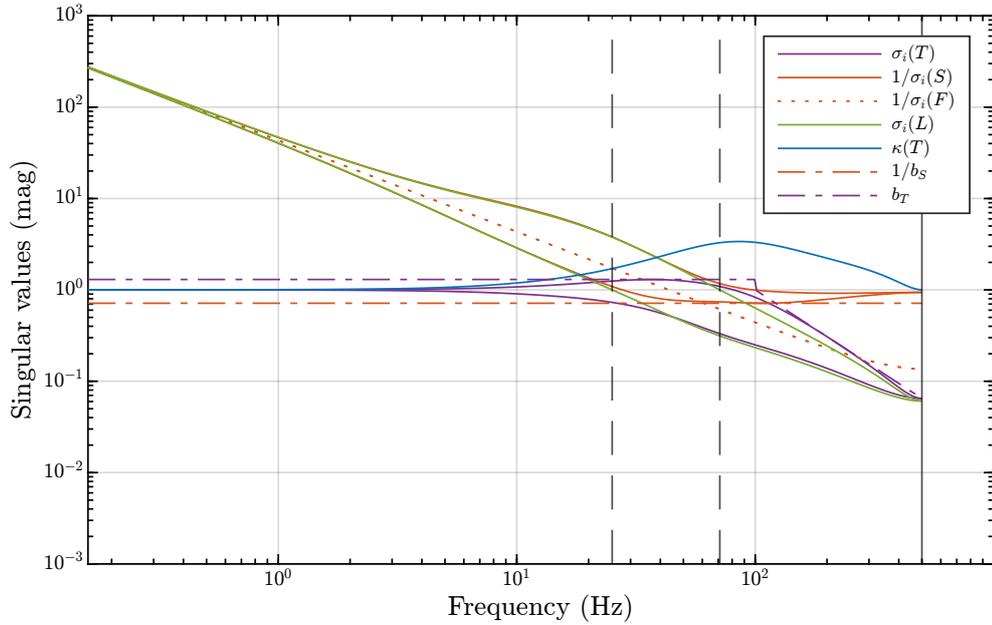


Рисунок 1.7 — Сингулярные значения передаточных функций  $L(z)$ ,  $S(z)$  и  $T(z)$  системы управления ММО на рис. 1.6 с добавлением числа обусловленности для  $T(z)$ .

наблюдать на рис. 1.6. Дополнительно это проиллюстрировано на рис. 1.7, который показывает сингулярные значения системы управления на рис. 1.6. Разница в том, что для  $S(z)$  и  $T(z)$  показаны все сингулярные значения. Синяя линия на рис. 1.7 представляет число обусловленности  $T(z)$ . Видно, что в замкнутой системе с достаточно хорошо минимизированной спектральной нормой матрицы SLFS развязка каналов нарушается только на высоких частотах.

Наконец, можно добавить формирование контура к исходной постановке задачи (1.12):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{s.t.} \\ \left\| S_n \left( \exp(j\omega T_s) \right) \right\|_2 \leq b_S(\omega), \\ \left\| T_n \left( \exp(j\omega T_s) \right) \right\|_2 \leq b_T(\omega), \\ \left\| Q_n \left( \exp(j\omega T_s) \right) \right\|_2 \leq b_Q(\omega), \\ \left\| W_n \left( \exp(j\omega T_s) \right) \right\|_2 \leq b_W(\omega), \\ \text{for each } n. \end{array} \right. \quad (1.30)$$

Эту постановку задачи можно легко привести обратно к форме (1.12), определив все функции формы как константы.

Передаточные функции замкнутой системы взаимосвязаны, что исключает необходимость наложения «слишком строгих» ограничений на максимальные

усиления всех передаточных функций. Наложение таких ограничений может привести к тому, что система (1.30) не будет иметь численного решения. Необходимо учитывать контекст задачи, вводя ограничения избирательно — там, где они критически важны для надежной работы замкнутой системы управления.

## 1.2 Алгоритм

Цель заключается в определении неизвестных параметров матричного (многомерного) ПИД-регулятора, который является регулятором с фиксированной структурой. Кроме того, используется обратная связь по выходу. Поэтому стандартный подход с использованием Bounded Real Lemma (Теорема 5.3 в [33]) для ограничения  $\mathcal{H}_\infty$ -нормы, который обычно эффективен для синтеза статической обратной связи по состоянию, не может быть применен в нашем случае.

Концепция  $\mathcal{H}_\infty$ -нормы матричной функции является обобщением концепции спектральной нормы матрицы на матричные комплексные функции. Этот факт позволяет переформулировать задачу ограничения  $\mathcal{H}_\infty$ -нормы передаточной функции  $G(z)$  как задачу ограничения достаточно большого множества спектральных норм частотных откликов  $G(\exp(j\omega_k T_s))$  на конечном множестве частот  $\Omega_k$ :

$$\begin{aligned} \|G(z)\|_\infty &= \sup_\omega \left\{ \bar{\sigma} \left( G \left( \exp(j\omega T_s) \right) \right) \right\} \\ &\quad \downarrow \\ \left\| G \left( \exp(j\omega_k T_s) \right) \right\|_2 &= \bar{\sigma} \left( G \left( \exp(j\omega_k T_s) \right) \right), \end{aligned}$$

где  $\omega_k \in \Omega_k$ ,

$$\Omega_k = \{\omega_k \mid \omega_k \in \Omega, \quad k = 1, 2, \dots, N_k\}, \quad |\Omega_k| = N_k. \quad (1.31)$$

$N_k$  является мощностью множества  $\Omega_k$ , и определяет количество частот, на которых будет синтезирован регулятор, а  $\Omega$  определяется в (1.13).

Используя индекс  $k$  для обозначения частотного отклика на частоте  $\omega_k$ , применяя это к  $n$ -й модели объекта

$$P_{nk} = P_n \left( \exp(j\omega_k T_s) \right)$$

и к передаточной функции матричного ПИД-регулятора (1.5)

$$C_k = K_P + K_I \frac{\exp(j\omega_k T_s) T_s}{\exp(j\omega_k T_s) - 1} + K_D \frac{\exp(j\omega_k T_s) - 1}{\exp(j\omega_k T_s) T_s}, \quad (1.32)$$

а также ко всем другим передаточным функциям, и для функций формы этих передаточных функций

$$b_{S_k} = b_S(\omega_k), \quad b_{T_k} = b_T(\omega_k), \quad b_{Q_k} = b_Q(\omega_k), \quad b_{W_k} = b_W(\omega_k).$$

Получается новая постановка задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad \left\| \left( P_n(1) K_I T_s \right)^{-1} \right\|_2, \\ \text{s.t.} \quad \|S_{nk}\|_2 \leq b_{S_k}, \\ \quad \quad \|T_{nk}\|_2 \leq b_{T_k}, \\ \quad \quad \|Q_{nk}\|_2 \leq b_{Q_k}, \\ \quad \quad \|W_{nk}\|_2 \leq b_{W_k}, \\ \text{for each } \quad n, k. \end{array} \right.$$

Введем скаляр  $\gamma$  с использованием «standard epigraph transformation» [19, Раздел 4.2.4]:

$$\min \left\| \left( P_n(1) K_I T_s \right)^{-1} \right\|_2 \iff \begin{cases} \min \gamma \\ \left\| \left( P_n(1) K_I T_s \right)^{-1} \right\|_2 \leq \gamma. \end{cases}$$

Для решения задачи ограничения спектральной нормы матрицы в системе, используем обобщенную задачу на собственные значения из [19, Раздел 3.3], что позволяет переписать ограничение в виде матричного неравенства:

$$\|A\|_2 \leq \gamma \iff A^H A \preceq \gamma^2 I_m, \quad A \in \mathbb{C}^{q \times m}.$$

Используем следующие обозначения:

$$Z_{nk} = I + L_{nk} = I + P_{nk} C_k = S_{nk}^{-1}, \quad Z_{nk} \in \mathbb{C}^{q \times q}, \quad (1.33)$$

и

$$X_n = P_n(1) K_I, \quad X_n \in \mathbb{R}^{q \times q}, \quad (1.34)$$

чтобы избежать обращения матриц:

$$\begin{aligned} \left\| \left( P_n(1)K_I T_s \right)^{-1} \right\|_2 \leq \gamma &\iff \left( \left( P_n(1)K_I T_s \right)^{-1} \right)^H \left( P_n(1)K_I T_s \right)^{-1} \preceq \gamma^2 I_q \\ &\iff X_n^H \left( \left( P_n(1)K_I \right)^{-1} \right)^H \left( P_n(1)K_I \right)^{-1} X_n \preceq X_n^H \gamma^2 T_s^2 X_n \\ &\iff X_n^H X_n \succeq \gamma^{-2} T_s^{-2} I_q. \end{aligned}$$

Остальные спектральные нормы преобразуются аналогично:

$$\begin{aligned} \|S_{nk}\|_2 \leq b_{Sk} &\iff S_{nk}^H S_{nk} \preceq b_{Sk}^2 I_q \iff Z_{nk}^H S_{nk}^H S_{nk} Z_{nk} \preceq Z_{nk}^H b_{Sk}^2 Z_{nk} \\ &\iff Z_{nk}^H Z_{nk} \succeq b_{Sk}^{-2} I_q, \\ \|T_{nk}\|_2 \leq b_{Tk} &\iff S_{nk}^H L_{nk}^H L_{nk} S_{nk} \preceq b_{Tk}^2 I_q \\ &\iff Z_{nk}^H S_{nk}^H L_{nk}^H L_{nk} S_{nk} Z_{nk} \preceq Z_{nk}^H b_{Tk}^2 Z_{nk} \\ &\iff Z_{nk}^H Z_{nk} \succeq b_{Tk}^{-2} L_{nk}^H L_{nk}, \\ \|Q_{nk}\|_2 \leq b_{Qk} &\iff S_{nk}^H C_k^H C_k S_{nk} \preceq b_{Qk}^2 I_q \\ &\iff Z_{nk}^H S_{nk}^H C_k^H C_k S_{nk} Z_{nk} \preceq Z_{nk}^H b_{Qk}^2 Z_{nk} \\ &\iff Z_{nk}^H Z_{nk} \succeq b_{Qk}^{-2} C_k^H C_k, \\ \|W_{nk}\|_2 \leq b_{Wk} &\iff P_{nk}^H S_{nk}^H S_{nk} P_{nk} \preceq b_{Wk}^2 I_m \\ &\iff (P_{nk}^H S_{nk}^H)^\dagger (P_{nk}^H S_{nk}^H S_{nk} P_{nk}) P_{nk}^H S_{nk} \preceq (P_{nk}^H S_{nk}^H)^\dagger (b_{Wk}^2 I_m) P_{nk}^H S_{nk} \\ &\iff S_{nk} P_{nk} P_{nk}^H S_{nk}^H \preceq (S_{nk} P_{nk} P_{nk}^H S_{nk}^H)^{-1} S_{nk} P_{nk} P_{nk}^H S_{nk}^H b_{Wk}^2 \\ &\iff Z_{nk} S_{nk} P_{nk} P_{nk}^H S_{nk}^H Z_{nk} \preceq Z_{nk} b_{Wk}^2 Z_{nk}^H \\ &\iff P_{nk} P_{nk}^H \preceq Z_{nk} b_{Wk}^2 Z_{nk}^H \iff Z_{nk} Z_{nk}^H \succeq b_{Wk}^{-2} P_{nk} P_{nk}^H. \end{aligned}$$

Затем, используя свойство двойственности SDP [48, Глава 5]), можно переформулировать исходную задачу оптимизации в ее двойственную форму

$$\begin{cases} \min \gamma \\ \left\| \left( P_n(1)K_I T_s \right)^{-1} \right\|_2 \leq \gamma, \end{cases} \iff \begin{cases} \max \mu = \gamma^{-2} \\ X_n^H X_n \succeq \mu T_s^{-2} I_q. \end{cases}$$

Таким образом, вместо минимизации максимального сингулярного значения матрицы  $X_n^{-1}$  (1.34)

$$\|X_n^{-1}\|_2 = \bar{\sigma}(X_n^{-1}),$$

максимизируется минимальное сингулярное значение матрицы  $X_n$ , так как

$$\underline{\sigma}(X_n) = 1/\bar{\sigma}(X_n^{-1}).$$

Теперь можно выразить задачу синтеза матричного ПИД-регулятора для массива моделей объектов в виде системы квадратичных матричных неравенств (QMI):

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad \mu, \\ \text{s.t.} \quad X_n^H X_n \succeq \mu T_s^{-2} I_q, \\ \quad \quad Z_{nk}^H Z_{nk} \succeq b_{S_k}^{-2} I_q, \\ \quad \quad Z_{nk}^H Z_{nk} \succeq b_{T_k}^{-2} L_{nk}^H L_{nk}, \\ \quad \quad Z_{nk}^H Z_{nk} \succeq b_{Q_k}^{-2} C_k^H C_k, \\ \quad \quad Z_{nk} Z_{nk}^H \succeq b_{W_k}^{-2} P_{nk} P_{nk}^H, \\ \text{for each } n, k. \end{array} \right. \quad (1.35)$$

QMI в (1.35) не являются линейными относительно параметров матричного ПИД-регулятора. Более того, левая часть неравенств не является выпуклой, что требует преобразования в систему LMI с использованием выпукло-вогнутой процедуры (Convex-Concave Procedure CCP) [49]. CCP является методом оптимизации, который включает итеративное решение выпуклых и вогнутых подзадач до достижения сходимости. Обычно она применяется к задачам в теории управления и обработке сигналов, где выпуклая подзадача решается с использованием техники выпуклой оптимизации, такой как метод градиентного спуска или метод внутренней точки, тогда как вогнутая подзадача решается с использованием двойственной формулировки или линейного программирования. Эта процедура обеспечивает монотонное увеличение целевой функции на каждой итерации и сходится к глобально оптимальному решению при определенных предположениях.

QMI имеет следующую форму:

$$Z^H Z \succeq Y^H Y.$$

Вводится матрица  $\check{Z}$  в левую часть без нарушения матричного неравенства:

$$(Z - \check{Z})^H (Z - \check{Z}) = Z^H Z - Z^H \check{Z} - \check{Z}^H Z + \check{Z}^H \check{Z} \succeq 0,$$

$$Z^H Z \succeq Z^H \check{Z} + \check{Z}^H Z - \check{Z}^H \check{Z},$$

$$Z^H Z \succeq Z^H \check{Z} + \check{Z}^H Z - \check{Z}^H \check{Z} \succeq Y^H Y.$$

Для преобразования матричного неравенства

$$Z^H \check{Z} + \check{Z}^H Z - \check{Z}^H \check{Z} - Y^H Y \succeq 0$$

в форму LMI используется лемма о дополнении по Шуру [19, стр. 28]:

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^H & A_3 \end{bmatrix} \succeq 0 \iff A_3 \succeq 0, \quad A_1 - A_2 A_3^\dagger A_2^H \succeq 0, \quad A_2(I - A_3 A_3^\dagger) = 0.$$

Подстановка

$$A_1 = Z^H \check{Z} + \check{Z}^H Z - \check{Z}^H \check{Z}, \quad A_2 = Y^H, \quad A_3 = I,$$

приводит к получению LMI из QMI:

$$Z^H Z \succeq Y^H Y \iff \begin{bmatrix} Z^H \check{Z} + \check{Z}^H Z - \check{Z}^H \check{Z} & Y^H \\ Y & I \end{bmatrix} \succeq 0.$$

Теперь все готово для получения конечной системы LMI, решение которой для каждой  $n$ -й модели объекта и на каждой  $k$ -й частоте на каждой  $i$ -й итерации ССР даст матрицы матричного (многомерного) ПИД-регулятора  $\{K_P, K_I, K_D\}_i$ , которые соответствуют локальному оптимуму  $\mu_i$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad \mu_i, \\ \text{s.t.} \quad X_n^H \check{X}_n + \check{X}_n^H X_n - \check{X}_n^H \check{X}_n - \mu T_s^{-2} I_q \succeq 0, \\ Z_{nk}^H \check{Z}_{nk} + \check{Z}_{nk}^H Z_{nk} - \check{Z}_{nk}^H \check{Z}_{nk} - b_{S_k}^{-2} I_q \succeq 0, \\ \begin{bmatrix} Z_{nk}^H \check{Z}_{nk} + \check{Z}_{nk}^H Z_{nk} - \check{Z}_{nk}^H \check{Z}_{nk} & b_{T_k}^{-1} L_{nk}^H \\ b_{T_k}^{-1} L_{nk} & I_q \end{bmatrix} \succeq 0, \\ \begin{bmatrix} Z_{nk}^H \check{Z}_{nk} + \check{Z}_{nk}^H Z_{nk} - \check{Z}_{nk}^H \check{Z}_{nk} & b_{Q_k}^{-1} C_k^H \\ b_{Q_k}^{-1} C_k & I_m \end{bmatrix} \succeq 0, \\ \begin{bmatrix} Z_{nk} \check{Z}_{nk}^H + \check{Z}_{nk} Z_{nk}^H - \check{Z}_{nk} \check{Z}_{nk}^H & b_{W_k}^{-1} P_{nk} \\ b_{W_k}^{-1} P_{nk}^H & I_m \end{bmatrix} \succeq 0, \\ \text{for each } n, k, \end{array} \right. \quad (1.36)$$

где матрица  $\check{Z}_{nk}$  соответствует (1.33), как показано в следующем уравнении:

$$\check{Z}_{nk} = I + P_{nk} \check{C}_k = I_q + P_{nk} \left( \check{K}_P + \check{K}_I \frac{\exp(j\omega_k T_s) T_s}{\exp(j\omega_k T_s) - 1} + \check{K}_D \frac{\exp(j\omega_k T_s) - 1}{\exp(j\omega_k T_s) T_s} \right).$$

Аналогично, матрица  $\check{X}_{nk}$  соответствует (1.34), как показано ниже:

$$\check{X}_{nk} = P_n(1) \check{K}_I.$$

Здесь  $\{\check{K}_P, \check{K}_I, \check{K}_D\} = \{K_P, K_I, K_D\}_{i-1}$  являются параметрами матричного ПИД-регулятора, полученные на предыдущей итерации ССР. Таким образом, гарантируется, что значение локального оптимума  $\mu_i$  не уменьшается с каждой новой итерацией ССР. С каждой новой итерацией алгоритм приближается к глобальному оптимуму  $\mu_i \rightarrow \mu$ . Матрицы матричного (многомерного) ПИД-регулятора  $\{K_P, K_I, K_D\}$ , которые должны быть найдены при решении LMI (1.36), линейно включены в LMI (1.36) через уравнения (1.32)–(1.34).

Алгоритм синтеза матричного ПИД-регулятора с использованием ССР следующий:

- Определить параметры;
- Установить  $\check{Z}_{nk} = Z_{nk}^{\text{init}}$ ,  $\check{X}_k = X_k^{\text{init}}$ ;
- Повторять решение (1.36) до тех пор, пока  $\left| \mu_i / \mu_{i-1} \right| - 1 > \tau$ .

Здесь  $\mu_i$  – локальный оптимум на  $i$ -й итерации ССР, а  $\mu_{i-1}$  – локальный оптимум на предыдущей итерации ССР. Алгоритм останавливается когда локальный оптимум  $\mu_i$  считается близким к оптимуму  $\mu$ . Типичное значение для  $\tau$  составляет 1%.

Важно отметить, что в данном контексте термин «оптимум» относится к оптимальному решению (1.36), а не к глобально оптимальному решению системы (1.35). Решение (1.36) в общем случае зависит от выбора инициализирующего матричного ПИД-регулятора.

Матрицы  $Z_{nk}^{\text{init}}$  и  $X_k^{\text{init}}$  соответствуют (1.33) и (1.34) с инициализирующим матричным ПИД-регулятором  $\{K_P, K_I, K_D\}^{\text{init}}$ . Любой матричный ПИД-регулятор, обеспечивающий устойчивость замкнутой системы, может использоваться в качестве инициализирующего регулятора.

Для устойчивой модели объекта в качестве инициализирующего регулятора можно использовать матричный ПИД-регулятор из [17]:

$$K_P^{\text{init}} = 0, \quad K_I^{\text{init}} = \epsilon P_1(1)^\dagger, \quad K_D^{\text{init}} = 0,$$

где  $\epsilon$  – малый скаляр, а  $P_1(1)$  – статическое усиление первой модели в массиве дискретных моделей объекта.

### 1.3 Комплекс программ

Для реализации алгоритма синтеза регулятора, описанного в данной работе, разработан комплекс программ в виде пакета дополнения (toolbox) в MATLAB. Пакет включает инструменты для визуализации результатов синтеза, такие как показано на рис. 1.6. Пакет также предоставляет возможность синтеза непрерывных регуляторов в постановке задачи из [28].

Требования для использования комплекса программ следующие:

- Версия MATLAB выше R2020a с установленными пакетами:
  - Control System Toolbox;
  - Robust Control Toolbox;
- Среда для выпуклой оптимизации, такая как CVX [50] или YALMIP [51]:
  - CVX более консервативен и имеет больше настроек;
  - YALMIP быстрее.
- Решатель SDP, такой как SDPT3 4.0 [52] или MOSEK [53]:
  - SDPT3 более стабилен при численных проблемах;
  - MOSEK быстрее.

Комплекс программ доступен по следующей ссылке:

<https://gitlab.com/konkov/mimo-pid-lmi-synthesis-toolbox>,

его можно клонировать из git-репозитория, используя следующую команду:

```
git clone git@gitlab.com:konkov/mimo-pid-lmi-synthesis-toolbox.git
```

### 1.4 Выводы по главе 1

В данной главе был представлен метод синтеза дискретного многомерного ПИД-регулятора для управления нестационарными объектами. Синтезируется оптимальный регулятор, поскольку обеспечивается максимально возможная область качества управления (1.27) при ограничениях на  $Q(z)$  и  $W(z)$ , и заданный запас робастной устойчивости в терминах теоремы о малом коэффициенте усиления (1.9) и (1.10) и заданной области робастности (1.21). Наличие «плавающей» границы качества управления является преимуществом по сравнению с классическим подходом к формированию контура, где обе границы строго определены, что

препятствует синтезу оптимального регулятора. Возможность задания границы робастности  $b_R(\omega)$  особенно важна в цифровых системах. Это позволяет обеспечить достаточно большую область робастности, гарантируя отсутствие алиасинга возле частоты Найквиста. Таким образом, нет необходимости включать анти-алиасинговый фильтр в обратную связь. Варьированием границы робастности можно достигать компромисса между качеством управления и запасом робастной устойчивости замкнутой системы. Большая область робастности ведет к меньшей области качества управления и наоборот. Минимизацией спектральной нормы матрицы SLFS одновременно достигаются несколько целей. Обеспечивается развязка контуров управления на низких частотах и максимизируется качество управления. Частоты среза в замкнутой системе управления располагаются максимально близко друг к другу, что позволяет получить схожие времена переходных процессов по всем каналам управления. Синтезируется регулятор с постоянными параметрами (LTI) для объекта с переменными параметрами (LTV), представленного в виде массива передаточных функций с индексом  $n$  (1.4). Если система неравенств (1.30) имеет решение, все заданные ограничения будут соблюдены для всего массива передаточных функций замкнутой системы (1.4).

Для реализации метода был разработан комплекс программ в виде пакета дополнения к системе MATLAB, который включает инструменты для визуализации результатов синтеза. Метод и разработанный комплекс программ могут быть использованы для синтеза регуляторов в различных цифровых системах управления. В этой работе метод используется для синтеза систем управления плазмой в токамаках.

## Глава 2. Стенд реального времени для проведения полунатурного моделирования цифровых систем управления

В главе описывается стенд реального времени и комплекс программ для проведения полунатурного моделирования цифровых систем управления с обратной связью. Результаты этой главы изложены в следующих оригинальных работах автора:

- в части полунатурного моделирования цифровых систем управления частично в [73],
- в части описания стенда реального времени в [82] и на официальном сайте ИПУ РАН в разделе «УНУ Цифровой комплекс реального времени» [54] (<https://www.ipu.ru/plasma/about>).

### 2.1 Полунатурное моделирование цифровых систем управления

Сложные алгоритмы управления могут быть реализованы только в цифровом виде. К примеру, аналоговый ПИД-регулятор с одним входом и одним выходом может быть реализован с помощью трех операционных усилителей. Однако для матричного ПИД-регулятора требуется значительно больше операционных усилителей. Например, для реализации матричного ПИД-регулятора с  $q = 2$  входами и  $m = 3$  выходами потребуется 21 операционный усилитель (18 для реализации всех его компонентов и еще 3 для суммирования выходов  $3 \cdot q \cdot m + q$ ; см. рисунок 1.1). Добавление еще одного контура управления ( $q = 3$ ,  $m = 4$ ) увеличит количество операционных усилителей до 40. Практическая реализация такого устройства, включающая калибровку, точную настройку параметров или будущие модификации, представляет собой сложнейшую задачу. Кроме того, необходимо учитывать конечную полосу пропускания и ограниченные диапазоны сигналов, присущие операционным усилителям. Следовательно, ожидать от такой системы надежной и бесперебойной работы, по меньшей мере, амбициозно, а в некоторых случаях и вовсе невозможно. Реализация матричного ПИД-регулятора в виде цифрового устройства позволяет избежать многих из этих проблем.

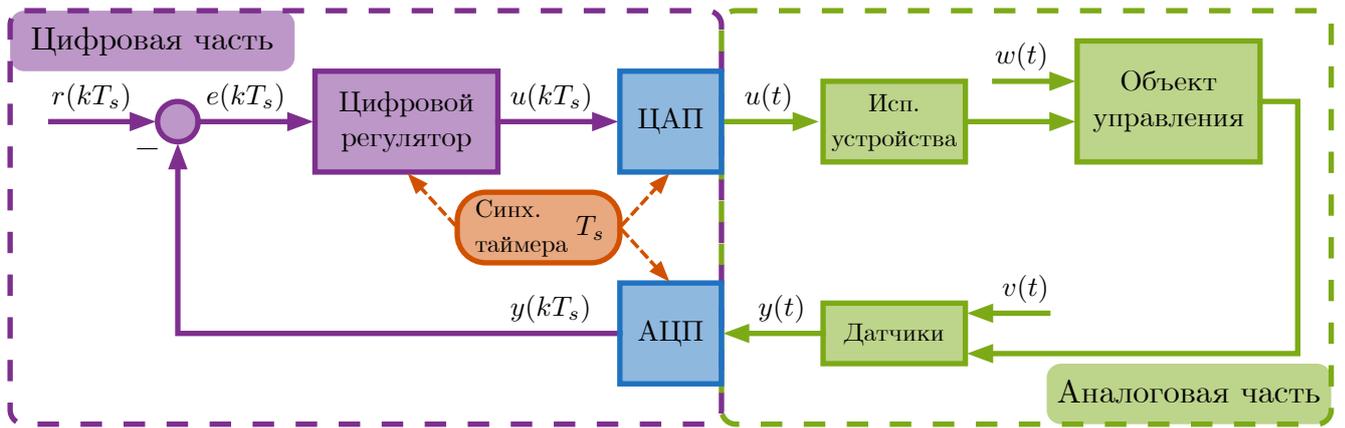


Рисунок 2.1 — Структурная схема базовой цифровой системы управления.

Структурная схема цифровой системы управления [34] изображена на рис. 2.1. Цифровая система управления состоит из двух частей. В аналоговой части находится объект управления, на который могут воздействовать внешние входные возмущения  $w(t)$ , исполнительные устройства, принимающие управляющие сигналы  $u(t)$ , и датчики, измеряющие выходные сигналы объекта  $y(t)$ , на которые также могут воздействовать внешние выходные возмущения  $v(t)$ . В цифровой части находится цифровой (дискретный) регулятор, который на основе вектора входных ошибок  $e(kT_s)$  вычисляет управляющий вектор  $u(kT_s)$ . Кроме того, имеется блок формирования задающего воздействия  $r(kT_s)$ , арифметический блок, вычисляющий вектор ошибки  $e(kT_s) = r(kT_s) - y(kT_s)$ . Аналого-цифровой преобразователь (АЦП) преобразует аналоговый сигнал  $y(t)$  в последовательность отсчётов (цифровой сигнал)  $y(kT_s)$ , а цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП) преобразует последовательность отсчётов  $u(kT_s)$  обратно в аналоговый сигнал  $u(t)$ . Все компоненты цифровой части должны быть синхронизированы по времени, а прием, обработка и передача отсчётов должны происходить с постоянным временем выборки  $T_s$ . Термины «дискретный регулятор» и «цифровой регулятор» – синонимы; первый обычно используется в контексте теории управления, а второй – в контексте техники.

Обычно вся цифровая составляющая реализуется в виде единого устройства. Таким устройством могут быть микроконтроллеры различных типов, модули ПЛИС (FPGA) или компьютеры общего назначения. Если дискретный регулятор является лишь частью более сложного алгоритма управления или к нему предъявляются повышенные требования по точности и отказоустойчивости, используются компьютеры, управляемые операционной системой реального вре-

мени (RTOS). Последние также принято называть целевыми машинами реального времени (ЦМРВ).

Количество каналов АЦП и ЦАП в цифровом устройстве должно соответствовать количеству входов и выходов дискретного регулятора. Роль ЦАП в цифровой системе также могут выполнять исполнительные устройства. Например, если исполнительные устройства представляют собой инверторы напряжения, работающие в режиме ШИМ, то сигнал с цифрового выхода устройства может быть подан непосредственно на затворы транзисторов инвертора.

Полунатурное моделирование представляет собой метод испытаний, который сочетает в себе как реальные физические компоненты, так и их цифровые модели. В этом процессе реальное оборудование или его часть интегрируется с компьютерной моделью, в которой часть элементов управляется программно, а другая часть представляет собой физическое оборудование. Это позволяет проводить испытания и отработку систем управления в условиях, максимально приближенных к реальным, но при этом сохраняется возможность более гибкого и безопасного проведения численных экспериментов.

Полунатурное моделирование особенно важно в тех случаях, когда проведение натуральных испытаний может быть слишком дорогостоящим, сложным или даже опасным. Например, в системах управления крупными энергетическими установками, таких как токамаки, использование полностью натуральных испытаний может привести к значительным рискам и затратам. Полунатурное моделирование позволяет выявить и устранить недостатки на этапе проектирования, тем самым снижая вероятность возникновения критических ошибок в реальных условиях эксплуатации.

Структурная схема цифровой системы управления при проведении полунатурного моделирования представлена на рис. 2.2. Левая часть схемы полностью совпадает с левой частью схемы на рис. 2.1. Таким образом на ЦМРВ «Регулятор» реализован настоящий регулятор, функционально идентичный тому, который будет использоваться в реальной цифровой системе управления.

На ЦМРВ «Модель объекта» моделируются процессы в объекте управления. Между двумя ЦМРВ находятся аналоговые сигналы, поэтому на входе и выходе ЦМРВ «Модель объекта» находятся АЦП и ЦАП.

Полунатурное моделирование повышает надежность разрабатываемых систем управления: если модель достаточно адекватно описывает физические про-

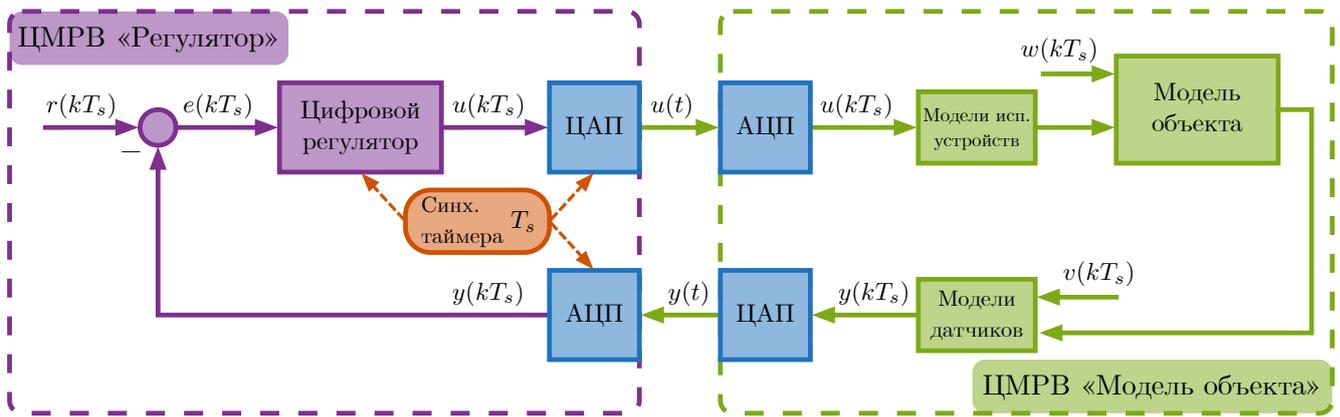


Рисунок 2.2 — Структурная схема цифровой системы управления при проведении полунатурного моделирования.

цессы в объекте управления, то система управления, прошедшая полунатурное моделирование, будет адекватно работать в реальных условиях.

## 2.2 Описание стенда реального времени

Для проведения полунатурного моделирования цифровых систем магнитного управления плазмой в токамаках 29 марта 2021 г. в лаборатории 41 ИПУ РАН был создан стенд реального времени (рис. 2.3) [82]. Автор принимал непосредственное участие в проектировании стенда реального времени. Сборка стенда, пуско-наладочные работы и разработка комплекса программ были выполнены автором самостоятельно.

Стенд состоит из двух целевых машин реального времени (ЦМРВ) Speedgoat Performance: «Регулятор» и «Модель объекта». Обе ЦМРВ могут работать под управлением операционной системы реального времени QNX Neutrino или SimulinkRT. Обратная связь между ЦМРВ «Регулятор» и «Модель объекта» осуществляется через соединение проводами клеммных разъемов АЦП (аналого-цифрового преобразователя) и ЦАП (цифро-аналогового преобразователя) модулей входа-выхода (рис. 2.4). Установлены следующие модули:

- В ЦМРВ «Регулятор»:
  - Speedgoat I0106-64 – Многоканальный коммутируемый АЦП: 64 аналоговых входа в режиме с общей землей или 63 аналоговых

- входа в псевдодифференциальном режиме или 32 аналоговых входа в дифференциальном режиме;
- Speedgoat I0144 – 16-ти канальный ЦАП в режиме с общей землей и 20 цифровых входо-выходных канала (TTL I/O).
  - В ЦМРВ «Модель объекта»:
    - Speedgoat I0110 – 32-х канальный ЦАП в режиме с общей землей;
    - Speedgoat I0131 – Комбинированный модуль с 16-ти канальным АЦП в режиме с общей землей и 8-ми канальным ЦАП в режиме с общей землей.



Рисунок 2.3 — Стенд реального времени в ИПУ РАН (фото сделано автором).

На текущий момент стенд реального времени позволяет моделировать системы управления с использованием аналоговых каналов в следующей конфигурации:

- до 16 выходов и до 40 входов у ЦМРВ «Регулятор»;
- до 40 выходов и до 16 входов у ЦМРВ «Модель объекта».

Все АЦП и ЦАП имеют разрешение 16 бит, а диапазоны напряжения могут быть выбраны:  $\pm 5$  В,  $\pm 10$  В,  $\pm 12$  В, 0-5 В, 0-10 В, 0-12 В. К каждой машине реального времени подключен монитор для отображения сигналов с встроенного осциллографа в реальном времени. Основное оборудование смонтировано в стандартную 19” серверную стойку.

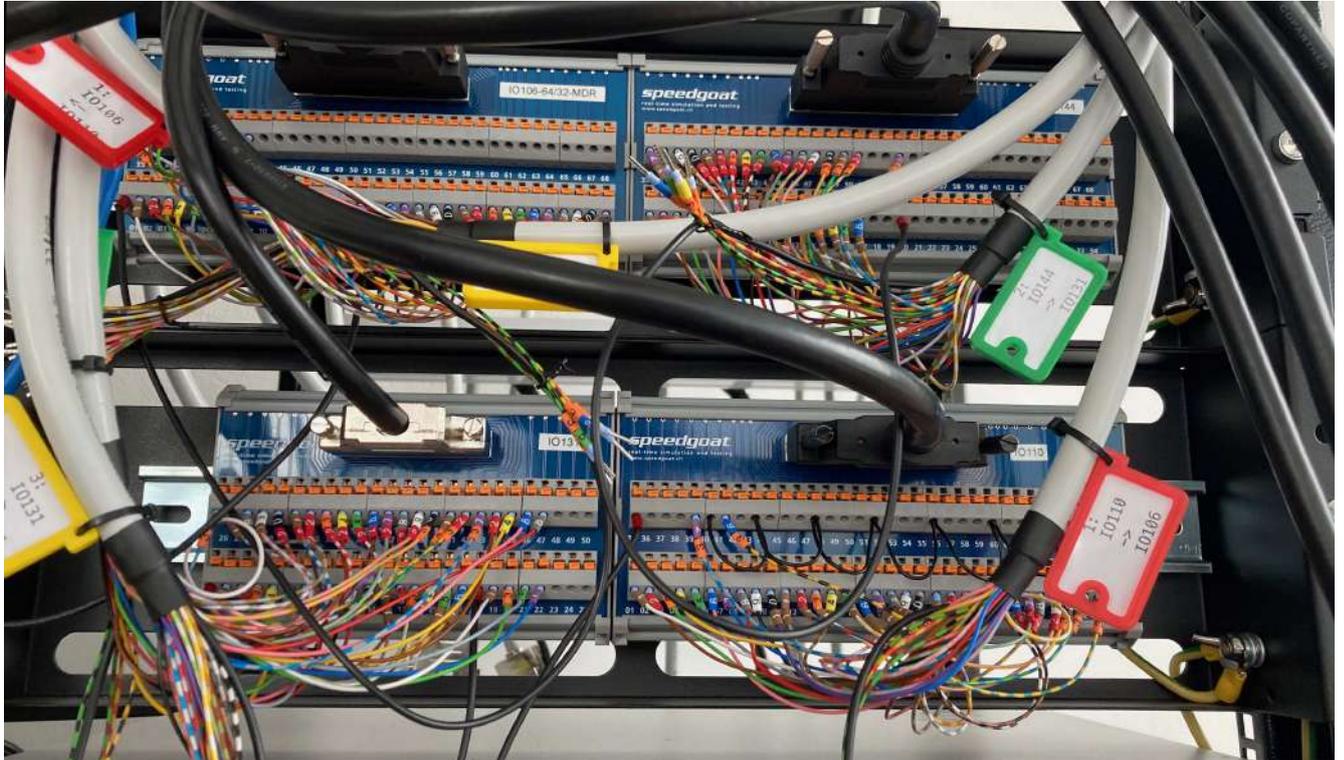


Рисунок 2.4 — Клеммники модулей входа-выхода двух ЦМРВ (фото сделано автором).

Быстродействие систем реального времени определяется временем, необходимым для выполнения задания на каждом шаге расчёта (TET – task execution time), которое состоит из двух компонентов: времени, затрачиваемого на расчет моделей и алгоритмов управления, и времени, необходимого для опроса модулей входа-выхода. Для корректной работы систем реального времени TET не должен превышать шаг расчёта  $T_s$  (sample time) в численном решателе разностных уравнений:

$$TET \leq T_s.$$

Для систем магнитного управления плазмой, рассматриваемых в данной работе и моделируемых на цифровом комплексе реального времени с текущей конфигурацией на процессоре i7-7700K, при использовании пары 34-х и 8-ми

аналоговых каналов, комфортный временной шаг составляет 100 мкс. Этот временной шаг можно уменьшить до 30 мкс при применении модулей АЦП и ЦАП в режиме прямого доступа к памяти (Direct Memory Access).

Для работы используется следующее программное обеспечение:

- MATLAB/Simulink – базовая среда разработки и моделирования;
- Control System Toolbox и Simulink Control Design – программные пакеты для работы с системами управления.
- Simulink Real-Time – пакет для взаимодействия с машинами реального времени под управлением операционных систем SimulinkRT и QNX Neutrino;
- Embedded Coder, MATLAB Coder и Simulink Coder – пакеты для генерации C/C++ кода, из которого компилируется приложение реального времени для выполнения на ЦМРВ.

### **2.3 Комплекс программ для проведения полунатурного моделирования цифровых систем управления с обратной связью**

Для проведения полунатурного моделирования цифровых систем управления с обратной связью был создан комплекс программ в виде двух Simulink-схем верхнего уровня, скриптов для валидации алгоритмов управления и модели объекта, а также скриптов для сборки, компиляции и развертывания алгоритмов на ЦМРВ.

Simulink-схема верхнего уровня для ЦМРВ «Регулятор» показана на рис. 2.5. Она содержит драйверы используемых модулей АЦП и ЦАП, установленных в ЦМРВ «Регулятор», и подсистему, реализованную через блок Model reference в которой находятся алгоритмы управления. На рис. 2.6 приведена Simulink-схема верхнего уровня для ЦМРВ «Модель объекта». Она содержит драйверы используемых модулей АЦП и ЦАП, установленных в ЦМРВ «Модель объекта», и подсистему, реализованную через блок Model reference в которой находится модель объекта.

Подсистемы для алгоритмов управления и модели объекта размещаются в двух отдельных Simulink-схемах, на схемах верхнего уровня они реализованы через блок Model reference, блоки «CONTROLLER» и «PLANT MODEL» на

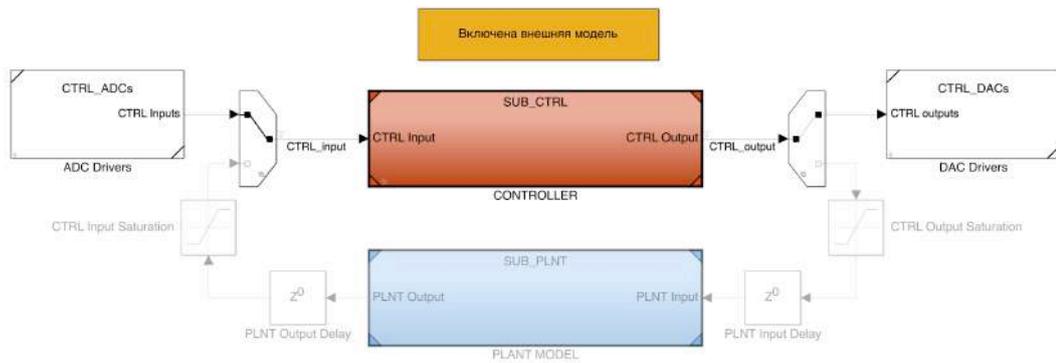


Рисунок 2.5 — Симулинк-схема верхнего уровня для ЦМРВ «Регулятор».

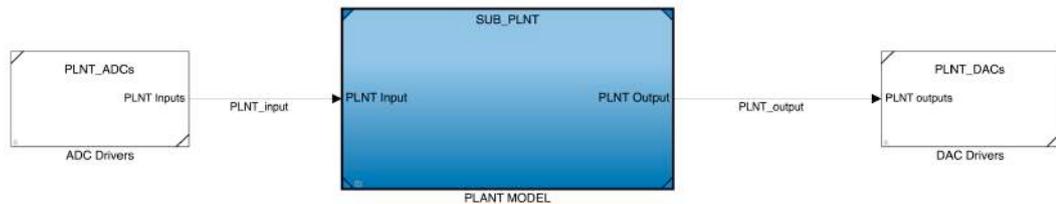


Рисунок 2.6 — Симулинк-схема верхнего уровня для ЦМРВ «Модель объекта».

рис. 2.5 и на рис. 2.6. Это позволяет изолировать настройки моделирования и Model workspace для каждой подсистемы.

ЦМРВ «Регулятор» также содержит внутреннюю модель объекта управления (рис. 2.7) для предварительного моделирования систем управления на одной ЦМРВ. При этом блок Model reference ссылается на ту же подсистему с моделью объекта, которая используется в Simulink-схеме для ЦМРВ «Модель объекта». Многомерные переключатели реализованы через блоки Variant Sink и

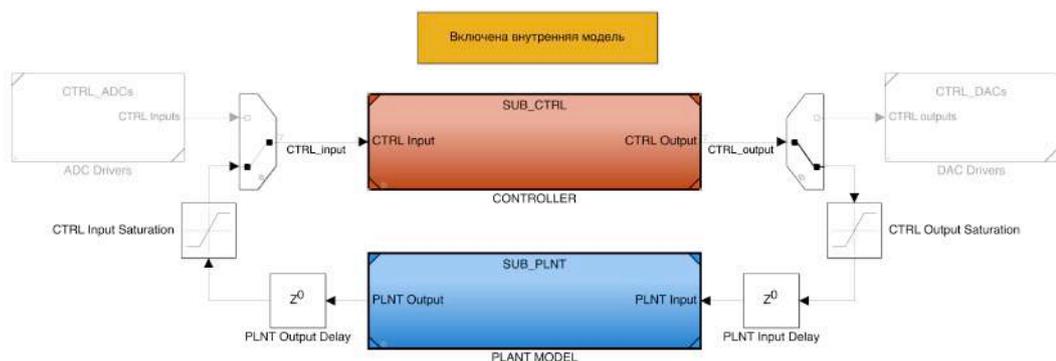


Рисунок 2.7 — Симулинк-схема верхнего уровня для ЦМРВ «Регулятор» с включенной внутренней моделью объекта.

Variant Source. Это позволяет реализовать три режима моделирования:

1. Моделирование системы на внутренней модели объекта не в реальном времени. Моделирование осуществляется в Simulink на компьютере разработчика, без использования ЦМРВ;

2. Моделирование системы на внутренней модели объекта в реальном времени. Моделирование осуществляется только на ЦМРВ «Регулятор», модули АЦП и ЦАП, установленные в ЦМРВ «Регулятор», при этом не используются;
3. Полунатурное моделирование в реальном времени в полном соответствии со схемой на рис. 2.2. При этом используется внешняя модель объекта (многомерные переключатели в верхнем положении), которая находится на ЦМРВ «Модель объекта», а обратная связь осуществляется посредством модулей АЦП и ЦАП.

Моделирование на внутренней модели объекта позволяет осуществлять быструю перестройку алгоритма управления, так как блоки «PLANT MODEL» в обоих Simulink-схемах верхнего уровня ссылаются на одну и ту же подсистему с моделью объекта. Диапазон сигналов в АЦП и ЦАП ограничен, поэтому необходимо осуществить масштабирование сигналов, поступающих на вход модулей ЦАП, и провести обратную операцию для сигналов, приходящих с модулей АЦП. Для моделирования этого ограничения на входе и выходе внутренней модели объекта расположены блоки *Saturation*. Кроме того, на входе и выходе внутренней модели объекта установлены блоки *Delay*. С помощью них моделируются возможные пропуски тактов в АЦП и ЦАП, также и различные запаздывания в контуре обратной связи.

Моделирование в реальном времени может осуществляться только использование численного решателя с фиксированным шагом, например *discrete* (no *continuous states*). Также необходимо чтобы шаги расчета всех подсистем были кратными базовому шагу расчета Simulink-схемы верхнего уровня (*fundamental sample time*).

## 2.4 Выводы по главе 2

В данной главе был описан стенд реального времени, на котором в данной работе проводится полунатурное моделирование цифровых систем управления плазмой в токамаках. Представлен комплекс программ в виде Simulink-схем верхнего уровня для ЦМРВ «Регулятор» и «Модель объекта» для проведения полунатурного моделирования цифровых систем управления с обратной связью.

### Глава 3. Полунатурное моделирование систем управления положением плазмы с инвертором напряжения

Воздействие на вертикальное положение плазмы в токамаке осуществляется посредством горизонтального полоидального магнитного поля, создаваемого током в обмотке горизонтального управляющего поля (ОГУП). Управление неустойчивым вертикальным положением плазмы является одной из ключевых задач в современных токамаках с D-образным сечением, так как вертикальное положение плазмы в таких токамаках неустойчиво [7]. Кроме того, в связи с ограниченным напряжением на ОГУП ограничена область управляемости вертикальным положением плазмы. Таким образом, системы управления вертикальным положением плазмы требуют особого внимания при проектировании, так как любые сбои в их работе могут привести к срыву плазменного разряда.

Использование инвертора напряжения для управления положением плазмы в токамаке предпочтительнее, чем тиристорного выпрямителя, по ряду причин. Инверторы напряжения обеспечивают более быстрое и точное регулирование тока в ОГУП, что особенно важно для обеспечения устойчивости вертикального положения плазмы в условиях ограниченной области управляемости. Тиристорные выпрямители, напротив, обладают меньшей динамичностью из-за инерционных процессов, связанных с переключением тиристоров и более сложным управлением фазами. Инверторы напряжения позволяют реализовать современные методы управления, такие как многоуровневая широтно-импульсная модуляция, обеспечивая более широкий спектр возможностей для управления положением плазмы и снижения уровня электромагнитных помех.

В первом разделе главы приведены результаты полунатурного моделирования систем управления вертикальным положением плазмы в D-образном токамаке, где в качестве источника питания используются инверторы напряжения в релейном автоколебательном режиме (РАК) и в режиме широтно-импульсной модуляции (ШИМ). Во втором разделе представлен комплекс программ, реализующий цифровой многоуровневый ШИМ-контроллер. В третьем разделе приведены результаты моделирования системы управления положением плазмы для проекта токамака ИГНИТОР.

Результаты этой главы изложены в следующих оригинальных работах автора:

- в части сравнительного исследования систем управления вертикальным положением плазмы с инвертором напряжения в [74; 78];
- в части описания многоуровневого ШИМ-контроллера в патенте [83];
- в части моделирования системы управления положением плазмы в проекте токамака ИГНИТОР в [79; 75].

### 3.1 Сравнительное исследование и полунатурное моделирование систем управления неустойчивым вертикальным положением плазмы в токамаке с разными типами источников питания обмотки горизонтального управляющего поля

Сравниваются два типа инверторов напряжения, используемых для управления обмоткой горизонтального управляющего поля (ОГУП) в токамаке. Первый из них – инвертор в релейном автоколебательном режиме (РАК), который представляет собой простое инженерное решение для питания ОГУП. Вторым – инвертор напряжения в режиме 9-уровневой ШИМ. Инвертор в режиме 9-уровневой ШИМ был выбран для исследования, поскольку он уже успешно применяется в токамаке EAST [55] и предложен для использования в проекте ITER [56]. Такое решение позволяет улучшить характеристики системы управления вертикальным положением плазмы. Синтезируются две системы управления, которые будут обеспечивать похожие переходные процессы по вертикальному положению плазмы. Сравнение будет проведено по таким критериям, как мощность управления и спектральные характеристики напряжения на ОГУП.

Используется упрощенная модель вертикального движения плазмы в токамаке из [57].

$$T_p \dot{Z}(t) - Z(t) = K_p (I_{HFC}(t) + w(t)), \quad (3.1)$$

где  $Z$  - вертикальное смещение плазмы,  $T_p$  и  $K_p$  - постоянная времени и коэффициент усиления,  $I_{HFC}$  - ток в ОГУП, а  $w(t)$  - внешнее аддитивное возмущение. Модель (3.1) имеет один неустойчивый полюс. Эта модель была использована для синтеза системы управления положением плазмы в токамаке Глобус-М (ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН) [58]. Передаточная функция (3.1) представляет собой

неустойчивую модель первого порядка, когда горизонтальное магнитное поле, создаваемое током в ОГУП, воздействует на вертикальное положение плазмы

$$Z(s) = G_p(s)I_{HFC}(s), \quad G_p(s) = \frac{K_p}{T_p s - 1}.$$

Параметры модели были взяты из [59]:  $K_p = 1.78$  см/кА и  $T_p = 20.8$  мс .

Чтобы лучше соответствовать реальному эксперименту, модель учитывает фазы нарастания, выхода на плато и спада тока плазмы в течение разряда, с линейным изменением параметров модели (3.1) в следующих диапазонах

$$K_p \in [1,78; 7,61] \text{ см/кА}, \quad T_p \in [20,8; 43,4] \text{ мс}.$$

Они уменьшаются во время фазы нарастания тока и увеличиваются во время фазы спада тока плазмы. Длительность обеих фаз составляет 200 мс. Во время выхода на плато параметры остаются постоянными. Общая длительность плазменного разряда при моделировании систем управления составляет 2 секунды. Возмущения и другие неопределенности, влияющие на плазму во время плазменного разряда, учитываются путем введения в модель аддитивного входного внешнего возмущения  $w(t)$ .

Модель вертикального движения плазмы в непрерывном времени представлена в виде LPV-модели в пространстве состояний

$$\dot{Z}(t) = A(t)Z(t) + B(t)I_{HFC}(t) + F(t)w(t),$$

где  $A(t) = T_p^{-1}(t)$ ,  $B(t) = F(t) = K_p(t)T_p^{-1}(t)$ .

Для синтеза дискретного регулятора проводится дискретизация модели с шагом  $T_s = 100$  мкс,

$$(k - 1)T_s \leq t \leq kT_s, k \in \mathbb{Z}.$$

Параметры модели, изменяющиеся во времени, преобразуются в массив с индексом  $n$ :

$$A_n = A(t_n), \quad B_n = F_n = B(t_n), \quad n = 1, \dots, 4001, \quad (3.2)$$

где  $t_n$  соответствует временным точкам трех фаз плазменного разряда. Исходя из выбранного значения  $T_s$ , фазы нарастания и спада соответствуют каждой из 2000 временных точек. Дискретизация модели осуществляется методом ZOH (Zero Order Hold) [60]

$$A_n^d = \exp(A_n T_s), \quad B_n^d = A_n^{-1}(A_n^d - 1)B_n.$$

Таким образом, дискретная LPV модель с внешним возмущением имеет вид разностного уравнения

$$Z(T_s k + T_s) = A_n^d Z(T_s k) + B_n^d \left( I_{HFC}(T_s k) + w(T_s k) \right). \quad (3.3)$$

Ток и напряжение на ОГУП связаны дифференциальным уравнением

$$L \dot{I}_{HFC}(t) + R I_{HFC}(t) = U_{HFC}(t),$$

где  $U_{HFC}$  - напряжение на ОГУП,  $I_{HFC}$  - ток в ОГУП,  $R$  - активное сопротивление ОГУП, а  $L$  - индуктивность ОГУП. Передаточная функция ОГУП представляет собой устойчивое динамическое звено первого порядка

$$I_{HFC}(s) = G_{HFC}(s) U_{HFC}(s), \quad G_{HFC}(s) = \frac{1}{Ls + R}.$$

Дискретная модель ОГУП также получена методом ЗОН

$$G_{HFC}(z) = \frac{R^{-1} \left( 1 - \exp(-T_s R/L) \right)}{z - \exp(-T_s R/L)}.$$

Параметры ОГУП для данного исследования взяты из [59]:  $R = 0,09$  Ом и  $L = 4,2$  мГн.

В данном исследовании оба инвертора напряжения реализованы на H-мостах. Структура H-моста показана на рис. 3.1, и включает в себя собственный источник питания постоянного тока, четыре БТИЗ-транзистора и четыре диода. Сигналы  $v_{1-4}$  являются низковольтными управляющими сигналами на затворах БТИЗ-транзисторов. Выходное напряжение H-моста  $U_H$  зависит от них следующим образом:

$$v_1 = 1, v_2 = 0, v_3 = 0, v_4 = 1 \Rightarrow U_H > 0,$$

$$v_1 = 0, v_2 = 1, v_3 = 1, v_4 = 0 \Rightarrow U_H = 0,$$

$$v_1 = 1, v_2 = 1, v_3 = 0, v_4 = 0 \Rightarrow U_H < 0.$$

Набор H-мостов инвертора напряжения соединен последовательно, его выходное напряжение определяется как  $U_{max} = \sum U_H$ .

Структурная схема инвертора напряжения в релейном автоколебательном режиме показана на рис. 3.2, она содержит один H-мост с контроллером, модель которого представлена в виде реле с временным запаздыванием  $\tau_r$

$$U_{HFC} = U_{max} \operatorname{sign} \left( u(t - \tau_r) \right),$$

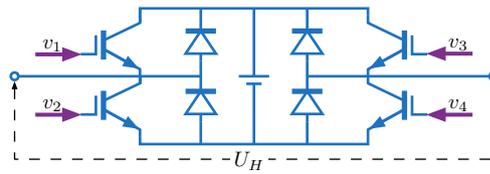


Рисунок 3.1 — Схема H-моста.

где  $\tau_r = 1$  мс – величина временного запаздывания, а  $U_{max} = 1$  кВ – напряжение на выходе. Частота установившихся автоколебаний напряжения на ОГУП в замкнутой системе управления при этих параметрах составляет 249 Гц.



Рисунок 3.2 — Структурная схема инвертора напряжения в релейном автоколебательном режиме.

Структурная схема инвертора напряжения в режиме 9-уровневой ШИМ показана на рис. 3.3, он содержит цифровой многоуровневый ШИМ-контроллер, который управляет четырьмя H-мостами, соединенными последовательно.

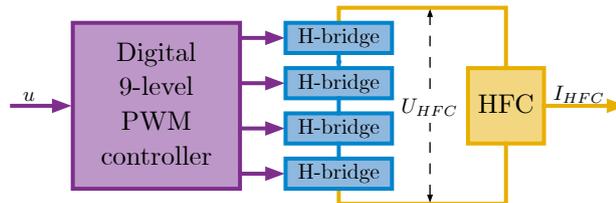


Рисунок 3.3 — Структурная схема инвертора напряжения в режиме 9-уровневой ШИМ на четырех последовательно соединенных H-мостах.

Для сравнения систем управления вертикальным положением плазмы использовался инвертор напряжения в режиме 9-уровневой ШИМ со следующими параметрами: количество уровней ШИМ  $N_L = 9$ , период ШИМ  $T_{PWM} = 4$  мс, и  $U_{max} = 1$  кВ. При этих параметрах частота колебаний напряжения на ОГУП составляет 250 Гц, что соответствует установившейся частоте, когда инвертор напряжения находится в релейном автоколебательном режиме.

Блок-схема системы управления вертикальным положением плазмы показана на рис. 3.4. Она включает в себя LPV модель объекта, модели ОГУП (HFC) и источника питания, а также регулятор вертикального положения плазмы  $C_Z$ . В данном исследовании используется однокаскадная система управления, в которой отсутствует каскад управления током в ОГУП ( $I_{HFC}$ ). Для целей сравнения систем

управления с различными источниками питания наличие каскада управления током в ОГУП не обязательно, но при необходимости он может быть добавлен.

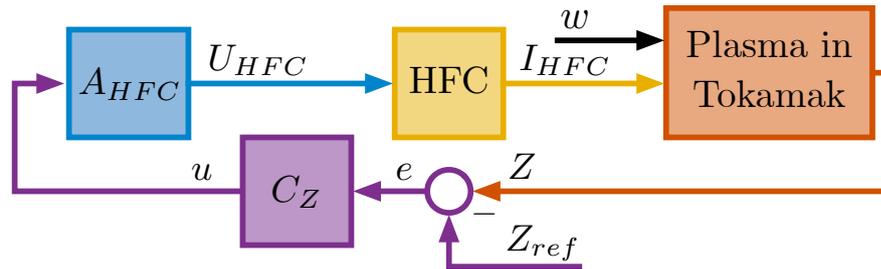


Рисунок 3.4 — Структурная схема однокаскадной системы управления вертикальным положением плазмы.

Обычным способом получения дискретной линейной модели инвертора напряжения в режиме ШИМ для синтеза регулятора является использование дискретной передаточной функции  $A_{HFC}^*(z) = U_{max}z^{-n_s}$ , где  $n_s$  – количество тактов запаздывания, задаваемое источником питания, например, для инвертора напряжения в режиме ШИМ  $n_s = T_{PWM}/T_s$ .

В данном исследовании используется подход идентификации ARX-модели через LMI [61; 62]. ОГУП является низкочастотным фильтром, который значительно сглаживает колебания на выходе источника питания, поэтому объектом идентификации целесообразно выбрать последовательное соединение ОГУП и источника питания. Идентификация проводилась на серии низкочастотных тестовых сигналов, когда на вход каждого источника питания подавались синусоидальные сигналы с частотами от 1 до 100 Гц. На рис. 3.5 показаны токи ОГУП, когда на вход обоих источников питания подается синусоидальная волна частотой 10 Гц. Видно, что токи в ОГУП отличаются незначительно, поэтому для обоих источников питания может быть получена единая линейная модель. В результате была получена дискретная линейная модель 10-го порядка, которая с высокой точностью аппроксимирует ОГУП с обоими источниками питания

$$\begin{aligned}
 G_{HFC}(z)A_{HFC}(z) = & \frac{2,652z^9 - 12,43z^8}{z^{10} - 3,618z^9 + 6,266z^8} \cdots \\
 & + \frac{29,66z^7 - 50,71z^6 + 71,03z^5 - 85,81z^4}{-7,711z^7 + 7,985z^6 - 7,264z^5 + 5,839z^4} \cdots \\
 & + \frac{90,66z^3 - 82,29z^2 + 59,01z - 21,17}{-4,069z^3 + 2,329z^2 - 0,9537z + 0,1979} \cdots
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

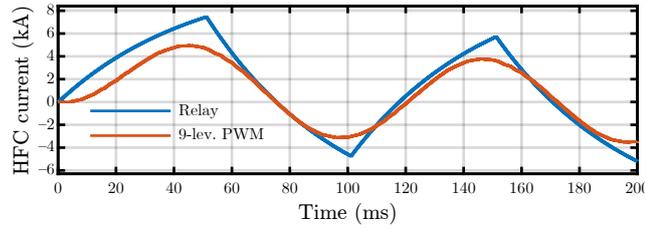


Рисунок 3.5 — Токи в ОГУП при подаче синусоидального сигнала частотой 10 Гц на входы двух инверторов напряжения.

В системе управления применен дискретный ПИД-регулятор с дискретной передаточной функцией

$$C_Z(z) = K_P + \frac{T_s}{z-1}K_I + \frac{z-1}{\tau(z-1) + T_s}K_D, \quad (3.5)$$

где  $K_P, K_I, K_D \in \mathbb{R}^1$  – параметры регулятора.

Регулятор настроен методом, описанным в Главе 1 на массиве моделей объекта  $P_n(z)$ , который включает модель вертикального движения плазмы (3.3) и идентифицированную модель последовательного соединения источника питания и ОГУП (3.4)

$$P_n(z) = (z - A_n^d)^{-1} B_n^d G_{HFC}(z) A_{HFC}(z), \quad (3.6)$$

где  $n$  – индекс из (3.2). Со следующими ограничениями на  $\mathcal{H}_\infty$ -нормы передаточных функций замкнутой системы:  $S_{\max} = 1,2$ ,  $T_{\max} = 1,2$ ,  $Q_{\max} = 10$ ,  $W_{\max} = 0,5$ , получены параметры:  $K_P = 62,96$ ,  $K_I = 691,73$ ,  $K_D = 1,39$ .

Полунатурное моделирование проводилось на стенде реального времени (Раздел 2.2). На рис. 3.6 показана схема расположения блоков системы управления при полунатурном моделировании. Сигналы на выходе многоуровневого ШИМ-контроллера поступают на вход модуля цифровых каналов (D I/O). Результаты полунатурного моделирования систем управления положением вертикальной плазмы с инвертором напряжения в режиме 9-уровневой ШИМ и с инвертором напряжения в релейном автоколебательном режиме показаны на рис. 3.7 и рис. 3.8. Несколько импульсов инвертора напряжения в релейном автоколебательном режиме показаны на рис. 3.10. Был смоделирован плазменный разряд длительностью 2 секунды: в течение первой секунды вертикальное положение плазмы смещалось на 5 см вверх, а в течение следующей секунды удерживалось на нулевом уровне. Система управления обеспечивает слежение за задающим воздействием  $Z_{ref}$ , эффективно подавляет внешнее возмущение  $w$  и обеспечивает

устойчивость замкнутой системы управления при изменении параметров  $A^d(T_{sk})$  и  $B^d(T_{sk})$  (3.3) во времени.

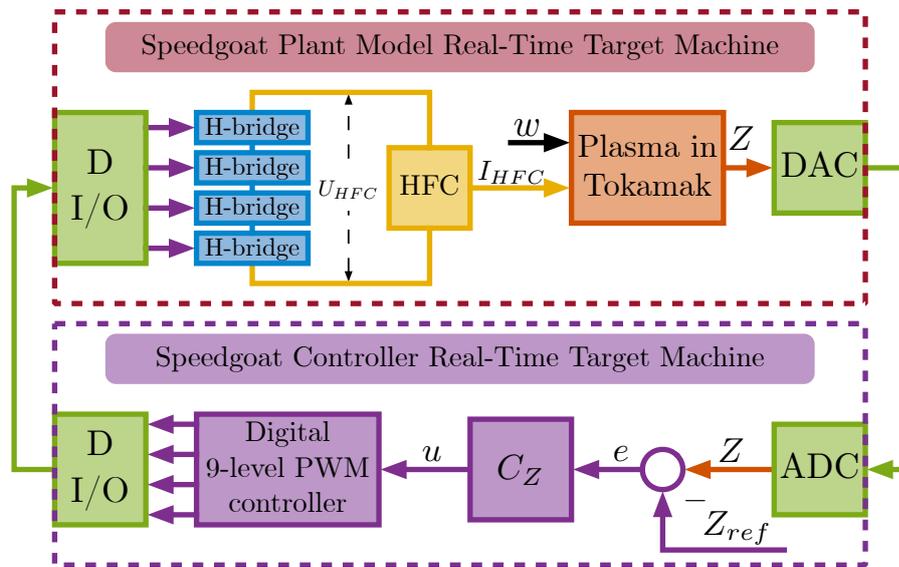


Рисунок 3.6 — Структурная схема системы управления с инвертором напряжения в режиме 9-уровневой ШИМ при проведении полунатурного моделирования.

Переходные процессы по вертикальному положению плазмы  $Z$  практически одинаковы для обоих источников питания, но напряжения и электрические мощности на ОГУП отличаются. В таблице 1 приведены четыре интеграла для обоих источников питания: интеграл мощности (энергии), интеграл модуля мощности, интеграл активной (положительной) мощности и интеграл отрицательной мощности. Соотношение этих интегралов показано под таблицей. инвертор напряжения в релейном автоколебательном режиме требует в 2,73 больше активной мощности, кроме того, ему требуется в 27,75 больше энергии, которую необходимо вернуть в источник питания или рассеять. Наличие большой отрицательной мощности может стать серьезной проблемой при проектировании источников питания.

Таблица 1 — Интегралы электрической мощности

Инвертор	$\int P_{HFC}(t)dt,$ МДЖ	$\int  P_{HFC}(t) dt,$ МДЖ	$\int P_{HFC}^+(t)dt,$ МДЖ	$\int P_{HFC}^-(t)dt,$ МДЖ
9ШИМ	0,58	0,66	0,62	-0,04
РАК	0,58	2,8	1,69	-1,11
РАК/9ШИМ	1	4,24	2,73	27,75



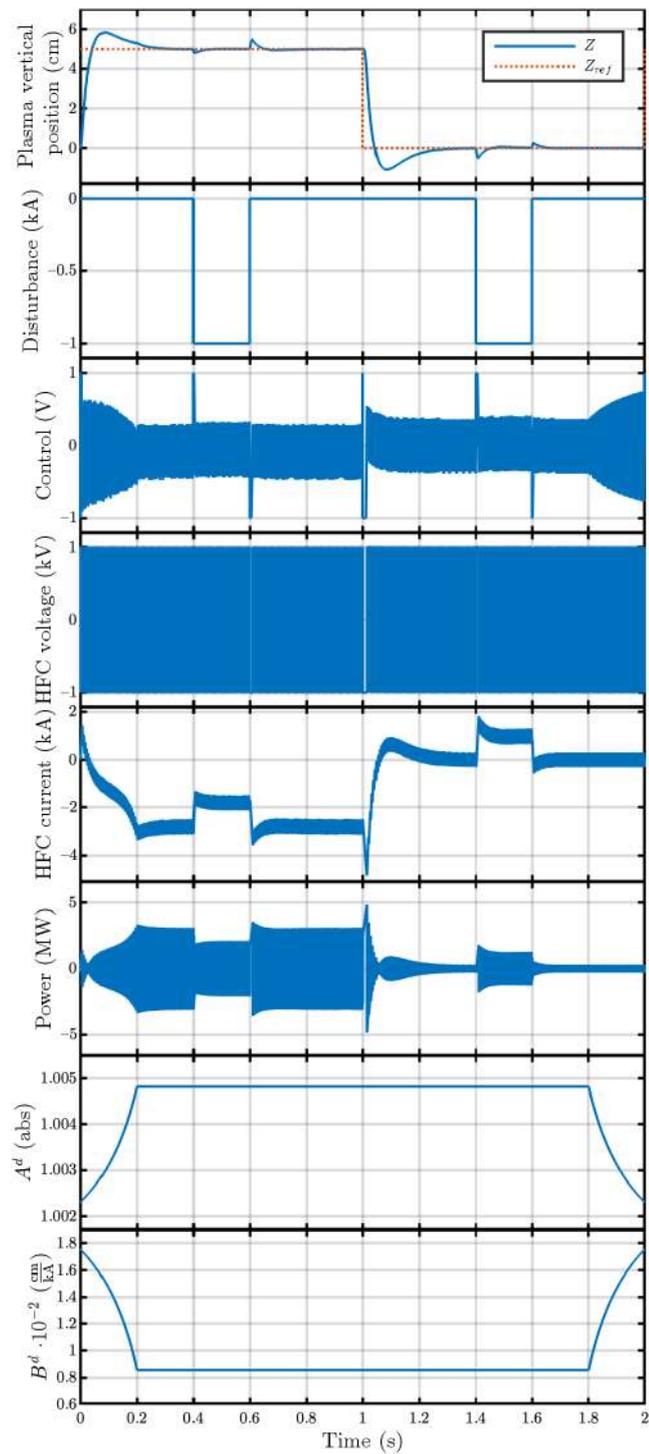


Рисунок 3.8 — Результаты полунатурного моделирования системы управления положением плазмы с инвертором напряжения в релейном автоколебательном режиме.

На рис. 3.9 показаны спектральные мощности напряжений на ОГУП для обоих источников питания и их соотношение. Спектр мощности  $P_s(f)$  был полу-

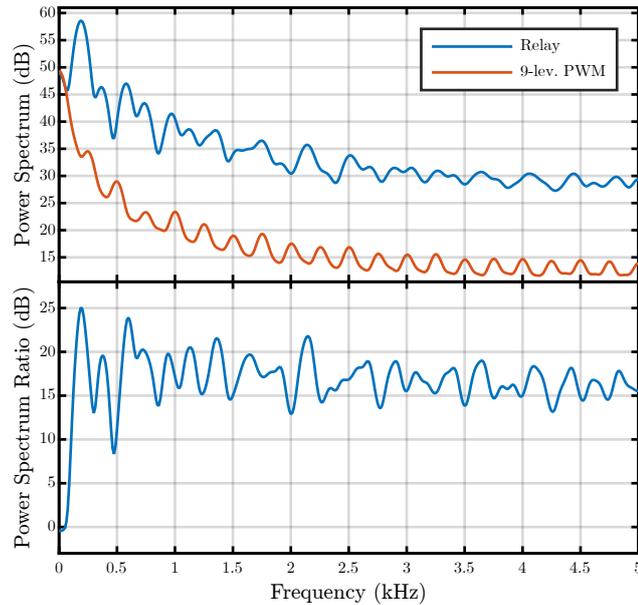


Рисунок 3.9 — Спектр напряжений на ОГУП для обоих источников питания и их отношение.

чен с помощью одностороннего дискретного преобразования Фурье с частотным разрешением 100 Гц и нулевой утечкой ( $\beta = 40$ )

$$P_s(f) = 10 \lg \left( \frac{T_s}{NM} \sum_{m=1}^M \left| \sum_{n=0}^{N/2+1} x_n w(n-m) e^{-j2\pi fn} \right|^2 \right),$$

см. [63], с окном Кайзера

$$w(n) = I_0 \left( \beta \sqrt{1 - (2n/N - 1)^2} \right) I_0^{-1}(\beta),$$

где  $I_0$  - модифицированная функция Бесселя нулевого порядка первого рода, а  $N$  – количество выборок.

Спектры мощности отличаются в среднем на 17 дБ, то есть в 50 раз. Исходя из этого, можно предположить, что использование инвертор напряжения в релейном автоколебательном режиме даст в 50 раз больше шумов и помех в системе магнитной диагностики токамака по сравнению с инвертор напряжения в режиме 9-уровневой ШИМ.

Инвертор напряжения в режиме 9-уровневой ШИМ дает постоянную частоту напряжения на ОГУП, это видно на рис. 3.9, где пики расположены через

каждые 250 Гц. Частота автоколебаний напряжения на ОГУП с инвертором напряжения в РАК режиме зависит от параметров объекта управления, задающего воздействия и входного возмущения. На рис. 3.9 показано, что частота изменяется в диапазоне примерно от 100 до 400 Гц. Быстрое изменение частоты напряжения на ОГУП показано на рис. 3.10, когда вертикальное смещение плазмы изменяется от 5 см до нуля. Плавающая частота является серьезным недостатком инвертора напряжения в релейном автоколебательном режиме, она может привести к срыву плазмы и затруднить фильтрацию помех.

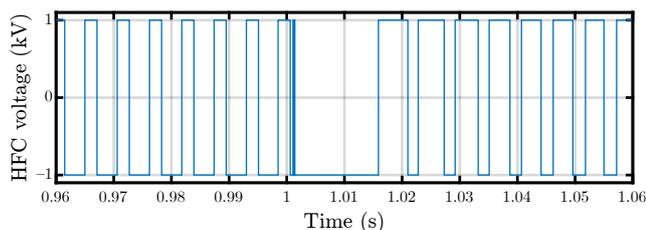


Рисунок 3.10 — Напряжение на ОГУП с рис. 3.8 на временном интервале от 0,96 до 1,06 сек.

### 3.2 Комплекс программ для реализации цифрового многоуровневого ШИМ-контроллера

Цифровой многоуровневый ШИМ контроллер управляет Н-мостами инвертора напряжения (рис. 3.1), при этом количество Н-мостов не ограничивается. Сигнал  $u$  на входе контроллера модулируется как по ширине импульса, так и по уровню. Коэффициент заполнения  $D$ , выраженный в количестве шагов расчета, определяется как

$$D = \frac{u - r_*}{\Delta} N_s, \Delta = \frac{2}{N_L - 1}, N_s = \frac{T_{PWM}}{T_s}, D = 1, \dots, N_s,$$

где  $T_s$  - время выборки,  $T_{PWM}$  - период ШИМ,  $\Delta$  - размер диапазона уровня выходного сигнала,  $N_s$  - количество выборок в одном периоде ШИМ, а  $N_L$  - количество уровней ШИМ.

Многоуровневый ШИМ контроллер реализован в Simulink как Reference subsystem. Функция инициализации Reference subsystem приведена в листинге 3.1. Алгоритм расчета импульсов на открытие БТИЗ-транзисторов, напряжения и среднего за период ШИМ напряжения реализован в виде Matlab function и

приведен в листинге 3.2. Используя пакет Simulink Coder можно генерировать C/C++ код для последующей компиляции контроллера в виде приложения реального времени. Программный пакет HDL Coder позволяет сгенерировать прошивку для ПЛИС. Цифровой многоуровневый ШИМ контроллер был протестирован на операционных системах реального времени SimulinkRT, QNX Neutrino и RTLinux.

Листинг 3.1: Инициализация цифрового многоуровневого ШИМ-контроллера

```
function initialization()
    sampInPeriod = floor(Tpwm/Ts); % number of steps per period
    sampInPeriod_int = uint16(sampInPeriod);
    if mod(PWM_levels,2)
5       N_Hb = int16((PWM_levels-1)/2); % number of H-bridges
    else
        error('The number of levels must be odd')
    end
    borders = linspace(0,1,N_Hb+1);
10   intervals = zeros(2,N_Hb);
    for i = 1:N_Hb
        intervals(1:2,i) = [borders(i); borders(i+1)];
    end
    delta = intervals(2,1)-intervals(1,1);
15   Hb_open = [true; false ; false ; true ]; % H-bridge is open
    Hb_close = [true; true ; false ; false ]; % H-bridge is closed
    v_ = repmat(Hb_close,1,N_Hb);
    end
```

Листинг 3.2: Алгоритм работы цифрового многоуровневого ШИМ-контроллера

```
% Digital Multilevel PWM controller v 3.0
% Konkov Artem konkov@physics.msu.ru
function [U_PWM, U_mean, v] = mPWM(u, sampInPeriod,
    sampInPeriod_int, Umax, intervals, delta, Hb_open, v_)
persistent i N_D range U_mean_ ind_N sign_u_flag
5 if isempty(i)
    i = uint16(0);
    N_D = uint16(0);
```

```

    range = [0 0];
    U_mean_ = 0;
10    ind_N = [];
    sign_u_flag = true;
end
i = i + 1;
if i == 1 % beginning of period
15    if u >= 0
        sign_u = 1;
        sign_u_flag = true;
    else
        sign_u = -1;
20    sign_u_flag = false;
    end
    abs_u = abs(u);
    ind_N = find(abs_u >= intervals(1,:) & abs_u <= intervals
        (2,:),1); % interval detection
    if isempty(ind_N)
25        range(1:2) = [0 0]; U_mean_ = 0; N_D = uint16(0);
    else
        range(1:2) = intervals(1:2 ,ind_N)*sign_u*Umax;
        duty = (abs_u - intervals(1, ind_N))/delta;
        N_D = uint16(duty*sampInPeriod); % rounding of duration
30        U_mean_ = double(N_D)/sampInPeriod*(range(2)-range(1))+
            range(1);
    end
end
U_mean = U_mean_(1);
j = 1;
35 while j < ind_N % opening of all bridges except the last one
    if sign_u_flag
        v_(1:4,j) = Hb_open;
    else
        v_(1:4,j) = ~Hb_open;
40    end
end

```

```

        j = j + 1;
end
if i <= N_D % in process
    U_PWM = range(2);
45     if sign_u_flag
        v_(1:4,j) = Hb_open;
    else
        v_(1:4,j) = ~Hb_open;
    end
50 else
    U_PWM = range(1);
end
v = v_;
if i == sampInPeriod_int % reset at the beginning of the new
    period
55     i = uint16(0);
end
end

```

На рис. 3.11 приведены результаты моделирования цифрового многоуровневого ШИМ-контроллера при управлении моделью инвертора напряжения с четырьмя последовательно соединенными H-мостами (рис. 3.3), которые дают 9 уровней ШИМ. Модели H-мостов реализованы в Simscape Electrical, на рис. 3.13 приведена схема одного H-моста. На вход ШИМ-контроллера подавалась дискретная синусоида с периодом 100 мс. На рис. 3.12 показаны 10 ШИМ-импульсов.

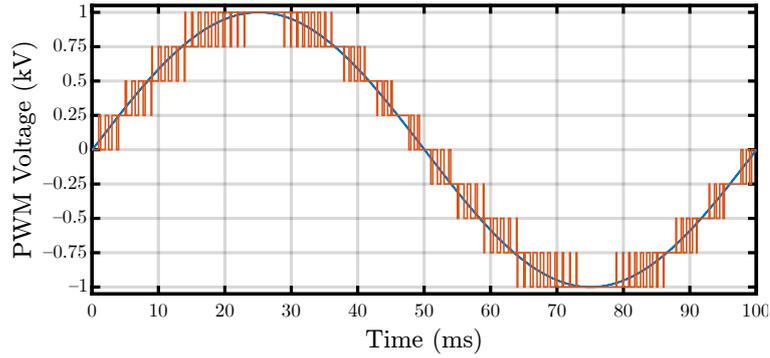


Рисунок 3.11 — Полунатурное моделирование инвертора напряжения в режиме 9-ти уровневой ШИМ. Синим цветом показан сигнал на входе ШИМ-контроллера умноженный на 1000. Красный сигнал – напряжение на выходе инвертора напряжения.  $T_s = 100$  мкс,  $T_{PWM} = 1$  мс, а  $U_{max} = 1$  кВ.

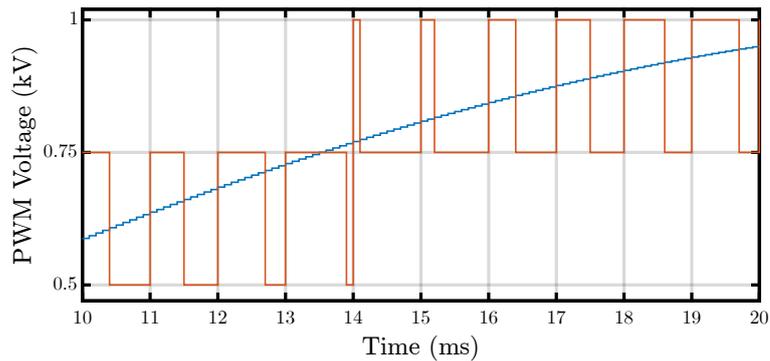


Рисунок 3.12 — Десять ШИМ импульсов изображенных на рис. 3.11.

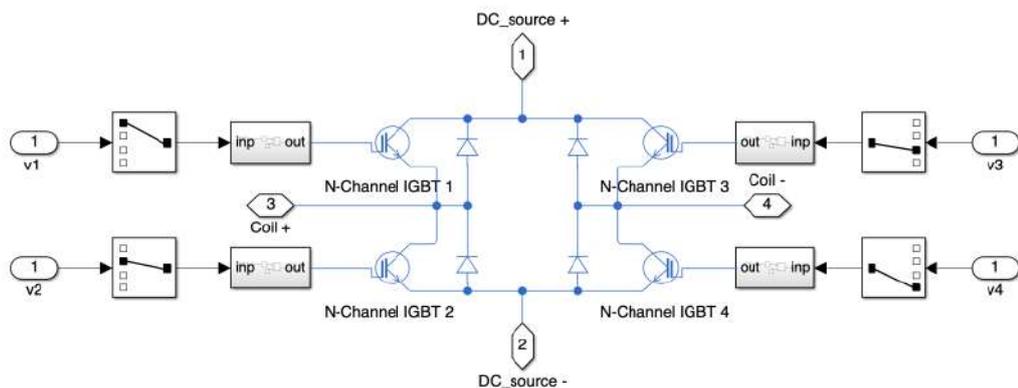


Рисунок 3.13 — Модель одного H-моста в Simscape Electrical.

### 3.3 Моделирование системы управления положением плазмы в токамаке ИГНИТОР

Проект токамака ИГНИТОР [64] характеризуется большим тороидальным магнитным полем ( $B_T = 13$  Т), большим током плазмы ( $I_p = 11$  МА), компактными размерами ( $R_0 = 1.32$  м), относительно низким аспектным отношением ( $A = 2.8$ ), значительной вытянутостью и треугольностью полоидального сечения плазмы ( $\kappa = 1.83$ ,  $\delta = 0.4$ ). В [79; 75] для проекта токамака ИГНИТОР была проведена оптимизация системы полоидальных обмоток и были получены модели вертикального и горизонтального движения плазмы.

Структурная схема системы управления положением плазмы в токамаке ИГНИТОР представлена на рис. 3.14, а на рис. 3.15 – система оптимизированная система обмоток полоидального поля проекта токамака ИГНИТОР. Для воздействия на вертикальное положение плазмы используется двухсекционная обмотка ОГУП (HFCSU и HFCL), в которой секции соединены последовательно встречно и токи в секциях текут в разных направлениях. Воздействие на горизонтальное положение плазмы осуществляется посредством двухсекционной обмотки ОВУП (VFCSU и VFCL), при этом токи в секциях текут в одном направлении.

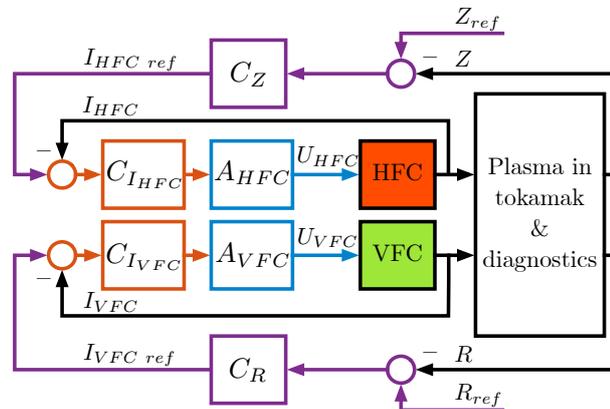


Рисунок 3.14 — Блок-схема децентрализованной каскадной системы управления положением плазмы в токамаке ИГНИТОР: ОГУП и ОВУП показаны тем же цветом, что и на рис. 3.15, красным и зеленым.  $A_{HFC}$  и  $A_{VFC}$  – инверторы напряжения в режиме ШИМ для ОГУП и ОВУП. Внутренние каскады содержат регуляторы тока  $C_{I_{HFC}}$  и  $C_{I_{VFC}}$ , которые выделены красным цветом. Внешние каскады показаны фиолетовым цветом и содержат регуляторы положения плазмы  $C_Z$  и  $C_R$ .

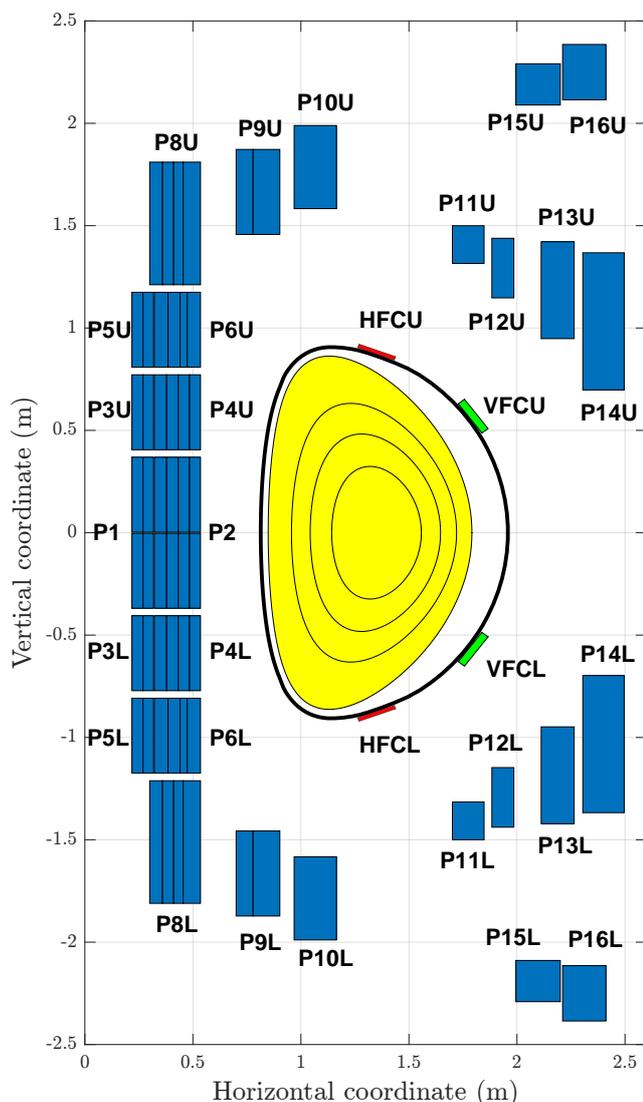


Рисунок 3.15 — Оптимизированная система обмоток полоидального поля проекта токамака ИГНИТОР

Система управления двухкаскадная. Внутренний каскад содержит ПИ-регуляторы тока в обмотках ОГУП и ОВУП, внешний каскад – ПИД-регуляторы управления вертикальным и горизонтальным положением плазмы.

Все регуляторы в системе были синтезированы с использованием комплекса программ, описанным в Главе 1, в постановке из [28], когда синтезируется регулятор на модели объекта управления в непрерывном времени.

Результаты моделирования синтезированной системы представлены на рис. 3.16. Задающие воздействие на вертикальное и горизонтальное положение плазмы были выбраны аналогичными тем, которые использовались для управления положением плазмы на токамаке EAST в [65]. Система управления смещает вертикальное положение плазмы вверх на 5 см и вниз на 3 см, горизонтальное положение смещается на 5 см вправо и влево. Система управления обеспечива-

ет слежение за положением плазмы. Для смещения вертикального положения плазмы на 5 см требуется приложить на ОГУП примерно 2,5 МВт мощности.

Преимущества синтезированной системы управления с новой ОГУП, питаемой от инвертора напряжения в режиме ШИМ, видны в сравнении с системой управления, где для управления вертикальным положением используются обмотка PF6&12 [79; 66]. Смещение плазмы по вертикали примерно на 7 мм с использованием обмотки PF6&12 требует приложения чрезмерно большой мощности в 10 МВт.

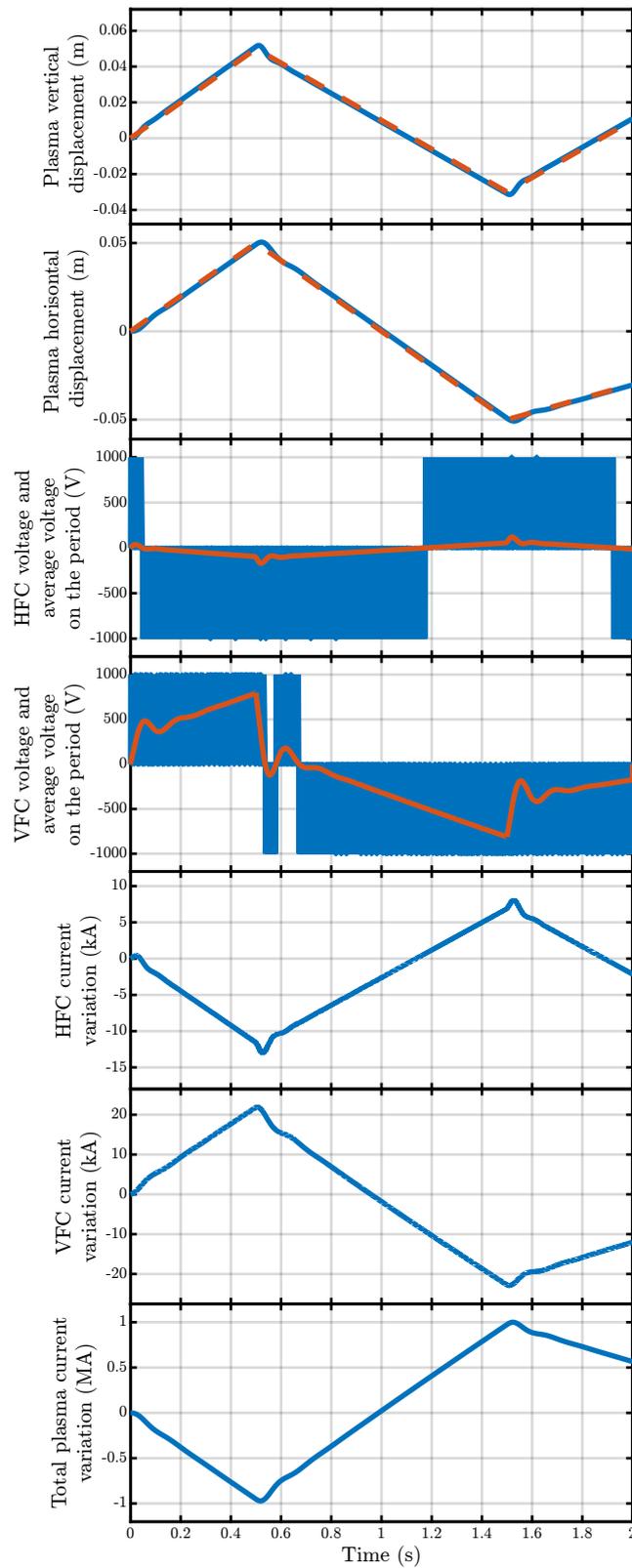


Рисунок 3.16 — Результаты моделирования системы управления положением плазмы в токамаке ИГНИТОР, напряжения на ОГУП и ОВУП и их средние за период ШИМ, которые показаны красными линиями, смещения токов в ОГУП и ОВУП и отклонение тока плазмы. Красные пунктирные линии являются задающими воздействиями.

### 3.4 Выводы по главе 3

В данной главе рассматривались системы управления положением плазмы в токамаке. В качестве источника питания ОГУП использовался инвертор напряжения. Проведенное полунатурное моделирование систем управления положением плазмы с инверторами напряжения разных типов показало преимущества применения инвертора напряжения в режиме ШИМ. Представлен комплекс программ для реализации многоуровневого ШИМ-контроллера. Проведено моделирование системы управления положением плазмы для проекта токамака ИГНИТОР, которое показало работоспособность разработанной системы управления.

## Глава 4. Моделирование систем управления формой плазмы в токамаке Глобус-М2

Это глава посвящена моделированию систем магнитного управления плазмой в токамаке Глобус-М2. Желаемые конфигурации плазмы в токамаке в течение разряда обеспечивает полоидальное магнитное поле сложной конфигурации, создаваемое токами в системе обмоток полоидального поля. Таким образом осуществляется управление положением магнитной оси плазмы, током и формой плазмы. Поэтому системы управления токами в обмотках полоидального поля, положением, током и формой плазмы, принято называть системами магнитного управления плазмой [14].

Результаты настоящей главы изложены в следующих оригинальных работах автора:

- в части полунатурного моделирования системы магнитного управления плазмой с алгоритмом восстановления равновесия плазмы в обратной связи в [80];
- в части комплекса программ для визуализации восстановленного равновесия плазмы в токамаке в [81];
- в части численного метода идентификации алгоритма восстановления равновесия с помощью наблюдателя состояния в [76], а также в патенте [84];
- в части моделирования системы управления формой плазмы с внутренним каскадом управления по потокам на магнитных петлях в [77].

### 4.1 Полунатурное моделирование системы магнитного управления плазмой с алгоритмом восстановления равновесия плазмы в обратной связи

Система обмоток полоидального поля сферического токамака Глобус-М2 [67] изображена на рис. 4.1 и состоит из 6 ОПП (Обмоток Полоидального Поля):

- 4-х секционная обмотка ОГУП (Обмотка Горизонтального Управляющего Поля), используемая для управления вертикальным положением плазмы,
- 2-х секционная ОВУП (Обмотка Вертикального Управляющего Поля), используемая для управления горизонтальным положением плазмы,
- ОИ (Обмотка Индуктора), используемая для генерации тока плазмы,
- 6-ти секционная ОК (Обмотка Коррекции), компенсирующая рассеянное полоидальное поле соленоида,
- 2-х секционные ОУ1 и ОУ3, которые предполагается использовать для управления формой плазмы.

Также имеется 2-х секционная обмотка ОУ2, которая в настоящее время не используется. Секции обмоток соединены последовательно согласно, за исключением ОГУП, верхние и нижние секции которой соединены последовательно встречно. Магнитная диагностика токамака Глобус-М2 включает пояса Роговского, измеряющие токи в шести ОПП ( $I_{PF}$ ) и ток плазмы ( $I_P$ ), а также 21 магнитную петлю, измеряющие магнитный полоидальный поток ( $\Psi_{ML}$ ) вблизи камеры токамака. На данный момент в токамаке Глобус-М2 применяется аналоговая система управления положением и током плазмы и токами в обмотках, относящаяся к типу RZIP систем управления (Система управления положением и током плазмы) [14].

Восстановленные распределения плотности тока плазмы  $J_P$  использовались для расчета массива линейных моделей  $\{A, B, C\}_k$ , описывающих динамику плазмы в разряде [80]. Здесь индекс  $k$  обозначает момент времени  $t_k = T_s k$ , для которого рассчитана модель. Массив линейных моделей образует LPV-модель:

$$\begin{cases} x(T_s k + T_s) = A(T_s k) x(T_s k) + B(T_s k) u(T_s k), \\ y(T_s k) = C(T_s k) x(T_s k), \end{cases} \quad (4.1)$$

$$A(T_s k) = A_k, B(T_s k) = B_k, C(T_s k) = C_k.$$

Вектор входов  $u$  состоит из отклонений напряжений на обмотках  $u = \delta U_{PF}$ . Вектор выходов  $y$  включает в себя вертикальное и горизонтальное смещения плазмы, тока плазмы, отклонения токов в шести обмотках полоидального поля и величин полоидального магнитного потока на 21-й магнитной петле

$$y = [\delta Z \ \delta R \ \delta I_P \ \delta I_{PF}^T \ \delta \Psi_{ML}^T]^T,$$

$$\delta I_{PF} = [\delta I_{HFC} \ \delta I_{VFC} \ \delta I_{CS} \ \delta I_{CC} \ \delta I_{PF_1} \ \delta I_{PF_3}]^T.$$

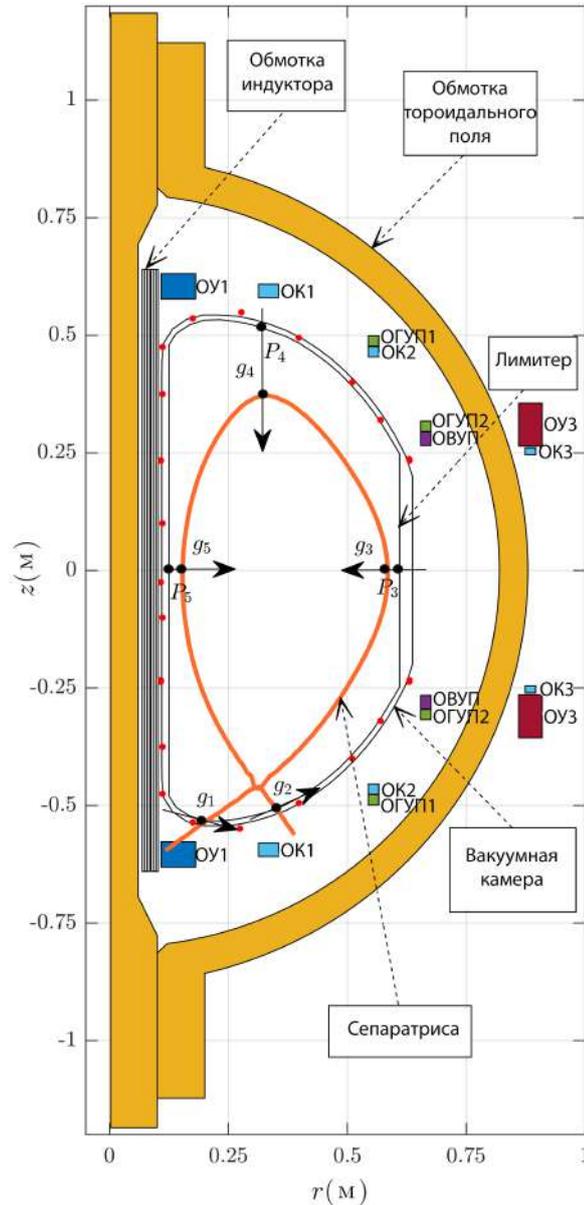


Рисунок 4.1 — Полоидальное сечение токамака Глобус-М2 с восстановленной алгоритмом FCDI-FF сепаратрисой плазмы, положениями ударных точек  $g_{1-2}$  и зазорами между сепаратрисой и лимитером  $g_{3-5}$ . Красные точки - положения магнитных петель.

$x$  – вектор состояния. Шаг дискретизации модели  $T_s = 100$  мкс. Всего LPV модель имеет 30 выходов, 6 входов и 24 состояния.

На Рис. 4.2 показана блок-схема иерархической каскадной системы магнитного управления плазмой в токамаке Глобус-М2. Внешний каскад управления содержит многомерный матричный ПИД-регулятор  $C_{g\&I_P}$  для управления током и формой плазмы. Выходами этого каскада являются задающие воздействия на вертикальное  $\delta Z_{ref}$  и горизонтальное  $\delta R_{ref}$  положения плазмы, что обеспечивает



Рисунок 4.2 — Структурная схема системы магнитного управления плазмой для токамака Глобус-М2.

согласованное управление положением и формой плазмы. Также на выходе этого каскада находится вектор задающих воздействий на отклонения токов в обмотках

$$\delta \tilde{I}_{PF_{ref}} = [\delta I_{CS_{ref}} \quad \delta I_{PF_{1ref}} \quad \delta I_{PF_{3ref}}]^T.$$

Вектор

$$[I_{P_{sc}} \quad I_{PF_{sc}}^T \quad \Psi_{ML_{sc}}^T]^T$$

содержит сценарные значения тока плазмы, токов в 6 обмотках и потоков на 21 магнитной петле.  $g_{sc}$  - сценарные значения двух точек ударных точек и 3 зазоров между границей плазмы и лимитером (см. Рис. 4.1), выбранные для управления из 24 зазоров, рассчитываемых алгоритмом FCDI-FF. В обратной связи внешнего каскада находится алгоритм восстановления равновесия FCDI, способный рассчитывать зазоры и некоторые другие параметры плазмы в реальном времени [80;

81]. Внутренний каскад управления содержит два одномерных ПИД-регулятора  $C_Z$  и  $C_R$  для управления положением плазмы и один многомерный матричный ПИД-регулятор  $C_{PF}$  для управления токами в обмотках.

На Рис. 4.3 показана блок-схема внутреннего каскада управления с источниками питания обмоток. Обмотка коррекции (ОК) должна компенсировать

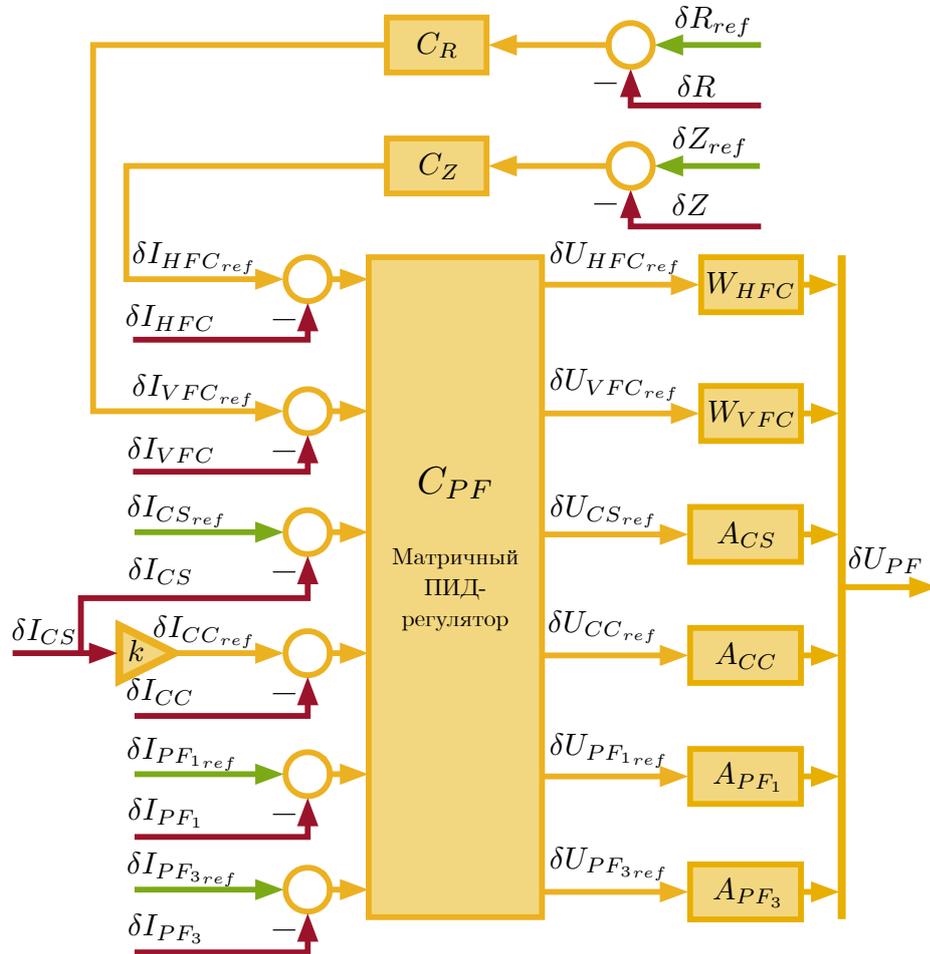


Рисунок 4.3 — Структурная схема внутреннего каскада управления положением плазмы и токами в обмотках полоидального поля с источниками питания.

рассеянное полоидальное поле, создаваемое обмоткой индуктора (ОИ). Синтезированная система управления обеспечивает пропорциональность токов в ОИ и ОК, т. е.  $I_{CC} \approx k \cdot I_{CS}$ , где коэффициент  $k$  зависит от сценария. Исполнительными устройствами являются источники питания обмоток. Блоки  $W_{HFC}$  и  $W_{VFC}$  на Рис. 4.3 обозначают линейные модели автоколебательных инверторов тока, а блоки  $A_{CS}$ ,  $A_{CC}$ ,  $A_{PF1}$  и  $A_{PF3}$  обозначают линейные модели тиристорных выпрямителей.

Все регуляторы в системе были синтезированы методом описанным в Главе 1. Сначала синтезируется регулятор  $C_{PF}(z) \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$ , затем регуляторы  $C_Z(z) \in$

$\mathbb{C}^{1 \times 1}$  и  $C_R(z) \in \mathbb{C}^{1 \times 1}$ , и наконец регулятор  $C_{g \& I_P}(z) \in \mathbb{C}^{6 \times 5}$ . Каждый регулятор синтезируется на LPV модели плазмы (4.1). В результате получается один набор регуляторов, который обеспечивает достаточный запас устойчивости и требуемое качество управления для каждой модели из массива  $\{A, B, C\}_k$ .

Моделирование проводилось на стенде реального времени (Раздел 2.2). На Рис. 4.4 показана блок-схема при проведении полунатурного моделирования системы управления в реальном времени.

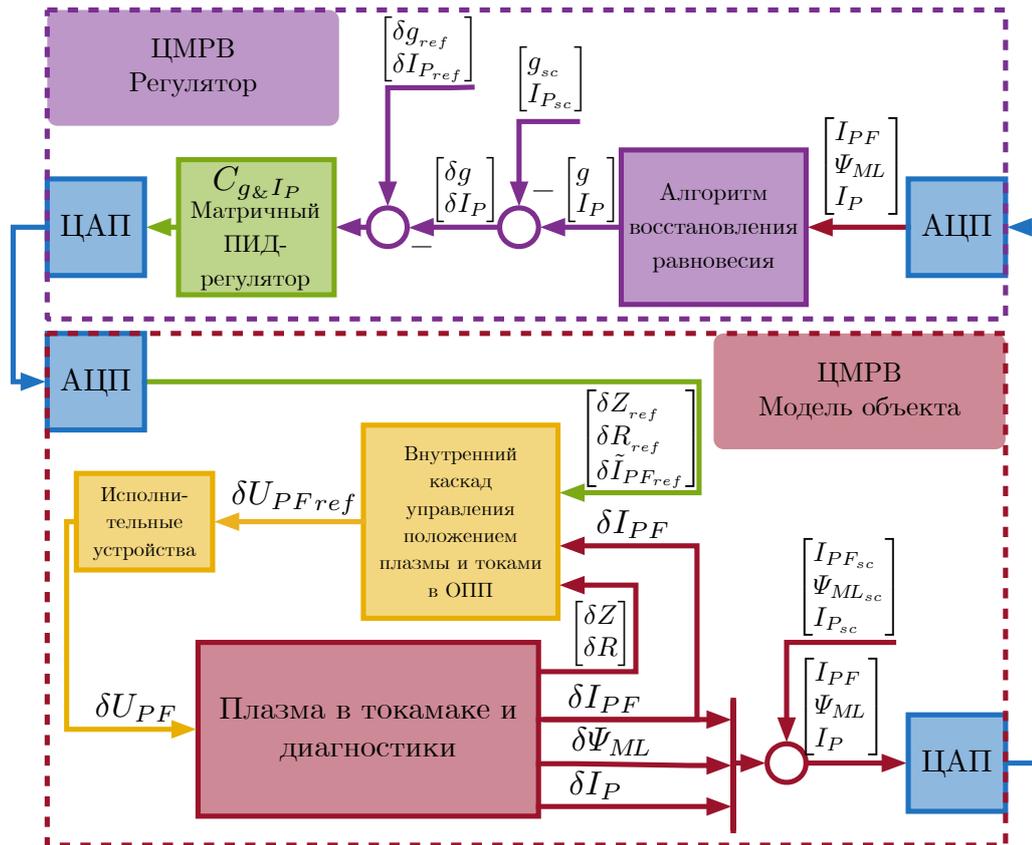


Рисунок 4.4 — Структурная схема системы магнитного управления плазмой для токамака Глобус-М2 при проведении полунатурного моделирования.

Согласно данной концепции, внутри блока ЦМРВ «Регулятор» находится внешний каскад управления током и формой плазмы с алгоритмом восстановления. Это позволяет использовать новую цифровую систему управления током и формой плазмы в экспериментах, где ЦМРВ «Модель объекта» заменяется реальным токамаком вместе с существующей аналоговой системой управления положением и током плазмы.

Другая концепция предлагает размещение обоих каскадов управления в блоке ЦМРВ «Регулятор», при этом существующая аналоговая система управле-

ния положением и током плазмы заменяется новой цифровой системой управления.

На Рис. 4.5 показаны результаты моделирования в реальном времени, где система управления смещает ударные точки  $g_{1-2}$  и зазоры  $g_{3-5}$  из одного положения в другое во время диверторной фазы плазменного разряда № 37326. Система

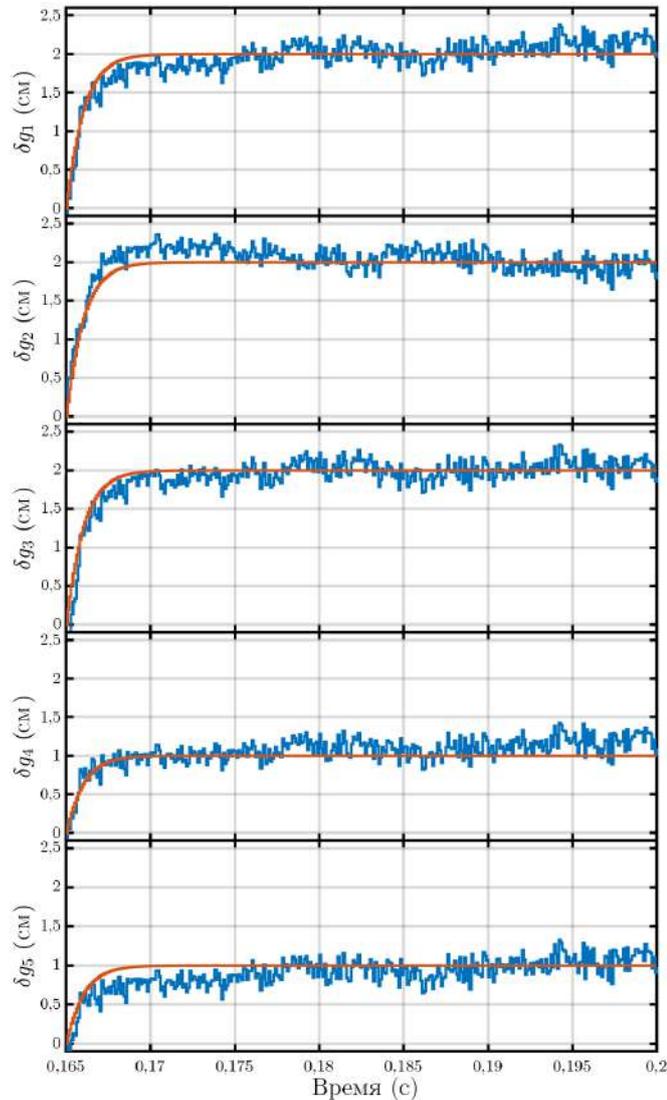


Рисунок 4.5 — Результаты моделирования в реальном времени, когда система управления смещает ударные точки  $g_{1-2}$  и зазоры  $g_{3-5}$  во время диверторной фазы плазменного разряда № 37326 токамака Глобус-М2. Красные линии - задающие воздействия.

управления обеспечивает слежение за задающими воздействиями  $g_{1-6 ref}$  и приемлемое качество управления.

Моделирование в реальном времени подтвердило работоспособность разработанной системы магнитного управления плазмой, поэтому она готова к использованию в реальном эксперименте. Максимальное ТЕТ составляет 78 мкс,

а среднее ТЕТ 56 мкс. Период дискретизации  $T_s = 100$  мкс. Примерно 20 мкс тратится на работу алгоритма восстановления равновесия, около 5 мкс - на регуляторы, а оставшиеся 42 мкс уходят на преобразование сигналов в АЦП и ЦАП. Система управления удовлетворяет условию работы в реальном времени  $TET \leq T_s$ .

Для использования такой системы управления в реальном эксперименте необходимо выполнить следующую процедуру:

- рассчитать сценарий и провести плазменный разряд,
- восстановить равновесие плазмы и рассчитать дискретную LPV модель плазмы,
- синтезировать систему управления на этой модели и выполнить моделирование в реальном времени, чтобы убедиться в ее работоспособности и качестве управления,
- применить разработанную систему магнитного управления плазмой с алгоритмом восстановления равновесия в эксперименте.

В настоящее время на токамаке Глобус-М2 отсутствует система управления формой плазмы с обратной связью. Внедрение предлагаемой системы магнитного управления плазмой с алгоритмом восстановления равновесия плазмы в обратной связи в практику экспериментов на токамаке Глобус-М2 позволит рассчитывать положение ударных точек и величины зазоров между границей плазмы и лимитером токамака в реальном времени, что в свою очередь позволит осуществлять управление формой плазмы в течение плазменного разряда с заданным качеством управления.

#### **4.2 Комплекс программ для визуализации восстановленного равновесия плазмы в токамаке**

Форма плазмы не может быть измерена непосредственно и должна быть рассчитана по сигналам магнитной диагностики токамака в режиме реального времени. Эта задача называется задачей восстановления равновесия плазмы (plasma equilibrium reconstruction problem). В 2022 году на токамаке Глобус-М2 была внедрена (см. Приложение А) новая система магнитной диагностики плазмы, включающая комплекс программ для восстановления равновесия плазмы

FCDI [81], комплекс программ Tokamak Dataset Processing Toolbox для обработки экспериментальных данных в среде Matlab и комплекс программ VisualPSI для визуализации восстановленного равновесия плазмы в токамаке.

VisualPSI обеспечивает пользовательский интерфейс алгоритма восстановления плазмы FCDI и реализован в виде Matlab Application. На рис. 4.6–4.9 приведен интерфейс VisualPSI в различных режимах работы.

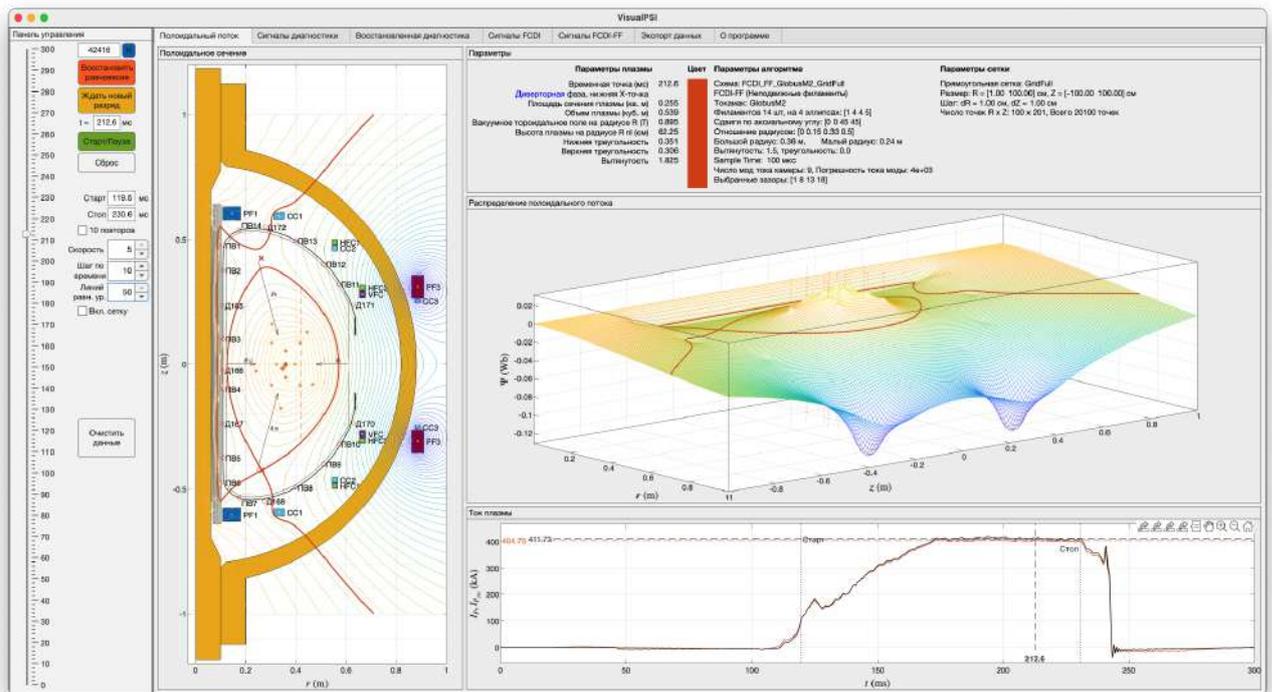


Рисунок 4.6 — VisualPSI отображает равновесие плазмы в течение разряда № 42416 токамака Глобус-М2, восстановленное алгоритмом FCDI-FF

Левая панель позволяет производить настройку отображения данных и отображать восстановленное равновесие плазмы в разных временных точках. На правой панели находятся вкладки с данными:

- «Полоидальный поток» – вывод положения границы плазмы (сепаратрисы), магнитных поверхностей внутри плазмы, трехмерного распределения полоидального потока  $\Psi$ , а также измеренного и восстановленного тока плазмы;
- «Сигналы диагностики» – вывод измеренных токов в обмотках полоидального поля, потоков на магнитных петлях и оценки суммарного тока на камере;
- «Восстановленная диагностика» - сравнение, для оценки точности восстановления равновесия, измеренных потоков на магнитных петлях с

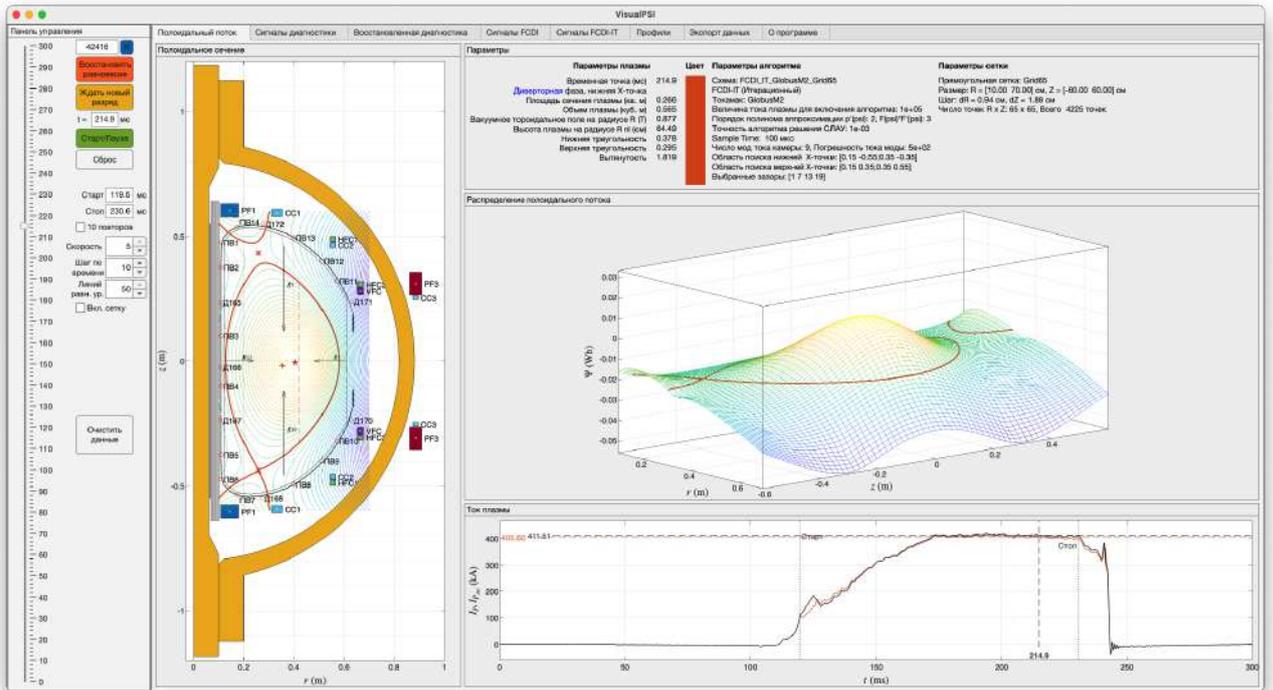


Рисунок 4.7 — VisualPSI отображает равновесие плазмы в течение разряда № 42416 токамака Глобус-М2, восстановленное алгоритмом FCDI-IT

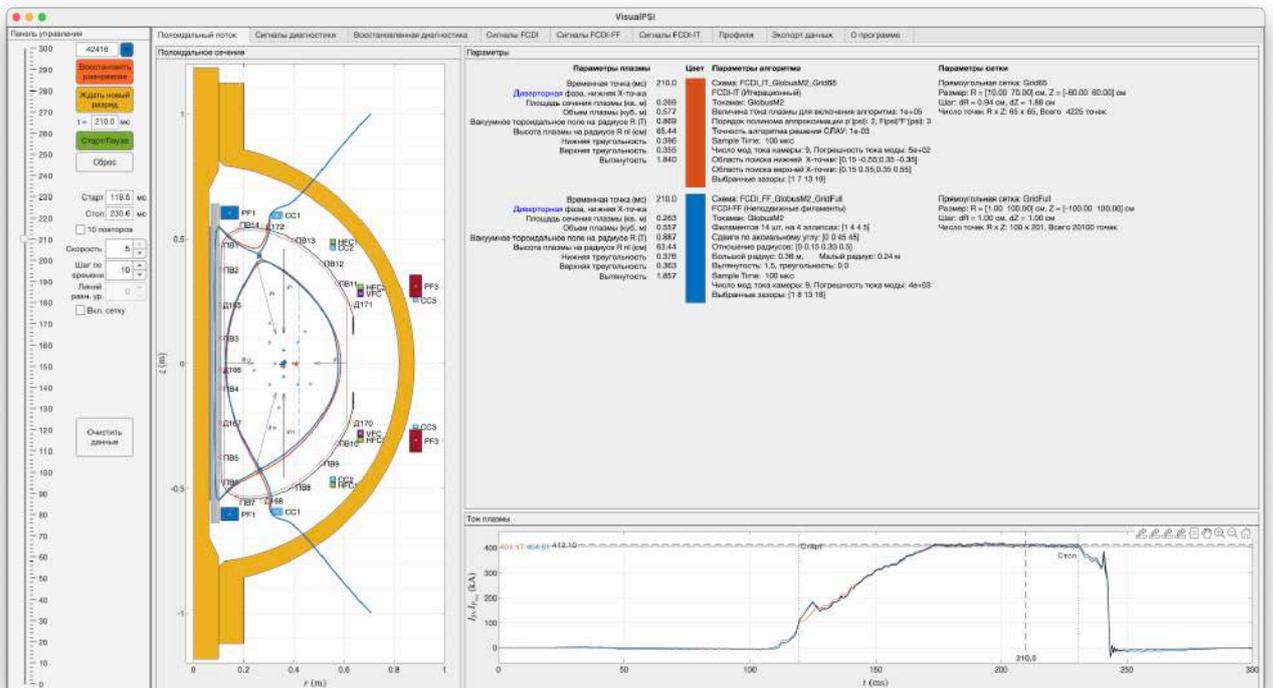


Рисунок 4.8 — VisualPSI в режиме сравнения равновесий плазмы в течение разряда № 42416 токамака Глобус-М2, восстановленных алгоритмами восстановления FCDI-FF и FCDI-IT

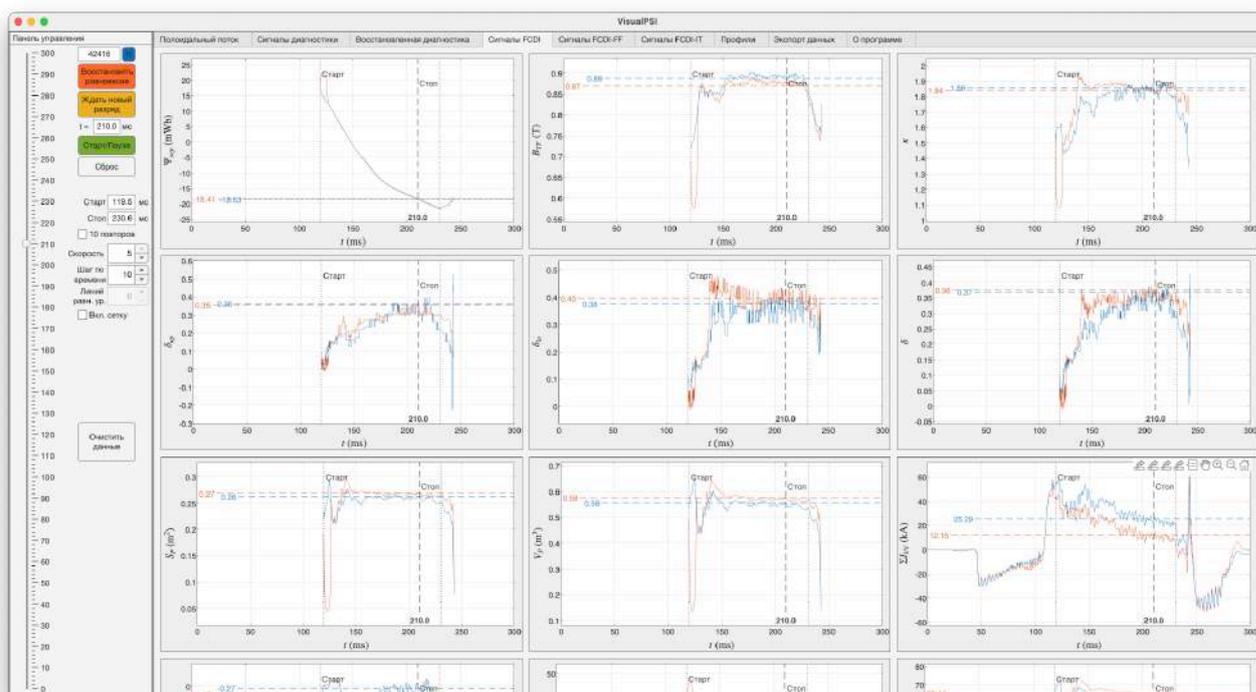


Рисунок 4.9 — VisualPSI отображает сравнение параметров плазмы в течение разряда № 42416 токамака Глобус-М2, восстановленных алгоритмами восстановления FCDI-FF и FCDI-IT

потоками на петлях, рассчитанных по восстановленному распределению полоидального потока;

- «Сигналы FCDI» – рассчитанные параметры плазмы: поток на сепаратрисе, координаты геометрического центра плазмы, вакуумное тороидальное поле на радиусе  $R_P$ , вытянутость  $\kappa$ , верхняя  $\delta_{up}$ , нижняя  $\delta_{lo}$  и средняя треугольности плазмы, объем  $V_{pl}$  и площадь сечения плазмы внутри сепаратрисы  $S_{pl}$ , восстановленный суммарный ток на камере  $\sum I_{VV}$ , высота вертикальной хорды плазмы  $H_P$  на определенном радиусе  $R_{nl} = 0,42$  м, через который проходит хорда наблюдения микроволнового интерферометра токамака Глобус-М2, значение функционала ошибки  $\chi^2$ , величины зазоров  $g$  между сепаратрисой плазмы и лимитером токамака;
- «Сигналы FCDI-FF» – параметры плазмы, дополнительно рассчитываемые в режиме FCDI-FF: токи в филаментах  $I_F$  и рассчитанные по ним координаты центроида плазмы;
- «Сигналы FCDI-IT» – параметры плазмы, дополнительно рассчитываемые в режиме FCDI-IT: координаты магнитной оси  $R_{axis}$ ,  $Z_{axis}$ , магнитный поток  $\Psi_{axis}$  и давление плазмы  $p_{axis}$  на оси, запасы устойчивости

плазмы  $q_0$  и  $q_{95}$ , энергия плазмы  $W$ , полоидальная бета  $\beta_p$  и внутренняя индуктивность  $l_{i3}$ ;

- «Профили» – профили запаса устойчивости  $q$ , давления плазмы, полоидального тока и их производных;
- «Экспорт» - экспорт восстановленного равновесия в форматах \*.mat, \*.json и G-EQDSK.

VisualPSI может работать в режиме сравнения сепаратрис, когда равновесие восстанавливается одновременно несколькими алгоритмами с разными параметрами. При этом восстановленные сепаратрисы и сигналы отображаются различными цветами (рис. 4.8 и 4.9).

### 4.3 Метод идентификации алгоритма восстановления равновесия с помощью наблюдателя состояния

В случае если оборудование не позволяет обеспечить работу системы магнитного управления плазмой с алгоритмом восстановления равновесия в обратной связи в реальном времени, то есть когда  $T_{ET} > T_s$ , алгоритм восстановления равновесия может быть заменен идентифицированной моделью.

В [76] данный подход был применен к токамаку Глобус-М2, где автором была решена задача идентификации алгоритма восстановления плазмы FCDI-IT с  $T_{ET} \approx 200$  мкс с помощью робастного наблюдателя состояния.

Идея оценки зазора с помощью робастного дискретного наблюдателя состояний заключается в следующем. С помощью алгоритма восстановления равновесия плазмы FCDI-IT вычисляется серия линеаризованных LPV-моделей плазмы для серии плазменных разрядов. Зазоры включаются в вектор состояния всех линейных моделей, а выходной вектор включает в себя сигналы, измеряемые системой магнитной диагностики токамака. Затем с помощью метода ЛМН синтезируется робастный наблюдатель состояния, который обеспечивает минимальную ошибку между состояниями и оценками состояния для серии LPV моделей плазмы.

Синтезированный наблюдатель может быть использован в реальном эксперименте, при этом сигналы подключаются к его входу так, как показано на рис. 4.10.

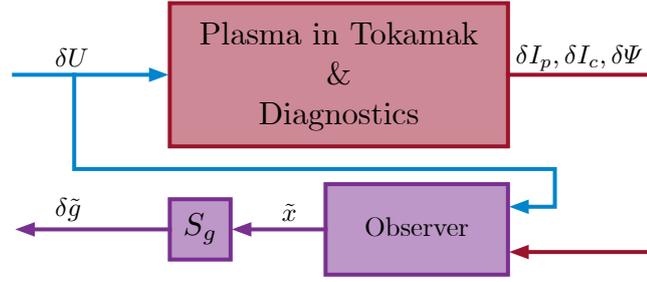


Рисунок 4.10 — Структурная схема подключения робастного наблюдателя состояния.

В [76, Раздел 4] был получен массив дискретных моделей плазмы в токамаке в пространстве состояний

$$\begin{cases} x(T_s k + T_s) = A_{nm}^d x(T_s k) + B_{nm}^d u(T_s k), \\ y(T_s k) = C_{nm}^d x(T_s k). \end{cases} \quad (4.2)$$

Модели имеют 8 входов  $u = \delta U$ , 24 состояния  $x = [\delta g^T, \delta \hat{I}^T]^T$ , состоящие из 6 зазоров и редуцированного до 18 элементов вектора тока  $\hat{I}$ , 33 выхода  $y = [\delta I_p, \delta I_c^T, \delta \Psi^T]^T$ , соответствующие значениям, измеренным диагностикой на токамаке Глобус-М2: ток плазмы, 8 токов в обмотках полоидального поля, полоидальный магнитный поток измененный 21-й магнитной петлёй, квадрупольный магнитный поток, вертикальный и горизонтальный дипольный магнитный поток.

Уравнение состояния дискретного наблюдателя полного порядка задается следующим образом

$$\tilde{x}(T_s k + T_s) = A^d \tilde{x}(T_s k) + B^d u(T_s k) + L \left( y(T_s k) - C^d \tilde{x}(T_s k) \right),$$

где  $\tilde{x}$  - вектор оценки состояния дискретной модели объекта  $\{A^d, B^d, C^d\}$ ,  $T_s$  - шаг дискретизации, а  $L$  - матрица наблюдателя.

Затем необходимо выполнить переход к уравнению ошибки наблюдателя

$$e(T_s k + T_s) = \left( A^d - LC^d \right) e(T_s k),$$

где  $e = x - \tilde{x}$  - ошибка между состояниями и оценками состояний.

Системы матричных неравенств для синтеза наблюдателя получены с помощью обобщенной теоремы Ляпунова [68]

$$\begin{cases} X \succ 0, \\ R(X, V) = L_{\mathbb{D}} \otimes X + M_{\mathbb{D}} \otimes \left( X(A^d - LC^d) \right) + M_{\mathbb{D}}^T \otimes \left( X(A^d - LC^d) \right)^T \prec 0, \end{cases}$$



Вектор оценки зазоров  $\delta\tilde{g}$  получается следующим образом

$$\delta\tilde{g} = S_g \tilde{x},$$

где  $S_g$  (рис. 4.10) - матрица выбора оценки зазоров из оценки вектора состояния

$$S_g = \begin{bmatrix} I_6 & 0_{6,18} \end{bmatrix},$$

где  $I_6$  - единичная матрица, а  $0_{6,18}$  - нулевая матрица соответствующего размера.

Сравнение вариаций зазоров  $\delta g$ , полученных по модели LPV, полученной из алгоритма восстановления равновесия FCDI, и оценки вариаций зазоров  $\delta\tilde{g}$ , полученной с помощью робастного наблюдателя для плазменного разряда 37263, показано на рис. 4.11.

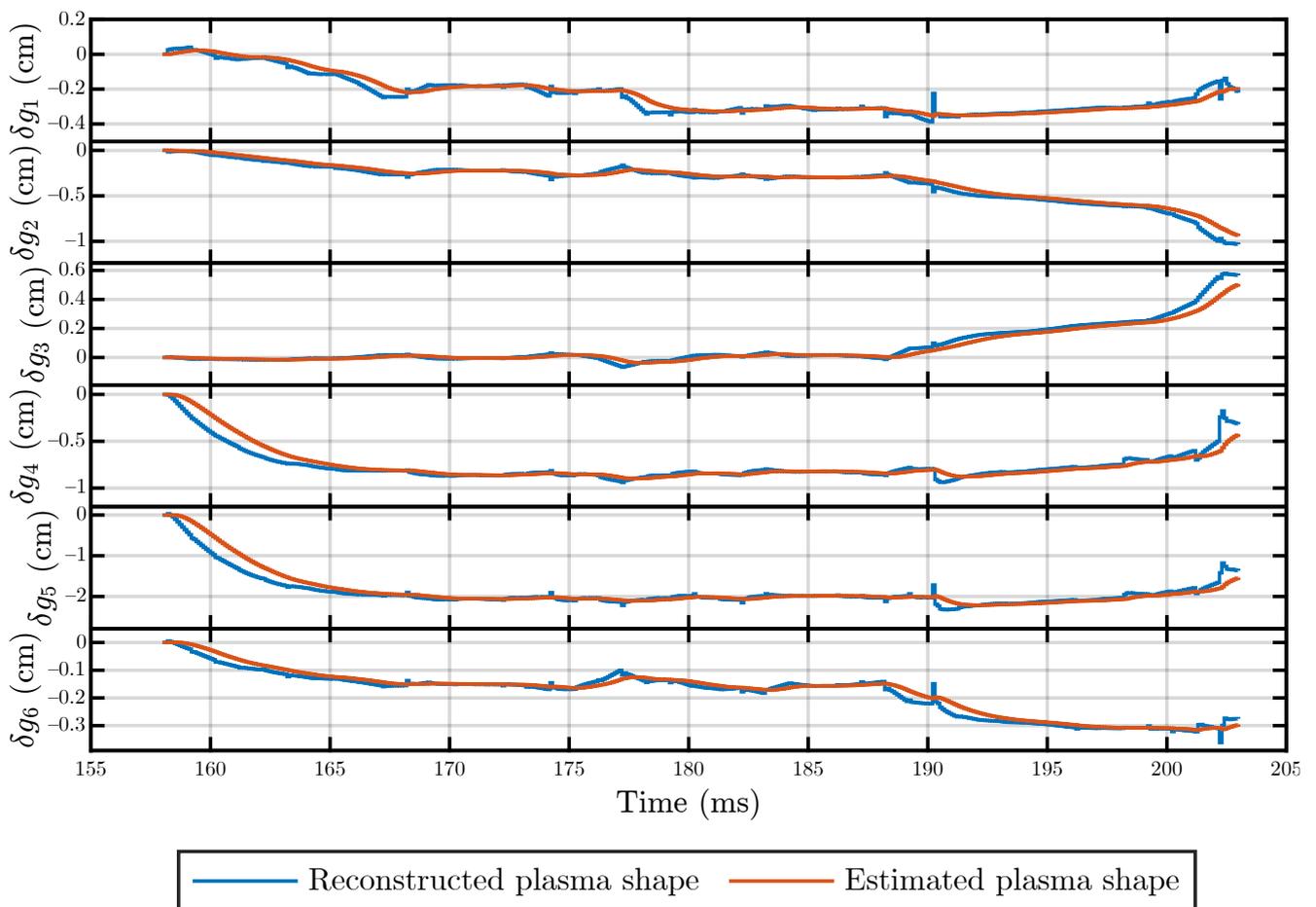


Рисунок 4.11 — Сравнение вариаций зазоров  $\delta g$  на выходе LPV модели, полученной из алгоритма восстановления равновесия FCDI (синяя линия), и оценки вариаций зазоров  $\delta\tilde{g}$ , полученных с помощью робастного наблюдателя (красная линия). Разряд 37263 токамака Глобус-М2.

Робастный наблюдатель обеспечивает минимальную ошибку между векторами состояния и оценкой состояния и, соответственно, между значениями зазоров и оценкой зазоров на протяжении всего времени разряда.

#### 4.4 Моделирование системы управления формой плазмы с внутренним каскадом управления по потокам на магнитных петлях

В систему магнитного управления плазмой представленной в разделе 4.1 может быть добавлен внутренний каскад управления с потоками на магнитных петлях в обратной связи. С помощью этого каскада управления можно улучшить показатели качества управления и ограничить влияние внешнего возмущения на переходные процессы в замкнутой системе.

Структурная схема системы магнитного управления плазмой с таким каскадом представлена на рис. 4.12. Кроме него имеются два следящих каскада

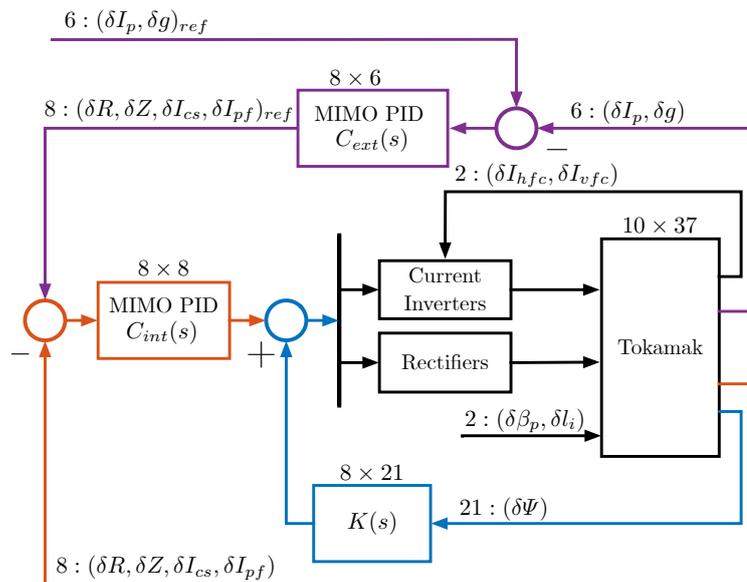


Рисунок 4.12 — Структурная схема системы управления формой плазмы с внутренним каскадом управления по потокам на магнитных петлях (выделен синим цветом).

управления. Первый выделен фиолетовым цветом, он осуществляет слежение за током плазмы и зазорами между границей плазмы и лимитером токамака (рис. 4.1). Второй следящий каскад выделен красным, он осуществляет слежение

за положением плазмы и токами в обмотках полоидального поля. На рис. 4.13 все каскады управления приведены последовательно.

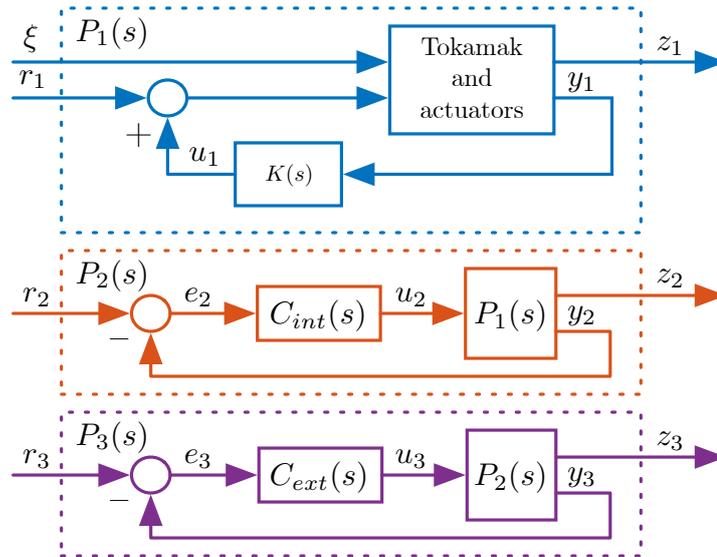


Рисунок 4.13 — Структурная схема трёх каскадов управления.

В [77] была рассчитана модель плазмы в токамаке Глобус-М2 и синтезирована система управления. Матричные ПИД-регуляторы в следующих каскадах управления синтезированы с использованием комплекса программ, описанным в Главе 1, в постановке из [28], когда синтезируется регулятор на модели объекта управления в непрерывном времени. Регулятор  $K(s)$  во внутреннем каскаде является динамическим регулятором произвольной структуры. Он синтезируется с использованием Обобщенной теоремы Ляпунова для размещения полюсов замкнутой системы в  $\mathbb{D}$ -области и Bounded Real Lemma для ограничения  $\mathcal{H}_\infty$ -нормы передаточных функций замкнутой системы [33; 68]. Подобный подход использовался в [69].

Сначала необходимо разделить выходы объекта управления на

$$y_1 = \delta\Psi,$$

которые являются выходами в контуре обратной связи, и

$$z_1 = \left[ \delta Z \quad R \quad \delta I_{cs} \quad I \delta_{pf}^T \quad \delta I_p \quad \delta g^T \right]^T,$$

на который нужно ограничить влияние внешнего возмущения  $\xi = [\delta\beta_p \delta l_i]^T$  (цель  $\mathcal{H}_\infty$ -управления):

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu_1 + E\xi, \\ z_1 = C_1x + F_1\xi, \\ y_1 = C_2x + F_2\xi. \end{cases}$$

Регулятор определяется как

$$u_1(s) = K(s)y_1(s), \quad K(s) \begin{cases} \dot{\zeta} = A_k\zeta + B_k y_1, \\ u_1 = C_k\zeta + D_k y_1. \end{cases}$$

Замкнутая система, показанная синим цветом на рис. 4.12, имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix} = A_{cl} \begin{bmatrix} x \\ \zeta \end{bmatrix} + B_{cl}\xi, \quad z_1 = C_{cl} \begin{bmatrix} x \\ \zeta \end{bmatrix} + D_{cl}\xi,$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} A_{cl} & B_{cl} \\ \hline C_{cl} & D_{cl} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} A + BD_kC_2 & BC_k & E + BD_kF_2 \\ B_kC_2 & A_k & B_kF_2 \\ \hline C_1 & 0 & F_1 \end{array} \right].$$

Матрица Ляпунова  $\mathcal{P}$  должна быть представлена в виде взаимно обратных матриц

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} Y & N \\ N^T & \Omega_1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P}^{-1} = \begin{bmatrix} X & M \\ M^T & \Omega_2 \end{bmatrix},$$

где  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  - произвольные матрицы, см. [70]. Далее вводятся следующие обозначения

$$\begin{aligned} \hat{A} &= NA_kM^T + NB_kC_2X + YBC_kM^T + Y(A + BD_kC_2)X, \\ \hat{B} &= NB_k + YBD_k, \quad \hat{C} = C_kM^T + D_kC_2X, \quad \hat{D} = D_k, \\ \Theta_1 &= AX + B\hat{C} + (AX + B\hat{C})^T, \\ \Theta_2 &= \hat{A}^T + A + B\hat{D}C_2, \\ \Theta_3 &= YA + \hat{B}C_2 + (YA + \hat{B}C_2)^T \end{aligned}$$

для формирования ЛМН для  $\mathcal{H}_\infty$ -управления и размещения полюсов замкнутой системы в  $\mathbb{D}$ -области:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \begin{bmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 & E + B\hat{D}F_2 & XC_1^T + \hat{C}^T F_2^T \\ * & \Theta_3 & YE + \hat{B}F_2 & C_1^T + C_2^T \hat{D}^T \\ * & * & -\gamma I & F_1^T \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix}, \\ \Sigma_2 &= \begin{bmatrix} G_1 & H_1^T & G_2 & H_2^T & G_3 & H_3^T & G_4 & H_4^T \end{bmatrix}, \\ \Sigma_3 &= -\frac{1}{2} \text{diag}(\epsilon_1^{-1}, \epsilon_1, \epsilon_1^{-1}, \epsilon_1, \epsilon_2^{-1}, \epsilon_2, \epsilon_2^{-1}, \epsilon_2), \\ \Sigma_4 &= L_{\mathbb{D}} \otimes \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} + M_{\mathbb{D}} \otimes \begin{bmatrix} AX + B\hat{C} & A + B\hat{D}C \\ \hat{A} & YA + \hat{B}C \end{bmatrix} + \\ &+ M_{\mathbb{D}}^T \otimes \begin{bmatrix} AX + B\hat{C} & A + B\hat{D}C \\ \hat{A} & YA + \hat{B}C \end{bmatrix}^T, \\ \Sigma_5 &= \begin{bmatrix} \epsilon_1 P_1 & N_1^T & \epsilon_2 P_2 & N_2^T & \epsilon_3 P_3 & N_3^T & \epsilon_4 P_4 & N_4^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

где  $\epsilon_{1-4}$ ,  $G_{1-4}$ ,  $H_{1-4}$ ,  $P_{1-4}$  и  $N_{1-4}$  получены из леммы в [71].  $L_{\mathbb{D}}$  и  $M_{\mathbb{D}}$  - матрицы характеристической функции  $\mathbb{D}$ -области, представленной пересечением окружности с центром в точке  $(0,0)$  и радиусом  $r$ , и полуплоскости с параметром  $\alpha$  [33]

$$\mathbb{D} = \{s \mid s \in \mathbb{C}^-, L_{\mathbb{D}} + sM_{\mathbb{D}} + \bar{s}M_{\mathbb{D}}^T < 0\},$$

$$L_{\mathbb{D}} = \begin{bmatrix} 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & -r \end{bmatrix}, \quad M_{\mathbb{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Итоговая система ЛМН формулируется следующим образом

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ \Sigma_2^T & \Sigma_3 \end{bmatrix} \preceq 0, \quad \begin{bmatrix} \Sigma_4 & \Sigma_5 \\ \Sigma_5^T & \Sigma_3 \end{bmatrix} \preceq 0.$$

Решение этой системы ЛМН позволяет получить матрицы  $X$ ,  $Y$ ,  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  и  $\hat{D}$ . Получая матрицы  $M$  и  $N$  из задачи факторизации  $MN^T = I - XY$ , можно определить матрицы регулятора

$$\begin{aligned} A_k &= N^{-1} \left( \hat{A} - NB_k C_2 X - YBC_k M^T - \right. \\ &\quad \left. - Y(A + BD_k C_2) X \right) (M^T)^{-1}, \\ B_k &= N^{-1} \left( \hat{B} - YBD_k \right), \\ C_k &= \left( \hat{C} - D_k C_2 X \right) (M^T)^{-1}, \quad D_k = \hat{D}. \end{aligned}$$

Результаты моделирования представлены на рис. 4.14, который содержит изменения отклонений зазоров  $\delta g_{1-5}$ , тока плазмы  $\delta I_p$ , полоидальной беты  $\delta \beta_p$  и внутренней индуктивности плазмы  $\delta l_i$  при «малом срыве» плазмы, когда система магнитного управления перемещает сепаратрису плазмы на новое место. Моделирование показало работоспособность синтезированной системы управления, она обеспечивает требуемое качество управления и способна отражать внешнее возмущения. Представленный здесь регулятор внутреннего каскада управления по потокам на магнитных петлях был синтезирован в непрерывном времени. Метод может быть изменен для синтеза регулятора в дискретном времени, тогда его можно будет использовать в составе цифровой системы магнитного управления плазмой в токамаке.

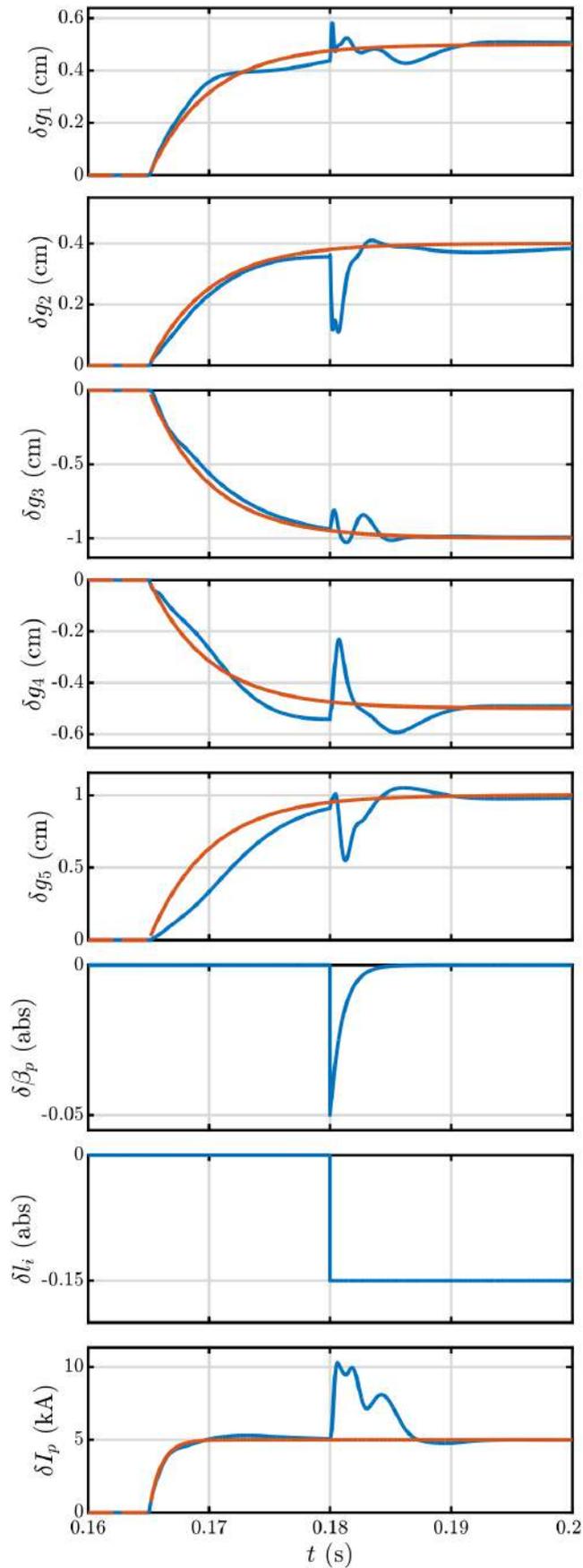


Рисунок 4.14 — Результаты моделирования системы магнитного управления плазмой с внутренним каскадом управления по токами на магнитных петлях на модели плазменного разряда № 37239 токамака Глобус-М2. Красные пунктирные линии являются задающими воздействиями.

#### 4.5 Выводы по главе 4

В данной главе была рассмотрена система магнитного управления плазмой для токамака Глобус-М2. Было проведено моделирование системы магнитного управления плазмой с алгоритмом восстановления равновесия плазмы в обратной связи, которое подтвердило работоспособность синтезированной системы при слежении за зазорами между сепаратрисой плазмы и лимитером токамака. Представлен комплекс программ для визуализации восстановленного равновесия плазмы в токамаке, который был внедрен в систему магнитной диагностики токамака Глобус-М2. Для случая, когда в системе управления формой плазмы невозможно использовать алгоритм восстановления равновесия реального времени, был разработан численный метод синтеза робастного наблюдателя состояний, который может вычислять оценки зазоров в реальном времени. В завершении главы было проведено моделирование системы магнитного управления с внутренним каскадом управления по потокам на магнитных петлях, с помощью которого можно улучшить показатели качества управления и ограничить влияние внешнего возмущения на переходные процессы.

## Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем. Разработан метод синтеза дискретного матричного ПИД-регулятора для управления нестационарными объектами. Синтезируется оптимальный регулятор, поскольку обеспечивается максимально возможное качество управления при заданных ограничениях на  $\mathcal{H}_\infty$ -нормы передаточных функций замкнутой системы и требуемый запас робастной устойчивости. Варьированием границы робастности можно достигать компромисса между качеством управления и запасом робастной устойчивости замкнутой системы. Большая область робастности ведет к меньшей области качества управления и наоборот. Обеспечивается развязка контуров управления на низких частотах и максимизируется качество управления. Частоты среза в замкнутой системе управления располагаются максимально близко друг к другу, что позволяет получить схожие времена переходных процессов по всем каналам управления. Разработанный метод был реализован в виде комплекса программ, интегрированных в MATLAB, и включает инструменты для визуализации результатов синтеза. Это открывает возможности для широкого применения метода в различных цифровых системах управления, включая системы управления плазмой в токамаках, что активно применялось в данной работе.

Основное внимание в работе было уделено применению полунатурного моделирования для разработки и исследования систем магнитного управления плазмой в токамаках. Был собран стенд реального времени и разработан комплекс программ для проведения полунатурного моделирования цифровых систем управления с обратной связью. Полунатурное моделирование позволило проводить моделирование в условиях, максимально приближенных к реальным. Для токамака Глобус-М2 было проведено полунатурное моделирование системы магнитного управления плазмой с алгоритмом восстановления равновесия в обратной связи, разработан комплекс программ для визуализации восстановленного равновесия плазмы, разработан метод идентификации алгоритма восстановления равновесия посредством синтеза робастного наблюдателя состояний. Также было проведено моделирование системы магнитного управления с внутренним каскадом управления по потокам на магнитных петлях, с помощью которого можно улучшить показатели качества управления и ограничить влияние внешнего возмущения на переходные процессы. Полунатурное моделирование использо-

валось для исследования систем управления положением плазмы с инвертором напряжения, для чего был создан комплекс программ для реализации цифрового многоуровневого ШИМ-контроллера, который управляет H-мостами инвертора напряжения. Эти результаты позволили автору к настоящему времени приступить к внедрению цифровой системы магнитного управления плазмой на токамаке Глобус-М2.

### **Благодарности**

Автор выражает глубокую благодарность и признательность своему учителю д.т.н., профессору Юрию Владимировичу Митришкину (26.11.1946 — 22.01.2024) за постановку задачи и научное руководство на протяжении семи лет. Светлая ему память.

Особую благодарность автор выражает научному руководителю д.т.н., чл.-корр. РАН Андрею Алексеевичу Галяеву за моральную поддержку, обсуждения и научные консультации по подготовке диссертации. Также автор выражает благодарность своему коллеге Павлу Сергеевичу Кореневу за совместную плодотворную работу, направленную на общее дело, а также всем коллегам из ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН и ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН.

Автор благодарит разработчиков проекта `*Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template*` за предоставленный  $\text{\LaTeX}$ -шаблон, который значительно облегчил процесс оформления диссертации, особенно в части списка литературы.

## Список сокращений и условных обозначений

LPV	Linear Parameter-Varying. Линейная модель с переменными параметрами.
LTI	Linear Time-Invariant. Линейная модель с постоянными параметрами.
LTV	Linear Time-Varying. Изменяющаяся во времени линейная модель.
TET	Task Execution Time – время выполнения задачи на каждом временном шаге.
АЦП	Аналого-цифровой преобразователь
БТИЗ	Биполярный транзистор с изолированным затвором.
КМН (QMI)	Квадратичное Матричное неравенство (Quadratic Matrix Inequality)
ЛМН (LMI)	Линейное Матричное неравенство (Linear Matrix Inequality)
ОВУП (VFC)	Обмотка вертикального управляющего поля (Vertical Field Coil)
ОГУП (HFC)	Обмотка горизонтального управляющего поля (Horizontal Field Coil)
ОИ (CS)	Обмотка индуктора (Central Solenoid)
ОПП (PF-coil)	Обмотка полодального поля (Poloidal Field Coil)
ОСРВ (RTOS)	Операционная система реального времени (Real-time operating system)
ОУ	Обмотка управления
ПИД	Пропорционально-интегрально-дифференциальный
ПЛИС (FPGA)	Программируемая логическая интегральная схема (Field-programmable gate array).
РАК (RAO)	Релейный Автоколебательный (Relay Auto-Oscillatory).
ЦАП	Цифро-аналоговый преобразователь
ЦМРВ (RTTM)	Целевая машина реального времени (Real-Time Target Machine).
ШИМ (PWM)	Широтно-импульсная модуляция (Pulse-Width Modulation).

## Словарь терминов

$x \leq y$  обозначает, что скаляр  $x$  меньше или равен скаляру  $y$ .

$x \geq y$  означает, что скаляр  $x$  больше или равен скаляру  $y$ .

$A^H$  обозначает эрмитово сопряжённую матрицу.

$A \succeq 0$  обозначает, что эрмитова матрица  $A$  положительно полуопределена:  $x^H A x \geq 0, \forall x, A = A^H, x \in \mathbb{C}^n, A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .

$A \preceq 0$  обозначает, что эрмитова матрица  $A$  отрицательно полуопределена:  $x^H A x \leq 0, \forall x, A = A^H, x \in \mathbb{C}^n, A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .

$A \succeq B$  обозначает, что матрица  $A - B$  положительно полуопределена:  $A - B \succeq 0$ .

$\bar{\sigma}(A)$  обозначает максимальное сингулярное значение матрицы  $A$ .

$\underline{\sigma}(A)$  обозначает минимальное сингулярное значение матрицы  $A$ .

$\|A\|_2 = \bar{\sigma}(A)$  обозначает спектральную норму матрицы  $A$ .

$\|G(z)\|_\infty$  обозначает  $\mathcal{H}_\infty$ -норму матричной функции  $G(z)$ .

$A^\dagger$  обозначает псевдообратную матрицу Мура-Пенроуза  $A \in \mathbb{C}^{q \times m}$ :

если матрица  $AA^H \in \mathbb{C}^{q \times q}$  невырождена, то  $A^\dagger = A^H (AA^H)^{-1}$ ,  $AA^\dagger = I_q$ ,

если матрица  $A^H A \in \mathbb{C}^{m \times m}$  невырождена, то  $A^\dagger = (A^H A)^{-1} A^H$ ,  $A^\dagger A = I_m$ .

$A^{-1}$  обозначает обратную квадратную матрицу  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ : если матрица  $A$  невырождена, то  $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ .

$I_n$  обозначает  $n \times n$  единичную матрицу,  $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

$\exp(x) = e^x$ , где  $e$  - основание натурального логарифма (число Эйлера).

$T_s$  - период дискретизации (Sample Time), а  $f_s = 1/T_s$  - частота дискретизации (Sampling Frequency).

$\omega = 2\pi f$  - угловая частота.

Сингулярными числами матрицы  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  являются неотрицательные квадратные корни из собственных значений матрицы  $AA^H$  [72]

$$\sigma_i(A) = +\sqrt{\lambda_i(AA^H)}, \quad \sigma_i(A) \in \mathbb{R}^1,$$

расположенные в порядке убывания:

$$\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \dots \geq \sigma_n(A) \geq 0, \quad \bar{\sigma}(A) = \sigma_1(A), \quad \underline{\sigma}(A) = \sigma_n(A).$$

Если матрица  $A$  невырожденная, то

$$\underline{\sigma}(A) = 1/\bar{\sigma}(A^{-1}), \quad \bar{\sigma}(A) = 1/\underline{\sigma}(A^{-1}).$$

Число обусловленности  $\kappa(A)$  определяется как отношение максимального и минимального сингулярных чисел матрицы  $A$ :

$$\kappa(A) = \frac{\bar{\sigma}(A)}{\underline{\sigma}(A)}.$$

Невырожденная матрица  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  является унитарной матрицей, если

$$A^H A = A A^H = A A^{-1} = I_n, \quad \text{тогда} \quad \kappa(A) = 1, \quad \sigma_1(A) = \dots = \sigma_n(A) = 1.$$

Дискретная матричная (MIMO) передаточная функция  $G(z) \in \mathbb{C}^{q \times m}$  – это матричная функция, связывающая Z-преобразования вектора входов  $u(z) \in \mathbb{C}^m$  и вектора выходов  $y(z) \in \mathbb{C}^q$  при нулевых начальных условиях:

$$y(z) = G(z)u(z).$$

Максимальное усиление дискретной матричной передаточной функции  $G(z)$  на частоте  $\omega$ , обозначаемое как  $\|G(\exp(j\omega T_s))\|_2$ , является спектральной нормой (максимальным сингулярным числом) матрицы, которая представляет собой значение частотного отклика дискретной на частоте  $\omega$

$$\left\| G(\exp(j\omega T_s)) \right\|_2 = \bar{\sigma} \left( G(\exp(j\omega T_s)) \right) \in \mathbb{R}^1,$$

тогда как минимальный коэффициент усиления дискретной передаточной функции на частоте  $\omega$  является минимальным сингулярным числом этой частотной характеристики.

$\mathcal{H}_\infty$ -норма дискретной матричной передаточной функции  $G(z)$ , обозначаемая как  $\|G(z)\|_\infty$ , – это частотный пик, дающий максимальный коэффициент усиления дискретной передаточной функции на всех частотах в диапазоне  $\omega \in [0, \dots, \omega_{nyq}]$ .

$$\|G(z)\|_\infty = \sup_{\omega} \left\{ \bar{\sigma} \left( G(\exp(j\omega T_s)) \right) \right\} \in \mathbb{R}^1.$$

## Список литературы

1. *Mihalič F., Truntič M., Hren A.* Hardware-in-the-Loop Simulations: A Historical Overview of Engineering Challenges // *Electronics*. — 2022. — Vol. 11, no. 15. — DOI: [10.3390/electronics11152462](https://doi.org/10.3390/electronics11152462).
2. *Artsimovich L.* Tokamak devices // *Nuclear Fusion*. — 1972. — Vol. 12, no. 2. — P. 215—252. — DOI: [10.1088/0029-5515/12/2/012](https://doi.org/10.1088/0029-5515/12/2/012).
3. *Кадо́мцев Б. Б., Шафранов В. Д.* Магнитное удержание плазмы // *Усп. физ. наук*. — 1983. — Т. 139, № 3. — С. 399—434. — DOI: [10.3367/UFNr.0139.198303b.0399](https://doi.org/10.3367/UFNr.0139.198303b.0399).
4. *Wesson J., Campbell D.* Tokamaks. — OUP Oxford, 2011. — (International Series of Monographs on Physics). — ISBN 9780199592234.
5. *Арцимович Л. А., Шафранов В. Д.* Токамак с некруглым сечением плазменного витка // *Письма в ЖЭТФ*. — 1972. — Т. 15, вып. 1. — С. 72. — URL: [http://jetpletters.ru/ps/0/article\\_11395.shtml](http://jetpletters.ru/ps/0/article_11395.shtml).
6. *Митришкин Ю. В., Корнев П. С., Прохоров А. А., Карцев Н. М., Патров М. И.* УПРАВЛЕНИЕ ПЛАЗМОЙ В ТОКАМАКАХ. Ч. 1. Проблема управляемого термоядерного синтеза. Токамаки. Компоненты систем управления // *Проблемы управления*. — Москва, 2018. — № 1. — С. 2—20.
7. *Митришкин Ю. В., Карцев Н. М., Павлова Е. А., Прохоров А. А., Корнев П. С., Патров М. И.* УПРАВЛЕНИЕ ПЛАЗМОЙ В ТОКАМАКАХ. Ч. 2. Системы магнитного управления плазмой // *Проблемы управления*. — Москва, 2018. — № 2. — С. 2—30.
8. *Митришкин Ю. В., Карцев Н. М., Коньков А. Е., Патров М. И.* УПРАВЛЕНИЕ ПЛАЗМОЙ В ТОКАМАКАХ. Ч. 3.1. Системы магнитного управления плазмой в ITER // *Проблемы управления*. — Москва, 2019. — № 3. — С. 3—15. — DOI: [10.25728/ru.2019.3.1](https://doi.org/10.25728/ru.2019.3.1).
9. *Митришкин Ю. В., Карцев Н. М., Коньков А. Е., Патров М. И.* УПРАВЛЕНИЕ ПЛАЗМОЙ В ТОКАМАКАХ Ч. 3.2. Моделирование и реализация систем управления плазмой в ITER и конструкции DEMO // *Проблемы управления*. — Москва, 2019. — № 4. — С. 15—26. — DOI: [10.25728/ru.2019.4.2](https://doi.org/10.25728/ru.2019.4.2).

10. *Chen X., Fu P., Huang L., Gao G., He S.* Hardware-in-the-loop simulation of the EAST PF converter for PF control system upgrade // *Fusion Engineering and Design*. — 2016. — Vol. 112. — P. 57—66. — DOI: [10.1016/j.fusengdes.2016.07.020](https://doi.org/10.1016/j.fusengdes.2016.07.020).
11. *Ambrosino G., Banfi M., Carannante G., De Tommasi G., Mandelli A., Pironti A., Scibile L.* Rapid Prototyping of Safety System for Nuclear Risks of the ITER Tokamak // *IEEE Transactions on Plasma Science*. — 2010. — Vol. 38, no. 7. — P. 1662—1669. — DOI: [10.1109/TPS.2010.2049591](https://doi.org/10.1109/TPS.2010.2049591).
12. *Griva G., Musumeci S., Stella F., Bojoi R., Lampasi A., Zito P., Bifaretti S.* HIL Investigation of a Single-Phase Inverter for a Tokamak Non-Axisymmetric In-Vessel Coil Power Supply // *IEEE Transactions on Industry Applications*. — 2024. — Vol. 60, no. 3. — P. 4076—4086. — DOI: [10.1109/TIA.2024.3360026](https://doi.org/10.1109/TIA.2024.3360026).
13. *Mitrishkin Y. V., Efremov A. A., Zenkov S. M., Sushin I. S., Dokuka V. N., Khayrutdinov R. R.* Hardware-in-the-loop simulation as a stage of plasma control system model-based design in tokamaks: A test case // *2011 IEEE International Conference on Control Applications (CCA)*. — 2011. — P. 307—312. — DOI: [10.1109/CCA.2011.6044501](https://doi.org/10.1109/CCA.2011.6044501).
14. *Ariola M., Pironti A.* *Magnetic Control of Tokamak Plasmas*. — Cham : Springer International Publishing, 2016. — (Advances in Industrial Control). — ISBN 978-3-319-29888-7. — DOI: [10.1007/978-3-319-29890-0](https://doi.org/10.1007/978-3-319-29890-0).
15. *Korenev P. S., Mitrishkin Y. V., Patrov M. I.* Reconstruction of Equilibrium Distribution of Tokamak Plasma Parameters by External Magnetic Measurements and Construction of Linear Plasma Models // *MEHATRONIKA, AVTOMATIZACIA, UPRAVLENIE*. — 2016. — Apr. — Vol. 17, no. 4. — P. 254—266. — DOI: [10.17587/mau.17.254-266](https://doi.org/10.17587/mau.17.254-266).
16. *Ferron J., Walker M., Lao L., John H. S., Humphreys D., Leuer J.* Real time equilibrium reconstruction for tokamak discharge control // *Nuclear Fusion*. — 1998. — July. — Vol. 38, no. 7. — P. 1055—1066. — DOI: [10.1088/0029-5515/38/7/308](https://doi.org/10.1088/0029-5515/38/7/308).
17. *Davison E.* Multivariable tuning regulators: The feedforward and robust control of a general servomechanism problem // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 1976. — Feb. — Vol. 21, no. 1. — P. 35—47. — DOI: [10.1109/TAC.1976.1101126](https://doi.org/10.1109/TAC.1976.1101126).
18. *Penttinen J., Koivo H.* Multivariable tuning regulators for unknown systems // *Automatica*. — 1980. — July. — Vol. 16, no. 4. — P. 393—398. — DOI: [10.1016/0005-1098\(80\)90023-0](https://doi.org/10.1016/0005-1098(80)90023-0).

19. *Boyd S. P.* Linear matrix inequalities in system and control theory. — Philadelphia : Society for Industrial, Applied Mathematics, 1994. — (SIAM studies in applied mathematics ; vol. 15). — ISBN 978-0-89871-334-3.
20. *Zheng F., Wang Q.-G., Lee T. H.* On the design of multivariable PID controllers via LMI approach. — 2002.
21. *Feng Z.-Y., Guo H., She J., Xu L.* Weighted sensitivity design of multivariable PID controllers via a new iterative LMI approach // *Journal of Process Control*. — 2022. — Feb. — Vol. 110. — P. 24—34. — DOI: [10.1016/j.jprocont.2021.11.016](https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2021.11.016).
22. *Guo H., Feng Z.-Y., She J.* Discrete-time multivariable PID controller design with application to an overhead crane // *International Journal of Systems Science*. — 2020. — Oct. — Vol. 51, no. 14. — P. 2733—2745. — DOI: [10.1080/00207721.2020.1801881](https://doi.org/10.1080/00207721.2020.1801881).
23. *Solgi Y., Fatehi A., Nikoofard A., Shariati A.* Design of optimal PID controller for multivariable time-varying delay discrete-time systems using non-monotonic Lyapunov-Krasovskii approach // *Journal of the Franklin Institute*. — 2021. — Sept. — Vol. 358, no. 13. — P. 6634—6665. — DOI: [10.1016/j.jfranklin.2021.06.026](https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2021.06.026).
24. *Doyle J., Stein G.* Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 1981. — Feb. — Vol. 26, no. 1. — P. 4—16. — DOI: [10.1109/TAC.1981.1102555](https://doi.org/10.1109/TAC.1981.1102555).
25. *Safonov M., Laub A., Hartmann G.* Feedback properties of multivariable systems: The role and use of the return difference matrix // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 1981. — Feb. — Vol. 26, no. 1. — P. 47—65. — DOI: [10.1109/TAC.1981.1102566](https://doi.org/10.1109/TAC.1981.1102566).
26. *McFarlane D., Glover K.* A loop-shaping design procedure using  $H_{\infty}$  synthesis // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 1992. — June. — Vol. 37, no. 6. — P. 759—769. — DOI: [10.1109/9.256330](https://doi.org/10.1109/9.256330).
27. *Genç A. U., Impram S. T.* A State-Space Algorithm for Designing  $H_{\infty}$  Loop Shaping PID Controllers // *IFAC Proceedings Volumes*. — 2003. — June. — Vol. 36, no. 11. — P. 281—286. — DOI: [10.1016/S1474-6670\(17\)35677-X](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)35677-X).
28. *Boyd S., Hast M., Åström K. J.* MIMO PID tuning via iterated LMI restriction // *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. — 2016. — May. — Vol. 26, no. 8. — P. 1718—1731. — DOI: [10.1002/rnc.3376](https://doi.org/10.1002/rnc.3376).

29. *Hast M., Astrom K., Bernhardsson B., Boyd S.* PID design by convex-concave optimization // 2013 European Control Conference (ECC). — Zurich : IEEE, 07/2013. — P. 4460—4465. — ISBN 978-3-033-03962-9. — DOI: [10.23919/ECC.2013.6669312](https://doi.org/10.23919/ECC.2013.6669312).
30. *Apkarian P., Gahinet P.* A convex characterization of gain-scheduled  $H_{\infty}$  / controllers // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1995. — May. — Vol. 40, no. 5. — P. 853—864. — DOI: [10.1109/9.384219](https://doi.org/10.1109/9.384219).
31. *Briat C.* Linear Parameter-Varying and Time-Delay Systems: Analysis, Observation, Filtering & Control. Vol. 3. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2015. — (Advances in Delays and Dynamics). — ISBN 978-3-662-44049-0. — DOI: [10.1007/978-3-662-44050-6](https://doi.org/10.1007/978-3-662-44050-6).
32. *Tóth R., Heuberger P. S. C., Van den Hof P. M. J.* LPV system identification using series expansion models // Linear Parameter-Varying System Identification. — WORLD SCIENTIFIC, 12/2011. — P. 259—294. — ISBN 978-981-4355-44-5. — DOI: [10.1142/9789814355452\\_0010](https://doi.org/10.1142/9789814355452_0010).
33. *Duan G.-R., Yu H.-H.* LMIs in Control Systems. — 0th ed. — CRC Press, 06/2013. — ISBN 978-1-4665-8300-9. — DOI: [10.1201/b15060](https://doi.org/10.1201/b15060).
34. *Franklin G. F., Powell J. D., Workman M. L.* Digital control of dynamic systems. — 3rd ed. — Menlo Park, Calif : Addison-Wesley, 1998. — ISBN 978-0-201-33153-0.
35. *Ragazzini J. R., Zadeh L. A.* The analysis of sampled-data systems // Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, Part II: Applications and Industry. — 1952. — Vol. 71, no. 5. — P. 225—234. — DOI: [10.1109/TAI.1952.6371274](https://doi.org/10.1109/TAI.1952.6371274).
36. *Tsipkin Y. Z.* Theory of intermittent regulation // Avtomatika i Telemekhanika. — 1949. — T. 10, № 3. — C. 189—224.
37. *Doetsch G., Herschel R.* Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der Z-Transformation. — 5. Aufl., korrigierter Nachdr. der 3., neu neubearb. Aufl. — München : Oldenbourg, 1985. — ISBN 978-3-486-29845-1.
38. *Youla D., Jabr H., Bongiorno J.* Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers—Part II: The multivariable case // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1976. — June. — Vol. 21, no. 3. — P. 319—338. — DOI: [10.1109/TAC.1976.1101223](https://doi.org/10.1109/TAC.1976.1101223).

39. *Zames G.* On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems Part one: Conditions derived using concepts of loop gain, conicity, and positivity // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 1966. — Apr. — Vol. 11, no. 2. — P. 228—238. — DOI: [10.1109/TAC.1966.1098316](https://doi.org/10.1109/TAC.1966.1098316).
40. *Skogestad S., Postlethwaite I.* Multivariable Feedback Control: Analysis and Design. — J. Wiley & sons, 2005.
41. *Zhou K., Doyle J. C.* Essentials of robust control. — Upper Saddle River, N.J : Prentice Hall, 1998. — ISBN 978-0-13-525833-0.
42. *Boyd S. P., Barratt C. H.* Linear controller design: limits of performance. — Englewood Cliffs, N.J : Prentice Hall, 1991. — (Prentice Hall information and system sciences series). — ISBN 978-0-13-538687-3.
43. *Glover K., Sefton J., Mcfarlane D.* A Tutorial on Loop Shaping using H-Infinity Robust Stabilization // *IFAC Proceedings Volumes*. — 1990. — Aug. — Vol. 23, no. 8. — P. 117—126. — DOI: [10.1016/S1474-6670\(17\)51903-5](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)51903-5).
44. *Lyons R. G.* Understanding digital signal processing. — 2nd ed. — Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall PIR, 2004. — ISBN 978-0-13-108989-1.
45. *Котельников В. А.* О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи // *Усп. физ. наук*. — 2006. — Т. 176, № 7. — С. 762—770. — DOI: [10.3367/UFNr.0176.200607h.0762](https://doi.org/10.3367/UFNr.0176.200607h.0762).
46. *Åström K. J., Hägglund T.* Advanced PID control. — Research Triangle Park, NC : ISA-The Instrumentation, Systems, Automation Society, 2006. — ISBN 978-1-55617-942-6.
47. *Phillips C. L., Parr J. M., Riskin E. A.* Signals, systems, and transforms. — 4th ed. — Upper Saddle River, NJ : Pearson/Prentice Hall, 2008. — ISBN 978-0-13-198923-8. — OCLC: ocn133465573.
48. *Boyd S. P., Vandenberghe L.* Convex optimization. — Cambridge, UK : Cambridge University Press, 2004. — ISBN 978-0-521-83378-3.
49. *Lipp T., Boyd S.* Variations and extension of the convex–concave procedure // *Optimization and Engineering*. — 2016. — June. — Vol. 17, no. 2. — P. 263—287. — DOI: [10.1007/s11081-015-9294-x](https://doi.org/10.1007/s11081-015-9294-x).
50. *Grant M., Boyd S.* CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, version 2.1. — 03/2014. — <http://cvxr.com/cvx>.

51. *Lofberg J.* YALMIP : a toolbox for modeling and optimization in MATLAB // 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation (IEEE Cat. No.04CH37508). — Taipei, Taiwan : IEEE, 2004. — P. 284—289. — ISBN 978-0-7803-8636-5. — DOI: [10.1109/CACSD.2004.1393890](https://doi.org/10.1109/CACSD.2004.1393890).
52. *Tütüncü R. H., Toh K. C., Todd M. J.* Solving semidefinite-quadratic-linear programs using SDPT3 // *Mathematical Programming.* — 2003. — Feb. — Vol. 95, no. 2. — P. 189—217. — DOI: [10.1007/s10107-002-0347-5](https://doi.org/10.1007/s10107-002-0347-5).
53. *ApS M.* The MOSEK optimization toolbox for MATLAB manual. Version 9.0. — 2019.
54. «УНУ Цифровой комплекс реального времени» ИПУ РАН. — URL: <https://www.ipu.ru/plasma/about> (дата обр. 25.10.2024).
55. *Huang H.-h., Cheng W., Wang H.-x., Gao G., Wu Y.-b.* Development of New Fast Control Power Supply for EAST // *IEEE Transactions on Applied Superconductivity.* — 2013. — Oct. — Vol. 23, no. 5. — P. 4201806—4201806. — DOI: [10.1109/TASC.2013.2271985](https://doi.org/10.1109/TASC.2013.2271985).
56. *Huang H., Zheng X., Wu Y., Sheng Z.* Design of high precision and high power bidirectional adjustable power supply // *Fusion Engineering and Design.* — 2021. — Jan. — Vol. 162. — P. 112103. — DOI: [10.1016/j.fusengdes.2020.112103](https://doi.org/10.1016/j.fusengdes.2020.112103).
57. *Mitrishkin Y., Kuznetsov E.* Estimation of parameters of stabilized plasma // *Plasma Devices and Operations.* — 1994. — Jan. — Vol. 2, no. 3. — P. 277—286. — DOI: [10.1080/10519999408241162](https://doi.org/10.1080/10519999408241162).
58. *Kuznetsov E. A., Mitrishkin Y. V., Kartsev N. M.* Current inverter as self-oscillating actuator in applications for plasma position control systems in the Globus-M/M2 and T-11M tokamaks // *Fusion Engineering and Design.* — 2019. — June. — Vol. 143. — P. 247—258. — DOI: [10.1016/j.fusengdes.2019.02.105](https://doi.org/10.1016/j.fusengdes.2019.02.105).
59. *Mitrishkin Y. V., Pavlova E. A., Kuznetsov E. A., Gaydamaka K. I.* Continuous, saturation, and discontinuous tokamak plasma vertical position control systems // *Fusion Engineering and Design.* — 2016. — Oct. — Vol. 108. — P. 35—47. — DOI: [10.1016/j.fusengdes.2016.04.026](https://doi.org/10.1016/j.fusengdes.2016.04.026).
60. *Kuo B. C.-i.* Digital control systems. — 2nd. — New York : Oxford University Press, 1995. — (The Oxford series in electrical and computer engineering). — ISBN 978-0-19-512064-6.

61. *Hiramoto K.* Iterative System Identification and Controller Design with an LMI-Based Framework: Windsurfer-Like Approach // *Journal of Applied Mathematics*. — 2012. — Vol. 2012. — P. 1—18. — DOI: [10.1155/2012/328186](https://doi.org/10.1155/2012/328186).
62. *Mitrishkin Y., Kartsev N., Prokhorov A., Pavlova E., Korenev P., Konkov A., Kruzhdov V., Ivanova S.* Tokamak plasma models development for plasma magnetic control systems design by first principle equations and identification approach // *Procedia Computer Science*. — 2021. — Vol. 186. — P. 466—474. — DOI: [10.1016/j.procs.2021.04.167](https://doi.org/10.1016/j.procs.2021.04.167).
63. *Welch P.* The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra // *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*. — 1967. — June. — Vol. 15, no. 2. — P. 70—73. — DOI: [10.1109/TAU.1967.1161901](https://doi.org/10.1109/TAU.1967.1161901).
64. *Субботин М., Гостев А., Хрипунов В.* Некоторые особенности размещения токамака ИГНИТОР на площадке АО «ГНЦ РФ ТРИНИТИ» // *ВАНТ. Серия: Термоядерный синтез*. — 2018. — Т. 41, № 3. — С. 80—92. — DOI: [10.21517/0202-3822-2018-41-3-80-92](https://doi.org/10.21517/0202-3822-2018-41-3-80-92).
65. *Yuan Q., Xiao B., Luo Z., Walker M., et al. A. W.* Plasma current, position and shape feedback control on EAST // *Nuclear Fusion*. — 2013. — Vol. 53, no. 4. — P. 043009. — DOI: [10.1088/0029-5515/53/4/043009](https://doi.org/10.1088/0029-5515/53/4/043009).
66. *Villone F., Albanese R., Ambrosino G., et al. A. P.* Strategies for the plasma position and shape control in IGNITOR // *Fusion Engineering and Design*. — 2007. — Vol. 82, no. 5. — P. 1036—1044. — DOI: [10.1016/j.fusengdes.2007.04.052](https://doi.org/10.1016/j.fusengdes.2007.04.052). — *Proceedings of the 24th Symposium on Fusion Technology*.
67. *Minaev V., Gusev V., Sakharov N., Varfolomeev V., Bakharev N., Belyakov V., Bondarchuk E., Brunkov P., Chernyshev F., Davydenko V., Dyachenko V., Kavin A., Khitrov S., Khromov N., Kiselev E., Konovalov A., Kornev V., Kurskiev G., Labusov A., Melnik A., Mineev A., Mironov M., Miroshnikov I., Patrov M., Petrov Y., Rozhansky V., Saveliev A., Senichenkov I., Shchegolev P., Shcherbinin O., Shikhovtsev I., Sladkomedova A., Solokha V., Tanchuk V., Telnova A., Tokarev V., Tolstyakov S., Zhilin E.* Spherical tokamak Globus-M2: design, integration, construction // *Nuclear Fusion*. — 2017. — Vol. 57, no. 6. — P. 066047. — DOI: [10.1088/1741-4326/aa69e0](https://doi.org/10.1088/1741-4326/aa69e0).

68. *Chilali M., Gahinet P.*  $\mathcal{H}_\infty$  design with pole placement constraints: an LMI approach // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1996. — Mar. — Vol. 41, no. 3. — P. 358—367. — DOI: [10.1109/9.486637](https://doi.org/10.1109/9.486637).
69. *Bakka T., Karimi H. R.* Robust  $\mathcal{H}_\infty$  Dynamic Output Feedback Control Synthesis with Pole Placement Constraints for Offshore Wind Turbine Systems // Mathematical Problems in Engineering. — 2012. — Vol. 2012. — P. 18.
70. *Scherer C., Gahinet P., Chilali M.* Multiobjective output-feedback control via LMI optimization // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1997. — Vol. 42, no. 7. — P. 896—911. — DOI: [10.1109/9.599969](https://doi.org/10.1109/9.599969).
71. *Khargonekar P. P., Petersen I. R., Zhou K.* Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stabilizability and  $\mathcal{H}_\infty$  control theory // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1990. — Vol. 35, no. 3. — P. 356—361. — DOI: [10.1109/9.50357](https://doi.org/10.1109/9.50357).
72. *Watkins D. S.* Fundamentals of matrix computations. — 3rd ed. — Hoboken, N.J : Wiley, 2010. — (Pure and applied mathematics). — ISBN 978-0-470-52833-4. — OCLC: ocn500243329.

### Публикации автора по теме диссертации

#### В изданиях, входящих в международные базы цитирования Web of Science и Scopus

73. *Konkov A. E., Mitrishkin Y. V.* Synthesis Methodology for Discrete MIMO PID Controller with Loop Shaping on LTV Plant Model via Iterated LMI Restrictions // *Mathematics*. — 2024. — Mar. — Vol. 12, no. 6. — P. 810. — DOI: [10.3390/math12060810](https://doi.org/10.3390/math12060810). — (WoS Q1: JIF – 2,3).
74. *Konkov A. E., Mitrishkin Y. V.* Comparison Study of Power Supplies in Real-Time Robust Control Systems of Vertical Plasma Position in Tokamak // *IFAC-PapersOnLine*. — 2022. — Vol. 55, no. 9. — P. 327–332. — DOI: [10.1016/j.ifacol.2022.07.057](https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.07.057). — (Scopus Q3: SJR – 0,37).
75. *Mitrishkin Y. V., Korenev P. S., Konkov A. E., Kartsev N. M., Smirnov I. S.* New horizontal and vertical field coils with optimised location for robust decentralized plasma position control in the IGNITOR tokamak // *Fusion Engineering and Design*. — 2022. — Vol. 174. — P. 112993. — DOI: [10.1016/j.fusengdes.2021.112993](https://doi.org/10.1016/j.fusengdes.2021.112993). — (WoS Q1: JIF – 1,9).
76. *Mitrishkin Y. V., Korenev P. S., Konkov A. E., Kruzhev V. I., Ovsyannikov N. E.* New Identification Approach and Methods for Plasma Equilibrium Reconstruction in D-Shaped Tokamaks // *Mathematics*. — 2021. — Dec. — Vol. 10, no. 1. — P. 40. — DOI: [10.3390/math10010040](https://doi.org/10.3390/math10010040). — (WoS Q1: JIF – 2,3).
77. *Konkov A. E., Mitrishkin Y. V., Korenev P. S., Patrov M. I.* Robust Cascade LMI Design of MIMO Control System for Plasma Position, Current, and Shape Model with Time-Varying Parameters in a Tokamak // *IFAC-PapersOnLine*. — 2020. — Vol. 53, no. 2. — P. 7344–7349. — DOI: [10/gr4bxz](https://doi.org/10/gr4bxz). — (Scopus Q3: SJR – 0,37).

#### В изданиях из списка ВАК

78. *Митришкин Ю. В., Коньков А. Е., Корнев П. С.* Сравнительное исследование систем управления реального времени вертикальным положением плазмы в токамаке с разными источниками питания обмотки горизонтального управляющего поля // *ВАНТ. Серия: Термоядерный синтез*. — 2022. — Т. 45, № 3. — С. 34–49. — (RSCI Q2: R – 0,27) — [Перевод: *Mitrishkin Y. V., Konkov A. E., Korenev P. S.* Comparative Study of Real-Time Control Systems of

- Vertical Plasma Position in Tokamak with Different Power Supplies for Horizontal Control Field Coil // *Physics of Atomic Nuclei*. — 2023. — Vol. 86, no. 7. — P. 1616–1628. — DOI: [10.1134/S1063778823070165](https://doi.org/10.1134/S1063778823070165). — (WoS Q4: JIF – 0,3)].
79. Митришкин Ю. В., Корнев П. С., Коньков А. Е., Карцев Н. М. Подавление смещений плазмы по вертикали системой управления неустойчивым вертикальным положением плазмы в D-образном токамаке // *Автоматика и телемеханика*. — 2022. — № 4. — С. 100–124. — DOI: [10.31857/S0005231022040067](https://doi.org/10.31857/S0005231022040067). — (RSCI Q1: R – 0,694) — [Перевод: *Mitrishkin Y. V., Korenev P. S., Konkov A. E., Kartsev N. M.* Suppression of Vertical Plasma Displacements by Control System of Plasma Unstable Vertical Position in D-Shaped Tokamak // *Automation and Remote Control*. — 2022. — Vol. 83, no. 4. — P. 579–599. — DOI: [10.1134/S0005117922040051](https://doi.org/10.1134/S0005117922040051). — (WoS Q4: JIF – 0,6)].
80. Коньков А. Е., Корнев П. С., Митришкин Ю. В., Балаченков И. М., Киселев Е. О. Система магнитного управления плазмой реального времени с алгоритмом восстановления равновесия в обратной связи для токамака Глобус-М2 // *Физика плазмы*. — 2023. — Т. 49, № 12. — С. 1348–1356. — DOI: [10.31857/S0367292123600760](https://doi.org/10.31857/S0367292123600760). — (RSCI Q1: R – 0,41) — [Перевод: *Konkov A. E., Korenev P. S., Mitrishkin Y. V., Balachenkov I. M., Kiselev E. O.* Real-Time Plasma Magnetic Control System with Equilibrium Reconstruction Algorithm in the Feedback for the Globus-M2 Tokamak // *Plasma Physics Reports*. — 2023. — Vol. 49, no. 12. — P. 1552–1559. — DOI: [10.1134/S1063780X23601827](https://doi.org/10.1134/S1063780X23601827). — (WoS Q4: JIF – 0,9)].
81. Корнев П. С., Коньков А. Е., Митришкин Ю. В., Балаченков И. М., Киселев Е. О., Минаев В. Б., Сахаров Н. В., Петров Ю. В. Усовершенствованный алгоритм FCDI для восстановления равновесия плазмы в токамаке // *Письма в журнал технической физики*. — 2023. — Т. 49, № 7. — С. 36–39. — DOI: [10.21883/PJTF.2023.07.54920.19468](https://doi.org/10.21883/PJTF.2023.07.54920.19468). — (RSCI Q1: R – 0,37) — [Перевод: *Korenev P. S., Konkov A. E., Mitrishkin Y. V., Balachenkov I. M., Kiselev E. O., Minaev V. B., Sakharov N. V., Petrov Y. V.* Improved FCDI algorithm for tokamak plasma equilibrium reconstruction // *Technical Physics Letters*. — 2023. — Vol. 49, no. 4. — P. 34–37. — DOI: [10.21883/TPL.2023.04.55873.19468](https://doi.org/10.21883/TPL.2023.04.55873.19468). — (WoS Q4: JIF – 0,8)].

**В сборниках трудов конференций**

82. Митришкин Ю. В., Коньков А. Е., Корнев П. С. Цифровой моделирующий стенд реального времени для управления плазмой в токамаках // Материалы XVI Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого). — 2022. — С. 286—289.

**Зарегистрированные патенты**

83. Заявка 2022117879 Россия, МПК<sup>7</sup> G 21 B 1/00. Способ импульсного цифрового каскадного управления положением плазмы в D-образном токамаке / Ю. В. Митришкин, А. Е. Коньков (Россия) ; заявитель ФГБОУВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова» (МГУ) (RU). — № RU 2 788 188 C1 ; опубл. 17.01.2023, приоритет 30.06.2022 (Рос. Федерация). — 18 с. : ил.
84. Заявка 2022117882 Россия, МПК<sup>7</sup> G 21 B 1/00. Способ быстродействующего определения формы плазмы в камере токамака в течение диверторной фазы плазменных разрядов / Ю. В. Митришкин, А. Е. Коньков, П. С. Корнев, В. И. Кружков (Россия) ; заявитель ФГБОУВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова» (МГУ) (RU). — № RU 2 787 571 C1 ; опубл. 11.01.2023, приоритет 30.06.2022 (Рос. Федерация). — 20 с. : ил.

## Список рисунков

1.1	Пример матричного ПИД-регулятора с двумя входами ( $e_1, e_2$ ) и тремя выходами ( $u_1, u_2, u_3$ ). . . . .	12
1.2	Структурная схема следящей системы управления. . . . .	15
1.3	Система управления с выходной мультипликативной неопределенностью в модели объекта. . . . .	18
1.4	Система управления с выходной аддитивной неопределенностью в модели объекта. . . . .	18
1.5	Примеры трех функций формы. . . . .	24
1.6	Пример, иллюстрирующий формирование контура. Сингулярные значения частотных откликов передаточных функций $L(z)$ , $S(z)$ и $T(z)$ многомерной цифровой системы управления и функции формы ( $b_S, b_T$ ). Области качества и робастности залиты цветом. . . . .	26
1.7	Сингулярные значения передаточных функций $L(z)$ , $S(z)$ и $T(z)$ системы управления ММО на рис. 1.6 с добавлением числа обусловленности для $T(z)$ . . . . .	30
2.1	Структурная схема базовой цифровой системы управления. . . . .	40
2.2	Структурная схема цифровой системы управления при проведении полунатурного моделирования. . . . .	42
2.3	Стенд реального времени в ИПУ РАН (фото сделано автором). . . . .	43
2.4	Клеммники модулей входа-выхода двух ЦМРВ (фото сделано автором). . . . .	44
2.5	Симулинк-схема верхнего уровня для ЦМРВ «Регулятор». . . . .	46
2.6	Симулинк-схема верхнего уровня для ЦМРВ «Модель объекта». . . . .	46
2.7	Симулинк-схема верхнего уровня для ЦМРВ «Регулятор» с включенной внутренней моделью объекта. . . . .	46
3.1	Схема Н-моста. . . . .	52
3.2	Структурная схема инвертора напряжения в релейном автоколебательном режиме. . . . .	52
3.3	Структурная схема инвертора напряжения в режиме 9-уровневой ШИМ на четырех последовательно соединенных Н-мостах. . . . .	52
3.4	Структурная схема однокаскадной системы управления вертикальным положением плазмы. . . . .	53

- 3.5 Токи в ОГУП при подаче синусоидального сигнала частотой 10 Гц на входы двух инверторов напряжения. . . . . 54
- 3.6 Структурная схема системы управления с инвертором напряжения в режиме 9-уровневой ШИМ при проведении полунатурного моделирования. . . . . 55
- 3.7 Результаты полунатурного моделирования системы управления положением плазмы с инвертором напряжения в режиме 9-ти уровневой ШИМ. . . . . 56
- 3.8 Результаты полунатурного моделирования системы управления положением плазмы с инвертором напряжения в релейном автоколебательном режиме. . . . . 57
- 3.9 Спектр напряжений на ОГУП для обоих источников питания и их отношение. . . . . 58
- 3.10 Напряжение на ОГУП с рис. 3.8 на временном интервале от 0,96 до 1,06 сек. . . . . 59
- 3.11 Полунатурное моделирование инвертора напряжения в режиме 9-ти уровневой ШИМ. Синим цветом показан сигнал на входе ШИМ-контроллера умноженный на 1000. Красный сигнал – напряжение на выходе инвертора напряжения.  $T_s = 100$  мкс,  $T_{PWM} = 1$  мс, а  $U_{max} = 1$  кВ. . . . . 63
- 3.12 Десять ШИМ импульсов изображенных на рис. 3.11. . . . . 63
- 3.13 Модель одного Н-моста в Simscape Electrical. . . . . 63
- 3.14 Блок-схема децентрализованной каскадной системы управления положением плазмы в токамаке ИГНИТОР: ОГУП и ОВУП показаны тем же цветом, что и на рис. 3.15, красным и зеленым.  $A_{HFC}$  и  $A_{VFC}$  – инверторы напряжения в режиме ШИМ для ОГУП и ОВУП. Внутренние каскады содержат регуляторы тока  $C_{I_{HFC}}$  и  $C_{I_{VFC}}$ , которые выделены красным цветом. Внешние каскады показаны фиолетовым цветом и содержат регуляторы положения плазмы  $C_Z$  и  $C_R$ . 64
- 3.15 Оптимизированная система обмоток полоидального поля проекта токамака ИГНИТОР . . . . . 65

3.16	Результаты моделирования системы управления положением плазмы в токамаке ИГНИТОР, напряжения на ОГУП и ОВУП и их средние за период ШИМ, которые показаны красными линиями, смещения токов в ОГУП и ОВУП и отклонение тока плазмы. Красные пунктирные линии являются задающими воздействиями. . . . .	67
4.1	Полоидальное сечение токамака Глобус-М2 с восстановленной алгоритмом FCDI-FF сепаратрисой плазмы, положениями ударных точек $g_{1-2}$ и зазорами между сепаратрисой и лимитером $g_{3-5}$ . Красные точки - положения магнитных петель. . . . .	71
4.2	Структурная схема системы магнитного управления плазмой для токамака Глобус-М2. . . . .	72
4.3	Структурная схема внутреннего каскада управления положением плазмы и токами в обмотках полоидального поля с источниками питания. . . . .	73
4.4	Структурная схема системы магнитного управления плазмой для токамака Глобус-М2 при проведении полунатурного моделирования. . . . .	74
4.5	Результаты моделирования в реальном времени, когда система управления смещает ударные точки $g_{1-2}$ и зазоры $g_{3-5}$ во время диверторной фазы плазменного разряда № 37326 токамака Глобус-М2. Красные линии - задающие воздействия. . . . .	75
4.6	VisualPSI отображает равновесие плазмы в течение разряда № 42416 токамака Глобус-М2, восстановленное алгоритмом FCDI-FF . . . . .	77
4.7	VisualPSI отображает равновесие плазмы в течение разряда № 42416 токамака Глобус-М2, восстановленное алгоритмом FCDI-IT . . . . .	78
4.8	VisualPSI в режиме сравнения равновесий плазмы в течение разряда № 42416 токамака Глобус-М2, восстановленных алгоритмами восстановления FCDI-FF и FCDI-IT . . . . .	78
4.9	VisualPSI отображает сравнение параметров плазмы в течение разряда № 42416 токамака Глобус-М2, восстановленных алгоритмами восстановления FCDI-FF и FCDI-IT . . . . .	79
4.10	Структурная схема подключения робастного наблюдателя состояния. . . . .	81

- 4.11 Сравнение вариаций зазоров  $\delta g$  на выходе LPV модели, полученной из алгоритма восстановления равновесия FCDI (синяя линия), и оценки вариаций зазоров  $\delta \tilde{g}$ , полученных с помощью робастного наблюдателя (красная линия). Разряд 37263 токамака Глобус-М2. . . . 83
- 4.12 Структурная схема системы управления формой плазмы с внутренним каскадом управления по потокам на магнитных петлях (выделен синим цветом). . . . . 84
- 4.13 Структурная схема трёх каскадов управления. . . . . 85
- 4.14 Результаты моделирования системы магнитного управления плазмой с внутренним каскадом управления по потоками на магнитных петлях на модели плазменного разряда № 37239 токамака Глобус-М2. Красные пунктирные линии являются задающими воздействиями. . . . 89



## Приложение А

### Акт о внедрении алгоритма FCDI



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ

**Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе  
Российской академии наук**

Политехническая ул., 26, С.-Петербург, 194021  
Телефон: (812) 297-2245 Факс: (812) 297-1017  
post@mail.ioffe.ru http://www.ioffe.ru

ИНН 7802072267/КПП 780201001  
ОКПО 02698463  
ОГРН 1037804006998

"УТВЕРЖДАЮ"

№ \_\_\_\_\_

На № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_

Заместитель директора по научной работе  
доктор физ.-мат. наук



П.Н. Брунов

25 октября 2022 г.

#### АКТ О ВНЕДРЕНИИ СИСТЕМЫ МАГНИТНОЙ ДИАГНОСТИКИ

Комиссия в составе старшего научного сотрудника, к.ф.-м.н. Сахарова Николая Владимировича (председатель), ведущего научного сотрудника, к.ф.-м.н. Минаева Владимира Борисовича, старшего научного сотрудника, к.ф.-м.н. Петров Юрия Викторовича, младшего научного сотрудника Киселева Евгения Олеговича рассмотрела результаты научно-практического внедрения в физический эксперимент на УНУ «Сферический токамак Глобус-М» алгоритма восстановления равновесия плазмы «FCDI (Flux-Current Distribution Identification)», разработанного научным сотрудником МГУ им. М.В. Ломоносова и ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН Корневым Павлом Сергеевичем и младшим научным сотрудником МГУ им. М.В. Ломоносова и ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН Коньковым Артёмом Евгеньевичем по гранту Российского Научного Фонда № 21-79-20180 под научным руководством доктора технических наук, профессора физического факультете МГУ им. М.В. Ломоносова, главного научного сотрудника ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН Митришкина Юрия Владимировича.

#### Объект внедрения

Алгоритм восстановления равновесия плазмы «FCDI» реализован в программной среде MATLAB/Simulink и может работать в двух режимах: «FCDI-IT» – восстановление равновесия плазмы методом итераций Пикара и «FCDI-FF» – восстановление равновесия плазмы методом неподвижных токовых колец (филаментов). Алгоритм разработан с возможностью использования на целевых машинах реального времени Speedgoat Performance или КМП «РИТМ». Алгоритм восстанавливает равновесие плазмы в реальном времени в

каждой временной точке дискретной выборки за 200 мкс в режиме «FCDI-IT» и 30 мкс в режиме «FCDI-FF», что позволяет его применение в обратной связи цифровых систем управления положением, током и формой плазмы вытянутых по вертикали токамаков, в частности, сферического токамака Глобус-М2.

Пользовательский интерфейс алгоритма восстановления равновесия плазмы «FCDI» обеспечен разработанным м.н.с. А.Е. Коньковым и н.с. П.С. Корневым приложением «VisualPSI», позволяющим осуществлять вывод сепаратрисы и внутренних магнитных поверхностей плазмы, 3-х мерного распределения полоидального потока (Рис. 1), и вывод графиков восстановленных параметров плазмы (Рис. 2), а также их экспорт в форматах mat, json и G-EQDSK.

Подключение алгоритма восстановления равновесия плазмы «FCDI» к базе данных плазменных разрядов токамака Глобус-М2 обеспечено разработанным м.н.с. А.Е. Коньковым программным пакетом «Tokamak Datasets Processing Toolbox», позволяющим осуществлять обработку экспериментальных данных плазменного разряда в среде MATLAB.

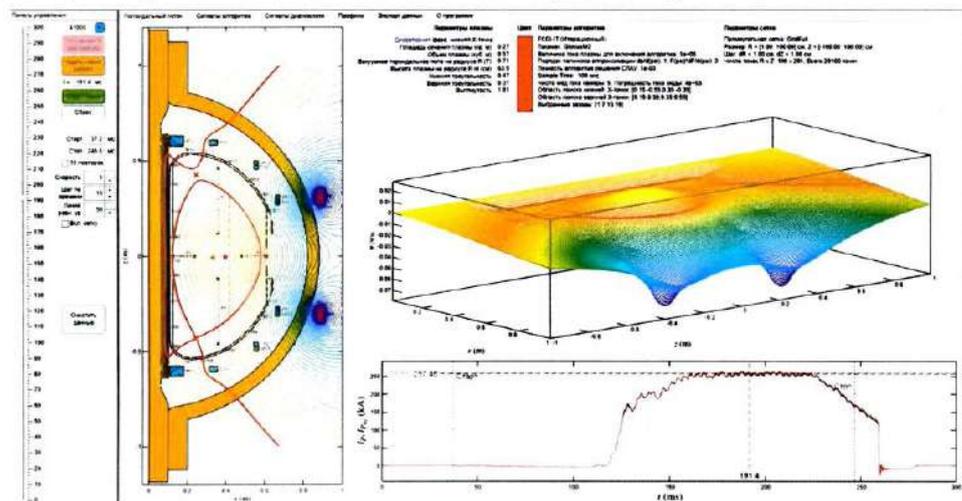


Рис. 1. Интерфейс VisualPsi. Восстановленные сепаратриса и магнитные поверхности плазмы, а также трехмерное распределение полоидального магнитного потока в токамаке  $\Psi$ , измеренный и восстановленный токи плазмы  $I_p$  и  $I_{p,rec}$ .

### Процедура внедрения

На подключенной к локальной базе данных разрядов токамака ЭВМ были установлены программный пакет «Tokamak Datasets Processing Toolbox», алгоритм восстановления равновесия плазмы «FCDI» и приложение для визуализации восстановленных равновесий «VisualPsi».

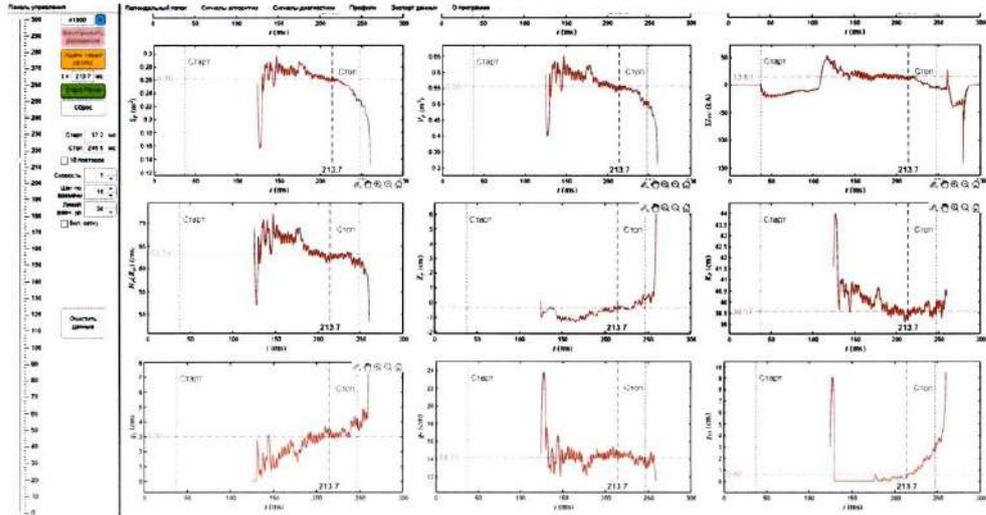


Рис. 2. Интерфейс VisualPsi. Графики восстановленных площади  $S_p$  и объема плазмы  $V_p$ , суммарного тока на камере токамака  $\sum I_{VV}$ , высоты вертикальной хорды интерферометра  $H_r$ , положения плазмы  $R_p$  и  $Z_p$  и зазоров  $g_1, g_2, g_{13}$  между плазмой и лимитером токамака.

### Заключение комиссии

Комиссия установила, что перечисленное программное обеспечение в составе системы магнитной диагностики плазменного разряда было внедрено на УНУ «Сферический токамак Глобус-М» 11 октября 2022 г., и позволило восстанавливать равновесие плазмы, включая форму, положение, плотность тока, профили давления, полоидального тока и запаса устойчивости плазмы  $q$ , положения ударных и X-точек, рассчитываемые вдоль сепаратрисы с шагом  $15^\circ$  24 зазора между плазмой и лимитером токамака, распределения магнитных полей в токамаке, на основании показаний магнитной диагностики токамака, а именно магнитных петель и поясов Роговского.

Председатель комиссии

Н.В. Сахаров

Члены комиссии

В.Б. Минаев

Ю.В. Петров

Е.О. Киселев