МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Галстян Арсен Хачатурович

УДК 514.172 + 514.177.2 + 515.124

Проблема Ферма–Штейнера в гиперпространствах

Специальность 1.1.3 — «Геометрия и топология»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Тужилин Алексей Августинович

Москва–2023 г.

Оглавление

Введение

Актуальность темы. Диссертация посвящена развитию теории кратчайших сетей (более общо, экстремальных сетей), которая составляет большую область метрической геометрии.

В диссертационной работе решены две следующие задачи. Первая задача решена автором, А. А. Тужилиным и А. О. Ивановым с равнозначным вкладом всех трёх специалистов, вторая задача решена автором диссертации самостоятельно.

1. Построить универсальную теорию, позволяющую проводить различного рода геометричекие оптимизации при решении проблемы Ферма–Штейнера в гиперпространствах над конечномерными нормированными пространствами для случая границ, состоящих лишь из конечных множеств. В качестве основного практического ориентира взять конфигурацию из работы [1]. А именно, требуется упростить предлагаемое в [1] решение, сделать его более прозрачным, конструктивным и методичным.

2. Дать ответ на вопрос: что можно сказать о решении проблемы Ферма–Штейнера в гиперпространствах над конечномерными нормированными пространствами при переходе от границы, состоящей из конечных компактов, к границе из их выпуклых оболочек? А именно, в каких случаях переход не повлияет на значение минимума суммы расстояний до граничных компактов, а в каких он его изменит? И если изменит, то можно ли в таком случае предъявить какие-то оценки снизу на разницу минимумов для двух границ?

Краткая историческая справка и общая постановка проблемы Ферма–Штейнера. Геометрические вариационные задачи об оптимальном соединении привлекают внимание специалистов на протяжении столетий как своей математической красотой и сложностью, так и прикладной значимостью. Если говорить неформальным языком, общая постановка проблемы такова: требуется соединить заданное конечное подмножество $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ метрического пространства (Y, ρ) неким оптимальным, в смысле общей длины соединения, образом (мы предполагаем известным как соединять пары точек в (Y, ρ), поэтому остаётся выбрать, какие именно точки соединить). Подробный исторический обзор и сводку современных результатов можно найти в книгах [2, 3, 4, 5].

Впервые подобную задачу поставил, видимо, П. Ферма, предложивший своим ученикам найти такую точку плоскости, что сумма расстояний от нее до трех фиксированных точек минимальна. Таким образом, уже Ферма рассматривал дополнительные вершины, “дорожные развилки”, при минимизации общей длины соединения. Сходные вопросы обсуждались в работах Ж. Д. Жергонна, И. К. Ф. Гаусса и других специалистов, и современная формулировка задачи поиска кратчайшего дерева, соединяющего данное конечное подмножество точек метрического пространства, появилась (для случая плоскости) в работе В. Ярника и М. Кёсслера [6]. Благодаря замечательной книге [7], эта задача стала широко известна как *проблема Штейнера*.

Поиск глобального минимума может быть чрезвычайно труден, и это в полной мере относится к проблеме Штейнера. Здесь сложность возникает благодаря так называемому “комбинаторному взрыву” — очень быстро растущему (с ростом числа n граничных точек) количеству возможных способов соединить между собой исходные и добавленные точки пространства, другими словами, количеству структур деревьев, которые могут соединять данную границу.

Чтобы уменьшить комбинаторную сложность, рассматривают другие постановки задачи о минимальном соединении. Одна из возможностей состоит в том, чтобы зафиксировать структуру дерева (так называемая задача о поиске минимального параметрического дерева, см. [2]). Самая простая структура в этом случае — дерево типа звезда, единственная дополнительная вершина y которого соединена с каждой точкой исходного множества A. Длина такого дерева, очевидно, равна сумме расстояний от y до всех точек из A. Таким образом, возникает следующая *задача Ферма–Штейнера*: для заданного конечного подмножества $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ метрического пространства (Y, ρ) требуется найти все точки $y \in Y$, в которых функция $S(A, y) = \sum_i \rho(y, A_i)$ принимает наименьшее значение. Именно этим обобщением задачи Ферма занимался Я. Штейнер для случая плоскости и трехмерного пространства.

Точки из множества A называют *граничными*, а само множество A — *границей* или *граничным множеством*. Через $\Sigma(A)$ мы обозначим множество всех решений задачи Ферма–Штейнера для граничного множества A. Сами решения обычно называют *точками Ферма–Штейнера* или, иногда, *геометрическими средними* для A.

Следует отметить, что задача Ферма–Штейнера на плоскости эквивалентна так называемой задаче Вебера с постоянной весовой функцией, см. [8]. Еще одна близкая, но другая задача была поставлена Д. Цисликом, который предложил минимизировать длину всех деревьев, соединяющих данное граничное множество и имеющих не более k дополнительных вершин, см. [3]. Подчеркнем, что при $k = 1$ эта задача неэквивалентна задаче Ферма–Штейнера: единственная дополнительная вершина в случае Цислика не обязана соединяться со всеми граничными вершинами.

В общем случае множество решений $\Sigma(A)$ задачи Ферма–Штейнера может оказаться пустым, но для ограниченно компактных метрических пространств (напомним, что метрическое пространство называется ограниченно компактным, если каждый замкнутый шар в нём компактен) решение существует для любого непустого граничного множеста A, см. [1].

Обзор проблемы Ферма–Штейнера в гиперпространствах. Далее будет говориться о так называемом расстоянии Хаусдорфа [9, 10]. Введём соответствующие определения.

Определение 1.1.1. Пусть A — подмножество метрического пространства X. *Расстоянием от точки $p \in X$ до подмножества A* называется величина

$$|p\,A| = \inf\{|pa| \,:\, a \in A\}.$$

В частности, когда $A = \emptyset$, полагаем

$$|p\,\emptyset| = \infty.$$

Определение 1.2.1. Пусть A — подмножество метрического пространства. Множества

$$B_r(A) = \{p \,:\, |pA| \le r\};\;\; U_r(A) = \{p \,:\, |pA| < r\}$$

называются, соответственно, *замкнутым* и *открытым шаром с центром в A радиуса r*.

Определение 1.4.2. *Расстоянием Хаусдорфа* между подмножествами A и B метрического пространства называется величина

$$d_H(A, B) = \inf\bigl\{r \,:\, A \subset B_r(B), B \subset B_r(A)\bigr\}.$$

В диссертации проблема Ферма–Штейнера рассматривается в метрическом пространстве $Y = \mathcal{H}(X)$ непустых замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства X, где в качестве метрики на $\mathcal{H}(X)$ берётся расстояние Хаусдорфа. Пространство $Y = \mathcal{H}(X)$ в литературе [11] часто называют *гиперпространством над пространством* X. Геометрия пространств $\mathcal{H}(X)$ активно изучается благодаря таким важным приложениям, как распознавание и сравнение образов, построение непрерывных деформаций геометрических объектов друг в друга и др. (см., например, [12], где изучаются кратчайшие кривые в пространствах $\mathcal{H}(X)$, или [13, 14, 15], где рассматривается более общее расстояние Громова–Хаусдорфа).

Проблема Ферма–Штейнера в $\mathcal{H}(X)$ также имеет потенциальные приложения. По сравнению с *задачей о поиске точки $x \in X$*, на которой достигается минимум суммы расстояний Хаусдорфа до подмножеств A_i, входящих в границу A, при решении проблемы Ферма–Штейнера в $\mathcal{H}(X)$ минимизация идет по существенно более широкому классу объектов, а именно, по всем (а не только по одноточечным) замкнутым ограниченным подмножествам в X. Как следствие, минимальное значение может существенно уменьшиться. В этом случае более сложные неодноточечные “развилки” могут дать существенную экономию в стоимости соединения в целом. С другой стороны, каждый элемент $K \in \Sigma(A)$ можно рассматривать как некое “усреднение” исходных граничных множеств A_i, что дает возможность строить деформацию любого A_i в любое A_j через общую “усредненную развилку” K. Проблема Ферма–Штейнера в $\mathcal{H}(X)$ для ограниченно компактного метрического пространства X рассматривалась в работе [1]. В этом случае $\mathcal{H}(X)$ совпадает с множеством всех компактных подмножеств пространства X. Помимо доказательства существования решения для любого непустого конечного граничного множества $A \subset \mathcal{H}(X)$, в работе [1] описана структура множества $\Sigma(A)$ всех решений, которые называются *компактами Штейнера*. Напомним основные результаты из [1].

Пусть $K \in \Sigma(A)$ — некоторый компакт Штейнера. Рассмотрим вектор расстояний от него до граничных компактов: $d(K, A) = \big(d_H(K, A_1), \ldots, d_H(K, a_n)\big)$ и пусть $\Omega(A) = \big\{d(K, A) : K \in \Sigma(A)\big\}$. Для каждого $d \in \Omega(A)$ положим $\Sigma_d(A) = \big\{K \in \Sigma(A) : d(K, A) = d\big\}$. Таким образом, множество $\Sigma(A)$ непусто и разбито на классы $\Sigma_d(A)$, $d \in \Omega(A)$, соответствующие наборам расстояний d до граничных компактов $A_i \in A$. Каждый класс $\Sigma_d(A)$, как правило, состоит более чем из одного элемента, и эти элементы частично упорядочены по включению. В работе [1] показано, что каждый класс $\Sigma_d(A)$ содержит наибольший элемент (так называемый *максимальный компакт Штейнера*), минимальные элементы (соответственно, *минимальные компакты Штейнера*), и, более того, компакт $K \subset X$ является компактом Штейнера из класса $\Sigma_d(A)$, если и только если K содержится в наибольшем и содержит один из минимальных компактов Штейнера из $\Sigma_d(A)$. Отметим, что поиск векторов расстояний d является отдельной и нетривиальная задачей.

Также статья [1] содержит неожиданный пример симметричного граничного множества $A = \{A_1, A_2, A_3\} \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$, где каждое A_i состоит из двух соседних вершин правильного шестиугольника, и A_i получается из A_j поворотом вокруг центра O описанной вокруг этого шестиугольника окружности на угол $\pm 2\pi/3$, см. рис. 2.16 в диссертации. Для этого случая в [1] полностью описаны все компакты Штейнера, а именно, оказалось, что имеется три класса $\Sigma_d(A)$, для каждого из которых максимальный компакт Штейнера представляет собой невыпуклый криволинейный 4-угольник, единственный минимальный компакт состоит из двух точек, а компакты одного класса получаются из другого поворотами вокруг точки O на углы $\pm 2\pi/3$. Каждое кратчайшее дерево неинвариантно относительно таких поворотов, а длина его меньше 3, см. точный ответ ниже, теорема 2.18 из диссертационной работы (в данной конфигурации функционал $S(A, K)$ принимает значение 3 при $K = O$ — интуитивно напрашивающемся решении).

Подробная постановка проблемы Ферма–Штейнера в гиперпространствах. В диссертации изучается проблема Ферма–Штейнера в метрическом пространстве $\mathcal{H}(X)$ всех непустых компактных подмножеств конечномерного нормированного пространства X над полем $\mathbb{R}$ с метрикой Хаусдорфа. Изначально заданный конечный набор точек пространства $\mathcal{H}(X)$, до которых ищется минимум суммы расстояний Хаусдорфа, мы называем *граничным множеством* или просто *границей*, а сами точки — *граничными компактами*. Итак, задача состоит в поиске всех таких элементов $K \in \mathcal{H}(X)$, которые минимизируют функцию $S(A, K) = d_H(A_1, K) + \cdots + d_H(A_n, K)$. В дальнейшем минимальное значение функции $S(A, K)$ будет обозначаться через S_A.

Как известно [1], в рассматриваемом случае множество решений $\Sigma(A)$ проблемы Ферма–Штейнера непусто. Каждый элемент из $\Sigma(A)$ далее будем называть *компактом Штейнера*.

Пусть $K \in \Sigma(A)$. Тогда обозначим расстояние по Хаусдорфу между K и $A_i \in A$ через d_i.

Вектор $d = (d_1, \cdots, d_n)$ назовём *вектором решения* проблемы. Множество всех таких векторов решений для границы A обозначим через $\Omega(A)$. Отметим, что разные компакты Штейнера могут задавать один и тот же элемент из $\Omega(A)$. При этом очевидно, что по элементу из $\Sigma(A)$ его вектор d восстанавливается однозначно. Таким образом, множество решений проблемы Ферма–Штейнера в $\mathcal{H}(X)$ разбивается на попарно непересекающиеся классы $\Sigma_d(A)$, каждый из которых соответствует своему вектору решения $d \in \Omega(A)$. Согласно работе [1] в ограниченно компактных пространствах каждый класс $\Sigma_d(A)$ содержит в себе по включению единственный *максимальный компакт Штейнера* (он обозначается через K_d) и, вообще говоря, множество *минимальных компактов Штейнера*. В [1] также было доказано для случая ограниченно компактных пространств, что если $d \in \Omega(A)$, то $K_d = \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{d_i}(A_i)$, где $B_{d_i}(A_i)$ — шар (или ещё говорят замкнутая окрестность) с центром в компакте A_i. Более того, $K \in \Sigma_d(A)$ тогда и только тогда, когда с некоторым минимальным компактом Штейнера $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ справедливо $K_\lambda \subset K \subset K_d$.

Методы исследования. В диссертации применяются методы и конструкции из таких разделов математики, как математический анализ, метрическая геометрия, топология, евклидова геометрия, теория графов и теория минимальных сетей.

Положения, выносимые на защиту. Прежде, чем формулировать утверждения, необходимо ввести ряд определений и обозначений.

Определение 2.0.1. Границу A, все элементы которой являются конечными множествами, назовём *финитной*.

Определение 2.4.1. Пусть дана финитная граница $A = \{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{H}(X)$, где $\mathcal{H}(X)$ — гиперпространство над конечномерным нормированным пространством X и $\mathrm{Conv}(K)$ — это выпуклая оболочка компакта K. Обозначим границу $\big\{\mathrm{Conv}(A_1), \ldots, \mathrm{Conv}(A_n)\big\}$ через A^{Conv}. Финитную границу A мы называем *устойчивой*, если $S_A = S_{A^{\mathrm{Conv}}}$, иначе — *неустойчивой*.

Определение 2.2.1. Точку a из граничного компакта $A_i \in A$ назовём *далёкой точкой компакта A_i для вектора $\widetilde{d} = (\widetilde{d}_1, \ldots, \widetilde{d}_n) \in \mathbb{R}^n$*, где $\widetilde{d}_j \geq 0$, если $U_{\widetilde{d}_i}(a) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) = \emptyset$. Множество всех далёких для вектора $\widetilde{d}$ точек компакта $A_i \in A$ обозначим через $F_{\widetilde{d}}^{A_i}$. Также положим $F_{\widetilde{d}}^{A} = \bigcup\limits_j F_{\widetilde{d}}^{A_j}$.

Определение 2.2.2. Точку a из граничного компакта $A_i \in A$ назовём *неплотной точкой компакта A_i для вектора $\widetilde{d} = (\widetilde{d}_1, \ldots, \widetilde{d}_n) \in \mathbb{R}^n$*, где $\widetilde{d}_j \geq 0$, если $\mathrm{Int}\big(B_{\widetilde{d}_i}(a) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)\big) = \emptyset$. Множество всех неплотных для вектора $\widetilde{d}$ точек компакта $A_i \in A$ обозначим через $L_{\widetilde{d}}^{A_i}$. Также положим $L_{\widetilde{d}}^{A} = \bigcup\limits_j L_{\widetilde{d}}^{A_j}$.

Определение 2.1.2. Точку a из граничного компакта $A_i \in A$ назовём *дискретной точкой компакта A_i для вектора $\widetilde{d} = (\widetilde{d}_1, \ldots, \widetilde{d}_n) \in \mathbb{R}^n$*, где $\widetilde{d}_j \geq 0$, если $\# B_{\widetilde{d}_i}(a) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) < \infty$.

Множество всех дискретных для вектора $\widetilde{d}$ точек компакта $A_i \in A$ обозначим через $D^{A_i}_{\widetilde{d}}$. Также положим $D^A_{\widetilde{d}} = \bigcup\limits_j D^{A_j}_{\widetilde{d}}$.

Введём ещё некоторые обозначения. Пусть $\widetilde{d} \in \mathbb{R}^n$, и $\widetilde{d}_j \geq 0$ для всех j. Положим также, что $Y^{A_i}_{\widetilde{d}}$ — один из трёх типов точек $F^{A_i}_{\widetilde{d}}$, $L^{A_i}_{\widetilde{d}}$ или $D^{A_i}_{\widetilde{d}}$, то есть $Y^{A_i}_{\widetilde{d}} \in \{F^{A_i}_{\widetilde{d}}, L^{A_i}_{\widetilde{d}}, D^{A_i}_{\widetilde{d}}\}$ и $Y^{A}_{\widetilde{d}} \in \{F^{A}_{\widetilde{d}}, L^{A}_{\widetilde{d}}, D^{A}_{\widetilde{d}}\}$. Тогда

- $\mathrm{HP}(p, Y^{A_i}_{\widetilde{d}}) := B_{\widetilde{d}_i}(p) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$, где $p \in Y^{A_i}_{\widetilde{d}}$;
- $\mathrm{HP}(Y^{A_i}_{\widetilde{d}}) := \bigcup\limits_{p \in Y^{A_i}_{\widetilde{d}}} \mathrm{HP}(p, Y^{A_i}_{\widetilde{d}})$;
- $\mathrm{HP}(Y^{A}_{\widetilde{d}}) := \bigcup\limits_{i} \mathrm{HP}(Y^{A_i}_{\widetilde{d}})$.

Отметим, что если $\widetilde{d} = d \in \Omega(A)$, то $\bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) = K_d$ — максимальный компакт Штейнера в классе $\Sigma_d(A)$. Поэтому в таком случае $\mathrm{HP}(p, Y^{A_i}_{d}) = B_{d_i}(p) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{d_j}(A_j) = B_{d_i}(p) \cap K_d$, где $p \in Y^{A_i}_{d}$.

Подчеркнём, что в обозначении $\mathrm{HP}(p, Y^{A_i}_{\widetilde{d}})$ параметр $Y^{A_i}_{\widetilde{d}}$ определяет свойство, которым обладает множество $B_{\widetilde{d}_i}(p) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$. А именно, при $p \in F^{A_i}_{\widetilde{d}}$ имеем $U_{\widetilde{d}_i}(p) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) = \emptyset$; при $p \in L^{A_i}_{\widetilde{d}}$ верно $\mathrm{Int}\big(B_{\widetilde{d}_i}(p) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)\big) = \emptyset$; а при $p \in D^{A_i}_{\widetilde{d}}$ справедливо $\# B_{\widetilde{d}_i}(p) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) < \infty$.

Определение 2.4.2. Минимальный компакт $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ назовём *погружённым*, если $K_\lambda \setminus \mathrm{HP}(D^A_d) \subset \mathrm{Int}\, K_d$.

Следующие результаты являются основными и выносятся автором на защиту.

Все перечисленные ниже результаты получены для случая произвольного конечномерного нормированного пространства X над полем $\mathbb{R}$.

1. Следующие два результата являются решением первой задачи диссертации.

   – В главе 2 разделе 1 подразделе 1 (под названием "Критерии минимальности компакта Штейнера") диссертационной работы было определено *каноническое отношение* $R(K)$ между точками из произвольного непустого компакта $K \subset X$ и точками из граничных компактов. А именно, $(p, a) \in R(K)$, где $p \in K$ и $a \in A_i$, если $|p\,a| \leq d_i$. Также в диссертации было введено некоторое условие 1 на отношение между произвольными множествами P и Q, где Q представлено в виде дизъюнктного объединения конечного числа непустых конечных множеств C_i. Это условие заключается в том, что каждая точка $p \in P$ состоит в отношении по крайней мере с одним элементом из каждого C_i

и для p найдётся такой элемент $q \in Q$, что q состоит в отношении только с элементом p, см. условие 1. Для случая финитной границы A ***автором, А. А. Тужилиным и А. О. Ивановым с равнозначным вкладом всех трёх специалистов доказано***, что для финитной границы A и некоторого непустого компакта K каноническое отношение $R(K)$ является соответствием (то есть многозначным сюръективным отображением), удовлетворяющим условию 1, тогда и только тогда, когда K — минимальный компакт Штейнера в классе $\Sigma_d(A)$. Тем самым в терминах канонического отношения доказан критерий того, что данный компакт K является минимальным компактом Штейнера.

– В главе 2 разделе 1 подразделе 4 (под названием “Оценки количества точек в минимальном компакте Штейнера”) диссертации для случая финитной границы A ***автором, А. А. Тужилиным и А. О. Ивановым с равнозначным вкладом всех трёх авторов доказано***, что каждый минимальный компакт Штейнера K_λ конечен, получена оценка сверху на количество точек в нём. А именно, пусть $\widetilde{A}$ — дизъюнктное объединение всех n компактов в финитной границе A. Тогда для финитной границы доказана справедливость следующего неравенства:

$$\#K_\lambda \le \#\widetilde{A} - n + 1,$$

а в случае, когда имеется больше одного более чем одноточечного компакта в границе A, доказано, что

$$\#K_\lambda \le \#\widetilde{A} - n.$$

Также если норма объемлющего пространства X строго выпукла, а в максимальном компакте Штейнера отсутствуют изолированные точки, то доказана выполнимость неравенства ниже:

$$\#K_\lambda \le \#\widetilde{A} - n.$$

2. Следующий результат является решением второй задачи диссертации.

В главе 2 разделе 4 подразделах 1 и 2 (под названиями “Устойчивость границы в проблеме Ферма–Штейнера” и “О достаточном условии неустойчивости, дающем оценку на уменьшение веса сети” соответственно) диссертации ***автором доказаны*** три достаточных условия неустойчивости границы, одно из которых содержит оценку снизу на величину уменьшения минимальной сети типа звезда при переходе от финитной границы $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ к границе $A^{\mathrm{Conv}} = \big\{\mathrm{Conv}(A_1), \dots, \mathrm{Conv}(A_n)\big\}$. А именно, пусть d является вектором решения проблемы Ферма–Штейнера для финитной границы A. Тогда автором доказано следующее.

– Пусть граница $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ финитна и $d \in \Omega(A)$. Рассмотрим границу $A^{\mathrm{Conv}} =$

$\{\mathrm{Conv}(A_1), \ldots, \mathrm{Conv}(A_n)\}$. Если для всех i верно $F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)} = \emptyset$ или для всех i верно $L_d^{\mathrm{Conv}(A_i)} = \emptyset$, то граница A неустойчива.

– Пусть граница $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ финитна. Пусть также все d_i положительны для некоторого $d \in \Omega(A)$. Рассмотрим границу $A^{\mathrm{Conv}} = \{\mathrm{Conv}(A_1), \ldots, \mathrm{Conv}(A_n)\}$. Если существует номер s такой, что $\mathrm{HP}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}\big) = \emptyset$ и для любой $p \in \mathrm{HP}\big(F_d^{A^{\mathrm{Conv}}}\big)$ верно $p \notin \partial B_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$, тогда граница A неустойчива.

– Пусть

(1) норма пространства X строго выпукла;

(2) граница $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ финитна;

(3) $U_d^{\mathrm{Conv}} = \mathrm{Int}\, K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$, где $d \in \Omega(A)$;

(4) $d_s > 0$;

(5) $\left(\bigcup\limits_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s)\right) \cap \mathrm{HP}(D_d^A) \subset U_d^{\mathrm{Conv}}$, где m_s — количество точек в компакте A_s.

(Автором доказано, что из пунктов (1) и (2) следует равенство $\mathrm{HP}(D_d^A) = \mathrm{HP}(L_d^A)$, поэтому пункт (5) из условий выше можно заменить на $\left(\bigcup\limits_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s)\right) \cap \mathrm{HP}(L_d^A) \subset U_d^{\mathrm{Conv}}$. Более того, автор доказал, что если помимо пунктов (1) и (2) выполнено $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, K_d) = K_d$, то справедливо $\mathrm{HP}(D_d^A) = \mathrm{HP}(L_d^A) = \mathrm{HP}(F_d^A)$ и, значит, пункт (5) из условий выше можно также заменить на $\left(\bigcup\limits_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s)\right) \cap \mathrm{HP}(F_d^A) \subset U_d^{\mathrm{Conv}}$.)

Итак, автором диссертации доказано, что из пунктов (1)-(5) вытекает неустойчивость границы A.

Более того, в случае выполнения пунктов (1)-(5) для произвольного погружённого минимального компакта Штейнера $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ автор доказал неравенство

$$\delta_1 := \Big| K_\lambda\ \partial B_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) \Big| > 0;$$

и доказал неравенство

$$\delta_2 := \Big| \mathrm{Conv}(A_s)\ \partial B_{d_s}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big) \Big| > 0.$$

Значит, $\min\{\delta_1, \delta_2, d_s\} > 0$. Выберем произвольное $0 < \delta \le \min\{\delta_1, \delta_2, d_s\}$ и положим $K = B_{d_s - \delta}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}$. Тогда, как доказано автором, справедливы следующие неравенства:

$$S_A - S_{A^{\mathrm{Conv}}} \ \ge\ S_A - S(A^{\mathrm{Conv}}, K) \ \ge\ S(A^{\mathrm{Conv}}, K_d^{\mathrm{Conv}}) - S(A^{\mathrm{Conv}}, K) \ \ge\ \delta \ >\ 0.$$

Научная новизна. Для финитных границ: получен ряд критериев минимальности компакта Штейнера в классе решений проблемы Ферма–Штейнера; предложен алгоритм построения минимального компакта Штейнера в классе решений; предъявлены оценки сверху на количество точек в минимальном компакте Штейнера; доказаны некоторые новые свойства минимального и максимального компактов Штейнера. В граничных компактах для произвольных границ были определены три типа точек, характеризующиеся своей особой геометрией. Для каждого типа точек были выписаны условия на границу и объемлющее пространство, при которых эти точки обязаны присутствовать по крайней мере в одном граничном компакте. В терминах таких особых точек были получены три достаточных условия неустойчивости границы в проблеме Ферма–Штейнера. Более того, для неустойчивого случая в одном из условий приводится оценка снизу на уменьшение веса сети типа звезда при переходе от границы из конечных компактов к границе из их выпуклых оболочек. Продемонстрировано применение на практике развитой в диссертации теории. А именно, предложено существенно более эффективное решение проблемы Ферма–Штейнера для границы из работы [1], доказана неустойчивость этой границы и предъявлена оценка снизу на уменьшение веса сети при переходе от такой границы к границе из выпуклых оболочек исходных компактов. Помимо перечисленного выше в диссертации была также показана непрерывность в конечномерных нормированных пространствах некоторой операции с выпуклыми компактами, оказавшейся полезной при изучении проблемы Ферма–Штейнера.

Теоретическая и практическая ценность работы. Диссертация имеет как теоретический, так и практический характер. Результаты работы представляют интерес для специалистов в области минимальных сетей, вариационного исчисления и метрической геометрии.

Разработанные в диссертации техники оказались полезными на практике для эффективного построения и анализа минимальных параметрических сетей типа звезда в гиперпространствах над конечномерными нормированными пространствами, см. подразделы 2.1.7 и 2.4.3 диссертации.

Также приводимые в диссертации построения используют методы деформации элементов гиперпространств и помогают описывать свойства этих элементов в рамках проблемы Ферма–Штейнера.

Степень достоверности. ***Кроме теоремы* 2.4 *и следствия* 4*, все результаты из раздела* 2.1 *главы* 2*, а также из раздела* 1.5 *главы* 1 *диссертации являются оригинальными и получены совместно с равнозначным вкладом автора, профессора А. О. Иванова и профессора А. А. Тужилина. Все остальные результаты главы* 2*, теорема* 2.4 *и следствие* 4 *из раздела* 2.1*, а также результат из подраздела* 1.6 *главы* 1 *диссертации являются также оригинальными и получены автором самостоятельно.***

Все содержащиеся в диссертации результаты обоснованы с помощью строгих математических доказательств и опубликованы в открытой печати.

Результаты других авторов, используемые в диссертации, отмечены соотвествующими ссылками.

Апробация результатов. Полученные автором результаты диссертации были представлены на следующих международных и всероссийских конференциях и научных семинарах:

- XXV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов–2018”, МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 9–13 апреля 2018;
- Международная конференция “Геометрические методы в теории управления и математической физике”, РГУ, г. Рязань, Россия, 25–28 сентября 2018;
- XVII Всероссийская молодежная школа–конференция “Лобачевские чтения–2018”, КФУ, г. Казань, Россия, 23–28 ноября 2018;
- XXVI Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов–2019”, МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 11 апреля 2019;
- Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна–2020, ВГУ, г. Воронеж, Россия, 27 января–4 февраля 2020;
- XXIX Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов–2022”, МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 11–22 апреля 2022;
- Вторая конференция Математических центров России. Секция “Геометрия и топология”, МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 7–11 ноября 2022;
- VI–ая международная молодежная научная школа “Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы”, ВГУ, г. Воронеж, Россия, 14–15 ноября 2022;
- Семинар “Дифференциальная геометрия и приложения” под руководством акад. А. Т. Фоменко, МГУ имени М. В. Ломоносова, 28 ноября 2022;
- Семинар “Теория экстремальных сетей” под руководством проф. А. А. Тужилина и проф. А. О. Иванова, МГУ имени М. В. Ломоносова, 2018–2022.

Публикации автора. Результаты диссертации обоснованы в виде строгих математических доказательств и опубликованы в четырёх статьях [24, 25, 26, 27], из которых четыре опубликованы в рецензируемых научных журналах, удовлетворяющих положению о присуждении ученых степеней в МГУ. Работа [24] опубликована в журнале, входящем в реферативные базы данных MathSciNet, Scopus, Web of Science и RSCI; работы [25, 26] опубликованы в журнале, входящем в реферативные базы данных MathSciNet, Scopus и RSCI; русскоязычная версия работы [27] вышла в журнале, входящем в реферативную базу РИНЦ, а англоязычная версия работы [27] опубликована в журнале, входящем в реферативные базы данных zbMATH издательства Springer, Scopus и Mathematical Reviews.

Отметим, что результаты работ [24, 27], опирающиеся на лемму 1.7, прямо обобщаются без изменения доказательств на случай конечномерных нормированных пространств со строго выпуклой нормой, а все остальные утверждения из параграфов 2 и 3 статьи [24] и раздела 3 статьи [27] обобщаются точно так же без каких бы то ни было изменений в доказательствах на случай произвольных конечномерных нормированных пространств. Более того, все результаты работ [24, 27] аналогично без изменений распространяются на случай, быть может, пересекающихся конечных граничных компактов. Именно в таком обобщённом виде данные результаты из [27] представлены в диссертации.

Отметим, что предварительный вариант статьи [25] был выложен в систему arXiv.org, см. [28], а статья [26] является существенно переработанным и дополненным вариантом работы [29] из системы arXiv.org.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы, а также содержит 25 рисунков. Первая глава разбита на восемь разделов, вторая — на четыре. В свою очередь раздел 2.1 диссертационной работы состоит из семи подразделов, а раздел 2.4 диссертации — из трёх. При этом подраздел 2.4.3 дополнительно разбит ещё на семь частей. Текст работы изложен на 108-ми страницах. Список литературы содержит 37 наименований.

В главе 1 диссертации приводятся все нужные определения и вспомогательные утверждения, которые используются в работе. Эта часть также содержит в себе утверждение, имеющее самостоятельный интерес, см. теорему 1.15 из раздела 1.6 диссертации. А именно, в разделе 1.6 изучается деформация пересечения одного компакта с замкнутой окрестностью другого компакта посредством изменения радиуса этой окрестности. Автором доказано, что в конечномерных нормированных пространствах в случае, когда оба компакта являются непустыми выпуклыми подмножествами, такая операция непрерывна в топологии, порождённой метрикой Хаусдорфа.

Раздел 2.1 посвящён изучению компактов Штейнера из фиксированного класса решений $\Sigma_d(A)$ в случае *финитных границ* (то есть границ, все элементы которых являются конечными множествами). В этом разделе в подразделе 2.1.1 автором, А. А. Тужилиным и А. О. Ивановым доказаны критерии того, когда компакт $K \in \mathcal{H}(X)$ является минимальным компактом Штейнера (теоремы 2.1 из диссертации и 2.2), в подразделе 2.1.2 автором, А. А. Тужилиным и А. О. Ивановым предъявлен и обоснован алгоритм построения минимальных компактов для заданного вектора d (алгоритм 1 в диссертации), в подразделе 2.1.3 автором, А. А. Тужилиным и А. О. Ивановым найден и доказан ряд геометрических свойств максимального компакта Штейнера. Далее на основе этих результатов, а также результатов из раздела 1.5 главы 1 в подразделе 2.1.4 автором, А. А. Тужилиным и А. О. Ивановым выписаны и доказаны оценки на количество точек в минимальном компакте для случая финитной границы (теоремы 2.6 и 2.7 в диссертации).

В подразделе 2.1.5 диссертации введены понятие *множества дискретных точек* $D^{A_i}_{\tilde{d}}$ компакта A_i для вектора $\widetilde{d} = (\widetilde{d}_1, \ldots, \widetilde{d}_n) \in \mathbb{R}^n$, где все $\widetilde{d}_i$ неотрицательны, и соответствующее ему понятие *множества сцепки* $\mathrm{HP}(p, D^{A_i}_{\widetilde{d}})$ *компакта* $\bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$ с *точкой* $p \in D^{A_i}_{\widetilde{d}}$, которое по определению равно $B_{\widetilde{d}_i}(p) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$. Автором доказано, что в случае финитных границ и пространств X со строго выпуклой нормой для любого вектора решения d по крайней мере у одного граничного компакта A_i множество дискретных точек $D^{A_i}_d$ и множество $\bigcup\limits_{p \in D^{A_i}_d} \mathrm{HP}(p, D^{A_i}_d)$ непусты, см. теорему 2.4 и следствие 4 в диссертации.

В том же подразделе 2.1.5 раздела 2.1 главы 1 в терминах множеств сцепки для случая финитных границ автор, А. А. Тужилин и А. О. Иванов доказали критерий единственности минимального компакта Штейнера (теорема 2.8 диссертации) в классе $\Sigma_d(A)$. Посредством множеств сцепки для финитных границ и строго выпуклой нормы пространства X в разделе 2.1.5 автором, А. А. Тужилиным и А. О. Ивановым доказано, что для каждого номера i существует точка из минимального компакта Штейнера K_λ такая, что на ней *реализуются* минимум два различных расстояния d_i и d_k из вектора решения, см. следствие 6 (по определению, на точке $p \in X$ *реализуется расстояние* d_i, если существует $a \in A_i$ такая, что $|a\,p| = d_i$).

В подразделе 2.1.6 автор, А. А. Тужилин и А. О. Иванов доказали достаточное условие для того, чтобы непустой компакт из конечномерного пространства со строго выпуклой нормой не являлся компактом Штейнера, см. теорему 2.12 в диссертации.

В следующем подразделе 2.1.7 диссертации полученные результаты применяются к изученному в работе [1] граничному множеству. Разработанная в проведённом исследовании техника позволила получить тот же нетривиальный ответ (теорема 2.18 в диссертации), но существенно более простым и прозрачным образом.

В разделе 2.2 диссертационной работы вводятся дополнительные типы точек: *множество далёких точек* $F^{A_i}_{\widetilde{d}}$ компакта A_i для вектора $\widetilde{d} \in \mathbb{R}^n$ и *множество неплотных точек* $L^{A_i}_{\widetilde{d}} \in \mathbb{R}^n$ компакта A_i для вектора $\widetilde{d}$, где все компоненты вектора $\widetilde{d}$ неотрицательны. Для всех этих типов точек (дискретные, далёкие и неплотные) вводится общее понятие *множества сцепки* $\mathrm{HP}(p, Y^{A_i}_{\widetilde{d}})$ *компакта* $\bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$ с *точкой* $p \in Y^{A_i}_{\widetilde{d}}$, где $Y \in \{D, F, L\}$, которое по определению равно $B_{\widetilde{d}_i}(p) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$. Ключевыми утверждениями в данном разделе являются теорема 2.21, доказанная автором, о существовании в случае *выпуклой границы* для любого вектора решения d по крайней мере в одном граничном компакте A_i далёких точек $F^{A_i}_d$ (границы, все компакты в которых являются выпуклыми множествами, в работе называются выпуклыми), а также теорема 2.23, тоже доказанная автором, о совпадении множеств $D^{A_i}_d$, $F^{A_i}_d$ и $L^{A_i}_d$ в случае финитной границы, строго выпуклой нормы пространства X и выполнения условия $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, K_d) = K_d$, где K_d — максимальный компакт Штейнера в классе $\Sigma_d(A)$.

Главным результатом раздела 2.3 является доказанная автором теорема 2.28 (см. текст диссертации) описывающая некоторое свойство максимального компакта Штейнера K_d для случая выпуклых границ в терминах множеств сцепки. А именно, теорема 2.28 говорит о том, что если A_i не содержит в себе далёких точек, то тогда множество $\partial B_{d_i}(A_i)$ пересекается с $\bigcup\limits_{p\in F_d^{A_j}} \mathrm{HP}(p, F_d^{A_j})$ по крайней мере для одного A_j. Здесь явным образом используется тот факт, что в случае выпуклых границ для любого вектора решения хотя бы один граничный компакт имеет своё множество далёких точек. Отметим, что на теорему 2.28 существенно опирается второе достаточное условие неустойчивости (следствие 12).

В разделе 2.4 диссертационной работы исследуются вопросы того, что можно сказать при переходе от границы из конечных компактов A_i к границе, состоящей из их выпуклых оболочек $\mathrm{Conv}(A_i)$. Напомним, что в диссертации финитные границы $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$, для которых минимумы функционалов $S\Big(\{A_1, \ldots, A_n\}, K\Big)$ и $S\Big(\{\mathrm{Conv}(A_1), \ldots, \mathrm{Conv}(A_n)\}, K\Big)$ равны, называются *устойчивыми*, иначе — *неустойчивыми*. Теория устойчивости здесь также существенно опирается на результаты, связанные с множествами сцепки для финитных и выпуклых границ.

Основными результатами раздела 2.4 являются утверждение 2.4.2 из подраздела 2.4.1, доказанное автором, опирающееся на утверждение 2.4.1, которое также доказал автор, и дающее ответ на вопрос, что произойдёт с векторами решений из $\Omega(A)$ и каким будет максимальный компакт Штейнера в случае устойчивой границы; следствия 11, 12 из подраздела 2.4.1 и теорема 2.40 из подраздела 2.4.2, которые тоже доказал автор, приводящие различные достаточные условия неустойчивости границы (в теореме 2.40, в частности, приводится оценка снизу на величину уменьшения веса сети в неустойчивом случае), и наконец, теорема 2.32 из подраздела 2.4.1, доказанная автором и раскрывающая связь между третьим достаточным условием неустойчивости (теорема 2.40) и вторым (следствие 12). В подразделе 2.4.3 автор демонстрирует приложение теоремы 2.40 из секции 2.4.2 на примере конкретной задачи из подраздела 2.1.7.

Отметим, что утверждение 2.4.2, упомянутое выше, не является новым, его можно найти в статье [16], однако в диссертации автор самостоятельно приводит его альтернативное доказательство.

Наконец, в разделе "Заключение" подводятся итоги проделанной работы.

Глава 1

Необходимые определения, обозначения и вспомогательная теория

Пусть (X, ρ) — произвольное метрическое пространство. Для удобства расстояние между двумя точками $a, b \in X$ будем обозначать через $|ab|$ вместо $\rho(a, b)$, а также вместо (X, ρ) будем писать просто X.

Во многих местах в тексте будут использоваться следующие общепринятые обозначения для любых двух точек a и b в случае, когда X является линейным пространством над полем $\mathbb{R}$:

$$[a, b) = \big\{(1-\lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in [0, 1)\big\},$$

$$(a, b] = \big\{(1-\lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in (0, 1]\big\},$$

$$[a, b] = \big\{(1-\lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in [0, 1]\big\}.$$

1.1 Метрические проекции

Определение 1.1.1. Пусть $A \subset X$. *Расстоянием от точки $p \in X$ до множества $A \subset X$* называется величина

$$|p\,A| = \inf\{|pa| \,:\, a \in A\}.$$

В частности, когда $A = \emptyset$, будем полагать

$$|p\,\emptyset| = \infty.$$

Определение 1.1.2. Пусть M — непустое подмножество X. Множество всех подмножеств X обозначим через 2^X. Отображение $P_M\colon X \to 2^X$, заданное по правилу

$$P_M\colon x \mapsto \{z \in M : |xz| = |xM|\},$$

называется *метрической проекцией* X на M.

Лемма 1.1. *Если $M \subset X$ — непустой компакт, то для любой точки $x \in X$ множество $P_M(x)$ непусто.*

Доказательство. Данный результат прямо вытекает из непрерывности функции расстояния между двумя точками в метрическом пространстве.

□

В случае конечномерного нормированного пространства X верен следующий факт (см., например, [19]).

Утверждение 1.1.1 ([19])**.** *Пусть $M \subset X$ — непустой выпуклый компакт. Тогда для любой точки $x \in X \setminus M$, для любой точки $y \in P_M(x)$ и для всех $\lambda \geq 0$ выполняется*

$$y \in P_M\big((1-\lambda)y + \lambda x\big).$$

1.2 О шарах в метрических пространствах

Определение 1.2.1. Пусть $A \subset X$. Множества

$$B_r(A) = \{p : |pA| \leq r\}; \;\; U_r(A) = \{p : |pA| < r\}$$

называются, соответственно, *замкнутым* и *открытым шаром с центром в A радиуса r.*

Замечание 1. *Согласно определению 1.1.1 для любого $0 \leq r < \infty$ верно*

$$B_r(\emptyset) = U_r(\emptyset) = \emptyset.$$

В случае $A = \{a\}$, где $a \in X$, для краткости $B_r\big(\{a\}\big)$ и $U_r\big(\{a\}\big)$ будут заменяться на $B_r(a)$ и $U_r(a)$, соответственно.

Лемма 1.2. *Пусть $A \subset X$ — компакт и $0 \leq r < \infty$. Тогда $B_r(A) = \bigcup\limits_{a \in A} B_r(a)$.*

Доказательство. В случае, когда $A = \emptyset$, равенство очевидно. Пусть далее A непусто.

По определению $B_r(A) = \{x \in X : |x\,A| \leq r\}$. Покажем сначала $\{x \in X : |x\,A| \leq r\} \subset \bigcup\limits_{a \in A} B_r(a)$. Пусть $p \in \{x \in X : |x\,A| \leq r\}$. Так как A — компакт, то согласно лемме 1.1 справедливо $P_A(p) \neq \emptyset$. Пусть $q \in P_A(p)$. Тогда $|pq| = |p\,A| \leq r$. Значит, $p \in B_r(q) \subset \bigcup\limits_{a \in A} B_r(a)$. В силу произвольности точки p получаем $\{x \in X : |x\,A| \leq r\} \subset \bigcup\limits_{a \in A} B_r(a)$.

Покажем теперь $\bigcup\limits_{a \in A} B_r(a) \subset \{x \in X : |x\,A| \leq r\}$. Но для любой $p \in \bigcup\limits_{a \in A} B_r(a)$ существует точка $q \in A$ такая, что $p \in B_r(q)$. Значит, так как $q \in A$, то $|p\,A| \leq r$. Следовательно, $p \in \{x \in X : |x\,A| \leq r\}$. Аналогично, в силу произвольности точки p имеем $\bigcup\limits_{a \in A} B_r(a) \subset \{x \in X : |x\,A| \leq r\}$.

Таким образом, $B_r(A) = \{x \in X : |x\,A| \leq r\} = \bigcup\limits_{a \in A} B_r(a)$.

□

Замечание 2. *В доказательстве* $\bigcup\limits_{a\in A} B_r(a) \subset \{x \in X \,:\, |x\,A| \le r\} = B_r(A)$ *из леммы* 1.2 *нигде не использовалась компактность. Поэтому включение* $\bigcup\limits_{a\in A} B_r(a) \subset B_r(A)$ *верно для любого* $A \subset X$.

Лемма 1.3. *Пусть* $A \subset X$ *и* $0 \le r < \infty$. *Тогда* $U_r(A) = \bigcup\limits_{a\in A} U_r(a)$.

Доказательство. Если $A = \emptyset$, то согласно замечанию 1 имеем $U_r(A) = \emptyset$. С другой стороны, $\bigcup\limits_{a\in A=\emptyset} U_r(a) = \emptyset$. Значит, в таком случае $U_r(A) = \bigcup\limits_{a\in A} U_r(a)$.

Если $r = 0$, то ввиду неотрицательности функции расстояния также получаем $U_r(A) = \bigcup\limits_{a\in A} U_r(a) = \emptyset$.

Пусть далее $A \ne \emptyset$ и $0 < r < \infty$. По определению $U_r(A) = \{x \in X \,:\, |x\,A| < r\}$. Покажем сначала $\{x \in X \,:\, |x\,A| < r\} \subset \bigcup\limits_{a\in A} U_r(a)$. Пусть $p \in \{x \in X \,:\, |x\,A| < r\}$. Это означает, что $|p\,A| = \inf\limits_{a\in A} |pa| < r$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $a' \in A$ такая, что $|pa'| \le |p\,A| + \varepsilon$. Подберём ε так, чтобы выполнялось $|pa'| \le |p\,A| + \varepsilon < r$. Таким образом, мы имеем точку $a' \in A$ такую, что $p \in U_r(a') \subset \bigcup\limits_{a\in A} U_r(a)$. В силу произвольности точки p получаем $\{x \in X \,:\, |x\,A| < r\} \subset \bigcup\limits_{a\in A} U_r(a)$.

Покажем теперь $\bigcup\limits_{a\in A} U_r(a) \subset \{x \in X \,:\, |x\,A| < r\}$. Но для любой $p \in \bigcup\limits_{a\in A} U_r(a)$ существует точка $q \in A$ такая, что $p \in U_r(q)$, то есть $|pq| < r$. Значит, так как $q \in A$, то $|p\,A| < r$. Следовательно, $p \in \{x \in X \,:\, |x\,A| < r\}$. Аналогично, в силу произвольности точки p получаем $\bigcup\limits_{a\in A} U_r(a) \subset \{x \in X \,:\, |x\,A| < r\}$.

Таким образом, $U_r(A) = \{x \in X \,:\, |x\,A| < r\} = \bigcup\limits_{a\in A} U_r(a)$.

□

Согласно [17] справедливо следующее утверждение, которое нам понадобится далее.

Утверждение 1.2.1 ([17])**.** *Для непустого* $A \subset X$ *функция*

$$f\colon X \to \mathbb{R},$$

заданая правилом

$$f\colon x \mapsto |xA|,$$

непрерывна.

Всюду далее множество всех граничных точек подмножества $A \subset X$ будем обозначать через ∂A.

Лемма 1.4. *Пусть* A *— непустое подмножество нормированного пространства* X *и* $r \ge 0$. *Тогда для любого* $p \in \partial B_r(A)$ *справедливо* $|p\,A| = r$.

Доказательство. Пусть $p \in \partial B_r(A)$. Рассмотрим последовательности точек $\{x_n\} \subset B_r(A)$ и $\{y_n\} \subset X \setminus B_r(A)$, сходящиеся к p. Заметим, что $|x_i A| \le r$ и $|y_j A| > r$ для всех i, j. В силу утверждения 1.2.1, а также ввиду $||p - x_i|| \to 0$ при $i \to \infty$ и $||p - y_j|| \to 0$ при $j \to \infty$ получаем $|p A| \le r$ и $|p A| \ge r$. Значит, $|p A| = r$.

□

Лемма 1.5. *Пусть x — точка в нормированном пространстве X и $r \ge 0$. Тогда для любого $p \in X$ из $|px| = r$ следует $p \in \partial B_r(x)$.*

Доказательство. Проведём луч l из x, проходящий через p. Для любого $\varepsilon > 0$ и для любой точки $y \in U_\varepsilon(p) \cap [x, p]$ в силу линейности пространства X верно $|xy| \le r$. С другой стороны, снова ввиду линейности пространства X для любой точки $y \in U_\varepsilon(p) \cap l \setminus [x, p]$ справедливо $|xy| > r$. Значит, всякая окрестность точки p содержит как точки из $B_r(x)$, так и точки из $X \setminus B_r(x)$. Следовательно, p — граничная точка для $B_r(x)$, то есть $p \in \partial B_r(x)$.

□

Лемма 1.6. *Пусть A — компактное подмножество нормированного пространства X и $0 \le r < \infty$. Тогда $\partial B_r(A) \subset \bigcup\limits_{a \in A} \partial B_r(a)$.*

Доказательство. Если $A = \emptyset$, то $B_r(A) = \emptyset$ согласно замечанию 1. Значит, $\partial B_r(A) = \emptyset \subset \bigcup\limits_{a \in A} \partial B_r(a)$.

Пусть теперь $A \ne \emptyset$. Возьмём точку $p \in \partial B_r(A)$. Согласно лемме 1.4 верно $|p A| = r$. Также ввиду компактности A имеем $P_A(p) \ne \emptyset$. Пусть $x \in P_A(p)$. Следовательно, получаем $|px| = r$, и поэтому по лемме 1.5 имеем $p \in \partial B_r(x)$. Отсюда $p \in \bigcup\limits_{a \in A} \partial B_r(a)$. Значит, в силу произвольности $p \in \partial B_r(A)$ справедливо $\partial B_r(A) \subset \bigcup\limits_{a \in A} \partial B_r(a)$.

□

Лемма 1.7. *Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — точки нормированного пространства со строго выпуклой нормой. Тогда если множество*

$$C = B_{r_1}(a_1) \cap \ldots \cap B_{r_n}(a_n)$$

состоит более чем из одной точки, то оно имеет непустую внутренность.

Доказательство. Пусть p и q — произвольные две точки из C. В силу строгой выпуклости нормы внутренность отрезка $[p, q]$ содержится в каждом открытом шаре $U_{r_i}(a_i)$, поэтому пересечение $U_{r_1}(a_1) \cap \cdots \cap U_{r_n}(a_n)$ открытых шаров не пусто, открыто, и содержится в C, откуда и вытекает требуемое.

□

Далее потребуется следующее определение.

Определение 1.2.2. *Суммой Минковского* двух подмножеств A и B линейного пространства называется множество

$$A + B = \{a + b \,:\, a \in A, b \in B\}.$$

Также по определению полагаем

$$\lambda A = \{\lambda a \,:\, a \in A\},$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$.

Лемма 1.8. *Пусть A — непустое замкнутое подмножество пространства X и $r, r' \geq 0$. Тогда $B_r\big(B_{r'}(A)\big) = B_{r+r'}(A)$.*

Доказательство. В силу замкнутости множества A имеем

$$B_r\big(B_{r'}(A)\big) = A + B_r(0) + B_{r'}(0) = A + B_{r+r'}(0) = B_{r+r'}(A).$$

□

Утверждение 1.2.2. *Пусть A — выпуклый компакт в нормированном пространстве X. Тогда $B_r(A)$ выпукло для любого $r \geq 0$.*

Доказательство. Если $r = \infty$, то $B_r(A) = X$ для любого A, следовательно, $B_r(A)$ выпукло. Пусть далее $r < \infty$.

Если $A = \emptyset$, то $B_r(A) = \emptyset$ согласно замечанию 1, а значит, тоже выпукло.

Пусть теперь $A \neq \emptyset$. В силу компактности A по лемме 1.2 имеем $B_r(0) + A = \bigcup\limits_{a \in A} B_r(a) = B_r(A)$. Также из [18] известно, что сумма Минковского двух выпуклых множеств выпукла. Но $B_r(0)$ и A выпуклы. Поэтому $B_r(A)$ тоже выпукло.

□

Утверждение 1.2.3. *Пусть A — выпуклое подмножество в нормированном пространстве X. Тогда $U_r(A)$ выпукло для любого $r \geq 0$.*

Доказательство. Если $r = \infty$, то $U_r(A) = X$ для непустого A и $U_r(A) = \emptyset$ для пустого A. Следовательно, $B_r(A)$ выпукло при $r = \infty$ для любого A. Пусть далее $r < \infty$.

Если $A = \emptyset$, то $U_r(A) = \emptyset$ согласно замечанию 1, а значит, также выпукло.

Пусть теперь $A \neq \emptyset$. В силу леммы 1.2 верно $U_r(0) + A = \bigcup\limits_{a \in A} U_r(a) = U_r(A)$. Из [18] известно, что сумма Минковского двух выпуклых множеств выпукла. Множества $U_r(0)$ и A выпуклы. Поэтому $U_r(A)$ тоже выпукло.

□

1.3 Графы

В данной подсекции напомним необходимые понятия из теории графов и фиксируем соответствующие обозначения. Более подробные сведения по теории графов можно найти например в [20].

Определение 1.3.1. *Простым графом* называется пара (V, E), состоящая из конечного множества V и некоторого множества E двухэлементных подмножеств $\{u, v\} \subset V$. Элементы из V называют *вершинами*, а из E — *рёбрами* графа. Если $e = \{u, v\} \in E$, то говорят, что вершины u и v являются *соседними* или *смежными* и *соединены ребром* e.

Для удобства будем писать uv вместо $\{u, v\}$, и, так как далее будут рассматриваться только простые графы, слово “простой” будем опускать.

Определение 1.3.2. Количество вершин графа, смежных с данной вершиной u называется *степенью вершины* u и обозначается через $\deg u$.

Определение 1.3.3. Чередующаяся последовательность $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_l, v_{l+1}$ вершин и рёбер графа такая, что $e_i = v_i v_{i+1}$, $1 \le i \le l$, называется *маршрутом, соединяющим вершины* v_1 *и* v_{l+1} или (v_1, v_{l+1})*-маршрутом*.

Определение 1.3.4. *Путём* в графе G называется маршрут, все вершины которого попарно различны.

Определение 1.3.5. Граф называется *связным*, если любые две его несовпадающие вершины можно соединить маршрутом (а значит, и путём).

Определение 1.3.6. Пусть M — произвольное множество, тогда граф $G = (V, E)$, множество вершин которого содержится в M, называется *графом на множестве* M.

Например, часто рассматривают графы на поверхностях или на метрических пространствах.

Определение 1.3.7. Пусть $G = (V, E)$ — связный граф, и пусть $A \subset V$, тогда говорят, что G *соединяет* A; при этом вершины из A называют *граничными*, само множество A — *границей графа*, а вершины из $V \setminus A$ — *внутренними*.

Отметим, что граница графа не определена однозначно и фиксируется в зависимости от конкретной задачи. В качестве примера к определению 1.3.7, который будет полезен в дальнейшем, можно взять так называемую *звезду* — граф с n вершинами степени 1, одной вершиной степени n и n ребрами, граница которого, по определению, состоит из всех его вершин степени 1.

Определение 1.3.8. Неотрицательная вещественнозначная функция $\omega : E \to \mathbb{R}_+$, заданная на множестве ребер графа $G = (V, E)$ называется *весовой функцией*, ее значение $\omega(e)$ на ребре e — *весом* этого ребра e, а пара (G, ω) называется *взвешенным графом*.

Определение 1.3.9. Сумма весов всех ребер взвешенного графа (G, ω) называется *весом графа* и обозначается через $\omega(G)$.

Если (X, ρ) — (псевдо-)метрическое пространство, и $G = (V, E)$ — произвольный граф на X, то на ребрах графа G возникает естественная весовая функция ω_ρ, а именно, $\omega_\rho(uv) = \rho(u, v)$, где $uv \in E$.

1.4 О расстояниях между подмножествами метрического пространства

В определениях 1.4.1 и 1.4.2 множества $A \subset X$ и $B \subset X$ непусты.

Определение 1.4.1. *Расстоянием между* A и B называется величина

$$|A\,B| = \inf_{a \in A} |a\,B| = \inf_{a \in A,\, b \in B} |ab|.$$

Определение 1.4.2. *Расстоянием Хаусдорфа* между A и B называется величина

$$d_H(A, B) = \inf\bigl\{r \,:\, A \subset B_r(B), B \subset B_r(A)\bigr\}.$$

Геометрия расстояния Хаусдорфа довольно подробно описана, например, в работе [9].

Обозначим множество непустых замкнутых и ограниченных подмножеств пространства X через $\mathcal{H}(X)$. Известно (см., например, [10, 21]), что в отличие от $|A\,B|$ расстояние Хаусдорфа $d_H(A, B)$ задаёт метрику на $\mathcal{H}(X)$.

Определение 1.4.3. Метрическое пространство $\bigl(\mathcal{H}(X), d_H\bigr)$ называется *гиперпространством* над пространством X.

В дальнейшем нам также будет полезно следующее равенство, которое можно рассматривать как эквивалентное определение расстояния Хаусдорфа:

$$d_H(A, B) = \max\bigl\{\sup_{a \in A} |a\,B|, \sup_{b \in B} |b\,A|\bigr\}.$$

Из определения расстояния Хаусдорфа легко вытекает следующее утверждение, см., например [21, Предложение 5.3].

Утверждение 1.4.1. *Пусть $A_1, A_2 \in \mathcal{H}(X)$ и $d_H(A_1, A_2) = d$. Тогда $A_1 \subset B_d(A_2)$ и $A_2 \subset B_d(A_1)$. В частности, для любой точки $x \in A_i$ пересечение $A_j \cap B_d(x)$ непусто, где $\{i, j\} = \{1, 2\}$.*

В леммах 1.9, 1.10 и 1.11 пространство X является конечномерным нормированным пространством над полем $\mathbb{R}$. Отметим, что лемма 1.9 используется только для доказательства леммы 1.10.

Лемма 1.9. *Пусть $M \in \mathcal{H}(X)$, $x \in M$ и l — луч с началом в точке x. Тогда $l \cap \partial M \neq \emptyset$.*

Доказательство. Обозначим $l \cap M$ через l'. Заметим, что l' замкнуто как пересечение двух замкнутых множеств. Более того, l' — компакт как замкнутое подмножество компакта. Рассмотрим функцию $f\colon l' \to \mathbb{R}$, заданную правилом $a \mapsto ||a - x||$. Функция f непрерывна как функция расстояния, и на l' она достигает своей точной верхней грани, так как l' компакт. Пусть $p \in l' \subset M$ такая, что

$$\max_{a \in l'} f(a) = f(p). \tag{1.1}$$

Но в силу (1.1) и ввиду линейности пространства X любая окрестность точки p содержит точки, не лежащие в M. Значит, по определению $p \in \partial M$. Следовательно, $l \cap \partial M \neq \emptyset$.

□

Лемма 1.10. *Пусть $A, C \in \mathcal{H}(X)$, A — выпукло, $r > 0$, $C \subset B_r(A)$ и $\bigl|C\,\partial B_r(A)\bigr| = \gamma > 0$. Тогда для любого $0 \le \delta \le \min\{r, \gamma\}$ верно $C \subset B_{r-\delta}(A)$.*

Доказательство. Допустим противное, что $C \setminus B_{r-\delta}(A) \neq \emptyset$. Пусть $x \in C \setminus B_{r-\delta}(A)$ и $y \in P_{B_{r-\delta}(A)}(x)$. Выпустим луч l из точки y, проходящий через x. Ввиду ограниченности множества A имеем $B_r(A) \in \mathcal{H}(X)$. Отсюда по лемме 1.9 получаем $l \cap \partial B_r(A) \neq \emptyset$. Пусть $z \in l \cap \partial B_r(A)$. По лемме 1.8 справедливо $\partial B_r(A) = \partial B_\delta\bigl(B_{r-\delta}(A)\bigr)$. Поэтому $z \in \partial B_\delta\bigl(B_{r-\delta}(A)\bigr)$. При этом согласно утверждению 1.1.1 верно $y \in P_{B_{r-\delta}(A)}(z)$. Значит, в силу леммы 1.4

$$||z - y|| = \delta.$$

Но $x \in C$, $z \in \partial B_r(A)$ и по условию $\bigl|C\,\partial B_r(A)\bigr| = \gamma$, поэтому

$$||z - x|| \ge \gamma.$$

При этом

$$\delta \le \min\{r, \gamma\} \le \gamma.$$

Следовательно,

$$\delta = ||z - y|| = ||z - x|| + ||x - y|| \ge \gamma + ||x - y||.$$

Отсюда $||x - y|| = 0$. Таким образом, $x = y$. Значит, $x \in \partial B_{r-\delta}(A) \subset B_{r-\delta}(A)$. Но по предположению $x \in C \setminus B_{r-\delta}(A)$. Получили противоречие. Значит, $C \setminus B_{r-\delta}(A) = \emptyset$, то есть $C \subset B_{r-\delta}(A)$. Лемма доказана.

□

Лемма 1.11. *Пусть $M, N \in \mathcal{H}(X)$, $|M\,N| = \gamma > 0$ и $0 < \varepsilon < \gamma$. Тогда $\bigl|U_\varepsilon(M)\;N\bigr| = \gamma - \varepsilon$.*

Доказательство. Покажем, что $\bigl|U_\varepsilon(M)\;N\bigr| \le \gamma - \varepsilon$. В силу компактности M и N существуют такие $x \in M$, $y \in N$, что длина отрезка $[x, y] = \bigl\{(1-\lambda)x + \lambda y \bigm| \lambda \in [0, 1]\bigr\}$ равна γ. Значит, ввиду $\varepsilon < \gamma$ можно выбрать такое $\lambda' \in (0,1)$, что $||x - (1-\lambda')x - \lambda' y|| = \varepsilon$. Обозначим точку $(1-\lambda')x + \lambda' y$ через z. Значит, $|z\,M| \leq \varepsilon$, так как $x \in M$.

Покажем, что на самом деле $|z\,M| = \varepsilon$. Допустим, что $|z\,M| = \varepsilon' < \varepsilon$. Отметим, что ввиду $z \in (x,y)$ верно $||z-y|| = \gamma - \varepsilon$. В силу компактности M найдётся точка $t \in M$ такая, что $||t-z|| = \varepsilon'$. Но тогда длина ломаной, состоящей из двух звеньев $[t,z]$ и $[z,y]$, равна $\varepsilon' + \gamma - \varepsilon < \gamma$. Противоречие с тем, что $|M\,N| = \gamma$. Поэтому $|z\,M| = \varepsilon$.

В силу линейности пространства X имеем $\big|z\,U_\varepsilon(M)\big| = 0$. Отсюда ввиду $||z-y|| = \gamma - \varepsilon$ получаем $\big|U_\varepsilon(M)\;N\big| \leq \gamma - \varepsilon$.

Покажем, что $\big|U_\varepsilon(M)\;N\big| = \gamma - \varepsilon$. Допустим, $\big|U_\varepsilon(M)\;N\big| < \gamma - \varepsilon$. Пусть $a \in B_\varepsilon(M)$ и $b \in N$ такие, что $||a-b|| < \gamma - \varepsilon$. Рассмотрим $c \in P_M(a)$, то есть $||c-a|| \leq \varepsilon$. Но тогда длина ломаной, состоящей из двух звеньев $[c,a]$ и $[a,b]$, строго меньше, чем γ. Получили противоречие с тем, что $|M\,N| = \gamma$. Значит, $\big|U_\varepsilon(M)\;N\big| = \gamma - \varepsilon$. Лемма доказана.

$\square$

1.5 Соответствия

Техника соответствий оказывается весьма полезной при изучении расстояния Хаусдорфа.

Определение 1.5.1. *Отношением* между множествами A и B называется произвольное подмножество декартова произведения $A \times B$.

Определение 1.5.2. Отношение R между A и B называется *соответствием*, если ограничение канонических проекций

$$\pi_A : A \times B \to A \text{ и } \pi_B : A \times B \to B$$

на R — сюръекции.

Удобно рассматривать отношение между A и B как частично определенное многозначное “отображение”, заимствуя при этом терминологию. Тогда для каждого отношения R, $a \in A$ и $b \in B$ естественно определяются образ и полный прообраз:

$$R(a) = \big\{b \in B : (a,b) \in R\big\}, \qquad R^{-1}(b) = \big\{a \in A : (a,b) \in R\big\}.$$

Отношение является соответствием, если образ каждого $a \in A$ и прообраз каждого $b \in B$ непусты. Отметим также, что соответствия естественным образом упорядочены по включению.

Если множества A и B конечны и не пересекаются, то отношение R между ними удобно задавать с помощью двудольного графа G_R с множеством вершин $A \sqcup B$, две вершины $a \in A$ и $b \in B$ которого соединены ребром, если и только если $(a,b) \in R$.

Задача 1. Предположим, что конечное множество B представлено в виде дизъюнктного объединения непустых множеств $C_1, \ldots, C_n$, $\#C_i = p_i$. Требуется определить максимальное возможное количество элементов множества A, при котором существует соответствие R между A и B, удовлетворяющее следующим условиям 1.

Условия 1. *Образ $R(a)$ каждого элемента $a \in A$ пересекается с каждым C_i, $i = 1, \dots, n$, и содержит такой $b \in B$, что $R^{-1}(b) = \{a\}$.*

Пусть R — соответствие между A и B, удовлетворяющее условиям 1, и G_R — граф этого соответствия. Фиксируем произвольную вершину $a \in A$. Она смежна по крайней мере с одной вершиной $b \in B$ степени 1. Среди всех таких вершин выберем одну, и будем говорить, что она *помечена* a. Проделаем это для всех вершин $a \in A$. Следующее очевидное наблюдение будет являться ключевым.

Лемма 1.12. *Определенная выше разметка является инъекцией из множества A в некоторое подмножество в B, содержащее только вершины степени 1. В частности, множество A — конечно.*

Теорема 1.13 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин)**.** *Пусть соответствие R между A и $B = \sqcup_{i=1}^n C_i$ удовлетворяет условию 1. Если все C_i, кроме, быть может, одного, состоят из одного элемента, то $\#A \le \#B - n + 1$. Если по меньшей мере два множества C_i состоят больше чем из одного элемента, то $\#A \le \#B - n$. Обе оценки точные, а именно, для каждого $B = \sqcup_{i=1}^n C_i$ найдутся A и соответствие R такие, что соответствующая оценка выполняется в виде равенства.*

Доказательство. Напомним, что $\#B = \sum_{i=1}^n p_i$. Рассмотрим двудольный граф G_R соответствия R.

Если C_i состоит из одного элемента, то степень соответствующей вершины в графе G_R равна $\#A$. Поэтому, если все C_i состоят из одного элемента, то A тоже состоит из одного элемента (иначе степень каждой вершины из B будет больше 1, что противоречит условию). Таким образом, в этом случае $\#A = 1 = \sum_{i=1}^n 1 - n + 1$, и оценка выполнена в форме равенства.

Пусть теперь, только одно из C_i состоит более чем из одного элемента, для определенности пусть $p_1 > 1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^n p_i - n + 1 = p_1 + \sum_{i=2}^n 1 - (n-1) = p_1.$$

При $\#A = 1$ оценка $\#A = 1 < p_1$ имеет место по предположению. Если же A содержит больше одного элемента, то все помеченные вершины лежат в C_1, так как все остальные имеют степень $\#A > 1$, поэтому $\#A \le p_1$ в силу леммы 1.12, что и требовалось.

Покажем, что в случае $p_1 > 1$, $p_2 = \ldots = p_n = 1$ оценка также точна. Для этого достаточно рассмотреть множество $B = C_1 \sqcup \{c_2\} \sqcup \cdots \sqcup \{c_n\}$, где $\#C_1 = \#A = p_1$, фиксировать произвольную биекцию $f\, A \to C_1$ и задать соответствие соответствие R, положив $R(a) = \big\{f(a), c_2, \dots, c_n\big\}$.

Пусть теперь имеется не меньше двух C_i, для которых $p_i > 1$. Если все помеченные вершины попали в одно и то же C_i, то $\#A \le p_i \le \sum\limits_{k=1}^n p_k - n$, где последнее неравенство имеет место, так как среди p_j, $j \ne i$, по крайней мере одно больше единицы. Если же помеченные вершины попали хотя бы в два разных C_i, то в каждом C_j, $j = 1, \ldots, n$ имеется по крайней мере одна непомеченная вершина. Действительно, если вершиной $a \in A$ помечена вершина из C_i, то во всех остальных C_j, $j \neq i$, есть не помеченные a, но смежные с ней вершины. Следовательно, все они непомечены в силу леммы 1.12. Поэтому если в C_j, $j \neq i$, тоже есть помеченная вершина, то в C_i есть непомеченная, что и требовалось. Таким образом, число помеченных точек (равное $\#A$) будет не больше чем $\sum_{i=1}^{n}(p_i - 1) = \#B - n$, и искомая оценка имеет место.

Покажем, что доказанная оценка точна. Для этого возьмем множество A, состоящее из $\#B - n$ элементов, в каждом множестве C_i выберем по одному элементу c_i и положим $C_i' = C_i \setminus \{c_i\}$, и $B' = \cup C_i'$. Тогда A и B' состоят из одинакового количества точек. Фиксируем произвольную биекцию

$$f : A \to B'$$

и определим соответствие R так: $R(a) = \big\{f(a), c_1, \ldots, c_n\big\}$. Полученное соответствие R удовлетворяет условиям 1. Теорема доказана.

□

Нам также понадобится следующая усиленная версия условий 1.

Условия 2. *Образ $R(a)$ каждого элемента $a \in A$ пересекается с каждым C_i, $i = 1, \ldots, n$, и содержит такой $b \in B$, что $R^{-1}(b) = \{a\}$. Кроме того, существует элемент $a \in A$ и C_k такие, что $R(a) \cap C_k$ состоит не менее чем из двух элементов.*

Теорема 1.14 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин)**.** *Пусть соответствие R между A и $B = \sqcup_{i=1}^{n} C_i$ удовлетворяет условию 2. Тогда $\#A \leq \#B - n$, причём данная оценка точна.*

Доказательство. В ситуации, когда имеется не меньше двух C_i, для которых $p_i > 1$, утверждение следует из теоремы 1.13. Предположим, что только C_k состоит более чем из одного элемента. Тогда

$$\#B - n = \sum_{i=1}^{n} p_i - n = p_k + \sum_{i \neq k} 1 - n = p_k - 1 \geq 1,$$

поэтому при $\#A = 1$ оценка имеет место. Если $\#A > 1$, то, как и в доказательстве теоремы 1.13, все помеченные вершины лежат C_k. Кроме того, $R(a) \cap C_k$ содержит только одну помеченную вершину графа G_R, а по условию 2 существует a, для которого $R(a) \cap C_k$ состоит как минимум из двух элементов, поэтому $\#A \leq p_k - 1 = \#B - n$.

Покажем, что в случае $p_k > 1$, $C_i = \{c_i\}$ при $i \neq k$ оценка точна. Для этого достаточно взять A, состоящее из $p_k - 1$ элемента, фиксировать в C_k произвольный элемент c_k, фиксировать произвольную биекцию

$$f : A \to C_k \setminus \{c_k\}$$

и рассмотреть соответствие R, определенное так: $R(a) = \big\{f(a), c_1, \ldots, c_n\big\}$. Легко проверить, что R удовлетворяет условию 2.

□

1.6 Про непрерывность одной операции с выпуклыми компактами

В данном подразделе изучается вопрос непрерывности в конечномерном нормированном пространстве X над полем $\mathbb{R}$ следующей операции. Пусть в таком пространстве даны два непустых выпуклых компакта A и B, и пусть $r \in \big[\min\limits_{a\in A}|aB|, +\infty\big)$. Положим

$$f(r) = B_r(A) \cap B,$$

где $B_r(A)$ — замкнутая окрестность радиуса r с центром в A, см. определение 1.2.1. Настоящий подраздел посвящён доказательству непрерывности функции f, где на пространстве непустых компактов задана топология, порождённая метрикой Хаусдорфа (эта метрика описана в разделе 1.4, определение 1.4.2).

В метрической геометрии есть ряд стандартных функций, например, расстояние между точками или от точки до множества, которые являются 1–липшицевыми [17], откуда прямо следует их непрерывность. Интуитивно кажется, что этим свойством должна обладать и функция f. Однако это не так, что усложняет процесс доказательства её непрерывности.

Действительно, даже если мы рассмотрим случай плоскости с евклидовой нормой, то при изменении r на малую величину $\delta > 0$ в положительную сторону расстояние по Хаусдорфу между $B_r(A) \cap B$ и $B_{r+\delta}(A) \cap B$ может измениться вовсе не на δ, а на величину существенно большую, см. рис. 1.1.

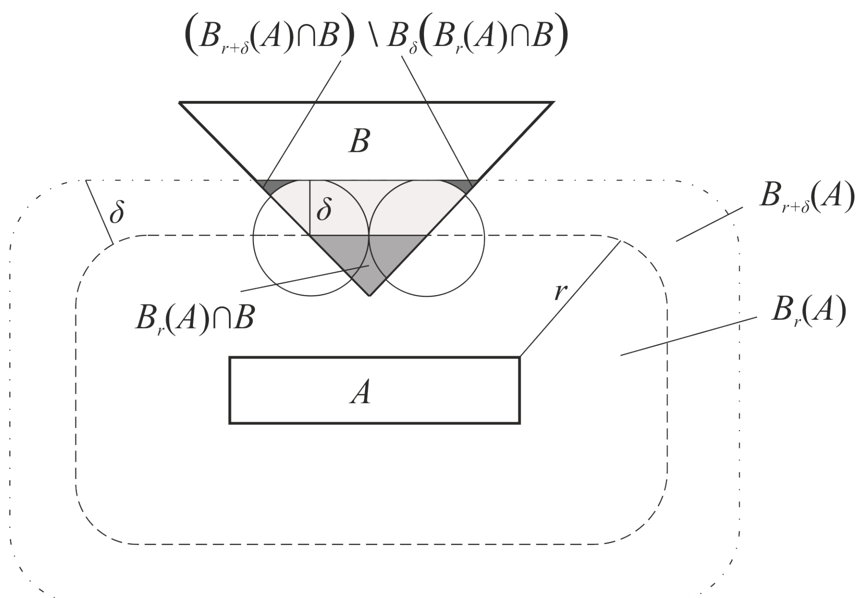

Рис. 1.1: Пример, когда $d_H\big(B_r(A)\cap B, B_{r+\delta}(A)\cap B\big) > \delta$.

На этом рисунке изображены два выпуклых компакта A и B. Компакт A представляет собой прямоугольник, компакт B — треугольник. В этом примере $B_{r+\delta}(A)\cap B \not\subset B_\delta\big(B_r(A)\cap B\big)$ ввиду того, что наклонная к отрезку длиннее перпендикуляра к нему. Следовательно,

$$d_H\big(B_r(A) \cap B, B_{r+\delta}(A) \cap B\big) > \delta.$$

Отметим, что для наличия непрерывности требование выпуклости к обоим компактам здесь по существу. А именно, для невыпуклых компактов несложно привести пример, когда f уже не будет непрерывным, см. рис. 1.2.

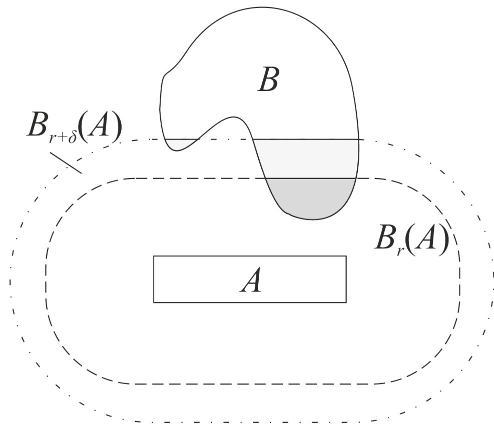

Рис. 1.2: Пример, когда f не является непрерывным в случае невыпуклых компактов.

В самом деле, на рис. 1.2 верхний компакт B является уже невыпуклым, и мы замечаем, что в таком случае деформация множества $B_r(A) \cap B$ при росте r терпит разрыв — скачок, ввиду появления в некоторый момент в пересечении новой компоненты связности. Однако в выпуклом случае новых компонент не возникает.

Теорема 1.15 ([25] Галстян)**.** *Пусть A и B — непустые выпуклые компакты в X. Тогда*

$$f\colon \big[|A\,B|, +\infty\big) \to \mathcal{H}(X),$$

$$f\colon r \mapsto B_r(A) \cap B,$$

непрерывно.

Доказательство. Возьмём произвольную точку $r \in \big[|A\,B|, +\infty\big)$ и произвольное $\varepsilon > 0$. Отметим, что в таком случае $B_r(A) \cap B \neq \emptyset$. Покажем сначала, что функция непрерывна справа. Рассмотрим следующие случаи.

Случай первый:

$$K := B \cap \partial B_\varepsilon\big(B_r(A) \cap B\big) \neq \emptyset.$$

Введём обозначение

$$\delta = \big|K\,B_r(A)\big|.$$

Допустим, что $\delta = 0$. Тогда это означает, что существует точка $x \in K$ такая, что $x \in B_r(A)$. При этом $x \in B$, так как $x \in K$. Значит, $x \in B_r(A) \cap B$. Таким образом, $x \in \partial B_\varepsilon\big(B_r(A) \cap B\big)$, что силу леммы 1.4 означает $\big|x\,(B_r(A)\cap B)\big| = \varepsilon > 0$, и при этом $x \in B_r(A)\cap B$, то есть $\big|x\,(B_r(A)\cap B)\big| = 0$. Получили противоречие. Поэтому $\delta > 0$.

Рассмотрим $r' \geq r$ такой, что $r' - r < \delta$. Для удобства введём обозначения

$$M = B_r(A)\cap B,$$

$$M' = B_{r'}(A)\cap B.$$

Имеем $M \subset B_\varepsilon(M')$, так как $r \leq r'$. Покажем теперь, что $M' \subset B_\varepsilon(M)$. Допустим, существует точка $x \in M'$ такая, что $x \notin B_\varepsilon(M)$. Пусть $y \in P_M(x)$. Так как $r \leq r'$, то $y \in M'$. Обозначим через s отрезок, соединяющий точку x с точкой y. В силу выпуклости M' имеем $s \subset M'$. Так как $y \in M$, то $y \in B_\varepsilon(M)$. Значит, найдётся точка $z \in s$ такая, что $z \in \partial B_\varepsilon(M)$. Так как $s \subset M' = B_{r'}(A)\cap B$, то $z \in K = B \cap \partial B_\varepsilon(M)$. Это означает, что $K \cap M' \neq \emptyset$. Поэтому $K \cap B_{r'}(A) \neq \emptyset$. Но так как $\delta = \big|K\, B_r(A)\big|$ и $r' - r < \delta$, то $K \cap B_{r'}(A) = \emptyset$. Получили противоречие. Значит, $M' \subset B_\varepsilon(M)$. Следовательно, $d_H(M', M) \leq \varepsilon$.

Случай второй: $K = \emptyset$. Тогда это означает, что $B \subset B_\varepsilon(M)$. Но для любого $r' \geq r$ имеем $M' \subset B \subset B_\varepsilon(M)$. При этом, так как $r' \geq r$, верно $M \subset M' \subset B_\varepsilon(M')$. Значит, $d_H\big(M', M\big) \leq \varepsilon$.

Отсюда получаем, что f непрерывна справа. Покажем теперь непрерывность слева.

Зафиксируем произвольную точку $r \in \big(|A\,B|, +\infty\big)$. Так как $r > |A\,B|$, то существует $p \in U_r(A)\cap B$. Рассмотрим отображение

$$g(x) = \lambda p + (1-\lambda)x = x + \lambda(p - x),$$

где $\lambda \in (0,1)$.

Покажем, что коэффициент λ можно выбрать так, чтобы было верно $||x - g(x)|| \leq \varepsilon$ для всех $x \in M$. Имеем

$$||x - g(x)|| = \lambda||p - x||.$$

Обозначим $\max\limits_{x\in M}||p - x||$ через L. Тогда $0 \leq \lambda||p - x|| \leq \lambda L$ для всех $\lambda \in [0,1]$ и $x \in M$. Следовательно, существует $\lambda \in (0,1)$ такой, что $\lambda L \leq \varepsilon$. Значит, при таком λ верно $||x - g(x)|| \leq \varepsilon$ для всех $x \in M$.

В силу непрерывности функции g множество $g(M)$ — компакт. Поэтому корректно определена следующая величина:

$$\delta = |g(M)\,\partial B_r(A)|.$$

Покажем, что $\delta > 0$. По построению $g(x) \in (x, p]$ для любой точки $x \in M$. Также $p \in U_r(A)$ и при этом $x \in B_r(A)$. Поэтому согласно Accessibility lemma [18] имеем $(x, p] \subset U_r(A)$. Значит, $g(x) \in U_r(A)$. Следовательно, $g(M) \cap \partial B_r(A) = \emptyset$. Отсюда, так как множество $\partial B_r(A)$ тоже является компактом, верно $\delta > 0$.

Покажем теперь, что для любого $r' \in \big[|A\,B|, r\big)$ такого, что $r - r' < \delta$, верно $g(x) \in B_{r'}(A)$ при $x \in M$. Допустим, что $g(x) \notin B_{r'}(A)$. Значит, $|g(x)\,A| > r'$. Пусть $y \in P_A\big(g(x)\big)$. Значит,

$$||g(x) - y|| > r'.$$

Проведём луч l из точки y, проходящий через $g(x)$. В какой-то точке l пересечёт $\partial B_r(A)$, обозначим эту точку через z. Следовательно, $|zA| = r$. Согласно утверждению 1.1.1 имеем $y \in P_A(z)$, поэтому $||z - y|| = r$. При этом $|g(x)\,\partial B_r(A)| \geq \delta > r - r'$. Поэтому

$$||z - g(x)|| > r - r'.$$

Отсюда получаем

$$r = ||z - y|| = ||z - g(x)|| + ||g(x) - y|| > r - r' + r' = r.$$

Получили противоречие, следовательно, $g(x) \in B_{r'}(A)$ при всех $x \in M$.

Заметим, что для любого $x \in M$ имеем $[x, p] \subset M$ в силу выпуклости множеств A и B. Значит, $g(x) \in M = B_r(A) \cap B$ для всех $x \in M$ и поэтому $g(x) \in B$. Таким образом,

$$g(x) \in B_{r'}(A) \cap B =: M'$$

для всех $x \in M$. Следовательно, $g(M) \subset M'$. При этом в силу выбора коэффициента λ

$$M \subset B_\varepsilon\bigl(g(M)\bigr) \subset B_\varepsilon(M').$$

Отсюда, так как $r' < r$, получаем $d_H\bigl(M', M\bigr) \leq \varepsilon$. Значит, f непрерывна слева в силу произвольности выбора r и ε.

Таким образом, функция f непрерывна на $\bigl[|A\,B|, +\infty\bigr)$. Теорема доказана.

$\square$

1.7 О некоторых свойствах выпуклых оболочек

В данном подразделе X — конечномерное нормированное пространство над полем $\mathbb{R}$.

Введём отображение $\mathrm{Conv}\colon \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$, которое каждому элементу гиперпространства $\mathcal{H}(X)$ ставит в соответствие его выпуклую оболочку.

Утверждение 1.7.1 ([16])**.** *Преобразование* Conv *является* 1*-липшицевым.*

Отображение Conv, вообще говоря, не сохраняет метрику Хаусдорфа d_H. Продемонстрируем этот факт на примере, см. рис. 1.3. Пусть $K = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\}$ и $L = \{l_1, l_2, l_3, l_4\}$, где ближайшая точка из L для k_i — это l_i, $|k_i l_i| = c_1$ и $|k_5 l_i| = c_2 > c_1$. Замечаем, что $d_H(K, L) = c_2$ и $d_H\bigl(\mathrm{Conv}(K), \mathrm{Conv}(L)\bigr) = c_1$.

Заметим, что в случае выше справедливо также следующее неравенство: $d_H\bigl(K, \mathrm{Conv}(L)\bigr) < d_H(K, L)$. Однако если взять выпуклую оболочку только одного компакта, то расстояние по Хаусдорфу может и увеличиться, см. рис. 1.4. А именно, пусть $K = \{k_1, k_2\}$ и $L = \{l_1, l_2\}$, где $|k_i l_i| = c$. Замечаем, что $d_H(K, L) = c$ и $d_H\bigl(K, \mathrm{Conv}(L)\bigr) = \sqrt{c^2 + (\frac{|l_1 l_2|}{2})^2} > c = d_H(K, L)$.

Из сказанного выше возникает вопрос: когда Conv сохранит расстояние между двумя компактами? Оказывается, справедлива следующая теорема.

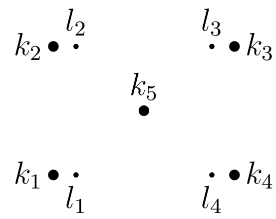

Рис. 1.3: Случай, когда $d_H\big(\mathrm{Conv}(K), \mathrm{Conv}(L)\big) < d_H(K, L)$.

Рис. 1.4: Случай, когда $d_H\big(K, \mathrm{Conv}(L)\big) > d_H(K, L)$.

Теорема 1.16 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин). *Пусть $A, B \in \mathcal{H}(X)$ и $d_H(A, B) = r$. Преобразование* Conv *сохраняет расстояние между A, B, если и только если существует $a \in A$ такая, что $U_r(a) \cap \mathrm{Conv}(B) = \emptyset$, или существует $b \in B$ такая, что $U_r(b) \cap \mathrm{Conv}(A) = \emptyset$.*

Доказательство. Необходимость. По теореме Каратеодори любую точку a' из $\mathrm{Conv}(A)$ можно представить в виде $a' = \sum\limits_{i=1}^{N+1} \lambda_i a_i$, где $a_i \in A$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{N+1} \lambda_i = 1$ и N — размерность пространства X. Так как $A \subset U_r\big(\mathrm{Conv}(B)\big)$, то для любой $a_i \in A$ существует $b_i \in \mathrm{Conv}(B)$ такая, что $|a_i b_i| < r = d_H(A, B)$. Замечаем, что $b' = \sum\limits_i \lambda_i b_i \in \mathrm{Conv}(B)$. Следовательно, $||a' - b'|| = ||\sum\limits_i \lambda_i (a_i - b_i)|| \leq \sum\limits_i \lambda_i ||a_i - b_i|| < r$. Значит, $\mathrm{Conv}(A) \subset U_r\big(\mathrm{Conv}(B)\big)$. Аналогично получаем, что $\mathrm{Conv}(B) \subset U_r\big(\mathrm{Conv}(A)\big)$. Значит,

$$d_H\big(\mathrm{Conv}(A), \mathrm{Conv}(B)\big) = \min\big\{s : \mathrm{Conv}(A) \subset B_s\big(\mathrm{Conv}(B)\big), \mathrm{Conv}(B) \subset B_s\big(\mathrm{Conv}(A)\big)\big\} < r$$

— противоречие. Поэтому существует $a \in A$ такая, что $U_r(a) \cap \mathrm{Conv}(B) = \emptyset$, или существует $b \in B$ такая, что $U_r(b) \cap \mathrm{Conv}(A) = \emptyset$.

Достаточность. Не ограничивая общности, пусть существует $a \in A$ такая, что $U_r(a) \cap \mathrm{Conv}(B) = \emptyset$. Допустим, что расстояние не сохранилось. Согласно утверждению 1.7.1 оно могло лишь уменьшиться, то есть $r > d_H\big(\mathrm{Conv}(A), \mathrm{Conv}(B)\big)$. Это означает, что для найденной точки $a \in A \subset \mathrm{Conv}(A)$ существует точка $b \in \mathrm{Conv}(B)$ такая, что $|ab| < r = d_H(A, B)$. Поэтому $b \in U_r(a)$. Но тогда $b \in U_r(a) \cap \mathrm{Conv}(B)$ — противоречие.

□

Утверждение 1.7.2 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин). *Пусть $\{K_1, \ldots, K_n\} \subset \mathcal{H}(X)$. Тогда* $\mathrm{Conv}(\bigcap\limits_{i=1}^{n} K_i) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Conv}(K_i)$.

Доказательство. Имеем: $\bigcap\limits_{i=1}^{n} K_i \subset K_j$ для всех j. Поэтому $\mathrm{Conv}(\bigcap\limits_{i=1}^{n} K_i) \subset \mathrm{Conv}(K_j)$ для всех j. Значит, $\mathrm{Conv}(\bigcap\limits_{i=1}^{n} K_i) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Conv}(K_i)$.

□

Утверждение 1.7.3 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин)**.** *Пусть $K \in \mathcal{H}(X)$. Тогда $B_r\big(\mathrm{Conv}(K)\big) = \mathrm{Conv}\big(B_r(K)\big)$ для любого $r \ge 0$.*

Доказательство. По теореме Каратеодори

$$\mathrm{Conv}(K) = \bigcup_{p_1,\dots,p_{N+1}\in K}\ \bigcup_{\lambda_1+\dots+\lambda_{N+1}=1} \lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_{N+1} p_{N+1},$$

где $\lambda_i \ge 0$ и N — размерность пространства X. Также

$$\bigcup_{p_1,\dots,p_{N+1}\in K}\ \bigcup_{\lambda_1+\dots+\lambda_{N+1}=1} \lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_{N+1} p_{N+1} = \bigcup_{\lambda_1+\dots+\lambda_{N+1}=1} \lambda_1 K + \ldots + \lambda_{N+1} K.$$

Отсюда имеем в силу свойств суммы Минковского

$$B_r\big(\mathrm{Conv}(K)\big) = \mathrm{Conv}(K) + B_r(0) =$$
$$= \left(\bigcup_{\lambda_1+\dots+\lambda_{N+1}=1} \lambda_1 K + \ldots + \lambda_{N+1} K\right) + B_r(0) = \bigcup_{\lambda_1+\dots+\lambda_{N+1}=1} \Big(\lambda_1 K + \ldots + \lambda_{N+1} K + B_r(0)\Big) =$$
$$= \bigcup_{\lambda_1+\dots+\lambda_{N+1}=1} \lambda_1\big(K + B_r(0)\big) + \ldots + \lambda_{N+1}\big(K + B_r(0)\big) = \mathrm{Conv}\big(K + B_r(0)\big) = \mathrm{Conv}\big(B_r(K)\big).$$

□

Утверждение 1.7.4 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин)**.** *Пусть $\{K_1,\dots,K_n\} \subset \mathcal{H}(X)$ и $\{r_1,\dots,r_n\} \subset \mathbb{R}^n$, причём $r_i \ge 0$ для всех i. Тогда*

$$\mathrm{Conv}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} B_{r_i}(K_i)\Big) \subset \bigcap_{i=1}^{n} B_{r_i}\Big(\mathrm{Conv}\big(K_i\big)\Big).$$

Доказательство. По утверждению 1.7.2 имеем

$$\mathrm{Conv}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} B_{r_i}(K_i)\Big) \subset \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Conv}\Big(B_{r_i}(K_i)\Big).$$

По утверждению 1.7.3 получаем

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Conv}\Big(B_{r_i}(K_i)\Big) = \bigcap_{i=1}^{n} B_{r_i}\Big(\mathrm{Conv}\big(K_i\big)\Big).$$

Поэтому $\mathrm{Conv}\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{r_i}(K_i)\Big) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{r_i}\Big(\mathrm{Conv}\big(K_i\big)\Big)$.

□

1.8 Лемма о пересечении выпуклого множества с открытым

Пусть X — конечномерное нормированное пространство над полем $\mathbb{R}$.

Замыкание подмножества $M \subset X$ всюду далее будем обозначать через $\operatorname{Cl} M$. В разделе 2.4.1 будет нужна следующая лемма.

Лемма 1.17 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин)**.** *Пусть B — выпуклое подмножество X с непустой внутренностью и U — открытое подмножество X. Тогда если $\partial B \cap U \neq \emptyset$, то* $\operatorname{Int} B \cap U \neq \emptyset$.

Доказательство. Известно [18, 22], что в конечномерном нормированном пространстве для любого выпуклого множества B с непустой внутренностью верно

$$\operatorname{Cl}(\operatorname{Int} B) = \operatorname{Cl} B. \tag{1.2}$$

Пусть $x \in \partial B \cap U$. Так как U — открытое подмножество X и $x \in U$, то U является окрестностью точки x. Из (1.2) получаем, что любая точка из $\operatorname{Cl} B$ является точкой прикосновения для $\operatorname{Int} B$. Но $x \in \partial B \subset \operatorname{Cl} B$. Значит, $\operatorname{Int} B \cap U \neq \emptyset$. Лемма доказана.

□

Глава 2

Основная часть

Как отмечалось выше, в данной работе будут рассматриваться только гиперпространства $\mathcal{H}(X)$, построенные над конечномерными нормированными пространствами, а в качестве метрики на них будет браться расстояние Хаусдорфа.

Итак, пусть X всюду далее — конечномерное нормированное пространство над полем $\mathbb{R}$.

Определение 2.0.1. Границу A, все элементы которой являются конечными множествами, назовём *финитной.*

Определение 2.0.2. Границу A, все элементы которой являются выпуклыми компактами, назовём *выпуклой.*

2.1 Финитные границы

На протяжении всего этого раздела $A = \{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathcal{H}(X)$ — финитная граница (если не оговорено противное), $\widetilde{A} = \sqcup_i A_i$, $d = \{d_1, \dots, d_n\} \in \Omega(A)$ и $K_d \in \Sigma_d(A)$ — максимальный компакт Штейнера. В случае финитной границы A количество точек в компакте $A_i \in A$ будет обозначаться через m_i, а сами точки через a^i_j. Таким образом, $A_i = \bigcup\limits_{j=1}^{m_i} \{a^i_j\}$. Для удобства в данном разделе, там где это не вызовет недоразумений, вместо $B_{d_i}(a^i_j)$, $B_{d_i}(A_i)$, $U_{d_i}(a^i_j)$, $U_{d_i}(A_i)$ будем писать B^i_j, B^i, U^i_j и U^i соответственно.

2.1.1 Критерии минимальности компакта Штейнера

Утверждение 2.1.1 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин)**.** *Каждый компакт Штейнера $K \in \Sigma_d(A)$ содержит конечный компакт Штейнера $K_f \in \Sigma_d(A)$. В частности, каждый минимальный компакт Штейнера в классе $\Sigma_d(A)$ — конечен.*

Доказательство. Так как $d_H(K, A_i) = d_i$, то для каждой точки $a^i_j \in A$ существует точка $p \in K$ такая, что $|pa^i_j| \le d_i$. Выберем для каждой a^i_j одну такую точку (для разных a^i_j точки могут совпадать); множество всех выбранных точек обозначим через K_f. Множество K_f, очевидно, является конечным подмножеством K, поэтому компактно. Далее, для каждого i выполнены включения $B^i \supset K \supset K_f$, и для каждой точки $a^i_j \in A_i$ существует $p \in K_f$, для которой $|pa^i_j| \le d_i$, поэтому $B_{d_i}(K_f) \supset A_i$, и значит $d_H(A_i, K_f) \le d_i$ для всех i. Наконец, так как $d \in \Omega(A)$, то $S(A,K) = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i = \min\limits_{M \in \mathcal{H}(X)} S(A,M)$. Значит, строгое неравенство $d_H(A_i, K) < d_i$ не может выполняться ни для какого i, откуда $d_H(A_i, K_f) = d_i$ для всех i, т.е. $K_f \in \Sigma_d(A)$, что и требовалось.

□

Теорема 2.1 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин)**.** *Компакт $K \subset X$ является минимальным компактом Штейнера в классе $\Sigma_d(A)$ тогда и только тогда, когда одновременно выполняются три следующие условия*:

(1) *K — конечное подмножество K_d;*

(2) *$K \cap B^i_j \ne \emptyset$ для любых $i \in \{1, \dots, n\}$ и $j \in \{1, \dots, m_i\}$;*

(3) *Для любого $p \in K$ существуют $i \in \{1, \dots, n\}$ и $j \in \{1, \dots, m_i\}$ такие, что $\big(K \setminus \{p\}\big) \cap B^i_j = \emptyset$, т.е. K — минимальное по включению подмножество K_d, удовлетворяющее свойству* (2).

Доказательство. Проверим достаточность. Сначала покажем, что компакт K, удовлетворяющий условиям теоремы, принадлежит классу $\Sigma_d(A)$.

Так как $K \subseteq K_d$, то $K \subset B^i$ для всех i. Из условия (2) вытекает, что для каждой точки $a^i_j \in A_i$ существует $p \in K$, для которой $|pa^i_j| \le d_i$, поэтому $B_{d_i}(K) \supset A_i$, откуда $d_H(A_i, K) \le d_i$. Но $d \in \Omega(A)$, поэтому, как и в доказательстве утверждения 2.1.1, $d_H(A_i, K) = d_i$ для всех i. Следовательно, K — компакт Штейнера в классе $\Sigma_d(A)$.

Покажем теперь, что K является минимальным компактом в своём классе. Предположим противное. Допустим, что есть компакт $K' \in \Sigma_d(A)$ такой, что $K' \ne K$ и $K' \subset K$. Тогда существует такая точка $p \in K$, что $K' \subset K \setminus \{p\}$, и по условию (3) существуют $i \in \{1, \dots, n\}$ и $j \in \{1, \dots, m_i\}$ такие, что $(K' \cap B^i_j) \subset \big(K \setminus \{p\}\big) \cap B^i_j = \emptyset$, что противоречит утверждению 1.4.1. Следовательно, K — минимальный компакт Штейнера.

Проверим необходимость. Пусть K произвольный компакт Штейнера из $\Sigma_d(A)$. Тогда $K \subseteq K_d$ так как K_d — наибольший элемент в $\Sigma_d(A)$, и $K \cap B^i_j \ne \emptyset$ для всех i и j согласно утверждению 1.4.1, поскольку $d_H(A_i, K) = d_i$. Таким образом, первые два условия выполнены. Пусть теперь K — минимальный. Тогда K — конечен по утверждению 2.1.1, и если условие (3) не выполнено, то найдется точка $p \in K$ такая, что $K \setminus \{p\}$ — компакт, удовлетворяющий первым двум свойствам. Поэтому, как показано при доказательстве достаточности, $K \setminus \{p\}$ является компактом Штейнера из класса $\Sigma_d(A)$, что противоречит минимальности K. Теорема доказана.

□

Определение 2.1.1. Пусть $K \in \mathcal{H}(X)$. Зададим отношение $R(K) \subset K \times \widetilde{A}$ следующим образом: $(p, a_j^i) \in R(K)$, если и только если $|pa_j^i| \le d_i$. Отношение $R(K)$ назовём *d-каноническим* или просто *каноническим*.

Утверждение 2.1.2 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин)**.** *Пусть $K \subset K_d$ — некоторый непустой компакт. Каноническое отношение $R(K)$ является соответствием тогда и только тогда, когда K — компакт Штейнера в классе $\Sigma_d(A)$.*

Доказательство. Пусть сначала $R(K)$ — соответствие. Тогда для каждой точки $a_j^i \in \widetilde{A}$ найдется точка $p \in K$ такая, что $(p, a_j^i) \in R(K)$, т.е. $A_i \subset B_{d_i}(K)$. С другой стороны, $K \subset K_d \subset B^i$, поэтому $d_H(A_i, K) \le d_i$. Все эти неравенства могут выполняться только в форме равенства, так как $d \in \Omega(A)$. Поэтому $S(A, K) = \sum_i d_i = S_A$ и K — компакт Штейнера.

Обратно, если $K \subset K_d \subset B^i$, то для каждой точки $p \in K$ существует точка $a_j^i \in A_i$ такая, что $|pa_j^i| \le d_i$, т.е. $(p, a_j^i) \in R(K)$. С другой стороны, K — компакт Штейнера, поэтому $d_H(K, A_i) = d_i$, откуда $A_i \subset B_{d_i}(K)$, т.е. для каждой $a_j^i \in A_i$ найдется $p \in K$ такая, что $|pa_j^i| \le d_i$, т.е. $(p, a_j^i) \in R(K)$. Значит, $R(K)$ — соответствие.

$\square$

Теорема 2.2 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин)**.** *Пусть $K \in \mathcal{H}(X)$. Каноническое отношение $R(K)$ является соответствием, удовлетворяющим условию 1, тогда и только тогда, когда K — минимальный компакт Штейнера в классе $\Sigma_d(A)$.*

Доказательство. Покажем, что $R(K)$ является соответствием, удовлетворяющим условию 1, тогда и только тогда, когда для K справедливы все три пункта теоремы 2.1.

Пусть сначала $R(K)$ — соответствие, удовлетворяющее условию 1. Тогда K конечно по лемме 1.12, и для любой точки $p \in K$ ее образ $R(p)$ пересекается с каждым A_i, значит, $p \in B_j^i$ для подходящего j, откуда $K \subset B^i$ для любого i, т.е. $K \subset K_d$, и выполнено свойство (1) из теоремы 2.1. Далее, так как $R(K)$ — соответствие, то для каждой точки $a_j^i \in \widetilde{A}$ найдется точка $p \in K$ такая, что $(p, a_j^i) \in R$, т.е. $|pa_j^i| \le d_i$, т.е. выполнено свойство (2) из теоремы 2.1. Наконец, $R(p)$ содержит такую точку a_j^i, что $R^{-1}(a_j^i) = \{p\}$, поэтому $K \setminus \{p\}$ не пересекается с B_j^i, т.е. выполнено свойство (3) из теоремы 2.1.

Обратно, пусть $K \in \mathcal{H}(X)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Так как $K \subset K_d$, то каждая точка $p \in K$ содержится в каждом шаре B^i, значит, $|pa_j^i| \le d_i$ для некоторого j, поэтому $R(p)$ пересекается с каждым множеством A_i. И обратно, пересечение $K \cap B_j^i$ непусто, и, значит, $R^{-1}(a_j^i)$ непусто для любых i и j. Итак, R — соответствие, образ которого пересекается с каждым A_i. Наконец, для каждой точки $p \in K$ найдется $a_j^i \in A_i$ такая, что $K \setminus \{p\}$ не пересекается с B_j^i. Последнее означает, что $R^{-1}(a_j^i) = \{p\}$. Поэтому соответствие R удовлетворяет условию 1. Теорема доказана.

$\square$

Замечание 3. *Сформулируем условия теоремы 2.2 на языке двудольного графа G_R отношения R. Отношение R является соответствием, если и только если степени всех вершин графа G_R не меньше 1. Условие 1 равносильно тому, что каждая вершина $x \in K$ смежна по крайней мере с одной вершиной из каждого A_i, и по крайней мере одна из смежных с x вершин имеет степень 1.*

2.1.2 Построение минимального компакта Штейнера

Приведем алгоритм построения минимального компакта в классе $\Sigma_d(A)$.

Алгоритм 1 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин)**.**

- Шаг 1. Пусть $K' \in \Sigma_d(A)$ — произвольный компакт Штейнера, и $R' = R(K')$ — каноническое отношение (например, в качестве K' можно взять максимальный компакт $K_d = \bigcap_i B^i$).

- Шаг 2. Для каждой точки $a_j^i \in \widetilde{A}$ выберем ровно одну точку $p \in K'$ такую, что $(p, a_j^i) \in R'$ (для разных a_j^i выбранные точки могут совпадать); множество выбранных точек обозначим через K. Рассмотрим ограничение отношения R' на множество $K \times \widetilde{A}$. Ясно, что в результате получится каноническое отношение $R = R(K)$. Рассмотрим граф G_R этого отношения.

- Шаг 3. Если в K содержатся точки, являющиеся вершинами графа G_R, смежными лишь с вершинами степени больше 1, то выбираем любую из этих точек и удаляем её из множества K, перестраиваем отношение $R(K)$ и граф G_R. Повторяем шаг 3 до тех пор, пока это возможно.

Утверждение 2.1.3 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин)**.** *Алгоритм 1 корректен, все построенные алгоритмом множества K — компакты Штейнера, а результат работы алгоритма — минимальный компакт Штейнера.*

Доказательство. Множество K, построенное на втором шаге, конечно, на каждой итерации шага 3 количество точек в множестве K уменьшается на 1. Если множество K состоит из одной точки, то степени всех смежных с ней вершин равны 1, поэтому алгоритм прекратит работу через конечное число шагов.

Покажем, что построенный в результате работы алгоритма компакт K удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Множество K, построенное на втором шаге, конечно, содержится в K_d и для каждой точки $a_j^i \in \widetilde{A}$ содержит такую точку $p \in K \subset K_d$, что $(p, a_j^i) \in R(K_d)$, т.е. $p \in B_j^i \cap K$, поэтому для K выполнены первые два условия теоремы 2.1. Кроме того K — компакт Штейнера по утверждению 2.1.2. Далее, на каждой итерации шага 3 мы выбрасываем точку, смежную с вершинами степени больше 1, поэтому сказанное остается верным для всех построенных алгоритмом компактов K. Наконец, по окончании работы алгоритма 1 каждая точка компакта K будет смежна по крайней мере с одной вершиной степени 1, что означает выполнение пункта (3) теоремы 2.1. Поэтому полученное в результате множество K — это минимальный компакт Штейнера из класса $\Sigma_d(A)$.

□

Замечание 4. *Если множество K' на шаге 1 алгоритма 1 конечно, то мы можем опустить шаг 2, положив $K = K'$ и ограничившись лишь шагами 1 и 3. В случаях, когда это целесообразно, будем поступать именно так.*

Утверждение 2.1.4 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин)**.** *С помощью алгоритма 1 может быть построен любой минимальный компакт Штейнера $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$.*

Доказательство. Заметим, что на шаге 2 в качестве компакта K можно выбрать любой компакт Штейнера из класса $\Sigma_d(A)$. Если выбрать компакт K_λ, то он не будет перестраиваться на шаге 3. Доказательство закончено.

□

Пример 1. *Покажем, что в одном классе $\Sigma_d(A)$ минимальные компакты Штейнера могут содержать разное количество точек. Граница A состоит из двух компактов плоскости $A_1 = \{a_1^1, a_2^1, a_3^1\}$, $A_2 = \{a_1^2, a_2^2\} \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$, расположенных как на рис. 2.1. А именно, пусть $|a_1^1 a_1^2| = d_1 + d_2 = \rho$, $d_1 < d_2$, $d_2 < |a_2^1 a_2^2| < \rho$, $d_2 < |a_3^1 a_2^2| < \rho$, $d_1 < |a_2^1 a_3^1| < 2d_1$, и все остальные расстояния больше чем $2d_2 > \rho$. Тогда $d_H(A_1, A_2) = d_1 + d_2$. Возьмем $d = (d_1, d_2)$. Максимальный компакт K_d состоит из точки $p_1 = B_1^1 \cap B_1^2$ и объединения лунок $L_2 = B_2^2 \cap B_2^1$ и $L_3 = B_2^2 \cap B_3^1$. С помощью алгоритма 1 построим два минимальных компакта Штейнера разной мощности.*

Шаг 1: в качестве компакта K_1 возьмем трехточечное множество $\{p_1, p_2, p_3\}$, где $p_2 \in L_2 \setminus L_3$ и $p_3 \in L_3 \setminus L_2$, а в качестве компакта K_2 — двухточечное множество $\{p_1, q\}$, где $q \in L_2 \cap L_3$. Из сделанных предположений о взаимном расположении точек a_i^j вытекает, что $d_H(K_i, A_j) = d_j$, поэтому $K_i \in \Sigma_d(A)$. Рассмотрим канонические отношения R_i для компактов K_i и множества $\widetilde{A} = A_1 \sqcup A_2$. Согласно замечанию 4 пропускаем шаг 2. Графы отношений R_1 и R_2 показаны на рис. 2.1. Замечаем, что в K_1 и в K_2 для каждой точки есть смежная с ней вершина степени 1 из $\widetilde{A}$. Поэтому согласно шагу 3 работа алгоритма 1 закончена.

В силу утверждения 2.1.3 оба компакта K_i являются минимальными, причем первый состоит из трех точек, а второй — из двух.

2.1.3 Некоторые свойства максимального компакта Штейнера

Лемма 2.3 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин)**.** *Расстояние d_i равно нулю тогда и только тогда, когда $\Sigma_d(A) = \{A_i\}$.*

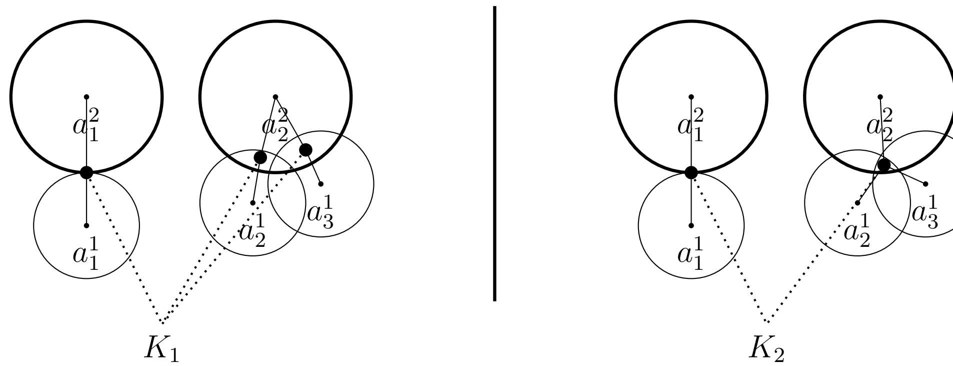

Рис. 2.1: Графы отношений R_1 слева и R_2 справа.

Доказательство. Пусть $d_i = 0$. Тогда для любого $K \in \Sigma_d(A)$ имеем: $d_H(K, A_i) = d_i = 0$, следовательно, $K = A_i$, так как d_H — метрика. Поэтому $\Sigma_d(A) = \{A_i\}$. Обратно, если $\Sigma_d(A) = \{A_i\}$, то $d_i = d_H(A_i, A_i) = 0$.

□

Следствие 1 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин)**.** *Класс $\Sigma_d(A)$ равен $\{A_i\}$ тогда и только тогда, когда $K_d = A_i$.*

Утверждение 2.1.5 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин)**.** *Пусть все $d_i > 0$. Тогда существует такой A_i, что $A_i \not\subset K_d$.*

Доказательство. Допустим противное: все A_i содержатся в K_d. Отметим, что расстояние Хаусдорфа между P и Q из $\mathcal{H}(X)$ можно записать в виде

$$d_H(P, Q) = \max\Big\{\inf\big\{r \mid P \subset B_r(Q)\big\}; \inf\big\{r \mid Q \subset B_r(P)\big\}\Big\}.$$

Тогда для всех i

$$d_i = d_H(A_i, K_d) = \inf\big\{r \mid K_d \subset B_r(A_i)\big\}.$$

Следовательно, для всех i, j

$$\begin{aligned} d_H(A_i, A_j) = \max\Big\{\inf\big\{r \mid A_i \subset B_r(A_j)\big\}; \inf\big\{r \mid A_j \subset B_r(A_i)\big\}\Big\} \le \\ \le \max\Big\{\inf\big\{r \mid K_d \subset B_r(A_j)\big\}; \inf\big\{r \mid K_d \subset B_r(A_i)\big\}\Big\} = \max\{d_j, d_i\}. \end{aligned}$$

Пусть $s \in \{1, \ldots, n\}$ такой, что $d_s = \min\limits_i d_i$. Тогда

$$d_H(A_1, A_s) \le \max\{d_1, d_s\} = d_1;$$

$$\ldots$$

$$d_H(A_s, A_s) = 0 < d_s \text{ (т.к. все } d_i > 0);$$

$$\ldots$$

$$d_H(A_n, A_s) \le \max\{d_n, d_s\} = d_n.$$

Следовательно, $S(A, A_s) = \sum_{i=1}^n d_H(A_i, A_s) < \sum_{i=1}^n d_i = S_A$, противоречие.

$\square$

Утверждение 2.1.6 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин)**.** *Пусть норма пространства X строго выпукла. Тогда компонента связности максимального компакта K_d либо имеет непустую внутренность, либо представляет собой изолированную точку.*

Доказательство. Напомним, что максимальный компакт

$$K_d = \bigcap_{i=1}^n B^i = \bigcup_{j_1,\dots,j_n} B^1_{j_1} \cap \ldots \cap B^n_{j_n}$$

представляет собой конечное объединение конечных пересечений замкнутых шаров. Каждое такое пересечение выпукло, поэтому связно, и, значит, целиком лежит в компоненте связности компакта K_d. По условию норма пространства X строго выпукла. Значит, согласно лемме 1.7 это пересечение или состоит из одной точки, или имеет непустую внутренность, что и требовалось.

$\square$

Утверждение 2.1.7 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин)**.** *Если максимальный компакт K_d является связным, то все B^i тоже связны.*

Доказательство. Действительно, $K_d = \bigcap_i B^i$, в частности, $K_d \subset B^i$. Поэтому, если B^i несвязно, т.е. представимо в виде объединения непустых, непересекающихся замкнутых подмножеств, $B^i = X_1 \sqcup X_2$, то $K_d = (K_d \cap X_1) \sqcup (K_d \cap X_2)$. Подмножества $K_d \cap X_k$, $k = 1,\ 2$, замкнуты и не пересекаются. Кроме того, $B^i = \bigcup_j B^i_j$, каждый шар B^i_j связен, поэтому целиком лежит в одном из множеств X_k. Но $K_d \cap B^i_j$ непусто для любых i и j, поэтому множества $K_d \cap X_k$ также непусты. Таким образом, компакт K_d несвязен, противоречие.

$\square$

Теорема 2.4 ([24] Галстян)**.** *Если норма пространства X строго выпукла, то существуют такие $i \in \{1, \dots, n\}$ и $j \in \{1, \dots, m_i\}$, что множество $B^i_j \cap K_d$ состоит из конечного числа точек. Более того, для произвольного конечномерного нормированного пространства X если $B^i_j \cap K_d$ конечно, то $B^i_j \cap K_d \subset \partial K_d$.*

Доказательство. Предположим, что для любых i и j множество

$$B^i_j \cap K_d = \bigcup_{j_1 \in \{1,\dots,m_1\},\dots,j_n \in \{1,\dots,m_n\}} \left(B^i_j \cap B^1_{j_1} \cap \ldots \cap B^n_{j_n} \right) \tag{2.1}$$

бесконечно, следовательно, для любых i, j существует набор $\{k_1, \dots, k_n\}$, для которого пересечение $B^i_j \cap B^1_{k_1} \cap \ldots \cap B^n_{k_n}$ содержит бесконечно много точек. По условию норма пространства X строго выпукла. Тогда по лемме 1.7 имеем $U^i_j \cap U^1_{k_1} \cap \ldots \cap U^n_{k_n} \neq \emptyset$, в частности, все d_i положительны. Если немного уменьшить радиусы, то последнее пересечение останется непустым, т.е. существует такое $\delta = \delta(i,j) > 0$, что если d^δ — произвольный вектор с положительными не превосходящими δ компонентами, то для вектора $d' = (d'_1, \ldots, d'_n) = d - d^\delta$ выполняется

$$U_{d'_i}(a^i_j) \cap U_{d'_1}(a^1_{k_1}) \cap \ldots \cap U_{d'_n}(a^n_{k_n}) \neq \emptyset.$$

Поэтому $K_{d'} \cap B_{d'_i}(a^i_j) \neq \emptyset$. Выбрав наименьшее такое δ, получим, что $K_{d'} \cap B_{d'_i}(a^i_j) \neq \emptyset$ для всех i и j. Но тогда $A_i \subset B_{d'_i}(K_{d'})$, а $K_{d'} \subset B_{d'_i}(A_i)$ по определению, поэтому для любого i справедливо неравенство $d_H(A_i, K_{d'}) \le d'_i$, следовательно $S(A, K_{d'}) \le \sum\limits_{i=1}^{n} d'_i < \sum\limits_{i=1}^{n} d_i = S(A, K_d)$, противоречие. Таким образом, существует B^i_j, пересекающийся с K_d по конечному множеству точек.

Пусть $p \in B^i_j \cap K_d$ — точка из такого конечного пересечения. Если она внутренняя для K_d, то существует открытый шар $U = U_r(p)$, который лежит в K_d. Так как центр этого шара лежит в B^i_j, то $U \cap B^i_j$ бесконечно, противоречие. Поэтому $p \in \partial K_d$, что и завершает доказательство.

$\square$

Следствие 2 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин)**.** *Пусть норма пространства X строго выпукла и $K \in \Sigma_d(A)$ — компакт Штейнера. Тогда $K \cap \partial K_d \neq \emptyset$, т.е. каждый компакт Штейнера $K \in \Sigma_d(A)$ выходит на границу соответствующего максимального компакта K_d.*

Доказательство. По утверждению 1.4.1 компакт K пересекает каждый шар B^i_j. По условию норма пространства X строго выпукла. Значит, по теореме 2.4 одно из пересечений $B^i_j \cap K_d$ конечно, и все входящие в него точки — граничные для K_d. Так как $K \subset K_d$, то

$$\emptyset \neq (B^i_j \cap K) \subset (B^i_j \cap K_d) \subset \partial K_d,$$

поэтому K содержит точки из ∂K_d.

$\square$

Оказывается, что в общем случае включение $K \subset \partial K_d$ не имеет места даже для минимального компакта K_λ. Приведем соответствующий пример.

Пример 2. *Рассмотрим $A = \{A_1, A_2\}$, $A_1 = \{a^1_1, a^1_2\}$, $A_2 = \{a^2_1, a^2_2\} \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$. Все четыре точки расположены на одной прямой так, как показано на рис. 2.2. Пусть $\rho = |a^1_2 a^2_2|$, $|a^1_1 a^2_1| < \rho$, $|a^2_1 a^1_2| > \rho$, $|a^1_1 a^2_2| > \rho$, тогда $d_H(A_1, A_2) = \rho$. Выберем положительные d_1 и d_2 так, что $d_1 + d_2 = \rho$, $d_1 > |a^1_1 a^2_1| + d_2$, $|a^2_1 a^2_2| > 2d_2$.*

В этом случае максимальный компакт K_d равен $B^2_1 \cup \{p\}$, где $\{p\} = B^1_2 \cap B^2_2$. В качестве минимального компакта K_λ возьмем множество, состоящее из p и произвольной точки $q \in U^2_1$. Граф канонического отношения будет состоять из четырех ребер $a^1_1 q$, $a^2_1 q$, $a^2_2 p$ и $a^1_2 p$ (минимальность вытекает, например, из теоремы 2.1). Заметим, что ни один из таким образом выбранных минимальных компактов не содержится в границе K_d.

Отметим также, что в данном примере существует континуум минимальных компактов.

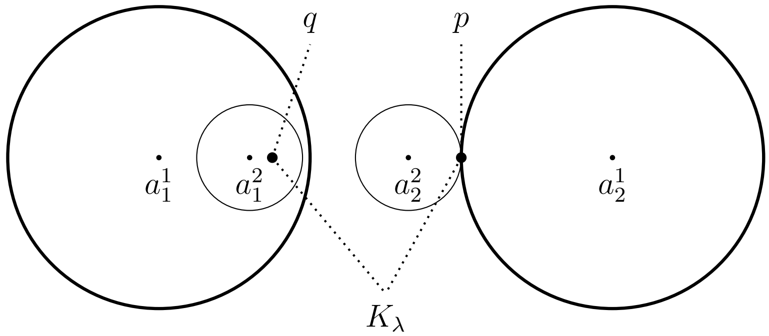

Рис. 2.2: Ни один минимальный компакт $\{p, q\}$ не содержится в границе максимального компакта.

Следствие 3 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин)**.** *Пусть норма пространства X строго выпукла и все $m_i = 1$. Тогда $\#K_d = \#K_\lambda = 1$.*

Доказательство. Так как $A_i = \{a_1^i\}$, то $B^i = B_1^i$ и $K_d = \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_1^i$. Пусть $\#K_d > 1$. По условию норма пространства X строго выпукла. Отсюда по лемме 1.7 внутренность K_d непуста, и поэтому $\#K_d = \infty$. Но согласно теореме 2.4 существует k такое, что $B_1^k \cap K_d$ конечно. Однако в рассматриваемом случае $B_1^k \cap K_d = B^k \cap K_d = K_d$, поэтому K_d также конечно, противоречие.

□

Утверждение 2.1.8 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин)**.** *Пусть норма пространства X строго выпукла, и пусть ни один открытый шар U_j^i не содержит изолированных точек максимального компакта K_d. Тогда существует U_j^i, который не пересекается с K_d.*

Доказательство. Действительно, любое конечное подмножество открытого шара состоит из изолированных точек. Поэтому пересечение $U_j^i \cap K_d$ или пусто, или бесконечно. Норма пространства X строго выпукла. Поэтому все пересечения бесконечными быть не могут согласно теореме 2.4. Значит, существует шар U_j^i, не пересекающийся с K_d, что и требовалось.

□

Утверждение 2.1.9 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин)**.** *Пусть норма пространства X строго выпукла. Пересечение $B_j^i \cap K_d$ конечно тогда и только тогда, когда $(B_j^i \cap K_d) \subset \partial K_d$.*

Доказательство. Если $B_j^i \cap K_d$ конечно, то оно содержится в ∂K_d по теореме 2.4, так как норма пространства X строго выпукла. Обратно, пусть все точки из $B_j^i \cap K_d$ — граничные для K_d. Напомним, что

$$B_j^i \cap K_d = \bigcup_{j_1 \in \{1,\dots,m_1\},\dots,j_n \in \{1,\dots,m_n\}} \big(B_j^i \cap B_{j_1}^1 \cap \ldots \cap B_{j_n}^n\big).$$

По лемме 1.7 каждое непустое пересечение в правой части или состоит из одной точки, или имеет непустую внутренность. Но так как каждое такое пересечение содержится в K_d, то его внутренняя точка является внутренней и для K_d, поэтому второй случай невозможен по предположению. Следовательно, $B^i_j \cap K_d$ конечно как конечное объединение конечных множеств.

□

Утверждение 2.1.10 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин)**.** *Пусть норма пространства X строго выпукла и $U^i_j \cap K_d$ пусто. Тогда $B^i_j \cap K_d$ конечно и содержится в ∂K_d.*

Доказательство. Действительно, пусть

$$B^i_j \cap K_d = \bigcup_{j_1 \in \{1,\ldots,m_1\},\ldots,j_n \in \{1,\ldots,m_n\}} \left(B^i_j \cap B^1_{j_1} \cap \ldots \cap B^n_{j_n}\right)$$

бесконечно. Значит, по крайней мере одно из множеств $B^i_j \cap B^1_{j_1} \cap \ldots \cap B^n_{j_n}$ бесконечно. Норма пространства X строго выпукла. Следовательно, по лемме 1.7 это множество имеет непустую внутренность, и, значит, множество $U^i_j \cap B^1_{j_1} \cap \ldots \cap B^n_{j_n}$ также непусто. Но тогда непусто и множество $U^i_j \cap K_d$, противоречие. Таким образом, $B^i_j \cap K_d$ конечно. Остается применить утверждение 2.1.9.

□

Лемма 2.5 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин)**.** *Пусть норма пространства X строго выпукла. Если $\#B^i_j \cap K_d = \infty$, то $\mathrm{Int}(B^i_j \cap K_d) \neq \emptyset$.*

Доказательство. Пусть $\#B^i_j \cap K_d = \infty$. Имеем:

$$B^i_j \cap K_d = \bigcup_{j_1 \in \{1,\ldots,m_1\},\ldots,j_n \in \{1,\ldots,m_n\}} \left(B^i_j \cap B^1_{j_1} \cap \ldots \cap B^n_{j_n}\right)$$

— конечное объединение пересечений конечного числа шаров. Поэтому одно из таких пересечений будет бесконечно. Следовательно, так как норма пространства X строго выпукла, то согласно лемме 1.7 это пересечение будет иметь непустую внутренность. Значит, $\mathrm{Int}(B^i_j \cap K_d) \neq \emptyset$.

□

2.1.4 Оценки количества точек в минимальном компакте Штейнера

Теорема 2.6 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин)**.** *Каждый минимальный компакт $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ является конечным множеством, количество его точек не превосходит $\#\widetilde{A} - n + 1$, а в случае, когда имеется больше одного A_i, для которого $m_i > 1$, оно не превосходит $\#\widetilde{A} - n$.*

Доказательство. Пусть $R(K_\lambda)$ — каноническое отношение. Так как K_λ — минимальный компакт Штейнера, то согласно теореме 2.2 отношение $R(K_\lambda)$ является соответствием, для которого справедливы условия 1. Осталось применить теорему 1.13.

□

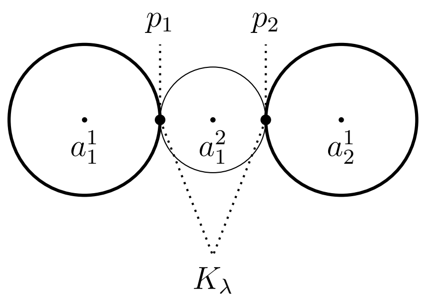

Рис. 2.3: Верхняя оценка $\#K_\lambda$ достигается.

В самом общем случае оценки в теореме 2.6 не улучшаемы. А именно, в примере 1 имеем: $\#K_2 = 3 = (m_1 + m_2) - n$, где $m_1 = 3$, $m_2 = 2$, $n = 2$.

Также приведем пример, когда достигается оценка $\#\widetilde{A} - n + 1$.

Пример 3. *Рассмотрим $A = \{A_1, A_2\}$, где $A_1 = \{a_1^1, a_2^1\}, A_2 = \{a_1^2\} \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$. Точки a_1^1 и a_2^1 симметричны относительно a_1^2, см. рис. 2.3. Пусть $\rho = |a_1^2 a_1^1| = |a_1^2 a_2^1|$, тогда $d_H(A_1, A_2) = \rho$. Фиксируем d_1 и d_2 такие, что $d_1 > d_2 > 0$, $d_1 + d_2 = \rho$. Из теоремы 2.1 следует, что $\{p_1, p_2\} = K_\lambda \in \Sigma_{(d_1,d_2)}(A)$ (заметим, что в данном случае $K_\lambda = K_{(d_1,d_2)}$). При этом в границе A меньше двух компактов, состоящих более чем из одной точки, и $\#K_\lambda = 2 = (m_1 + m_2) - n + 1$, где $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $n = 2$.*

Замечание 5. *Отметим, что теорема 1.13 говорит о точности верхних оценок для произвольных значений n и m_i. Но мы не можем гарантировать точность этих оценок в случае, когда отношение R — каноническое, а не произвольное, как в теореме 1.13.*

Гипотеза 1 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин)**.** *Оценки в теореме 2.6 точны для произвольных n и m_i.*

Замечание 6. *Из теоремы 2.6 следует, что если класс $\Sigma_d(A)$ содержит в себе всего один компакт, то он является конечным, причём количество точек в нём не превосходит соответствующей оценки (в этом случае $K_d = K_\lambda$). Однако, из того, что максимальный компакт K_d является конечным, не следует, что класс $\Sigma_d(A)$ содержит в себе всего один элемент. Построим соответствующий пример.*

Пример 4. *Рассмотрим $A = \{A_1, A_2\}$, где $A_1 = \{a_1^1, a_2^1\}, A_2 = \{a_1^2, a_2^2\} \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$. Все четыре точки расположены на одной прямой так, как показано на рис. 2.4. Пусть $r = |a_1^1 a_1^2| = |a_1^2 a_2^1| = |a_2^1 a_2^2|$, тогда $d_H(A_1, A_2) = \rho$. Фиксируем $d_1 > d_2 > 0$ такие, что $d_1 + d_2 = \rho$. Максимальный компакт $K_{(d_1,d_2)}$ состоит из трех точек, а именно, $p_1 = B_1^1 \cap B_1^2$, $p_2 = B_1^2 \cap B_2^1$ $p_3 = B_2^1 \cap B_2^2$. Граф G_R канонического отношения $R \subset K_{(d_1,d_2)} \times \widetilde{A}$ состоит из шести ребер $a_1^1 p_1$, $p_1 a_1^2$, $a_1^2 p_2$, $p_2 a_2^1$, $a_2^1 p_3$, $p_3 a_2^2$, его вершина p_2 смежна только с вершинами степени 2, поэтому может* *быть удалена в соответствии с алгоритмом 1. В результате получим компакт Штейнера $K = \{p_1, p_3\}$, который, как легко видеть, является минимальным.*

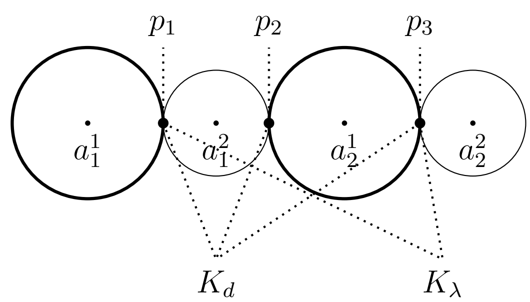

Рис. 2.4: Пример, когда K_d является конечным и $K_d \neq K_\lambda$

Теорема 2.7 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин)**.** *Пусть норма пространства X строго выпукла. Тогда если в K_d нет изолированных точек, то $\#K_\lambda \le \#\widetilde{A} - n$.*

Доказательство. По следствию 3, если все m_i равны 1, то $\#K_d = 1$, и поэтому условие теоремы не выполняется. Таким образом, без ограничения общности будем предполагать, что хотя бы для одного i мы имеем $m_i > 1$.

Пусть $R = R(K_\lambda)$ — каноническое отношение. Так как K_λ — минимальный компакт Штейнера, то по теореме 2.2 отношение $R(K_\lambda)$ является соответствием, удовлетворяющим условиям 1. Покажем, что R удовлетворяет условиям 2, т.е. существует точка $p \in K_\lambda$ и A_i такие, что $R(p) \cap A_i$ состоит не менее чем из двух точек.

Заметим, что

$$K_d = K_d \cap B^i = K_d \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{m_i} B_j^i\Big) = \bigcup_{j=1}^{m_i} \big(K_d \cap B_j^i\big).$$

По предположению в K_d нет изолированных точек, значит, по утверждению 2.1.8 найдётся такая точка a_j^i, что $U_j^i \cap K_d = \emptyset$, откуда, согласно утверждению 2.1.10, следует, что множество $B_j^i \cap K_d$ конечно, поэтому у каждой точки $p \in B_j^i \cap K_d$ существует окрестность U такая, что $U \cap (B_j^i \cap K_d) = \{p\}$. Если p не содержится ни в каком другом множестве $K_d \cap B_k^i$, где $k \neq j$, то, уменьшая U если нужно так, чтобы она не пересекалась с шарами B_k^i, $k \neq j$, получим, что $U \cap K_d = \{p\}$, т.е. p — изолированная точка в K_d, противоречие. Поэтому каждая точка из множества $B_j^i \cap K_d$ лежит ещё в некотором замкнутом шаре B_k^i, $k \neq j$.

По теореме 2.1 пересечение $K_\lambda \cap B_j^i$ непусто для любых i и j, и, очевидно, содержится в $B_j^i \cap K_d$, поэтому оно содержит точку p, лежащую также и в B_k^i, $k \neq j$. Отсюда вытекает, что соответствие $R(p) \supset \{a_j^i, a_k^i\}$, что и требовалось. Для завершения доказательства теоремы остается применить теорему 1.14.

□

Замечание 7. *Пусть даны границы*

$$A = \{A_1, \dots, A_n\} \text{ и } A' = \{A_1, \dots, A_n, \{a_1\}, \dots, \{a_k\}\},$$

где $\{a_1\}, \dots, \{a_k\}$ *— одноточечные множества. Пусть* $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ *и* $K'_\lambda \in \Sigma_{d'}(A')$*. Отметим, что* $d \neq d'$*, вообще говоря, однако при этом величины из теорем 2.6 и 2.7, оценивающие количество точек в минимальных компактах Штейнера* K_λ *и* K'_λ*, равны.*

Как в теореме 2.6, оценка в теореме 2.7 в самом общем случае не улучшаема. Приведем соответствующий пример.

Пример 5. *Рассмотрим* $A = \{A_1, A_2\}$*, где* $A_1 = \{a_1^1, a_2^1\}, A_2 = \{a_1^2\} \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$*. Все три точки расположены на одной прямой так, как показано на рис. 2.5. Пусть* $d_1 < |a_1^2 a_1^1|$*,* $d_2 = |a_1^2 a_1^1| + d_1$*,* $|a_1^1 a_2^1| = 2d_1$*, тогда* $d_H(A_1, A_2) = d_1 + d_2$*.*

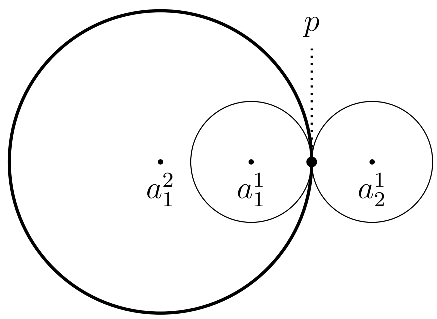

Рис. 2.5: Пример достижения верхней оценки $\#K_\lambda$

Положим $d = \{d_1, d_2\}$*, тогда* $K_d = B_1^1$*. Пусть* $p = B_1^2 \cap B_2^1$*. Покажем, что* $K_\lambda = \{p\}$*. Очевидно* $K_\lambda \subset K_d$*. Далее, точка* p *принадлежит всем трем шарам* B_2^1*,* B_1^2 *и* B_1^1*. Наконец,* $K_\lambda \setminus \{p\} = \emptyset$*, откуда, по теореме 2.1,* K_λ *— минимальный компакт в классе* $\Sigma_d(A)$*.*

С другой стороны, $m_1 = 2$*,* $m_2 = 1$*,* $n = 2$*, и* $\#K_\lambda = 1 = (m_1 + m_2) - n$*, так что оценка достигается. Отметим, что граница* A *содержит только один компакт, состоящий более чем из одной точки.*

Напомним, что теорема 1.14 также говорит о точности верхней оценки для произвольных значений n и m_i. Но мы не можем гарантировать точность этой оценки, когда отношение R специального вида, а именно, когда оно каноническое.

Гипотеза 2 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин)**.** *Оценка в теореме 2.7 точна для произвольных* n *и* m_i*.*

2.1.5 Дискретные точки и множество сцепки максимального компакта Штейнера с границей

В определениях 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 и 2.1.5 граница $A = \{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathcal{H}(X)$ произвольна, то есть не обязательно финитна.

Определение 2.1.2. Точку $a \in A_i$ назовём *дискретной точкой компакта* A_i *для вектора* $\widetilde{d} = (\widetilde{d}_1, \dots, \widetilde{d}_n) \in \mathbb{R}^n$, где $\widetilde{d}_j \geq 0$, если $\# B_{\widetilde{d}_i}(a) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) < \infty$. Множество всех дискретных для вектора $\widetilde{d}$ точек компакта $A_i \in A$ обозначим через $D_{\widetilde{d}}^{A_i}$. Также положим $D_{\widetilde{d}}^{A} = \bigcup\limits_j D_{\widetilde{d}}^{A_j}$.

Отметим, что если $\widetilde{d} = d \in \Omega(A)$, то $\bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) = K_d$ — максимальный компакт Штейнера в классе $\Sigma_d(A)$. Поэтому для $\widetilde{d} = d \in \Omega(A)$ имеем

$$\# B_{\widetilde{d}_i}(a) \cap \bigcap_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) = \# B_{d_i}(a) \cap K_d.$$

Часто уточнение о том, для какого именно вектора $\widetilde{d}$ точка $a \in A_i$ является дискретной, будет опускаться, где это не вызовет недоразумений.

Введём ещё некоторые обозначения. Пусть $\widetilde{d} \in \mathbb{R}^n$ и $\widetilde{d}_j \geq 0$ для всех j. Тогда

- $\mathrm{HP}(p, D_{\widetilde{d}}^{A_i}) := B_{\widetilde{d}_i}(p) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$, где $p \in D_{\widetilde{d}}^{A_i}$;
- $\mathrm{HP}(D_{\widetilde{d}}^{A_i}) := \bigcup\limits_{p \in D_{\widetilde{d}}^{A_i}} \mathrm{HP}(p, D_{\widetilde{d}}^{A_i})$;
- $\mathrm{HP}(D_{\widetilde{d}}^{A}) := \bigcup\limits_i \mathrm{HP}(D_{\widetilde{d}}^{A_i})$.

Определение 2.1.3. Множество $\mathrm{HP}(p, D_{\widetilde{d}}^{A_i})$, будем называть *множеством сцепки типа* $D_{\widetilde{d}}^{A_i}$ *компакта* $\bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$ *с точкой* $p \in D_{\widetilde{d}}^{A_i}$. Каждую точку из $\mathrm{HP}(p, D_{\widetilde{d}}^{A_i})$ будем называть *точкой сцепки* или *hook point*.

Определение 2.1.4. Множество $\mathrm{HP}(D_{\widetilde{d}}^{A_i})$, будем называть *множеством сцепки типа* $D_{\widetilde{d}}^{A_i}$ *компакта* $\bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$ *с граничным компактом* A_i.

Определение 2.1.5. Множество $\mathrm{HP}(D_{\widetilde{d}}^{A})$ будем называть *множеством сцепки типа* $D_{\widetilde{d}}^{A}$ *компакта* $\bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$ *с границей* A.

Также отметим, что если $\widetilde{d} = d \in \Omega(A)$, то для $p \in D_d^{A_i}$ верно

$$\mathrm{HP}(p, D_d^{A_i}) = B_{d_i}(p) \cap \bigcap_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) = B_{d_i}(p) \cap K_d.$$

Далее везде, где будет ясно, о какой границе A и о каком векторе $\widetilde{d}$ идёт речь, в обозначении множества дискретных точек верхний индекс A и нижний индекс $\widetilde{d}$ будут опускаться, а именно, **$D^{A_i}_{\widetilde{d}}$ и $D^{A}_{\widetilde{d}}$ будут заменяться на D^i и D**.

Напомним, что векторы решений обозначаются в тексте через d, а компоненты вектора решения через d_i, то есть $d_i = d_H(A_i, K)$, где $K \in \Sigma_d(A)$.

В данной работе нас интересует поведение именно векторов решений $d \in \Omega(A)$. Поэтому всюду в тексте, если не оговорено противное, дискретные точки будут рассматриваться только для $d \in \Omega(A)$.

Далее до конца раздела 2.1 граница $A = \{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathcal{H}(X)$ снова финитна.

Из теоремы 2.4 прямо вытекает следующий результат.

Следствие 4 ([24] Галстян)**.** *Пусть норма пространства X строго выпукла. Тогда множество* $\mathrm{HP}(D)$ *непусто, конечно и содержится в ∂K_d. Более того, если максимальный компакт K_d конечен, то* $\mathrm{HP}(D) = K_d$.

Утверждение 2.1.11 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин)**.** *Пусть $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$, тогда для всех i, j если $a^i_j \in D^i$, то*

$$K_\lambda \cap \mathrm{HP}(a^i_j, D^i) \neq \emptyset.$$

Доказательство. Допустим противное: существуют i, j такие, что

$$a^i_j \in D^i \text{ и } K_\lambda \cap \mathrm{HP}(a^i_j, D^i) = \emptyset.$$

Так как

$$\emptyset = K_\lambda \cap \mathrm{HP}(a^i_j, D^i) = K_\lambda \cap B^i_j \cap K_d = K_\lambda \cap B^i_j,$$

то приходим к противоречию с утверждением 1.4.1.

$\square$

Напомним, что в общем случае $K_\lambda \subset \partial K_d$ места не имеет, см. пример 2. Поэтому в силу следствия 4 не имеет места включение $K_\lambda \subset \mathrm{HP}(D)$. Однако, оно справедливо, если K_λ — единственный минимальный компакт в своём классе.

Теорема 2.8 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин)**.** *[Критерий единственности минимального компакта] Пусть норма пространства X строго выпукла. Минимальный компакт Штейнера K_λ — единственный минимальный компакт в $\Sigma_d(A)$ тогда и только тогда, когда для каждой точки $p \in K_\lambda$ существует точка a^i_j такая, что* $\mathrm{HP}(a^i_j, D^i) = \{p\}$.

Доказательство. Согласно следствию 4 в случае строго выпуклой нормы пространства X множество $\mathrm{HP}(D)$ непусто.

Необходимость. Пусть K_λ — единственный минимальный компакт в $\Sigma_d(A)$. Допустим, что он содержит в себе точку p, для которой не существует a^i_j такой, что $\mathrm{HP}(a^i_j, D^i) = \{p\}$. Это означает, что все шары B^i_j, содержащие точку $p \in K_\lambda$, пересекаются с K_d более чем по одной точке.

Рассмотрим каноническое отношение $R(K_\lambda)$ между K_λ и $\widetilde{A}$. Согласно теореме 2.2 отношение $R(K_\lambda)$ — соответствие, удовлетворяющее условию 1, поэтому существует непустое семейство S точек a^i_j таких, что $R^{-1}(a^i_j) = \{p\}$. Для каждой $a^i_j \in S$ выберем в пересечении $B^i_j \cap K_d$ точку, отличную от p (напомним, такая точка существует по условию). Множество выбранных точек обозначим через Q, и положим $K = \big(K_\lambda \setminus \{p\}\big) \cup Q$. Рассмотрим каноническое отношение $R(K)$. Отметим, что по построению $K \subset K_d$, и отношение $R(K)$ является соответствием. Поэтому K — компакт Штейнера по утверждению 2.1.2. Применим к K алгоритм 1 и получим минимальный компакт Штейнера, который не содержит точку p и, значит, отличен от исходного K_λ, что противоречит единственности минимального компакта.

Достаточность. Пусть для каждой точки $p \in K_\lambda$ существует точка a^i_j такая, что $\mathrm{HP}(a^i_j, D^i) = \{p\}$. Допустим, что в $\Sigma_d(A)$ существует ещё один минимальный компакт Штейнера K'. Тогда, существует точка $p \in (K_\lambda \setminus K')$. Но по условию найдётся a^i_j такая, что $\mathrm{HP}(a^i_j, D^i) = B^i_j \cap K_d = \{p\}$. Но это означает, что $B^i_j \cap K' = \emptyset$. Получили противоречие с теоремой 2.1. Теорема доказана.

□

Утверждение 2.1.12 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин)**.** *Пусть норма пространства X строго выпукла и $a^i_j \in D^i$. Тогда каждая точка из $\mathrm{HP}(a^i_j, D^i)$ лежит на границе как минимум двух шаров $B^{i'}_{j'}$ и $B^{i''}_{j''}$ с центрами, принадлежащими разным граничным компактам.*

Доказательство. Пусть $a^i_j \in D^i$. Так как норма пространства X строго выпукла, то согласно следствию 4 справедливо $\mathrm{HP}(a^i_j, D^i) \subset \partial K_d$. Рассмотрим точку $p \in \mathrm{HP}(a^i_j, D^i) = B^i_j \cap K_d = B^i_j \cap \partial K_d$. Получаем, что $p \in B^i_j$ и $p \in \partial K_d$. Заметим также, что

$$\partial K_d = \partial\Big(\bigcup_{j_1,\dots,j_n} B^1_{j_1} \cap \ldots \cap B^n_{j_n}\Big) \subset \bigcup_{j_1,\dots,j_n} \partial\big(B^1_{j_1} \cap \ldots \cap B^n_{j_n}\big) \subset \bigcup_{i,j} \partial B^i_j,$$

Следовательно, для $p \in \mathrm{HP}(a^i_j, D^i)$ найдется по крайней мере один шар B^k_t такой, что $p \in \partial B^k_t$.

Возьмём произвольное пересечение $B^1_{j_1} \cap \ldots \cap B^n_{j_n}$, содержащее p, в котором заменим шары $B^k_{j_k}$ и $B^i_{j_i}$ на шары B^k_t и B^i_j соответственно. Допустим, что $p \in \mathrm{HP}(a^i_j, D^i)$ лежит во внутренности всех $B^s_{j_s}$, $s \neq k$, участвующих в полученном пересечении. Следовательно, существует открытый шар U с центром p, такой, что $U \subset B^s_{j_s}$ для всех $s \neq k$. Вспоминаем, что $p \in \partial B^k_{j_k}$, поэтому пересечение $B^1_{j_1} \cap \ldots \cap B^n_{j_n}$ бесконечно. Один из шаров, участвующих в данном пересечении, равен B^i_j, следовательно, $\#(B^i_j \cap K_d) = \infty$, то есть $a^i_j \notin D^i$, противоречие.

□

Будем говорить, что на точке $p \in X$ *реализуется расстояние* d_i, если существует $a^i_j \in A_i$ такая, что $|a^i_j\, p| = d_i$. Из определения расстояния Хаусдорфа, непрерывности функции $f_A(x) = |xA|$ и компактности элементов пространства $\mathcal{H}(X)$ вытекает следующая лемма.

Лемма 2.9 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин). *Пусть $A, B \in \mathcal{H}(X)$ и $d_H(A, B) = d$. Тогда существуют точки $a \in A$ и $b \in B$ такие, что $|ab| = d$.*

Из леммы 2.9 следует, что для любых d_i и $K \in \Sigma_d(A)$ существует точка $p \in K$, на которой реализуется d_i.

Однако, справедливо более сильное утверждение.

Теорема 2.10 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин). *Пусть норма пространства X строго выпукла. Тогда каждое d_i реализуется по крайней мере на одной точке из $K_\lambda \cap \mathrm{HP}(D)$ для любого $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$.*

Доказательство. Пусть некоторое d_i не реализуется ни на одной точке из $K_\lambda \cap \mathrm{HP}(D)$. Отметим, что тогда $K_\lambda \cap \mathrm{HP}(D) \subset U^i$. Однако, по лемме 2.9 существует точка $p \in K_\lambda$, на которой d_i реализовано, то есть существует шар B_j^i такой, что $p \in \partial B_j^i$. Так как $p \notin K_\lambda \cap \mathrm{HP}(D)$, то $p \notin \mathrm{HP}(D)$. Следовательно, $\# B_j^i \cap K_d = \infty$. Поэтому, так как норма пространства X строго выпукла, $\mathrm{Int}(B_t^i \cap K_d) \neq \emptyset$ по лемме 2.5. И вообще, в таком случае для любого шара B_t^k если $p \in B_t^k$, то $\mathrm{Int}(B_t^k \cap K_d) \neq \emptyset$.

Так как K_λ минимальный компакт Штейнера, то согласно пункту (3) теоремы 2.1 существует шар B_t^k такой, что $B_t^k \cap (K_\lambda \setminus \{p\}) = \emptyset$. Значит, $B_t^k \cap K_\lambda = \{p\}$ и $\mathrm{Int}(B_t^k \cap K_d) \neq \emptyset$. Перестроим компакт K_λ: для всех таких шаров B_t^k заменим в K_λ точку p на произвольную точку $q \neq p$ (для каждого шара B_t^k точка q может быть своя) из множества $B_t^k \cap K_d$ такую, что если $k = i$, то $q \in \mathrm{Int}(B_t^i \cap K_d)$ и $q \notin \partial B_s^i$ для всех s, другими словами, $q \in B_t^i \cap K_d$ и на q не реализуется d_i.

Проделаем такие действия для всех точек $p \in K_\lambda$, на которых реализовалось расстояние d_i. Полученный компакт обозначим через K. Замечаем, что $K \subset K_d$, поэтому $K \subset B^k$ для всех k, причём $K \subset U^i$ по построению. Также так как для всех шаров B_t^k верно: $B_t^k \cap K \neq \emptyset$ и $U_t^i \cap K \neq \emptyset$, то $A_k \subset B_{d_k}(K)$ для любого k и $A_i \subset U_{d_i}(K)$. Это означает, что $d_H(A_k, K) \le d_k$ для всех k и $d_H(A_i, K) < d_i$. Поэтому $S(A, K) = \sum_k d_H(A_k, K) < \sum_k d_k = S_A$, противоречие.

□

Следствие 5 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин). *Пусть норма пространства X строго выпукла. Тогда каждое d_i реализуется по крайней мере на одной точке $p \in \mathrm{HP}(D)$.*

Следствие 6 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин). *Пусть норма пространства X строго выпукла. Тогда для каждого минимального компакта $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ и любого номера i существует точка $p \in K_\lambda$ такая, что на ней реализуются по крайней мере два расстояния d_i и d_k $(i \neq k)$.*

Доказательство. Так как норма пространства X строго выпукла, то согласно теореме 2.10 для любых $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ и номера i существует $p \in K_\lambda \cap \mathrm{HP}(D)$ такая, что d_i реализуется на p. Но в силу утверждения 2.1.12 на каждой точке из $\mathrm{HP}(D)$ реализуется минимум два различных расстояния. Поэтому найдётся такое k $(k \neq i)$, что d_k тоже реализуется на p.

□

2.1.6 Листья реализации расстояний

Пусть дана точка $p \in X$. Положим $L_i(p) = \big\{a^i_j \in A_i : |a^i_j p| = d_i\big\}$. Множество $\bigcup\limits_{i=1}^{n} L_i(p)$ обозначим через $L(p)$.

Определение 2.1.6. Множество $L_i(p)$ будем называть *множеством листьев реализации расстояния* d_i *на точке* p, а множество $L(p)$ — *множеством листьев точки* p.

Лемма 2.11 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин)**.** *Пусть M — замкнутое выпуклое подмножество пространства X, и точка $x \in X$ лежит вне M. Тогда существуют вектор $v \in X$ и полуинтервал $I = [0, \varepsilon_0)$, где $\varepsilon_0 > 0$, такие, что для любой $m \in M$ функция $f_m(\varepsilon)$, равная расстоянию от m до $(x + \varepsilon v)$, строго монотонно убывает на I.*

Доказательство. Действительно, точка x лежит вне замкнутого выпуклого множества M, поэтому отделена от него гиперплоскостью. Выберем в качестве v вектор нормали к этой гиперплоскости, направленный в то ограниченное ей полупространство, которое содержит M. Тогда для каждой точки $m \in M$ вектор v имеет положительную проекцию на вектор xm, откуда и вытекает требуемое.

$\square$

Теорема 2.12 ([24] Галстян, Иванов, Тужилин)**.** *Пусть норма пространства X строго выпукла, C — конечное подмножество пространства X и $q \in X$ — точка, не принадлежащая C, такие, что*

- $c \notin \mathrm{Conv}\big(L(c)\big)$ *для любой* $c \in C$;
- $\#L_i(q) \le 1$ *для всех* i;
- *точка q не является точкой Ферма–Штейнера множества $L(q)$.*

Тогда $P = \big(C \cup \{q\}\big) \notin \Sigma_d(A)$.

Доказательство. Допустим противное: пусть $P = \big(C \cup \{q\}\big) \in \Sigma_d(A)$. Введём обозначение $I(x) = \bigcap_{B^i_j \ni x} B^i_j$.

Для любой $c \in C$:

- если $L(c) = \emptyset$, то из $c \in B^i_j$ следует $c \in U^i_j$;
- если $L(c) \neq \emptyset$, то в силу леммы 2.11, применённой к точке c и замкнутому выпуклому множеству $\mathrm{Conv}\big(L(c)\big)$, существуют такой вектор v_c и $\varepsilon > 0$, что $[c, c + v_c\varepsilon] \subset I(c)$.

Поэтому $\mathrm{Int}\, I(c) \neq \emptyset$, то есть $I(c)$ бесконечно для всех $c \in C$ (во втором случае воспользовались леммой 1.7).

Если $q \notin \operatorname{Conv}\bigl(L(q)\bigr)$, то из тех же рассуждений, что для точек $c \in C$, множество $I(q)$ бесконечно. В силу утверждения 1.4.1, для любых t, s существует $p \in P$ такая, что $p \in B_t^s$, то есть $I(p) = \bigl(B_t^s \cap I(p)\bigr)$. Так как $p \in P \subset K_d = \bigcup\limits_{j_1,\dots,j_n} B_{j_1}^1 \cap \ldots \cap B_{j_n}^n$, то для некоторых $k_1, \dots, k_n$ справедливо:

$$\bigl(B_t^s \cap I(p)\bigr) \subset \Bigl(B_t^s \cap \bigl(B_{k_1}^1 \cap \ldots \cap B_{k_n}^n\bigr)\Bigr) \subset (B_t^s \cap K_d).$$

Следовательно, $B_t^s \cap K_d$ бесконечно для любых t и s, что противоречит теореме 2.4.

Пусть теперь $q \in \operatorname{Conv}\bigl(L(q)\bigr)$, и пусть, без ограничения общности, на q реализуются расстояния $d_1, \dots, d_k$. Перестроим теперь точку q. Обозначим через $f(x)$ длину сети типа звезда с границей $L(q)$ и дополнительной вершиной x. Так как $\#L_i(q) \le 1$ для всех i, то $f(q) = \sum_{i=1}^k d_i$. По условию q не точка Ферма–Штейнера для $L(q)$, поэтому в силу выпуклости вниз функционала длины существуют вектор v и $\varepsilon > 0$ такие, что $f(q + v\varepsilon) < f(q)$. Пусть ε выбрано для всех i, j так, что $q' = (q + v\varepsilon) \in U_j^i$, если $q \in U_j^i$. Такой выбор можно осуществить в силу того, что i и j принимают конечное число значений. Положим $d_i' = |q' a_j^i|$, где $L_i(q) = \{a_j^i\}$, то есть $f(q') = \sum_{i=1}^k d_i' < f(q) = \sum_{i=1}^k d_i$.

Пусть $\mathfrak{I}(c)$ — множество всех шаров, участвующих в пересечении $I(c)$, $c \in C$. Перестроим $\mathfrak{I}(c)$: если $i \in \{1, \dots, k\}$, то заменим в $\mathfrak{I}(c)$ шар B_j^i на $B_{d_i'}(a_j^i)$. Положим $I'(c) = \bigcap_{B \in \mathfrak{I}(c)} B$. Как мы показали выше, $\operatorname{Int} I(c) \ne \emptyset$ для всех $c \in C$. Поэтому можно считать ε подобранным так, что $\operatorname{Int} I'(c) \ne \emptyset$ для всех $c \in C$. Положим $P' = \bigcup_{c \in C} I'(c) \cup \{q'\}$. Замечаем, что $S(A, P') = \sum_{i=1}^k d_i' + \sum_{i=k+1}^n d_i < \sum_{i=1}^n d_i = S(A, P)$, противоречие. Теорема доказана.

$\square$

Замечание 8. *Мы описали ряд свойств максимального и минимальных компактов Штейнера для финитных границ в предположении, что вектор $d \in \Omega(A)$ нам известен. Поиск таких векторов — отдельная нетривиальная задача. Отметим, что для любой границы $A \subset \mathcal{H}(X)$ если удаётся найти хотя бы один компакт Штейнера K, то величины d_i можно вычислить как расстояния Хаусдорфа между K и компактами A_i. Зная все d_i, то есть вектор d, мы можем построить максимальный компакт Штейнера K_d как пересечение соответствующих B^i, а также в случае финитной границы A найти все минимальные компакты Штейнера K_λ в классе $\Sigma_d(A)$ посредством алгоритма 1. Так как каждый $K \in \Sigma_d(A)$ лежит между K_d и некоторым минимальным компактом K_λ, т.е. $K_\lambda \subset K \subset K_d$, то таким образом для финитной границы A будет найден весь класс $\Sigma_d(A)$.*

2.1.7 О решении проблемы Ферма–Штейнера в одном частном случае

В данном разделе мы применим разработанную выше технику для решения проблемы Ферма–Штейнера в конкретном случае, который был впервые предложен в [23] и разобран в работе [1]. Применив эту технику, мы получим более простые и прозрачные рассуждения.

В этом разделе $A = \{A_1, A_2, A_3\} \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$, $A_i = \{a_i, b_i\}$ и $\widetilde{A} = \sqcup_i A_i$. Множество всех точек $\{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3\}$ расположено на единичной окружности с центром в начале координат, и оно является множеством вершин правильного шестиугольника, см. рис. 2.16. Координаты точек следующие:

$$a_1 = \Bigl(-\cos(\pi/3), \sin(\pi/3)\Bigr);$$

$$b_1 = \Bigl(\cos(\pi/3), \sin(\pi/3)\Bigr);$$

$$a_2 = \Bigl(-\cos(\pi/3), -\sin(\pi/3)\Bigr);$$

$$b_2 = (-1, 0);$$

$$a_3 = (1, 0);$$

$$b_3 = \Bigl(\cos(\pi/3), -\sin(\pi/3)\Bigr).$$

Напомним, что через S_A мы обозначили минимальное значение функции $S(A, K)$.

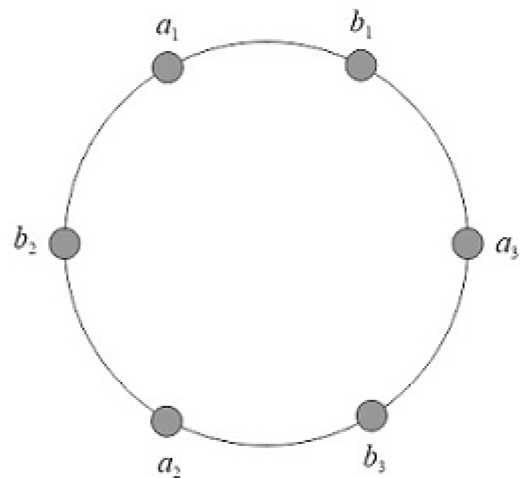

Рис. 2.6: Граничное множество $A = \{A_1, A_2, A_3\}$. Компакты $A_i = \{a_i, b_i\}$ составлены из вершин правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса 1.

Нам потребуются следующие леммы.

Лемма 2.13. *Справедливо неравенство $S_A \le 3$.*

Доказательство. Действительно, пусть O — центр окружности. Тогда $d_H\bigl(A_i, \{O\}\bigr) = 1$ для всех i, поэтому $S\bigl(A, \{O\}\bigr) = 3$, и значит $S_A \le 3$. □

Лемма 2.14. *Пусть $d \in \Omega(A)$. Если $B_{d_1}(a_1) \cap B_{d_2}(a_2) \cap B_{d_3}(a_3) \ne \emptyset$ или $B_{d_1}(b_1) \cap B_{d_2}(b_2) \cap B_{d_3}(b_3) \ne \emptyset$, то $S_A = 3$.*

Доказательство. Рассмотрим первый случай, второй разбирается точно так же. Вершины a_1, a_2 и a_3 образуют правильный треугольник, точка Торричелли t которого совпадает с центром описанной около него окружности, и $|a_1t|+|a_2t|+|a_3t| = 3$. Пусть $x \in B_{d_1}(a_1)\cap B_{d_2}(a_2)\cap B_{d_3}(a_3)$. Тогда $|a_ix| \le d_i$, $i = 1, 2, 3$, поэтому

$$S_A = d_1 + d_2 + d_3 \ge |a_1x| + |a_2x| + |a_3x| \ge |a_1t| + |a_2t| + |a_3t| = 3.$$

С другой стороны, $S_A \le 3$ по лемме 2.13, значит, $S_A = 3$. Лемма доказана.

□

Следствие 7. *Если $\#K_\lambda = 1$, то $S_A = 3$.*

Доказательство. Пусть $\#K_\lambda = 1$. Обозначим единственную точку минимального компакта через x. Согласно теореме 2.1 имеем: $x \in B_{d_i}(a_i)$ для всех i. Следовательно, $B_{d_1}(a_1)\cap B_{d_2}(a_2)\cap B_{d_3}(a_3) \ne \emptyset$. Осталось применить лемму 2.14.

□

Согласно оценке из теоремы 2.6 в рассматриваемом случае $\#A_i = 2$, $n = 3$, поэтому $\#K_\lambda \le \#\widetilde{A} - n = 3$. Предположим, что оценка достигается, то есть $\#K_\lambda = 3$.

Утверждение 2.1.13. *Если $\#K_\lambda = 3$, то $S_A = 3$.*

Доказательство. Рассмотрим каноническое отношение $R(K_\lambda)$. Так как K_λ — минимальный компакт Штейнера, то $R(K_\lambda)$ по теореме 2.2 является соответствием, удовлетворяющим условиям 1. Обозначим через $\mathfrak{R}$ множество всех соответствий R между K_λ и $\widetilde{A}$, которые удовлетворяют условиям 1.

Пусть $R \in \mathfrak{R}$ и G_R — двудольный граф этого соответствия. Каждая вершина из K_λ смежна с вершинами из каждого A_i, поэтому в каждое множество A_i приходит не менее трех ребер графа G_R. Далее, каждая вершина из K_λ смежна с вершиной степени 1 из $\widetilde{A}$, причем две такие вершины из $\widetilde{A}$ не могут лежать в одном A_i, так как в этом случае в A_i приходит только два ребра графа G_R. Поэтому каждое A_i содержит одну вершину степени 1 и одну вершину степени не меньше 2.

Обозначим через p_i вершину из K_λ, смежную с вершиной степени 1 из A_i. Граф G_R должен содержать 9 ребер, показанных на рис. 2.7 сплошными линиями, и может также содержать некоторые из трех ребер, показанных рис. 2.7 пунктиром. В частности, граф любого соответствия $R \in \mathfrak{R}$ содержит подграф G, состоящий из 9 ребер, показанных на рис. 2.7 сплошными линиями, и определенный с точностью до того, какая из точек a_i или b_i является вершиной степени 1 в каждом из A_i.

Пусть в графе G точки b_i, a_j, a_k — вершины степени 1. Тогда вершина p_i смежна с вершиной b_i степени 1 и вершинами степени 2 b_j и b_k. Значит $p_i \in B_{d_1}(b_1)\cap B_{d_2}(b_2)\cap B_{d_3}(b_3)$, и по лемме 2.14 получаем, что $S_A = 3$.

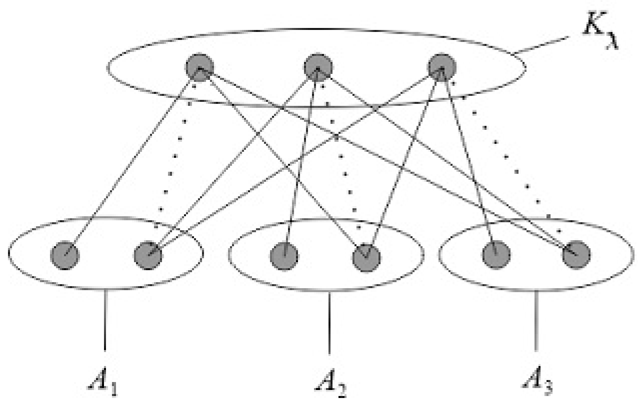

Рис. 2.7: Граф G.

Случай, когда a_i, b_j, b_k — вершины степени 1 в G, полностью аналогичен.

Пусть теперь a_1, a_2 и a_3 — вершины степени 1 (случай, когда b_1, b_2 и b_3 — вершины степени 1, полностью аналогичен). На рис. 2.8 показан граф соответствия $R(K_\lambda)$ и его подграф G.

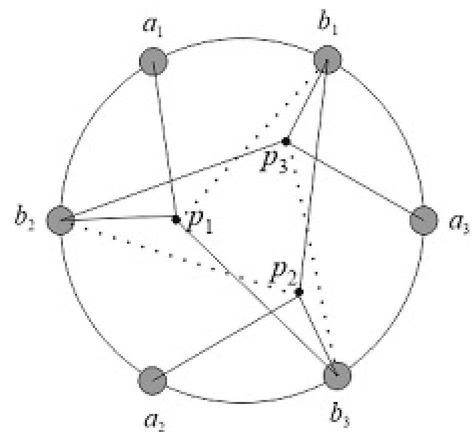

Рис. 2.8: Граф соответствия $R(K_\lambda)$.

Так как $(p_1, b_2) \in R(K_\lambda)$ и $(p_1, a_2) \notin R(K_\lambda)$, то точка p_1 лежит ближе к b_2 чем к a_2, т.е. принадлежит открытой полуплоскости, ограниченной серединным перпендикуляром к отрезку $[a_2, b_2]$ и содержащей b_2. Далее, $(p_1, b_3) \in R(K_\lambda)$ и $(p_1, a_3) \notin R(K_\lambda)$, поэтому точка p_1 лежит строго внутри угла Υ_1 между серединными перпендикулярами к отрезкам $[a_3, b_3]$ и $[a_2, b_2]$, содержащего точку b_2. Аналогично устанавливаем, что p_2 лежит строго внутри угла Υ_2 между серединными перпендикулярами к отрезкам $[a_1, b_1]$ и $[a_3, b_3]$, содержащего точку b_3, а также p_3 находится строго внутри угла Υ_3 между серединными перпендикулярами к отрезкам $[a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2]$, содержащего точку b_1. Изобразим данные сектора и закрасим их области для удобства внутри единичного круга, см. рис. 2.9.

Рассмотрим точку p_1, лежащую внутри угла Υ_1. Так как $(p_1, b_3) \in R(K_\lambda)$, то $p_1 \in B_{d_3}(b_3)$. Но расстояние от b_3 до угла Υ_1 достигается в точке O и равно 1, поэтому $d_3 > 1$. Аналогично $d_1 > 1$ и $d_2 > 1$. Таким образом, $S_A = d_1 + d_2 + d_3 > 3$, что противоречит лемме 2.14. Таким образом, этот случай не реализуется. Утверждение доказано.

□

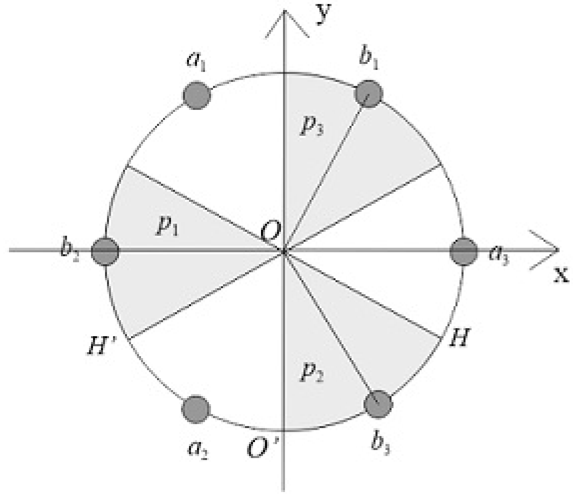

Рис. 2.9: Области определения точек из K_λ.

Следующая лемма получается прямым перебором.

Лемма 2.15. *Вписанные в окружность треугольники такие, что их вершины лежат в трех разных граничных компактах A_i, могут быть лишь двух видов: правильные треугольники и прямоугольные, гипотенуза которых — диаметр окружности.*

Определение 2.1.7. Пусть $p \in K \in \Sigma_d(A)$. Если $|a^i_j p| \le d_i$, то будем говорить, что p *соединяется с точкой* a^i_j. Отметим, что последнее равносильно тому, что p находится с a^i_j в каноническом отношении $R(K)$. Поэтому в дальнейшем эти термины используются как синонимы.

Лемма 2.16. *Если для любого i есть точка в K_λ, соединяющаяся с b_i и с диаметрально противоположной ей a_j, то $S_A = 3$.*

Доказательство. Согласно условию есть точка $p \in K_\lambda$, соединяющаяся с a_1 и с b_3, следовательно, $d_1 + d_3 \ge |a_1 p| + |p b_3| \ge 2$. Аналогично есть точка, соединяющаяся с a_2 и с b_1, и есть точка, соединяющаяся с a_3 и с b_2, откуда $d_1 + d_2 \ge 2$ и $d_2 + d_3 \ge 2$ соответсвенно. Поэтому $2d_1 + 2d_2 + 2d_3 \ge 6$. Следовательно, $S_A = d_1 + d_2 + d_3 \ge 3$, но $S_A \le 3$ по лемме 2.13, значит, $S_A = 3$.

□

Лемма 2.17. *Если существуют по крайней мере два граничных компакта, все точки которых соединяются с некоторой точкой из K_λ, то $S_A = 3$.*

Доказательство. Допустим противное, точка p из минимального компакта соединяется с точками a_i, b_i, a_j, b_j. Но p должна соединяться хотя бы с одной точкой из A_k. Следовательно, из вершин, с которыми соединяется данная точка, можно выделить вершины правильного треугольника. Это означает, что или $B_{d_1}(a_1) \cap B_{d_2}(a_2) \cap B_{d_3}(a_3) \neq \emptyset$ или $B_{d_1}(b_1) \cap B_{d_2}(b_2) \cap B_{d_3}(b_3) \neq \emptyset$, и $S_A = 3$ по лемме 2.14.

□

Теорема 2.18. *В сделанных предположениях*

(1) $S_A = 2.94645\ldots < 3$;

(2) *множество* $\Omega(A)$ *состоит из трех векторов, получающихся из вектора*

$$\left(\sqrt{1+t^2+t}, \sqrt{1+t^2-t}, \sqrt{1+t^2-t}\right),$$

где $t = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5} - \sqrt{4\sqrt{5}-7}\right)$, *циклическими перестановками координат*;

(3) *каждый класс* $\Sigma_d(A)$ *получается из другого поворотом на* $2\pi/3$ *вокруг центра* O *окружности*;

(4) *минимальный компакт Штейнера в каждом классе единственный и состоит ровно из двух точек.*

Доказательство. Напомним, что из теоремы 2.6 мы уже получили оценку $\#K_\lambda \leq 3$. Если $\#K_\lambda = 1$ или $\#K_\lambda = 3$, то по следствию 2.4 и утверждению 2.1.13 имеем $S_A = 3$. Осталось рассмотреть случай $\#K_\lambda = 2$.

Пусть $K_\lambda = \{x, y\}$. Рассмотрим каноническое отношение $R = R(K_\lambda)$. Так как K_λ — минимальный компакт Штейнера, то по теореме 2.2 отношение R является соответствием, удовлетворяющим условию 1. В частности, каждая точка из K_λ состоит в отношении R (или, что тоже самое, соединена) по крайней мере с одной точкой из каждого граничного компакта. Согласно лемме 2.15 три такие точки из разных A_i являются либо вершинами правильного треугольника, либо вершинами прямоугольного треугольника.

Если хотя бы один треугольник оказался правильным, то согласно лемме 2.14 получаем, что $S_A = 3$. Пусть теперь все треугольники, образованные точками из трех попарно различных компактов, соединенные с одной и той же точкой из K_λ — прямоугольные. Гипотенузы этих треугольников — диаметры окружности. Следовательно, у каждой точки из K_λ найдётся пара диаметрально противоположных точек из граничных компактов, с которыми она соединяется. Далее каждую такую пару будем называть *диаметром этой точки.* Отметим, что пар диаметрально противоположных точек из $\widetilde{A}$ всего три.

Если у всех точек K_λ в совокупности — три различных диаметра, то по лемме 2.16 получим $S_A = 3$. Предположим теперь, что диаметров не больше двух.

Допустим сначала, что у точек x и y имеется общий диаметр. Покажем, что в этом случае тоже $S_A = 3$. Не ограничивая общности, пусть пара (a_1, b_3) — общий диаметр точек x и y.

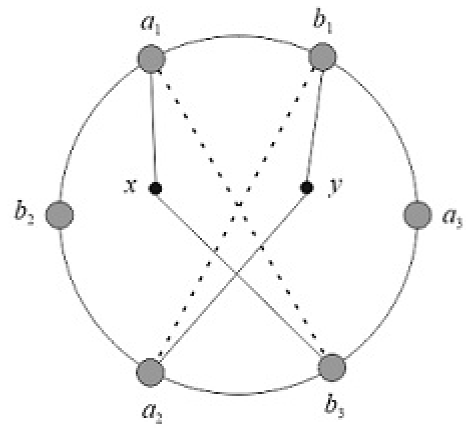

Рис. 2.10: Диаметры точек x и y из K_λ.

Хотя бы одна из точек x и y должна соединяться с b_1. Для определенности пусть это точка x. Если x соединяется и с b_2, то получим, что x соединяется с точками b_1, b_2 и b_3, то есть $S_A = 3$ по лемме 2.14. Иначе точка x соединяется с a_2 (напомним, каждая точка из K_λ соединяется с каждым компактом A_i). Тогда у точки x есть ещё диаметр (b_1, a_2). Итак, точка x соединена с a_1, b_3, b_1, a_2. Если x соединяется ещё и с a_3, то x соединяется с a_1, a_2 и a_3, и тогда снова $S_A = 3$ по лемме 2.14. Остается рассмотреть случай, когда x не соединяется ни с b_2, ни с a_3. Тогда с ними должна соединяться точка y. Но в таком случае у точки y есть диаметр (b_2, a_3), и в совокупности получаем три диаметра, что противоречит нашему предположению.

Итак, осталось рассмотреть случай, когда каждая из точек x, y имеет ровно один диаметр, и эти диаметры разные. Заметим, что любые два диаметра содержат две точки из одного граничного компакта, и две точки из двух других. Не ограничивая общности, пусть (a_1, b_3) — диаметр точки x и (b_1, a_2) — диаметр точки y, см. рис. 2.10. Тогда $d_1 + d_3 \geq 2$ и $d_1 + d_2 \geq 2$, откуда $d_1 + d_2 + d_3 + d_1 \geq 4$. С другой стороны, $S_A = d_1 + d_2 + d_3 \leq 3$ по лемме 2.13, поэтому $d_1 \geq 1$.

Далее, так как $d_1 + d_3 \geq 2$ и $d_1 + d_2 + d_3 \leq 3$, то $d_2 \leq 1$. Аналогично, так как $d_1 + d_2 \geq 2$ и $d_1 + d_2 + d_3 \leq 3$, то $d_3 \leq 1$.

Заметим, что если одновременно два расстояния d_2 и d_3 равны 1, то, так как $d_1 \geq 1$, имеем $d_1 + d_2 + d_3 \geq 3$ и поэтому в этом случае $S_A = 3$. Поэтому далее будем предполагать, что по крайней мере одно из расстояний d_2 и d_3 строго меньше 1.

Если точка x не соединяется с a_2, то x лежит ближе к b_2 чем к a_2, т.е. строго внутри полуплоскости, ограниченной серединным перпендикуляром к отрезку $[a_2, b_2]$, см. рис. 2.11. Но тогда $d_3 > 1$, так как x соединяется с b_3, противоречие. Таким образом, x соединяется с a_2. Аналогично показывается, что y соединяется с b_3.

Далее, по лемме 2.14 точка y не соединяется с b_2, а точка x не соединяется с a_3 (иначе $S_A = 3$). Тогда b_2 соединяется с x, а a_3 соединяется с y. По лемме 2.17, если x или y соединена

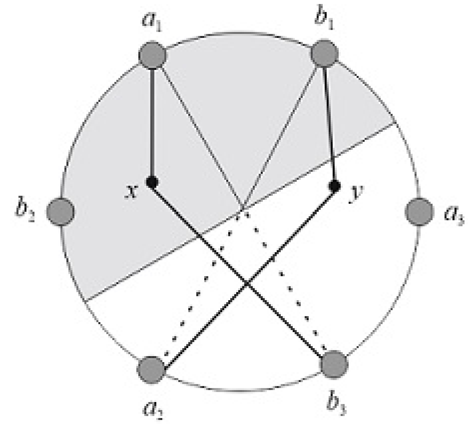

Рис. 2.11: Если точка x не соединяется с a_2, то лежит в открытой полуплоскости, выделенной серым.

ещё хотя бы с одной точкой из A, то $S_A = 3$. Поэтому в дальнейшем предполагаем, что точка x не соединяется с b_1 и a_3, а точка y не соединяется с b_2 и a_1.

Итак, точка x соединена с точками a_1, a_2, b_2 и b_3 и не соединена с двумя оставшимися, поэтому она содержится во множестве

$$I_x = \Big(B_{d_1}(a_1) \cap B_{d_2}(a_2) \cap B_{d_2}(b_2) \cap B_{d_3}(b_3)\Big) \setminus B_{d_1}(b_1) \setminus B_{d_3}(a_3),$$

см. рис. 2.12. Так как $B_{d_2}(b_2) \cap B_{d_3}(a_3) = \emptyset$, то

$$I_x = \Big(B_{d_1}(a_1) \cap B_{d_2}(a_2) \cap B_{d_2}(b_2) \cap B_{d_3}(b_3)\Big) \setminus B_{d_1}(b_1).$$

Аналогично определяется множество

$$I_y = \Big(B_{d_1}(b_1) \cap B_{d_2}(a_2) \cap B_{d_3}(a_3) \cap B_{d_3}(b_3)\Big) \setminus B_{d_1}(a_1),$$

в котором расположена точка y.

Так как $d_1 \geq 1$, то центр O окружности лежит в $B_{d_1}(b_1)$ и, значит, не лежит в I_x. Поэтому $I_x \subset B_3(b_3)$ лежит в открытой полуплоскости, ограниченной серединным перпендикуляром к отрезку $[a_2, b_2]$ и содержащей a_2, откуда $|a_2x| < |b_2x| \leq d_2$. Таким образом:

$$I_x = \Big(B_{d_1}(a_1) \cap B_{d_2}(b_2) \cap B_{d_3}(b_3)\Big) \setminus B_{d_1}(b_1).$$

Аналогично для y:

$$I_y = \Big(B_{d_1}(b_1) \cap B_{d_2}(a_2) \cap B_{d_3}(a_3)\Big) \setminus B_{d_1}(a_1).$$

Лемма 2.19. *Точки x и y не являются точками Ферма–Штейнера для вершин треугольников $a_1b_2b_3$ и $b_1a_2a_3$ соответственно.*

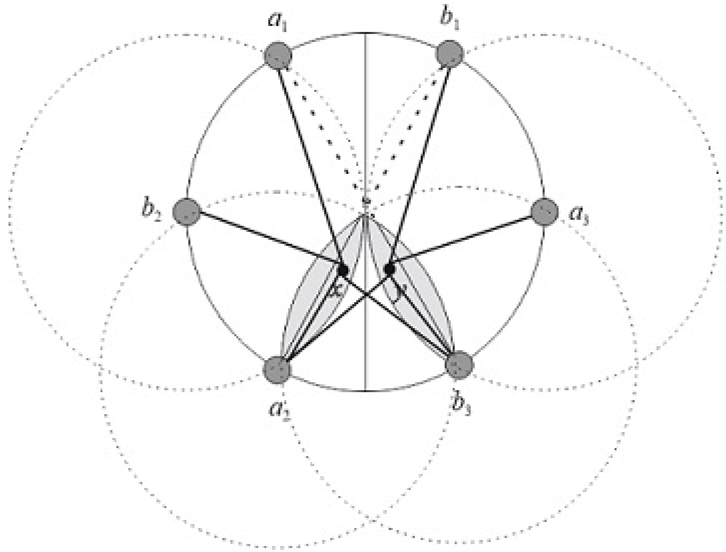

Рис. 2.12: Области, содержащие I_x и I_y.

Доказательство. Для x и y справедливы неравенства:

$$|a_1x| + |a_2x| + |b_3x| < |a_1x| + |b_2x| + |b_3x|$$

и

$$|b_1y| + |a_2y| + |b_3y| < |b_1y| + |a_2y| + |a_3y|.$$

Но в силу того, что треугольник $a_1a_2b_3$ равен $a_1b_2b_3$, а $b_1a_2b_3$ равен $b_1a_2a_3$, если x — точка Ферма–Штейнера для вершин $a_1b_2b_3$ и y — точка Ферма–Штейнера для вершин $b_1a_2a_3$, то верно:

$$|a_1x| + |a_2x| + |b_3x| \geq |a_1x| + |b_2x| + |b_3x|$$

и

$$|b_1y| + |a_2y| + |b_3y| \geq |b_1y| + |a_2y| + |a_3y|,$$

противоречие, лемма доказана.

□

Лемма 2.20. *На каждой точке минимального компакта* $K_\lambda = \{x, y\}$ *реализуются все три расстояния* d_1, d_2, d_3.

Доказательство. Как было показано выше, $x \in U_{d_2}(a_2)$ и $y \in U_{d_3}(b_3)$, поэтому $\#L_i(x) \leq 1$ и $\#L_i(y) \leq 1$ при всех i.

Пусть $\#L(y) \leq 1$. Тогда $y \notin \operatorname{Conv}\big(L(y)\big)$. Также в силу следствия 6 получаем, что $\#L(x) = 3$. Но точка x не точка Ферма–Штейнера для $L(x)$ согласно лемме 2.19. Отсюда $K_\lambda \notin \Sigma_d(A)$ по теореме 2.12.

Аналогично для $L(x)$, поэтому $\#L(x) \geq 2$ и $\#L(y) \geq 2$.

Пусть $\#L(y) = 2$. Тогда $\mathrm{Conv}\big(L(y)\big)$ — это хорда окружности, и $\mathrm{Conv}\big(L(y)\big)$ — это все точки Ферма–Штейнера для $L(y)$. Отметим, что $[b_2, b_3]$ — единственная хорда, проходящая через I_x, с концами которой соединяется точка x, а $[a_2, a_3]$ — единственная хорда, проходящая через I_y, с концами которой соединяется y.

Если $y \notin \mathrm{Conv}\big(L(y)\big)$, то x — точка Ферма–Штейнера для $L(x)$, иначе $K_\lambda \notin \Sigma_d(A)$ по теореме 2.12. Тогда $\#L(x) = 2$ в силу леммы 2.19. Поэтому $B_{d_2}(b_2) \cap B_{d_3}(b_3) = \{x\}$, то есть на x реализованы только d_2 и d_3. Тогда d_1 реализуется на y по лемме 2.9. Ввиду того, что $\#L(y) = 2$ и $y \notin \mathrm{Conv}\big(L(y)\big)$, справедливо: $U_{d_1}(b_1) \cap U_{d_2}(a_2) \cap U_{d_3}(a_3) \neq \emptyset$. Возьмём точку y' из этого пересечения. Имеем: $K = \{x, y'\}$ — конечное подмножество K_d; $B_{d_i}(a_i) \cap K \neq \emptyset$ и $B_{d_i}(b_i) \cap K \neq \emptyset$; $K \cap B_{d_2}(b_2) = \{x\}$ и $K \cap B_{d_3}(a_3) = \{y'\}$. Поэтому K — минимальный компакт Штейнера согласно критерию 2.1. Замечаем, что ни на одной точке K не реализовано d_1, противоречие с леммой 2.9.

Если $y \in [a_2, a_3]$, то $B_{d_2}(a_2) \cap B_{d_3}(a_3) = \{y\}$. Тогда $B_{d_2}(b_2) \cap B_{d_3}(b_3) = \{x\}$. Значит, d_1 реализуется на x по лемме 2.9, так как $\#L(y) = 2$. Поэтому $|b_1 y| < d_1$. Рассмотрим точку x' на отрезке $[b_2, b_3]$, которая ближе к b_2 относительно x. Пусть d_i' — расстояния от x' до a_1, b_2 и b_3 соответственно. Ясно, что $d_1 > d_1'$ и $d_2 + d_3 = d_2' + d_3'$. Положим $B_{d_2'}(a_2) \cap B_{d_3'}(a_3) = \{y'\}$. Заметим, что можно считать точку x' выбранной так, что $|b_1 y'| \le d_1'$. Положим $K' = \{x', y'\}$. Тогда $d_H(K', A_2) + d_H(K', A_3) \le d_2' + d_3' = d_2 + d_3$ и $d_H(K', A_1) \le d_1' < d_1$. Поэтому $S(A, K') < S(A, K_\lambda) = S_A$, противоречие.

Аналогично для $L(x)$, поэтому $\#L(x) = 3$ и $\#L(y) = 3$.

□

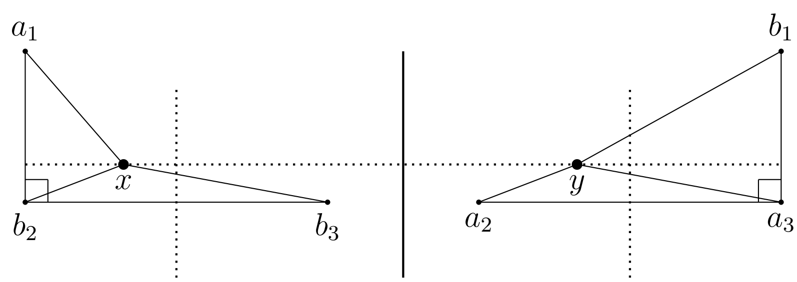

Рис. 2.13: Случай $d_2 < d_3$

Следовательно, $x \in \mathrm{Conv}\big(L(x)\big)$ и $y \in \mathrm{Conv}\big(L(y)\big)$, иначе $\{x, y\}$ не компакт Штейнера по теореме 2.12.

Пусть $d_2 < d_3$. Рассмотрим тругольники $b_2 x b_3$ и $a_2 y a_3$. Тогда $|a_1 x| < |b_1 y|$, см. рис. 2.13. Но $d_1 = |a_1 x| = |b_1 y|$, противоречие. Аналогично, если $d_3 < d_2$. Значит, $d_2 = d_3$.

Мы имеем следующую ситуацию, см. рис. 2.14. Точка x лежит на серединном перпендикуляре s к отрезку $[b_2, b_3]$, а точки x и y симметричны относительно диаметра, являющегося серединным перпендикуляром к отрезку $[a_1, b_1]$. Точка x минимального компакта должна располагаться на s так, чтобы сумма расстояний $|a_1 x| + |b_2 x| + |b_3 x|$ была минимальна. Положим

$|Ox| = t$. Тогда по теореме косинусов $d_2 = d_3 = \sqrt{1+t^2-t}$, а $d_1 = \sqrt{1+t^2+t}$. Отметим, что $t \in (0,1)$. Следовательно, $S(A, K_\lambda) = 2\sqrt{1+t^2-t}+\sqrt{1+t^2+t}$. На интервале $(0,1)$ эта функция имеет единственный минимум, который достигается при $t = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-\sqrt{4\sqrt{5}-7}\right) = 0.210424\ldots$ и равен $2.94645\ldots < 3$.

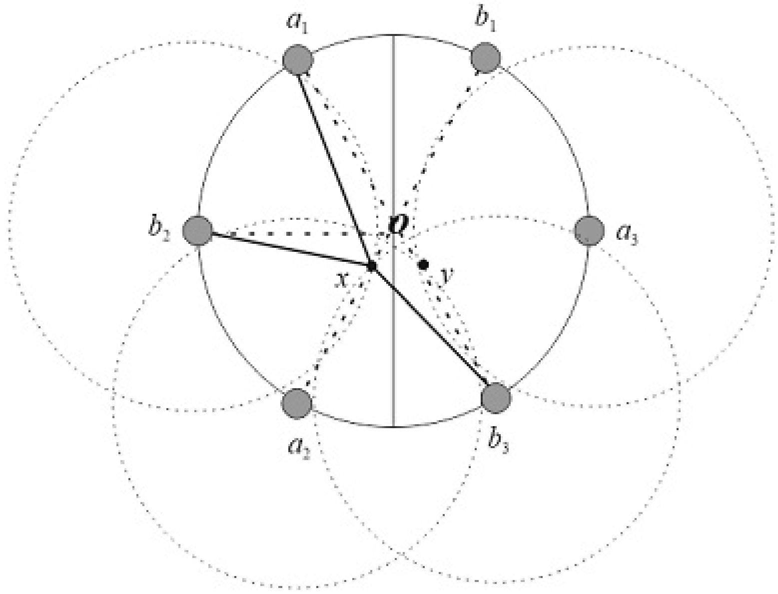

Рис. 2.14: Итоговое положение точек K_λ.

Итак, при $\#K_\lambda = 2$ минимальное возможное значение $S(A, K)$ достигается на описанной только что конфигурации и меньше трех. Так как при других возможных значениях $\#K_\lambda$ минимум $S(A, K)$ равен трем, то построенный компакт $K_\lambda = \{x, y\}$ является абсолютным минимумом функции $S(A, K)$, то есть компактом Штейнера. Он, очевидно, принадлежит классу $\Sigma_d(A)$, где $d = (d_1, d_2, d_3)$. Два других минимальных компакта получаются поворотами на $2\pi/3$ (конкретный компакт был выбран нами при выборе диаметра точки x). Теорема доказана.

□

2.2 Далёкие, неплотные и дискретные точки, их взаимосвязь

На протяжении всего этого раздела $A = \{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{H}(X)$ — произвольная граница, если не оговорено противное. Введём следующее определение.

Определение 2.2.1. Точку $a \in A_i$ назовём *далёкой точкой компакта A_i для вектора $\widetilde{d}$* $= (\widetilde{d}_1, \ldots, \widetilde{d}_n) \in \mathbb{R}^n$, где $\widetilde{d}_j \ge 0$, если $U_{\widetilde{d}_i}(a) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) = \emptyset$. Множество всех далёких для вектора $\widetilde{d}$ точек компакта $A_i \in A$ обозначим через $F_{\widetilde{d}}^{A_i}$. Также положим $F_{\widetilde{d}}^{A} = \bigcup\limits_j F_{\widetilde{d}}^{A_j}$.

Отметим, что если $\widetilde{d} = d \in \Omega(A)$, то

$$U_{\widetilde{d}_i}(a) \cap \bigcap_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) = U_{d_i}(a) \cap \bigcap_{j=1}^{n} B_{d_j}(A_j) = U_{d_i}(a) \cap K_d,$$

где K_d — максимальный компакт Штейнера в классе решений $\Sigma_d(A)$.

Часто уточнение о том, для какого именно вектора $\widetilde{d}$ точка $a \in A_i$ является далёкой, будет опускаться, где это не вызовет недоразумений. Напомним, что векторы решений обозначаются в тексте через d, а компоненты вектора решения через d_i, то есть $d_i = d_H(A_i, K)$, где $K \in \Sigma_d(A)$.

В данной работе нас интересует поведение именно векторов решений $\boldsymbol{d \in \Omega(A)}$. Поэтому всюду далее в тексте, если не оговорено противное, далёкие точки будут рассматриваться только для $\boldsymbol{d \in \Omega(A)}$.

Утверждение 2.2.1 ([26] Галстян)**.** *Если $a \in F_d^{A_i}$ и $d_i > 0$, то $B_{d_i}(a) \cap K_d \subset \partial K_d$.*

Доказательство. Пусть $a \in A_i$ — далёкая, то есть $U_{d_i}(a) \cap K_d = \emptyset$. Значит, $B_{d_i}(a) \cap K_d \subset \partial B_{d_i}(a)$. В нормированном пространстве любая точка из $\partial B_{d_i}(a)$ является точкой прикосновения для $U_{d_i}(a)$. Но $B_{d_i}(a) \cap K_d \subset K_d$. Поэтому, так как $U_{d_i}(a) \cap K_d = \emptyset$ и $d_i > 0$, в любой окрестности точки из $B_{d_i}(a) \cap K_d$ содержатся как точки из K_d, так и точки, не лежащие в K_d. Следовательно, по определению граничных точек $B_{d_i}(a) \cap K_d \subset \partial K_d$.

□

Утверждение 2.2.2 ([26] Галстян)**.** *Пусть $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ — выпуклая граница, $a \in A_i$ — далёкая точка и $d_i > 0$. Тогда $a \in \partial A_i$.*

Доказательство. Так как $a \in A_i$ — далёкая, то $U_{d_i}(a) \cap K_d = \emptyset$. Следовательно, так как $d_i > 0$, то $a \in X \setminus K_d$. Компакт K_d выпуклый в силу выпуклости границы. Поэтому согласно утверждению 1.1.1 для точки a и для любой точки $p \in P_{K_d}(a)$ верно $p \in P_{K_d}(a_\lambda)$ при всех $\lambda \geq 0$, где $a_\lambda = (1 - \lambda)p + \lambda a$.

Заметим, что $B_{d_i}(a) \cap K_d \neq \emptyset$, так как $A_i \subset B_{d_i}(K_d)$. Значит, $|aK_d| = d_i$ ввиду того, что a — далёкая точка. Но $p \in P_{K_d}(a)$, поэтому $|ap| = d_i$ по определению 1.1.2.

Допустим, что $a \in \operatorname{Int} A_i$. Тогда в силу линейности пространства X существует такое $\lambda > 1$, что $|a_\lambda p| > |ap| = d_i$ и при этом $a_\lambda \in A_i$. Ввиду того, что $p \in P_{K_d}(a_\lambda)$, имеем $|a_\lambda K_d| > d_i$. Значит, $A_i \not\subset B_{d_i}(K_d)$. Получили противоречие с тем, что $d_i = d_H(A_i, K_d)$. Поэтому $a \in \partial A_i$.

□

Вообще говоря, неясно, для любой ли финитной границы $A \subset \mathcal{H}(X)$ далёкие точки всегда найдутся хотя бы в одном A_i и хотя бы для одного вектора $d \in \Omega(A)$. Например, возможно, не исключена ситуация, изображённая на рисунке 2.15. А именно, $A = \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}$, где $\mathfrak{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$; $\mathfrak{B} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$; $\mathfrak{C} = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$. Предположим, что вектор

$$d = \Big(d_1 = d_H(\mathfrak{A}, K_d); d_2 = d_H(\mathfrak{B}, K_d); d_3 = d_H(\mathfrak{C}, K_d)\Big),$$

по которому построен

$$K_d = \Big(B_{d_1}(a_1) \cap B_{d_2}(b_1) \cap B_{d_3}(c_1)\Big) \cup \\ \cup \Big(B_{d_1}(a_2) \cap B_{d_3}(c_1)\Big) \cup \Big(B_{d_1}(a_2) \cap B_{d_2}(b_3) \cap B_{d_3}(c_2)\Big) \cup \Big(B_{d_1}(a_3) \cap B_{d_2}(b_3)\Big) \cup \\ \cup \Big(B_{d_1}(a_3) \cap B_{d_2}(b_4) \cap B_{d_3}(c_4)\Big),$$

принадлежит $\Omega(A)$. Причём, оба множества

$$B_{d_1}(a_2) \cap B_{d_3}(c_1) \subset U_{d_2}(b_2)$$

и

$$B_{d_1}(a_3) \cap B_{d_2}(b_3) \subset U_{d_3}(c_3)$$

одноточечны. Замечаем, что если мы сколь угодно уменьшим d_1, то перестроенный в соответствии с уменьшенным расстоянием d_1 компакт K_d, обозначим его через $K_{d'}$ уже не будет компактом Штейнера, так как тогда, например, $b_2 \notin B_{d_2}(K_{d'})$, чего быть не может по определению расстояния Хаусдорфа. Аналогично, если сколь угодно уменьшим d_2, то $c_3 \notin B_{d_3}(K_{d'})$ и если сколь угодно уменьшим d_3, то снова $b_2 \notin B_{d_2}(K_{d'})$.

При этом $U_{d_1}(a_i) \cap K_d \neq \emptyset$, $U_{d_2}(b_i) \cap K_d \neq \emptyset$ и $U_{d_3}(c_i) \cap K_d \neq \emptyset$ для всех i. Таким образом, если в самом деле данный вектор d является решением проблемы Ферма–Штейнера для границы A, то у всех граничных компактов из A нет далёких точек.

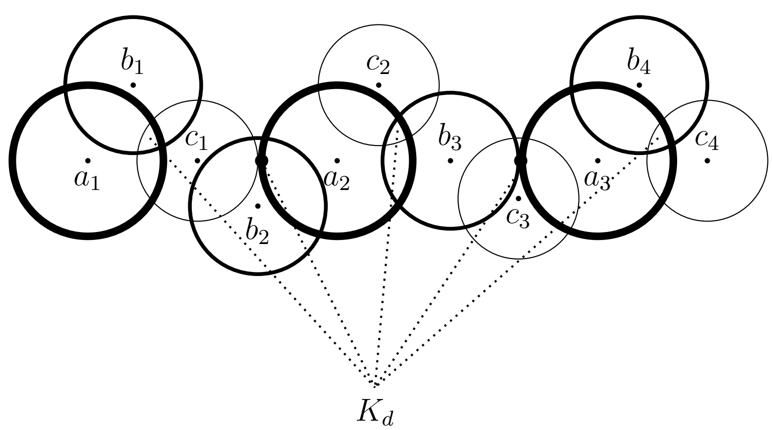

Рис. 2.15: Случай границы без далёких точек.

Определение 2.2.2. Точку $a \in A_i$ назовём *неплотной точкой компакта A_i для вектора $\widetilde{d} = (\widetilde{d}_1, \ldots, \widetilde{d}_n) \in \mathbb{R}^n$*, где $\widetilde{d}_j \geq 0$, если $\operatorname{Int}\big(B_{\widetilde{d}_i}(a) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)\big) = \emptyset$. Множество всех неплотных для вектора $\widetilde{d}$ точек компакта $A_i \in A$ обозначим через $L_{\widetilde{d}}^{A_i}$. Также положим $L_{\widetilde{d}}^{A} = \bigcup\limits_j L_{\widetilde{d}}^{A_j}$.

Аналогично, если $\widetilde{d} = d \in \Omega(A)$, то

$$\operatorname{Int}\big(B_{\widetilde{d}_i}(a) \cap \bigcap_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)\big) = \operatorname{Int}\big(B_{d_i}(a) \cap \bigcap_{j=1}^{n} B_{d_j}(A_j)\big) = \operatorname{Int}\big(B_{d_i}(a) \cap K_d\big),$$

где K_d — максимальный компакт Штейнера в классе решений $\Sigma_d(A)$.

Как в случае далёких точек, уточнение о том, для какого именно вектора $\widetilde{d}$ точка $a \in A_i$ является неплотной, будет опускаться, где это не вызовет недоразумений. Напомним, что векторы решений из $\Omega(A)$ обозначаются в тексте через d, а их компоненты — через d_i.

В данной работе нас интересует поведение именно векторов решений $\boldsymbol{d \in \Omega(A)}$. Поэтому всюду далее в тексте, если не оговорено противное, неплотные точки будут рассматриваться только для $\boldsymbol{d \in \Omega(A)}$.

Замечание 9. *В силу определения 2.2.1 далёкие точки всегда являются неплотными. Действительно, если $a \in F_d^{A_i}$, то $U_{d_i}(a) \cap K_d = \emptyset$ и поэтому $B_{d_i}(a) \cap K_d \subset \partial B_{d_i}(a)$ при $d_i > 0$, либо $B_{d_i}(a) \cap K_d = \{a\}$ при $d_i = 0$. Следовательно, $\operatorname{Int}\big(B_{d_i}(a) \cap K_d\big) = \emptyset$, то есть $a \in L_d^{A_i}$ — неплотная точка.*

Однако обратное, вообще говоря, неизвестно. А именно, неясно, всегда ли неплотные точки являются далёкими.

Утверждение 2.2.3 ([26] Галстян)**.** *Если $\operatorname{Cl}(\operatorname{Int} K_d) = K_d$, то для вектора d все неплотные точки совпадают с далёкими.*

Доказательство. Напомним, что в настоящей работе через F_d^A обозначается множество всех далёких точек для вектора d, а через L_d^A — множество всех неплотных точек для вектора d. Согласно замечанию 9 имеем $F_d^A \subset L_d^A$. Поэтому нужно доказать $L_d^A \subset F_d^A$ при условии, что $\operatorname{Cl}(\operatorname{Int} K_d) = K_d$.

Пусть $a \in A_i$ — неплотная точка, то есть $\operatorname{Int}\big(B_{d_i}(a) \cap K_d\big) = \emptyset$. Покажем, что тогда $a \in F_d^A$, то есть $U_{d_i}(a) \cap K_d = \emptyset$. Допустим противное, а именно, $U_{d_i}(a) \cap K_d \neq \emptyset$. Возьмём $x \in U_{d_i}(a) \cap K_d$. В силу условия $\operatorname{Cl}(\operatorname{Int} K_d) = K_d$ любая точка из K_d является точкой прикосновения для $\operatorname{Int} K_d$. Значит, так как $U_{d_i}(a)$ является окрестностью взятой точки $x \in K_d$, то $U_{d_i}(a) \cap \operatorname{Int} K_d \neq \emptyset$. Хорошо известно, что в топологических пространствах внутренность пересечения конечного числа множеств равна пересечению их внутренностей. Поэтому $\emptyset \neq U_{d_i}(a) \cap \operatorname{Int} K_d = \operatorname{Int} B_{d_i}(a) \cap \operatorname{Int} K_d = \operatorname{Int}\big(B_{d_i}(a) \cap K_d\big) = \emptyset$. Получили противоречие.

Значит, из $\operatorname{Int}\big(B_{d_i}(a) \cap K_d\big) = \emptyset$ следует $U_{d_i}(a) \cap K_d = \emptyset$. Поэтому $L_d^A \subset F_d^A$. Отсюда $L_d^A = F_d^A$. Утверждение доказано.

□

Следствие 8 ([26] Галстян)**.** *Если $\operatorname{Int} K_d \neq \emptyset$ и граница A выпукла, то для вектора d все неплотные точки совпадают с далёкими.*

Доказательство. Граница A выпукла, поэтому K_d — выпуклый компакт как пересечение выпуклых множеств.

Известно [18, 22], что в конечномерном нормированном пространстве для любого выпуклого множества M с непустой внутренностью верно $\operatorname{Cl}(\operatorname{Int} M) = \operatorname{Cl} M$. Так как K_d — компакт, то $\operatorname{Cl} K_d = K_d$. Следовательно, $\operatorname{Cl}(\operatorname{Int} K_d) = K_d$.

Таким образом, мы приходим к условию утверждения 2.2.3. Значит, для вектора d все неплотные точки совпадают с далёкими.

□

Теорема 2.21 ([26] Галстян)**.** *Пусть граница A является выпуклой. Тогда для любого вектора $d \in \Omega(A)$ существует граничный компакт A_i, содержащий далёкую для этого вектора решения точку.*

Доказательство. Допустим противное, то есть что для всех A_i и всех точек $a \in A_i$ выполнено $U_{d_i}(a) \cap K_d \neq \emptyset$. Но тогда $A_i \subset U_{d_i}(K_d)$ для любого i. Значит, положительна величина:

$$\gamma_i = \big|A_i\, \partial B_{d_i}(K_d)\big|.$$

Следовательно, в силу конечного числа компактов в границе A получаем

$$\gamma = \min_{i \in [1,n]} \gamma_i > 0.$$

Таким образом, для любого i согласно лемме 1.10 имеем

$$A_i \subset B_{d_i - \gamma}(K_d).$$

По условию все A_i выпуклы, значит, K_d тоже выпуклый. Поэтому согласно теореме 1.15 множество $B_{d_i}(A_i) \cap K_d$ меняется непрерывно при малых возмущениях d_i. Зафиксируем номер i. Таким образом, для $0 < \varepsilon < \gamma$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$K_d = B_{d_i}(A_i) \cap K_d \subset B_\varepsilon\big(B_{d_i - \delta}(A_i) \cap K_d\big).$$

Обозначим $B_{d_i-\delta}(A_i) \cap K_d$ через K. Таким образом, $K_d \subset B_\varepsilon(K)$. Значит, для любого j согласно лемме 1.8 верно

$$A_j \subset B_{d_j - \gamma}(K_d) \subset B_{d_j - \gamma}\big(B_\varepsilon(K)\big) = B_{d_j - \gamma + \varepsilon}(K).$$

При этом $K \subset K_d \subset B_{d_j}(A_j)$ для всех j и $K \subset B_{d_i - \delta}(A_i)$. Значит, $d_H(K, A_j) \leq d_j$ и $d_H(K, A_i) \leq \max(d_i - \delta, d_i - \gamma + \varepsilon) < d_i$. Следовательно, $S(A, K) < S(A, K_d)$, получили противоречие. Теорема доказана.

□

Следствие 9 ([26] Галстян)**.** *Пусть граница A является выпуклой и $\operatorname{Int} K_d \neq \emptyset$. Тогда для любого вектора $d \in \Omega(A)$ существует граничный компакт A_i, содержащий неплотную для этого вектора решения точку.*

Доказательство. Согласно следствию 8 в случае выпуклой границы и непустой внутренности максимального компакта Штейнера K_d далёкие точки совпадают с неплотными. Но в силу теоремы 2.21 у выпуклой границы существует по крайней мере одна далёкая точка. Значит, существует по крайней мере одна неплотная точка.

□

Утверждение 2.2.4 ([26] Галстян). *Если $a \in A_i$ дискретна, то $B_{d_i}(a) \cap K_d \subset \partial K_d$.*

Доказательство. Доказательство данного утверждения дословно повторяет соответствующий кусок доказательства теоремы 2.4, где показывается в случае финитной границы, что из $\# B_{d_i}(a) \cap K_d < \infty$ вытекает $B_{d_i}(a) \cap K_d \subset \partial K_d$.

В самом деле, финитность границы A здесь не играет никакой роли. А именно, пусть $\# B_{d_i}(a) \cap K_d < \infty$ и $p \in B_{d_i}(a) \cap K_d$. Если $p \in \operatorname{Int} K_d$, то существует открытый шар $U = U_r(p)$ такой, что $U \subset K_d$. Так как центр p этого шара лежит в $B_{d_i}(a)$, то $\# B_{d_i}(a) \cap U = \infty$. Но $B_{d_i}(a) \cap U \subset B_{d_i}(a) \cap K_d$. Значит, $\# B_{d_i}(a) \cap K_d = \infty$, противоречие. Следовательно, $p \in \partial K_d$, что и требовалось доказать.

□

Теорема 2.22 является переформулировкой в терминах дискретных точек первой части теоремы 2.4.

Теорема 2.22 ([26] Галстян). *Пусть $A \subset \mathcal{H}(X)$ — финитная граница и норма пространства X строго выпукла. Тогда для любого вектора $d \in \Omega(A)$ по крайней мере в одном граничном компакте A_i найдётся дискретная точка для этого вектора решения.*

Утверждение 2.2.5 ([26] Галстян). *В случае финитной границы $A \subset \mathcal{H}(X)$ и пространства X со строго выпуклой нормой для вектора $d \in \Omega(A)$ неплотные точки совпадают с дискретными.*

Доказательство. Напомним, что в настоящей работе через D_d^A обозначается множество всех дискретных точек для вектора d, а через L_d^A — множество всех неплотных точек для вектора d. Согласно утверждению 2.2.4 имеем $D_d^A \subset L_d^A$. Поэтому нужно доказать, что $L_d^A \subset D_d^A$ в случае финитной границы A и строго выпуклой нормы X.

Пусть $a \in A_i$ — неплотная точка, то есть $\operatorname{Int}\bigl(B_{d_i}(a) \cap K_d\bigr) = \emptyset$. Покажем, что тогда $a \in D_d^A$, то есть $\# B_{d_i}(a) \cap K_d < \infty$. Имеем

$$K_d = \bigcup_{j_1,\dots,j_n} B_{d_1}(a_{j_1}^1) \cap \ldots \cap B_{d_n}(a_{j_n}^n).$$

Так как по условию $\operatorname{Int}\bigl(B_{d_i}(a) \cap K_d\bigr) = \emptyset$, то

$$\operatorname{Int}\bigl(B_{d_i}(a) \cap B_{d_1}(a_{j_1}^1) \cap \ldots \cap B_{d_n}(a_{j_n}^n)\bigr) = \emptyset$$

для всех наборов $j_1, \ldots, j_n$. Значит, согласно лемме 1.7 каждое множество

$$B_{d_i}(a) \cap B_{d_1}(a^1_{j_1}) \cap \ldots \cap B_{d_n}(a^n_{j_n})$$

одноточечно. В силу финитности границы A таких множеств конечное число. Поэтому множество $B_{d_i}(a) \cap K_d$ состоит из конечного числа точек. Следовательно, точка a является дискретной точкой. Отсюда в силу произвольности a получаем $L^A_d \subset D^A_d$. Значит, $L^A_d = D^A_d$. Утверждение доказано.

□

Следствие 10 ([26] Галстян)**.** *Пусть граница A является финитной, а пространство X имеет строго выпуклую норму. Тогда для любого вектора $d \in \Omega(A)$ существует граничный компакт A_i, содержащий неплотную для этого вектора решения точку.*

Доказательство. Согласно утверждению 2.2.5 в случае финитной границы и пространства X со строго выпуклой нормой дискретные точки совпадают с неплотными. Но в силу теоремы 2.22 у финитной границы существует по крайней мере одна дискретная точка для любого вектора $d \in \Omega(A)$. Значит, существует по крайней мере одна неплотная точка.

□

Из утверждений 2.2.3, 2.2.5 и, например, следствия 10 прямо вытекает следующая теорема.

Теорема 2.23 ([26] Галстян)**.** *Если $A \subset \mathcal{H}(X)$ — финитная граница, норма пространства X строго выпукла и выполняется условие* $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, K_d) = K_d$, *то*

$$F^A_d = L^A_d = D^A_d \neq \emptyset.$$

Введём обозначения, которые нам понадобятся в следующих разделах настоящей работы. Пусть $\widetilde{d} \in \mathbb{R}^n$, и $\widetilde{d}_j \geq 0$ для всех j. Положим также, что $Y^{A_i}_{\widetilde{d}}$ — один из трёх типов точек $F^{A_i}_{\widetilde{d}}$, $L^{A_i}_{\widetilde{d}}$ или $D^{A_i}_{\widetilde{d}}$, то есть $Y^{A_i}_{\widetilde{d}} \in \{F^{A_i}_{\widetilde{d}}, L^{A_i}_{\widetilde{d}}, D^{A_i}_{\widetilde{d}}\}$ и $Y^{A}_{\widetilde{d}} \in \{F^{A}_{\widetilde{d}}, L^{A}_{\widetilde{d}}, D^{A}_{\widetilde{d}}\}$. Тогда

- $\mathrm{HP}(p, Y^{A_i}_{\widetilde{d}}) := B_{\widetilde{d}_i}(p) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$, где $p \in Y^{A_i}_{\widetilde{d}}$;
- $\mathrm{HP}(Y^{A_i}_{\widetilde{d}}) := \bigcup\limits_{p \in Y^{A_i}_{\widetilde{d}}} \mathrm{HP}(p, Y^{A_i}_{\widetilde{d}})$;
- $\mathrm{HP}(Y^{A}_{\widetilde{d}}) := \bigcup\limits_{i} \mathrm{HP}(Y^{A_i}_{\widetilde{d}})$.

Отметим, что если $\widetilde{d} = d \in \Omega(A)$, то $\bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) = K_d$ — максимальный компакт Штейнера в классе $\Sigma_d(A)$. Поэтому в таком случае $\mathrm{HP}(p, Y^{A_i}_{d}) = B_{d_i}(p) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{d_j}(A_j) = B_{d_i}(p) \cap K_d$, где $p \in Y^{A_i}_{d}$.

Подчеркнём, что в обозначении $\mathrm{HP}(p, Y_{\widetilde{d}}^{A_i})$ параметр $Y_{\widetilde{d}}^{A_i}$ определяет свойство, которым обладает множество $B_{\widetilde{d}_i}(p) \cap \bigcap_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$. А именно, при $p \in F_{\widetilde{d}}^{A_i}$ имеем $U_{\widetilde{d}_i}(p) \cap \bigcap_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) = \emptyset$; при $p \in L_{\widetilde{d}}^{A_i}$ верно $\mathrm{Int}\big(B_{\widetilde{d}_i}(p) \cap \bigcap_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)\big) = \emptyset$; а при $p \in D_{\widetilde{d}}^{A_i}$ справедливо $\# B_{\widetilde{d}_i}(p) \cap \bigcap_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) < \infty$.

Таким образом, мы сделали некоторое обобщение понятия “множества сцепки”, введённое в определениях 2.1.3, 2.1.4 и 2.1.5. А именно, теперь под множествами сцепки будем понимать следующее.

Определение 2.2.3. Множество $\mathrm{HP}(p, Y_{\widetilde{d}}^{A_i})$, будем называть *множеством сцепки типа* $Y_{\widetilde{d}}^{A_i}$ *компакта* $\bigcap_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$ *с точкой* $p \in Y_{\widetilde{d}}^{A_i}$. Каждую точку из $\mathrm{HP}(p, Y_{\widetilde{d}}^{A_i})$ будем называть *точкой сцепки* или *hook point*.

Определение 2.2.4. Множество $\mathrm{HP}(Y_{\widetilde{d}}^{A_i})$, будем называть *множеством сцепки типа* $Y_{\widetilde{d}}^{A_i}$ *компакта* $\bigcap_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$ *с граничным компактом* A_i.

Определение 2.2.5. Множество $\mathrm{HP}(Y_{\widetilde{d}}^{A})$ будем называть *множеством сцепки типа* $Y_{\widetilde{d}}^{A}$ *компакта* $\bigcap_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$ *с границей* A.

Далее везде, где будет ясно, о какой границе A и о каком векторе $\widetilde{d}$ идёт речь, верхний индекс A и нижний индекс $\widetilde{d}$ будут опускаться, а именно, $\boldsymbol{Y_{\widetilde{d}}^{A_i}}$ **и** $\boldsymbol{Y_{\widetilde{d}}^{A}}$ **будут заменяться на** $\boldsymbol{Y^i}$ **и** $\boldsymbol{Y}$ соответственно при $Y \in \{F, L, D\}$.

Напомним, что векторы решений обозначаются в тексте через d, а компоненты вектора решения через d_i, то есть $d_i = d_H(A_i, K)$, где $K \in \Sigma_d(A)$.

Леммы 2.24, 2.25, 2.26 и замечание 10 сформулированы, чтобы раскрыть геометрию множества $\mathrm{HP}(F^i)$, которое далее будет часто использоваться.

Лемма 2.24 ([26] Галстян)**.** *Если* $d_i = 0$, *то* $\mathrm{HP}(F^i) = A_i$.

Доказательство. Так как $d_i = 0$, то для любой точки $a \in A_i$ верно $U_{d_i}(a) = \emptyset$, и значит, $U_{d_i}(a) \cap K_d = \emptyset$. Следовательно, $F^i = A_i$. Ввиду того, что $0 = d_i = d_H(A_i, K_d)$, имеем $A_i = K_d$. Поэтому $\mathrm{HP}(F^i) = B_{d_i}(F^i) \cap K_d = A_i$.

□

Лемма 2.25 ([26] Галстян)**.** *Если* $A_i \subset K_d$ *и* $A_i \neq K_d$, *то* $\mathrm{HP}(F^i) = \emptyset$.

Доказательство. Так как $A_i \subset K_d$ и $A_i \neq K_d$, то $d_i > 0$. Значит, для любой точки $a \in A_i$ справедливо $U_{d_i}(a) \neq \emptyset$. При этом $a \in A_i \subset K_d$. Следовательно, $U_{d_i}(a) \cap K_d \neq \emptyset$ для любой точки $a \in A_i$. Поэтому $F^i = \emptyset$. Отсюда согласно замечанию 1 верно $\mathrm{HP}(F^i) = B_{d_i}(F^i) \cap K_d = \emptyset$.

□

Заметим, что $\mathrm{HP}(F^i)$ можно определить следующим образом. Ввиду того, что F^i — это множество всех далёких точек в A_i, имеем $F^i = A_i \setminus U_{d_i}(K_d)$. Тогда по лемме 1.2 в силу компактности F^i верно

$$\mathrm{HP}(F^i) = \bigcup_{p \in F^i} \mathrm{HP}(p, F^i) = \bigcup_{p \in F^i} \big(B_{d_i}(p) \cap K_d\big) = \Big(\bigcup_{p \in F^i} B_{d_i}(p)\Big) \cap K_d = B_{d_i}(F^i) \cap K_d. \tag{2.2}$$

Замечание 10. *Множество* $\mathrm{HP}(F^i)$ *— компакт как пересечение двух компактов.*

Лемма 2.26 ([26] Галстян)**.** *Множество* $\mathrm{HP}(F^i)$ *непусто тогда и только тогда, когда* F^i *непусто.*

Доказательство. Согласно лемме 1.2

$$\mathrm{HP}(F^i) = B_{d_i}(F^i) \cap K_d = \bigcup_{f \in F^i \subset A_i} B_{d_i}(f) \cap K_d.$$

Напомним, что для любой точки $a \in A_i$ верно $B_{d_i}(a) \cap K_d \neq \emptyset$. Следовательно, $\bigcup\limits_{f \in F^i \subset A_i} B_{d_i}(f) \cap K_d \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $F^i \neq \emptyset$. Лемма доказана.

□

2.3 О взаимосвязи выпуклой границы с максимальным компактом Штейнера

Напомним, что границу $A = \{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{H}(X)$ мы называем выпуклой, если все A_i являются выпуклыми подмножествами пространства X.

Главным результатом, содержащимся в данном разделе, является теорема 2.28 о *взаимосвязи* выпуклой границы $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ с максимальным компактом Штейнера K_d. Под *взаимосвязью* здесь имеется в виду то, как именно каждый шар $B_{d_i}(A_i)$ пересекается, то есть *взаимодействует*, с компактом K_d. Теорема 2.28 говорит о том, что это пересечение обязано содержать элементы из множества $\mathrm{HP}(F_d^A) \subset K_d$ (как было отмечено, более лаконично такое множество в тексте ещё обозначается через $\mathrm{HP}(F)$). Также теорема 2.28 утверждает, что если сам компакт A_i не порождает множество $\mathrm{HP}(F^i) \subset \mathrm{HP}(F)$, то есть если $\mathrm{HP}(F^i) = \emptyset$, что эквивалентно $F^i = \emptyset$ согласно лемме 2.26, то тогда $\mathrm{HP}(F) \cap \partial B_{d_i}(A_i) \neq \emptyset$. Однако прежде чем переходить к формулировке этой теоремы и её доказательству, требуется ввести следующий вспомогательный результат, лемма 2.27.

Отметим, что все результаты настоящего раздела формулируются для некоторого вектора решения $d \in \Omega(A)$, где $A = \{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{H}(X)$.

Пусть граница A выпукла, $\mathrm{HP}(F^i) \neq \emptyset$ и для некоторого $j \neq i$ верно $\mathrm{HP}(F^i) \subset U_{d_j}(A_j)$. Положим

$$\gamma = \big|\mathrm{HP}(F^i)\ \partial B_{d_j}(A_j)\big|. \tag{2.3}$$

Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 2.27 ([26] Галстян)**.** *Для любого* $0 < \varepsilon < \gamma$ *найдётся* $\Delta > 0$ *такое, что для любого* $0 \le \delta \le \Delta$ *при*

$$H = B_{d_i+\delta}(F^i) \cap K_d$$

верно

$$\big|H\,\partial B_{d_j}(A_j)\big| \ge \gamma - \varepsilon > 0.$$

Доказательство. Пусть $p \in F^i$, то есть $U_{d_i}(p) \cap K_d = \emptyset$. По условию все граничные компакты выпуклы, значит, K_d тоже выпуклый. Поэтому согласно теореме 1.15 множество $\mathrm{HP}(p, F^i) = B_{d_i}(p) \cap K_d$ меняется непрерывно при увеличении d_i.

Пусть $0 < \varepsilon < \gamma$. Тогда для ε найдётся такое $\Delta > 0$, что для любого $0 \le \delta \le \Delta$ верно

$$H(p) := B_{d_i+\delta}(p) \cap K_d \subset B_{d_i+\Delta}(p) \cap K_d \subset U_\varepsilon\big(B_{d_i}(p) \cap K_d\big) = U_\varepsilon\big(\mathrm{HP}(p, F^i)\big).$$

Заметим, что $\mathrm{HP}(p, F^i) \subset \mathrm{HP}(F^i)$. Напомним, что согласно (2.3) имеем $\big|\mathrm{HP}(F^i)\ \partial B_{d_j}(A_j)\big| = \gamma$. Поэтому $\big|\mathrm{HP}(p, F^i)\ \partial B_{d_j}(A_j)\big| =: \gamma' \ge \gamma$. Но тогда по лемме 1.11

$$\Big|U_\varepsilon\big(\mathrm{HP}(p, F^i)\big)\ \partial B_{d_j}(A_j)\Big| = \gamma' - \varepsilon \ge \gamma - \varepsilon.$$

Значит, так как $H(p) \subset U_\varepsilon\big(\mathrm{HP}(p, F^i)\big)$, то

$$\big|H(p)\,\partial B_{d_j}(A_j)\big| \ge \gamma - \varepsilon > 0.$$

Отсюда

$$\inf_{p\in F^i}\big|H(p)\,\partial B_{d_j}(A_j)\big| \ge \gamma - \varepsilon > 0.$$

В силу компактности F^i, по лемме 1.2 имеем равенство

$$\bigcup_{p\in F^i} H(p) = \bigcup_{p\in F^i}\big(B_{d_i+\delta}(p) \cap K_d\big) = \Big(\bigcup_{p\in F^i} B_{d_i+\delta}(p)\Big) \cap K_d = B_{d_i+\delta}(F^i) \cap K_d = H.$$

Следовательно, $\big|H\,\partial B_{d_j}(A_j)\big| \ge \gamma - \varepsilon > 0$. Лемма доказана.

□

Теорема 2.28 ([26] Галстян. О взаимосвязи выпуклой границы с K_d)**.** *Пусть граница A выпукла и все d_i положительны для некоторого $d \in \Omega(A)$. Тогда для любого номера i существует точка $p \in \mathrm{HP}(F)$ такая, что $p \in \mathrm{HP}(F^i)$ или $p \in \partial B_{d_i}(A_i)$.*

Доказательство. Допустим противное, а именно, пусть существует номер i такой, что для любой $p \in \mathrm{HP}(F)$ верно $p \notin \mathrm{HP}(F^i)$ и $p \notin \partial B_{d_i}(A_i)$. Значит,

$$\mathrm{HP}(F^i) = \emptyset.$$

Также по определению $\mathrm{HP}(F) \subset K_d$. Но $K_d = \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{d_i}(A_i)$. Значит, $\mathrm{HP}(F) \subset B_{d_i}(A_i)$. Следовательно, ввиду $\mathrm{HP}(F) \cap \partial B_{d_i}(A_i) = \emptyset$ имеем

$$\mathrm{HP}(F) \subset U_{d_i}(A_i).$$

Так как $\mathrm{HP}(F^j) \subset U_{d_i}(A_i)$ и $\mathrm{HP}(F^j)$ — компакт согласно замечанию 10, то

$$\gamma_j = \left|\mathrm{HP}(F^j)\, \partial B_{d_i}(A_i)\right| > 0$$

для всех непустых $\mathrm{HP}(F^j)$. По теореме 2.21 существует по крайней мере один $A_j \in A$ такой, что $\mathrm{HP}(F^j) \neq \emptyset$. Поэтому определено

$$\gamma = \min_{j\colon \mathrm{HP}(F^j) \neq \emptyset} \gamma_j > 0.$$

Пусть $\mathrm{HP}(F^k) \neq \emptyset$, что эквивалентно $F^k \neq \emptyset$ по лемме 2.26. Тогда согласно лемме 2.27 для $0 < \varepsilon < \gamma$ найдётся $R_k > 0$ такое, что для любого $0 < r_k \leq R_k$ верно $\left|\big(B_{d_k+r_k}(F^k) \cap K_d\big)\, \partial B_{d_i}(A_i)\right| \geq \gamma_k - \varepsilon \geq \gamma - \varepsilon > 0$.

Введём обозначения:

$$r = \min_{j\colon \mathrm{HP}(F^j) \neq \emptyset} r_j > 0;$$

$$H_j = B_{d_j+r}(F^j) \cap K_d. \tag{2.4}$$

Согласно замечанию 1 если $F^j = \emptyset$, то $B_{d_j+r}(F^j) = \emptyset$ и поэтому $H_j = \emptyset$. С другой стороны, так как $F^j \subset A_j$ и $B_{d_j}(a) \cap K_d \neq \emptyset$ для любой $a \in A_j$, то из $H_j = \emptyset$ следует $B_{d_j+r}(F^j) = \emptyset$. Но $F^j \subset B_{d_j+r}(F^j)$. Значит, $F^j = \emptyset$. Таким образом, $H_j = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $F^j = \emptyset$.

Заметим, что из сказанного выше вытекает

$$\eta := \min_{j\colon H_j \neq \emptyset} \left|H_j\, \partial B_{d_i}(A_i)\right| = \min_{j\colon F^j \neq \emptyset} \left|H_j\, \partial B_{d_i}(A_i)\right| \geq \gamma - \varepsilon > 0. \tag{2.5}$$

Отметим, что согласно замечанию 1 при $F^j = \emptyset$ верно $U_r(F^j) \subset B_r(F^j) = \emptyset$. Тогда для

$$A'_j := A_j \setminus U_r(F^j) \tag{2.6}$$

имеем $A'_j \subset A_j$ и при $F^j = \emptyset$ получаем $A'_j = A_j$.

Замечаем, что $A'_j \subset U_{d_j}(K_d)$ для любого j. Следовательно, в силу компактности A'_j, для всех непустых A'_j положительна величина $\mu_j = \left|A'_j\, \partial B_{d_j}(K_d)\right|$. Поэтому, так как все d_i положительны, получаем

$$\mu = \min\{\min_{A'_j \neq \emptyset} \mu_j, \min_i d_i\} > 0.$$

Таким образом, для любого j в силу леммы 1.10 имеем

$$A'_j \subset B_{d_j-\mu}(K_d). \tag{2.7}$$

По условию все A_j выпуклы. Также по условию $\mathrm{HP}(F^i) = \emptyset$. Значит, для любой точки $a \in A_i$ верно $U_{d_i}(a) \cap K_d \neq \emptyset$. Следовательно, верно $|A_i\, K_d| < d_i$. Поэтому согласно теореме 1.15 множество $B_{d_i}(A_i) \cap K_d$ меняется непрерывно при небольших уменьшениях d_i. Значит, для $0 < \varepsilon < \min\{\eta, \mu\}$ существует $0 < \delta \leq d_i - |A_i\, K_d|$ такое, что

$$K_d = B_{d_i}(A_i) \cap K_d \subset B_\varepsilon\big(B_{d_i-\delta}(A_i) \cap K_d\big).$$

Без ограничения общности будем считать $\delta \leq \varepsilon$. Для удобства введём обозначение

$$K = B_{d_i-\delta}(A_i) \cap K_d. \tag{2.8}$$

Таким образом,

$$K_d \subset B_\varepsilon(K). \tag{2.9}$$

Для любого j в силу (2.4) верно $H_j \subset K_d \subset B_{d_i}(A_i)$ и в силу (2.5) для всех непустых H_j имеем $0 < \eta \leq \big|H_j\, \partial B_{d_i}(A_i)\big|$. Но $\delta \leq \varepsilon < \eta$, поэтому по лемме 1.10 имеем $H_j \subset B_{d_i-\delta}(A_i)$ для всех j. При этом, как отмечалось выше, $H_j \subset K_d$. Значит, ввиду (2.8) для всех j верно

$$H_j \subset K. \tag{2.10}$$

Лемма 2.29. *Для всех j верно $A_j \cap U_r(F^j) \subset B_{d_j}(K)$.*

Доказательство. Если $F^j = \emptyset$, то $A_j \cap U_r(F^j) = \emptyset \subset B_{d_j}(K)$. Пусть теперь $F^j \neq \emptyset$.

Для произвольной $p \in A_j$ имеем $B_{d_j}(p) \cap K_d \neq \emptyset$. Значит, для любой точки $p \in A_j \cap U_r(F^j)$ тоже верно

$$B_{d_j}(p) \cap K_d \neq \emptyset. \tag{2.11}$$

Однако согласно лемме 1.8 имеем

$$B_{d_j}\big(A_j \cap U_r(F^j)\big) \subset B_{d_j}\big(U_r(F^j)\big) \subset B_{d_j}\big(B_r(F^j)\big) = B_{d_j+r}(F^j). \tag{2.12}$$

Отсюда в силу (2.12), (2.4), и (2.10) справедливо

$$B_{d_j}\big(A_j \cap U_r(F^j)\big) \cap K_d \subset B_{d_j+r}(F^j) \cap K_d = H_j \subset K. \tag{2.13}$$

Согласно замечанию 2 верно $\bigcup\limits_{p \in A_j \cap U_r(F^j)} B_{d_j}(p) \subset B_{d_j}\big(A_j \cap U_r(F^j)\big)$. Поэтому в силу (2.13) справедливо

$$\Big(\bigcup_{p \in A_j \cap U_r(F^j)} B_{d_j}(p)\Big) \cap K_d \subset K. \tag{2.14}$$

Отсюда для любой точки $p \in A_j \cap U_r(F^j)$ в силу (2.11) и (2.14) имеем $\emptyset \neq B_{d_j}(p) \cap K_d \subset K$. Значит, $p \in B_{d_j}(K)$. Следовательно,

$$A_j \cap U_r(F^j) \subset B_{d_j}(K).$$

Лемма доказана.

□

Лемма 2.30. *Для всех j верно $A_j \subset B_{d_j}(K)$.*

Доказательство. Для любого j в силу (2.7) имеем

$$A'_j \subset B_{d_j-\mu}(K_d) \tag{2.15}$$

Согласно (2.9) верно

$$B_{d_j-\mu}(K_d) \subset B_{d_j-\mu+\varepsilon}(K). \tag{2.16}$$

Но ввиду сделанного выше выбора $0 < \varepsilon < \mu$ справедливо

$$B_{d_j-\mu+\varepsilon}(K) \subset B_{d_j}(K). \tag{2.17}$$

Отсюда согласно (2.15), (2.16) и (2.17) получаем

$$A'_j \subset B_{d_j}(K). \tag{2.18}$$

При этом по лемме 2.29 справедливо

$$A_j \cap U_r(F^j) \subset B_{d_j}(K) \tag{2.19}$$

Но ввиду (2.6) для любого j верно

$$A_j = A'_j \cup \big(A_j \cap U_r(F^j)\big). \tag{2.20}$$

Значит, в силу (2.18), (2.19) и (2.20) получаем

$$A_j \subset B_{d_j}(K).$$

Лемма доказана.

□

Заметим, что $K \subset K_d \subset B_{d_j}(A_j)$ для всех j. Значит, по лемме 2.30 для всех j имеем

$$d_H(K, A_j) \le d_j. \tag{2.21}$$

Лемма 2.31. $d_H(K, A_i) \le \max(d_i - \delta, d_i - \mu + \varepsilon) < d_i$.

Доказательство. Напомним, что по предположению $\mathrm{HP}(F^i) = \emptyset$, что по лемме 2.26 эквивалентно $F^i = \emptyset$. Отсюда согласно (2.6) и замечанию 1 верно

$$A'_i = A_i \setminus U_r(F^i) = A_i. \tag{2.22}$$

Далее, в силу (2.8)

$$K = B_{d_i-\delta}(A_i) \cap K_d \subset B_{d_i-\delta}(A_i).$$

При этом ввиду (2.22), (2.15) и (2.16) верно

$$A_i = A'_i \subset B_{d_i-\mu+\varepsilon}(K).$$

Поэтому $d_H(K, A_i) \le \max(d_i - \delta, d_i - \mu + \varepsilon) < d_i$, так как $0 < \varepsilon < \mu$. Лемма доказана.

□

Следовательно, согласно (2.21) и лемме 2.31 верно $S(A, K) < S(A, K_d)$. Получили противоречие. Теорема доказана.

□

2.4 О переходе от финитной границы к границе из выпуклых оболочек

2.4.1 Устойчивость границы в проблеме Ферма–Штейнера

Пусть $A = \{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathcal{H}(X)$ — произвольная граница и $d \in \Omega(A)$. Положим

$$K_d^{\mathrm{Conv}} = \bigcap_{i=1}^{n} B_{d_i}\bigl(\mathrm{Conv}(A_i)\bigr).$$

Утверждение 2.4.1 ([26] Галстян)**.** *Пусть* $A = \{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathcal{H}(X)$ *— произвольная граница и* $d \in \Omega(A)$*. Тогда для всех* i *выполняется*

$$d_H\bigl(\mathrm{Conv}(A_i), K_d^{\mathrm{Conv}}\bigr) \le d_i.$$

Доказательство. Имеем $K_d^{\mathrm{Conv}} \subset B_{d_i}\bigl(\mathrm{Conv}(A_i)\bigr)$. С другой стороны, так как $A_i \subset B_{d_i}(K_d)$, то

$$\mathrm{Conv}(A_i) \subset \mathrm{Conv}\bigl(B_{d_i}(K_d)\bigr).$$

По утверждению 1.7.3 получаем

$$\mathrm{Conv}\bigl(B_{d_i}(K_d)\bigr) = B_{d_i}\bigl(\mathrm{Conv}(K_d)\bigr).$$

И в силу утверждения 1.7.4

$$B_{d_i}\bigl(\mathrm{Conv}(K_d)\bigr) \subset B_{d_i}\bigl(K_d^{\mathrm{Conv}}\bigr).$$

Таким образом, $\mathrm{Conv}(A_i) \subset B_{d_i}\bigl(K_d^{\mathrm{Conv}}\bigr)$ для всех i. Следовательно,

$$d_H\bigl(\mathrm{Conv}(A_i), K_d^{\mathrm{Conv}}\bigr) \le d_i.$$

□

Пусть дана финитная граница $A = \{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathcal{H}(X)$. Положим

$$A^{\mathrm{Conv}} = \bigl\{\mathrm{Conv}(A_1), \dots, \mathrm{Conv}(A_n)\bigr\}.$$

Введём определение устойчивой границы.

Определение 2.4.1. Финитную границу $A = \{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathcal{H}(X)$ назовём *устойчивой*, если $S_A = S_{A^{\mathrm{Conv}}}$, иначе — *неустойчивой*.

Замечание 11. *В силу утверждения 2.4.1 для любой финитной границы A верно неравенство $S_A \geq S_{A^{\mathrm{Conv}}}$.*

Справедливость следующего утверждения была показана в работе [16], однако здесь приводится его альтернативное доказательство на основе утверждения 2.4.1.

Утверждение 2.4.2 (Необходимое условие устойчивости)**.** *Пусть граница $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ финитна. Тогда если граница A устойчива, то $\Omega(A) \subset \Omega(A^{\mathrm{Conv}})$ и для любого вектора $d \in \Omega(A)$ множество K_d^{Conv} является максимальным компактом Штейнера в классе $\Sigma_d(A^{\mathrm{Conv}})$.*

Доказательство. Пусть $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ устойчива. Возьмём $d \in \Omega(A)$. В силу $S_A = S_{A^{\mathrm{Conv}}}$ и утверждения 2.4.1 мы получаем, что $d_H\big(\mathrm{Conv}(A_i), K_d^{\mathrm{Conv}}\big) = d_i$ для всех i. Отсюда существует класс решений $\Sigma_d(A^{\mathrm{Conv}})$ и, таким образом, $d \in \Omega(A^{\mathrm{Conv}})$. Значит, так как $K_d^{\mathrm{Conv}} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{d_i}\big(\mathrm{Conv}(A_i)\big)$, мы получаем, что K_d^{Conv} — максимальный компакт Штейнера в $\Sigma_d(A^{\mathrm{Conv}})$. Также мы показали, что $\Omega(A) \subset \Omega(A^{\mathrm{Conv}})$.

$\square$

Пусть нам дана финитная граница $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ (неважно, устойчивая или нет), произвольный вектор решения $d \in \Omega(A)$ и соответствующий компакт $K_d^{\mathrm{Conv}} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{d_i}\big(\mathrm{Conv}(A_i)\big)$. Чтобы сформулировать следующие утверждения, напомним некоторые обозначения, введённые в разделе 2.2, а именно, выпишем их для частного случая вектора $d \in \Omega(A)$ и границы $A^{\mathrm{Conv}} = \{\mathrm{Conv}(A_1), \dots, \mathrm{Conv}(A_n)\}$:

- $F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)} := \big\{a \in \mathrm{Conv}(A_i) \mid U_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} = \emptyset\big\}$;
- $\mathrm{HP}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}\big) := B_{d_i}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}$;
- $\mathrm{HP}\big(F_d^{A^{\mathrm{Conv}}}\big) := \bigcup\limits_i \mathrm{HP}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}\big)$;
- $L_d^{\mathrm{Conv}(A_i)} := \big\{a \in \mathrm{Conv}(A_i) \mid \mathrm{Int}\big(B_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}\big) = \emptyset\big\}$.

Из утверждения 2.4.2 и теоремы 2.21 вытекает следующее следствие.

Следствие 11 ([26] Галстян. Первое достаточное условие неустойчивости)**.** *Пусть граница $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ финитна и $d \in \Omega(A)$. Если для всех i верно $F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)} = \emptyset$ или для всех i верно $L_d^{\mathrm{Conv}(A_i)} = \emptyset$, то граница A неустойчива.*

Доказательство. Допустим противное, что граница A устойчива. Но тогда согласно утверждению 2.4.2 верно, что $d \in \Omega(A^{\mathrm{Conv}})$ и компакт K_d^{Conv} является максимальным компактом Штейнера в классе $\Sigma_d(A^{\mathrm{Conv}})$.

Пусть для всех i выполняется $F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)} = \emptyset$. В таком случае вектор решения $d \in \Omega(A^{\mathrm{Conv}})$ является вектором, для которого ни в одном граничном компакте нет далёких точек. Так как граница A^{Conv} выпукла, то мы приходим к противоречию с теоремой 2.21.

Пусть теперь для всех i верно $L_d^{\mathrm{Conv}(A_i)} = \emptyset$. Тогда согласно определению множества $L_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}$ для всех $a \in \mathrm{Conv}(A_i)$ справедливо, что

$$\emptyset \neq \mathrm{Int}\big(B_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}\big) = \mathrm{Int}\, B_{d_i}(a) \cap \mathrm{Int}\, K_d^{\mathrm{Conv}}.$$

Отсюда $\mathrm{Int}\, K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$. Значит, согласно следствию 8 в силу выпуклости границы A^{Conv} получаем

$$L_d^{\mathrm{Conv}(A_i)} = F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}.$$

Таким образом, снова имеем ситуацию, когда для всех i выполнено $F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)} = \emptyset$, что в случае выпуклой границы противоречит теореме 2.21, как отмечено выше. Следовательно, граница $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ неустойчива.

□

Далее, также из утверждения 2.4.2 и теоремы 2.28 вытекает следствие ниже.

Следствие 12 ([26] Галстян. Второе достаточное условие неустойчивости)**.** *Пусть граница $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ финитна. Пусть также все d_i положительны для некоторого $d \in \Omega(A)$. Если существует номер s такой, что $\mathrm{HP}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}\big) = \emptyset$ и для любой $p \in \mathrm{HP}\big(F_d^{A^{\mathrm{Conv}}}\big)$ верно $p \notin \partial B_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$, тогда граница A неустойчива.*

Доказательство. Допустим противное, что граница A устойчива. Но тогда согласно утверждению 2.4.2 компакт K_d^{Conv} является максимальным компактом Штейнера в классе $\Sigma_d(A^{\mathrm{Conv}})$. Таким образом, мы пришли к тому, что существует номер s такой, что для всех точек $p \in \mathrm{HP}\big(F_d^{A^{\mathrm{Conv}}}\big)$ верно, что $p \notin \mathrm{HP}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}\big)$ $\Big($так как $\mathrm{HP}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}\big) = \emptyset\Big)$ и согласно условию $p \notin \partial B_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$. Также отметим, что граница A^{Conv} является выпуклой и по условию все d_i положительны. Следовательно, получаем противоречие с теоремой 2.28. Значит, граница $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ неустойчива.

□

Следующая теорема даёт альтернативный способ понять, когда свойство максимального компакта Штейнера из теоремы 2.28 не выполняется для K_d^{Conv} и вектора решения $d \in \Omega(A)$, а именно, эта теорема говорит, при каких условиях для номера s и всех точек $p \in \mathrm{HP}\big(F_d^{A^{\mathrm{Conv}}}\big)$ будет верно $p \notin \mathrm{HP}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}\big)$ и $p \notin \partial B_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$. Преимущество этого способа заключается в том, что в нём ненужно находить все множества $\mathrm{HP}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}\big)$.

Итак, положим

$$U_d^{\mathrm{Conv}} = \mathrm{Int}\, K_d^{\mathrm{Conv}}.$$

Заметим, что так как для конечных пересечений внутренность пересечения равна пересечению внутренностей, то верно $U_d^{\mathrm{Conv}} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Int}\, B_{d_i}\big(\mathrm{Conv}(A_i)\big)$. Отметим, что для любого $K \in \mathcal{H}(X)$ при $r > 0$ справедливо $\mathrm{Int}\, B_r(K) = U_r(K)$, а при $r = 0$ и $\mathrm{Int}\, K \neq \emptyset$ выполнено $\mathrm{Int}\, B_0(K) = \mathrm{Int}\, K \neq U_0(K) = \emptyset$.

Напомним, что согласно теореме 2.22 в случае финитной границы A и пространства X со строго выпуклой нормой для любого класса $\Sigma_d(A)$ по крайней мере в одном граничном компакте A_i найдётся дискретная точка, то есть $\mathrm{HP}(D_d^A) \neq \emptyset$.

Сформулируем отдельно условия, которыми будем пользоваться далее.

Условия 3.

(1) *Норма пространства X строго выпукла;*

(2) *Граница $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ финитна;*

(3) $U_d^{\mathrm{Conv}} = \mathrm{Int}\, K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$, *где* $d \in \Omega(A)$;

(4) $d_s > 0$;

(5) $\Bigl(\bigcup\limits_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s)\Bigr) \cap \mathrm{HP}(D_d^A) \subset U_d^{\mathrm{Conv}}$.

В силу утверждения 2.2.5 имеем $\mathrm{HP}(D_d^A) = \mathrm{HP}(L_d^A)$, поэтому пункт (5) из условий 3 можно заменить на
$$\Bigl(\bigcup_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s)\Bigr) \cap \mathrm{HP}(L_d^A) \subset U_d^{\mathrm{Conv}}. \tag{2.23}$$
Более того, если также выполнено $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, K_d) = K_d$, то по теореме 2.23 получаем $\mathrm{HP}(D_d^A) = \mathrm{HP}(L_d^A) = \mathrm{HP}(F_d^A)$ и, значит, пункт (5) из условий 3 или выражение (2.23) можно заменить на
$$\Bigl(\bigcup_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s)\Bigr) \cap \mathrm{HP}(F_d^A) \subset U_d^{\mathrm{Conv}}. \tag{2.24}$$

Теорема 2.32 ([26] Галстян. Условия нарушения взаимосвязи K_d^{Conv} с границей A^{Conv})**.** *Пусть выполнены все пункты* (1)–(5) *из условий* 3*. Тогда для любой точки* $p \in \mathrm{HP}\bigl(F_d^{A^{\mathrm{Conv}}}\bigr)$ *верно* $p \notin \mathrm{HP}\bigl(F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}\bigr)$ *и* $p \notin \partial B_{d_s}\bigl(\mathrm{Conv}(A_s)\bigr)$.

Доказательство. Будем считать, что пункты (1)–(5) из условий 3 выполнены. Опишем план доказательства. В начале будет показано, что $\mathrm{HP}\bigl(F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}\bigr) = \emptyset$ — лемма 2.33. Затем мы покажем, что при $i \neq s$ для любой точки $a \in A_i \cap F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}$ верно $B_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \cap \partial B_{d_s}\bigl(\mathrm{Conv}(A_s)\bigr) = \emptyset$ — лемма 2.34. И наконец, докажем, что $\mathrm{HP}\bigl(F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}\bigr) \cap \partial B_{d_s}\bigl(\mathrm{Conv}(A_s)\bigr) = \emptyset$ при $i \neq s$ — лемма 2.36.

Лемма 2.33. $F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)} = \emptyset$ *и, значит,* $\mathrm{HP}\bigl(F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}\bigr) = \emptyset$.

Доказательство. Пусть $a \in A_s$. Рассмотрим два случая: $B_{d_s}(a) \cap K_d$ конечно и бесконечно. Отметим, что множество $B_{d_s}(a) \cap K_d$ не может быть пустым, так как $A_s \subset B_{d_s}(K_d)$.

Если $B_{d_s}(a) \cap K_d$ конечно, то $a \in D_d^{A_s}$ и $B_{d_s}(a) \cap K_d = \mathrm{HP}(a, D_d^{A_s})$. Значит, $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d \subset \mathrm{HP}(a, D_d^{A_s})$. Но $\mathrm{HP}(a, D_d^{A_s}) \subset K_d$. Отсюда $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d = \partial B_{d_s}(a) \cap \mathrm{HP}(a, D_d^{A_s})$. Тогда согласно пункту (5) из условий 3 справедливо $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d \subset U_d^{\mathrm{Conv}}$.

Если $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d = \emptyset$, то $U_{d_s}(a) \cap K_d \neq \emptyset$, так как $B_{d_s}(a) \cap K_d \neq \emptyset$. Но тогда ввиду $K_d \subset K_d^{\mathrm{Conv}}$ справедливо $U_{d_s}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$ и, значит, $a \notin F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}$.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d \neq \emptyset$. Напомним, что мы имеем $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d \subset U_d^{\mathrm{Conv}}$. Поэтому в данном случае верно $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d \cap U_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$. Отсюда справедливо $\partial B_{d_s}(a) \cap U_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$. Следовательно, так как U_d^{Conv} открыто, по лемме 1.17 получаем $U_{d_s}(a) \cap U_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$, и, значит, $U_{d_s}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$. Отсюда $a \notin F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}$.

Рассмотрим теперь второй случай: $B_{d_s}(a) \cap K_d$ бесконечно. Но тогда $B_{d_s}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}$ тоже бесконечно, так как $K_d \subset K_d^{\mathrm{Conv}}$. Отсюда в силу строгой выпуклости нормы пространства X и выпуклости компакта K_d^{Conv} множество $U_{d_s}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}$ также бесконечно. Значит, тоже получаем $a \notin F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}$.

Следовательно, для любой $a \in A_s$ верно $a \notin F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}$, то есть $A_s \subset U_{d_s}(K_d^{\mathrm{Conv}})$. Но выпуклая оболочка подмножества лежит в выпуклой оболочке объемлющего множества. Также замечаем, что в силу выпуклости K_d^{Conv} и леммы 1.2.3 множество $U_{d_s}(K_d^{\mathrm{Conv}})$ выпукло. Следовательно, справедливо

$$\mathrm{Conv}(A_s) \subset \mathrm{Conv}\Big(U_{d_s}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big)\Big) = U_{d_s}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big).$$

Отсюда для любой точки $a \in \mathrm{Conv}(A_s)$ верно $U_{d_s}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$. Поэтому $F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)} = \emptyset$ и, значит, в силу замечания 1 имеем

$$\mathrm{HP}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}\big) = B_{d_s}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} = \emptyset \cap K_d^{\mathrm{Conv}} = \emptyset.$$

Лемма доказана.

□

Лемма 2.34. *$B_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$ для любой $a \in A_i \cap F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}$ при $i \neq s$.*

Доказательство. Так как $a \in F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}$, то $U_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} = \emptyset$. Поэтому в силу строгой выпуклости нормы пространства X и выпуклости компакта K_d^{Conv} множество $B_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}$ одноточечно. Но тогда пересечение $B_{d_i}(a) \cap K_d$ тоже одноточечно как непустое подмножество $B_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}$, то есть

$$B_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} = B_{d_i}(a) \cap K_d = \mathrm{HP}(a, D_d^{A_i}). \tag{2.25}$$

Ввиду пунктов (4) и (5) из условий 3, а также в силу $U_d^{\mathrm{Conv}} = \bigcap\limits_{j=1}^{n} \mathrm{Int}\, B_{d_j}\big(\mathrm{Conv}(A_j)\big)$ справедливо

$$\bigcup_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s) \cap \mathrm{HP}(a, D_d^{A_i}) \subset U_d^{\mathrm{Conv}} \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big), \tag{2.26}$$

При этом так как $\mathrm{HP}(a, D_d^{A_i}) \subset K_d \subset B_{d_s}(A_s)$ и $B_{d_s}(A_s) = \bigcup\limits_{j=1}^{m_s} B_{d_s}(a_j^s)$ по лемме 1.2 ввиду компактности A_s, то согласно лемме 1.3

$$\mathrm{HP}(a, D_d^{A_i}) \setminus \bigcup_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s) = \mathrm{HP}(a, D_d^{A_i}) \cap \bigcup_{j=1}^{m_s} U_{d_s}(a_j^s) =$$
$$= \mathrm{HP}(a, D_d^{A_i}) \cap U_{d_s}(A_s) \subset U_{d_s}(A_s) \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big). \quad (2.27)$$

Отсюда в силу (2.26) и (2.27) получаем $\mathrm{HP}(a, D_d^{A_i}) \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$. Значит, ввиду (2.25)

$$B_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big).$$

Лемма доказана.

□

Лемма 2.35. *Пусть $i \neq s$, $a \in F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}$ и для каждой $a_j^i \in A_i$ выполняется*

$$B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \cap U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) \neq \emptyset.$$

Тогда верно

$$B_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big).$$

Доказательство. Имеем $a \in F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)} \subset \mathrm{Conv}(A_i)$. Значит, по свойству выпуклых оболочек найдутся такие $\lambda_j \geq 0$ с условием $\sum\limits_{j=1}^{m_i} \lambda_j = 1$, что $a = \sum\limits_{j=1}^{m_i} \lambda_j a_j^i$. В таком случае для каждой $a_j^i \in A_i$ возьмём точку $p_j \in B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \cap U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$. В силу выпуклости $K_d^{\mathrm{Conv}} \cap U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$ верно

$$p := \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_j p_j \in K_d^{\mathrm{Conv}} \cap U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big).$$

Но тогда так как $p_j \in B_{d_i}(a_j^i)$, то

$$||a - p|| = ||\sum_{j=1}^{m_i} \lambda_j (a_j^i - p_j)|| \leq \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_j ||a_j^i - p_j|| \leq d_i.$$

Значит, справедливо $p \in B_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \cap U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$. Но в силу строгой выпуклости нормы пространства X, выпуклости компакта K_d^{Conv}, а также согласно условию $U_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} = \emptyset$ множество $B_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}$ одноточечно. Значит, $\{p\} = B_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$. Лемма доказана.

□

Лемма 2.36. $B_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$ *для любой* $a \in F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}$ *при* $i \neq s$, *то есть* $\mathrm{HP}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}\big) \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$.

Доказательство. Пусть $a \in \mathrm{Conv}(A_i) \setminus A_i$, где $i \neq s$, и

$$a \in F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}, \tag{2.28}$$

то есть $U_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} = \emptyset$.

Нам нужно показать, что $B_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$. Докажем, что для каждой $a_j^i \in A_i$ множество $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \cap U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$ непусто.

Существует два случая. Первый, когда $U_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} = \emptyset$, то есть $a_j^i \in F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}$. Но тогда по лемме 2.34 справедливо $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$. Поэтому $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \cap U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) \neq \emptyset$, так как $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$ ввиду $a_j^i \in A_i \subset B_{d_i}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big)$ согласно определению расстояния Хаусдорфа.

Второй случай, когда $U_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$, то есть $a_j^i \notin F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}$. По условию $U_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$, поэтому K_d^{Conv} выпуклое множество с непустой внутренностью. Значит, по лемме 1.17 если $U_{d_i}(a_j^i) \cap \partial K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$, то $U_{d_i}(a_j^i) \cap U_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$. Если же $U_{d_i}(a_j^i) \cap \partial K_d^{\mathrm{Conv}} = \emptyset$, то всё равно $U_{d_i}(a_j^i) \cap U_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$, так как $U_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$ согласно предположению. Отсюда $U_{d_i}(a_j^i) \cap U_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$. Но так как $K_d^{\mathrm{Conv}} \subset B_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$, то $U_d^{\mathrm{Conv}} \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$. Следовательно, $U_{d_i}(a_j^i) \cap U_d^{\mathrm{Conv}} \cap U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) \neq \emptyset$, и отсюда $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \cap U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) \neq \emptyset$.

Таким образом, для каждой $a_j^i \in A_i$

$$B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \cap U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) \neq \emptyset.$$

Значит, согласно условию (2.28) и в силу леммы 2.35 справедливо

$$B_{d_i}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$$

при $i \neq s$. Отсюда ввиду произвольности точки $a \in \mathrm{Conv}(A_i) \setminus A_i$ и леммы 2.34 получаем

$$\mathrm{HP}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}\big) \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big).$$

Лемма доказана.

□

Таким образом, для любой точки $p \in \mathrm{HP}\big(F_d^{A^{\mathrm{Conv}}}\big)$ верно $p \notin \mathrm{HP}\big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_s)}\big)$ согласно лемме 2.33 и $p \notin \partial B_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$ согласно лемме 2.36. Доказательство теоремы закончено.

□

2.4.2 О достаточном условии неустойчивости, дающем оценку на уменьшение веса сети

Теорема 2.32 из предыдущего раздела говорит о том, что в случае выполнения пунктов (1)–(5) из условий 3 для K_d^{Conv} нарушается свойство максимального компакта Штейнера из теоремы 2.28. В свою очередь если все $d_i > 0$, то следствие 12 говорит, что при нарушении свойства из теоремы 2.28 для K_d^{Conv} граница A оказывается неустойчивой.

Целью данного раздела является поиск значения $\delta' > 0$ такого, что при выполнении всех пунктов (1)–(5) условий 3 для любого $0 < \delta \leq \delta'$ справедливо

$$S(A^{\mathrm{Conv}}, K_d^{\mathrm{Conv}}) - S\Big(A^{\mathrm{Conv}}, B_{d_s-\delta}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}\Big) \geq \delta. \tag{2.29}$$

Отметим, что из неравенства (2.29) вытекает неустойчивость границы A. Действительно, согласно утверждению 2.4.1 верно

$$S(A^{\mathrm{Conv}}, K_d^{\mathrm{Conv}}) \leq S_A.$$

Поэтому

$$0 < \delta \leq S(A^{\mathrm{Conv}}, K_d^{\mathrm{Conv}}) - S\Big(A^{\mathrm{Conv}}, B_{d_s-\delta}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}\Big) \leq$$
$$\leq S_A - S\Big(A^{\mathrm{Conv}}, B_{d_s-\delta}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}\Big) \leq S_A - S_{A^{\mathrm{Conv}}}.$$

Отсюда по определению граница A неустойчива.

Таким образом, в данном разделе мы заодно докажем, что пунктов (1)–(5) из условий 3 уже достаточно, чтобы граница A была неустойчивой, то есть ненужно требовать положительности всех компонент d_i вектора решения $d \in \Omega(A)$, а именно, следствием 12 в этом случае пользоваться уже необязательно.

Далее нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.37 ([26] Галстян)**.** *Пусть выполнены все пункты* (1)–(5) *условий* 3*. Тогда*

$$\emptyset \neq \mathrm{HP}(D_d^A) \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big).$$

Доказательство. Согласно теореме 2.22 из пунктов (1) и (2) условий 3 вытекает $\emptyset \neq \mathrm{HP}(D_d^A)$.

Далее, в силу определений $\mathrm{HP}(D_d^A)$ и K_d имеем $\mathrm{HP}(D_d^A) \subset K_d = \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{d_i}(A_i)$, значит,

$$\mathrm{HP}(D_d^A) \subset B_{d_s}(A_s). \tag{2.30}$$

Ввиду компактности A_s по лемме 1.6 справедливо $\partial B_{d_s}(A_s) \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s)$. Поэтому, а также согласно пункту (5) из условий 3 и определению U_d^{Conv} верно

$$\partial B_{d_s}(A_s) \cap \mathrm{HP}(D_d^A) \subset \Big(\bigcup_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s)\Big) \cap \mathrm{HP}(D_d^A) \subset U_d^{\mathrm{Conv}} \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big). \tag{2.31}$$

При этом

$$U_{d_s}(A_s) \cap \mathrm{HP}(D_d^A) \subset U_{d_s}(A_s) \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big). \tag{2.32}$$

Таким образом, из (2.30), (2.31) и (2.32) получаем $\mathrm{HP}(D_d^A) \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$.

$\square$

Замечание 12. *Ввиду утверждения* 2.2.5 *в рамках выполнения пунктов* (1) *и* (2) *условий* 3 *верно* $\mathrm{HP}(D_d^A) = \mathrm{HP}(L_d^A)$, *поэтому согласно лемме* 2.37 *из условий* 3 *также следует*

$$\mathrm{HP}(L_d^A) \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big).$$

И если при этом справедливо $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, K_d) = K_d$, *то в силу теоремы* 2.23 *и леммы* 2.37 *в условиях* 3 *имеем*

$$\mathrm{HP}(D_d^A) = \mathrm{HP}(L_d^A) = \mathrm{HP}(F_d^A) \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big).$$

Определение 2.4.2. Минимальный компакт $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ назовём *погружённым*, если $K_\lambda \setminus \mathrm{HP}(D_d^A) \subset \mathrm{Int}\, K_d$.

Утверждение 2.4.3 ([26] Галстян)**.** *Пусть норма пространства X строго выпукла, граница A финитна и $\mathrm{Int}\, K_d = \emptyset$ в некотором классе $\Sigma_d(A)$. Тогда*

$$K_d = \mathrm{HP}(D_d^A) = \mathrm{HP}(L_d^A).$$

Доказательство. По определению максимального компакта Штейнера имеем

$$K_d = \bigcap_{i=1}^{n}\Big(\bigcup_{j=1}^{m_i} B_{d_i}(a_j^i)\Big) = \bigcup_{j_1\in\{1,\dots,m_1\},\,\dots,\,j_n\in\{1,\dots,m_n\}} B_{d_1}(a_{j_1}^1)\cap\ldots\cap B_{d_n}(a_{j_n}^n). \tag{2.33}$$

Если множество $B_{d_1}(a_{j_1}^1)\cap\ldots\cap B_{d_n}(a_{j_n}^n)$ состоит более чем из одной точки, то согласно лемме 1.7 в силу строгой выпуклости нормы пространства X это множество имеет непустую внутренность. Но тогда и K_d имеет непустую внутренность, что противоречит условию. Значит, в (2.33) каждое множество $B_{d_1}(a_{j_1}^1)\cap\ldots\cap B_{d_n}(a_{j_n}^n)$ либо пусто, либо одноточечно. Ввиду финитности границы A таких множеств конечное число. Значит, $\#K_d < \infty$. Но тогда $\#B_{d_i}(a_j^i)\cap K_d < \infty$ для любого $a_j^i \in A_i$, то есть $D_d^{A_i} = A_i$ для всех i. Следовательно, $B_{d_i}(a_j^i)\cap K_d = \mathrm{HP}(a_j^i, D_d^{A_i})$ для любого $a_j^i \in A_i$. Отсюда, а также ввиду $K_d = \bigcap\limits_{i=1}^{n}\Big(\bigcup\limits_{j=1}^{m_i} B_{d_i}(a_j^i)\Big)$ имеем

$$K_d = \bigcap_{i=1}^{n}\Big(\bigcup_{j=1}^{m_i} B_{d_i}(a_j^i)\cap K_d\Big) = \bigcap_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m_i}\mathrm{HP}(a_j^i, D_d^{A_i}) = \mathrm{HP}(D_d^A).$$

Так как по условию норма пространства X строго выпукла, а граница A финитна, то согласно утверждению 2.2.5 также имеем $\mathrm{HP}(D_d^A) = \mathrm{HP}(L_d^A)$. Таким образом, получаем

$$K_d = \mathrm{HP}(D_d^A) = \mathrm{HP}(L_d^A).$$

□

Следствие 13 ([26] Галстян)**.** *Пусть норма пространства X строго выпукла, граница A финитна и $\mathrm{Int}\, K_d = \emptyset$ в некотором классе $\Sigma_d(A)$. Тогда любой минимальный компакт $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ является погружённым.*

Доказательство. Согласно утверждению 2.4.3 в наших условиях имеем $K_d = \mathrm{HP}(D_d^A)$. Но $K_\lambda \subset K_d$. Значит, $K_\lambda \setminus \mathrm{HP}(D_d^A) = \emptyset$. Таким образом, K_λ — погружённый минимальный компакт Штейнера.

□

Утверждение 2.4.4 ([26] Галстян)**.** *Пусть норма пространства X строго выпукла и граница A финитна. Тогда любой класс $\Sigma_d(A)$ содержит в себе погружённый минимальный компакт K_λ.*

Доказательство. Доказательство будет конструктивным, а именно, мы в явном виде построим такой компакт на основе алгоритма 1.

Итак, на шаге 1 в качестве компакта K' возьмём максимальный компакт Штейнера K_d. Далее на шаге 2 этого алгоритма для каждой a_j^i точку p будем выбирать следующим образом. Если a_j^i не является дискретной (или не является неплотной, или при $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, K_d) = K_d$ не является далёкой, см. теорему 2.23 о равенстве множеств D_d^A, L_d^A и F_d^A), то согласно лемме 1.7 в пространстве со строго выпуклой нормой множество

$$B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d = \bigcup_{j_1 \in \{1,\dots,m_1\},\, \dots,\, j_n \in \{1,\dots,m_n\}} B_{d_i}(a_j^i) \cap B_{d_1}(a_{j_1}^1) \cap \ldots \cap B_{d_n}(a_{j_n}^n)$$

имеет непустую внутренность:

$$\mathrm{Int}\big(B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d\big) \neq \emptyset,$$

и в таком случае на шаге 2 построения мы возьмём точку p именно из

$$\mathrm{Int}\big(B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d\big) = U_{d_i}(a_j^i) \cap \mathrm{Int}\, K_d \subset \mathrm{Int}\, K_d.$$

А если a_j^i дискретна, то по определению $\mathrm{HP}(a_j^i, D_d^{A_i}) = B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d$, и значит, $(p, a_j^i) \in R'(K_d)$ тогда и только тогда, когда $p \in \mathrm{HP}(a_j^i, D_d^{A_i})$.

Наконец, шаг 3 проведём в точности так, как описано в алгоритме 1. В итоге получим, что по построению $K_\lambda \setminus \mathrm{HP}(D_d^A) \subset \mathrm{Int}\, K_d$. Значит, K_λ — погружённый минимальный компакт Штейнера.

□

Следствие 14 ([26] Галстян)**.** *Пусть норма пространства X строго выпукла и граница A финитна. Если минимальный компакт Штейнера $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ — единственный минимальный компакт в своём классе решений, то K_λ является погружённым.*

Напомним, что в разделе 2.1.5 для финитной границы и строго выпуклой нормы пространства X был сформулирован критерий единственности минимального компакта в своём классе решений (теорема 2.8).

Лемма 2.38 ([26] Галстян)**.** *Пусть все пункты* (1)–(5) *условий* 3 *выполнены и минимальный компакт Штейнера* $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ *является погружённым. Тогда*

$$\delta_1 := \Big| K_\lambda \ \partial B_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) \Big| > 0.$$

Доказательство. В силу леммы 2.37 верно

$$K_\lambda \cap \mathrm{HP}(D_d^A) \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big). \tag{2.34}$$

Но по определению погружённого минимального компакта верно

$$K_\lambda \setminus \mathrm{HP}(D_d^A) \subset \mathrm{Int}\, K_d \subset U_d^{\mathrm{Conv}} \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big). \tag{2.35}$$

Значит, согласно (2.34) и (2.35)

$$K_\lambda \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big).$$

Наконец, в силу компактности K_λ и $\partial B_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big)$ получаем $\Big| K_\lambda \ \partial B_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) \Big| > 0.$

$\square$

Лемма 2.39 ([26] Галстян)**.** *Пусть все пункты* (1)–(5) *условий* 3 *выполнены, тогда*

$$\delta_2 := \Big| \mathrm{Conv}(A_s) \ \partial B_{d_s}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big) \Big| > 0.$$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 2.33 покажем, что

$$\mathrm{Conv}(A_s) \subset U_{d_s}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big).$$

Для этого сначала докажем $A_s \subset U_{d_s}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big)$.

Пусть $a \in A_s$. Рассмотрим два случая: $B_{d_s}(a) \cap K_d$ конечно и бесконечно. Напомним, что множество $B_{d_s}(a) \cap K_d$ не может быть пустым, так как $A_s \subset B_{d_s}(K_d)$.

Если $B_{d_s}(a) \cap K_d$ конечно, то $a \in D_d^{A_s}$ и $B_{d_s}(a) \cap K_d = \mathrm{HP}(a, D_d^{A_s})$. Значит, $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d \subset \mathrm{HP}(a, D_d^{A_s})$. Но $\mathrm{HP}(a, D_d^{A_s}) \subset K_d$. Отсюда $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d = \partial B_{d_s}(a) \cap \mathrm{HP}(a, D_d^{A_s})$. Тогда согласно пунктам (3) и (5) условий 3 справедливо

$$\partial B_{d_s}(a) \cap K_d \subset U_d^{\mathrm{Conv}}. \tag{2.36}$$

Далее возможны два варианта.

Первый, $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d = \emptyset$. Тогда $U_{d_s}(a) \cap K_d \neq \emptyset$, так как $B_{d_s}(a) \cap K_d \neq \emptyset$. Но тогда ввиду $K_d \subset K_d^{\mathrm{Conv}}$ справедливо $U_{d_s}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$.

Второй вариант, $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d \neq \emptyset$. Ввиду (2.36) справедливо $\partial B_{d_s}(a) \cap K_d \cap U_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$. Отсюда имеем $\partial B_{d_s}(a) \cap U_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$. Следовательно, так как U_d^{Conv} открыто, по лемме 1.17 получаем $U_{d_s}(a) \cap U_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$. Таким образом, когда $B_{d_s}(a) \cap K_d$ конечно $U_{d_s}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$.

Рассмотрим теперь второй случай: $B_{d_s}(a) \cap K_d$ бесконечно. Но тогда $B_{d_s}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}$ тоже бесконечно, так как $K_d \subset K_d^{\mathrm{Conv}}$. Отсюда согласно пункту (1) условий 3 и выпуклости компакта K_d^{Conv} верно $U_{d_s}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$.

Следовательно, для любой $a \in A_s$ имеем $U_{d_s}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$, что эквивалентно

$$A_s \subset U_{d_s}(K_d^{\mathrm{Conv}}).$$

Но выпуклая оболочка подмножества лежит в выпуклой оболочке объемлющего множества. Также замечаем, что в силу выпуклости K_d^{Conv} и леммы 1.2.3 множество $U_{d_s}(K_d^{\mathrm{Conv}})$ выпукло. Следовательно, справедливо

$$\mathrm{Conv}(A_s) \subset \mathrm{Conv}\Big(U_{d_s}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big)\Big) = U_{d_s}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big). \tag{2.37}$$

Поэтому ввиду компактности $\mathrm{Conv}(A_s)$ из пунктов (1)–(5) условий 3 вытекает

$$\Big|\mathrm{Conv}(A_s)\ \partial B_{d_s}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big)\Big| > 0.$$

Лемма доказана.

□

Теорема 2.40 ([26] Галстян. Теорема об уменьшении веса сети или третье достаточное условие неустойчивости)**.** *Пусть все пункты* (1)–(5) *условий* 3 *выполнены. Тогда граница* $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ *неустойчива. Более того, в таком случае согласно леммам* 2.38 *и* 2.39 *выполнено* $\delta_1 > 0$ *и* $\delta_2 > 0$, *значит,* $\min\{\delta_1, \delta_2, d_s\} > 0$. *Выберем произвольное* $0 < \delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2, d_s\}$ *и положим*

$$K = B_{d_s-\delta}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}. \tag{2.38}$$

Тогда также справедливы следующие неравенства:

$$S_A - S_{A^{\mathrm{Conv}}} \geq S_A - S(A^{\mathrm{Conv}}, K) \geq S(A^{\mathrm{Conv}}, K_d^{\mathrm{Conv}}) - S(A^{\mathrm{Conv}}, K) \geq \delta > 0. \tag{2.39}$$

Доказательство. Из неравенств (2.39) прямо вытекает неустойчивость границы A. Поэтому доказательство теоремы будет заключаться в доказательстве справедливости неравенств (2.39). Оно будет состоять из трёх частей, каждая из которых оформлена в отдельную лемму.

Лемма 2.41. *Верно неравенство*

$$d_H\big(\mathrm{Conv}(A_s), K\big) \leq d_s - \delta < d_s.$$

Доказательство. В силу выражения (2.37), леммы 2.39, выпуклости K_d^{Conv}, положительности d_s и леммы 1.10 получаем $\mathrm{Conv}(A_s) \subset B_{d_s-\delta}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big)$. Это эквивалентно тому, что для любой $a \in \mathrm{Conv}(A_s)$ верно

$$B_{d_s-\delta}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset.$$

Отсюда, а также согласно (2.38) для любой $a \in \mathrm{Conv}(A_s)$ справедливо

$$B_{d_s-\delta}(a) \cap K = B_{d_s-\delta}(a) \cap B_{d_s-\delta}\bigl(\mathrm{Conv}(A_s)\bigr) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} = B_{d_s-\delta}(a) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset.$$

Поэтому

$$\mathrm{Conv}(A_s) \subset B_{d_s-\delta}(K). \tag{2.40}$$

Таким образом, в силу (2.38) и (2.40) имеем $d_H\bigl(\mathrm{Conv}(A_s), K\bigr) \le d_s - \delta < d_s$.

□

Теперь рассмотрим произвольный граничный компакт $\mathrm{Conv}(A_i)$, $i \neq s$.

Лемма 2.42. *Верно неравенство*

$$d_H\bigl(\mathrm{Conv}(A_i), K\bigr) \le d_i.$$

Доказательство. Имеем

$$K \subset K_d^{\mathrm{Conv}} \subset B_{d_i}\bigl(\mathrm{Conv}(A_i)\bigr). \tag{2.41}$$

Покажем далее, что $\mathrm{Conv}(A_i) \subset B_{d_i}(K)$.

В силу утверждения 2.4.4 в случае строго выпуклой нормы пространства X и финитности границы A каждый класс $\Sigma_d(A)$ содержит в себе погружённый минимальный компакт Штейнера. Пусть $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ — погружённый минимальный компакт Штейнера. Тогда согласно лемме 2.38, выпуклости $\mathrm{Conv}(A_s)$, положительности d_s и лемме 1.10 имеем $K_\lambda \subset B_{d_s-\delta}\bigl(\mathrm{Conv}(A_s)\bigr)$. И так как $K_\lambda \subset K_d \subset K_d^{\mathrm{Conv}}$, то в силу (2.38) получаем

$$K_\lambda \subset B_{d_s-\delta}\bigl(\mathrm{Conv}(A_s)\bigr) \cap K_d^{\mathrm{Conv}} = K.$$

Отсюда, а также согласно $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ справедливо

$$A_i \subset B_{d_i}(K_\lambda) \subset B_{d_i}(K). \tag{2.42}$$

Множество K выпукло как пересечение выпуклых, и $B_{d_i}(K)$ выпукло по лемме 1.2.2. Таким образом, в силу (2.42), так как выпуклая оболочка подмножества лежит в выпуклой оболочке объемлющего множества, имеем $\mathrm{Conv}(A_i) \subset B_{d_i}(K)$.

Поэтому, а также в силу (2.41) для всех $i \neq s$ справедливо

$$d_H\bigl(\mathrm{Conv}(A_i), K\bigr) \le d_i.$$

□

Лемма 2.43. *Справедливы неравенства*

$$S_A - S_{A^{\mathrm{Conv}}} \ge S_A - S(A^{\mathrm{Conv}}, K) \ge S(A^{\mathrm{Conv}}, K_d^{\mathrm{Conv}}) - S(A^{\mathrm{Conv}}, K) \ge \delta > 0.$$

Доказательство. Ввиду лемм 2.41 и 2.42 получаем

$$S(A^{\mathrm{Conv}}, K_d^{\mathrm{Conv}}) - S(A^{\mathrm{Conv}}, K) \geq \delta > 0.$$

Далее, согласно утверждению 2.4.1 верно, что $S_A \geq S(A^{\mathrm{Conv}}, K_d^{\mathrm{Conv}})$. Поэтому

$$S_A - S_{A^{\mathrm{Conv}}} \geq S_A - S(A^{\mathrm{Conv}}, K) \geq S(A^{\mathrm{Conv}}, K_d^{\mathrm{Conv}}) - S(A^{\mathrm{Conv}}, K) \geq \delta > 0.$$

□

Из леммы 2.43 прямо вытекает, что граница $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ неустойчива. Теорема доказана.

□

2.4.3 Пример неустойчивой границы

В качестве примера возьмём конфигурацию из раздела 2.1.7, где $A = \{A_1, A_2, A_3\} \subset \mathcal{H}\big(\mathbb{R}^2\big)$ и $A_i = \{a_i, b_i\}$ для всех i, см. рис. 2.16. Напомним, что в данной конфигурации множество точек

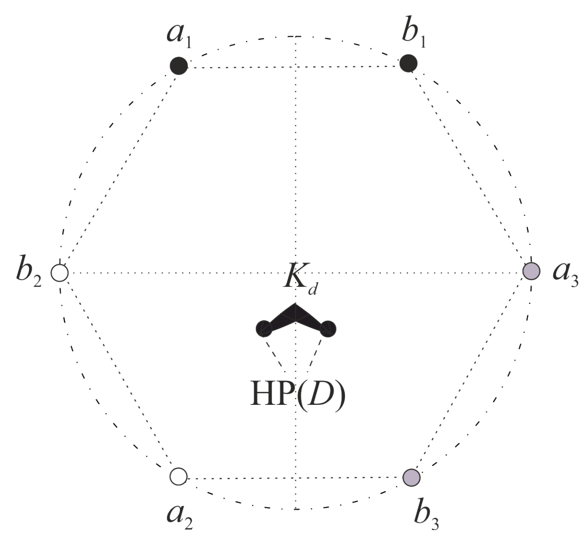

Рис. 2.16: Конфигурация из раздела 2.1.7.

$\{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3\}$ расположено на единичной окружности с центром в начале координат, и оно является множеством вершин правильного шестиугольника. Координаты точек следующие:

$$a_1 = \Big(-\cos(\pi/3), \sin(\pi/3)\Big);$$

$$b_1 = \Big(\cos(\pi/3), \sin(\pi/3)\Big);$$

$$a_2 = \Big(-\cos(\pi/3), -\sin(\pi/3)\Big);$$

$$b_2 = (-1, 0);$$

$$a_3 = (1, 0);$$

$$b_3 = \Big(\cos(\pi/3), -\sin(\pi/3)\Big).$$

На рис. 2.16 изображён максимальный компакт Штейнера K_d одного из трёх классов решений для границы A. Также в границе K_d выделено множество $\mathrm{HP}(D)$, которое в данном случае состоит из двух точек и совпадает с минимальным компактом Штейнера K_λ, являющимся единственным минимальным компактом в рассматриваемом классе решений, см. раздел 2.1.7.

Возьмём теперь границу $A^{\mathrm{Conv}} = \big\{\mathrm{Conv}(A_1), \mathrm{Conv}(A_2), \mathrm{Conv}(A_3)\big\}$, см. рис. 2.17, и обозначим левую точку $\mathrm{HP}(D)$ через p, а правую — через q.

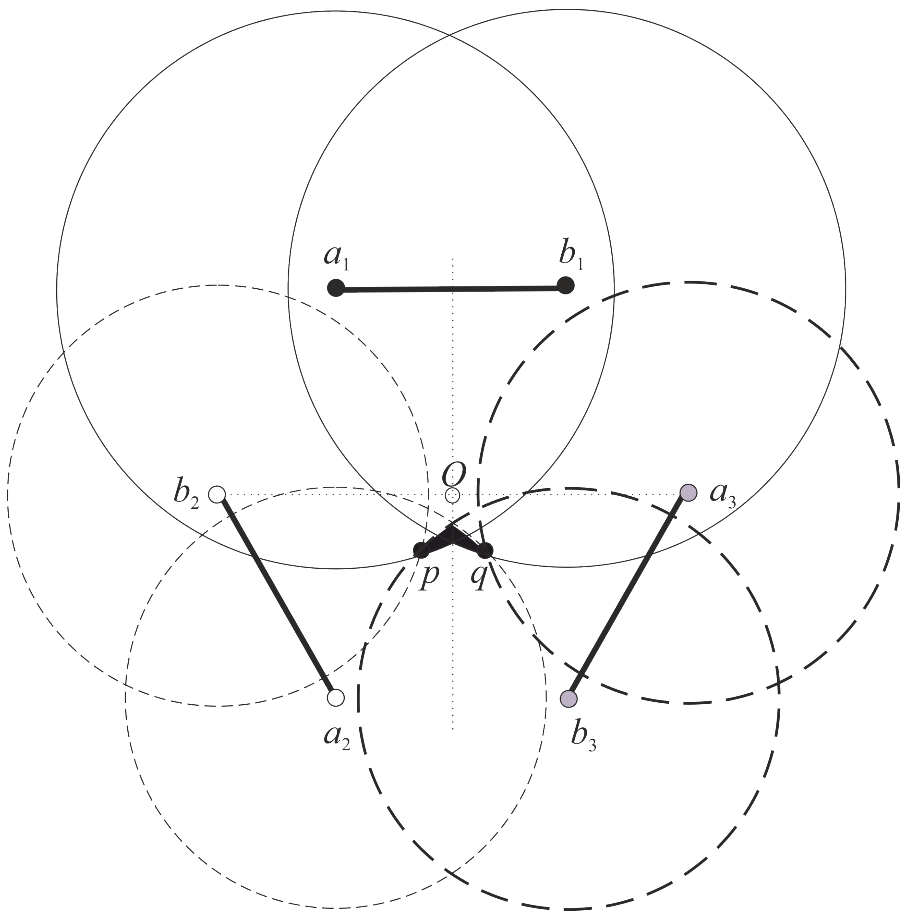

Рис. 2.17: Граница A^{Conv} и окрестности $U_{d_1}(A_1), U_{d_2}(A_2), U_{d_3}(A_3)$.

Согласно разделу 2.1.7

$$|O\,p| = |O\,q| = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4\sqrt{5} - 7}}{4} < 0.5. \tag{2.43}$$

Также точка p лежит на отрезке $[O, a_2]$ и угол между $[O, a_2]$ и $[O, b_2]$ равен $\pi/3$. Значит, в декартовых координатах

$$p = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4\sqrt{5} - 7}}{4} \cdot \big(-\cos(\pi/3), -\sin(\pi/3)\big).$$

Точка q располагается зеркально относительно вертикальной оси симметрии, проходящей через точку O, поэтому

$$q = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4\sqrt{5} - 7}}{4} \cdot \bigl(\cos(\pi/3), -\sin(\pi/3)\bigr).$$

2.4.3.1 Обоснование неустойчивости

Норма евклидова пространства $\mathbb{R}^2$ строго выпукла, описанная выше граница $A = \{A_1, A_2, A_3\}$ финитна и $U_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$. Рассмотрим компакт $A_1 = \{a_1, b_1\}$. По условию $d_1 > 0$. Таким образом, в данном примере выполняются пункты (1)–(4) из условий 3. Покажем, что для расстояния d_1 также выполняется пункт (5) из условий 3:

$$\Bigl(\partial B_{d_1}(a_1) \cup \partial B_{d_1}(b_1)\Bigr) \cap \mathrm{HP}(D) \subset \bigcap_{i=1}^{3} U_{d_i}\bigl(\mathrm{Conv}(A_i)\bigr) = U_d^{\mathrm{Conv}}.$$

Имеем $K_\lambda = \mathrm{HP}(D) \subset \partial B_{d_1}(a_1) \cup \partial B_{d_1}(b_1)$, см. рис. 2.17. Поэтому

$$\Bigl(\partial B_{d_1}(a_1) \cup \partial B_{d_1}(b_1)\Bigr) \cap \mathrm{HP}(D) = \mathrm{HP}(D).$$

Следовательно, нам нужно доказать, что $\mathrm{HP}(D) \subset U_d^{\mathrm{Conv}}$. Покажем сначала, что $\mathrm{HP}(D) \subset U_{d_1}\bigl(\mathrm{Conv}(A_1)\bigr)$.

В силу (2.43) абсциссы точек p и q лежат строго между абсциссами точек a_1 и b_1. При этом $p \in B_{d_1}(a_1)$ и $q \in B_{d_1}(b_1)$. Поэтому $\bigl|p\ [a_1, b_1]\bigr| < d_1$ и $\bigl|q\ [a_1, b_1]\bigr| < d_1$. Следовательно,

$$\mathrm{HP}(D) = \{p, q\} \subset U_{d_1}\bigl(\mathrm{Conv}(A_1)\bigr).$$

Далее покажем $\mathrm{HP}(D) \subset U_{d_2}\bigl(\mathrm{Conv}(A_2)\bigr)$. Согласно доказанному в разделе 2.1.7 имеем $p \in U_{d_2}(a_2)$, поэтому нам надо только показать, что $q \in U_{d_2}\bigl([a_2, b_2]\bigr)$. Заметим, что треугольник $a_2 O b_2$ является правильным, и его сторона равна 1, так как a_i, b_i — вершины правильного шестиугольника со стороной 1 согласно условию. Отсюда высота, опущенная из вершины O, поделит противоположную сторону на два отрезка длиной 0.5 каждый. Далее, как уже было отмечено, p лежит на отрезке $[O, a_2]$, а точка q расположена симметрично относительно оси ординат. Следовательно, $q \in [O, b_3]$, и в силу (2.43) справедливо $|O\,q| < 0.5$. Значит, ввиду параллельности отрезков $[a_2, b_2]$ и $[O, b_3]$ проекция q на $[a_2, b_2]$ попадёт внутрь этого отрезка. При этом $q \in B_{d_2}(a_2)$. Отсюда расстояние от q до отрезка $[a_2, b_2]$ меньше d_2. Значит,

$$\mathrm{HP}(D) = \{p, q\} \subset U_{d_2}\bigl(\mathrm{Conv}(A_2)\bigr).$$

В силу зеркальной симметрии аналогично доказывается, что $\{p, q\} \subset U_{d_3}\bigl(\mathrm{Conv}(A_3)\bigr)$. Таким образом, мы показали

$$\mathrm{HP}(D) \subset U_{d_i}\bigl(\mathrm{Conv}(A_i)\bigr)$$

для всех i, см. рис. 2.18. Следовательно, мы нашли компакт A_1 такой, что

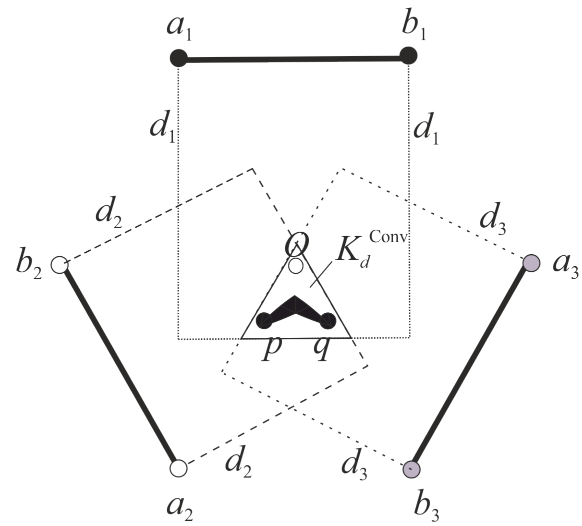

Рис. 2.18: $\mathrm{HP}(D) \subset U_d^{\mathrm{Conv}} = \mathrm{Int}\, K_d^{\mathrm{Conv}}$.

$$\emptyset \neq \Big(\partial B_{d_1}(a_1) \cup \partial B_{d_1}(b_1)\Big) \cap \mathrm{HP}(D) = \mathrm{HP}(D) \subset \bigcap_{i=1}^{3} U_{d_i}\big(\mathrm{Conv}(A_i)\big) = U_d^{\mathrm{Conv}}.$$

Значит, все пункты (1)–(5) условий 3 выполнены для $s = 1$. Отсюда согласно теореме 2.40 граница $A = \{A_1, A_2, A_3\}$ является неустойчивой.

2.4.3.2 Уменьшение расстояния d_1

Вычислим теперь компакт, дающий меньшую сумму расстояний относительно величины $S(A^{\mathrm{Conv}}, K_d^{\mathrm{Conv}})$. Согласно доказанному

$$K_\lambda = \{p, q\} = \mathrm{HP}(D) \subset U_d^{\mathrm{Conv}} \subset U_{d_1}\big(\mathrm{Conv}(A_1)\big).$$

Значит,

$$\delta_1 = \Big|K_\lambda\ \partial B_{d_1}\big(\mathrm{Conv}(A_1)\big)\Big| > 0.$$

Далее, все пункты (1)–(5) условий 3 выполнены, следовательно, по лемме 2.39

$$\delta_2 = \Big|\mathrm{Conv}(A_1)\ \partial B_{d_1}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big)\Big| > 0.$$

Поэтому для уменьшения веса сети можно воспользоваться теоремой 2.40, согласно которой величина затяжения расстояния d_1 может быть определена как, в частности, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, d_1\}$.

Найдём сначала значение δ_1. Отрезок $[p, q]$ параллелен отрезку $[a_1, b_1]$ и, как отмечалось выше, абсциссы точек p и q лежат строго между абсциссами точек a_1 и b_1. Следовательно, исходя из координат перечисленных точек и расстояния d_1, равного $\sqrt{c^2 + c + 1}$, где $c = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4\sqrt{5} - 7}}{4} = 0.210424\ldots$, имеем

$$\delta_1 = -c \cdot \sin(\pi/3) - \big(\sin(\pi/3) - \sqrt{c^2 + c + 1}\big) = \sqrt{c^2 + c + 1} - (c + 1) \cdot \sin(\pi/3) = 0.071876\ldots.$$

Далее, как отмечено выше, $\delta_2 = \Bigl|[a_1, b_1]\ \partial B_{d_1}\bigl(K_d^{\mathrm{Conv}}\bigr)\Bigr|$. Покажем, что начало координат O лежит внутри K_d^{Conv}. Высота в треугольнике a_2Ob_2 равна $\sqrt{3}/2$. Сравним это число с $d_2 = \sqrt{c^2 - c + 1}$:

$$\sqrt{3}/2 \quad \ldots \quad \sqrt{c^2 - c + 1};$$

$$3/4 \quad \ldots \quad c^2 - c + 1/4 + 3/4;$$

$$0 \quad \ldots \quad (c - 1/2)^2.$$

Как мы отмечали выше, $c = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4\sqrt{5}-7}}{4} < 0.5$, значит, $(c - 1/2)^2 > 0$, и поэтому $d_2 > \sqrt{3}/2$. Отсюда $O \in U_{d_2}\bigl(\mathrm{Conv}(A_2)\bigr)$, см. рис 2.19. Ввиду симметрии аналогично показывается, что

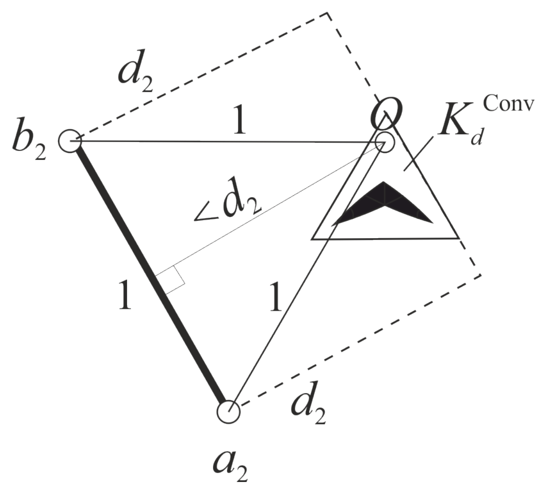

Рис. 2.19: $O \in U_{d_2}\bigl(\mathrm{Conv}(A_2)\bigr)$.

$O \in U_{d_3}\bigl(\mathrm{Conv}(A_3)\bigr)$. Следовательно, $O \in U_d^{\mathrm{Conv}} \subset K_d^{\mathrm{Conv}}$. Но $d_1 = \sqrt{c^2 + c + 1} = 1.120135\ldots$. Значит, $a_1, b_1 \in U_{d_1}(O)$, так как $|a_1\, O| = |b_1\, O| = 1$. Заметим, что любая точка из отрезка $[a_1, b_1]$ расположена не дальше от начала координат O, чем точка a_1 или точка b_1. Отсюда

$$\Bigl|[a_1, b_1]\ \partial B_{d_1}(O)\Bigr| = \Bigl|a_1\ \partial B_{d_1}(O)\Bigr| = \Bigl|b_1\ \partial B_{d_1}(O)\Bigr| = d_1 - |a_1\, O| = d_1 - |b_1\, O|. \tag{2.44}$$

Но так как $O \in U_d^{\mathrm{Conv}} \subset K_d^{\mathrm{Conv}}$, то

$$B_{d_1}(O) \subset U_{d_1}\bigl(K_d^{\mathrm{Conv}}\bigr) \subset B_{d_1}\bigl(K_d^{\mathrm{Conv}}\bigr).$$

Следовательно, ввиду компактности $B_{d_1}(O)$ и $\partial B_{d_1}\bigl(K_d^{\mathrm{Conv}}\bigr)$ имеем, что

$$\Bigl|B_{d_1}(O)\ \partial B_{d_1}\bigl(K_d^{\mathrm{Conv}}\bigr)\Bigr| > 0. \tag{2.45}$$

И наконец, из (2.44) и (2.45) вытекает, что

$$\delta_2 = \Bigl|[a_1, b_1]\ \partial B_{d_1}\bigl(K_d^{\mathrm{Conv}}\bigr)\Bigr| > d_1 - |a_1\, O| = 0.120135\ldots > \delta_1 = 0.071876\ldots .$$

Поэтому
$$\min\{\delta_1, \delta_2, d_1\} = \delta_1 = 0.071876\dots.$$
Таким образом, по теореме 2.40 одним из компактов в данном случае, дающих меньшую сумму расстояний, является компакт $K = B_{d_1-\delta_1}\big([a_1,b_1]\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}$, который равен треугольнику K_d^{Conv} с основанием, поднятым вверх до пересечения с $K_\lambda = \{p, q\}$, см. рис. 2.20.

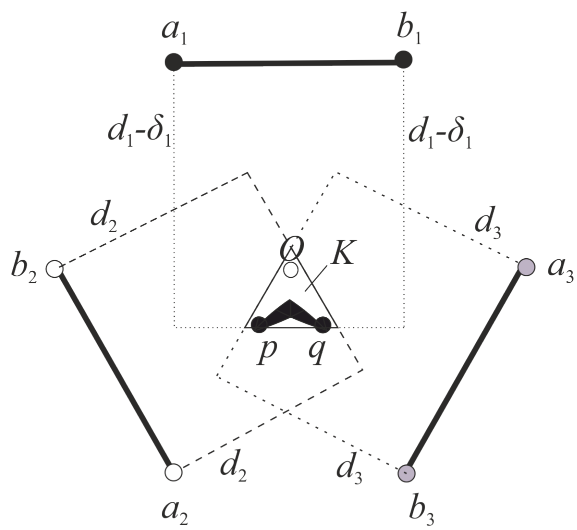

Рис. 2.20: $K = B_{d_1-\delta_1}\big([a_1,b_1]\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}$.

Заметим, что в данном случае, так как все $d_i > 0$, можно вместо d_1 в качестве затягиваемого расстояния d_s выбрать d_2 или d_3, так как
$$\Big(\partial B_{d_2}(a_2) \cup \partial B_{d_2}(b_2)\Big) \cap \mathrm{HP}(D) = \Big(\partial B_{d_3}(a_3) \cup \partial B_{d_3}(b_3)\Big) \cap \mathrm{HP}(D) = \mathrm{HP}(D)$$
и по доказанному
$$\mathrm{HP}(D) \subset U_d^{\mathrm{Conv}},$$
то есть, другими словами, пункт (5) из условий 3 выполняется тоже для d_2 и d_3.

Отметим, что в силу симметрии значение $\min\{\delta_1, \delta_2, d_2\}$, где δ_1 и δ_2 вычислены относительно d_2, равно значению $\min\{\delta_1, \delta_2, d_3\}$, где δ_1 и δ_2 вычислены уже относительно d_3. Поэтому достаточно рассмотреть случай какого-то одного из этих двух расстояний, например, d_2.

2.4.3.3 Уменьшение расстояния d_2

Итак, найдём $\min\{\delta_1, \delta_2, d_2\}$. Согласно установленному выше, отрезок $[O,q]$ параллелен $[a_2,b_2]$, и проекция $[O,q]$ на $[a_2,b_2]$ лежит строго внутри отрезка $[a_2,b_2]$, то есть в (a_2,b_2). Причём $\big|O\ [a_2,b_2]\big| = \sqrt{3}/2$ и $d_2 = 0.913156\dots$. Значит,
$$\delta_1 = \Big|K_\lambda\ \partial B_{d_2}\big(\mathrm{Conv}(A_2)\big)\Big| = \Big|q\ \partial B_{d_2}\big(\mathrm{Conv}(A_2)\big)\Big| = d_2 - \sqrt{3}/2 = 0.047130\dots.$$

Теперь вычислим

$$\delta_2 = \Big|\mathrm{Conv}(A_2)\ \partial B_{d_2}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big)\Big| = \Big|[a_2, b_2]\ \partial B_{d_2}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big)\Big|.$$

Выпишем уравнения прямых, на которых лежат отрезки $[a_1, b_1]$ и $[a_3, b_3]$. Для первого отрезка уравнение имеет вид $y - \sin(\pi/3) = 0$, то есть

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,$$

а для второго оно имеет вид $\frac{x-1}{\cos(\pi/3)-1} + \frac{y}{\sin(\pi/3)} = 0$ или после эквивалентных преобразований

$$\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0.$$

Чтобы получить уравнения прямых, на которых лежат основание треугольника K_d^{Conv} и его левая боковая сторона, сдвинем первую прямую на ортогональный ей вектор $d_1(0, -1)$, а вторую прямую — также на ортогональный ей вектор $d_2\big(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\big)$. В итоге получим уравнения

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} + d_1 = 0, \tag{2.46}$$

$$\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} + 2d_2 = 0. \tag{2.47}$$

Отсюда координаты пересечения этих двух прямых равны

$$t := \Big(\frac{3\sqrt{3} - 2(d_1 + 2d_2)}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2} - d_1\Big) = (-0.201132\ldots, -0.254109\ldots).$$

Серединный перпендикуляр к отрезку $[a_2, b_2]$ пройдёт через точку O и пересечёт левую сторону треугольника K_d^{Conv}, так как $O \in U_d^{\mathrm{Conv}}$ по доказанному. Точка t — крайняя нижняя точка левой стороны этого треугольника. Значит, t лежит не выше серединного перпендикуляра к $[a_2, b_2]$. Отсюда

$$|t\, a_2| \le |t\, b_2| = \big|(-1, 0)\ (-0.201132\ldots, -0.254109\ldots)\big| = 0.838308\ldots.$$

При этом $d_2 = 0.913156\ldots > 0.838308\ldots = |t\, b_2|$. Следовательно,

$$\big|[a_2, b_2]\ \partial B_{d_2}(t)\big| = \big|b_2\ \partial B_{d_2}(t)\big|.$$

Также $t \in K_d^{\mathrm{Conv}}$, и поэтому

$$B_{d_2}(t) \subset B_{d_2}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big).$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}\delta_2 = \Big|[a_2, b_2]\ \partial B_{d_2}\big(K_d^{\mathrm{Conv}}\big)\Big| \ge \Big|b_2\ \partial B_{d_2}(t)\Big| =& \\ = d_2 - |t\ b_2| = 0.913156\ldots - 0.838308\ldots\ &= 0.074847\ldots > \delta_1 = 0.047130\ldots.\end{aligned}$$

Поэтому
$$\min\{\delta_1, \delta_2, d_2\} = \delta_1 = 0.047130\ldots .$$
Значит, расстояние d_2 согласно теореме 2.40 максимально можно уменьшить не более чем на $\delta_1 = 0.047130\ldots$, и $K_\lambda = \mathrm{HP}(D) = \{p, q\}$ будет пересекаться с границей нового компакта $K = B_{d_2-\delta_1}\big([a_2, b_2]\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}$ по точке q, то есть
$$K_\lambda \cap \partial\Big(B_{d_2-\delta_1}\big([a_2, b_2]\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}\Big) = \{q\}.$$

2.4.3.4 Уменьшение расстояния d_3

Как было отмечено выше, случай $d_s = d_3$ аналогичен ввиду симметрии случаю $d_s = d_2$ и при этом $\min\{\delta_1, \delta_2, d_3\} = \min\{\delta_1, \delta_2, d_2\} = 0.047130\ldots$, где каждые δ_i вычислялись для соответствующих расстояний d_3 и d_2. Заметим, что в случае затяжения d_3 имеем
$$K_\lambda \cap \partial\Big(B_{d_3-\delta_1}\big([a_3, b_3]\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}\Big) = \{p\}.$$

2.4.3.5 Уменьшение двух расстояний d_1 и d_2

Попробуем теперь выяснить, можно ли уменьшить сразу два расстояния, например, d_1 и d_2, где d_1 зятягивается на δ_1, посчитанное в разделе 2.4.3.2, обозначим эту величину через $\delta_1(d_1)$, а d_2 затягивается на δ_1, вычисленное в разделе 2.4.3.3, обозначим эту величину через $\delta_1(d_2)$. Также для удобства введём обозначения
$$K(d_1) := B_{d_1-\delta_1(d_1)}\big([a_1, b_1]\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}};$$
$$K(d_2) := B_{d_2-\delta_1(d_2)}\big([a_2, b_2]\big) \cap K_d^{\mathrm{Conv}}.$$

Покажем, что $d_H\big(\mathrm{Conv}(A_2), K(d_1) \cap K(d_2)\big) \le d_2 - \delta_1(d_2)$. Докажем сначала, что $[a_2, b_2] \subset B_{d_2-\delta_1(d_2)}\big(K(d_1) \cap K(d_2)\big)$. Рассмотрим точку b_2. Точка p находится ниже точки b_2, и $|p\ b_2| = d_2$, см. рис. 2.21. Также ввиду симметрии
$$\Big|p\ \partial B_{d_3}\big(\mathrm{Conv}(A_3)\big)\Big| = \Big|q\ \partial B_{d_2}\big(\mathrm{Conv}(A_2)\big)\Big| = \delta_1(d_2),$$
см. раздел 2.4.3.3. Обозначим через m пересечение отрезка $[b_2, p]$ с левой боковой стороной треугольника $K(d_1) \cap K(d_2)$. Отсюда имеем, что $[m, p] \subset K(d_1) \cap K(d_2)$ и $|m\, p| \ge \delta_1(d_2)$. Значит, $|b_2\, m| \le d_2 - \delta_1(d_2)$, и поэтому $b_2 \in B_{d_2-\delta_1(d_2)}(m)$. Следовательно,
$$b_2 \in B_{d_2-\delta_1(d_2)}\big(K(d_1) \cap K(d_2)\big). \tag{2.48}$$

Далее рассмотрим точку a_2 и покажем, что $a_2 \in B_{d_2-\delta_1(d_2)}\big(K(d_1) \cap K(d_2)\big)$. Имеем
$$|a_2\ p| = 1 - \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4\sqrt{5} - 7}}{4} = 1 - 0.210424\ldots < 0.8\,.$$

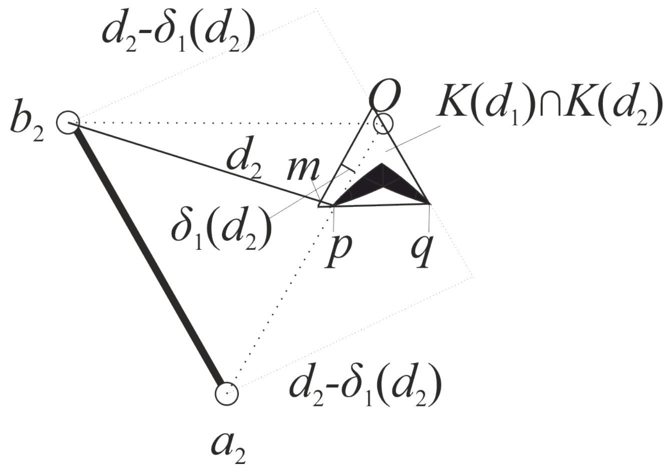

Рис. 2.21: $K(d_1) \cap K(d_2)$ и компакт $\mathrm{Conv}(A_2)$.

При этом

$$d_2 - \delta_1(d_2) = 0.913156\ldots - 0.047130\ldots > 0.8\,.$$

Значит, $a_2 \in B_{d_2-\delta_1(d_2)}(p)$. Также $p \in K(d_1) \cap K(d_2)$, см. разделы 2.4.3.2 и 2.4.3.3. Отсюда

$$a_2 \in B_{d_2-\delta_1(d_2)}\big(K(d_1) \cap K(d_2)\big). \tag{2.49}$$

Множество $B_{d_2-\delta_1(d_2)}\big(K(d_1)\cap K(d_2)\big)$ выпукло по лемме 1.2.2, так как $K(d_1)\cap K(d_2)$ выпуклый компакт. Следовательно, в силу (2.48) и (2.49) имеем, что

$$\mathrm{Conv}(A_2) = [a_2, b_2] \subset B_{d_2-\delta_1(d_2)}\big(K(d_1) \cap K(d_2)\big).$$

При этом $K(d_1) \cap K(d_2) \subset K(d_2) \subset B_{d_2-\delta_1(d_2)}\big(\mathrm{Conv}(A_2)\big)$. Поэтому

$$d_H\big(\mathrm{Conv}(A_2), K(d_1) \cap K(d_2)\big) \le d_2 - \delta_1(d_2).$$

Далее покажем, что $d_H\big(\mathrm{Conv}(A_1), K(d_1)\cap K(d_2)\big) \le d_1 - \delta_1(d_1)$. Имеем, что $O \in K(d_1)\cap K(d_2)$ и $d_1 - \delta_1(d_1) = 1.120135\ldots - 0.071876\ldots > |a_1\ O| = |b_1\ O| = 1$, см. раздел 2.4.3.2. Следовательно, $[a_1, b_1] \subset B_{d_1-\delta_1(d_1)}(O)$. Значит,

$$\mathrm{Conv}(A_1) = [a_1, b_1] \subset B_{d_1-\delta_1(d_1)}\big(K(d_1) \cap K(d_2)\big).$$

При этом

$$K(d_1) \cap K(d_2) \subset K(d_1) \subset B_{d_1-\delta_1(d_1)}\big(\mathrm{Conv}(A_1)\big).$$

Поэтому

$$d_H\big(\mathrm{Conv}(A_1), K(d_1) \cap K(d_2)\big) \le d_1 - \delta_1(d_1).$$

Наконец, докажем, что $d_H\big(\mathrm{Conv}(A_3), K(d_1) \cap K(d_2)\big) \le d_3$. Заметим, что $K_\lambda = \{p, q\} \subset K(d_1) \cap K(d_2)$. Также по условию имеем, что $A_3 \subset B_{d_3}(K_\lambda)$. Значит,

$$A_3 \subset B_{d_3}\big(K(d_1) \cap K(d_2)\big). \tag{2.50}$$

Множество $B_{d_3}\big(K(d_1)\cap K(d_2)\big)$ выпукло по лемме 1.2.2, так как $K(d_1)\cap K(d_2)$ выпуклый компакт. Поэтому в силу (2.50) получаем

$$\mathrm{Conv}(A_3) = [a_3, b_3] \subset B_{d_3}\big(K(d_1) \cap K(d_2)\big).$$

Также

$$K(d_1) \cap K(d_2) \subset K_d^{\mathrm{Conv}} \subset B_{d_3}\big(\mathrm{Conv}(A_3)\big).$$

Отсюда

$$d_H\big(\mathrm{Conv}(A_3), K(d_1) \cap K(d_2)\big) \le d_3.$$

Таким образом, мы установили, что в данной конфигурации можно затянуть сразу два расстояния d_1 и d_2 на свои $\delta_1(d_1)$ и $\delta_1(d_2)$. Аналогично показывается в силу симметрии, что можно одновременно затянуть d_1 и d_3. В итоге мы имеем, что

$$S(A^{\mathrm{Conv}}, K_d^{\mathrm{Conv}}) - S\big(A^{\mathrm{Conv}}, K(d_1) \cap K(d_2)\big) \ge \delta_1(d_1) + \delta_1(d_2).$$

Напомним, что величина затяжения расстояния d_3 равна $\delta_1(d_2)$ ввиду симметрии, но $\delta_1(d_1) > \delta_1(d_2)$. Поэтому одновременное уменьшение расстояний d_2 и d_3 (даже если оно возможно) даст компакт, находящийся на большем суммарном расстоянии по Хаусдорфу до граничных компактов $\mathrm{Conv}(A_i)$, чем компакт $K(d_1) \cap K(d_2)$.

2.4.3.6 Об уменьшении сразу трёх расстояний d_1, d_2 и d_3

Возникает естественный вопрос, можно ли уменьшить все расстояния d_i на соответствующие вычисленные δ_1 одновременно? Ответ отрицательный. А именно, пусть мы одновременно уменьшили описанным выше способом расстояния d_1 и d_2 и получили компакт $K(d_1) \cap K(d_2)$, см. рис. 2.21. Но тогда ближайшей к a_3 точкой в $K(d_1)\cap K(d_2)$ будет точка q, так как по условию $|a_3\, q| = d_3$, см. рис. 2.17. Следовательно, расстояние d_3 никак уменьшить уже будет нельзя.

2.4.3.7 Вывод

Таким образом, величина общего затяжения в данной конфигурации равна

$$S(A^{\mathrm{Conv}}, K_d^{\mathrm{Conv}}) - S\big(A^{\mathrm{Conv}}, K(d_1) \cap K(d_2)\big) \ge \delta_1(d_1) + \delta_1(d_2) = \\ = 0.071876\ldots + 0.047130\ldots = 0.119007\ldots .$$

Напомним, что согласно утверждению 2.4.1 выполнено $S_A \ge S(A^{\mathrm{Conv}}, K_d^{\mathrm{Conv}})$. Значит, справедливо

$$S_A - S_{A^{\mathrm{Conv}}} \ \ge\ S_A - S\big(A^{\mathrm{Conv}}, K(d_1) \cap K(d_2)\big) \ \ge\ S(A^{\mathrm{Conv}}, K_d^{\mathrm{Conv}}) - S\big(A^{\mathrm{Conv}}, K(d_1) \cap K(d_2)\big).$$

Следовательно, для рассматриваемой финитной границы A мы получили, что

$$S_A - S_{A^{\mathrm{Conv}}} \ge 0.119007\ldots .$$

Заключение

В данной работе изучалась проблема Ферма–Штейнера в гиперпространствах над конечномерными нормированными пространствами. Основное внимание уделялось построению теории для финитных и выпуклых границ $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$. Финитными мы называем границы, состоящие из конечных множеств, а выпуклыми — границы из выпуклых компактов.

Для финитных границ одними из ключевых результатов, сыгравших важную роль на практике, являются критерий минимальности компакта Штейнера в терминах соответствий (теорема 2.2), а также оценки на количество точек в минимальном компакте Штейнера (см. раздел 2.1.4). С их помощью, например, в разделе 2.1.7 удалось существенно эффективней (по сравнению с работой [1]) доказать, что в рассматриваемой там конфигурации минимальный компакт Штейнера состоит ровно из двух точек.

Пусть $\widetilde{d} = (\widetilde{d}_1, \ldots, \widetilde{d}_n) \in \mathbb{R}^n$ — вектор, все компоненты которого неотрицательны. В процессе исследования задачи оказалось полезным ввести ряд новых понятий: *множество дискретных точек* $D^{A_i}_{\widetilde{d}}$ компакта A_i для вектора $\widetilde{d}$, *множество далёких точек* $F^{A_i}_{\widetilde{d}}$ компакта A_i для вектора $\widetilde{d}$ и *множество неплотных точек* $L^{A_i}_{\widetilde{d}}$ компакта A_i для вектора $\widetilde{d}$. Напомним, что точку $a \in A_i$ мы называли *дискретной*, если $\#B_{\widetilde{d}_i}(a) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) < \infty$, *далёкой* — если $U_{\widetilde{d}_i}(a) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j) = \emptyset$, и *неплотной* — если $\operatorname{Int}\bigl(B_{\widetilde{d}_i}(a) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)\bigr) = \emptyset$, см. определения 2.1.2, 2.2.1 и 2.2.2. Для всех этих типов точек мы ввели понятие *множества сцепки* $\mathrm{HP}(p, Y^{A_i}_{\widetilde{d}})$ *компакта* $\bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$ *с точкой* $p \in Y^{A_i}_{\widetilde{d}}$, где $Y \in \{D, F, L\}$, которое по определению равно $B_{\widetilde{d}_i}(p) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$, и *множества сцепки* $\mathrm{HP}(Y^{A_i}_d) = \bigcup\limits_{p \in Y^{A_i}_d} \mathrm{HP}(p, Y^{A_i}_d)$ *компакта* $\bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\widetilde{d}_j}(A_j)$ *с граничным компактом* A_i, где также $Y \in \{D, F, L\}$.

Было показано, что у финитных границ и пространств X со строго выпуклой нормой в случае произвольного вектора решения d проблемы Ферма–Штейнера для границы A найдётся компакт A_i, у которого множество дискретных точек $D^{A_i}_d$ и соответствующее ему множество сцепки $\mathrm{HP}(D^{A_i}_d)$ непусты, см. теоремы 2.4 и 2.22. Заметим, что, вообще говоря, не каждый граничный компакт A_i даже в случае финитных границ и пространства X со строго выпуклой нормой обладает непустым множеством дискретных точек $D^{A_i}_d$. Например, в решении проблемы Ферма–

Штейнера из раздела 2.1.7 для каждого вектора решения d существовал граничный компакт, не содержащий в себе дискретных точек. Отметим, что множества $D_d^{A_i}$ и $\mathrm{HP}(D_d^{A_i})$ существенно использовались при выводе достаточного условия *неустойчивости границы*, дающего оценку на уменьшение веса сети, см. раздел 2.4.2.

В том же случае финитных границ, строго выпуклой нормы пространства X и произвольного вектора решения d мы установили, что каждая точка из $\mathrm{HP}(p, D_d^{A_i})$ лежит на границе минимум двух шаров с центрами, принадлежащими разным граничным компактам A_j и A_k, где j и k, вообще говоря, не обязаны совпадать с i, см. утверждение 2.1.12. При этом в случае произвольной нормы верно, что для всякой точки $p \in D_d^{A_i}$ каждый минимальный компакт Штейнера K_λ пересекается с $\mathrm{HP}(p, D_d^{A_i})$ (утверждение 2.1.11), а также для строго выпуклой нормы пространства X каждое расстояние d_i из вектора решения d *реализуется* по крайней мере на одной точке из $K_\lambda \cap \bigcup\limits_{j=1}^{n} \mathrm{HP}(D_d^{A_j})$, см. теорему 2.10. Мы говорим, что на точке $p \in X$ *реализуется расстояние* d_i, если существует $a \in A_i$ такая, для которой справедливо $|a\,p| = d_i$. Перечисленные выше факты позволили вывести следствие 6 про то, что для каждого номера i существует точка из минимального компакта Штейнера K_λ, на которой реализуются минимум два различных расстояния d_i и d_k из вектора решения. На это следствие опирается лемма 2.20 из раздела 2.1.7, в котором мы более конструктивно и эффективно (в сравнении с работой [1]) решаем проблему Ферма–Штейнера в конкретной конфигурации.

Далее также было показано, что для выпуклых границ в случае произвольной нормы пространства X для любого вектора решения d найдётся номер i, для которого множество далёких точек $F_d^{A_i}$ и соответствующее ему множество сцепки $\mathrm{HP}(F_d^{A_i})$ непусты, см. теорему 2.21. Напомним, что факт существования дискретных точек для финитных границ существенно опирался на строгую выпуклость нормы пространства. Также для финитных границ и строго выпуклой нормы пространства X был построен гипотетический пример того, когда каждый граничный компакт не содержит в себе далёких точек, см. рисунок 2.15. Таким образом, далёкие точки являются неким аналогом дискретных в случае выпуклой границы и даже произвольной нормы пространства X, а дискретные — аналогом далёких для случая финитной границы и строго выпуклой нормы.

Подчеркнём, что факт существования далёких точек для выпуклых границ сыграл важную роль в разделе 2.4.1 про устойчивость границы в проблеме Ферма–Штейнера, а также в доказательстве теоремы 2.28 о взаимосвязи выпуклой границы с K_d. Под взаимосвязью здесь имеется в виду, что если компакт A_i не содержит далёких точек, то множество $\partial B_{d_i}(A_i) \cap \bigcup\limits_{j=1}^{n} \mathrm{HP}(F_d^{A_j})$ непусто. Теорему 2.28 можно воспринимать в качестве некоторого аналога теоремы 2.10, которая была сформулирована для финитных границ и строго выпуклой нормы X. Действительно, из теоремы 2.28 тоже напрямую вытекает, что каждое расстояние d_i реализуется по крайней мере на одной точке из $\bigcup\limits_{j=1}^{n} \mathrm{HP}(F_d^{A_j})$.

Кроме того, было показано, что если граница выпукла и внутренность K_d непуста, то для всех i множества далёких точек $F_d^{A_i}$ и множества неплотных точек $L_d^{A_i}$ совпадают (следствие 8). Таким образом, мы доказали, что для выпуклых границ, если $\operatorname{Int} K_d \neq \emptyset$, то для любого вектора решения d найдётся компакт A_i, для которого множество неплотных точек $L_d^{A_i}$ и соответствующее ему множество сцепки $\mathrm{HP}(L_d^{A_i})$ непусты. Более того, в работе установлено, что в случае финитной границы и пространства X со строго выпуклой нормой для всех i множества дискретных точек $D_d^{A_i}$ и множества неплотных точек $L_d^{A_i}$ совпадают (утверждение 2.2.5). Тем самым мы одновременно доказали, что для финитных границ и пространств со строго выпуклой нормой для любого вектора решения d найдётся компакт A_i, для которого множество неплотных точек $L_d^{A_i}$ и соответствующее ему множество сцепки $\mathrm{HP}(L_d^{A_i})$ тоже непусты. Также мы показали, что в случае финитных границ, строго выпуклой нормы пространства X и выполнения условия $\mathrm{Cl}(\operatorname{Int} K_d) = K_d$ множества дискретных, далёких и неплотных точек для вектора решения d и всех компактов A_i равны (теорема 2.23). В таком случае на практике, а также в теоретических выкладках можно без дополнительных проверок одинаково пользоваться свойствами всех трёх типов точек.

Отметим, что неплотные точки появились в работе естественным образом при попытке обобщить понятия далёких и дискретных точек, и в данном исследовании множество неплотных точек носит скорее теоретический характер. Быть может, этот объект окажется полезным в дальнейших научных изысканиях.

Также в рамках настоящей работы для доказательства существования далёких точек $F_d^{A_i}$ по крайней мере для одного граничного компакта A_i в случае выпуклых границ был получен результат, имеющий самостоятельный интерес. А именно, потребовалось доказать, что в конечномерном нормированном пространстве следующая операция непрерывна.

Пусть в таком пространстве даны два непустых выпуклых компакта A и B, и пусть $r \in \bigl[\min\limits_{a\in A} |aB|, +\infty\bigr)$. Положим

$$f(r) = B_r(A) \cap B,$$

где $B_r(A)$ — замкнутая окрестность радиуса r с центром в A. Теорема 1.15 посвящена доказательству непрерывности отображения f, где на пространстве непустых компактов задана топология, порождённая метрикой Хаусдорфа.

Помимо всего перечисленного выше, важной частью данного исследования было изучение вопроса *устойчивости границы* в проблеме Ферма–Штейнера (см. разделы 2.4.1 и 2.4.2). Напомним, что границу $\bigl\{\mathrm{Conv}(A_1), \ldots, \mathrm{Conv}(A_n)\bigr\}$ в тексте настоящей работы мы обозначали через A^{Conv}, функционал $\sum\limits_{i=1}^{n} d_H(A_i, K)$ — через $S(A, K)$, а минимум функционала $S(A, K)$ для границы A — через S_A. Под *устойчивостью финитной границы* $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ мы имели в виду выполнение следующего условия:

$$S_A = S_{A^{\mathrm{Conv}}}.$$

Множество всех векторов решений для границы A обозначалось в тексте через $\Omega(A)$. В разделах 2.4.1 и 2.4.2 были выведены три различных достаточных условия неустойчивости границы. В первом достаточном условии (следствие 11) для установления неустойчивости требуется показать, что хотя бы для одного вектора решения $d \in \Omega(A)$ ни один компакт $\mathrm{Conv}(A_i)$ не содержит далёких точек для этого вектора d.

Второе достаточное условие (следствие 12) может быть полезно в случае, когда относительно границы A^{Conv} далёкие точки для каждого вектора решения в каких-то граничных компактах $\mathrm{Conv}(A_i)$ всё же нашлись, но при этом для некоторого вектора $d \in \Omega(A)$, все компоненты которого положительны, существует компакт A_s, не содержащий в себе далёких точек (подчеркнём, что в данном случае неизвестно, является ли d вектором решения проблемы Ферма–Штейнера для A^{Conv}). Тогда, как говорится в следствии 12, чтобы показать неустойчивость границы A, нужно проверить справедливость для A_s следующего включения:

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{HP}\Big(F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}\Big) \subset U_{d_s}\big(\mathrm{Conv}(A_s)\big).$$

Если оно выполняется, то граница неустойчива.

Третье достаточное условие (первая часть теоремы 2.40) требует, во-первых, чтобы норма пространства X была строго выпукла, во-вторых, чтобы у вектора решения d проблемы Ферма–Штейнера для исходной финитной границы A одна из его компонент d_s была положительна, в-третьих, чтобы внутренность компакта $\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{d_i}\big(\mathrm{Conv}(A_i)\big)$, которая обозначалась через U_d^{Conv}, была непуста, и в-четвёртых, чтобы было справедливо

$$\Big(\bigcup_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s)\Big) \cap \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{HP}(D_d^{A_i}) \subset U_d^{\mathrm{Conv}}.$$

Граница A является неустойчивой в случае выполнения всех четырёх перечисленных выше условий, как утверждает первая часть теоремы 2.40. Такое достаточное условие может пригодиться, с одной стороны, в случае, когда, например, первые три условия выполнены и проверить выполнимость четвёртого условия оказывается проще, чем находить множество всех далёких точек $F_d^{\mathrm{Conv}(A_i)}$ по всем компактам $\mathrm{Conv}(A_i)$, что требуется в следствиях 11 и 12. С другой стороны, вторая часть теоремы 2.40 заодно даёт ответ на вопрос, как в неустойчивом случае при достаточно малых $\delta > 0$ построить компакт K, для которого верно следующее неравенство:

$$S_A - S(A^{\mathrm{Conv}}, K) \geq \delta > 0.$$

Отметим, что теорема 2.40 существенно опирается на утверждение 2.4.4, доказательство которого основывано на алгоритме 1 построения минимального компакта Штейнера в случае финитной границы.

Применение третьего достаточного условия неустойчивости было продемонстрировано в настоящей работе на конфигурации из раздела 2.1.7, где исходная граница находится в евклидовой плоскости и состоит из трёх компактов, лежащих определённым образом на единичной окружности, см. раздел 2.4.3. А именно, для данной конфигурации посредством теоремы 2.40 была доказана её неустойчивость, а также оценена величина $S_A - S_{A^{\mathrm{Conv}}}$.

Благодарности

Автор выражает глубокие искренние благодарности своему научному руководителю, профессору А. А. Тужилину, а также профессору А. О. Иванову за постановки задач и плодотворные обсуждения в процессе совместной работы.

Автор выражает большую благодарность заведующему кафедрой дифференциальной геометрии и приложений академику А. Т. Фоменко и всем сотрудникам кафедры за постоянное внимание и интерес к работе.

Автор также горячо благодарит свою маму, Веронику Алексанян, за воспитательский подвиг и поддержку.

Литература

[1] A. Ivanov A., Tropin A., Tuzhilin A. Fermat–Steiner problem in the metric space of compact sets endowed with Hausdorff distance // J. Geom., 108:2 (2017), 575–590.

[2] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Branching solutions to one–dimensional variational problems // World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001, xxii+342 pp.

[3] Cieslik D. Steiner minimal trees // Nonconvex Optim. Appl., 23, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998, xii+319 pp.

[4] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Minimal networks: a review // Advances in dynamical systems and control, Stud. Syst. Decis. Control, 69, Springer, Cham, 2016, 43–80 pp.

[5] Hwang F. K., Richards D. S., Winter P. The Steiner Tree Problem // North–Holland, 1992, 339 p.

[6] Jarnik V., Kössler M. On minimal graphs containing n given points // Časopis Pĕst. Mat. Fys., 63:8 (1934), 223–235 pp.

[7] Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов, 3-е изд., испр. и доп. // МЦНМО, М., 2001, 568 с.

[8] Drezner Z., Klamroth K., Schöbel A., Wesolowsky G. O. The Weber problem // Facility Location: Applications and Theory, Springer, Berlin, 2002, 1–36 pp.

[9] Schlicker S. The geometry of the Hausdorff metric // GVSU REU 2008, Grand Valley State Univ., Allendale, MI, 2008, 11 pp., http://faculty.gvsu.edu/schlicks/ HMG2008.pdf.

[10] Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии // Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 512 с.

[11] Nadler S. B. Hyperspaces of sets // Marcel Dekker Inc., New York and Basel, 1978, 707 p.

[12] Blackburn C. C., Lund K., Schlicker S., Sigmon P., Zupan A. An introduction to the geometry of $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ // GVSU REU 2007, Grand Valley State Univ., Allendale, MI, 2007.

[13] Memoli F. On the use of Gromov–Hausdorff distances for shape comparison // Eurographics symposium on point based graphics, The Eurographics Association, Prague, 2007, 81–90.

[14] Memoli F. Some properties of Gromov–Hausdorff distances // Discrete Comput. Geom., 48:2 (2012), 416–440.

[15] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Isometry group of Gromov–Hausdorff space // Mat. Vesnik, 71:1-2 (2019), 123–154.

[16] Тропин А. М. Оценка длины минимальной параметрической сети в гиперпространствах при деформации граничного множества // Интеллектуальные системы. Теория и приложения, 25, 2, 2021, стр. 81–107

[17] Mendelson B. Introduction to topology // Dover Publications, 1990, 206 p.

[18] Leonard I. E., Lewis J. E. Geometry of convex sets // Wiley, 2015, 336 p.

[19] Алимов А. Р., Царьков И. Г. Связность и другие геометрические свойства солнц и чебышёвских множеств // Фундаментальная и прикладная математика, 2014, том 19, No 4, с. 21–91.

[20] Емеличев В. А. и др. Лекции по теории графов // М., Наука, 1990

[21] Иванов А. О., Тужилин А. А. Геометрия расстояний Хаусдорфа и Громова-Хаусдорфа: случай компактов // М.: Издательство Попечительского совета механико-математического факультета МГУ, 2017. 111 с.

[22] Drusvyatskiy D. Convex analysis and nonsmooth optimization // University Lecture, 2020, https://sites.math.washington.edu/ ddrusv/crs/Math_516_2020/bookwithindex.pdf

[23] Тропин А. М. Минимальные деревья Штейнера в пространстве с метрикой Хаусдорфа // Дипломная работа, механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 2014

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ

[24] Галстян А. Х., Иванов А. О., Тужилин А. А. Проблема Ферма–Штейнера в пространстве компактных подмножеств $\mathbb{R}^m$ с метрикой Хаусдорфа // Математический сборник, 2021, т. 212, вып. 1, с. 28–62.

Перевод:

Galstyan A. Kh., Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. The Fermat–Steiner problem in the space of compact subsets of $\mathbb{R}^m$ endowed with the Hausdorff metric // Sb. Math., 212:1 (2021), 25–56.

Журнал входит в реферативные базы данных MathSciNet, Scopus, Web of Science и RSCI.

IF WoS=1.274; SJR=1.158.

Теорема 5 и следствие 4 доказаны автором самостоятельно. Все остальные результаты статьи получены с равнозначным вкладом автора, А. О. Иванова и А. А. Тужилина.

[25] Галстян А. Х. Про непрерывность одной операции с выпуклыми компактами в конечномерных нормированных пространствах // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 152–160.

Журнал входит в реферативные базы данных MathSciNet, Scopus и RSCI.

IF SJR=0.305.

Все результаты статьи получены автором самостоятельно.

[26] Галстян А. Х. Устойчивость границы в проблеме Ферма–Штейнера в гиперпространствах над конечномерными нормированными пространствами // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып.2, с. 80–127.

Журнал входит в реферативные базы данных MathSciNet, Scopus и RSCI.

IF SJR=0.305.

Все результаты статьи получены автором самостоятельно.

[27] Галстян А. Х. Проблема Ферма-Штейнера в пространстве компактных подмножеств евклидовой плоскости // Итоги науки и техники. Серия Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры, 2020, Т. 175, С. 44–55.

Журнал “Итоги науки и техники. Серия Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры” входит в реферативную базу данных РИНЦ.

IF РИНЦ=0.205.

Перевод:

Galstyan A. H. The Fermat–Steiner problem in the space of compact subsets of the euclidean plane // Journal of Mathematical Sciences, 2023, vol. 272, no. 6, pp. 791–802.

Журнал “Journal of Mathematical Sciences” входит в реферативные базы данных MathSciNet, Scopus и RSCI.

IF SJR=0.357.

Все результаты статьи получены автором самостоятельно.

Предварительные версии работ автора

[28] Galstyan A. Kh. About the continuity of one operation with convex compacts in finite-dimensional normed spaces // arXiv:2211.03847, 2022.

[29] Galstyan A. Kh. Boundary stability in the Fermat–Steiner problem in hyperspaces over finite-dimensional normed spaces // arXiv:2212.01881, 2022.

Тезисы докладов

[30] Галстян А. Х. Проблема Ферма–Штейнера в пространстве компактных подмножеств евклидовой плоскости // Проблема Ферма-Штейнера в пространстве компактных подмножеств евклидовой плоскости // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского / Казанское математическое общество. Лобачевские чтения – 2018 // Материалы Семнадцатой Всероссийской молодежной школы-конференции. – Т. 56. – Казанское математическое общество, Казань: 2018. – С. 87–88.

[31] Галстян А. Х. Проблема Ферма–Штейнера в метрическом пространстве компактных множеств, наделенном расстоянием Хаусдорфа // Материалы Международного молодежного научного форума Ломоносов–2018 / Под ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов. – Москва: ООО МАКС Пресс, 2018.

[32] Galstyan A. Fermat–Steiner problem in space of compact subsets of the euclidean plane // Тезисы докладов Международной конференции Геометрические методы в теории управления и математической физике. – Ряз. гос. ун-т имени С. А. Есенина, Рязань: 2018. – P. 63–63.

[33] Галстян А. Х. Проблема Ферма–Штейнера в пространстве компактных подмножеств евклидовой плоскости // Материалы Международного молодежного научного форума Ломоносов–2019 / Под ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов. – Москва: ООО МАКС Пресс, 2019.

[34] Галстян А. Х. Проблема Ферма–Штейнера в пространстве компактных подмножеств $\mathbb{R}^m$ с метрикой Хаусдорфа // Материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2020. – Издательско-полиграфический центр Научная книга, Воронеж: 2020. – С. 101–103.

[35] Галстян А. Х. Устойчивость решения проблемы Ферма–Штейнера в гиперпространствах над конечномерными нормированными пространствами // Вторая конференция Математических центров России (7–11 ноября 2022 г.): сборник тезисов. – Издательство Московского университета, Москва: 2022. – С. 49–51.

[36] Галстян А. Х. Устойчивость решения проблемы Ферма-Штейнера в гиперпространствах над конечномерными нормированными пространствами // Материалы Международного молодежного научного форума Ломоносов–2022 / Под ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов и др. — Москва: ООО МАКС Пресс, 2022.

[37] Галстян А. Х. Устойчивость границы в проблеме Ферма-Штейнера в гиперпространствах над конечномерными нормированными пространствами // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образовния. – Т. 12 из Материалов VI международной молодежной научной школы Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы. – Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж: 2022. – С. 37–38.