

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Березнюк Вадим Юрьевич

**Коммутаторная длина степеней  
и асферичность групп, заданных графами**

Специальность 1.1.5 —

«Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук,  
Клячко Антон Александрович

Москва — 2023

## Оглавление

	Стр.
Введение . . . . .	3
<b>Глава 1. Коммутаторная длина степеней в свободных произведениях групп . . . . .</b>	<b>17</b>
1.1 Введение . . . . .	17
1.2 Почти точность оценки . . . . .	19
1.3 Диаграммы Хауи . . . . .	22
1.4 Лемма о столкновениях . . . . .	24
1.5 Лемма о кластерах . . . . .	26
1.6 Основная теорема . . . . .	34
<b>Глава 2. Степени с минимальной коммутаторной длиной в свободных произведениях групп . . . . .</b>	<b>37</b>
2.1 Введение . . . . .	37
2.2 Диаграммы Хауи и произведения коммутаторов . . . . .	39
2.3 Диаграммы для $[a, t]^n$ . . . . .	42
2.4 Доказательства теорем . . . . .	53
2.5 Пример коммутаторного разложения . . . . .	54
<b>Глава 3. Асферичность групп, заданных графами . . . . .</b>	<b>57</b>
3.1 Введение . . . . .	57
3.2 Группы, заданные графами, и графические условия малых сокращений . . . . .	58
3.3 Основная теорема . . . . .	62
3.4 Следствия основной теоремы . . . . .	64
3.4.1 Условия малых сокращений . . . . .	65
3.4.2 Метод движений . . . . .	68
3.5 Зависимости и сферические диаграммы . . . . .	70
3.6 Доказательство основной теоремы . . . . .	72
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>80</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>81</b>
<b>Публикации автора по теме диссертации . . . . .</b>	<b>85</b>

## Введение

### Актуальность темы и степень её разработанности

Диссертация посвящена изучению двух независимых тем, связанных с теорией групп. Первым исследуемым вопросом является задача о вычислении минимальной возможной коммутаторной длины  $n$ -й степени элемента в свободных произведениях произвольных групп.

Хорошо известно, что истинная степень неединичного элемента не может быть коммутатором в свободной группе, это было замечено Шюценберже ещё в 1959 году [37]. Ясно, что квадрат неединичного элемента может быть произведением двух коммутаторов, и куб неединичного элемента может быть произведением трёх коммутаторов. В 1981 году Каллером [14] было обнаружено, что в свободной группе  $F(a, b)$  куб может быть произведением двух коммутаторов:

$$[a, b]^3 = [a^{-1}ba, a^{-2}bab^{-1}][bab^{-1}, b^2],$$

где  $[a, b] := a^{-1}b^{-1}ab$ . Более того, Каллер показал, что элемент  $[a, b]^n$  всегда может быть разложен в произведение  $\lfloor n / 2 \rfloor + 1$  коммутаторов (где  $\lfloor x \rfloor$  — это целая часть  $x$ ). Наименьшее число  $k$ , такое что элемент  $g$  группы  $G$  может быть разложен в произведение  $k$  коммутаторов, называется *коммутаторной длиной* элемента  $g$  и обозначается  $\text{cl}(g)$ . Значит, оценку Каллера можно записать следующим образом:

$$\text{cl}([a, b]^n) \leq \lfloor n / 2 \rfloor + 1.$$

В 1991 году Комерфорд, Комерфорд и Эдмундс [12] доказали, что в свободной группе произведение двух коммутаторов может быть не более, чем кубом неединичного элемента, и выдвинули гипотезу, что для свободных групп оценка Каллера является точной: для любого неединичного элемента  $g$  свободной группы  $\text{cl}(g^n) \geq \lfloor n / 2 \rfloor + 1$ . Эта гипотеза оказалась действительно верной и была доказана Данканом и Хауи [15] в том же 1991 году. Более того, они доказали аналогичное утверждение для свободных произведений *локально индикабельных* групп (то есть групп, в которых каждая нетривиальная конечно порождённая подгруппа допускает эпиморфизм на  $\mathbb{Z}$ ): если  $g$  — это элемент свободного произведения локально индикабельных групп, такой что  $g$  не сопряжён элементам свободных сомножителей, то  $\text{cl}(g^n) \geq \lfloor n / 2 \rfloor + 1$ . Это утверждение оказалось

верным и для свободных произведений произвольных групп без кручения, что было доказано в 2018 году Ивановым и Клячко [28] и независимо от них Ченом [5].

Для свободного произведения  $G = \ast_{j \in J} A_j$ , имеющего фиксированное разложение на свободные сомножители, обозначим через  $\hat{G}$  множество всех элементов, не сопряжённых элементам свободных сомножителей, и определим

$$k(G, n) := \min \left\{ \text{cl}(g^n) \mid g \in \hat{G} \right\}.$$

Из оценки Каллера в совокупности с оценкой Иванова, Клячко и Чена следует, что

$$k(G, n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$$

для свободных произведений групп без кручения.

Для свободных произведений произвольных групп оценка Каллера перестаёт быть точной. Например, в свободном произведении  $\langle a \rangle_3 \ast \langle b \rangle$  истинный куб может быть коммутатором:

$$[a, b]^3 = [b^{-1}aba, ab^{-1}ab].$$

В 1994 году Комерфорд, Эдмундс и Розенбергер [13] показали, в каких случаях коммутатор может быть истинной степенью в свободных произведениях групп с кручением.

В работах Иванова, Клячко и Чена были даны оценки снизу на число  $k(G, n)$  и для случая наличия кручения. Однако рассуждения в этих работах разные: рассуждение Чена основано на подходе Калегари [4], а рассуждение Иванова и Клячко основано на лемме о столкновениях [29]. Поэтому результаты для групп с кручением получились разные. Более того, они оказались несравнимыми — ни про один из них нельзя сказать, что он сильнее другого.

Обозначим минимальный порядок неединичного элемента группы  $G$  через  $N(G)$ . Ивановым и Клячко было доказано, что та же самая оценка, что и для свободных произведений групп без кручения, остаётся верной и для свободного произведения произвольных групп, но только если степень относительно мала:

$$k(G, n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, \quad \text{если } n < N(G).$$

В то же время Ченом было доказано, что

$$k(G, n) \geq \left\lfloor \frac{n - \left\lfloor \frac{2n}{N(G)} \right\rfloor}{2} \right\rfloor + 1.$$

В диссертации доказывается новая оценка, которая усиливает оба этих результата. Более того, доказывается, что эта оценка является неулучшаемой. Другими словами, в диссертации явно вычисляется значение  $k(G, n)$  для свободных произведений произвольных групп.

Также представляет интерес изучение уравнений более общего вида. Пусть в свободном произведении групп  $G = *_{j \in J} A_j$  имеет место равенство

$$c_1 \dots c_k d_1 \dots d_l = u_1^{n_1} \dots u_m^{n_m},$$

где  $c_i$  — коммутаторы,  $d_i$  сопряжены элементам из  $\bigcup_{j \in J} A_j$ , элементы  $u_i$  сопряжены между собой и не сопряжены элементам из  $\bigcup_{j \in J} A_j$ , и  $n_i$  — натуральные числа. Ивановым и Клячко было доказано, что тогда

$$2k + l \geq \sum_{i=1}^m (n_i - 1) + 2, \quad \text{если } N(G) > \sum_{i=1}^m n_i,$$

а Ченом было доказано, что тогда

$$2k + l \geq \sum_{i=1}^m (n_i - 1) - \left\lfloor \frac{2}{N(G)} \sum_{i=1}^m n_i \right\rfloor + 2, \quad \text{если } l = 0.$$

В диссертации доказывается новая оценка, которая усиливает оба этих результата.

Вторым исследуемым вопросом является нахождение новых условий, влекущих асферичность групп, заданных графами.

Грубо говоря, копредставление называется асферическим, если между его соотношениями нет нетривиальных зависимостей. Это может быть формализовано по-разному, поэтому существует много различных определений асферичности [6]. В частности, рядом авторов исследовалась асферичность относительных копредставлений [2], [16], [1], [25], [35]. Асферическим копредставлением (в каком-то из смыслов) обладают достаточно широкие классы групп: группы с одним соотношением; группы, удовлетворяющие условию малых сокращений, и, в частности, почти все фуксовы группы; группы узлов [6]. Про асферические копредставления известно достаточно много [26], [27], [39], [45], [3], поэтому представляет интерес нахождение условий, которые влекут асферичность тех или иных копредставлений.

В диссертации асферичность копредставления  $\langle S \mid R \rangle$  понимается как асферичность его стандартного двумерного клеточного комплекса  $K(S; R)$  [6].

Такая асферичность следует из диаграммной приводимости, введенной Герстеном [21], а диаграммная приводимость может быть получена при помощи теста раскраской [38], весового теста [21] или метода движений [30]. Если среди соотношений копредставления нет истинных степеней, то диаграммная приводимость (а значит и асферичность) следует из классических условий малых сокращений [21]. Напомним, что условия малых сокращений в сущности требуют, чтобы соотношения копредставления имели достаточно короткие общие части. Более точные определения могут быть найдены, например, в пятой главе книги Линдона и Шуппа [44].

В 2003 году Громов изложил графический аналог теории малых сокращений [22]. В графической теории группа задается при помощи ориентированного графа, рёбра которого помечены элементами некоторого множества  $S$ . В качестве порождающих выступают элементы множества  $S$ , а в качестве соотношений берутся приведённые метки путей, образующих базис фундаментальной группы графа. В отличие от классического случая, в графической теории малых сокращений соотношениям разрешается иметь длинные общие части, но только если эти общие части соотношений являются и общими частями путей в графе, соответствующих этим соотношениям. Таким образом, графическая теория позволяет изучать некоторые копредставления, которые не удовлетворяют классическим условиям малых сокращений. В 2006 году Оливье доказал асферичность групп, заданных  $C'(1/6)$ -графами [36], а в 2015 году Грубер доказал асферичность групп, заданных  $C(6)$ -графами [23].

В диссертации вводится понятие асферического графа, которое до некоторой степени можно считать обобщением на графический случай понятия диаграммной приводимости, и вводится графический аналог условия  $T(k)$ . Доказывается, что асферические графы задают асферические группы, и при помощи этого доказывается, что асферичность группы, заданной графом, следует не только из графического условия малых сокращений  $C(6)$ , но также и из графических аналогов условий малых сокращений  $C(4)\&T(4)$  и  $C(3)\&T(6)$ . Более того, показывается, как можно использовать метод движений [30] для доказательства асферичности групп, заданных графами.

## Цели и задачи работы

1. Вычислить минимальную возможную коммутаторную длину  $n$ -й степени элемента, не сопряжённого элементам свободных сомножителей, в свободных произведениях произвольных групп.

2. Получить новые достаточные условия асферичности групп, заданных графами.

### **Научная новизна**

Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Была получена новая оценка снизу для минимальной возможной коммутаторной длины элементов вида  $u_1^{n_1} \dots u_m^{n_m} d_1 \dots d_l$  в свободных произведениях произвольных групп, где  $u_i$  сопряжены между собой и не сопряжены элементам свободных сомножителей,  $d_i$  сопряжены свободным сомножителям, и  $n_i$  — это натуральные числа.
2. Была вычислена минимальная возможная коммутаторная длина  $n$ -й степени элемента, не сопряжённого элементам свободных сомножителей, в свободных произведениях произвольных групп.
3. Было доказано, что минимальная коммутаторная длина достигается на степенях коммутаторов элементов, лежащих в разных свободных сомножителях.
4. Было введено понятие асферического графа и было доказано, что такие графы задают асферические группы.
5. Были введены графические аналоги классических условий малых сокращений  $C(4)\&T(4)$  и  $C(3)\&T(6)$ , и было доказано, что эти условия влекут асферичность группы, заданной соответствующим графом.
6. Было показано, как применить метод движений Клячко для доказательства асферичности групп, заданных графами.

### **Объект и предмет исследования**

В диссертации изучаются группы, представленные в виде свободного произведения или заданные некоторым копредставлением.

### **Теоретическая и практическая значимость**

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть полезны специалистам в комбинаторной теории групп, а также могут представлять интерес для специалистов в абстрактной алгебре.

### **Методы исследования**

В диссертации применяются методы комбинаторной теории групп. Активно используются различные виды диаграмм над копредставлениями и над свободными произведениями групп, а также метод движений Клячко.

## Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие результаты, полученные в диссертации:

1. Явное значение минимальной возможной коммутаторной длины  $n$ -й степени элемента, не сопряжённого элементам свободных сомножителей, в свободных произведениях произвольных групп.
2. Новые достаточные условия асферичности групп, заданных графами.

## Степень достоверности

Достоверность результатов диссертации подтверждена строгими математическими доказательствами. Результаты главы 1 были получены автором в неразделимом соавторстве с Антоном Александровичем Клячко в [47]. Результаты глав 2 и 3 были получены автором самостоятельно в [46] и [48]. Результаты других авторов, используемые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

## Апробация результатов

Основные результаты диссертации докладывались на следующих всероссийских и международных конференциях, а также научных семинарах:

- семинар «Теория групп» под руководством профессора А. Ю. Ольшанского, доцента А. А. Клячко и доцента О. В. Куликовой (Москва, механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 2016–2022, неоднократно);
- вторая конференция Математических центров России (Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, МИАН, 7–11 ноября 2022);
- конференция “Uncertainty and Random Structures: Signal Analysis, Representation Theory and Applications” (Санкт-Петербург, СПбГУ, 12–16 декабря 2022);
- международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, 10–21 апреля 2023).

## Публикации

Основные результаты по теме диссертации изложены в 3 статьях [46–48], все из которых опубликованы в научных журналах, входящих в базы данных Scopus, Web of Science и RSCI.

Работа [47] написана в неразделимом соавторстве с Антоном Александровичем Клячко, работы [46] и [48] написаны автором самостоятельно.



## Объём и структура работы

Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 85 страниц, включая 24 рисунка. Список литературы содержит 48 наименований.

## Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность изучаемых вопросов, формулируются цели, излагается научная новизна и перечисляются основные результаты диссертации.

Глава 1 посвящена оценке снизу для минимальной возможной коммутаторной длины элементов вида  $u_1^{n_1} \dots u_m^{n_m} d_1 \dots d_l$  в свободных произведениях произвольных групп, где  $u_i$  сопряжены между собой и не сопряжены элементам свободных сомножителей,  $d_i$  сопряжены свободным сомножителям, и  $n_i$  — это натуральные числа.

В разделе 1.1 формулируется изучаемая задача и даются основные определения.

Пусть  $G = *_{j \in J} A_j$  — это группа с фиксированным разложением на свободные сомножители. Обозначим через  $\hat{G}$  множество всех элементов группы  $G$ , не сопряжённых элементам свободных сомножителей, и определим  $k(G, n)$  как наименьшее число  $k$ , такое что элемент  $g^n \in \hat{G}$  может быть разложен в произведение  $k$  коммутаторов. Обозначим минимальный порядок неединичного элемента группы  $G$  через  $N(G)$ .

Основным результатом главы является следующая теорема.

**Теорема 2** (упрощенная форма). *Пусть в свободном произведении групп  $G = *_{j \in J} A_j$  имеет место равенство*

$$c_1 \dots c_k d_1 \dots d_l = u_1^{n_1} \dots u_m^{n_m},$$

где  $c_i$  — коммутаторы,  $d_i$  сопряжены элементам из  $\bigcup_{j \in J} A_j$ , элементы  $u_i$  сопряжены между собой и не сопряжены элементам из  $\bigcup_{j \in J} A_j$ , и  $n_i$  — натуральные числа. Тогда

$$2k + l \geq \sum_{i=1}^m (n_i - 1) - 2 \left[ \frac{1}{N(G)} \sum_{i=1}^m n_i \right] + 2.$$

Из теоремы 2 немедленно вытекает оценка для минимальной возможной коммутаторной длины  $n$ -й степени элемента.

**Следствие 1.** Пусть в свободном произведении групп  $G = *_{j \in J} A_j$  имеет место равенство  $c_1 \dots c_k = u^n$ , где  $c_i$  — коммутаторы, и не сопряжён элементом свободных сомножителей, и  $n$  — натуральное число. Тогда

$$2k \geq n - 2 \left\lfloor \frac{n}{N(G)} \right\rfloor + 1$$

или, что то же самое,

$$k \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{N(G)} \right\rfloor + 1.$$

Другими словами, если  $G = *_{j \in J} A_j$  — это свободное произведение произвольных групп, то

$$k(G, n) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{N(G)} \right\rfloor + 1.$$

В разделе 1.2 доказывается почти точность этой оценки.

**Теорема 1.** Пусть  $G = *_{j \in J} A_j$  — это свободное произведение нетривиальных групп и  $n$  — это натуральное число. Тогда

$$k(G, n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{N(G)} \right\rfloor + 1 \quad \text{или} \quad k(G, n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{N(G)} \right\rfloor + 2.$$

При этом  $k(G, n) = \lfloor n / 2 \rfloor - \lfloor n / N(G) \rfloor + 1$ , если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1.  $n$  чётно, а  $\lfloor n / N(G) \rfloor$  нечётно.
2.  $n$  делится на  $N(G)$ .
3.  $n \leq N(G)$ .
4.  $N(G) = 2$ .

В разделе 1.3 даётся определение диаграмм над свободными произведениями групп, которые позволяют переформулировать изучаемый вопрос на геометрический язык, в разделе 1.4 формулируется лемма о столкновениях для кратных движений [41] и в разделе 1.5 доказывается новый вариант этой леммы, который используются для доказательства теоремы 2.

В разделе 1.6 формулируется и доказывается основная теорема, полная формулировка которой выглядит следующим образом.

**Теорема 2.** Пусть в свободном произведении групп  $G = *_{j \in J} A_j$  имеет место равенство

$$c_1 \dots c_k d_1 \dots d_l = u_1^{n_1} \dots u_m^{n_m},$$

где  $c_i$  — коммутаторы,  $d_i$  сопряжены элементам из  $\bigcup_{j \in J} A_j$ , элементы  $u_i$  сопряжены между собой и не сопряжены элементам из  $\bigcup_{j \in J} A_j$ , и  $n_i$  — натуральные числа. Тогда выполнено неравенство

$$2 - 2k - l + \sum_{i=1}^m (n_i - 1) \leq \begin{cases} 2 \left\lfloor \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^m n_i - \left\lfloor \frac{l+1}{2} \right\rfloor \right) \right\rfloor, & \text{если } \sum_{i=1}^m (n_i - 1) - l \text{ чётно;} \\ 2 \left\lfloor \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^m n_i - \left\lfloor \frac{l+1-N}{2} \right\rfloor_+ \right) \right\rfloor - 1, & \text{если } \sum_{i=1}^m (n_i - 1) - l \text{ нечётно,} \end{cases}$$

где  $\lfloor x \rfloor_+ := \max(\lfloor x \rfloor, 0)$ , а  $N$  — минимальный порядок элемента из  $\bigcup_{j \in J} A_j$ , входящего в циклически несократимую запись элемента  $u$ , сопряжённого всем  $u_i$  (в частности, при  $N = \infty$  правая часть есть 0 или  $-1$ ).

В главе 2 доказываемся неулучшаемость оценки

$$k(G, n) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{N(G)} \right\rfloor + 1$$

для свободных произведений произвольных групп.

В разделе 2.1 формулируются основные результаты.

**Теорема 3.** Пусть  $G = *_{j \in J} A_j$  — это свободное произведение нетривиальных групп и  $n$  — это натуральное число. Тогда

$$k(G, n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{N(G)} \right\rfloor + 1.$$

В действительности, доказываемся более сильный результат.

Пусть  $G = *_{j \in J} A_j$  — это группа с фиксированным разложением на свободные сомножители. Для элемента  $g \in \hat{G}$ , имеющего циклически приведённую форму  $a_{j_1,1} \dots a_{j_m,m}$  (где  $a_{j_i,i} \in A_{j_i}$ ), мы обозначаем через  $N(g)$  минимальный порядок его букв  $a_{j_1,1}, \dots, a_{j_m,m}$ . Для  $N \in \{N(g) \mid g \in \hat{G}\}$  мы определяем  $k(G, n, N)$  как минимальное число  $k$ , такое что элемент  $g^n \in \hat{G}$  с  $N(g) = N$  может быть разложен в произведение  $k$  коммутаторов.

**Теорема 4.** Пусть  $G = *_{j \in J} A_j$  — это свободное произведение нетривиальных групп и  $n$  — это натуральное число. Если  $N \in \{N(g) \mid g \in \hat{G}\}$ , то

$$k(G, n, N) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor + 1.$$

Вычисляется коммутаторная длина степеней коммутаторов элементов, лежащих в разных свободных сомножителях.

**Теорема 5.** Пусть  $G = *_{j \in J} A_j$  — это свободное произведение нетривиальных групп и  $n$  — это натуральное число. Если  $a \in A_{j_1}$  и  $t \in A_{j_2}$  — это два неединичных элемента, лежащие в различных свободных сомножителях, такие что  $\text{ord}(a) \leq \text{ord}(t)$ , то

$$\text{cl}([a, t]^n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{\text{ord}(a)} \right\rfloor + 1.$$

В разделе 2.2 формулируется и доказывается лемма о связи диаграмм Хауи и коммутаторных разложений, которая позволяет дать оценку сверху на коммутаторную длину элемента, при условии существования диаграмм Хауи специального вида. В разделе 2.3 явно строятся необходимые диаграммы для элементов вида  $[a, t]^n$ . Результаты этих разделов используются в разделе 2.4 для доказательства теорем 3, 4 и 5.

В разделе 2.5 на конкретном примере показывается, как можно получать коммутаторные разложения минимальной длины в явной алгебраической форме, используя диаграммы, построенные в разделе 2.3. Таким образом выводится равенство

$$[a, t]^5 = [a^{-1}t^{-1}a^{-1}tat^{-1}a^{-1}ta, a^{-1}t^{-1}atat^{-1}a^{-1}ta^{-1}][a^{-1}ta^{-1}, a],$$

которое верно для любых двух элементов произвольной группы, коль скоро  $a^3 = 1$ .

**Глава 3** посвящена нахождению новых условий, влекущих асферичность групп, заданных графами.

В разделе 3.1 формулируются изучаемая задача и кратко излагается суть полученных результатов, а в разделе 3.2 даются основные определения теории групп, заданных графами.

Пусть  $\Gamma$  — это ориентированный граф, каждое ребро которого помечено элементом конечного множества  $S$ . Тогда каждому пути  $p$  в этом графе может быть сопоставлено слово  $\ell(p)$  в алфавите  $S \sqcup S^{-1}$ , называемое меткой пути  $p$ . Это слово равняется произведению (без сокращений) меток рёбер этого пути, при этом если ориентация ребра в пути не совпадает с ориентацией ребра в графе, то метка входит в произведение в степени  $-1$ .

Пусть  $R_s$  — это множество меток всех простых замкнутых путей в графе  $\Gamma$ , и  $R_f$  — это множество циклически приведённых меток путей, образующих

базис фундаментальной группы каждой связной компоненты графа  $\Gamma$ . Если  $\Gamma$  — это помеченный множеством  $S$  граф, то зададим группу  $G(\Gamma)$  копредставлением  $\langle S \mid R_f \rangle$ .

*Поднятием слова  $w$  в помеченный граф  $\Gamma$  называется такой путь  $\bar{p}$  в этом графе, что  $\ell(\bar{p}) \equiv w$  (то есть метка пути  $\bar{p}$  посимвольно совпадает со словом  $w$ ). Слово  $w$  называется *куском* (по отношению к графу  $\Gamma$ ), если оно имеет хотя бы два различных поднятия в граф  $\Gamma$ . Пусть  $p$  — это путь в некотором помеченном графе. *Поднятием пути  $p$  в помеченный граф  $\Gamma$  называется такой путь  $\bar{p}$  в графе  $\Gamma$ , что  $\ell(\bar{p}) \equiv \ell(p)$  (то есть метка пути  $p$  посимвольно совпадает с меткой пути  $\bar{p}$ ). Путь  $p$  называется *куском* (по отношению к помеченному графу  $\Gamma$ ), если он имеет хотя бы два различных поднятия в граф  $\Gamma$ .**

Будем говорить, что граф  $\Gamma$  помечен правильно, если в нём любые два различных ребра, входящие в одну вершину, и любые два различных ребра, выходящие из одной вершины, имеют разные метки.

**Графическое условие  $C(k)$  [23].** Пусть  $\Gamma$  — это помеченный множеством  $S$  граф и  $k \in \mathbb{N}$ . Мы говорим, что  $\Gamma$  удовлетворяет графическому условию  $C(k)$  (или является  $C(k)$ -графом), если

- $\Gamma$  помечен правильно и
- метка никакого простого замкнутого пути не является конкатенацией строго меньше, чем  $k$  кусков.

Для множества слов  $R$  через  $R_{sym}$  обозначим множество, которое состоит из всех циклических сдвигов элементов множеств  $R$  и  $R^{-1}$ .

*Простая сферическая (дисковая) диаграмма над копредставлением  $\langle S \mid R \rangle$  — это конечный клеточный 2-комплекс, гомеоморфный сфере (диску) и вложенный в  $\mathbb{R}^3$  ( $\mathbb{R}^2$ ), такой что его 1-остов является помеченным множеством  $S$  графом и метка каждой его двумерной клетки лежит в  $R_{sym}$ , где *меткой клетки* называется определенное с точностью до циклического сдвига слово, равное метке её некоторого положительно ориентированного граничного пути (как пути в помеченном множеством  $S$  графе).*

Пусть граф  $\Gamma$  удовлетворяет графическому условию  $C(2)$  и пусть  $D$  — это диаграмма над копредставлением  $\langle S \mid R_s \rangle$ . Пусть  $p$  — это путь, лежащий в пересечении некоторого положительно ориентированного граничного пути клетки  $\Pi_1$  и некоторого отрицательно ориентированного граничного пути клетки  $\Pi_2$ . Будем говорить, что путь  $p$  *происходит* из графа, если его поднятие в граф

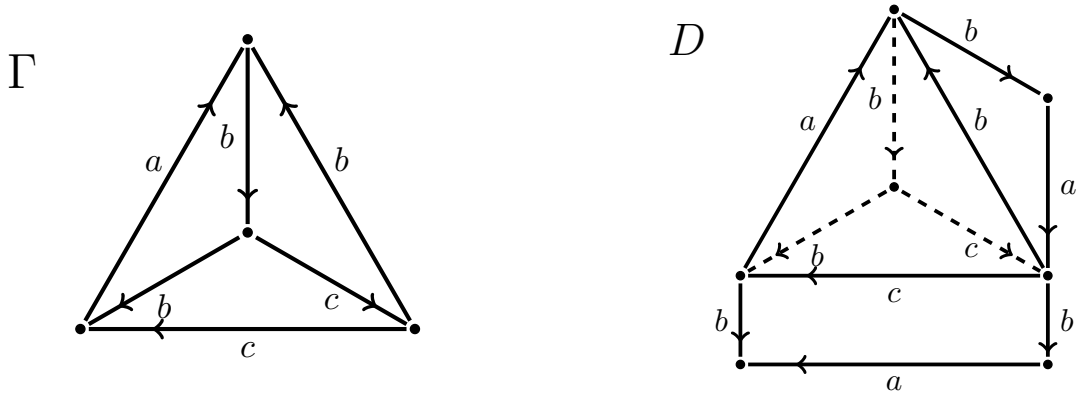


Рисунок 1 — Граф  $\Gamma$  и диаграмма  $D$  над  $\langle a, b, c \mid R_s \rangle$ . Пунктиром отмечены происходящие из графа рёбра диаграммы.

$\Gamma$  как подпути границы клетки  $\Pi_1$  совпадает с его поднятием в граф как подпути границы клетки  $\Pi_2$ . Грубо говоря, путь  $p$  происходит из графа  $\Gamma$ , если клетки  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  пересекаются по этому пути не только в диаграмме  $D$ , но и в самом графе  $\Gamma$ .

Для примера посмотрим на помеченный множеством  $\{a, b, c\}$  граф  $\Gamma$  и простую дисковую диаграмму  $D$  над  $\langle a, b, c \mid R_s \rangle$ , изображённые на рисунке 1. Этот граф определяет группу  $G(\Gamma) \cong \langle a, b, c \mid bbc, c^{-1}bc^{-1}, b^{-1}a^{-1}b^{-1} \rangle$ . Среди слов длины 1 кусками будут слова  $b, b^{-1}, c$  и  $c^{-1}$ . Слова  $a$  и  $a^{-1}$  кусками не являются. Среди несократимых слов длины 2 будет только два куска — слова  $bb$  и  $(bb)^{-1}$ . Граф  $\Gamma$  удовлетворяет графическому условию  $C(2)$ , но не удовлетворяет графическому условию  $C(3)$ , так как простой замкнутый путь с меткой  $bbc$  распадается на куски  $bb$  и  $c$ . В диаграмме  $D$  часть рёбер происходят из графа  $\Gamma$ . Такие рёбра обозначены пунктиром.

В разделе 3.3 формулируется основная теорема и приводится план её доказательства.

Напомним, что *стандартный двумерный клеточный комплекс*  $K(S; R)$  копредставления  $\langle S \mid R \rangle$  — это двумерный клеточный комплекс, имеющий единственную вершину, чьи рёбра находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами множества  $S$  и чьи двумерные грани находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами множества  $R$ , при этом каждая грань вклеена по своей границе согласно соответствующему этой грани элементу  $R$ . Копредставление  $\langle S \mid R \rangle$  называется *асферическим*, если его стандартный двумерный клеточный комплекс  $K(S; R)$  асферичен, то есть  $\pi_q(K(S; R)) = 0$  для всех  $q \geq 2$  (где  $\pi_q$  — это гомотопические группы).

Пусть  $\Gamma$  — это помеченный множеством  $S$  граф. Будем говорить, что диаграмма  $D$  над копредставлением  $\langle S \mid R_s \rangle$  *графически приведена*, если в ней нет происходящих из графа  $\Gamma$  рёбер. Будем говорить, что граф  $\Gamma$  *асферичен*, если он удовлетворяет графическому условию  $C(2)$  и над копредставлением  $\langle S \mid R_s \rangle$  нет графически приведённых простых сферических диаграмм.

Основным результатом главы является следующая теорема.

**Теорема 6.** *Если помеченный множеством  $S$  граф  $\Gamma$  асферичен, то копредставление  $\langle S \mid R_f \rangle$  асферично.*

В разделе 3.4 основная теорема используется, чтобы получить новые условия, влекущие асферичность групп, заданных графами. Также в этом разделе показывается, в каком смысле асферичность графа можно считать обобщением диаграммной приводимости.

В подразделе 3.4.1 формулируются графические аналоги классических условий малых сокращений  $C(4)\&T(4)$  и  $C(3)\&T(6)$ , и доказывается, что эти условия влекут асферичность группы.

Пусть  $\Gamma$  — это помеченный множеством  $S$  граф, удовлетворяющий графическому условию  $C(2)$ . Пусть  $r_1$  и  $r_2$  — это два элемента из множества  $R_s$ . Будем говорить, что  $r_1$  и  $r_2$  *взаимно происходят* из графа, если  $r_1 = r'_1 c$ ,  $r_2 = c^{-1} r'_2$  и поднятие  $c$  в граф  $\Gamma$  через  $r_1$  и через  $r_2$  совпадают.

**Графическое условие  $T(p)$ .** *Пусть  $\Gamma$  — это помеченный множеством  $S$  граф, удовлетворяющий графическому условию  $C(2)$ , и  $p \in \mathbb{N}$ . Мы говорим, что  $\Gamma$  удовлетворяет графическому условию  $T(p)$  (или является  $T(p)$ -графом), если для каждого  $h \in \mathbb{N}$ , такого что  $3 \leq h < p$ , и для каждой  $r_1, \dots, r_h \in R_s$ , таких что последовательные элементы  $r_i$  и  $r_{i+1}$  не являются взаимно происходящими из графа для всех  $i = 1, \dots, h$  (где индексы берутся по модулю  $h$ ), верно, что по крайней мере одно из произведений  $r_1 r_2, \dots, r_{h-1} r_h, r_h r_1$  приведено.*

Это определение сохраняет геометрическую сущность условия  $T(p)$  и означает, что в любой графически приведённой диаграмме степень любой внутренней вершины либо не менее чем  $p$ , либо равна 2.

**Теорема 7.** *Если помеченный множеством  $S$  граф  $\Gamma$  удовлетворяет любому из графических условий  $C(6)$ ,  $C(4)\&T(4)$  или  $C(3)\&T(6)$ , то копредставление  $\langle S \mid R_f \rangle$  асферично.*

В подразделе 3.4.2 показывается, как можно использовать метод движущей Клячко для доказательства асферичности групп, заданных графами.

Пусть  $D$  — это простая дисковая или простая сферическая диаграмма. Пусть на границе некоторой его клетки есть движущаяся точка, называемая автомобилем. Говорят, что автомобиль движется правильно, если он объезжает границу в положительном направлении, непрерывно, без остановок, без разворотов, и если он посещает каждую точку границы бесконечное число раз. Будем называть кратностью точки 1-остова диаграммы  $D$  число равное степени соответствующей вершины, если эта точка лежит в 0-остове, и равное 2 в противном случае.

**Теорема 8.** *Пусть помеченный множеством  $S$  граф  $\Gamma$  удовлетворяет графическому условию  $C(2)$  и пусть для каждого (с точностью до сопряжённости) элемента  $r$  из  $R_s$  задано правильное движение автомобиля по границе клетки с меткой  $r$  так, что полные столкновения в диаграммах над  $\langle S \mid R_s \rangle$  происходят только на рёбрах, происходящих из графа, и в вершинах инцидентных происходящим рёбрам. Тогда копредставление  $\langle S \mid R_f \rangle$  асферично.*

Раздел 3.5 посвящен связи сферических диаграмм и зависимостей между соотношениями копредставления. В разделе 3.6 доказывается теорема 6.

### **Благодарности**

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, доценту Антону Александровичу Клячко за постановку задач, плодотворные обсуждения и постоянное внимание к работе.

Автор признателен коллективу кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ и участникам семинара «Теория групп» МГУ за доброжелательную и творческую атмосферу.



# Глава 1. Коммутаторная длина степеней в свободных произведениях групп

## 1.1 Введение

В данной главе мы получаем новую оценку для минимальной коммутаторной длины  $n$ -й степени элемента, не сопряженного элементам свободных сомножителей, в свободных произведениях групп. Коммутатор двух элементов  $x$  и  $y$  мы понимаем как  $[x, y] := x^{-1}y^{-1}xy$ .

**Определение 1.** Наименьшее число  $k$ , такое что элемент  $g$  группы  $G$  может быть разложен в произведение  $k$  коммутаторов, называется *коммутаторной длиной* элемента  $g$  и обозначается  $cl(g)$ . Если  $g$  не лежит в коммутанте группы  $G$ , то коммутаторная длина полагается равной  $\infty$ . Коммутаторная длина единичного элемента группы полагается равной 0.

**Определение 2.** Пусть  $G = *_{j \in J} A_j$  — это группа с фиксированным разложением на свободные сомножители. Обозначим через  $\hat{G}$  множество всех элементов группы  $G$ , не сопряженных элементам свободных сомножителей, и определим  $k(G, n)$  как наименьшее число  $k$ , такое что элемент  $g^n \in \hat{G}$  может быть разложен в произведение  $k$  коммутаторов.

**Определение 3.** Обозначим минимальный порядок неединичного элемента группы  $G$  через  $N(G)$ . Если в группе  $G$  нет кручения, то полагаем  $N(G) = \infty$ .

В этой главе мы докажем, что

$$k(G, n) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{N(G)} \right\rfloor + 1, \quad (1.1)$$

где  $\lfloor x \rfloor$  — это целая часть  $x$ . В главе 2 будет доказано, что эта оценка не улучшаема. А здесь мы только покажем, что полученная оценка является почти точной: теорема 1 (см. раздел 1.2) утверждает, в частности, что

для любого свободного произведения групп  $G = *_{j \in J} A_j$  величина  $k(G, n)$  — это одно из двух чисел:

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{N(G)} \right\rfloor + 1 \quad \text{или} \quad \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{N(G)} \right\rfloor + 2.$$

Приравняв  $k(G, n)$  к единице, мы получим известный факт [13]:

*коммутатор, не сопряжённый элементам свободных сомножителей группы  $G$ , может быть истинной степенью, только если  $N(G) = 2$  или  $N(G) = 3$ , причём в последнем случае этот коммутатор может быть только кубом.*

Для бóльших  $k(G, n)$  наш результат является новым.

На самом деле, мы получаем оценку для коммутаторной длины не только для степеней элементов, но и для элементов более общего вида.

**Теорема 2** (упрощенная форма). *Пусть в свободном произведении групп  $G = *_{j \in J} A_j$  имеет место равенство*

$$c_1 \dots c_k d_1 \dots d_l = u_1^{n_1} \dots u_m^{n_m},$$

*где  $c_i$  — коммутаторы,  $d_i$  сопряжены элементам из  $\bigcup_{j \in J} A_j$ , элементы  $u_i$  сопряжены между собой и не сопряжены элементам из  $\bigcup_{j \in J} A_j$ , и  $n_i$  — это натуральные числа. Тогда*

$$2k + l \geq \sum_{i=1}^m (n_i - 1) - 2 \left\lfloor \frac{1}{N(G)} \sum_{i=1}^m n_i \right\rfloor + 2.$$

Этот результат значительно усиливает ранее известные факты на эту тему. В условиях теоремы 2:

$$2k + l \geq \begin{cases} \sum_{i=1}^m (n_i - 1) - \left\lfloor \frac{2}{N(G)} \sum_{i=1}^m n_i \right\rfloor + 2, & \text{если } l = 0 \text{ [5];} \\ \sum_{i=1}^m (n_i - 1) + 2, & \text{если } N(G) > \sum_{i=1}^m n_i \text{ [28].} \end{cases}$$

Из теоремы 2 немедленно вытекает оценка (1.1).

**Следствие 1.** *Пусть в свободном произведении групп  $G = *_{j \in J} A_j$  имеет место равенство  $c_1 \dots c_k = u^n$ , где  $c_i$  — коммутаторы, и не сопряжён элементам свободных сомножителей, и  $n$  — натуральное число. Тогда*

$$2k \geq n - 2 \left\lfloor \frac{n}{N(G)} \right\rfloor + 1$$

*или, что то же самое,*

$$k \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{N(G)} \right\rfloor + 1.$$

Приведённая выше формулировка теоремы 2 несколько упрощённая. В действительности мы доказываем более сильное неравенство при более слабых предположениях. Полную формулировку этой теоремы и её доказательство можно найти в разделе 1.6. В разделе 1.2 мы выводим из теоремы 2 теорему 1 о «почти точности» оценки (1.1). Разделы 1.3 и 1.4 содержат необходимые сведения о диаграммах Хауи и о движениях на поверхностях, то есть о лемме о столкновениях. Различные вариации этой леммы из [29] уже применялась в [20] и [28] к задачам, связанным с коммутаторной длиной (а в [29], [8], [17], [41], [42], [40], [43], [7], [9], [10], [18], [19], [31], [33] и [32] к разным другим задачам). Нам понадобится новый вариант леммы о столкновениях, о котором речь пойдёт в разделе 1.5. Интересно отметить, что существенную роль в этом разделе играет *задача о справедливом делении* [34].

## 1.2 Почти точность оценки

Напомним, что Каллером было показано, что элемент  $[a, b]^n$  всегда может быть разложен в произведение  $\lfloor n/2 \rfloor + 1$  коммутаторов. Этот результат можно сформулировать следующим образом.

**Неравенство Каллера** [14]. *Для любых элементов  $a$  и  $b$  любой группы и любого неотрицательного целого  $n$*

$$\text{cl}([a, b]^n) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor_c + 1, \quad \text{где } [x]_c := \begin{cases} [x], & \text{если } x \neq 0; \\ -1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Докажем две вспомогательные леммы, которые нам пригодятся для доказательства теоремы 1.

**Лемма 1.** *Если  $a$  и  $b$  — элементы какой-то группы и  $m \in \mathbb{N}$ , то элемент  $(ab)^m$  сопряжён элементу вида  $a^m b^m c_1 c_2 \dots c_{\lfloor m/2 \rfloor}$ , где  $c_i \in G$  — коммутаторы.*

*Доказательство.* Заметим, что

$$\begin{aligned} a^l (ba)^s b^l \cdot [a^{l-2} b^{l-1}, b^{2-l} a^{1-l}] &= a^l (ba)^s b^l \cdot b^{1-l} a^{2-l} a^{l-1} b^{l-2} a^{l-2} b^{l-1} b^{2-l} a^{1-l} = \\ &= a^l (ba)^s b a b^{l-2} a^{l-2} b a^{1-l} \sim a^{l-2} b a (ba)^s b a b^{l-2} = a^{l-2} (ba)^{s+2} b^{l-2}, \end{aligned}$$

где символ  $\sim$  означает сопряжённость. Очевидная индукция показывает, что для некоторых коммутаторов  $c_i$  элемент  $a^m b^m c_1 c_2 \dots c_{\lfloor m/2 \rfloor}$  сопряжён элементу  $(ba)^m$ , если число  $m$  чётно, или элементу  $a(ba)^{m-1}b$ , если число  $m$  нечётно. Осталось заметить, что  $(ba)^m \sim (ab)^m$  и  $a(ba)^{m-1}b = (ab)^m$ .  $\square$

Для двух элементов  $h$  и  $g$  произвольной группы положим  $h^g := g^{-1}hg$ .

**Лемма 2.** *Если  $a$  и  $b$  — элементы некоторой группы,  $m$  и  $s$  — натуральные числа, и  $a^m = b^m = 1$ , то  $\text{cl}((ab)^{ms}) \leq s(\lfloor m/2 \rfloor - 1) + \lfloor s/2 \rfloor_c + 1$ .*

*Доказательство.* Заметим, что для любого неединичного элемента  $g$  коммутанта любой группы и для любого  $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\text{cl}(g^s) \leq s(\text{cl}(g) - 1) + \lfloor s/2 \rfloor_c + 1.$$

Действительно, представим элемент  $g$  в виде  $g = ch$ , где  $c$  — коммутатор, а  $\text{cl}(h) = \text{cl}(g) - 1$ , получим

$$\begin{aligned} \text{cl}(g^s) &= \text{cl}((ch)^s) = \text{cl}(c^s h^{c^{s-1}} h^{c^{s-2}} \dots h^c h) \leq \\ &\leq \text{cl}(c^s) + s \cdot \text{cl}(h) \leq \lfloor s/2 \rfloor_c + 1 + s(\text{cl}(g) - 1), \end{aligned}$$

где в конце мы воспользовались неравенством Каллера. Это завершает доказательство, поскольку  $\text{cl}((ab)^m) \leq \lfloor m/2 \rfloor$  в силу леммы 1.  $\square$

**Теорема 1.** *Пусть  $G = \ast_{j \in J} A_j$  — это свободное произведение нетривиальных групп и  $n$  — это натуральное число. Тогда*

$$k(G, n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{N(G)} \right\rfloor + 1 \quad \text{или} \quad k(G, n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{N(G)} \right\rfloor + 2.$$

При этом  $k(G, n) = \lfloor n/2 \rfloor - \lfloor n/N(G) \rfloor + 1$ , если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1.  $n$  чётно, а  $\lfloor n/N(G) \rfloor$  нечётно.
2.  $n$  делится на  $N(G)$ .
3.  $n \leq N(G)$ .
4.  $N(G) = 2$ .

*Доказательство.* Ясно, что число  $N(G)$  либо простое, либо бесконечное. Для  $N(G) = 2$  утверждение выполнено, потому что группа  $G$  в этом случае содержит бесконечную диэдральную подгруппу, всякий элемент коммутанта которой

является коммутатором (и не сопряжён элементам свободных сомножителей). Для  $N(G) = \infty$  утверждение теоремы немедленно вытекает из результатов работ [5] и [28]. Таким образом, считаем, что число  $N(G)$  нечётное.

Если  $z^m = 1$ , то мы имеем два неравенства:

$$\text{cl}([x, y]^m) \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor_c + 1 \quad \text{и} \quad \text{cl}([z, u]^{ms}) \leq s \left( \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - 1 \right) + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor_c + 1 \quad (1.2)$$

Первое неравенство — это оценка Каллера, а второе — лемма 2.

Рассмотрим в группе  $G$  коммутатор  $[z, u]$ , где  $z^{N(G)} = 1$ , а  $u$  не лежит в том же свободном сомножителе, что  $z$ . Разделим  $n$  на  $N = N(G)$  с остатком:  $n = rN + t$ , где  $0 \leq t < N$  (а  $r = \lfloor n / N \rfloor$ ). Обозначим символами  $\Delta_0(a, b, \dots)$  и  $\Delta_{\text{odd}}(a, b, \dots)$  число нулей и число нечётных чисел в наборе  $(a, b, \dots)$ . Тогда для нечётного  $N$  мы получим

$$\begin{aligned} k(G, n) &\leq \text{cl}([z, u]^n) = \text{cl}([z, u]^{rN+t}) \leq \text{cl}([z, u]^{rN}) + \text{cl}([z, u]^t) \stackrel{(1.2)}{\leq} \\ &\stackrel{(1.2)}{\leq} \left( r \left( \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor - 1 \right) + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor_c + 1 \right) + \left( \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor_c + 1 \right) = \\ &= \left( r \left( \frac{N-1}{2} - 1 \right) + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor_c + 1 \right) + \left( \left\lfloor \frac{n-rN}{2} \right\rfloor_c + 1 \right) = \\ &= r \left( \frac{N-1}{2} - 1 \right) + \frac{r}{2} + 1 + \frac{n-rN}{2} + 1 - \\ &\quad - \Delta_0(r, n-rN) - \frac{1}{2} \Delta_{\text{odd}}(r, n-rN) = \\ &= \frac{n}{2} - r + 2 - \Delta_0(r, n-rN) - \frac{1}{2} \Delta_{\text{odd}}(r, n-rN) = \\ &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - r + 2 - \Delta_0(r, n-rN) - \frac{1}{2} (\Delta_{\text{odd}}(r, n-rN) - \Delta_{\text{odd}}(n)) = \\ &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - r + 2 - \Delta_0(r, n-rN) - \Delta_{\text{odd}}(r) (1 - \Delta_{\text{odd}}(n)) = \\ &= \begin{cases} \lfloor n/2 \rfloor - r + 1, & \text{если выполнено а), б) или в);} \\ \lfloor n/2 \rfloor - r + 2 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned}$$

Сопоставляя это со следствием 1, мы приходим к выводу, что теорема 1 доказана (по модулю теоремы 2).  $\square$

### 1.3 Диаграммы Хауи

Диаграммы, похожие на те, что мы сейчас определим, были введены Хауи в [24] и рассматривались в [29], [33], [28], и многих других работах. За небольшими исключениями, наши определения соответствуют определениям из [28]. А именно, пусть имеется замкнутая ориентированная поверхность  $S$  (возможно, несвязная) и неориентированный конечный граф  $\Gamma$ , который вложен в поверхность  $S$  и разбивает её на односвязные области. Такой граф задаёт клеточное разбиение поверхности  $S$ , то есть отображение  $M$ , называемое *картой* на  $S$ :

$$M : \bigsqcup_{i=1}^m D_i \rightarrow S,$$

где  $D_i$  — это двумерные диски. Отображение  $M$  должно удовлетворять следующим условиям: оно непрерывно, сюръективно, инъективно на внутренности (то есть на  $\bigsqcup_{i=1}^m (D_i \setminus \partial D_i)$ ), прообраз каждой точки конечен, а прообраз графа  $\Gamma$  есть объединение границ граней (то есть  $M^{-1}(\Gamma) = \bigsqcup_{i=1}^m \partial D_i$ ). Прообразы вершин графа  $\Gamma$  называют *углами* карты и говорят, что угол  $c$  находится *при* вершине  $v$ , если  $M(c) = v$ . Вершины и рёбра графа  $\Gamma$  называют *вершинами* и *рёбрами* карты  $M$ . Диски  $D_i$  называют *гранями* или *клетками* карты.

Такую карту мы называем *диаграммой* над свободным произведением  $A * B$ , если

- граф  $\Gamma$  двудольный, то есть вершины разделены на два класса:  $A$ -вершины и  $B$ -вершины, и каждое ребро соединяет  $A$ -вершину с  $B$ -вершиной;
- углы при  $A$ -вершинах помечены элементами группы  $A$ , а углы при  $B$ -вершинах помечены элементами группы  $B$ ;
- некоторые вершины выделены и называются *внешними*, остальные вершины называются *внутренними*;
- метка каждой внутренней  $A$ -вершины равна единице в группе  $A$ , а метка каждой внутренней  $B$ -вершины равна единице в группе  $B$ , где под *меткой вершины* понимается произведение меток углов при этой вершине, перечисленных по часовой стрелке (таким образом, метка вершины определена с точностью до сопряжённости в группах  $A$  и  $B$ ).

*Замечание 1.* Отметим, что единственная вершина на сфере не является корректной диаграммой, так как мы требуем, чтобы каждая точка сферы имела конечный прообраз, а прообраз этой единственной вершины равен  $\partial D_1$ .

*Метка клетки* диаграммы — это произведение меток всех углов этой клетки, взятых против часовой стрелки. Это элемент свободного произведения  $A * B$ , определенный с точностью до сопряжённости.

Посмотрим на диаграмму над свободным произведением  $\langle a \rangle_3 * \langle b \rangle_3$ , показанную на рисунке 1.1. Она расположена на торе, представленном в виде прямоугольника с отождествленными противоположными сторонами. Эта диаграмма имеет две внутренних вершины, три ребра и одну клетку, чья метка равняется  $(ab)^3$ . Это геометрическая интерпретация того факта, что элемент  $(ab)^3$  является коммутатором в свободном произведении  $\langle a \rangle_3 * \langle b \rangle_3$ .

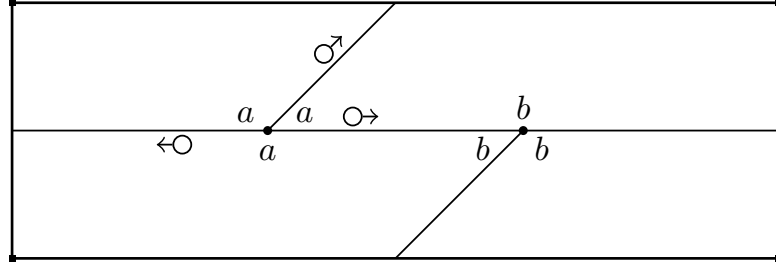


Рисунок 1.1 — Пример диаграммы на торе

*Родом* ориентированной замкнутой (необязательно связной) поверхности  $S$  будем называть число

$$k := \frac{1}{2}(2 - \chi(S)).$$

Сформулируем лемму, которая позволяет переводить интересующие нас алгебраические равенства на геометрический язык.

**Лемма 3.** Пусть  $u_1, \dots, u_m$  — это циклически приведённые элементы свободного произведения  $A * B$ , не сопряжённые элементам свободных сомножителей, и пусть для некоторых элементов  $g_1, \dots, g_m, v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_k, d_1, \dots, d_l \in A * B$ , где элементы  $d_i$  сопряжены элементам свободных сомножителей, выполняется равенство

$$[v_1, w_1] \dots [v_k, w_k] d_1 \dots d_l = u_1^{g_1} \dots u_m^{g_m}.$$

Тогда существует диаграмма  $D$  над  $A * B$  на замкнутой ориентированной (необязательно связной) поверхности рода  $k'$ , такая что  $D$  имеет ровно  $l'$  внешних вершин, ровно  $m$  клеток, и метки этих клеток равняются

$u_1, \dots, u_m$ . При этом верно, что

$$k' \leq k \quad \text{и} \quad 2k' + l' \leq 2k + l.$$

Например, для равенства  $(ab)^3 = [ba^2, a^2b]$  в группе  $\langle a \rangle_3 * \langle b \rangle_3$  соответствующая диаграмма  $D$  на торе изображена на рисунке 1.1. Она не имеет внешних вершин и имеет одну клетку, метка которой равна  $(ab)^3$ .

Эта лемма является переформулировкой в нужных нам терминах леммы 1 из работы [28]. Единственное отличие заключается в том, что мы дополнительно замечаем выполнение неравенства  $k' \leq k$ , которое очевидно следует из её доказательства.

Отметим, что лемма 3 утверждает существование диаграмм специального вида при наличии определенных алгебраических равенств. В главе 2 будет сформулирована лемма 5, которая является частичным обращением леммы 3 и утверждает существование определенных алгебраических равенств при наличии диаграмм специального вида.

#### 1.4 Лемма о столкновениях

Этот раздел по сути повторяет соответствующий раздел из работы [20] и состоит из несколько упрощённых определений и утверждений из работы [41].

Пусть на замкнутой ориентированной поверхности  $S$  имеется карта  $M$ , соответствующая графу  $\Gamma \subset S$ . Автомобилем, объезжающим грань  $D$  этой карты, называют сохраняющий ориентацию гомеоморфизм из ориентированной окружности  $R$  (окружности времени) в границу  $\partial D$  грани  $D$ .

Если число автомобилей, оказавшихся в момент времени  $t$  в точке  $p \in \Gamma$ , равно степени  $d$  этой точки, то мы говорим, что в точке  $p$  в момент  $t$  происходит *полное столкновение* (степени  $d$ ), а точку  $p$  называем *точкой полного столкновения* (степени  $d$ ). Здесь *степенью* точки  $p \in \Gamma$  мы называем число рёбер, инцидентных вершине  $p$ , если  $p$  является вершиной. Если же  $p$  является внутренней точкой ребра, то мы считаем, что её степень равна 2.

Отметим, что согласно этому определению вершина степени один (то есть тупик), в которую заезжает хоть один автомобиль, всегда является точкой полного столкновения.



*Кратным движением* периода  $T$  на карте  $M$  называется набор автомобилей  $\alpha_{D,j}: R \rightarrow \partial D$ , где  $j = 1, \dots, d_D$ , такой что

1. Имеем  $d_D \geq 1$  для любой грани  $D$  (то есть каждую грань объезжает по крайней мере один автомобиль).
2. Имеем  $\alpha_{D,j}(t + T) = \alpha_{D,j+1}(t)$  для любого  $t \in R$  и  $j \in \{1, \dots, d_D\}$  (здесь индексы берутся по модулю  $d_D$ , а сложение точек окружности  $R$  производится естественным образом:  $R = \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ ).
3. Существует такое разбиение каждой из окружностей  $\partial D$  на  $d_D$  дуг, с непересекающимися внутренностями, что на протяжении интервала времени  $[0, T]$  каждый автомобиль  $\alpha_{D,j}$  движется по  $j$ -й дуге.

Говоря по-простому, границу  $\partial D$  каждой грани  $D$  объезжает  $d_D$  автомобилей против часовой стрелки (внутренность грани остаётся слева от автомобиля), не разворачиваясь и не останавливаясь. При этом движение периодически в том смысле, что граница грани разбита на  $d_D$  участков, и за период каждый автомобиль проезжает ровно свой участок (и, таким образом, по прошествии периода автомобили меняются местами).

**Лемма о столкновениях** (для кратных движений [30; 41]). *Для любого кратного движения на карте на замкнутой ориентированной поверхности  $S$  число точек полного столкновения не меньше чем*

$$\chi(S) + \sum_D (d_D - 1),$$

где сумма распространяется на все грани карты.

В упомянутых работах эта лемма была сформулирована и доказана для связных поверхностей, но она остаётся верной и в несвязном случае, поскольку обе части неравенства аддитивны относительно несвязного объединения.

Рассмотрим, например, такое движение на одноклеточной карте на торе, изображённой на рисунке 1.1: три автомобиля объезжают единственную имеющуюся грань с постоянной скоростью одно ребро в минуту, а в нулевой момент времени находятся в трёх разных углах с меткой  $a$ . На рисунке 1.1 изображено положение автомобилей в момент времени  $t = 1/3$ . Это периодическое движение с периодом две минуты. Полные столкновения происходят в обеих вершинах карты, а вне вершин (то есть во внутренних точках рёбер) столкновений нет. Легко видеть, что лемма о столкновениях действительно выполняется для этого движения, так как эйлерова характеристика тора равна 0, и у нас есть всего 3 автомобиля, объезжающих 1 грань.

## 1.5 Лемма о кластерах

Идея кластеров состоит в том, что столкновения, происходящие близко друг от друга, можно считать одним столкновением. В таком случае модифицированная лемма о столкновениях говорит, что велико не только число точек полного столкновения, а также и число точек полного столкновения, находящихся далеко друг от друга.

Пусть имеется кратное движение с периодом  $T$  на некоторой карте на поверхности, причём все автомобили движутся с одинаковой постоянной скоростью одно ребро в минуту. Набор  $K$  точек полного столкновения назовём *кластером* с центром  $v \in K$ , если каждую точку  $w \in K$  посещает хотя бы один из автомобилей, сталкивающихся в точке  $v$ , в течении менее, чем  $T/2$  минут после столкновения в точке  $v$ . Автомобили, сталкивающиеся в центре  $v$  кластера  $K$ , мы называем *связывающими автомобилями* кластера  $K$ , а пути (длины  $< T/2$ ), по которым эти автомобили едут из центра кластера в другие его точки, мы называем *связывающими путями* кластера  $K$ . Мы называем набор кластеров *независимым*, если центр никакого из этих кластеров не лежит на связывающих путях других кластеров этого набора.

В формулировке леммы о кластерах (смотрите ниже) используется *функция справедливого деления*  $\mathbf{fp}(\mathcal{M})$  мультимножества  $\mathcal{M}$ , состоящего из натуральных чисел:

$$\mathbf{fp}(\mathcal{M}) := \min \left\{ \max \left( \sum_{i \in \mathcal{A}} i, \sum_{i \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{A}} i \right) \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M} \right\}.$$

Задачу нахождения такого справедливого деления называют иногда самой лёгкой из NP-трудных задач [34]. Нам понадобится простейший пример такого вычисления:

$$\begin{aligned}
& \text{fp} \left( \overbrace{1, 1, 1, \dots, 1}^{\varkappa \text{ штук}}, N, \dots, N \right) = \\
& \quad \underbrace{\min(l, \varkappa) \text{ штук}} \\
& = \begin{cases} \lfloor \frac{\varkappa+1}{2} \rfloor, & \text{если } \varkappa \leq l; \\ \lfloor \frac{l+1}{2} \rfloor + N \cdot \frac{\varkappa-l}{2}, & \text{если } \varkappa > l \text{ и } \varkappa - l \text{ чётно}; \\ \lfloor \frac{l+1-\min(l, N)}{2} \rfloor + N \cdot \frac{\varkappa-l+1}{2}, & \text{если } \varkappa > l \text{ и } \varkappa - l \text{ нечётно.} \end{cases} \quad (1.3)
\end{aligned}$$

Это верно для всех  $\varkappa, N \in \mathbb{N}$  и  $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Чтобы доказать, что эта формула верна, достаточно понять, что при делении такого мультимножества  $\mathcal{M}$  на две части:  $\mathcal{M} = \mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$ , самым справедливым будет разбиение, полученное следующим образом:

- поделим элементы равные  $N$  поровну (насколько это возможно), то есть  $\lfloor (\varkappa - l)/2 \rfloor$  этих элементов включим в  $\mathcal{A}$  (при  $\varkappa > l$ );
- скомпенсируем разницу между  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ , которая возникает при нечётном  $\varkappa - l$ , при помощи элементов равных 1;
- если разница скомпенсирована, а единички ещё остались, то поделим их поровну (насколько это возможно).

Примеры справедливых делений показаны на рисунке 1.2.

Мы называем кратное движение *равномерным*, если все автомобили движутся с одинаковой постоянной скоростью одно ребро в минуту и в начальный момент находятся в некоторых вершинах.

**Лемма 4.** Пусть имеется кратное равномерное движение на некоторой карте на некоторой ориентированной замкнутой поверхности  $S$ , и множество точек полного столкновения  $\Pi$  этого движения разбито на минимальное возможное число  $\varkappa$  независимых кластеров:  $\Pi = \bigsqcup_{i=1}^{\varkappa} K_i$ . Тогда

- а) Число кластеров удовлетворяет неравенству

$$\varkappa \geq \chi(S) + \sum_D (d_D - 1),$$

где сумма распространяется на все грани карты.

- б) Если всего имеется  $n$  точек полного столкновения, и их степени суть  $N_1 \leq \dots \leq N_n$ , то число автомобилей этого движения (то

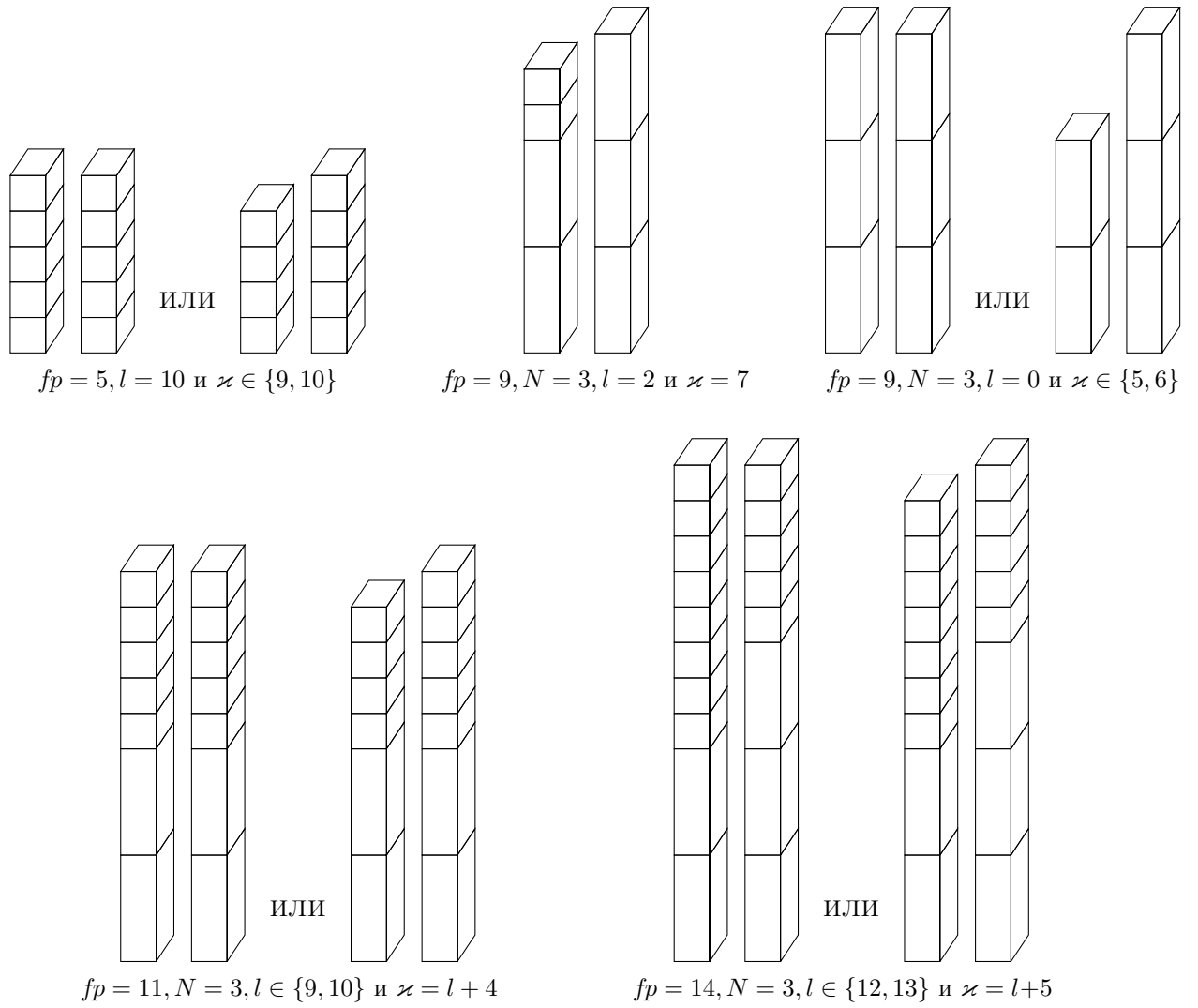


Рисунок 1.2 — Примеры справедливых делений

есть  $\sum_D d_D$ , где сумма распространяются на все грани карты) удовлетворяет неравенству

$$\sum_D d_D \geq \max(\mathbf{fp}(N_1, \dots, N_\varkappa), N_n).$$

В частности, если все точки полного столкновения имеют степень не меньше  $N$ , то

$$\sum_D d_D \geq \left\lfloor \frac{\varkappa + 1}{2} \right\rfloor \cdot N.$$

*Доказательство.* Будем считать, что все столкновения происходят в вершинах. Этого можно добиться дополнительным разделением всех рёбер на две половины с помощью новых вершин степени два. При этом мы замедлим все автомобили вдвое, чтобы скорость всех автомобилей по-прежнему равнялась одному ребру в минуту. Обозначим период такого нового движения через  $T$ .

Докажем первое утверждение. Для каждого кластера  $K = K_i$  с центром  $v = v_i$  рассмотрим минимальное множество связывающих путей  $\pi_j = \pi_{ij}$ , объединение которых содержит все точки кластера  $K$ . Минимальность означает, что для каждого связывающего автомобиля имеется не более одного пути  $\pi_j$ , лежащего на границе клетки  $D_j = D_{ij}$ , которую объезжает этот автомобиль. По определению кластера длина  $\tau_j$  пути  $\pi_j$  меньше  $T/2$ .

Соединим начало и конец пути  $\pi_j$  внутри клетки  $D_j$  путём  $\pi'_j$  такой же длины (то есть добавим дублёр пути  $\pi_j$ ). Когда мы проделаем эту операцию для всех рассматриваемых кластеров, внутри некоторых клеток может возникнуть несколько хорд, но эти хорды не будут пересекаться, поскольку рассматриваемые кластеры независимы.

- Клетка  $D_j$  превратится в две клетки (смотрите рисунок 1.3, слева):
- большая клетка  $D'_j$  такого же периметра, как исходная клетка  $D_j$
  - и маленькая клетка  $\Gamma_j$  периметра  $2\tau_j$ .

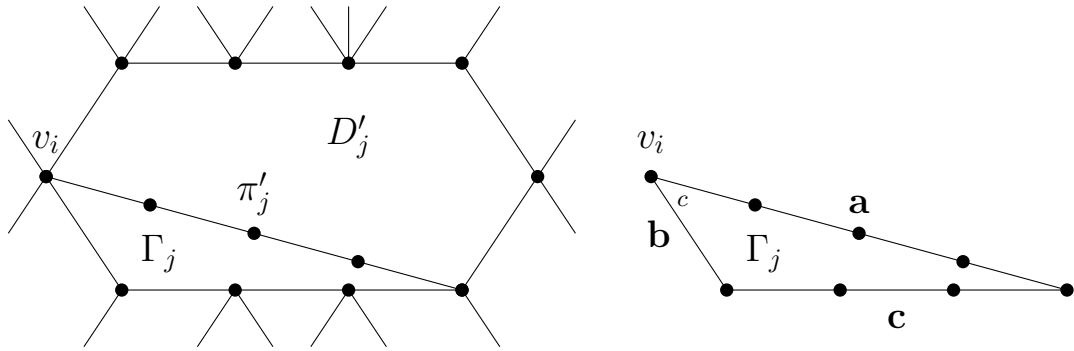


Рисунок 1.3 — Иллюстрация к лемме о кластерах

Движение автомобилей, объезжающих большие клетки  $D'_j$ , мы определим так же, как движение автомобилей, объезжающих исходные клетки  $D_j$ , но ехать соответствующие автомобили будут по дублёрам  $\pi'_j$ , а не по исходным путям  $\pi_j$ .

Движение автомобилей, объезжающих маленькие клетки  $\Gamma_j$ , мы определим чуть позже. А пока опишем, как устроено движение уже имеющихся автомобилей на границах этих клеток. Граница каждой маленькой клетки  $\Gamma = \Gamma_j$  имеет длину  $2\tau_j$  и состоит из трёх участков (перечисляемых против часовой стрелки, смотрите рисунок 1.3, справа):

- Участок  $\mathbf{a} = \pi_j^{-1}$  длины  $\tau = \tau_j$ . По этому участку движется связывающий автомобиль в течении времени  $0 \leq t \leq \tau$  (для упрощения обозначений мы считаем, что полное столкновение в точке  $v_i$  происходит

- в нулевой момент времени; в других случаях следует внести очевидные изменения). Участок **a** заканчивается в угле  $c$  при центре  $v_i$  кластера  $K_i$ .
- Участок **b** длины один (первое ребро пути  $\pi_j$ ), начинающийся в угле  $c$ . По этому участку движется другой связывающий автомобиль кластера  $K_i$  в течении времени  $-1 \leq t \leq 0$ .
  - Участок **c** длины  $|\mathbf{c}| = \tau - 1$ , по которому едут какие-то автомобили, про которые мы ничего не знаем. Но раз  $\tau < T/2$ , то имеем  $|\mathbf{c}| = \tau - 1 < T - \tau - 1$ . А это значит, что на участке **c** (включая его концы) нет ни одного автомобиля в некоторый момент времени  $\tau < t < T - 1$  и даже в некоторый подпромежуток  $\Delta_\Gamma$  (положительной продолжительности) промежутка времени  $\tau < t < T - 1$ . Это верно, потому что промежуток времени  $\tau < t < T - 1$  имеет продолжительность  $T - 1 - \tau > |\mathbf{c}|$ , а все автомобили едут с единичной скоростью. Отметим ещё, что ничто нам не мешает выбрать промежутки времени  $\Delta_\Gamma$  непересекающимися для разных маленьких клеток  $\Gamma$ :

$$\Delta_\Gamma \cap \Delta_{\Gamma'} = \emptyset \quad \text{при } \Gamma \neq \Gamma'.$$

Определим теперь движение нового автомобиля  $\alpha_\Gamma$ , объезжающего границу маленькой клетки  $\Gamma = \Gamma_j$ :

- В нулевой момент времени автомобиль  $\alpha_\Gamma$  находится в угле  $c$  (и участвует в полном столкновении в точке  $v_i$ ).
- Далее автомобиль  $\alpha_\Gamma$  медленно движется по участку **b**. При этом он ни с кем не сталкивается, поскольку тот единственный связывающий автомобиль, с которым можно столкнуться на участке **b**, только что с него выехал, встретившись с автомобилем  $\alpha_\Gamma$  в точке  $v_i$ . Поэтому на этом участке находится безопасно до момента  $T - 1$ .
- В промежуток времени  $\Delta_\Gamma$  (который начинается раньше, чем  $T - 1$ , по определению  $\Delta_\Gamma$ ) автомобиль  $\alpha_\Gamma$  быстро проезжает участок **c**, опять ни с кем не сталкиваясь, поскольку на этом участке никого нет в этот промежуток времени. Это следует из определения промежутка  $\Delta_\Gamma$  и того, что  $\Delta_\Gamma \cap \Delta_{\Gamma'} = \emptyset$  при  $\Gamma \neq \Gamma'$ .
- Таким образом автомобиль  $\alpha_\Gamma$  оказывается на участке **a** позже, чем в момент  $\tau$  (по определению промежутка  $\Delta_\Gamma$ ). Значит, связывающий автомобиль, с которым можно было бы столкнуться на этом участке, уже с него уехал, и автомобиль  $\alpha_\Gamma$  благополучно без столкновений добирается до угла  $c$  к концу периода.

Мы построили периодическое движение на некоторой карте на поверхности  $S$ , причём полных столкновений теперь ровно  $\varkappa$ . При этом сумма  $\sum_D(d_D - 1)$  по всем граням осталась такой же, как и на исходной карте, потому что каждую маленькую грань  $\Gamma_j$  объезжает один автомобиль, то есть  $d_{\Gamma_j} = 1$ . Для завершения доказательства пункта а) остаётся сослаться на лемму о столкновениях.

Чтобы доказать утверждение б), разделим период времени  $I = \{t \mid 0 \leq t < T\}$  на два полупериода:  $I = I_1 \sqcup I_2$ , где  $I_1 = \{t \mid 0 \leq t < T/2\}$  и  $I_2 = \{t \mid T/2 \leq t < T\}$ .

Периодичность движения означает, что в каждой точке происходит не более одного полного столкновения в течении периода  $I$ . Поэтому, множество точек полного столкновения  $\Pi = \{p_1, \dots, p_n\}$  разделится на два подмножества:  $\Pi = \Pi_1 \sqcup \Pi_2$ , а мультимножество  $\mathcal{N} = (N_1, \dots, N_n)$  степеней этих точек — на два подмультимножества:  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \sqcup \mathcal{N}_2$ , где  $\mathcal{N}_i$  — это степени точек полных столкновений, происходящих в моменты времени из  $I_i$ .

Пусть множество  $\Pi_i$  можно разбить на  $\varkappa_i$  независимых кластеров, и нельзя разбить на меньшее число независимых кластеров. Тогда  $\varkappa_1 + \varkappa_2 \geq \varkappa$ . Это верно, поскольку множество  $\Pi$  разбивается на  $\varkappa_1 + \varkappa_2$  независимых кластеров, а по условию его нельзя разбить меньше, чем на  $\varkappa$  независимых кластеров.

Множество точек полного столкновения мы называем *независимым*, если множества сталкивающихся в этих точках автомобилей в течении периода  $I$  попарно не пересекаются.

Сосредоточимся теперь на множестве  $\Pi_1$ . Пусть

- $v_1 \in \Pi_1$  — это точка, в которой происходит первое по времени столкновение (если такая точка  $v_1$  существует).
- $v_2 \in \Pi_1$  — это точка, в которой происходит первое по времени столкновение такое, что  $\{v_1, v_2\}$  независимы (если такая точка  $v_2$  существует);
- $v_3 \in \Pi_1$  — это точка, в которой происходит первое по времени столкновение такое, что  $\{v_1, v_2, v_3\}$  независимы (если такая точка  $v_3$  существует);
- ...

Точек  $v_i$  наберётся не меньше, чем  $\varkappa_1$ , поскольку иначе множество  $\Pi_1$  разбивалось бы на меньшее, чем  $\varkappa_1$ , число независимых кластеров. Например, если  $v_1$  и  $v_2$  нашлись, а  $v_3$  не существует, то каждая точка из  $\Pi_1$  окажется либо в кластере с центром  $v_1$ , либо в кластере с центром  $v_2$ .

Таким образом, множество  $\Pi_1$  содержит независимые точки  $v_1, \dots, v_{\varkappa_1}$ . По аналогичным причинам множество  $\Pi_2$  содержит независимые точки  $w_1, \dots, w_{\varkappa_2}$ . Значит, число всех имеющихся автомобилей не меньше, чем

$$\begin{aligned} \max \left( \sum \deg v_i, \sum \deg w_i \right) &\geq \\ &\geq \mathbf{fp}(\deg v_1, \dots, \deg v_{\varkappa_1}, \deg w_1, \dots, \deg w_{\varkappa_2}) \geq \mathbf{fp}(N_1, \dots, N_{\varkappa}), \end{aligned}$$

где последнее неравенство немедленно вытекает из того, что  $\varkappa_1 + \varkappa_2 \geq \varkappa$  и  $N_1 \leq \dots \leq N_n$ .

Это и есть доказываемая оценка, поскольку неравенство  $\sum_D d_D \geq N_n$  очевидно: раз в какой-то точке сталкиваются  $N_n$  автомобилей, значит  $N_n$  автомобилей существуют.  $\square$

Из леммы о кластерах вытекает следующее утверждение (в котором кластеры не упоминаются вовсе).

**Следствие 2.** Пусть кратное равномерное движение на некоторой карте на некоторой ориентированной замкнутой поверхности  $S$  имеет всего  $n$  точек полного столкновения, и их степени суть  $N_1 \leq \dots \leq N_n$ . Тогда число автомобилей этого движения (то есть  $\sum_D d_D$ , где сумма распространяется на все грани карты) удовлетворяет неравенству

$$\sum_D d_D \geq \max(\mathbf{fp}(N_1, \dots, N_{\varkappa}), N_n), \quad (1.4)$$

где  $\varkappa = \chi(S) + \sum_D (d_D - 1)$  (эта величина никогда не превосходит  $n$ ).

Кроме того, для всех  $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  выполняется неравенство

$$\begin{aligned} &\chi(S) - l + \sum_D (d_D - 1) \leq \\ &\leq \begin{cases} 2 \left\lfloor \frac{1}{N_{l+1}} \left( \sum_D d_D - \left\lfloor \frac{l+1}{2} \right\rfloor \right) \right\rfloor, & \text{если } \sum_D (d_D - 1) - l \text{ чётно} \\ 2 \left\lfloor \frac{1}{N_{l+1}} \left( \sum_D d_D - \left\lfloor \frac{l+1-N_{l+1}}{2} \right\rfloor_+ \right) \right\rfloor - 1, & \text{если } \sum_D (d_D - 1) - l \text{ нечётно,} \end{cases} \quad (1.5) \end{aligned}$$

где  $\lfloor x \rfloor_+ = \max(\lfloor x \rfloor, 0)$  и  $N_i = \infty$  при  $i > n$  (в частности, при  $N_{l+1} = \infty$  правая часть есть 0 или  $-1$ ).

Для доказательства неравенства (1.4) достаточно подставить оценку из пункта а) леммы о кластерах в оценку из пункта б), воспользовавшись тем



фактом, что функция справедливого деления  $\mathbf{fp}(N_1, \dots, N_\varkappa)$  очевидным образом не убывает, как функция от  $\varkappa$ .

Докажем (1.5). Воспользовавшись монотонностью функции  $\mathbf{fp}$  по каждому из аргументов и формулами (1.4) и (1.3), при  $\varkappa = \chi(S) + \sum_D (d_D - 1)$  мы получаем

$$\begin{aligned} \sum_D d_D &\geq \max(\mathbf{fp}(N_1, \dots, N_\varkappa), N_n) \geq \mathbf{fp}(\overbrace{1, 1, 1, 1, 1, \dots, 1}^{\varkappa \text{ штук}}, \overbrace{N_{l+1}, N_{l+1}, \dots, N_{l+1}}^{\min(l, \varkappa) \text{ штук}}) = \\ &= \begin{cases} \lfloor \frac{\varkappa+1}{2} \rfloor, & \text{если } \varkappa \leq l; \\ \lfloor \frac{l+1}{2} \rfloor + N_{l+1} \cdot \frac{\varkappa-l}{2}, & \text{если } \varkappa > l \text{ и } \varkappa - l \text{ чётно}; \\ \lfloor \frac{l+1-\min(l, N_{l+1})}{2} \rfloor + N_{l+1} \cdot \frac{\varkappa-l+1}{2}, & \text{если } \varkappa > l \text{ и } \varkappa - l \text{ нечётно}. \end{cases} \end{aligned}$$

**Случай 0:**  $\varkappa \leq l$ .

Если  $\varkappa - l$  чётно, то

$$\left\lfloor \frac{\varkappa+1}{2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{l+1}{2} \right\rfloor + N_{l+1} \cdot \frac{\varkappa-l}{2}$$

(так как  $N_{l+1} \geq 1$ ).

Если же  $\varkappa - l$  нечётно, то

$$\left\lfloor \frac{\varkappa+1}{2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor + N_{l+1} \cdot \frac{\varkappa-l+1}{2} \geq \left\lfloor \frac{l+1-\min(l, N_{l+1})}{2} \right\rfloor + N_{l+1} \cdot \frac{\varkappa-l+1}{2}.$$

В итоге мы получаем при всех  $\varkappa$  и  $l$

$$\sum_D d_D \geq \begin{cases} \left\lfloor \frac{l+1}{2} \right\rfloor + N_{l+1} \cdot \frac{\varkappa-l}{2}, & \text{если } \varkappa - l \text{ чётно}; \\ \left\lfloor \frac{l+1-\min(l, N_{l+1})}{2} \right\rfloor + N_{l+1} \cdot \frac{\varkappa-l+1}{2}, & \text{если } \varkappa - l \text{ нечётно}. \end{cases}$$

**Случай 1:**  $\varkappa - l$  чётно.

$$\begin{aligned} \sum_D d_D &\geq \left\lfloor \frac{l+1}{2} \right\rfloor + N_{l+1} \cdot \frac{\varkappa-l}{2} \implies \\ \implies \varkappa - l &\leq \frac{2}{N_{l+1}} \left( \sum_D d_D - \left\lfloor \frac{l+1}{2} \right\rfloor \right) \implies \\ \implies \varkappa - l &\leq 2 \left\lfloor \frac{1}{N_{l+1}} \left( \sum_D d_D - \left\lfloor \frac{l+1}{2} \right\rfloor \right) \right\rfloor, \end{aligned}$$

где последняя импликация выполняется из-за того, что  $\varkappa - l$  чётно. Это и есть неравенство (1.5), так как  $\varkappa = \chi(S) + \sum_D (d_D - 1)$ .

**Случай 2:**  $\varkappa - l$  нечётно.

$$\begin{aligned} \sum_D d_D &\geq \left[ \frac{l+1 - N_{l+1}}{2} \right]_+ + N_{l+1} \cdot \frac{\varkappa - l + 1}{2} \implies \\ \implies \varkappa - l + 1 &\leq \frac{2}{N_{l+1}} \left( \sum_D d_D - \left[ \frac{l+1 - N_{l+1}}{2} \right]_+ \right) \implies \\ \implies \varkappa - l + 1 &\leq 2 \left[ \frac{1}{N_{l+1}} \left( \sum_D d_D - \left[ \frac{l+1 - N_{l+1}}{2} \right]_+ \right) \right], \end{aligned}$$

где последняя импликация выполняется из-за того, что  $\varkappa - l + 1$  чётно. Это завершает доказательство.

## 1.6 Основная теорема

**Теорема 2.** Пусть в свободном произведении групп  $G = *_{j \in J} A_j$  имеет место равенство

$$c_1 \dots c_k d_1 \dots d_l = u_1^{n_1} \dots u_m^{n_m}, \quad (1.6)$$

где  $c_i$  — коммутаторы,  $d_i$  сопряжены элементам из  $\bigcup_{j \in J} A_j$ , элементы  $u_i$  сопряжены между собой и не сопряжены элементам из  $\bigcup_{j \in J} A_j$ , и  $n_i$  — натуральные числа. Тогда выполнено неравенство

$$\begin{aligned} 2 - 2k - l + \sum_{i=1}^m (n_i - 1) &\leq \\ &\leq \begin{cases} 2 \left[ \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^m n_i - \left[ \frac{l+1}{2} \right] \right) \right], & \text{если } \sum_{i=1}^m (n_i - 1) - l \text{ чётно;} \\ 2 \left[ \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^m n_i - \left[ \frac{l+1-N}{2} \right]_+ \right) \right] - 1, & \text{если } \sum_{i=1}^m (n_i - 1) - l \text{ нечётно,} \end{cases} \end{aligned}$$

где  $[x]_+ := \max([x], 0)$ , а  $N$  — минимальный порядок элемента из  $\bigcup_{j \in J} A_j$ , входящего в циклически несократимую запись элемента  $u$ , сопряжённого всем  $u_i$  (в частности, при  $N = \infty$  правая часть есть 0 или  $-1$ ).

*Доказательство.* Без ограничения общности можно считать, что в свободном произведении  $G = \ast_{j \in J} A_j$  всего два сомножителя. Действительно, пусть циклически несократимая форма  $u$  элементов  $u_i$  содержит какой-то слог  $a_j \in A_j \setminus \{1\}$  порядка  $N$  для некоторого  $j \in J$ . Тогда группа  $G$  раскладывается в свободное произведение  $G = A \ast B$ , где  $A = A_j$  и  $B = \ast_{j' \in J \setminus \{j\}} A_{j'}$ , и условия теоремы остаются выполненными для этого разложения. Поэтому мы считаем, что сомножителей два:  $G = A \ast B$ .

В силу леммы 3 из равенства (1.6) следует существование диаграммы Хауи  $D$  на ориентированной замкнутой (необязательно связной) поверхности  $S$  рода  $k'$  (напомним, что  $k' := (2 - \chi(S)) / 2$ ) с  $l'$  внешними вершинами и  $m$  клетками, метки которых суть  $u^{n_1}, \dots, u^{n_m}$ , причём

$$k' \leq k \quad \text{и} \quad 2k' + l' \leq 2k + l. \quad (1.7)$$

Определим на этой диаграмме кратное равномерное движение естественным образом: клетку с меткой  $u^{n_i}$  объезжают  $n_i$  автомобилей со скоростью одно ребро в минуту, в момент времени  $s \in \mathbb{Z}$  каждый автомобиль будут находится в угле, метка которого равна  $s$ -й букве слова  $u$  (если  $s$  считать по модулю длины слова  $u$ ).

Таким образом, столкновений вне вершин (то есть во внутренних точках рёбер) произойти не может, поскольку в каждый момент времени

- либо все автомобили находятся в  $A$ -вершинах,
- либо все автомобили находятся в  $B$ -вершинах,
- либо каждый автомобиль едет по ребру от  $A$ -вершины к  $B$ -вершине,
- либо каждый автомобиль едет по ребру от  $B$ -вершины к  $A$ -вершине.

Полное столкновение в некоторой вершине  $v$  означает, что все углы при этой вершине имеют одинаковую метку, равную некоторой букве слова  $u$ . Если эта вершина  $v$  внутренняя, то произведение этих меток должно быть единицей, то есть  $\deg v \geq N$ . Положим

$$\Phi(k', l') := 2 - 2k' - l' + \sum_{i=1}^m (n_i - 1),$$

$$\Psi(l') := \begin{cases} 2 \left\lfloor \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^m n_i - \left\lfloor \frac{l'+1}{2} \right\rfloor \right) \right\rfloor, & \text{если } \sum_{i=1}^m (n_i - 1) - l' \text{ чётно;} \\ 2 \left\lfloor \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^m n_i - \left\lfloor \frac{l'+1-N}{2} \right\rfloor_+ \right) \right\rfloor - 1, & \text{если } \sum_{i=1}^m (n_i - 1) - l' \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Применив следствие леммы о кластерах к этому движению, мы получим неравенство

$$\Phi(k', l') \leq \Psi(l'). \quad (1.8)$$

Правая часть этой оценки удовлетворяет неравенствам

$$\Psi(l+2) \leq \Psi(l) \quad \text{и} \quad \Psi(l \pm 1) \leq \Psi(l) + 1 \quad (1.9)$$

при всех  $l$ . Действительно, первое из этих неравенств очевидно, а для объяснения второго неравенства положим  $n := \sum n_i$ . Тогда, если число  $\sum(n_i - 1) - l$  чётно, то

$$\begin{aligned} \Psi(l \pm 1) &\leq \Psi(l-1) = 2 \left\lfloor \frac{1}{N} \left( n - \left\lfloor \frac{l-N}{2} \right\rfloor_+ \right) \right\rfloor - 1 \leq \\ &\leq 2 \left\lfloor \frac{1}{N} \left( n - \left\lfloor \frac{l-N}{2} \right\rfloor \right) \right\rfloor - 1 \leq 2 \left\lfloor \frac{1}{N} \left( n - \left\lfloor \frac{l+1-2N}{2} \right\rfloor \right) \right\rfloor - 1 = \\ &= 2 \left\lfloor \frac{1}{N} \left( n - \left\lfloor \frac{l+1}{2} \right\rfloor + N \right) \right\rfloor - 1 = 2 \left\lfloor \frac{1}{N} \left( n - \left\lfloor \frac{l+1}{2} \right\rfloor \right) \right\rfloor + 2 - 1 = \Psi(l) + 1. \end{aligned}$$

Если же число  $\sum(n_i - 1) - l$  нечётно, то

$$\Psi(l \pm 1) \leq \Psi(l-1) = 2 \left\lfloor \frac{1}{N} \left( n - \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor \right) \right\rfloor \leq 2 \left\lfloor \frac{1}{N} \left( n - \left\lfloor \frac{l+1-N}{2} \right\rfloor_+ \right) \right\rfloor = \Psi(l) + 1.$$

Это доказывает оценку (1.9).

Теперь, если  $l' \geq l$ , то  $\Phi(k, l) \leq \Phi(k', l')$ , поскольку  $2k' + l' \leq 2k + l$  в силу (1.7), а  $\Psi(l') \leq \Psi(l) + 1$  в силу (1.9). Следовательно,

$$\Phi(k, l) \leq \Phi(k', l') \leq \Psi(l') \leq \Psi(l) + 1.$$

А значит,  $\Phi(k, l) \leq \Psi(l)$ , поскольку числа  $\Phi(k, l)$  и  $\Psi(l)$  имеют одинаковую чётность. Это и требовалось доказать.

В случае же, когда  $l' < l$ , заметим, что из (1.9) вытекает монотонность функции  $l \mapsto l + \Psi(l)$ . Поэтому утверждение теоремы в этом случае немедленно вытекает из (1.8) и того, что  $k' \leq k$  в силу (1.7).

□

## Глава 2. Степени с минимальной коммутаторной длиной в свободных произведениях групп

### 2.1 Введение

В данной главе мы доказываем, что полученная в главе 1 оценка для минимальной коммутаторной длины  $n$ -й степени элемента, не сопряженного элементам свободных сомножителей, в свободных произведениях групп является точной. Все необходимые определения могут быть найдены в разделе 1.1.

**Теорема 3.** Пусть  $G = \ast_{j \in J} A_j$  — это свободное произведение нетривиальных групп и  $n$  — это натуральное число. Тогда

$$k(G, n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{N(G)} \right\rfloor + 1.$$

В действительности, мы доказываем более сильный результат.

**Определение 4.** Пусть  $G = \ast_{j \in J} A_j$  — это группа с фиксированным разложением на свободные сомножители. Для элемента  $g \in \hat{G}$ , имеющего циклически приведённую форму  $a_{j_1,1} \dots a_{j_m,m}$  (где  $a_{j_i,i} \in A_{j_i}$ ), мы обозначаем через  $N(g)$  минимальный порядок его букв  $a_{j_1,1}, \dots, a_{j_m,m}$ . Для  $N \in \{N(g) \mid g \in \hat{G}\}$  мы определяем  $k(G, n, N)$  как минимальное число  $k$ , такое что элемент  $g^n \in \hat{G}$  с  $N(g) = N$  может быть разложен в произведение  $k$  коммутаторов.

**Теорема 4.** Пусть  $G = \ast_{j \in J} A_j$  — это свободное произведение нетривиальных групп и  $n$  — это натуральное число. Если  $N \in \{N(g) \mid g \in \hat{G}\}$ , то

$$k(G, n, N) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor + 1.$$

Мы явно вычисляем коммутаторную длину степеней коммутаторов элементов, лежащих в разных свободных сомножителях.

**Теорема 5.** Пусть  $G = \ast_{j \in J} A_j$  — это свободное произведение нетривиальных групп и  $n$  — это натуральное число. Если  $a \in A_{j_1}$  и  $t \in A_{j_2}$  — это два неединичных элемента, лежащие в различных свободных сомножителях, такие что  $\text{ord}(a) \leq \text{ord}(t)$ , то

$$\text{cl}([a, t]^n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{\text{ord}(a)} \right\rfloor + 1.$$

*Замечание 2.* Если  $N(G)$ ,  $N$  или  $\text{ord}(a)$  бесконечно, мы естественным образом полагаем, что  $\lfloor n / N(G) \rfloor$ ,  $\lfloor n / N \rfloor$  или  $\lfloor n / \text{ord}(a) \rfloor$  равняется нулю. В таком случае  $k(G, n)$ ,  $k(G, n, N)$  или  $\text{cl}([a, t]^n)$  равняется  $\lfloor n / 2 \rfloor + 1$ , что соответствует известным результатам для свободных произведений групп без кручения.

**Следствие 3.** *Если  $a$  и  $b$  — это два неединичных элемента произвольной группы и  $n$  — это натуральное число, то*

$$\text{cl}([a, b]^n) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{\text{ord}(a)} \right\rfloor + 1.$$

Например, если  $a^3 = 1$ , то все степени  $[a, b]$  вплоть до 7 могут быть разложены в произведение 2 коммутаторов. Более того,  $[a, b]^9$  тоже может быть разложено в произведение 2 коммутаторов, а  $[a, b]^3$  является просто коммутатором. Если  $a^4 = 1$ , то  $[a, b]^4$  может быть разложено в произведение 2 коммутаторов и  $[a, b]^8$  может быть разложено в произведение 3 коммутаторов.

Чтобы доказать эти теоремы, мы используем геометрическую интерпретацию: для каждого  $a$ ,  $t$  и  $n$  мы строим диаграмму Хауи  $D$  на замкнутой ориентированной поверхности рода  $\lfloor n / 2 \rfloor - \lfloor n / \text{ord}(a) \rfloor + 1$ , такую что  $D$  имеет только одну клетку, метка этой грани равняется  $[a, t]^n$  и все вершины  $D$  внутренние.

Используя построенные диаграммы, возможно получить коммутаторные разложения наименьшей длины в явной алгебраической форме. В качестве примера мы получаем равенство

$$[a, t]^5 = [a^{-1}t^{-1}a^{-1}tat^{-1}a^{-1}ta, a^{-1}t^{-1}atat^{-1}a^{-1}ta^{-1}][a^{-1}ta^{-1}, a],$$

которое верно для любых двух элементов произвольной группы, коль скоро  $a^3 = 1$ .

Мы начинаем со связи диаграмм Хауи с произведениями коммутаторов в разделе 2.2. Диаграммы для элементов вида  $[a, t]^n$  с минимально возможным родом строятся в разделе 2.3. Эти диаграммы используются для доказательства теорем в разделе 2.4. В разделе 2.5 мы показываем пример того, как можно получать коммутаторные разложения минимальной длины в явной алгебраической форме, используя построенные в разделе 2.3 диаграммы.

## 2.2 Диаграммы Хауи и произведения коммутаторов

Мы используем определение диаграмм Хауи из раздела 1.3. Посмотрим на диаграмму над свободным произведением  $\langle a \rangle_3 * \langle b \rangle_3$ , показанную на рисунке 2.1. Она расположена на торе, представленном в виде прямоугольника с отождествленными противоположными сторонами. Эта диаграмма имеет две внутренних вершины, три ребра и одну клетку, чья метка равняется  $(ab)^3$ . Это геометрическая интерпретация того факта, что элемент  $(ab)^3$  является коммутатором в свободном произведении  $\langle a \rangle_3 * \langle b \rangle_3$ . Это вытекает из следующей леммы.

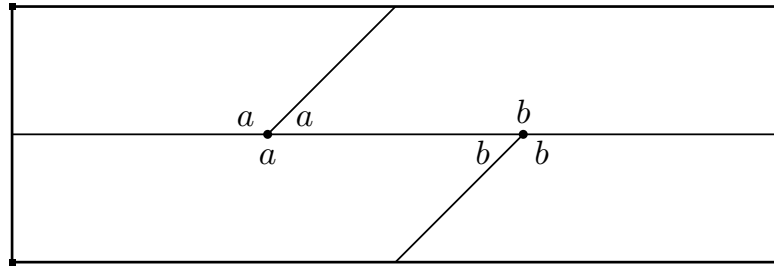


Рисунок 2.1 — Пример диаграммы на торе

**Лемма 5.** Пусть  $u$  — это циклически приведенный элемент свободного произведения  $A * B$ , не сопряжённый элементам свободных сомножителей. Если существует диаграмма  $D$  над  $A * B$  на замкнутой ориентированной поверхности рода  $k$ , такая что  $D$  имеет только одну клетку, метка этой клетки равняется  $u$  и все вершины  $D$  внутренние, то  $u$  является произведением  $k$  коммутаторов.

Чтобы доказать эту лемму, нам нужно определить метку пути. Сперва, построим *вспомогательный граф*  $\Gamma'$ . Он получается из графа  $\Gamma$  вставкой дополнительной вершины степени 2 в середину каждого ребра. Назовём эти новые вершины *вспомогательными вершинами* и назовём путь в графе  $\Gamma'$ , чьи концы являются вспомогательными вершинами, *вспомогательным путем*. Пусть  $p$  — это такой путь. Представим его в виде произведения путей  $p_1 \dots p_m$ , таких что каждый  $p_i$  — это вспомогательный путь, пересекающий ровно одну вершину графа  $\Gamma$ . Это значит, что каждый  $p_i$  состоит из 2 ориентированных ребер  $(e_i^1, e_i^2)$  графа  $\Gamma'$ , таких что  $e_i^1$  начинается в некоторой вспомогательной вершине и заканчивается в некоторой вершине  $v_i$  графа  $\Gamma$ , а  $e_i^2$  начинается в  $v_i$  и

заканчивается в некоторой вспомогательной вершине. *Метка пути*  $l(p)$  пути  $p$  определяется как произведение  $l(p_1) \cdots l(p_m)$ , где метка  $l(p_i)$  равна произведению меток углов при вершине  $v_i$ , взятых по часовой стрелке, начиная с угла, прилегающего к левой стороне ориентированного ребра  $e_i^1$ , и закрывая углом, прилегающим к левой стороне ориентированного ребра  $e_i^2$ .

Примеры изображены на рисунке 2.2. Путь  $p_1$  пересекает ровно одну вершину графа  $\Gamma$  и путь  $p_2$  пересекает две вершины графа  $\Gamma$ . Их метки равны  $l(p_1) = a_2a_3a_4$  и  $l(p_2) = a_1a_2a_3b_1$ . Метки их обратных равны  $l(p_1^{-1}) = a_5a_1$  и  $l(p_2^{-1}) = b_2b_3a_4a_5$ . Пусть  $p_3$  — это путь  $e_3e_3^{-1}$  и  $p_4$  — это путь  $e_4e_4^{-1}$ . Эти пути совершают разворот в вершинах графа  $\Gamma$ , и их метки равны  $l(p_3) = b_3b_1b_2$  и  $l(p_4) = b_4$ .

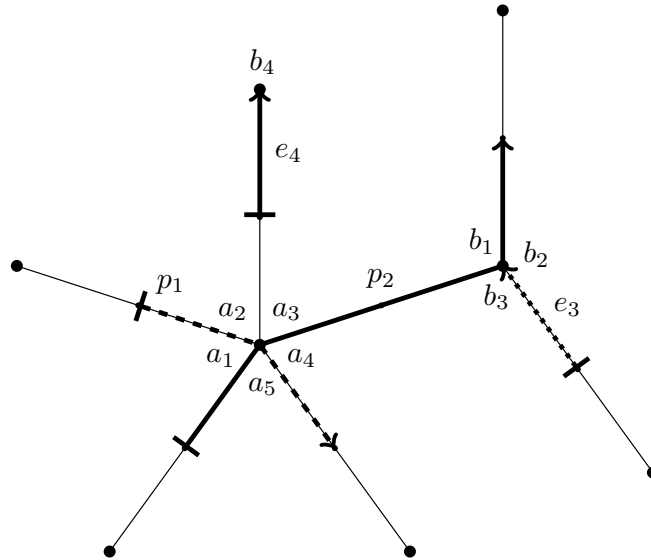


Рисунок 2.2 — Метки путей

Мы будем использовать следующее свойство меток путей: если все вершины диаграммы внутренние и вспомогательный путь  $p$  может быть преобразован в тривиальный путь при помощи последовательных удалений подпутей вида  $ee^{-1}$ , то  $l(p) = 1$ . Действительно, мы можем считать, что  $e$  — это ребро вспомогательного графа  $\Gamma'$ . В таком случае нам достаточно рассмотреть следующие случаи:

1. Ребро  $e$  кончается в вершине графа  $\Gamma$ . Тогда путь  $p$  может быть представлен в виде  $p_1ee^{-1}p_2$ , где  $p_1$  и  $p_2$  — это некоторые вспомогательные пути (возможно тривиальные). В этом случае  $l(ee^{-1})$  равняется метке конечной вершины ребра  $e$ . Так как все вершины графа  $\Gamma$  внутренние, эта метка равняется 1, и значит  $l(p_1ee^{-1}p_2) = l(p_1p_2)$ .



2. Ребро  $e$  начинается в вершине графа  $\Gamma$ . Тогда путь  $p$  может быть представлен в виде  $p_1e_1ee^{-1}e_2p_2$ , где  $p_1$  и  $p_2$  — это некоторые вспомогательные пути (возможно тривиальные), а  $e_1$  и  $e_2$  — это некоторые рёбра графа  $\Gamma'$ . Чтобы доказать, что  $l(p_1e_1ee^{-1}e_2p_2) = l(p_1e_1e_2p_2)$ , нам достаточно показать, что  $l(e_1ee^{-1}e_2) = l(e_1e_2)$ . Рассмотрим случаи:

- если  $e_1 \neq e^{-1}$  и  $e_2 \neq e$ , то в зависимости от взаиморасположения ребер  $e_1, e_2$  и  $e$ , мы имеем либо  $l(e_1ee^{-1}e_2) = l(e_1e_2)$ , либо  $l(e_1ee^{-1}e_2) = l(e_1e_1^{-1})l(e_1e_2)$ ; в обоих случаях это равняется  $l(e_1e_2)$ , так как  $l(e_1e_1^{-1})$  равно метке конечной вершины ребра  $e_1$ , а все вершины графа  $\Gamma$  внутренние;
- если  $e_1 = e^{-1}$ , то  $l(e_1ee^{-1}e_2) = l(e^{-1}e)l(e_1e_2) = l(e_1e_2)$ , так как  $l(e^{-1}e)$  равно метке начальной вершины ребра  $e$ , а все вершины графа  $\Gamma$  внутренние;
- если  $e_2 = e$ , то рассуждения те же, что и для предыдущего случая.

Пусть  $D$  — это диаграмма на поверхности  $S$ , определенная графом  $\Gamma$ . В следующем доказательстве под путем мы будем понимать либо путь графа  $\Gamma'$ , состоящий из ребер, либо путь на поверхности  $S$ , как непрерывное отображение единичного интервала в  $S$ . Если  $p$  это путь в  $\Gamma'$ , мы также обозначаем через  $p$  соответствующий путь на  $S$ , полученный при помощи естественного отождествления каждого ребра пути с единичным интервалом.

*Доказательство леммы 5.* Представим поверхность  $S$  диаграммы  $D$  в виде стандартного  $4k$ -гона  $P_{4k}$  с отождествленными сторонами. Выберем вершину  $Q$  на вспомогательном графе  $\Gamma'$ , такую что она не является вершиной графа  $\Gamma$  и метка клетки, прочитанная из этой вершины, равняется  $u$ . Обозначим замкнутый граничный путь клетки, начинающийся в  $Q$ , через  $p$ . Отметим, что  $l(p) = u$  и путь  $p$  гомотопен граничному пути  $P_{4k}$ , сопряжённому при помощи простого пути  $q$ , соединяющего вершину  $Q$  с некоторой вершиной  $P_{4k}$ . Этот сопряжённый граничный путь представляется в виде  $[a_1, b_1] \dots [a_k, b_k]$ , где  $a_i$  и  $b_i$  — это замкнутые пути, соответствующие сторонам  $P_{4k}$ , сопряжённые при помощи  $q$  (все вершины  $P_{4k}$  являются одной точкой на  $S$ , а значит все рёбра  $P_{4k}$  являются замкнутыми путями на  $S$ ; мы берем эти пути и сопрягаем их при помощи  $q$ ).

Выберем точку  $C$  на поверхности, такую что  $C$  не принадлежит графу  $\Gamma$ , границе  $P_{4k}$  и пути  $q$ . Произвольный замкнутый путь  $r$  на поверхности  $S \setminus C$

гомотопен некоторому замкнутому пути в  $\Gamma'$ . Действительно, рассмотрим прообраз  $M^{-1}(r)$  этого пути на диске  $D_1$  (где  $M$  и  $D_1$  взяты из определения диаграмм Хауи). Центральное спроецируем  $M^{-1}(r)$  на границу  $\partial D_1$  через точку  $M^{-1}(C)$  и возьмем образ этой проекции. Обозначим этот новый замкнутый путь через  $r'$ . Ясно, что он лежит в графе  $\Gamma'$  и гомотопен пути  $r$  на  $S \setminus C$  по своему построению. Наконец, превратим путь  $r'$  в путь графа  $\Gamma'$  при помощи дополнительной гомотопии.

Следовательно, пути  $a_i$  и  $b_i$  гомотопны некоторым путям  $a'_i$  и  $b'_i$  графа  $\Gamma'$ , и путь  $p$  гомотопен пути  $p' = [a'_1, b'_1] \dots [a'_k, b'_k]$ . Мы можем считать, что эта гомотопия лежит в  $\Gamma'$ , потому что она может быть спроецирована через  $M^{-1}(C)$ . Таким образом, путь  $p^{-1}p'$  гомотопен тривиальному пути внутри графа. Это значит, что путь  $p^{-1}p'$  может быть преобразован в тривиальный путь при помощи последовательных удалений подпутей вида  $qq^{-1}$ . Так как все вершины диаграммы внутренние, то  $1 = l(p^{-1}p') = l(p^{-1})l(p') = l(p)^{-1}l(p')$ . А значит

$$u = l(p) = l(p') = [l(a'_1), l(b'_1)] \dots [l(a'_k), l(b'_k)].$$

□

### 2.3 Диаграммы для $[a, t]^n$

В данном разделе мы докажем следующую лемму.

**Лемма 6.** Пусть  $a \in A$  и  $t \in T$  — это два элемента двух групп, и пусть  $n$  и  $N$  — это два натуральных числа, такие что  $n \geq N \geq 3$ . Если  $N$  чётно или  $N$  и  $n$  нечётны, то существует диаграмма  $D_{n,N}$  над свободным произведением  $A * T$  на замкнутой ориентированной поверхности рода  $\lfloor n / 2 \rfloor - \lfloor n / N \rfloor + 1$ , такая что  $D_{n,N}$  имеет только одну клетку и метка этой клетки равняется  $[a, t]^n$ . Все вершины  $D_{n,N}$  внутренние, если  $a^N = 1$ .

Мы явно строим желаемую диаграмму на замкнутой поверхности, представленной при помощи прямоугольника, верхняя и нижняя стороны которого разделены на  $2k$  ребер. Каждое ребро на верхней стороне имеет соответствующее ребро на нижней стороне. Если мы обозначим верхние рёбра как  $e_1, \dots, e_{2k}$ , то нижние рёбра будут  $e_2, e_1, \dots, e_{2k}, e_{2k-1}$ . Поверхность получается отождествлением верхних рёбер с соответствующими нижними рёбрами. Левая и правая

стороны прямоугольника стягиваются в точку. Пример поверхности, заданной прямоугольником, изображён на рисунке 2.3. Такой прямоугольник образует замкнутую ориентированную поверхность рода  $k$ , если верх разделен на  $2k$  рёбер. Мы также допускаем вырожденный прямоугольник с нулевым количеством рёбер сверху и снизу, который представляет собой сферу.

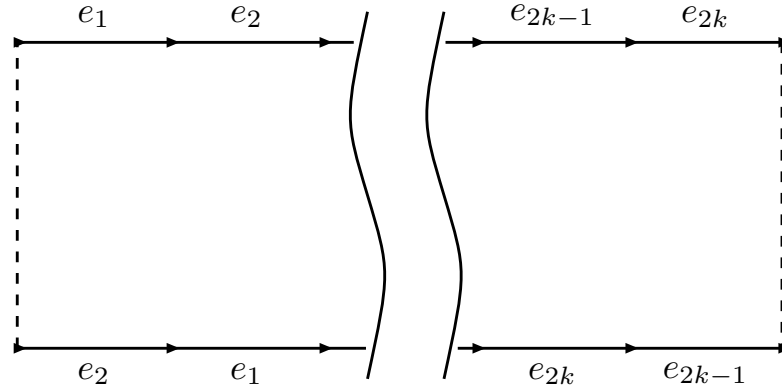


Рисунок 2.3 — Замкнутая ориентированная поверхность рода  $k$

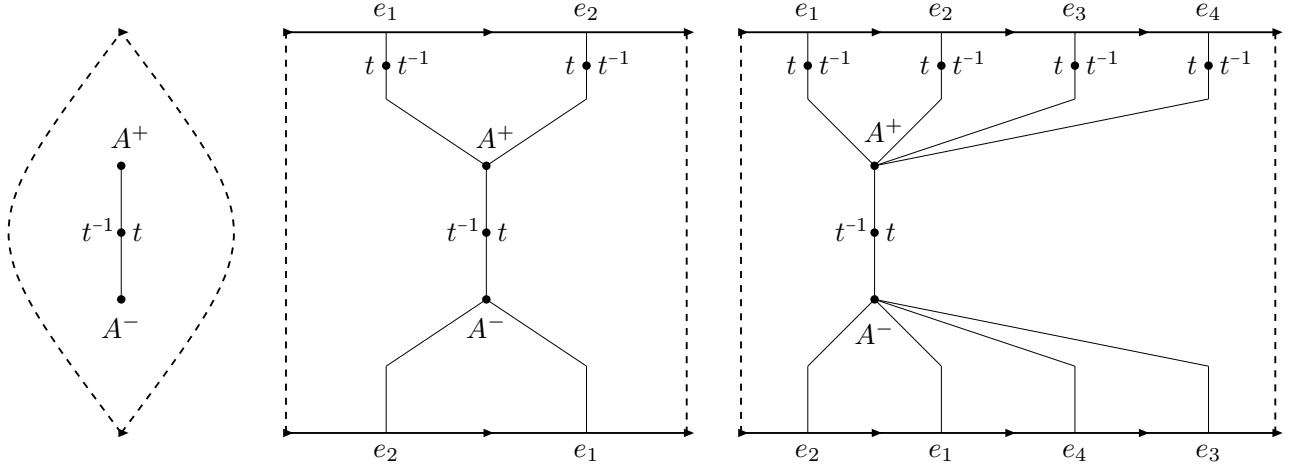
Диаграмма определяется своим графом  $\Gamma$ , нарисованным на таком прямоугольнике. Все углы при  $A$ -вершинах будут иметь метку  $a$  или  $a^{-1}$ . Все углы при  $T$ -вершинах будут иметь метку  $t$  или  $t^{-1}$ . Некоторые  $A$ -вершины будут помечены символом  $A^+$  или  $A^-$ . Все углы при таких вершинах помечены при помощи  $a$  или  $a^{-1}$  соответственно.

Представим число  $n$  в виде  $n = rN + q$ , где  $0 \leq q < N$ . Диаграмма строится в зависимости от чётностей чисел  $N$ ,  $r$  и  $q$ . Мы рассматриваем следующие случаи (где  $s = \lfloor q/2 \rfloor$ ):

1.  $n = rN + 2s$ , где  $N$  и  $r$  нечётны.
2.  $n = rN + 2s + 1$ , где  $N$  нечётно и  $r$  чётно.
3.  $n = rN + 2s$ , где  $N$  чётно.
4.  $n = rN + 2s + 1$ , где  $N$  чётно.

### Случай 1. $n = rN + 2s$ , где $N$ и $r$ нечётны

Сперва мы строим диаграмму  $D_{N,N}$  для каждого нечётного  $N$ . Диаграммы  $D_{1,1}$  и  $D_{3,3}$  изображены на рисунке 2.4. Ясно, что диаграмма  $D_{1,1}$  имеет род 0 и только одну клетку. Метка этой клетки равна  $[a, t]$ . Все вершины  $D_{1,1}$  внутренние, если  $a = 1$ . Диаграмма  $D_{3,3}$  имеет род 1 и только одну клетку. Метка этой клетки равна  $[a, t]^3$ . Все вершины  $D_{3,3}$  внутренние, если  $a^3 = 1$ .

Рисунок 2.4 —  $D_{1,1}$ ,  $D_{3,3}$  и  $D_{5,5} = D_{3,3} \circ D_{3,3}$ 

Чтобы получить диаграммы для остальных  $N$ , мы определяем композицию двух диаграмм.

**Определение 5.** Пусть  $D$  — это диаграмма, нарисованная на прямоугольнике с  $2k$  рёбрами  $e_i$ . Если  $k$  положительно, мы называем левой границей диаграммы путь, который проходит вдоль графа  $\Gamma$  от самой левой точки пересечения  $\Gamma$  с нижней стороной прямоугольника до самой левой точки пересечения  $\Gamma$  с верхней стороной прямоугольника. Мы называем правой границей диаграммы путь, который проходит вдоль графа  $\Gamma$  от самой правой точки пересечения  $\Gamma$  с верхней стороной прямоугольника до самой правой точки пересечения  $\Gamma$  с нижней стороной прямоугольника.

Отметим, что левая и правая границы ориентированы. Левая граница обходится снизу вверх и правая граница обходится сверху вниз.

**Определение 6.** Пусть  $D$  — это диаграмма, нарисованная на прямоугольнике. Пусть  $(v^+, v^-)$  — это пара вершин, одна из которых является  $A^+$ -вершиной, а другая  $A^-$ -вершиной, обе из которых одновременно лежат на левой или на правой границе  $D$ . Мы называем такую пару положительно ориентированной, если двигаясь вдоль соответствующей границы  $D$  мы сначала встречаем вершину  $v^+$ . В противном случае такая пара называется отрицательно ориентированной

**Определение 7.** Пусть  $D_1$  и  $D_2$  — это две диаграммы, нарисованные на прямоугольниках  $R_1$  и  $R_2$ . Обозначим через  $D_1 + D_2$  новую диаграмму, полученную следующим образом: удалим правую сторону  $R_1$ , удалим левую сторону  $R_2$  и присоединим правую сторону  $R_1$  к левой стороне  $R_2$ .

*Замечание 3.* Отметим, что  $D_1 + D_2$  на самом деле не является корректной диаграммой, так как она содержит неодносвязные области. Тем не менее, мы называем её диаграммой для простоты обозначений.

Будем называть *t-дугой* путь длины 2 в графе, такой что его центральная вершина является внутренней  $T$ -вершиной степени 2 (то есть один угол при этой вершине имеет метку  $t$ , а второй  $t^{-1}$ ).

**Определение 8.** Пусть  $D_1$  и  $D_2$  — это две диаграммы, нарисованные на прямоугольниках. Предположим, что есть  $A^+$ -вершина  $v_1^+$  и  $A^-$ -вершина  $v_1^-$ , обе лежащие на правой стороне диаграммы  $D_1$ , и есть  $A^+$ -вершина  $v_2^+$  и  $A^-$ -вершина  $v_2^-$ , обе лежащие на левой стороне диаграммы  $D_2$ , такие что  $v_2^+$  и  $v_2^-$  соединены  $t$ -дугой. Предположим также, что пара  $(v_1^+, v_1^-)$  и пара  $(v_2^+, v_2^-)$  имеют разные ориентации. Мы обозначаем через  $D_1 \dot{\simeq} D_2$  диаграмму, полученную из  $D_1 + D_2$  следующим образом: удалим  $t$ -дугу, соединяющую  $v_2^+$  и  $v_2^-$ , склеим  $v_2^+$  с  $v_1^+$  и склеим  $v_2^-$  с  $v_1^-$ .

Для нечётного  $N \geq 5$  определим

$$D_{N,N} = \underbrace{D_{3,3} \dot{\simeq} \dots \dot{\simeq} D_{3,3}}_{(N-1)/2 \text{ слагаемых}}$$

Пример изображён на рисунке 2.4. Ясно, что если  $D_1$  и  $D_2$  — это две диаграммы с одной клеткой, то  $D_1 \dot{\simeq} D_2$  — это тоже диаграмма с одной клеткой. Если метки этих клеток равны  $[a, t]^{n_1}$  и  $[a, t]^{n_2}$  соответственно, то метка клетки  $D_1 \dot{\simeq} D_2$  равна  $[a, t]^{n_1+n_2-1}$ . Если  $D_1$  имеет род  $k_1$  и  $D_2$  имеет род  $k_2$ , то  $D_1 \dot{\simeq} D_2$  имеет род  $k_1+k_2$ .

Так как  $D_{3,3}$  имеет только одну клетку, то  $D_{N,N}$  тоже имеет ровно одну клетку, и её метка равна  $[a, t]^N$ . Род равен  $(N-1)/2$ . В этой диаграмме ровно одна  $A^+$ -вершина степени  $N$  и ровно одна  $A^-$ -вершина степени  $N$ . Значит все вершины  $D_{N,N}$  внутренние, если  $a^N = 1$ .

**Определение 9.** Пусть  $D$  — это диаграмма, нарисованная на прямоугольнике. Мы обозначаем через  $D^-$  ту же самую диаграмму, но в которой метки всех углов инвертированы (в частности,  $A^+$ -вершины превращаются в  $A^-$ -вершины и наоборот).

**Определение 10.** Мы определяем левую границу диаграммы  $D_{1,1}^-$  как путь, идущий от её единственной  $A^+$ -вершины к её единственной  $A^-$ -вершине, и правую границу как путь, идущий от её единственной  $A^-$ -вершины к её единственной  $A^+$ -вершине.

Отметим, что нам нужно отдельное определение для левой и правой границы диаграммы  $D_{1,1}^-$ , так как Определение 5 работает только для диаграмм положительного рода.

**Определение 11.** Пусть  $D_1$  и  $D_2$  — это две диаграммы, нарисованные на прямоугольнике. Предположим, что есть  $t$ -дуга  $f_1$  в  $D_1$ , соединяющая  $A^+$ -вершину  $v_1^+$  с  $A^-$ -вершиной  $v_1^-$ , и есть  $t$ -дуга  $f_2$  в  $D_2$ , соединяющая  $A^+$ -вершину  $v_2^+$  с  $A^-$ -вершиной  $v_2^-$ . Предположим также, что внутренность  $f_1$  имеет непустое пересечение с правой границей  $D_1$  и внутренность  $f_2$  имеет непустое пересечение с левой границей  $D_2$ . Зададим ориентации на  $f_1$  и  $f_2$  таким образом, чтобы они начинались в  $A^+$ -вершинах. Предположим, что либо обе эти ориентации совпадают с ориентациями соответствующих границ, либо обе эти ориентации отличаются от ориентаций соответствующих границ. Рассмотрим диаграмму  $D_1 + D_2$ . Добавим новую  $t$ -дугу, соединяющую  $v_1^+$  с  $v_2^-$ , и новую  $t$ -дугу, соединяющую  $v_1^-$  с  $v_2^+$ . Диаграмма, полученная после удаления  $t$ -дуги, соединяющей  $v_1^+$  с  $v_1^-$ , обозначается через  $D_1 \sqsupset D_2$ . Диаграмма, полученная после удаления  $t$ -дуги, соединяющей  $v_2^+$  с  $v_2^-$ , обозначается через  $D_1 \sqsubset D_2$ .

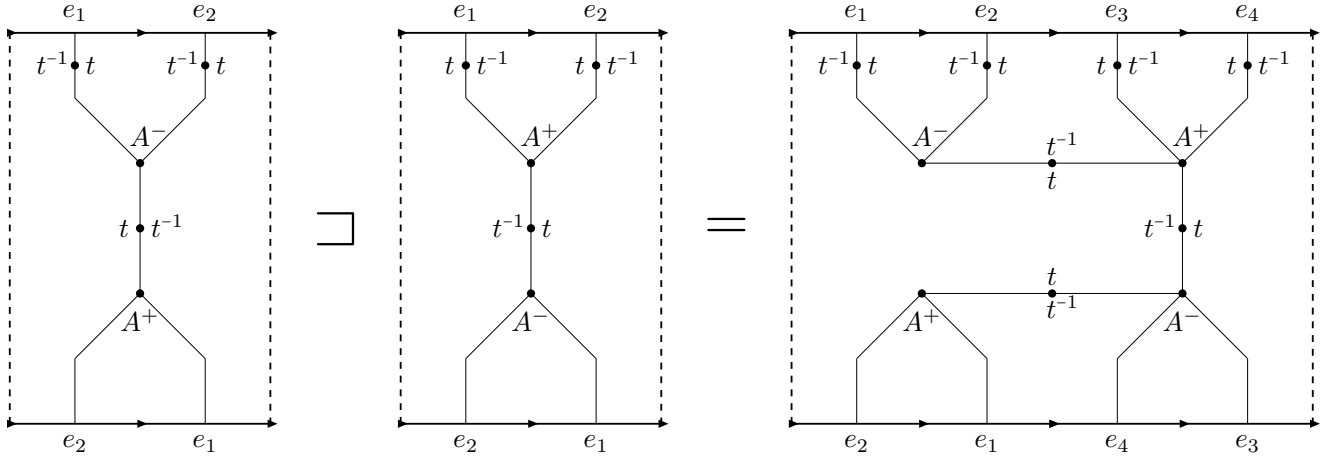


Рисунок 2.5 —  $D_{3,3}^-$ ,  $D_{3,3}$  и  $D_{3,3}^- \sqsupset D_{3,3}$

Пример такой композиции изображён на рисунке 2.5. Ясно, что если  $D_1$  и  $D_2$  — это две диаграммы с одной клеткой, то  $D_1 \sqsupset D_2$  ( $D_1 \sqsubset D_2$ ) — это тоже диаграмма с одной клеткой. Если метки этих клеток равны  $[a, t]^{n_1}$  и  $[a, t]^{n_2}$  соответственно, то метка клетки  $D_1 \sqsupset D_2$  ( $D_1 \sqsubset D_2$ ) равна  $[a, t]^{n_1+n_2+1}$ . Если  $D_1$  имеет род  $k_1$  и  $D_2$  имеет род  $k_2$ , то  $D_1 \sqsupset D_2$  ( $D_1 \sqsubset D_2$ ) имеет род  $k_1 + k_2$ .

Теперь вспомним, что  $r$  нечётно и  $N \geq 3$  нечётно. Для  $r \geq 3$  определим

$$D_{rN,N} = D_{(r-2)N,N} \sqsupset D_{N-2,N-2}^- \sqsubset D_{N,N}.$$

Примеры таких диаграмм изображены на рисунке 2.6. Ясно, что все  $A^+$ -вершины и все  $A^-$ -вершины диаграммы  $D_{rN,N}$  имеют степень  $N$ . В силу свойств операций  $\sqsupset$  и  $\sqsubset$  мы получаем по индукции, что  $D_{rN,N}$  имеет только одну клетку и метка этой клетки равна  $[a,t]^{((r-2)N+(N-2)+1)+N+1} = [a,t]^{rN}$ . Род этой диаграммы равен  $\lfloor rN/2 \rfloor - \lfloor rN/N \rfloor + 1$ , так как

$$\left\lfloor \frac{(r-2)N}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(r-2)N}{N} \right\rfloor + 1 + \frac{N-3}{2} + \frac{N-1}{2} = \left\lfloor \frac{rN}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{rN}{N} \right\rfloor + 1.$$

*Замечание 4.* Для  $N = 3$  возникает вырожденная диаграмма  $D_{1,1}^-$ . В таком случае диаграмма  $D_{(r-2)3,3} \sqsupset D_{1,1}^- \sqsubset D_{3,3}$  корректно определена в силу Определения 10. Пример изображён на рисунке 2.7.

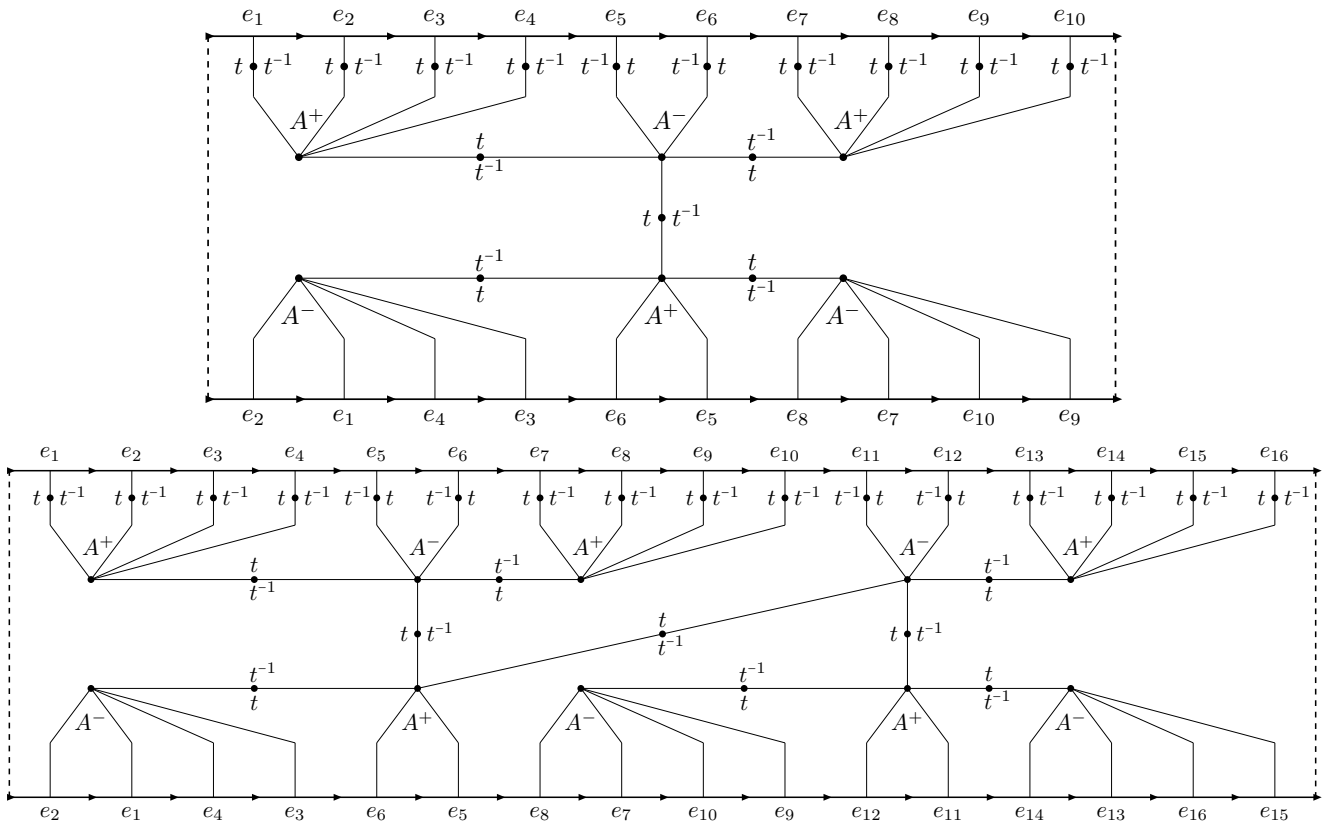


Рисунок 2.6 —  $D_{15,5}$  и  $D_{25,5}$

Наконец, построим диаграмму для  $n = rN + 2s$ . Это достигается композицией диаграммы  $D_{rN,N}$  с  $s$  копиями вспомогательной диаграммы  $D_{+2}$ , изображённой на рисунке 2.8.

**Определение 12.** Пусть  $D_1$  и  $D_2$  — это две диаграммы, нарисованные на прямоугольнике. Предположим, что в диаграмме  $D_1$  есть ребро  $f_1$ , чьи прилегающие углы имеют метки  $t, t^{-1}, a^\varepsilon$  и  $a^\varepsilon$ , и в диаграмме  $D_2$  есть ребро  $f_2$ , чьи прилегающие углы имеют метки  $t, t^{-1}, a^\varepsilon$  и  $a^\varepsilon$  (где  $\varepsilon \in \{+1, -1\}$ ). Предположим

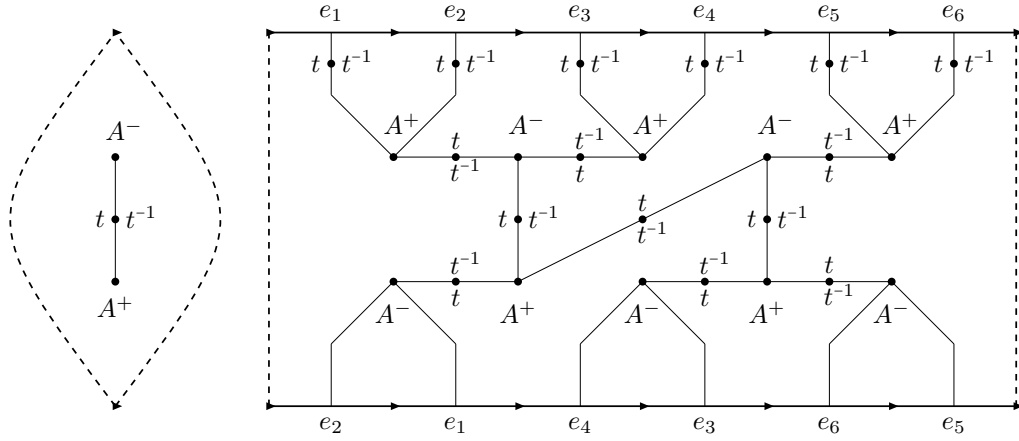


Рисунок 2.7 —  $D_{1,1}^-$  и  $D_{15,3}$

также, что внутренность  $f_1$  имеет непустое пересечение с правой границей  $D_1$  и внутренность  $f_2$  имеет непустое пересечение с левой границей  $D_2$ . Зададим ориентации на  $f_1$  и  $f_2$  таким образом, чтобы они начинались в  $T$ -вершинах. Предположим, что либо обе эти ориентации совпадают с ориентациями соответствующих границ, либо обе эти ориентации отличаются от ориентаций соответствующих границ. Мы обозначаем через  $D_1 \asymp D_2$  диаграмму, полученную из  $D_1 + D_2$  следующим образом: добавим новое ребро, соединяющее  $A$ -вершину инцидентную ребру  $f_1$  с  $T$ -вершиной инцидентной ребру  $f_2$ , добавим новое ребро, соединяющее  $T$ -вершину инцидентную ребру  $f_1$  с  $A$ -вершиной инцидентной ребру  $f_2$ , и удалим рёбра  $f_1$  и  $f_2$ .

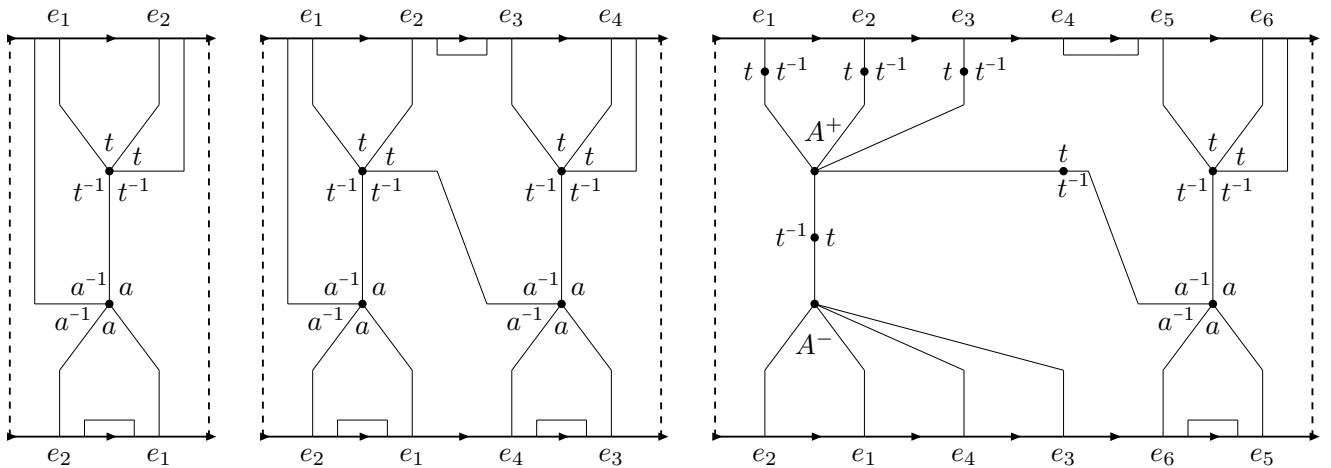


Рисунок 2.8 —  $D_{+2}$ ,  $D_{+2} \asymp D_{+2}$  и  $D_{7,5} = D_{5,5} \asymp D_{+2}$

Примеры изображены на рисунке 2.8. Следующие свойства этой операции очевидны: Если  $D_1$  ( $D_2$ ) имеет только одну клетку и  $D_2$  ( $D_1$ ) имеет две клетки, такие что ребро  $f_2$  ( $f_1$ ) лежит на границе обоих этих клеток, то  $D_1 \asymp D_2$  имеет одну клетку. Если метки клеток  $D_1$  и  $D_2$  равны  $[a, t]^{n_1}$ ,  $[a, t]^{n_2}$  и  $[a, t]^{n_3}$ , то метка



клетки  $D_1 \asymp D_2$  равна  $[a, t]^{n_1+n_2+n_3}$ . Если  $D_1$  имеет род  $k_1$  и  $D_2$  имеет род  $k_2$ , то  $D_1 \asymp D_2$  имеет род  $k_1 + k_2$ . Если все вершины  $D_1$  и  $D_2$  внутренние, то все вершины диаграммы  $D_1 \asymp D_2$  также внутренние.

Определим

$$D_{rN+2s,N} = D_{rN,N} \asymp \underbrace{D_{+2} \asymp \dots \asymp D_{+2}}_{s \text{ слагаемых}}.$$

Примеры изображены на рисунке 2.8. Ясно, что  $D_{+2}$  имеет две клетки и метки этих клеток равны  $[a, t]$ . Все вершины  $D_{+2}$  внутренние и вся левая граница  $D_{+2}$  лежит на границах обеих её клеток. Род диаграммы  $D_{+2}$  равен 1. В силу свойств операции  $\asymp$ , мы получаем, что диаграмма  $D_{rN+2s,N}$  имеет ровно одну клетку и метка этой клетки равна  $[a, t]^{rN+2s}$ . Род диаграммы  $D_{rN+2s,N}$  равен

$$\left\lfloor \frac{rN}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{rN}{N} \right\rfloor + 1 + s = \left\lfloor \frac{rN+2s}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{rN+2s}{N} \right\rfloor + 1,$$

если  $2s < N$ . Все вершины диаграммы  $D_{rN+2s,N}$  внутренние, если  $a^N = 1$ .

### Случай 2. $n = rN + 2s + 1$ , где $N$ нечётно и $r$ чётно

Диаграммы для этого случая получаются композицией вспомогательной диаграммы  $D_{+N+1,N}$  с построенными ранее диаграммами  $D_{(r-1)N+2s,N}$ . Диаграмма  $D_{+N+1,N}$  получается из диаграммы  $D_{N,N}^-$  следующим образом: добавим новое ребро, которое начинается в левом угле при центральной  $T$ -вершине, затем последовательно пересекает все рёбра  $e_2, e_1, \dots, e_{N-1}, e_{N-2}$  прямоугольника, и заканчивается в правом угле при центральной  $T$ -вершине. Пометим оба левых угла при новой вершине степени 4 элементом  $t$  и оба правых угла элементом  $t^{-1}$ . Добавим новую  $A$ -вершину степени 2 на это ребро. Пометим углы при этой вершине элементами  $a$  и  $a^{-1}$ , так чтобы метки новых клеток равнялись степеням элемента  $[a, t]$ . Примеры изображены на рисунке 2.9. Так как  $D_{N,N}$  имеет одну клетку, диаграмма  $D_{+N+1,N}$  имеет две клетки. В силу симметрии, их метки равняются  $[a, t]^{\frac{N+1}{2}}$  и каждая  $t$ -дуга лежит на границах обеих этих клеток.

Определим

$$D_{rN+2s+1,N} = D_{+N+1,N} \asymp D_{(r-1)N+2s,N}.$$

Примеры изображены на рисунках 2.9 и 2.10. Так как диаграмма  $D_{(r-1)N+2s,N}$  имеет одну клетку, диаграмма  $D_{+N+1,N}$  имеет две клетки и все её  $t$ -дуги лежат на границах обеих этих клеток, мы получаем, что  $D_{rN+2s+1,N}$  имеет одну клетку.

Её метка равняется

$$[a, t]^{2\frac{N+1}{2}+(r-1)N+2s} = [a, t]^{rN+2s+1}.$$

Род диаграммы  $D_{rN+2s+1, N}$  равен

$$\begin{aligned} & \frac{N-1}{2} + \left\lfloor \frac{(r-1)N+2s}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(r-1)N+2s}{N} \right\rfloor + 1 = \\ & \left\lfloor \frac{(r-1)N+2s}{2} + \frac{N+1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(r-1)N+2s}{N} + 1 \right\rfloor + 1 = \\ & \left\lfloor \frac{rN+2s+1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{rN+2s+1}{N} \right\rfloor + 1, \end{aligned}$$

если  $2s+1 < N$ . Все вершины диаграммы  $D_{rN+2s+1, N}$  внутренние, если  $a^N = 1$ .

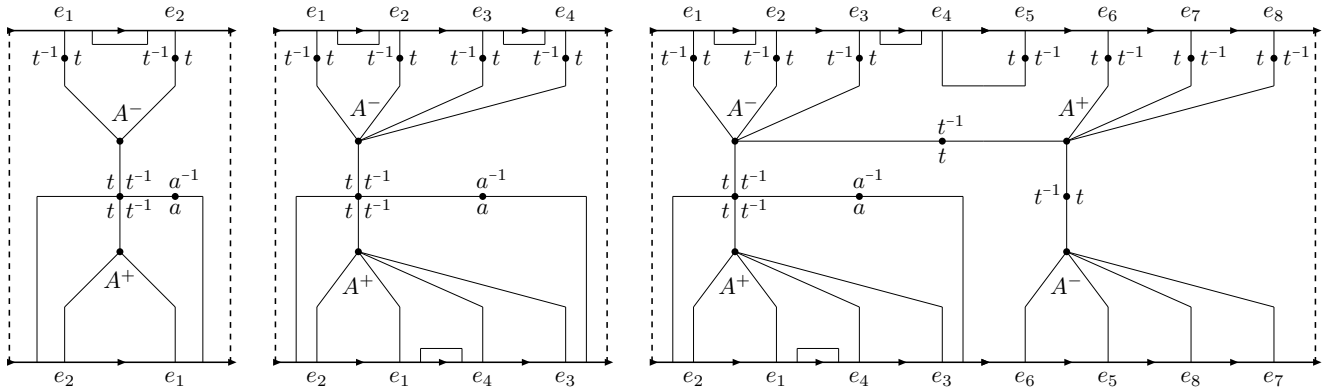


Рисунок 2.9 —  $D_{4,3}$ ,  $D_{6,5}$  и  $D_{11,5} = D_{6,5} \simeq D_{5,5}$

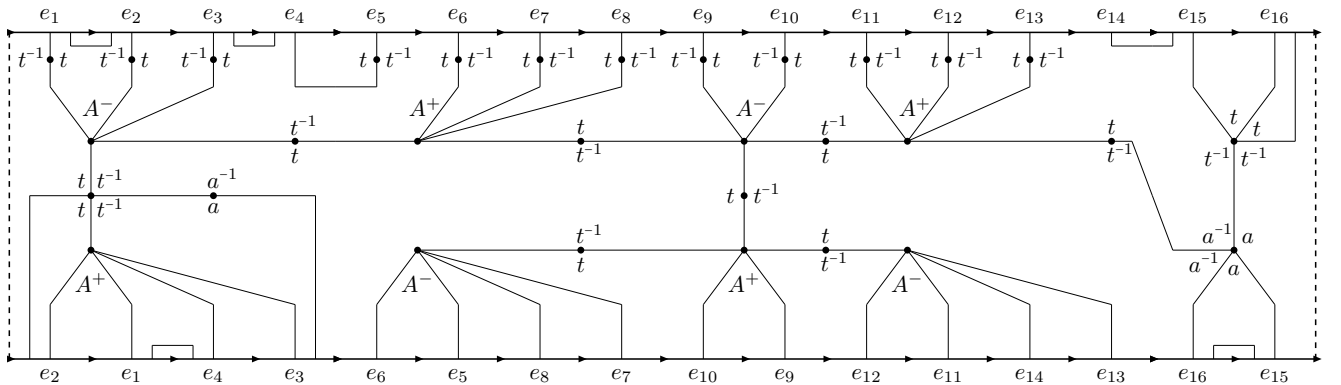


Рисунок 2.10 —  $D_{23,5}$

### Случай 3. $n = rN + 2s$ , где $N$ чётно

Диаграммы для этого случая получаются из диаграммы  $D_{2,2}$ , изображённой на рисунке 2.11. Она имеет род 1 и ровно одну клетку, метка которой равняется  $[a, t]^2$ . Определим

$$D_{N,N} = D_{2,2} \underset{(N-2)/2 \text{ слагаемых}}{\asymp} \underbrace{D_{3,3} \asymp \dots \asymp D_{3,3}}_{(N-2)/2 \text{ слагаемых}},$$

$$D_{rN,N} = D_{N,N} \sqsupset \underbrace{D_{N-1,N-1} \sqsupset \dots \sqsupset D_{N-1,N-1}}_{r-1 \text{ слагаемых}},$$

$$D_{rN+2s,N} = D_{rN,N} \asymp \underbrace{D_{+2} \asymp \dots \asymp D_{+2}}_s \text{ слагаемых}.$$

Примеры изображены на рисунке 2.11. Так как диаграмма  $D_{2,2}$  имеет ровно одну клетку, диаграмма  $D_{rN+2s,N}$  тоже имеет одну клетку. Метка этой клетки равняется  $[a, t]^{rN+2s}$ . Род диаграммы  $D_{rN+2s,N}$  равен

$$\left\lfloor \frac{rN + 2s}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{rN + 2s}{N} \right\rfloor + 1,$$

если  $2s < N$ . Это вычисляется тем же самым образом, что и для предыдущих случаев. Все вершины диаграммы  $D_{rN+2s,N}$  внутренние, если  $a^N = 1$ .

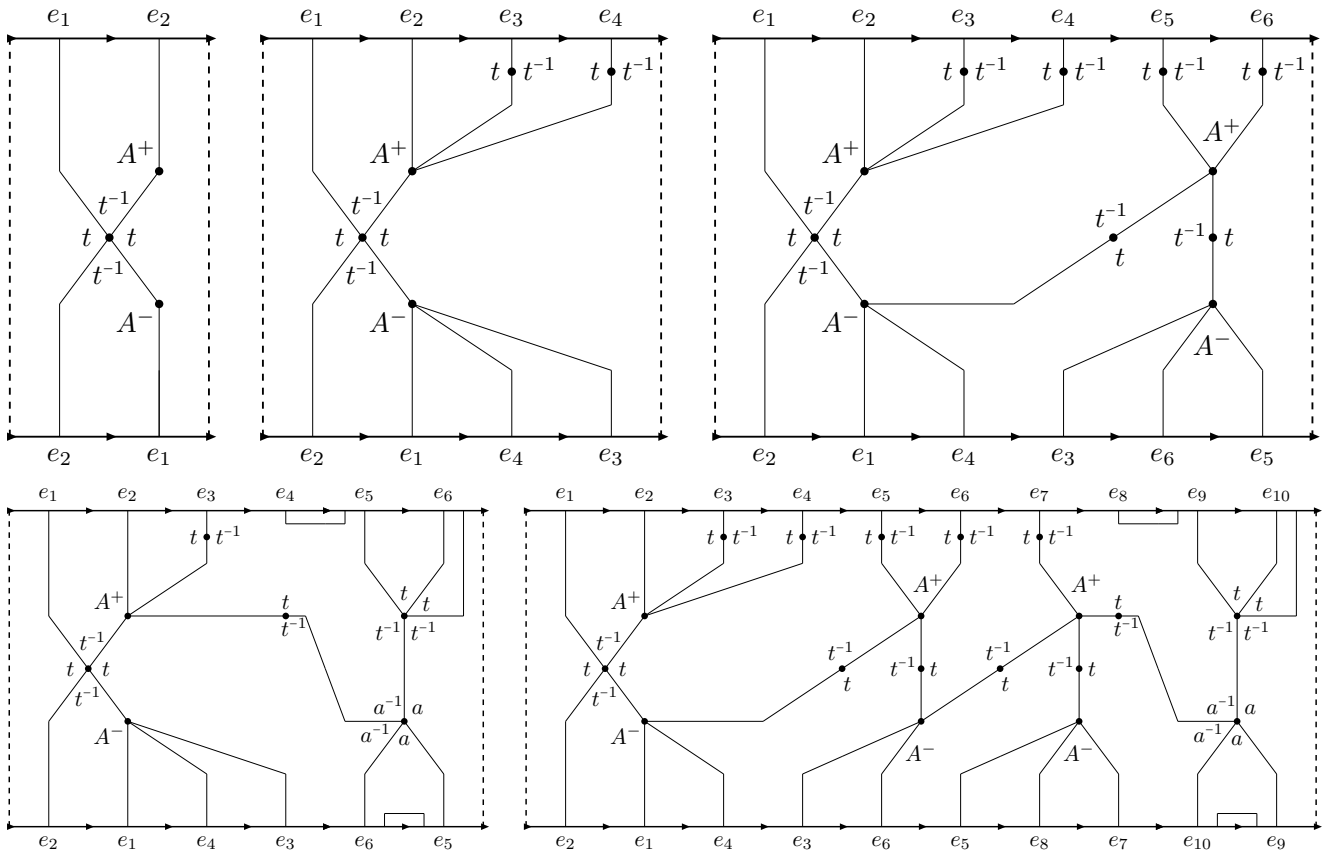


Рисунок 2.11 —  $D_{2,2}$ ,  $D_{4,4}$ ,  $D_{8,4}$ ,  $D_{6,4}$  и  $D_{14,4}$ .

**Случай 4.  $n = rN + 2s + 1$ , где  $N$  чётно**

Диаграммы для этого случая получаются из диаграммы  $D_{3,2}$ , изображённой на рисунке 2.12. Она имеет род 1 и ровно одну клетку, метка которой равняется  $[a, t]^3$ . Определим

$$D_{N+1,N} = D_{3,2} \underbrace{\succ D_{3,3} \succ \dots \succ D_{3,3}}_{(N-2)/2 \text{ слагаемых}},$$

$$D_{rN+1,N} = D_{N+1,N} \underbrace{\sqsupset D_{N-1,N-1} \sqsupset \dots \sqsupset D_{N-1,N-1}}_{r-1 \text{ слагаемых}},$$

$$D_{rN+2s+1,N} = D_{rN+1,N} \underbrace{\succ D_{+2} \succ \dots \succ D_{+2}}_s \text{ слагаемых}.$$

Примеры изображены на рисунке 2.12. Диаграмма  $D_{rN+2s+1,N}$  получается из диаграммы  $D_{rN+2s,N}$  заменой  $D_{2,2}$  на  $D_{3,2}$ . Поэтому легко понять, что единственная клетка этой диаграммы имеет метку  $[a, t]^{rN+2s+1}$  и род этой диаграммы равен роду диаграммы  $D_{rN+2s,N}$ :

$$\left\lfloor \frac{rN+2s}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{rN+2s}{N} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{rN+2s+1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{rN+2s+1}{N} \right\rfloor + 1$$

если  $2s+1 < N$ . Все вершины диаграммы  $D_{rN+2s,N}$  внутренние, если  $a^N = 1$ .

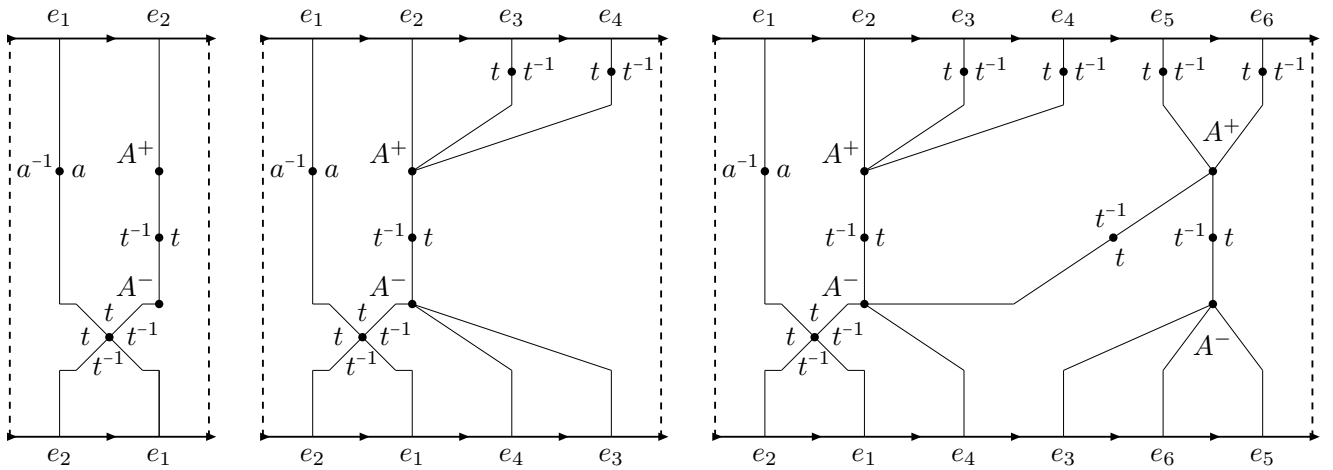


Рисунок 2.12 —  $D_{3,2}$ ,  $D_{5,4}$  и  $D_{9,4}$ .

Мы рассмотрели все случаи, а значит лемма 6 доказана.

## 2.4 Доказательства теорем

*Доказательство теоремы 5.* Положим

$$\hat{k}(n, N) = \left[ \frac{n}{2} \right] - \left[ \frac{n}{N} \right] + 1.$$

Мы хотим доказать, что  $\text{cl}([a, t]^n) = \hat{k}(n, \text{ord}(a))$ , если  $a \in A_{j_1}$  и  $t \in A_{j_2}$  — это два неединичных элемента, таких что  $\text{ord}(t) \geq \text{ord}(a)$  и  $j_1 \neq j_2$ . Обозначим  $\text{ord}(a)$  через  $N$ . Теорема 2 утверждает, что  $\text{cl}([a, t]^n) \geq \hat{k}(n, N)$ . Следовательно, достаточно показать, что

$$\text{cl}([a, t]^n) \leq \hat{k}(n, N).$$

Если  $n < N$ , это следует из примеров Каллера (в частности, если  $N$  бесконечно). Если  $N = 2$ , то это верно, потому что

$$[a, t]^n = [a, t^{(-1)^{n+1}} a t^{(-1)^n} \dots a t^{(-1)^2}].$$

Таким образом, мы считаем, что  $N \geq 3$  и  $n \geq N$ . Если  $N$  чётно или  $N$  и  $n$  нечётны, то желаемое неравенство следует из леммы 6 и леммы 5. Если  $N$  нечётно и  $n$  чётно, рассмотрим два случая:

1.  $n = rN + 2s$ , где  $r$  чётно и  $s$  такое, что  $0 \leq 2s < N$ . Из леммы 6 и леммы 5 следует, что  $\text{cl}([a, t]^{(r-1)N+2s}) \leq \hat{k}((r-1)N + 2s, N)$  и  $\text{cl}([a, t]^N) \leq \hat{k}(N, N)$ . Следовательно

$$\begin{aligned} \text{cl}([a, t]^{rN+2s}) &\leq \text{cl}([a, t]^{(r-1)N+2s}) + \text{cl}([a, t]^N) \\ &\leq \hat{k}((r-1)N + 2s, N) + \hat{k}(N, N) \\ &= \frac{(r-1)N + 2s - 1}{2} - (r-1) + 1 + \frac{N-1}{2} - 1 + 1 \\ &= \frac{rN + 2s}{2} - r + 1 = \hat{k}(rN + 2s, N). \end{aligned}$$

2.  $n = rN + 2s + 1$ , где  $r$  нечётно и  $s$  такое, что  $0 \leq 2s + 1 < N$ . Из леммы 6 и леммы 5 следует, что  $\text{cl}([a, t]^{rN}) \leq \hat{k}(rN, N)$ . Более того,  $\text{cl}([a, t]^{2s+1}) = s + 1$ , так как  $2s + 1 < N$ . Следовательно

$$\begin{aligned} \text{cl}([a, t]^{rN+2s+1}) &\leq \text{cl}([a, t]^{rN}) + \text{cl}([a, t]^{2s+1}) \\ &\leq \hat{k}(rN, N) + s + 1 = \frac{rN - 1}{2} - r + 1 + s + 1 \\ &= \frac{rN + 2s + 1}{2} - r + 1 = \hat{k}(rN + 2s + 1, N). \end{aligned}$$

□

*Доказательство теоремы 4.* Если  $N \in \{N(g) \mid g \in \hat{G}\}$ , то существуют элементы  $a \in A_{j_1}$  и  $t \in A_{j_2}$ , такие что  $\text{ord}(a) = N$ ,  $\text{ord}(t) \geq N$  и  $j_1 \neq j_2$ . Из теоремы 2 следует, что  $k(G, n, N) \geq \hat{k}(n, N)$  и из теоремы 5 следует, что  $k(G, n, N) \leq \hat{k}(n, N)$ , так как  $N([a, t]) = N$ . Таким образом  $k(G, n, N) = \hat{k}(n, N)$ . □

*Доказательство теоремы 3.* Существуют элементы  $a \in A_{j_1}$  и  $t \in A_{j_2}$ , такие что  $\text{ord}(a) = N(G)$ ,  $\text{ord}(t) \geq N(G)$  и  $j_1 \neq j_2$ . Из следствия 1 следует, что  $k(G, n) \geq \hat{k}(n, N(G))$  и из теоремы 5 следует, что  $k(G, n) \leq \hat{k}(n, N(G))$ . Таким образом  $k(G, n) = \hat{k}(n, N(G))$ . □

## 2.5 Пример коммутаторного разложения

Используя диаграммы, построенные в этой главе, можно получить явную алгебраическую форму разложения степени в произведение минимального возможного количества коммутаторов. Покажем это на примере элемента  $[a, t]^5$  в группе  $\langle a \rangle_3 * \langle t \rangle$ , который в силу теоремы 5 должен раскладываться в произведение двух коммутаторов.

Для этого воспользуемся построенной ранее диаграммой  $D_{5,3}$ . Рассмотрим замкнутые пути  $P_1, P_2, P_3$  и  $P_4$  во вспомогательном графе  $\Gamma'$  этой диаграммы, изображенные на рисунке 2.13. Все эти пути начинаются в точке  $S$ . Путь  $P_1$  изображен с небольшим сдвигом одного из его участков, чтобы был понятен порядок обхода его рёбер. Пути  $P_2, P_3$  и  $P_4$  получаются из простых замкнутых путей, начинающихся в точке  $Q$  (своей для каждого пути), при помощи сопряжения простыми путями, соединяющими точку  $Q$  и точку  $S$ . Направления обхода всех этих путей изображены на соответствующих рисунках. Обозначим через  $P$  граничный путь единственной клетки диаграммы  $D_{5,3}$ , который начинается в точке  $S$  и имеет метку  $[t, a^{-1}]^5$ . Пути  $P_1, P_2, P_3$  и  $P_4$  порождают фундаментальную группу  $\pi_1(\Gamma', S)$ , и путь  $P$ , как элемент  $\pi_1(\Gamma', S)$ , раскладывается через эти порождающие в произведение  $P_2^{-1}P_1^{-1}P_2P_1P_4^{-1}P_3^{-1}P_4P_3$ . Это доказывается прямой проверкой. Легче всего это понять, предварительно заметив, что путь  $P_1P_4^{-1}P_3^{-1}$  гомотопен пути  $P_5$ , изображенному на рисунке 2.13.

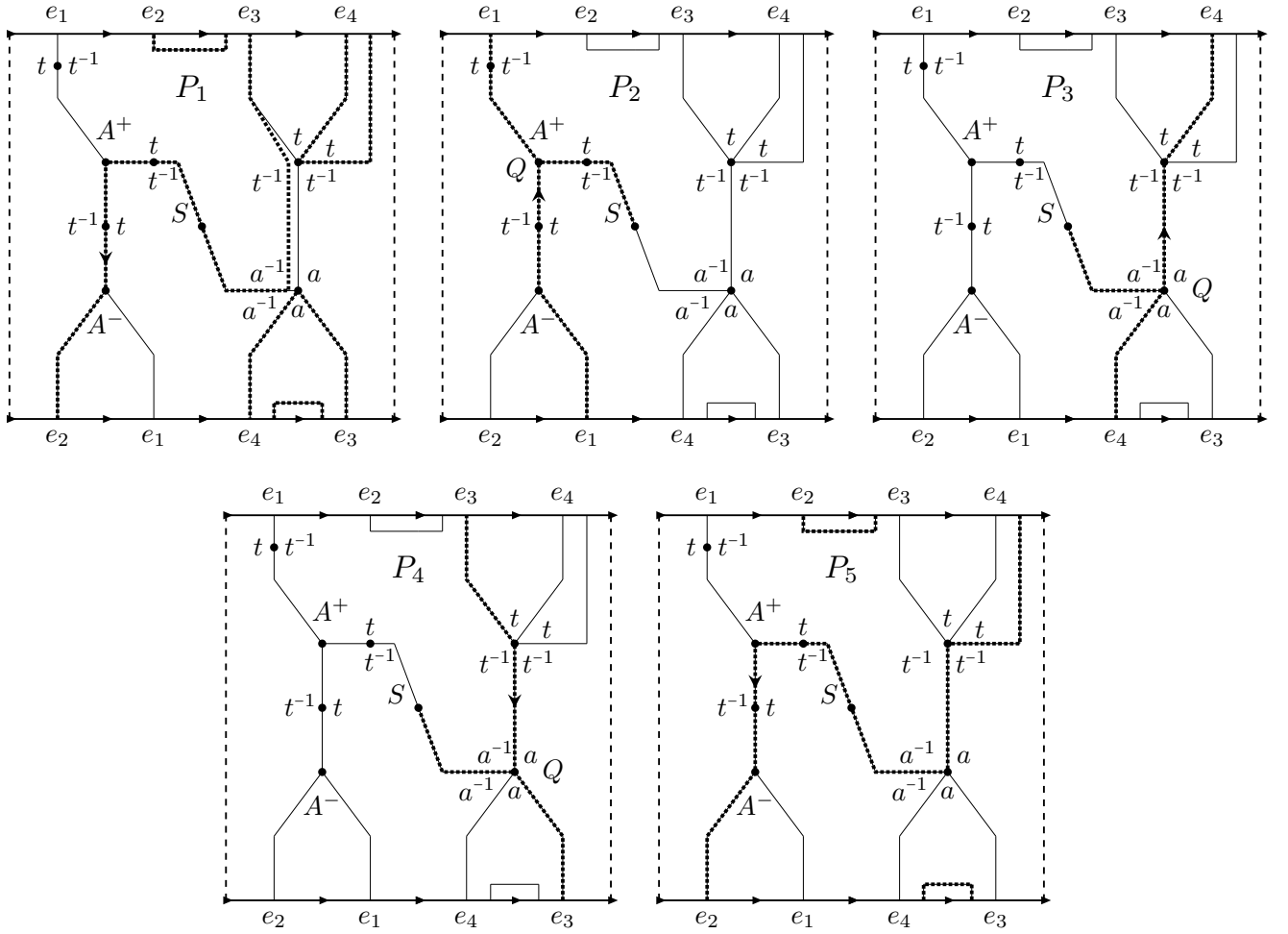


Рисунок 2.13 — Пути  $P_1, P_2, P_3, P_4$  и  $P_5 \sim P_1 P_4^{-1} P_3^{-1}$  в диаграмме  $D_{5,3}$

Так как в диаграмме  $D_{5,3}$  все вершины внутренние, из свойств меток путей получаем, что

$$[t, a^{-1}]^5 = l(P) = l(P_2^{-1} P_1^{-1} P_2 P_1 P_4^{-1} P_3^{-1} P_4 P_3) = [l(P_2), l(P_1)][l(P_4), l(P_3)].$$

Заметим, что  $[t, a^{-1}]^5 = a[a, t]^5 a^{-1}$ , а значит

$$[a, t]^5 = [l(P_2)^a, l(P_1)^a][l(P_4)^a, l(P_3)^a].$$

Выпишем метки путей (напомним, что  $a^3 = 1$ ):

$$l(P_1) = t^{-1} a t a t^{-1} a^{-1} t a,$$

$$l(P_2) = t^{-1} a^{-1} t a t^{-1} a^{-1} t,$$

$$l(P_3) = a^{-1} t^{-1} t a^{-1} = a,$$

$$l(P_4) = a^{-1} a t a = t a.$$

Объединяя всё вместе, получаем искомое разложение:

$$[a, t]^5 = [a^{-1} t^{-1} a^{-1} t a t^{-1} a^{-1} t a, a^{-1} t^{-1} a t a t^{-1} a^{-1} t a^{-1}][a^{-1} t a^{-1}, a].$$

Таким образом, мы получили разложение элемента  $[a, t]^5$  в произведение двух коммутаторов в явном виде. Это разложение верно для любых двух элементов любой группы, коль скоро  $a^3 = 1$ .



## Глава 3. Асферичность групп, заданных графами

### 3.1 Введение

В данной главе мы получаем новые достаточные условия асферичности групп, заданных графами.

**Определение 13.** Копредставление  $\langle S \mid R \rangle$  называется *асферическим*, если его стандартный двумерный клеточный комплекс  $K(S; R)$  асферичен, то есть  $\pi_q(K(S; R)) = 0$  для всех  $q \geq 2$  (где  $\pi_q$  — это гомотопические группы).

Напомним, что *стандартный двумерный клеточный комплекс*  $K(S; R)$  копредставления  $\langle S \mid R \rangle$  — это двумерный клеточный комплекс, имеющий единственную вершину, чьи рёбра находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами множества  $S$  и чьи двумерные грани находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами множества  $R$ , при этом каждая грань вклеена по своей границе согласно соответствующему этой грани элементу  $R$ .

В этой главе мы вводим понятие асферического графа, которое до некоторой степени можно считать обобщением на графический случай понятия диаграммной приводимости, введенной Герстеном [21]. Оно позволяет с легкостью переносить известные классические условия, влекущие асферичность копредставления, на группы, заданные графами. Так мы показываем, что не только графический аналог условия  $C(6)$  влечёт асферичность копредставления [23], но и графические аналоги условий  $C(4)\&T(4)$  и  $C(3)\&T(6)$  (определения этих классических условий малых сокращений могут быть найдены, например, в [44, Глава V]). Также мы показываем, как можно применить лемму о столкновениях из [29] для доказательства асферичности в графическом случае.

Мы начинаем с введения в теорию групп, заданных графами, в разделе 3.2. В разделе 3.3 формулируется основная теорема и приводится план её доказательства. Используя эту теорему, мы доказываем в разделе 3.4, что графические условия малых сокращений влекут асферичность, а также показываем, как можно применить лемму о столкновениях для доказательства асферичности групп, заданных графами. Раздел 3.5 посвящен связи между зависимостями соотношений копредставления и сферическими диаграммами над

этим копредставлением. За ним следует раздел 3.6 с доказательством основной теоремы.

### 3.2 Группы, заданные графами, и графические условия малых сокращений

Мы будем использовать определение графа согласно [44], то есть будем считать *графом* совокупность двух множеств  $V$  и  $E$  и трёх отображений  $\alpha: E \rightarrow V$ ,  $\omega: E \rightarrow V$ ,  $\cdot^{-1}: E \rightarrow E$ . Множество  $V$  называется *множеством вершин*, а  $E$  *множеством ребер*. Если  $e \in E$ , то  $\alpha(e)$  называют *началом ребра*, а  $\omega(e)$  называют *концом ребра*. Отображение  $\cdot^{-1}$  сопоставляет каждому ребру его противоположное. Для удобства  $\cdot^{-1}(e)$  обозначают как  $e^{-1}$ . Отображение  $\cdot^{-1}$  должно быть инволюцией без неподвижных элементов, такой что  $\alpha(e^{-1}) = \omega(e)$  и  $\omega(e^{-1}) = \alpha(e)$ . По сути это определение неориентированного графа, так как вместе с каждым своим ребром  $e$  граф содержит ребро  $e^{-1}$ .

*Путь* в графе называется конечная последовательность рёбер, обозначаемая через  $p = (e_1, \dots, e_n)$ , такая что  $\alpha(e_{i+1}) = \omega(e_i)$  для  $1 \leq i < n$ . Путь начинается в точке  $\alpha(p) = \alpha(e_1)$  и кончается в точке  $\omega(p) = \omega(e_n)$ .

*Разметкой графа*  $\Gamma$  множеством меток  $S$  называется такое отображение  $\ell: E \rightarrow S \sqcup S^{-1}$ , что  $\ell(e^{-1}) = \ell(e)^{-1}$ . *Помеченный граф* — это граф вместе с некоторой его разметкой. Можно считать, что помеченный граф — это ориентированный граф, каждому ребру которого сопоставлен элемент из множества  $S$ . Граф *правильно помечен*, если любые два ребра, входящие в одну вершину, имеют разные метки и если любые два ребра, выходящие из одной вершины, имеют разные метки.

Отображение  $\ell$  может быть продолжено на множество всех путей в графе  $\Gamma$ . Пусть  $p = (e_1, \dots, e_n)$  — это путь в графе, тогда положим  $\ell(p) = \ell(e_1) \cdots \ell(e_n)$ , где  $w_1 \cdot w_2$  — это конкатенации. Таким образом,  $\ell(p)$  — это слово над алфавитом  $S \sqcup S^{-1}$ , не обязательно приведённое, которое называется *меткой пути*  $p$ .

Пусть  $p = (e_1, \dots, e_n)$  — это путь в графе. Путь  $p$  *приведён*, если он не имеет подпути типа  $(e, e^{-1})$ . Путь называется *тривиальным*, если после последовательного удаления всех подпутей типа  $(e, e^{-1})$  он становится пустым. Путь

$p$  замкнут, если его начало и конец совпадают или если  $p$  пуст. Путь  $p$  прост, если  $p$  не пуст и не имеет непустых замкнутых подпутей. Путь  $p$  простой замкнутый, если  $p$  нетривиален, замкнут и никакой собственной подпути  $p$  не является замкнутым. Множество циклических сдвигов замкнутого пути называется *циклом*. Путь  $p$  называется *дугой*, если все его вершины, кроме быть может конечных, имеют степень 2. Дуга называется *ростком*, если хотя бы одна его конечная вершина имеет степень 1.

Пусть  $\Gamma$  — это помеченный множеством  $S$  граф. Будем обозначать множество меток всех замкнутых путей в  $\Gamma$  как  $R_c$ , множество меток всех простых замкнутых путей в  $\Gamma$  как  $R_s$ , и множество циклически приведённых меток путей, образующих базис фундаментальной группы каждой связной компоненты графа  $\Gamma$ , как  $R_f$  (отметим, что  $R_c$  и  $R_s$  определяются самим графом  $\Gamma$ , в то время как  $R_f$  зависит от конкретно выбранного базиса фундаментальной группы  $\Gamma$ ). Определим группу  $G(\Gamma)$  одним из трёх копредставлений:  $\langle S \mid R_c \rangle$ ,  $\langle S \mid R_s \rangle$  или  $\langle S \mid R_f \rangle$ . Ясно, что все эти копредставления задают одну и ту же группу.

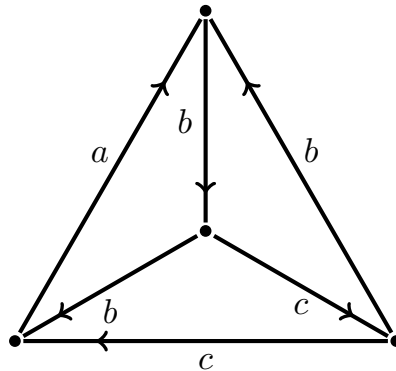


Рисунок 3.1 —  $G(\Gamma) \cong \langle a, b, c \mid bbc, c^{-1}bc^{-1}, b^{-1}a^{-1}b^{-1} \rangle$

*Поднятием слова  $w$*  в помеченный граф  $\Gamma$  называется такой путь  $\bar{p}$  в этом графе, что  $\ell(\bar{p}) \equiv w$  (то есть метка пути  $\bar{p}$  посимвольно совпадает со словом  $w$ ). Слово  $w$  называется *куском* (по отношению к графу  $\Gamma$ ), если оно имеет хотя бы два различных поднятия в граф  $\Gamma$ . Пусть  $p$  — это путь в некотором помеченном графе. *Поднятием пути  $p$*  в помеченный граф  $\Gamma$  называется такой путь  $\bar{p}$  в графе  $\Gamma$ , что  $\ell(\bar{p}) \equiv \ell(p)$  (то есть метка пути  $p$  посимвольно совпадает с меткой пути  $\bar{p}$ ). Пусть  $p$  — это путь в некотором помеченном графе. Путь  $p$  называется *куском* (по отношению к помеченному графу  $\Gamma$ ), если он имеет хотя бы два различных поднятия в граф  $\Gamma$ . Пусть  $\gamma$  — это цикл в помеченном графе. *Поднятием цикла  $\gamma$*  в граф  $\Gamma$  называется такой цикл  $\bar{\gamma}$  в графе  $\Gamma$  вместе с отображением  $f: \gamma \rightarrow \bar{\gamma}$ , что  $f$  коммутирует с циклическими сдвигами и  $f(p)$  является поднятием  $p$  для любого  $p \in \gamma$ .

Везде далее будет ясно, о каком именно графе  $\Gamma$  идёт речь, поэтому мы будем называть слова и пути просто «кусками», а не «кусками по отношению к графу  $\Gamma$ ».

Рассмотрим пример. Пусть  $\Gamma$  — это помеченный граф, изображённый на рисунке 3.1. Тогда среди слов длины 1 кусками будут слова  $b$ ,  $b^{-1}$ ,  $c$  и  $c^{-1}$ . Слова  $a$  и  $a^{-1}$  кусками не являются. Среди несократимых слов длины 2 будет только два куска — слова  $bb$  и  $(bb)^{-1}$ .

**Графическое условие  $C(k)$  [23].** Пусть  $\Gamma$  — это помеченный граф и  $k \in \mathbb{N}$ . Мы говорим, что  $\Gamma$  удовлетворяет графическому условию  $C(k)$  (или является  $C(k)$ -графом), если

- $\Gamma$  помечен правильно и
- метка никакого простого замкнутого пути не является конкатенацией строго меньше, чем  $k$  кусков.

Сразу отметим, что если граф  $\Gamma$  удовлетворяет графическому условию  $C(2)$ , то этот граф помечен правильно и любое слово из  $R_s$  имеет единственное поднятие в этот граф (потому что иначе бы существовал простой замкнутый путь, который является куском).

Помеченный граф, изображённый на рисунке 3.1, удовлетворяет графическому условию  $C(2)$ , но не удовлетворяет графическому условию  $C(3)$ , так как простой замкнутый путь с меткой  $bbs$  распадается на куски  $bb$  и  $s$ .

Пусть  $R$  — это некоторое множество слов. Через  $R_{sym}$  обозначим множество, которое состоит из всех циклических сдвигов элементов множеств  $R$  и  $R^{-1}$ .

Определим диаграммы над копредставлением согласно [23] и [11]. Под *дисковой диаграммой*  $D$  в алфавите  $S$  мы будем понимать конечный односвязный клеточный 2-комплекс, вложенный в  $\mathbb{R}^2$ , такой что его 1-остов является помеченным множеством  $S$  графом. *Простой дисковой диаграммой* будем называть дисковую диаграмму гомеоморфную диску в  $\mathbb{R}^2$ .

Чтобы определить сферические диаграммы, для начала индуктивно определим *сферический комплекс*. Во-первых, 2-сфера, вложенная в  $\mathbb{R}^3$ , — это сферический комплекс. Во-вторых, если  $D$  — это сферический комплекс, то комплекс  $D'$ , полученный из  $D$  приклеиванием по точке к его наружной стороне простой кривой или 2-сферы, тоже является сферическим комплексом. Всё, что может быть получено из 2-сферы, вложенной в  $\mathbb{R}^3$ , конечным числом таких приклеиваний, будем называть сферическим комплексом. Другими словами, сферический комплекс можно представлять себе как вложенное в  $\mathbb{R}^3$

дерево, некоторые (хотя бы одна) вершины которого заменены на сферы. Под *сферической диаграммой*  $D$  в алфавите  $S$  мы будем понимать конечный клеточный 2-комплекс гомеоморфный некоторому сферическому комплексу, такой что его 1-остов является помеченным множеством  $S$  графом. *Простой сферической диаграммой* будем называть сферическую диаграмму гомеоморфную 2-сфере.

Будем называть замыкания 1-клеток и 2-клеток диаграммы *рёбрами* и *клетками* соответственно. *Меткой клетки* называется метка её некоторого положительно ориентированного граничного пути (как пути в помеченном множестве  $S$  графе). Мы считаем, что метка клетки определена с точностью до сопряжённости.

*Сферическая (дисковая) диаграмма над копредставлением  $\langle S \mid R \rangle$*  — это сферическая (дисковая) диаграмма в алфавите  $S$ , метка каждой клетки которой лежит в  $R_{sym}$ . *Простая сферическая (дисковая) диаграмма над копредставлением  $\langle S \mid R \rangle$*  — это простая сферическая (дисковая) диаграмма в алфавите  $S$ , метка каждой клетки которой лежит в  $R_{sym}$ .

Обозначим через  $\partial\Pi^+$  и  $\partial\Pi^-$  циклы, состоящие из положительно и отрицательно ориентированных граничных путей клетки  $\Pi$  соответственно. Ясно, что  $\partial\Pi^- = \{\gamma^{-1} : \gamma \in \partial\Pi^+\}$ . Если  $P$  и  $Q$  — это два множества путей, то положим  $P \pitchfork Q = \{r : \exists p \in P, \exists q \in Q \text{ такие, что } p = rp', q = rq'\}$ .

**Определение 14.** Пусть  $\Gamma$  — это помеченный множеством  $S$  граф и пусть  $D$  — это диаграмма над  $\langle S \mid R_c \rangle$ . Пусть  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  — это две клетки  $D$  (не обязательно различных), и пусть  $p \in \partial\Pi_1^+ \pitchfork \partial\Pi_2^-$ . Мы говорим, что  $p$  *происходит из графа  $\Gamma$* , если существуют такие поднятия  $\partial\Pi_1^+$  и  $\partial\Pi_2^-$  в  $\Gamma$ , что поднятие  $p$  в  $\Gamma$  через них совпадают.

Пример изображён на рисунке 3.2. Отметим, что согласно этому определению рёбра границы диаграммы считаются непроисходящими и что если путь  $p$ , лежащий между клеток  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , не происходит из графа  $\Gamma$ , то тогда он является куском.

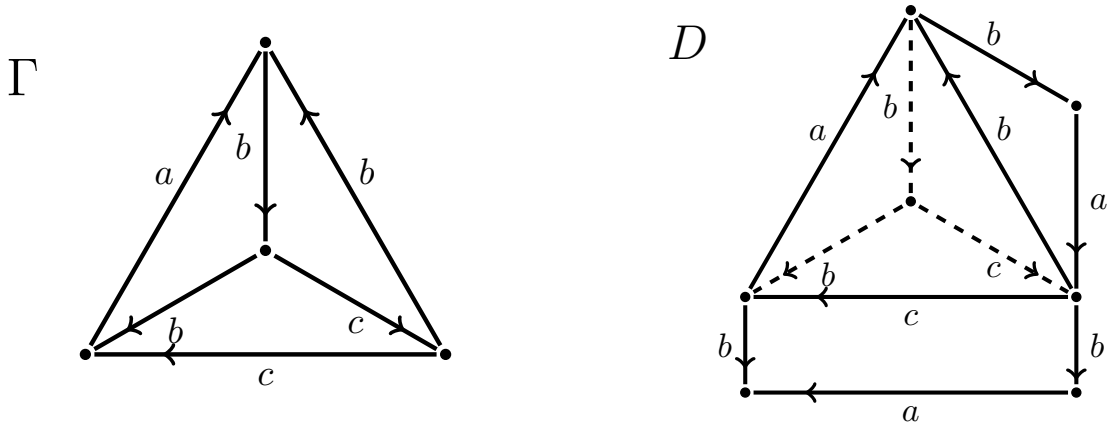


Рисунок 3.2 — Граф  $\Gamma$  и диаграмма  $D$  над  $\langle a, b, c \mid R_s \rangle$ . Пунктиром отмечены происходящие из графа рёбра диаграммы.

### 3.3 Основная теорема

**Определение 15.** Пусть  $\Gamma$  — это помеченный множеством  $S$  граф. Будем говорить, что диаграмма  $D$  над копредставлением  $\langle S \mid R_s \rangle$  *графически приведена*, если в ней нет происходящих из графа  $\Gamma$  рёбер.

**Определение 16.** Пусть  $\Gamma$  — это помеченный множеством  $S$  граф. Будем говорить, что граф  $\Gamma$  *асферичен*, если он удовлетворяет графическому условию  $C(2)$  и над копредставлением  $\langle S \mid R_s \rangle$  нет графически приведённых простых сферических диаграмм.

*Замечание 5.* Отметим, что отсутствие графически приведённых простых сферических диаграмм равносильно отсутствию графически приведённых сферических диаграмм, так как если существует приведённая сферическая диаграмма, то из неё всегда можно выделить приведённую простую сферическую диаграмму.

Основным результатом данной главы является следующая теорема.

**Теорема 6.** *Если помеченный множеством  $S$  граф  $\Gamma$  асферичен, то копредставление  $\langle S \mid R_f \rangle$  асферично.*

Отметим, что из асферичности группы  $G = \langle S \mid R \rangle$  следует, что её стандартный двумерный комплекс представления  $K(S; R)$  является не более чем двумерным пространством Эйленберга-Маклейна типа  $K(G, 1)$ . Из этого в частности следует, что группа  $G$  имеет когомологическую размерность не выше двух, а значит не имеет кручения [3, Раздел VIII.2].

Приведем общий план доказательства теоремы. Нам понадобится понятие зависимости между соотношениями копредставления  $\langle S \mid R \rangle$ . Положим  $R^{F(S)} := \{ur^\varepsilon u^{-1} \mid r \in R, u \in F(S), \varepsilon \in \{+1, -1\}\}$ . Зависимостью над  $\langle S \mid R \rangle$  будем называть конечную последовательность  $\pi = (p_1, \dots, p_n)$  элементов из  $R^{F(S)}$ , такую что  $p_1 \cdots p_n = 1$  в  $F(S)$ .

Среди зависимостей есть те, которые следует считать тривиальными. Для этого вводятся так называемые *преобразования Пайфер* [6]:

1. Заменить пару подряд идущих элементов  $(p_i, p_{i+1})$  на пару  $(p_i p_{i+1} p_i^{-1}, p_i)$  или на пару  $(p_{i+1}, p_{i+1}^{-1} p_i p_{i+1})$ .
2. Удалить пару подряд идущих элементов  $(p_i, p_{i+1})$ , если  $p_i p_{i+1} = 1$  в  $F(S)$ .
3. Вставить в любое место пару обратных элементов  $(p, p^{-1})$  для произвольного  $p \in R^{F(S)}$ .

Зависимость называется *тривиальной*, если с помощью конечного числа преобразований Пайфер её можно свести к пустой зависимости.

Также нам понадобится понятие точного копредставления. Копредставление  $\langle S \mid R \rangle$  называется *точным*, если все соотношения из  $R$  не пусты и свободно приведены, и если для любых двух различных соотношений  $r$  и  $r'$  из  $R$  ни  $r$ , ни  $r^{-1}$  не являются сопряжёнными к  $r'$  (как элементы свободной группы  $F(S)$ ).

Из предложений 1.3 и 1.5 работы [6] следует, что копредставление  $\langle S \mid R \rangle$  асферично тогда и только тогда, когда:

- копредставление точно,
- никакое соотношение не является точной степенью,
- любая зависимость между соотношениями этого копредставления тривиальна.

Лемма 2.22 работы [23] обеспечивает два первых условия: точность копредставления и отсутствие точных степеней. Таким образом, нам достаточно показать, что любая зависимость между соотношениями копредставления  $\langle S \mid R_f \rangle$  тривиальна. Это будет сделано в разделе 3.6. Для этого мы воспользуемся связью между зависимостями соотношений копредставления и сферическими диаграммами над этим копредставлением, которая была получена в [11]. Мы предположим противное, что над копредставлением  $\langle S \mid R_f \rangle$  есть нетривиальные зависимости или, что то же самое, есть нетривиальные сферические диаграммы. Будем называть непроисходящим остовом диаграммы ту часть 1-остова сферической диаграммы, которая состоит из всех непроисходящих из

графа  $\Gamma$  ребер. Рассмотрим нетривиальную сферическую диаграмму с наименьшим неприсходящим остовом. Оказывается, что если стереть в этой диаграмме все рёбра, происходящие из графа, то вновь полученная диаграмма будет простой сферической диаграммой над копредставлением  $\langle S \mid R_s \rangle$ . При этом в силу построения она будет графически приведена. А это противоречит асферичности графа  $\Gamma$ .

### 3.4 Следствия основной теоремы

Покажем, в каком смысле понятие асферического графа обобщает понятие диаграммной приводимости [21]. Пара различных клеток в диаграмме  $D$  над копредставлением  $\langle S \mid R \rangle$  называется *сократимой*, если эти клетки имеют общее ребро, относительно которого их граничные метки зеркально симметричны. Сферическая диаграмма называется *приведённой*, если в ней нет сократимых пар. Если среди соотношений копредставления нет истинных степеней и над копредставлением не существует приведённых сферических диаграмм, то такое копредставление называется *диаграммно приводимым*. Из диаграммной приводимости следует асферичность (замечание 3.2 из [21]), при этом самую диаграммную приводимость возможно получить при помощи, например, теста раскраской [38], весового теста [21] и метода движений [30]. Также хорошо известно, что если среди соотношений копредставления нет истинных степеней, то диаграммная приводимость следует из классических условий малых сокращений (замечание 4.18 из [21]).

Назовём копредставление  $\langle S \mid R \rangle$  *сильно точным*, если все соотношения из  $R$  не пусты и циклически приведены, и если для любых двух различных соотношений  $r$  и  $r'$  из  $R$  ни  $r$ , ни  $r^{-1}$  не являются подсловом никакого циклического сдвига  $r'$ . Ясно, что любое копредставление можно сделать сильно точным при помощи циклических приведений и удалений ненужных подслов.

Пусть дано сильно точное копредставление  $\langle S \mid R \rangle$ . Рассмотрим помеченный множеством  $S$  граф  $\Gamma(S, R)$ , который является несвязным объединением циклических графов с меткой  $r$  для каждого  $r \in R$ . Ясно, что тогда  $\langle S \mid R_f \rangle$  совпадает с изначальным копредставлением  $\langle S \mid R \rangle$  (с точностью до циклических сдвигов и обращения соотношений). Заметим, что асферичность графа



$\Gamma(S, R)$  равносильна диаграммной приводимости копредставления  $\langle S \mid R \rangle$ . Действительно, во-первых, выполнение графического условия  $C(2)$  равносильно отсутствию истинных степеней среди множества соотношений  $R$ . Во-вторых, так как граф является несвязным объединением различных циклических графов, то ребро в некоторой диаграмме над  $\langle S \mid R_s \rangle$  может происходить из графа тогда и только тогда, когда оно лежит на пересечении двух различных клеток, и при этом метки этих клеток зеркально симметричны относительно этого ребра (заметим, что в обоих пунктах важна сильная точность копредставления). Таким образом получаем, что для сильно точного копредставления  $\langle S \mid R \rangle$  диаграммная приводимость эквивалентна асферичности соответствующего графа  $\Gamma(S, R)$ .

### 3.4.1 Условия малых сокращений

Напомним, что классическое условие малых сокращений  $C(q) \& T(p)$  (см., например, [44, Глава V]) по сути значит, что в любой приведённой сферической диаграмме каждая клетка состоит не менее чем из  $q$  дуг, а степень каждой вершины либо не менее чем  $p$ , либо равна 2. Графический аналог условия  $C(q)$  уже был дан в этой главе, поэтому остаётся сформулировать аналог условия  $T(p)$ .

Пусть  $\Gamma$  — это помеченный множеством  $S$  граф, удовлетворяющий графическому условию  $C(2)$ . Пусть  $r_1$  и  $r_2$  — это два элемента из множества  $R_s$ . Будем говорить, что  $r_1$  и  $r_2$  *взаимно происходят* из графа, если  $r_1 = r'_1 c$ ,  $r_2 = c^{-1} r'_2$  и поднятие  $c$  в граф  $\Gamma$  через  $r_1$  и через  $r_2$  совпадают (напомним, что так как  $\Gamma$  — это  $C(2)$ -граф, то  $r_1$  и  $r_2$  имеют единственные поднятия как элементы  $R_s$ ). Теперь в качестве определения графического условия  $T(p)$  можно взять следующую модификацию классического определения.

**Графическое условие  $T(p)$ .** Пусть  $\Gamma$  — это помеченный множеством  $S$  граф, удовлетворяющий графическому условию  $C(2)$ , и  $p \in \mathbb{N}$ . Мы говорим, что  $\Gamma$  удовлетворяет графическому условию  $T(p)$  (или является  $T(p)$ -графом), если для каждого  $h \in \mathbb{N}$ , такого что  $3 \leq h < p$ , и для каждых  $r_1, \dots, r_h \in R_s$ , таких что последовательные элементы  $r_i$  и  $r_{i+1}$  не являются взаимно происходящими из графа для всех  $i = 1, \dots, h$  (где индексы

берутся по модулю  $h$ ), верно, что по крайней мере одно из произведений  $r_1r_2, \dots, r_{h-1}r_h, r_hr_1$  приведено.

Это определение сохраняет геометрическую сущность условия  $T(p)$  и означает, что в любой графически приведённой диаграмме степень любой внутренней вершины либо не менее чем  $p$ , либо равна 2.

Теперь покажем, что из выполнения любого из графических условий  $C(6)$ ,  $C(4)\&T(4)$  или  $C(3)\&T(6)$  следует асферичность графа. Для этого нам потребуются  $[p, q]$ -диаграммы.

Пусть  $p$  и  $q$  — это положительные целые числа, такие что  $1/p + 1/q = 1/2$ . *Степень клетки* диаграммы — это количество ребер в её граничном пути. Если в непустой диаграмме  $D$  степень каждой внутренней вершины не меньше  $p$ , а степень каждой внутренней клетки не меньше  $q$ , то  $D$  называется  $(p, q)$ -*диаграммой*. Если в диаграмме  $D$  степень каждой внутренней вершины не меньше  $p$ , а степень каждой клетки не меньше  $q$ , то  $D$  называется  $[p, q]$ -*диаграммой*.

Из [44, Глава V] известен следующий факт.

**Формула кривизны.** Пусть  $D$  — это односвязная  $[p, q]$ -диаграмма, содержащая не менее двух вершин. Тогда

$$\sum_{v \in \partial D} \left\lfloor \frac{p}{q} + 2 - d(v) \right\rfloor \geq p$$

Далее считаем, что  $(p, q)$  это одна из пар  $(3, 6)$ ,  $(4, 4)$  или  $(6, 3)$ . Из формулы кривизны следует, что простых сферических  $(p, q)$ -диаграмм не существует. Действительно, во-первых, простая сферическая  $(p, q)$ -диаграмма состоит более, чем из одной вершины, потому что иначе бы существовала клетка, степень которой равна 1. Во-вторых, можно расклеить диаграмму по произвольному ребру, соединяющему 2 различные вершины. Тогда будет получена  $[p, q]$ -диаграмма, имеющая ровно 2 вершины на границе, степень каждой из которых не менее трёх, что противоречит формуле кривизны.

Введём также операцию «забывания» вершин степени 2. Пусть в диаграмме  $D$  нет ростков. Дугу в диаграмме  $D$ , концы которой имеют степени больше двух, назовём *полной*. Тогда если заменить в диаграмме  $D$  каждую полную дугу на ребро, то в  $D$  не останется вершин степени 2. Теперь мы готовы доказать, что из выполнения любого из графических условий малых сокращений следует асферичность графа.

**Теорема 7.** *Если помеченный множеством  $S$  граф  $\Gamma$  удовлетворяет любому из графических условий  $C(6)$ ,  $C(4)\&T(4)$  или  $C(3)\&T(6)$ , то копредставление  $\langle S \mid R_f \rangle$  асферично.*

*Доказательство.* В силу теоремы 6 достаточно доказать, что граф  $\Gamma$  асферичен. Предположим противное, пусть над  $\langle S \mid R_s \rangle$  существует простая сферическая диаграмма  $D$ , никакое ребро которой не происходит из графа. Граф  $\Gamma$  в любом случае является  $C(2)$ -графом, а значит помечен правильно и метка любого элемента  $r \in R_s$  приведена. Отсюда следует, что у 1-остова диаграммы  $D$  нет ростков. Для любых двух соседних клеток  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  их общая граница является куском по отношению к  $\Gamma$ , так как она не происходит из графа. Если выполнено условие  $C(q)$ , то каждая клетка диаграммы  $D$  состоит не менее чем из  $q$  полных дуг. Если выполнено условие  $T(p)$ , то степень каждой вершины диаграммы  $D$  либо не менее чем  $p$ , либо равна 2. При этом всегда можно сказать, что степень каждой вершины диаграммы  $D$  не менее чем 2, так как у диаграммы  $D$  нет ростков. Отсюда следует, что после «забывания» вершин степени 2, диаграмма  $D$  превратится

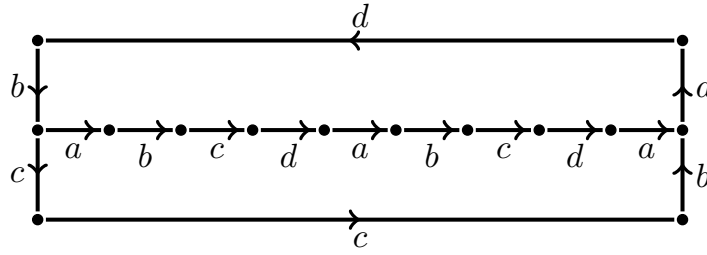
- в простую сферическую  $(3, 6)$ -диаграмму, если  $\Gamma$  удовлетворяет графическому условию  $C(6)$ ;
- в простую сферическую  $(4, 4)$ -диаграмму, если  $\Gamma$  удовлетворяет графическому условию  $C(4)\&T(4)$ ;
- в простую сферическую  $(6, 3)$ -диаграмму, если  $\Gamma$  удовлетворяет графическому условию  $C(3)\&T(6)$ .

В любом случае, таких диаграмм не существует. Противоречие.  $\square$

Для графического условия  $C(6)$  этот результат был впервые получен Грубером в [23].

В качестве примера рассмотрим копредставление  $\langle a, b, c, d \mid (abcd)^2 ad^2 b = 1, (abcd)^2 a = c^2 b \rangle$ , которое может быть задано помеченным графом  $\Gamma$ , изображённым на рисунке 3.3. Несложно понять, что это копредставление не удовлетворяет классическому условию  $C(6)$ . Также оно не удовлетворяет классическому условию  $T(4)$ , потому что в качестве соотношений  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$  можно взять  $c^2 ba^{-1} (abcd)^{-2}$ ,  $(abcd)^2 ad^2 b$  и  $b^{-1} a^{-1} c^2 ba^{-1} (abcd)^{-1} d^{-1} c^{-1}$ . В свою очередь, граф  $\Gamma$  не удовлетворяет графическому условию  $C(6)$ , потому что простой цикл  $(abcd)^2 ad^2 b$  распадается на куски  $abcd a \cdot bcda \cdot d \cdot d \cdot b$ .

Тем не менее, можно проверить, что граф  $\Gamma$  удовлетворяет графическому условию  $C(4)\&T(4)$  и поэтому, в силу только что доказанной теоремы, данное

Рисунок 3.3 — Пример  $C(4)\&T(4)$ -графа

копредставление асферично. Выполнение графического условия  $C(4)$  (и даже  $C(5)$ ) проверяется легко.

Установим выполнение графического условия  $T(4)$ . Для этого нужно показать, что для любой тройки соотношений  $r_1, r_2, r_3 \in R_s$ , таких что в каждой паре подряд идущих элементов происходит сокращение, найдётся взаимно происходящая из графа пара. Чтобы проверить, что в тройке  $r_1, r_2, r_3$  каждая пара имеет сокращение, достаточно посмотреть только лишь на первые и последние буквы каждого соотношения. При этом так как в  $R_s$  лежат все циклические сдвиги слов, то это значит, что достаточно смотреть на двухбуквенные под-слова соотношений.

Заметим, что любое двухбуквенное подслово соотношения из  $R_s$  имеет вид  $xy$ , где либо  $x, y \in \{a, b, c, d\}$ , либо  $x, y \in \{a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}, d^{-1}\}$ , исключениями являются только подслова  $ab^{-1}, ba^{-1}, a^{-1}c, c^{-1}a$ . Ясно, что если в тройке подслов в каждой паре происходит сокращение, то значит хотя бы одно из них должно быть подсловом-исключением. Небольшим перебором получаем, что есть всего 4 подходящие тройки:  $(ab^{-1}, bd, d^{-1}a^{-1})$ ,  $(a^{-1}c, c^{-1}b^{-1}, ba)$  и обратные к ним. Осталось заметить, что во всех этих тройках  $a$  всегда происходит из графа.

### 3.4.2 Метод движений

Кратко рассмотрим ещё один метод доказательства диаграммной приводимости, который основан на лемме о столкновениях из [29]. Точные определения могут быть найдены в разделе 1.4, здесь мы дадим упрощённые формулировки.

Пусть  $D$  — это простая дисковая или простая сферическая диаграмма. Пусть на границе некоторой её клетки есть движущаяся точка, называемая автомобилем. Говорят, что автомобиль движется правильно, если он объезжает

границу в положительном направлении, непрерывно, без остановок, без разворотов, и если он посещает каждую точку границы бесконечное число раз. Будем называть кратностью точки 1-остова диаграммы  $D$  число равно степени соответствующей вершины, если эта точка лежит в 0-остове, и равно 2 в противном случае.

**Лемма о столкновениях** [29]. Пусть  $D$  — это простая сферическая диаграмма и пусть на границе каждой её клетки есть автомобиль, который объезжает её правильным образом. Тогда есть как минимум 2 точки  $D$ , в которых происходит полное столкновение. Столкновение называется полным, если в точке кратности  $k$  одновременно сталкиваются  $k$  автомобилей.

Эта лемма может быть использована для доказательства диаграммной приводимости копредставления  $\langle S \mid R \rangle$  следующим образом. Предположим, что для каждого соотношения  $r \in R_{sym}$  (с точностью до сопряжённости) было так задано движение автомобиля по клеткам с меткой  $r$ , что для любой диаграммы над этим копредставлением столкновения происходят только на общих границах сократимых пар клеток. Тогда над этим копредставлением нет приведённых простых сферических диаграмм, потому что иначе бы существовала такое движение автомобилей на сфере, при котором не происходит полных столкновений, что противоречит лемме о столкновениях. Таким образом, из существования подходящего движения автомобилей следует диаграммная приводимость соответствующего копредставления.

Поясним суть метода на примере. Пусть дано копредставление  $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ . Зададим движение автомобилей. Пусть каждый автомобиль равномерно объезжает свою клетку с периодом 1 и пусть в нулевой момент времени все автомобили находятся в вершинах. При этом если клетка соответствует соотношению  $aba^{-1}b^{-1}$ , то автомобиль едет сначала по ребру, соответствующему  $a$ , затем по ребру, соответствующему  $b$  и так далее. А если клетка соответствует соотношению  $bab^{-1}a^{-1}$ , то автомобиль едет сначала по ребру, соответствующему  $a$ , затем по ребру, соответствующему  $b^{-1}$  и так далее.

В момент времени  $t \in (k, k + 1/4)$  все автомобили едут вдоль рёбер с меткой  $a$ , а в момент времени  $t \in (k + 2/4, k + 3/4)$  все автомобили едут вдоль рёбер с меткой  $a^{-1}$ . Поэтому в эти моменты времени столкновений быть не может. В момент времени  $t \in (k + 1/4, k + 2/4) \cup (k + 3/4, k + 1)$  все автомобили едут вдоль рёбер с метками  $b^{\pm 1}$ . Отсюда следует, что полного столкновения в вершине быть тоже не может, потому что если в момент времени  $t$  произошло бы

такое столкновение, то в момент времени  $t + \varepsilon$  часть автомобилей должна бы была ехать вдоль рёбер с метками  $a^{\pm 1}$ , а другая часть вдоль рёбер с метками  $b^{\pm 1}$ , чего быть не может. В моменты времени  $k + 3/8$  и  $k + 7/8$  может произойти столкновение на ребре с меткой  $b$ , но в таком случае столкновение происходит на сократимой паре клеток. Таким образом, столкновения происходят только на общих границах сократимых пар клеток, откуда следует диаграммная приводимость (а значит и асферичность) копредставления  $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ .

Перенести этот метод на графический случай можно следующим образом: разрешим автомобилям сталкиваться на рёбрах, происходящих из графа.

**Теорема 8.** *Пусть помеченный множеством  $S$  граф  $\Gamma$  удовлетворяет графическому условию  $C(2)$  и пусть для каждого ( $s$  с точностью до сопряжённости) элемента  $r$  из  $R_s$  задано правильное движение автомобиля по границе клетки с меткой  $r$  так, что полные столкновения в диаграммах над  $\langle S \mid R_s \rangle$  происходят только на рёбрах, происходящих из графа, и в вершинах инцидентных происходящим рёбрам. Тогда копредставление  $\langle S \mid R_f \rangle$  асферично.*

*Доказательство.* В силу теоремы 6 достаточно доказать, что граф  $\Gamma$  асферичен. Предположим противное, пусть над  $\langle S \mid R_s \rangle$  существует простая сферическая диаграмма  $D$ , никакое ребро которой не происходит из графа. Зададим на этой диаграмме правильное движение из условия. Так как в диаграмме нет происходящих из графа ребер, у такого движения не будет точек полного столкновения, а это противоречит лемме о столкновениях.  $\square$

### 3.5 Зависимости и сферические диаграммы

Для любой зависимости  $\pi = (p_1, \dots, p_n)$  над копредставлением  $\langle S \mid R \rangle$  мы можем построить сферическую диаграмму над этим же копредставлением. По сути, это хорошо известная процедура построения диаграмм ван Кампена (см., например, [44], [11]). Напомним её. Для начала заметим, что для любого слова  $w$  в алфавите  $S \sqcup S^{-1}$  может быть построен помеченный множеством  $S$  линейный граф  $p$ , такой что  $\ell(p) \equiv w$ . Теперь зафиксируем на плоскости точку  $v$ . Для каждого  $p_i = u_i r_i^{\varepsilon_i} u_i^{-1}$  нарисуем на плоскости клетку с ростком, так что граница клетки является замкнутым путём, имеющим метку  $r_i^{\varepsilon_i}$ , а росток

имеет метку  $u_i$ . Если нарисовать эти клетки в правильном порядке, то граничная метка полученной диаграммы будет равна слову  $p_1 \cdots p_n$ . Так как  $\pi$  это зависимость, то эта граничная метка тривиальна. Это значит, что на границе этой диаграммы есть 2 последовательных рёбра с противоположными метками. Склеим их. Снова получим диаграмму с тривиальной граничной меткой, но с меньшей границей. Последовательно склеивая пары противоположных рёбер, мы в итоге получим сферическую диаграмму  $D$ , называемую *диаграммой для  $\pi$* . Полученная диаграмма действительно будет сферической в нашем смысле, потому что если после очередного склеивания пары последовательных рёбер возникла сфера, то эта сфера соприкасается с оставшейся границей диаграммы только по одной точке.

Этот процесс можно обратить. Путем «расклеивания» сферической диаграммы  $D$  над  $\langle S \mid R \rangle$  мы можем привести её к виду букета дисков с ростками, что приводит к последовательности элементов  $\pi$  над  $\langle S \mid R \rangle$ . Так как диаграмма была сферической, то  $\pi$  это зависимость. Обращая процесс «расклеивания», мы получаем, что  $D$  — это диаграмма для  $\pi$ .

Описанные процедуры неоднозначны. Меняя порядок склеиваний и расклеиваний мы можем получать разные диаграммы и зависимости. Однако из предложения 8 работы [11] следует, что если  $D$  это диаграмма для зависимости  $\pi_1$  и для зависимости  $\pi_2$ , то  $\pi_1$  и  $\pi_2$  одновременно тривиальны или нет. Это позволяет дать определение тривиальной сферической диаграммы, согласованное с определением тривиальных зависимостей: будем называть  $D$  *тривиальной сферической диаграммой*, если из неё может получиться тривиальная зависимость. В силу сказанного, любая зависимость, полученная из тривиальной сферической диаграммы  $D$ , тривиальна. Таким образом, только тривиальные зависимости могут быть получены из тривиальных диаграмм, и только тривиальные диаграммы могут быть получены из тривиальных зависимостей.

Отметим, что на самом деле диаграмма  $D$ , которая является диаграммой для некоторой зависимости  $\pi$ , имеет на себе отмеченную точку — начальную точку  $v$  из построения. Замена отмеченной точки не меняет тривиальность диаграммы, потому что это соответствует сопряжению всех элементов зависимости  $\pi$  на метку пути, соединяющего старую и новую отмеченные точки, и понятно, что такое сопряжение не влияет на тривиальность зависимости. Таким образом, замена отмеченной точки не влияет на тривиальность диаграммы, поэтому далее мы не будем явно указывать, какую точку мы считаем отмеченной.

Наконец, заметим, что вообще говоря сферическая диаграмма может иметь ростки. Но из предложения 8 работы [11] следует, что добавление и удаление ростков не влияет на тривиальность диаграммы.

### 3.6 Доказательство основной теоремы

В этом разделе  $\Gamma$  — это помеченный множеством  $S$  граф, и  $R_c$ ,  $R_s$  и  $R_f$  — это множества соотношений, определенные в разделе 3.2.

**Определение 17.** Пусть  $D$  — это диаграмма (дисковая или сферическая) над копредставлением  $\langle S \mid R_s \rangle$ . *Непроисходящим остовом* диаграммы  $D$  будем называть часть её 1-остова, состоящую из всех рёбер  $D$ , не происходящих из графа  $\Gamma$ .

**Лемма 7.** Пусть помеченный множеством  $S$  граф  $\Gamma$  удовлетворяет графическому условию  $C(2)$  и  $D$  — это простая сферическая диаграмма над копредставлением  $\langle S \mid R_s \rangle$ . Тогда *непроисходящий остов*  $D$  не имеет ростков.

*Доказательство.* Предположим противное, пусть есть такая простая сферическая диаграмма  $D$ , что её *непроисходящий остов* имеет росток  $e$  с концевой вершиной  $v$ . Это значит, что в вершину  $v$ , помимо ребра  $e$ , входит некоторое число рёбер (может быть нулевое), и все они происходят из графа  $\Gamma$ , так как иначе ребро  $e$  не было бы ростком в *непроисходящем остове*.

Можно считать, что участок диаграммы в окрестности точки  $v$  вложен в плоскость. Проведем окружность  $C$  с центром в точке  $v$  и очень малым радиусом, так чтобы она пересекала каждое ребро инцидентное  $v$  ровно один раз, либо два раза, если это ребро является петлей, и так чтобы она не пересекала никакие другие ребра. Эта окружность последовательно пересекает некоторое число клеток  $\Pi_1, \dots, \Pi_n$ . Также она пересекает рёбра  $e_1, \dots, e_{n-1}, e_n = e$ , где  $e_i$  лежит на пересечении границ клеток  $\Pi_i$  и  $\Pi_{i+1}$  (см. рисунок 3.4).

Так как граф  $\Gamma$  удовлетворяет графическому условию  $C(2)$ , то граница каждой клетки имеет единственное поднятие в граф. Пусть  $v_i$  — это та вершина графа, в которую попадает  $v$  при поднятии через границу клетки  $\Pi_i$ . Так как ребро  $e_i$  происходит из графа для  $i = 1, \dots, n - 1$ , то  $v_i = v_{i+1}$  для  $i = 1, \dots, n - 1$ . Таким образом  $v_1 = v_n$ . Значит, поднятия ребра  $e$  через  $\partial\Pi_1^+$  и



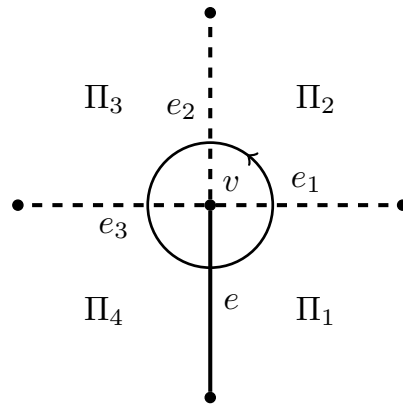


Рисунок 3.4 — Иллюстрация к лемме 7. Пунктиром обозначены происходящие из графа рёбра диаграммы.

через  $\partial\Pi_n^-$  имеют общую вершину в графе и при этом имеют одинаковую метку, а значит совпадают, так как граф помечен правильно. Таким образом, ребро  $e$  происходит из графа. Противоречие.  $\square$

**Определение 18.** *Минимальной нетривиальной сферической диаграммой над  $\langle S \mid R_f \rangle$  будем называть такую нетривиальную сферическую диаграмму  $D$ , что:*

1. Среди всех нетривиальных сферических диаграмм  $D$  имеет наименьший по количеству рёбер, а затем по количеству вершин, не происходящий остов.
2. Среди всех диаграмм, удовлетворяющих первому условию,  $D$  имеет наименьшее число рёбер.

Заметим, что минимальная нетривиальная сферическая диаграмма обязательно является простой. Действительно, предположим противное, пусть  $D$  не является простой сферической диаграммой. Ранее было отмечено, что добавление и удаление ростков у диаграммы не влияет на её тривиальность. Поэтому  $D$  не имеет ростков. Значит в  $D$  есть такая точка  $v$ , относительно которой  $D$  распадается на две сферические диаграммы  $D_1$  и  $D_2$ . Пусть  $\pi_1$  — это зависимость, полученная из диаграммы  $D_1$ , а  $\pi_2$  — из  $D_2$ . Так как  $D$  — это минимальная нетривиальная сферическая диаграмма, то  $\pi_1$  и  $\pi_2$  — тривиальные зависимости. Но тогда тривиальна и зависимость  $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ , которая может быть получена из диаграммы  $D$ . Таким образом, получаем, что  $D$  это тривиальная диаграмма, что противоречит её определению.

Пусть  $D$  — это простая сферическая диаграмма. Через  $\bar{D}$  будем обозначать простую сферическую диаграмму, полученную из  $D$  стиранием всех

происходящих из графа  $\Gamma$  рёбер (если после этого остаются изолированные вершины, то мы их удаляем). Ясно, что 1-остов  $\bar{D}$  совпадает с непроизходящим остовом  $D$ . Заметим, что говоря здесь слово «диаграмма», мы допускаем некую вольность речи, потому что на самом деле у  $\bar{D}$  могут появиться неодносвязные «клетки». Но мы всё равно будем считать их клетками и будем называть их неодносвязными клетками. Отметим, что граница неодносвязной клетки состоит из нескольких компонент связности.

**Лемма 8.** Пусть помеченный множеством  $S$  граф  $\Gamma$  удовлетворяет графическому условию  $C(2)$ . Пусть  $D$  — это минимальная нетривиальная сферическая диаграмма над  $\langle S \mid R_f \rangle$ . Тогда метка границы любой клетки диаграммы  $\bar{D}$  приведена (метка любой компоненты связности границы, если клетка неодносвязна).

*Доказательство.* Предположим противное, пусть есть клетка  $\bar{\Pi}$  с неприведённой границей. Пусть  $e$  и  $f$  это те рёбра, на которых может произойти сокращение. Воспользуемся ромбовидными движениями из [11], которые позволяют преобразовать сферическую диаграмму, не меняя её тривиальности.

Для определенности будем считать, что  $\alpha(e) = \alpha(f)$  и  $\ell(e) = \ell(f) = a$ . Разберём подробно только один случай, когда все три точки  $\alpha(e)$ ,  $\omega(e)$ ,  $\omega(f)$  различны (напомним, что  $\alpha$  и  $\omega$  — это начало и конец ребра соответственно). Перестроим диаграмму  $D$ , как показано на рисунке 3.5. Заметим, что непроизходящий остов уменьшился как минимум на одно ребро, потому что одно из двух новых рёбер попадает внутрь клетки  $\bar{\Pi}$ , а так как непроизходящий остов не имеет ростков, то это ребро происходит из графа. При этом второе новое ребро может происходить из графа, а может и нет, для рассуждения это неважно.

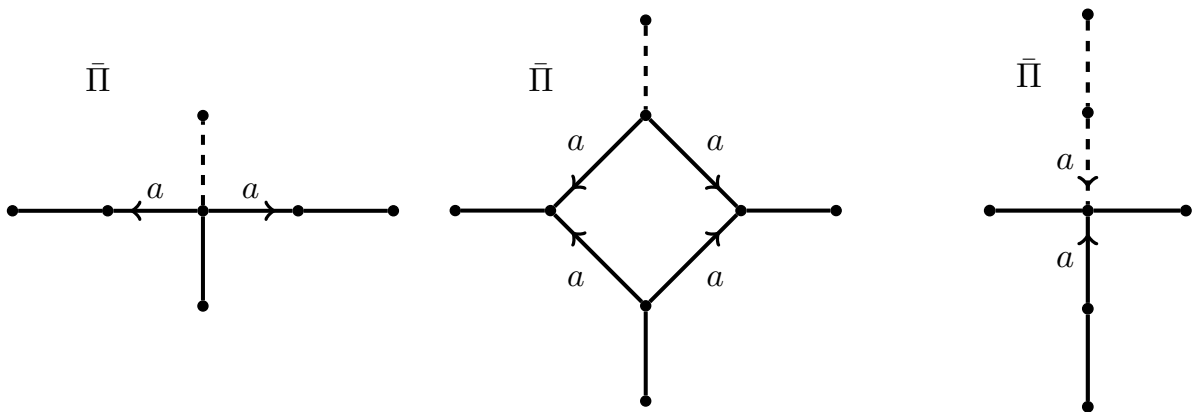


Рисунок 3.5 — Первый случай леммы 8.

Ромбовидные движения для остальных случаев можно найти в [11]. Мы не разбираем их здесь подробно, потому что идейно они не отличаются от первого случая: после применения ромбовидного движения два старых ребра заменяются на два новых, при этом одно из новых рёбер попадает внутрь клетки  $\bar{P}$ , и поэтому происходит из графа. Таким образом, неприсходящий остов в любом случае уменьшается, что приводит к противоречию с минимальностью диаграммы  $D$ .  $\square$

**Лемма 9.** Пусть  $p$  — это простой замкнутый путь в помеченном множестве  $S$  графа  $\Gamma$ . Тогда над копредставлением  $\langle S \mid R_f \rangle$  существует простая дисковая диаграмма  $D$ , такая что  $\partial D$  поднимается до пути  $p$ , и все внутренние рёбра  $D$  происходят из графа  $\Gamma$ .

*Доказательство.* Забудем на время, что граф  $\Gamma$  помечен алфавитом  $S$ . Пометим каждое ребро  $e$  графа  $\Gamma$  новой уникальной меткой  $t_e$  и обозначим функцию разметки путей такими метками через  $\ell'$ . Пусть путь  $p$  лежит в компоненте связности  $\Gamma'$  графа  $\Gamma$ , и пусть  $B'$  — это тот базис  $\Pi(\Gamma', v)$ , из которого получены соотношения из  $R_f$ . Пусть  $q$  — это путь, ведущий из вершины  $\alpha(p)$  в вершину  $v$ , и пусть  $B = \{qb'q^{-1} \mid b' \in B'\}$ . Тогда путь  $p$  порождается путями из  $B$ , то есть  $p = b_1^{\varepsilon_1} \cdots b_n^{\varepsilon_n}$ ,  $b_i \in B$ . Каждое  $b_i$  можно представить в виде  $u_i r_i u_i^{-1}$ , где  $r_i$  — это простой замкнутый путь, такой что  $\ell'(r_i) \in R_f$ .

Отметим на плоскости точку  $s$ . Для каждого  $b_i^{\varepsilon_i}$  нарисуем клетку с ростком, выходящим из  $s$ , такую что граничная метка клетки совпадает с  $\ell'(r_i^{\varepsilon_i})$ , а метка ростка совпадает с  $\ell'(u_i)$ . Таким образом, получим диаграмму  $E$ , граничная метка которой свободно равна  $\ell'(p)$ . Если на границе диаграммы  $E$  есть пара противоположно направленных рёбер, имеющих одинаковую метку, склеим их. Прделав это несколько раз, добьемся того, чтобы граничная метка диаграммы  $E$  была приведена. Так как граф  $\Gamma$  помечен уникальными метками и  $p$  — это простой замкнутый путь, то его метка приведена. Поэтому  $\ell'(\partial E) \equiv \ell'(p)$ . Отсюда следует, что  $E$  является простой дисковой диаграммой, так как в противном случае метка  $\ell'(\partial E)$  содержала бы пару одинаковых букв, а этого не может быть, потому что  $\ell'(p)$  состоит из различных букв (как метка простого замкнутого пути).

Заметим, что у полученной диаграммы  $E$  все внутренние рёбра происходят из графа, так как они имеют уникальную метку, а значит имеют единственное поднятие в граф. Вспомним теперь про изначальную разметку алфавитом  $S$ . После замены уникальных меток на изначальные, внутренние рёбра

по-прежнему происходят из графа (потому что соответствующие поднятия границ клеток в граф с уникальными метками будут корректными поднятиями и в граф с изначальной разметкой), и  $\ell(\partial E) \equiv \ell(p)$ . Таким образом, получена искомая диаграмма для пути  $p$  над копредставлением  $\langle S \mid R_f \rangle$ .  $\square$

**Лемма 10.** *Пусть помеченный множеством  $S$  граф  $\Gamma$  удовлетворяет графическому условию  $C(2)$ . Пусть  $D$  — это минимальная нетривиальная сферическая диаграмма над  $\langle S \mid R_f \rangle$  и  $\Pi$  — это клетка  $\bar{D}$ . Тогда, если  $\Pi$  — это односвязная клетка и её граница является простым замкнутым путем, то эта граница поднимается до простого замкнутого пути в графе  $\Gamma$ .*

*Доказательство.* Предположим противное, пусть в  $\bar{D}$  есть клетка  $\Pi$  с простой границей, которая поднимается до непростого замкнутого пути в графе. Так как в силу леммы 8 метка границы  $\Pi$  приведена, то существует подпуть  $p$  пути  $\partial\Pi$ , который поднимается до простого замкнутого пути  $\tilde{p}$  в графе. Пусть  $s$  и  $t$  — это начало и конец пути  $p$  соответственно. Перестроим диаграмму, как показано на рисунке 3.6: разрежем диаграмму по пути  $p$  и склеим точки  $s$  и  $t$ . И  $\partial\Pi_1$ , и  $\partial\Pi_2$  поднимаются до простого замкнутого пути  $\tilde{p}$  в графе  $\Gamma$ . В силу предыдущей леммы, существует простая дисковая диаграмма  $E$  над  $\langle S \mid R_f \rangle$ , граничный путь которой совпадает с  $\tilde{p}$  и все внутренние рёбра которой происходят из  $\Gamma$ . Вклеим  $E$  на место  $\Pi_1$  и диаграмму, симметричную  $E$ , на место  $\Pi_2$ . Обозначим полученную таким образом сферическую диаграмму над  $\langle S \mid R_f \rangle$  через  $D'$ .

Заметим, что  $\Pi \cap \Pi_1 = \partial\Pi_1$  происходит из графа, потому что и при поднятии через  $\partial\Pi$ , и при поднятии через  $\partial\Pi_1$ , путь  $\partial\Pi_1$  поднимается до простого замкнутого пути в графе, а в силу условия  $C(2)$  такое поднятие единственно. Поэтому диаграмма  $D'$  имеет меньший непроизходящий остов, чем у  $D$ , так как вершины  $s$  и  $t$ , лежавшие в непроизходящем остове  $D$ , были склеены, а значит количество вершин в непроизходящем остове уменьшилось. При этом количество непроизходящих рёбер осталось тем же, так как все внутренние рёбра диаграммы  $E$  и диаграммы ей симметричной происходят из графа.

Также заметим, что диаграмма  $D'$  нетривиальна, потому что она была получена из диаграммы  $D$  вклейкой набора пар противоположных клеток, что можно трактовать как приписывание к нетривиальной зависимости  $\pi$  некоторой последовательности  $(p_1, \dots, p_n, p_n^{-1}, \dots, p_1^{-1})$ , что соответствует  $n$ -кратному применению операции вставки. Таким образом,  $D'$  — это нетривиальная сферическая диаграмма с меньшим непроизходящим остовом, чем у  $D$ . Противоречие.  $\square$

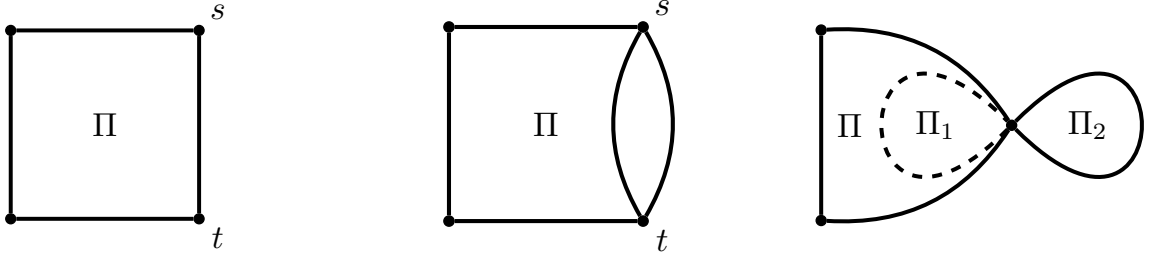


Рисунок 3.6 — Иллюстрация к лемме 10

**Лемма 11.** Пусть помеченный множеством  $S$  граф  $\Gamma$  асферичен и пусть  $D$  — это минимальная нетривиальная сферическая диаграмма над  $\langle S \mid R_f \rangle$ . Тогда каждая клетка диаграммы  $\bar{D}$  односвязна и граница каждой клетки диаграммы  $\bar{D}$  поднимается до простого замкнутого пути в графе  $\Gamma$ .

*Доказательство.* Предположим противное, пусть утверждение леммы неверно. Тогда все плохие клетки можно разделить на два типа: неодносвязные клетки и односвязные клетки с непустой границей, которая не поднимается до простого замкнутого пути. Заметим, что так как у непроизводящего остова нет ростков, то каждая клетка с непустой границей окружает некоторую поддиаграмму, имеющую хотя бы одну клетку. Аналогично неодносвязная клетка окружает некоторую поддиаграмму, имеющую хотя бы одну клетку.

Рассмотрим клетку  $\Pi$  — самую внутреннюю из плохих клеток. Это значит, что поддиаграмма  $\Delta$ , окруженная этой клеткой, содержит только односвязные клетки с границами, которые поднимаются до простых замкнутых путей (см. рисунок 3.7).

Сначала разберем случай, когда  $\Pi$  — это односвязная клетка. Как и раньше, пусть  $p$  — это подпуть  $\partial\Pi$ , который поднимается до простого замкнутого пути. Вершины  $s$  и  $t$  — начало и конец пути  $p$  соответственно. Если  $s \neq t$ , то, действуя как в доказательстве леммы 10, получаем противоречие с минимальностью  $D$ . Значит,  $s = t$ .

Пусть  $q$  — это такой подпуть  $\partial\Pi$ , что  $pq \in \partial\Pi^+$ . Заметим, что либо путь  $p$  ограничивает некоторую поддиаграмму  $\Delta'$  диаграммы  $\Delta$ , либо это делает путь  $q$ . Во втором случае опять можно считать, что внутри  $q$  есть подпуть  $p'$  с концевыми точками  $s'$  и  $t'$ , который поднимается до простого замкнутого пути. Используя те же рассуждения, что и ранее, получаем, что  $s' = t'$ . И теперь путь  $p'$  ограничивает некоторую поддиаграмму  $\Delta'$  диаграммы  $\Delta$ . Заметим, что

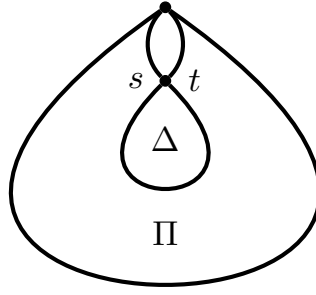


Рисунок 3.7 — Иллюстрация к лемме 11

$\Delta'$  не содержит плохих клеток, потому что она является поддиаграммой  $\Delta$ . Таким образом, в обоих случаях есть такой подпуть границы, который ограничивает некоторую поддиаграмму без плохих клеток и который поднимается до простого замкнутого пути. Обозначим этот подпуть как  $p$  и эту поддиаграмму как  $\Delta$ .

В силу выбора клетки  $\Pi$  границы всех клеток поддиаграммы  $\Delta$  поднимаются до простых замкнутых путей. Но заметим, что и граница  $\Delta$ , равная пути  $p$ , поднимается до простого замкнутого пути. Значит можно считать, что  $\Delta$  — это сферическая диаграмма над копредставлением  $\langle S \mid R_s \rangle$ , никакое ребро которой не происходят из графа. Но это противоречит асферичности графа  $\Gamma$ .

В случае неодносвязной клетки ход рассуждений аналогичный. Пусть  $\Delta$  — это поддиаграмма, окруженная неодносвязной клеткой  $\Pi$ . В силу выбора клетки  $\Pi$  все клетки поддиаграммы  $\Delta$  поднимаются до простых замкнутых путей. Если  $\partial\Delta$  поднимается до простого пути в графе, то получаем противоречие с асферичностью графа. Иначе можно выделить подпуть  $p$  пути  $\partial\Delta$  с концевыми точками  $s$  и  $t$ , который поднимается до простого замкнутого пути в графе. Если  $s \neq t$ , то получаем противоречие с минимальностью  $D$ . Если  $s = t$ , то поддиаграмма, ограниченная путем  $p$ , даёт сферическую диаграмму над  $\langle S \mid R_s \rangle$ , где никакое ребро не происходят из графа, что противоречит асферичности графа  $\Gamma$ .  $\square$

Следующую лемму можно найти в [23].

**Лемма 12** (Груббер). Пусть помеченный множеством  $S$  граф  $\Gamma$  связан и удовлетворяет графическому условию  $C(2)$ . Пусть  $D$  — это простая дисковая диаграмма над  $\langle S \mid R_f \rangle$  с тривиальной граничной меткой, все внутренние ребра которой происходят из графа  $\Gamma$ . Тогда любая зависимость, полученная из  $D$ , является тривиальной.

Теперь мы можем доказать теорему 6.

*Доказательство.* Как было показано в разделе 3.3, для доказательства теоремы достаточно доказать, что над копредставлением  $\langle S \mid R_f \rangle$  нет нетривиальных зависимостей. Предположим противное, пусть над  $\langle S \mid R_f \rangle$  существуют нетривиальные зависимости, а значит и нетривиальные сферические диаграммы. Пусть  $D$  — это минимальная нетривиальная сферическая диаграмма над  $\langle S \mid R_f \rangle$ . Рассмотрим неприсходящий остов  $D$ . Если неприсходящий остов пуст, тогда все рёбра диаграммы происходят из графа. В таком случае диаграмму  $D$  можно расклеить по некоторому ребру, соединяющему различные вершины, чтобы получить простую дисковую диаграмму с тривиальной граничной меткой, все внутренние рёбра которой поднимаются в граф  $\Gamma$ . При этом ясно, что все внутренние рёбра поднимаются в некоторую одну компоненту связности графа. Тогда, в силу леммы 12, диаграмма  $D$  соответствует тривиальной зависимости, что противоречит её определению. Значит неприсходящий остов не пуст. В силу предыдущих лемм каждая клетка  $\bar{D}$  односвязна и поднимается до простого замкнутого пути в графе. Значит  $\bar{D}$  — это простая сферическая диаграмма над  $\langle S \mid R_s \rangle$ , где никакое ребро не происходит из графа, что противоречит асферичности графа  $\Gamma$ .  $\square$

## Заключение

Основные результаты диссертации заключаются в следующем:

1. Был дан полный ответ на вопрос, чему может равняться минимальная возможная коммутаторная длина  $n$ -й степени элемента, не сопряжённого элементам свободных сомножителей, в свободных произведениях произвольных групп.
2. Были получены новые достаточные условия асферичности для групп, заданных графами. В частности, были введены графические аналоги классических условий малых сокращений  $C(4)\&T(4)$  и  $C(3)\&T(6)$  и было доказано, что эти условия влекут асферичность группы, заданной соответствующим графом.

Результаты диссертации могут быть интересны специалистам в комбинаторной теории групп.



## Список литературы

1. *Baik Y. G., Bogley W. A., Pride S. J.* On the asphericity of length four relative group presentations // *Internat. J. Algebra Comp.* — 1997. — Vol. 07, no. 03. — P. 277—312.
2. *Bogley W. A., Pride S. J.* Aspherical relative presentations // *Proc. Edinburgh Math. Soc.* — 1992. — Vol. 35, no. 1. — P. 1—39.
3. *Brown K. S.* *Cohomology of Groups.* — Springer New York, 1982.
4. *Calegari D.* scl. — MSJ Memoirs, 20, Mathematical Society of Japan, 2009.
5. *Chen L.* Spectral gap of scl in free products // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 2018. — Vol. 146, no. 7. — P. 3143—3151.
6. *Chiswell I. M., Collins D. J., Huebschmann J.* Aspherical group presentations // *Math. Z.* — 1981. — Vol. 178. — P. 1—36.
7. *Clifford A.* Non-amenable type K equations over groups // *Glasgow Mathematical Journal.* — 2003. — Vol. 45, no. 2. — P. 389—400.
8. *Clifford A., Goldstein R. Z.* Tessellations of  $S^2$  and equations over torsion-free groups // *Proc. Edinburgh Math. Soc.* — 1995. — Vol. 38, no. 3. — P. 485—493.
9. *Clifford A., Goldstein R. Z.* The group  $\langle G, t \mid e \rangle$  when  $G$  is torsion free // *Journal of Algebra.* — 2001. — Vol. 245, no. 1. — P. 297—309.
10. *Cohen M. M., Rourke C.* The surjectivity problem for one-generator, one-relator extensions of torsion-free groups // *Geometry & Topology.* — 2001. — Vol. 5, no. 1. — P. 127—142.
11. *Collins D. J., Huebschmann J.* Spherical diagrams and identities among relations // *Math. Ann.* — 1982. — Vol. 261. — P. 155—183.
12. *Comerford J. A., Comerford Jr. L. P., Edmunds C. C.* Powers as products of commutators // *Comm. Algebra.* — 1991. — Vol. 19, no. 2. — P. 675—684.
13. *Comerford Jr. L. P., Edmunds C. C., Rosenberger G.* Commutators as powers in free products of groups // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1994. — Vol. 122, no. 1. — P. 47—52.

14. *Culler M.* Using surfaces to solve equations in free groups // *Topology*. — 1981. — Vol. 20, no. 2. — P. 133—145.
15. *Duncan A. J., Howie J.* The genus problem for one-relator products of locally indicable groups // *Math. Z.* — 1991. — Vol. 208, no. 1. — P. 225—237.
16. *Edjvet M.* On the asphericity of one-relator relative presentations // *Proc. Royal Soc. Edinburgh*. — 1994. — Vol. A124, no. 4. — P. 713—728.
17. *Fenn R., Rourke C.* Klyachko's methods and the solution of equations over torsion-free groups // *L'Enseignement Mathématique*. — 1996. — Vol. 42. — P. 49—74.
18. *Forester M., Rourke C.* Diagrams and the second homotopy group, // *Communications in Analysis and Geometry*. — 2005. — Vol. 13, no. 4. — P. 801—820.
19. *Forester M., Rourke C.* The adjunction problem over torsion-free groups // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*. — 2005. — Vol. 102, no. 36. — P. 12670—12671.
20. *Frenkel E. V., Klyachko A. A.* Commutators cannot be proper powers in metric small-cancellation torsion-free groups. — arXiv:1210.7908.
21. *Gersten S. M.* Reducible Diagrams and Equations Over Groups // *Essays in Group Theory*. — New York, NY : Springer, 1987. — P. 15—73.
22. *Gromov M.* Random Walk in Random Groups // *GAFA, Geom. Funct. Anal.* — 2003. — Vol. 13. — P. 73—146.
23. *Gruber D.* Groups with graphical  $C(6)$  and  $C(7)$  small cancellation presentations // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 2015. — Vol. 367, no. 3. — P. 2051—2078.
24. *Howie J.* The solution of length three equations over groups // *Proc. Edinburgh Math. Soc.* — 1983. — Vol. 26, no. 1. — P. 89—96.
25. *Howie J., Metaftsis V.* On the asphericity of length five relative group presentations // *Proc. London Math. Soc.* — 2001. — Vol. 82, no. 1. — P. 173—194.
26. *Huebschmann J.* Cohomology theory of aspherical groups and of small cancellation groups // *Journal of Pure and Applied Algebra*. — 1979. — Vol. 14, no. 2. — P. 137—143.

27. *Huebschmann J.* The homotopy type of a combinatorially aspherical presentation // *Math. Z.* — 1980. — Vol. 173. — P. 163—169.
28. *Ivanov S. V., Klyachko A. A.* Quasiperiodic and mixed commutator factorizations in free products of groups // *Bull. London Math. Soc.* — 2018. — Vol. 50, no. 5. — P. 832—844.
29. *Klyachko A. A.* A funny property of sphere and equations over groups // *Comm. Algebra.* — 1993. — Vol. 21, no. 7. — P. 2555—2575.
30. *Klyachko A. A.* Asphericity tests // *Internat. J. Algebra Comp.* — 1997. — Vol. 7, no. 4. — P. 415—431.
31. *Klyachko A. A.* The structure of one-relator relative presentations and their centres // *Journal of Group Theory.* — 2009. — Vol. 12, no. 6. — P. 923—947.
32. *Klyachko A. A., Lurye D. E.* Relative hyperbolicity and similar properties of one-generator one-relator relative presentations with powered unimodular relator // *J. Pure Appl. Algebra.* — 2012. — Vol. 216, no. 3. — P. 524—534.
33. *Le Thi Giang.* The relative hyperbolicity of one-relator relative presentations // *J. Group Theory.* — 2009. — Vol. 12, no. 6. — P. 949—959.
34. *Mertens S.* The easiest hard problem: number partitioning // *Computational Complexity and Statistical Physics.* — 2006. — Vol. 125, no. 2. — P. 125—139.
35. *Metaftsis V.* On the asphericity of relative group presentations of arbitrary length // *Internat. J. Algebra Comp.* — 2003. — Vol. 13, no. 03. — P. 323—339.
36. *Ollivier Y.* On a small cancellation theorem of Gromov // *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin.* — 2006. — Vol. 13, no. 1. — P. 75—89.
37. *Schützenberger M. P.* Sur l'équation  $a^{2+n} = b^{2+m}c^{2+p}$  dans un groupe libre // *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* — 1959. — Vol. 248. — P. 2435—2436.
38. *Sieradski A. J.* A coloring test for asphericity // *The Quarterly Journal of Mathematics.* — 1983. — Vol. 34, no. 1. — P. 97—106.
39. *Ашманов И. С., Ольшанский А. Ю.* Об абелевых и центральных расширениях асферических групп // *Изв. вузов. Матем.* — 1985. — Т. 11. — С. 48—60.
40. *Клячко А. А.* SQ-универсальность относительных копредставлений с одним соотношением // *Мат. сборник.* — 2006. — Т. 197, № 10. — С. 87—108.

41. *Клячко А. А.* Гипотеза Кервера–Лауденбаха и копредставления простых групп // Алгебра и логика. — 2005. — Т. 44, № 4. — С. 399–437.
42. *Клячко А. А.* Как обобщить известные результаты об уравнениях над группами // Мат. заметки. — 2006. — Т. 79, № 3. — С. 409–419.
43. *Клячко А. А.* Свободные подгруппы относительных копредставлений с одним соотношением // Алгебра и логика. — 2007. — Т. 46, № 3. — С. 290–298.
44. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. — М.: Мир, 1980.
45. *Ольшанский А. Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах. — М.: Наука, 1989.

## Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ и входящих в базы цитирования Scopus, Web of Science и RSCI

46. *Bereznyuk V.* Powers with minimal commutator length in free products of groups // *Journal of Algebra*. — 2023. — Vol. 629. — P. 247—264.

Журнал индексируется в WoS, Scopus. IF 2022: WoS 0.900, SJR 1.016.

47. *Bereznyuk V. Yu., Klyachko A. A.* Commutator length of powers in free products of groups // *Proc. Edinburgh Math. Soc.* — 2022. — Vol. 65, no. 1. — P. 102—119.

Вклад всех авторов равноценен и неразделим.

Журнал индексируется в WoS, Scopus. IF 2022: WoS 0.700, SJR 0.697.

48. *Березнюк В. Ю.* Асферичность групп, заданных графами // *Мат. заметки*. — 2019. — Т. 105, № 3. — С. 332—348.

Журнал индексируется в RSCI. IF 2021: двухлетний ИФ РИНЦ 0.475.

English transl.: *Bereznyuk V. Yu.* Asphericity of Groups Defined by Graphs // *Math. Notes*. — 2019. — Vol. 105, no. 3. — P. 316—328.

Журнал индексируется в WoS, Scopus. IF 2022: WoS 0.600, SJR 0.493.