

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

*На правах рукописи*

**Андреев Алексей Олегович**

**Создание селеноцентрической опорной системы  
координат на основе синтетического гармонического  
метода и спутниковых наблюдений**

1.3.1. Физика космоса, астрономия

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук,  
доцент Ю.А. Нефедьев

Казань – 2022

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>20</b>
<b>1 Метод создания динамической системы координат</b>	<b>21</b>
1.1 Современные проблемы изучения Луны . . . . .	21
1.2 Анализ селеноцентрической системы координат . . . . .	25
1.3 Метод построения динамической селеноцентрической системы . . . . .	36
<b>2 Цифровая база динамических селенографических координат</b>	<b>42</b>
2.1 Анализ данных современных космических миссий для использования их при построении ЦБД . . . . .	42
2.2 Цифровая база данных . . . . .	55
2.3 Исследование ЦБД . . . . .	58
<b>3 Построение селеноцентрической опорной системы координат</b>	<b>63</b>
3.1 Селеноцентрическая многопараметрическая модель (СММ) . . . . .	63
3.2 Тестирование селеноцентрической многопараметрической модели . . . . .	74
<b>4 Исследование лунной поверхности с использованием синтетического метода</b>	<b>83</b>
4.1 Построение цифровых спутниковых карт поверхности Луны . . . . .	83
4.2 Синтетический метод исследования структуры лунной поверхности . . . . .	86
4.3 Результаты исследования структуры поверхности Луны с помощью синте- тического метода . . . . .	89
4.4 Анализ корреляционных связей физических и химических параметров с фрак- тальными моделями поверхности . . . . .	96
<b>Заключение</b>	<b>102</b>
<b>Список обозначений и сокращений</b>	<b>109</b>

Список литературы	111
Приложение А	122
Приложение В	133

# Введение

## Актуальность работы

В последние десятилетия Луна является самым интенсивно изучаемым небесным телом как наземным оборудованием, где особая роль в настоящее время отводится лазерной локации Луны [1], так и спутниковыми миссиями NASA (Clementine [2], Lunar Prospector [3], LRO [4], GRAIL [5]), ESA (SMART-1 [6]), JAXA (Kaguya [7]), CNSA (Chang'e 1 – Chang'e 5 [8–10]) и ISRO (Chandrayaan-1 [11], Chandrayaan-2 [12]). В ближайшее время также планируется осуществление российских лунных миссий (Луна-25, -26, -27, -28), к научным задачам которых относится высокоточная привязка снимков поверхности нашего естественного спутника к селеноцентрической системе координат (СК) [13]. Это позволит достичь сопоставимой дистанционному зондированию Земли точности при решении селенографических задач. Очевидно, что при выполнении таких работ существуют повышенные требования к координатно-временной поддержке КА в окололунном пространстве [14].

Недостаточная степень покрытия лунной поверхности является фундаментальным минусом тех опорных сетей, которые существуют в настоящий момент. Особенно ярко этот недостаток проявляется в полярных областях, куда планируется осуществить прилунение в рамках реализации российской лунной программы [13, 15, 16]. Так для каталога, созданного по наблюдениям серии космических миссий NASA Apollo, и для данных эталонных сетей, полученных путем обработки снимков Луны космических миссий «Зонд-6» и «Зонд-8» для западного полушария Луны, полное покрытие лунной поверхности отсутствует и ограничено лишь несколькими небольшими зонами.

Измерения, выполненные дальномерами, установленными на бортах окололунных КА, позволяют описать с высокой точностью особенности лунного рельефа [17], однако отсутствует возможность привязки этих наблюдений к какой-либо СК.

В ином случае при выполнении наблюдений определяют точные положения референчных объектов на основе абсолютной привязки к звездам, но при этом лунный рельеф не моделируется достаточно подробно.

Для обоих случаев можно отметить, что их системы отсчета координат отличаются как положением начал, так и их осями [18].

Координаты объектов, полученные с борта окололунных КА относятся к квазидинамической СК [19], т.к. положения КА привязаны к лунному центру масс (ЦМ), но не к направлению осей инерции.

Т.к. современные цифровые базы данных (ЦБД) лунных объектов построены на спутниковых измерениях, СК этих ЦБД по вышеописанной причине также являются квазидинамическими [20]. Следовательно, существующие картографические и селенографические модели не следует считать удовлетворяющими динамическим критериям. Учитывая последнее, в результате реализации этапов настоящего диссертационного исследования построена высокоточная навигационная селенографическая сеть, призванная исправить вышеупомянутые проблемы.

Следует отметить, что данные наблюдений, выполненных различными спутниковыми миссиями, являются разрозненными, и для их приведения в единую СК должны применяться робастные методы, в данном случае – регрессионное моделирование.

Все вышесказанное предполагает решение ряда взаимосвязанных конкретных задач: а) Приведение разнородных спутниковых наблюдений к единой системе, адаптированной для высокоточного численного интегрирования; б) Разработку метода анализа стохастических и динамических особенностей селенографических систем; в) Построение опорной системы селеноцентрических координат; г) Разработку селеноцентрической многопараметрической модели; д) Исследование точности созданной селеноцентрической системы; е) Создание синтетического метода для анализа поверхности Луны; ж) Анализ селенофизических характеристик с помощью корреляционного метода.

В ходе реализации диссертационного исследования была создана и исследована селеноцентрическая многопараметрическая модель. Обработка экспериментальных данных выполнялась при помощи оригинальных численных алгоритмов и компьютерных программ, включающих в себя вычисление и анализ динамических характеристик селеноцентрических систем.

Повышение точности моделей селенографических систем и координатного описания элементов лунного рельефа позволит получить более высокий уровень точности определения координат точки посадки на поверхность Луны в

будущих российских миссиях с сокращением эллипса прилунения до метровых значений [14, 21].

Осуществление планируемых в ближайшее время российских лунных миссий является одним из основных направлений развития космической отрасли России, которое должно вывести ее на лидирующие мировые позиции. Это предполагает построение высокоточной системы координатно-временного обеспечения на Луне и создание селеноцентрических навигационных систем.

### **Объект и предмет исследования**

В настоящей диссертации выполняется построение селеноцентрической опорной системы, которая включает цифровую базу данных, селеноцентрическую многопараметрическую модель, синтетический метод для анализа лунной поверхности. **Предметом** исследования является селенографическое координатно-временное обеспечение для решения задач лунной навигации. **Объектом** исследования является система Луна – окололунные космические аппараты, новые характеристики лунной структуры, связанные с эволюционными процессами, и гармонический анализ данных наблюдений спутниковых миссий.

### **Цель работы**

Целью работы является создание селеноцентрической опорной системы координат на основе синтетического гармонического метода и спутниковых наблюдений, выполненных КА «Clementine», «Kaguya», «LRO».

### **Решаемые в работе задачи**

1. Анализ современных спутниковых оптических наблюдений Луны, выполненных космическими миссиями с помощью альтиметрических измерений и методов дистанционного зондирования Луны;
2. Разработка метода построения динамической селеноцентрической системы с использованием регрессионного моделирования и многопараметрического анализа;
3. Создание единой системы селеноцентрических координат с целью ее использования совместно с современными методами позиционирования;

4. Построение селеноцентрической многопараметрической модели в виде программной системы, включающей цифровую карту Луны, базу данных опорных точек на Луне в системе центра масс и осей инерции и программного комплекса для определения и анализа координат точек на лунной поверхности, наблюдаемых различными методами, в том числе навигационным оборудованием, установленным на космических аппаратах;
5. Анализ точности определения координат объектов на лунной поверхности и сравнение с альтиметрическими данными космических миссий;
6. Разработка синтетического метода для исследования параметров макрофигуры небесных тел и моделирование фрактальных карт лунной поверхности;
7. Выполнение корреляционного анализа полученных в работе данных с селенофизическими характеристиками с целью определения достоверности результатов.

### **Теоретическая и практическая значимость проведенных исследований**

Теоретическая и практическая значимость результатов диссертационного исследования заключается в возможности их использования для многих современных задач селенодезии и космической навигации:

1. Селеноцентрическая многопараметрическая модель была внедрена при выполнении Государственного оборонного заказа СЧ НИР «Вызов-Перспектива-3-КФУ» (Роскосмос), и планируется ее применение для навигационной привязки российских окололунных КА и создания высокоточной системы для их прилунения;
2. Результаты анализа современных спутниковых наблюдений в дальнейшем будут использованы для создания цифровых баз данных селеноцентрических положений опорных объектов;
3. Метод построения цифровой базы данных динамических селеноцентрических опорных точек СК можно использовать в организациях, в которых ведутся исследования по навигационному сопровождению лунных миссий;

4. Единая цифровая база селеноцентрических координат будет входить в системы спутникового позиционирования как с борта окололунного КА, так и с лунной поверхности;
5. Селеноцентрическая многопараметрическая модель будет применяться для навигационной привязки окололунных КА и создания высокоточной системы для их прилунения при осуществлении российских лунных миссий;
6. Синтетический метод для исследования параметров небесных тел и фрактальных карт самоподобных областей будет применяться при изучении физических свойств тел Солнечной системы и даст возможность определять наиболее важные районы по химическим и эволюционным параметрам;
7. Выполненный корреляционный анализ полученных в работе данных с геологическими характеристиками лунной поверхности позволит производить выбор наиболее востребованных с научной и экономической точек зрения областей для будущих прилунений и выбора места для роботизированных и обитаемых лунных баз;
8. Все полученные в диссертационном исследовании результаты могут быть применены при проведении селенодезических исследований в ИКИ РАН, ГАИШ МГУ, ИНАСАН, ГЕОХИ, ИПА РАН, ГАО РАН, КФУ, МИИГАиК и других институтах в России и в зарубежных организациях.

### **Научная новизна работы**

1. Впервые разработан метод для определения положений искомых точек на Луне с использованием цифровых баз данных опорных точек и высотных карт Луны, построенных на основе оптических спутниковых наблюдений;
2. Впервые построена селеноцентрическая многопараметрическая модель для решения задач зондирования Луны с использованием электронных баз данных опорных точек и цифровых карт поверхности Луны;
3. Создан цифровой каталог опорных кратеров на основе современных космических миссий в единой системе динамических координат;

4. Созданная селеноцентрическая многопараметрическая модель позволяет определять положения объектов на Луне в селеноцентрической системе координат как непосредственно на лунной поверхности, так и с использованием бортовых спутниковых систем навигации;
5. С целью оценки достоверности полученных результатов разработана методика использования робастных процедур непосредственно для решаемых в диссертационном исследовании задач.

### **Методология и методы исследования**

Для исследования построенной в работе цифровой базы данных (ЦБД) использовался многопараметрический гармонический анализ (МГА), суть которого заключается в представлении высот лунных объектов, включенных в ЦБД и различные селенографические каталоги, в виде рядов сферических функций [22]. Значения гармонических амплитуд первого порядка определяют сдвиг центра отсчета (ЦО) СК относительно центра масс Луны. По величине смещения ЦО относительно центра масс для разных систем была оценена возможность отнести СК ЦБД к классу динамических систем.

Для исследования структурных особенностей поверхности Луны использовался синтетический метод, включающий создание топографических моделей с помощью описанного выше МГА и определение их фрактальных характеристик. К последним относятся фрактальная размерность (ФР) по характеристическим параметрам, в качестве которых использовались цвета пикселей на цифровых альтиметрических картах, и параметр самоподобия – отношение данной ФР к ФР самоподобного множества. Подробно синтетический метод описан в параграфе 4.2 диссертации.

### **Достоверность полученных результатов**

Достоверность представленных в диссертационном исследовании результатов обеспечена:

1. Высокой степенью согласованности полученных в работе результатов с данными, опубликованными в рецензируемых высокорейтинговых научных журналах;
2. Использованием точных и апробированных в статьях автора методов анализа спутниковых космических измерений;

3. Использованием в расчетах наблюдений, выполненных NASA, JAXA и ESA и приведенных к единой системе отсчета;
4. Осуществлением анализа точности данных, обработанных в рамках диссертационного исследования.

### **Основные положения, выносимые на защиту**

1. Анализ методов и результатов по дистанционному зондированию Луны требуется для разработки подходов к созданию селеноцентрической опорной системы координат;
2. Цифровая база селеноцентрических координат опорных объектов в динамической системе отсчета данных позволяет выполнить привязку космических аппаратов к лунной системе координат и установить связи между селеноцентрической и небесной системами координат;
3. Селеноцентрическая опорная система координат, представленная в программном виде как селеноцентрическая многопараметрическая модель для спутникового позиционирования, требуется для создания систем навигации и, в частности, моделирования имитационных процессов по определению положений анализируемых объектов в лунной системе координат;
4. Синтетический метод для исследования физических свойств лунной поверхности и определения самоподобных областей позволяет выявить участки на Луне, которые были сформированы в результате аналогичных эволюционных процессов, и требуется для создания фрактальных карт, описывающих лунную структуру;
5. Результаты анализа корреляционных связей селенологических свойств с фрактальными моделями поверхности Луны позволяют определить физический смысл параметров, полученных на основе синтетического метода, и выявить селенодезические процессы, связанные с температурными градиентами и распределением химических элементов.

### **Личный вклад автора**

Выполнен анализ исследований в области дистанционного зондирования Луны современными космическими миссиями. Личный вклад автора составил

80%, результаты автора содержатся в 3 статьях (номера 1, 8, 9 из списка на стр. 12), по полученным результатам сделано 2 доклада на международных конференциях.

Разработан метод построения динамической селеноцентрической системы с использованием регрессионного моделирования и многопараметрического анализа. Личный вклад автора составил 90%, результаты автора содержатся в 2 статьях (номера 6 и 11 из списка на стр. 12), по полученным результатам сделано 2 доклада на международных конференциях.

Создана единая система селеноцентрических координат с целью ее использования совместно с современными методами позиционирования. Личный вклад автора составил 80%, результаты автора содержатся в 2 статьях (номера 4 и 13 из списка на стр. 12), по полученным результатам сделано 2 доклада на международных конференциях. Получено свидетельство о регистрации базы данных «База данных оптических наблюдений Луны» (RU 2019620426 от 18.03.2019, авторы: Нефедьев Ю. А., Андреев А. О. и др.)

Построена селеноцентрическая многопараметрическая модель для определения и анализа координат точек на лунной поверхности, наблюдаемых различными методами, в том числе навигационным оборудованием, установленным на космических аппаратах. Личный вклад автора составил 90%, результаты автора содержатся в 1 статье (номер 3 из списка на стр. 12), по полученным результатам сделано 2 доклада на международных конференциях. Получено свидетельство о регистрации программы для ЭВМ «Программа построения имитационной модели отдельных элементов ЛНСС в части картографического обеспечения» (RU 2020619719 от 21.08.2020, авторы: Нефедьев Ю. А., Андреев А. О. и др.)

Проведены анализ точности определения координат объектов на лунной поверхности и сравнение с альтиметрическими данными космических миссий. Личный вклад автора составил 90%, результаты автора содержатся в 1 статье (номер 3 из списка на стр. 12), по полученным результатам сделано 2 доклада на международных конференциях.

Разработан синтетический метод для исследования параметров макрофигуры небесных тел и выполнено моделирование фрактальных карт лунной поверхности. Личный вклад автора составил 80%, результаты автора содержатся в 3 статьях (номера 2, 5, 12 из списка на стр. 12), по полученным результатам

сделано 3 доклада на международных конференциях. Получено свидетельство о регистрации программы для ЭВМ «Комплекс трансформации картографических проекций в цифровую форму» (RU 2021614328 от 23.03.2021, авторы: Нефедьев Ю. А., Андреев А. О. и др.)

Выполнен корреляционный анализ полученных в работе данных с селенофизическими характеристиками с целью определения достоверности результатов. Личный вклад автора составил 75%.

### **Публикации автора по теме диссертации**

Основные результаты по теме диссертации представлены в 13 печатных изданиях, из которых 1 монография и 12 статей, опубликованных в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.3.1. Физика космоса, астрономия:

#### **Монографии:**

Демина Н.Ю., **Андреев А.О.**, Нефедьев Ю.А., Боровских В.С. Создание системы обработки и анализа селенографических данных космических миссий и станций наземного базирования // Монография Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2017. – 108 с.

#### **Статьи в журналах, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ:**

1. **Андреев А.О.**, Ахмедшина Е.Н., Нефедьев Л.А., Нефедьев Ю.А., Демина Н.Ю. Анализ цифровой модели физической поверхности Луны, построенной на основе спутниковых альтиметрических измерений. *Астрономический журнал*. 2021. т. 98. № 10. с. 431-440 (пятилетний импакт-фактор РИНЦ 2021: 1.369) // Переводная версия: **Andreev A.O.**, Akhmedshina E. N., Nefediev L. A., Nefedyev Y. A., Demina N. Y. The Physical Surface of the Moon: A Digital Model Based on Satellite Altimetry. *Astronomy Reports*. 2021. vol. 65. is. 5. p. 435-444 (impact-factor WoS: 1.172).

2. **Андреев А.О.**, Нефедьев Ю. А., Демина Н.Ю., Петрова Н.К., Загидуллин А.А. Разработка методов навигационной привязки околорунных

космических аппаратов к селеноцентрической динамической системе координат. *Астрономический журнал*. 2020. т. 97. №. 9. с. 765-775 (пятилетний импакт-фактор РИНЦ 2021: 1.369) // Переводная версия: **Andreev A.O.**, Nefedyev Y.A., Demina N.Y., Nefediev L.A., Petrova N.K., Zagidullin A.A. Development of methods for navigational referencing of circumlunar spacecrafts to the selenocentric dynamic coordinate system. *Astronomy Reports*. 2020. vol. 64. is. 9. p. 795-803 (impact-factor WoS: 1.172).

3. Нефедьев Ю.А., **Андреев А.О.**, Петрова Н.К., Демина Н.Ю., Загидуллин А.А. Создание глобальной селеноцентрической опорной системы координат. *Астрономический журнал*. 2018. т. 95. №. 12. с. 915-919 (пятилетний импакт-фактор РИНЦ 2021: 1.369) // Переводная версия: Nefedyev Y. A., **Andreev A.O.**, Petrova N.K., Demina N.Y., Zagidullin A.A. Creation of a global selenocentric coordinate reference frame. *Astronomy Reports*. 2018. vol. 62. is. 12. p. 1016-1020 (impact-factor WoS: 1.172).

4. **Андреев А.О.**, Нефедьев Ю.А., Нефедьев Л.А., Ахмедшина Е.Н., Демина Н.Ю., Загидуллин А.А. Использование многопараметрического анализа и фрактальной геометрии для исследования структуры лунной поверхности. *Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки*. 2020. т. 162, кн. 2. с. 223-236 (пятилетний импакт-фактор РИНЦ 2021: 0.265) // Переводная версия: **Andreev A.O.**, Nefedyev Y.A., Nefed'ev L.A., Akhmedshina E.N., Demina N.Y., Zagidullin A.A. The use of multi-parameter analysis and fractal geometry for investigating the structure of the lunar surface. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*. 2020. vol. 162. is. 2. p. 223-236 (impact factor Scopus: 0.333).

5. **Andreev A.O.**, Korchagina E.P., Demina N.Y., Nefedyev Y.A. Construction of a System of Selenocentric Coordinates Based on the Results of the Lunar Space Missions “Apollo”, “Zond”, “Clementine”, “Kaguya”, “LRO”, and “GRAIL”. *Meteoritics & Planetary Science*. 2022. vol. 57. is. 1. p. 6326 (impact-factor WoS: 2.890).

6. Nefedyev Y., **Andreev A.**, Hudec R. Isodensity analysis of comets using the collection of digitized Engelhardt Astronomical Observatory photographic

plates. *Astronomische Nachrichten*. 2019. vol. 340. is. 7. p. 698-704 (impact-factor WoS: 0.676).

7. Чуркин К.О., **Андреев А.О.**, Нефедьев Ю.А., Петрова Н.К., Демина Н.Ю. Исследование современных звездных каталогов на основе фотоэлектрических покрытий звезд Луной. *Астрономический журнал*. 2018. т. 95. №. 12. с. 943-950 (пятилетний импакт-фактор РИНЦ 2021: 1.369) // Переводная версия: Churkin K. O., **Andreev A.O.**, Nefedyev Y.A., Petrova N.K., Demina N.Y. Studies of Modern Star Catalogs Based on Photoelectric Observations of Lunar Occultations of Stars. *Astronomy Reports*. 2018. vol. 62. is. 12. p. 1042-1049 (impact-factor WoS: 1.172).

8. Петрова Н.К., Нефедьев Ю.А., Загидуллин А.А., **Андреев А.О.** Использование аналитической теории физической либрации Луны для обнаружения свободных нутаций лунного ядра. *Астрономический журнал*. 2018. т. 95. №. 12. с. 920-925 (пятилетний импакт-фактор РИНЦ 2021: 1.369) // Переводная версия: N.K. Petrova, Nefedyev Y.A., Zagidullin A.A., **Andreev A.O.** Use of an analytical theory for the physical libration of the Moon to detect free nutation of the lunar core. *Astronomy Reports*. 2018. vol. 62. is. 12. p. 1021-1025 (impact-factor WoS: 1.172)

9. Petrova N., Zagidullin A., Nefedyev Y., Kosulin V., **Andreev A.** The analytical and numerical approaches to the theory of the Moon's librations: Modern analysis and results. *Advances in Space Research*. 2017. vol. 60. is. 10. p. 2303-2313 (impact-factor WoS: 2.152).

10. Nefedyev Y.A. , V.M. Bezmenov, Demin S.A., **Andreev A.O.**, Demina N.Y. Application of antijamming robust analysis method for selenocentric reference net building. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2016. vol. 19. is. 1. p. 102-106 (impact factor Scopus: 0.468).

11. **Andreev A.O.**, Demina N.Y. , Demin S.A., Nefedyev Y.A., Churkin K.O. The fractal method for analysis of macro models of the celestial bodies surface. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2016. vol. 19. is. 3. p. 271-277 (impact factor Scopus: 0.468).

12. Nefedyev Y.A., Valeev S.G., Mikeev R.R., **Andreev A.O.**, Varaksina N.Y.

Analysis of data of “Clementine” and “KAGUYA” missions and “ULCN” and “KSC-1162” catalogues. *Advances in Space Research*. 2012. vol. 50. is. 11. p. 1564-1569 (impact-factor WoS: 2.152).

### **Апробация работы**

По основным результатам диссертационного исследования были сделаны доклады на заседании Кафедры астрономии и космической геодезии Казанского (Приволжского) федерального университета, на объединенном семинаре «Проблемы происхождения и эволюции кометно-астероидного вещества в Солнечной системе и околоземная астрономия» в ИНАСАН, на Координационном совете по небесной механике ГАИШ МГУ, а также следующих научных конференциях:

1. Всероссийская астрономическая конференция 2021 года (ГАИШ МГУ), 23–28 августа 2021 г., Москва, Россия.
2. Третья астрометрическая конференция-школа «Астрометрия вчера, сегодня, завтра» (ГАИШ МГУ), 14–16 октября 2019 г., Москва, Россия.
3. Всероссийская астрометрическая конференция «Пулково-2018» (Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН), 1–5 октября 2018 г., Санкт-Петербург, Россия.
4. Вторая астрометрическая конференция-школа «Астрометрия вчера, сегодня, завтра» (ГАИШ МГУ), 23-25 октября 2017 г. Москва, Россия.
5. Международная конференция «Физика.СПб/2022» (ФТИ им. А.Ф. Иоффе), 17–21 октября 2022 г., Санкт-Петербург, Россия.
6. Международная конференция «Физика.СПб/2021» (ФТИ им. А.Ф. Иоффе), 18-22 октября 2021 г., Санкт-Петербург, Россия.
7. Международная конференция «84th annual meeting of the Meteoritical Society», 15–21 августа 2021 г., Чикаго, США.
8. Международная конференция «Физика.СПб/2020» (ФТИ им. А.Ф. Иоффе), 20-22 октября 2020 г., Санкт-Петербург, Россия.

9. XXXIII Международная научная конференция «Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-33» (Казанский национальный исследовательский технологический университет), 14-18 сентября 2020 г., Казань, Россия.
10. Международная конференция «ФизикА.СПб/2019» (ФТИ им. А.Ф. Иоффе), 22-24 октября 2019 г., Санкт-Петербург, Россия.
11. Международная конференция «The 82nd annual meeting of the Meteoritical Society» (Университет Хоккайдо), 7-12 июля 2019 г., Саппоро, Япония.
12. Международная конференция «16th INTEGRAL/BART Workshop (IBWS 2019)», 20-24 мая 2019 г., Карловы Вары, Чехия.
13. Международная конференция «2018 AIAA SPACE and Astronautics Forum and Exposition», 17-19 сентября 2018 г., Орlando, США.

**Полученные в ходе выполнения диссертационного исследования награды за НИР**

1. Диплом за 1 место в номинации «Лучший аспирант в области естественных наук» в конкурсе «Лучший молодой ученый Республики Татарстан – 2020»;
2. Медаль имени С. П. Королева за заслуги перед космонавтикой (2020 г.);
3. Молодежная научная премия Академии наук Республики Татарстан (2020 г.);
4. Стипендия Президента РФ молодым ученым и аспирантам (конкурс 2018–2020 гг.);
5. Диплом лауреата ежегодной студенческой премии Республики Татарстан «Студент Года 2017» в номинации «Интеллект»;
6. Диплом победителя конкурса «Студент Года КФУ 2017» в номинации «Лучший аспирант в области естественных и физико-математических наук»;

7. Диплом лауреата конкурса «Космос: взгляд в будущее» (Федерация космонавтики России) (2017 г.);
8. Диплом за I место в секции «Физика и астрономия» II Всероссийского научного форума «Наука будущего – наука молодых» (2016 г.);
9. Стипендия Академии наук Республики Татарстан (2017 г.);
10. Именная стипендия академиков Российской академии наук Роальда и Рената Сагдеевых (по физике) (2017 г.).

#### **Участие в грантах при проведении диссертационного исследования**

1. Грант РФФИ 18-32-00895 мол\_а (руководитель);
2. Грант «PhD-Student» Фонда развития теоретической физики и математики «Базис» (руководитель);
3. Грант РНФ 22-72-10059 (исполнитель);
4. Грант РНФ 20-12-00105 (исполнитель);
5. Грант РФФИ 19-32-90024 Аспиранты (исполнитель);
6. Грант РФФИ 19-32-50071 мол\_нр (исполнитель).

#### **Полученные в ходе выполнения диссертационного исследования результаты интеллектуальной деятельности**

1. Свидетельство RU 2018-664908 о регистрации программы для ЭВМ «Программный комплекс для анализа либрационной динамики сложных систем». Дата регистрации: 06.11.2018. Авторы: Загидуллин Артур Александрович, Нефедьев Юрий Анатольевич, Петрова Наталья Константиновна, **Андреев Алексей Олегович**;
2. Свидетельство RU 2019620426 о регистрации базы данных «База данных оптических наблюдений Луны». Дата регистрации: 18.03.2019. Авторы: Нефедьев Юрий Анатольевич, **Андреев Алексей Олегович**, Демина Наталья Юрьевна, Нефедьев Леонид Анатольевич;

3. Свидетельство RU 2020619628 о регистрации программы для ЭВМ «Программа для анализа параметров вращающегося тела с учетом его деформации и влияния гравитации внешних тел». Дата регистрации: 20.08.2020. Авторы: Загидуллин Артур Александрович, Нефедьев Юрий Анатольевич, Петрова Наталья Константиновна, **Андреев Алексей Олегович**;
4. Свидетельство RU 2020619719 о регистрации программы для ЭВМ «Программа построения имитационной модели отдельных элементов ЛНСС в части картографического обеспечения». Дата регистрации: 21.08.2020. Авторы: Нефедьев Юрий Анатольевич, Нефедьев Леонид Анатольевич, **Андреев Алексей Олегович**, Демина Наталья Юрьевна.
5. Свидетельство 2021614328 о регистрации программы для ЭВМ «Комплекс трансформации картографических проекций в цифровую форму». Дата регистрации: 23.03.2021. Авторы: Карлос Де Ла Морена, Нефедьев Юрий Анатольевич, **Андреев Алексей Олегович**.

### **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка обозначений и сокращений, списка литературы, приложения А и приложения В. Полный объем диссертации составляет 159 страниц (приложения составляют 37 страниц) со 189 рисунками и 20 таблицами. Список литературы содержит 105 наименований.

### **Содержание работы**

Во **введении** обосновывается актуальность проведенного диссертационного исследования, формулируются его цель и основные задачи, описываются научная ценность и практическая значимость научной работы, приводятся аргументы, подтверждающие достоверность полученных в диссертации результатов, а также определяются основные положения, выносимые на защиту. Также в заключении приводятся основные публикации по теме диссертационного исследования, перечисляются всероссийские и международные конференции, на которых апробировались полученные в работе результаты. Кроме того, введение содержит информацию об использованных в диссертационном исследовании программных пакетах, разработанных автором совместно с коллегами и успешно прошедших регистрацию в Роспатенте, а также данные о полученных

при подготовке научной работы грантах. **Первая глава** посвящена анализу методов создания динамической системы координат. приводятся результаты анализа селеноцентрических систем координат. в частности, отмечается основной недостаток спутниковых измерений, а именно – отсутствие привязки наблюдений к небесной системе координат. В качестве решения данной проблемы автором предлагается расширение наземного опорного каталога за счет включения данных современных космических миссий. Также приводятся характеристики селеноцентрической динамической системы координат и математический аппарат для учета либрационных эффектов и описывается регрессионный метод для приведения разнородных наблюдений в единую систему и основные проблемы таких процедур. Во **второй главе** описывается созданная в рамках диссертационного исследования цифровая база данных (ЦБД), включающая в себя значения селенографических прямоугольных координат опорных точек на лунной поверхности, полученных на основе разнородных спутниковых наблюдений и приведенных в единую селеноцентрическую динамическую систему отсчета. Всего ЦБД содержит информацию о 279507 лунных объектах. Был проведен анализ положения центра отсчета данных относительно центра масс Луны. Основной вывод, согласно полученным данным, заключается в том, что в пределах точности ЦБД наиболее близко соответствует по ориентации к селеноцентрической динамической системе координат. **Третья глава** посвящена построению селеноцентрической опорной системы координат, которая в программном виде представлена как селеноцентрическая многопараметрическая модель (СММ). В частности, описываются общая структура модели, процесс получения выборки данных, а также приводится подробное описание получения данных из цифровых топографических карт. С использованием разработанной в диссертационном исследовании цифровой базы данных решается имитационная задача по определению высоты некоторой отождествляемой точки (ОТ) на основании известных координат объектов ЦБД, находящихся в окрестности ОТ. Представлены результаты тестирования созданной СММ. Тестирование СММ осуществлялось в областях, характеризующихся различной плотностью опорных точек. Как следует из проведенного анализа, в приполярных областях (ППО) концентрация объектов ЦБД ниже, чем в более умеренных широтах, соответственно, точность определения координат предлагаемым методом уменьшается. Также есть несколько областей с повышенной концентрацией кратеров, для которых,

как и ожидалось, точность определения координат оказалась самой высокой среди всех рассматриваемых участков поверхности Луны. В **четвертой главе** рассматривается исследование поверхности Луны с использованием синтетического метода. Были созданы цифровые спутниковые карты поверхности Луны. Для этого были сформированы и проанализированы ряды сферических функций, полученные в результате разложения альтиметрических наблюдений миссии «Kaguya». Синтетический метод основан на многопараметрическом анализе разложения высотных данных в ряды сферических функций и определении фрактальных размерностей участков лунной поверхности и параметров самоподобия. С помощью синтетического метода были построены и исследованы 162 диаграммы распределения площади цветового фрактального параметра (ЦФП) по селенографическим долготам и широтам. Выявлены участки поверхности, идентичные по структуре. Для выборки из более чем 250 участков поверхности были установлены наибольшие значения показателя самоподобия. Физический смысл параметра самоподобия заключается в том, что участки с высокими показателями в наибольшей степени соотносятся с фрактальной логарифмической зависимостью. Что касается участков поверхности, характеризующихся близкими значениями ЦФП, то они подобны структурно. Участки же, у которых и ЦФП одинаковые, и показатели самоподобия максимальны, имеют свойства самоподобия и остаются неизменными в случае масштабирования. С большой долей уверенности можно утверждать, что они имеют либо общее, либо аналогичное эволюционное происхождение. Из исследования распределения параметра самоподобия по участкам поверхности Луны установлен диапазон его изменения –  $[0.8; 1]$ , что свидетельствует о существенных вариациях структуры от участка к участку. С целью подтверждения достоверности и определения физического смысла полученных результатов был выполнен корреляционный анализ параметров фрактального самоподобия с физико-химическими данными, полученными из независимых источников. В результате, было получено, что наибольшее значение коэффициент корреляции приобретает для селенографических широт от 0 до 15 градусов, что косвенно подтверждает взаимосвязь распределения температурного градиента на лунной поверхности и образования химических элементов. **Заключение** содержит краткий анализ результатов, выносимых на защиту, обсуждение дальнейших перспектив исследований и перечень организаций, где результаты могут применяться.

# Глава 1

## Метод создания динамической системы координат

При написании данной Главы диссертации использованы публикации [20, 23], выполненные соискателем в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении учёных степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования.

### 1.1 Современные проблемы изучения Луны

В настоящее время ведущие мировые космические агентства разрабатывают и реализуют программы лунных исследований. Среди последних выполненных проектов в первую очередь следует отметить миссию Китайского национального космического управления Chang'e 4 (2018), в рамках которой впервые в истории было совершено прилунение на обратной стороне Луны. Также проектируются и российские лунные миссии: на ближайшие годы запланированы космическая миссия «Луна-25» и запуск орбитального космического зонда «Луна-26».

Следует отметить, что реализация новых проектов базируется на результатах ранее выполненных исследований. Фотографирование лунной поверхности было впервые произведено еще на рубеже 30–40-ых гг. XIX в. [24]. Это событие особенно важно, поскольку оно стало первой попыткой использовать фотосъемку в астрономических целях. Размер первых фотографий Луны не превышал 2,6 см, тем не менее самые масштабные топографические особенности были различимы. Более крупные (размерами 13–26 см) изображения поверхности естественного спутника Земли начали получать в 50-ые гг. XIX в. [25–27]. Постепенно качество и размер изображений улучшались, и к концу XIX в. в Парижской обсерватории был создан лунный атлас [28]. Однако качество снимков было недостаточно высоким, изображения были «размытыми»

из-за влияния земной атмосферы, и визуально астрономы могли наблюдать в телескопы на порядок большее количество особенностей рельефа по сравнению с тем, что было запечатлено на фото-материалах. Лишь к середине XX в. ученым удалось добиться детализации снимков, сопоставимой с наблюдаемой в телескопы картиной, за счет использования оборудования обсерватории Пикдю-Миди, расположенной на высоте около 2,9 км над уровнем моря [29, 30]: на такой высоте негативное влияние атмосферы на изображение значительно снижалось. Несмотря на опубликование нескольких довольно точных и полных атласов Луны по наземным съемкам, было понятно, что получение принципиально более качественных изображений возможно только с использованием спутникового бортового съемочного оборудования.

Следующим этапом стали радиолокационные исследования Луны, начатые в середине XX в. В 60-ые гг. сотрудниками Массачусетского технологического института были созданы улучшенные радиолокационные детекторы, достаточно чувствительные для определения точных параметров рассеяния излучения лунной поверхностью [31, 32]. Примерно в это же время был создан и сам метод [33], основанный на эффекте Доплера, с использованием которого удалось зафиксировать отраженный от одного из самых крупных кратеров (Тихо) радиолокационный сигнал. В 60-70-ые гг. были выполнены радиолокационные съемки видимой стороны нашего естественного спутника на частотах 40 МГц [34], 430 МГц [35] и 7,84 ГГц [36]. Следует отметить, что небольшая часть поверхности была картирована в рамках миссии Apollo-17. Карты такого типа позволили улучшить знания о физико-химических свойствах поверхности Луны. Химический состав и высотные вариации элементов поверхности влияют на мощность радиолокационного эхо, таким образом были обнаружены области, характеризующиеся особой шероховатостью, которые значительно сложнее выявить при орбитальных исследованиях. Карта, построенная по радиолокационным измерениям при частоте 40 МГц, имела разрешение 25–40 км и позволила увидеть, что существует заметная разница в рассеивании у лунных морей и материков [34]. Карты более высокого разрешения (5–10 км) были получены при частоте 430 МГц, на их основе была сформирована топографическая мозаика. Причем обнаруженные при радиолокационной съемке на частоте 40 МГц различия между морями и материками отсутствовали на мозаике, однако при более высоком разрешении удалось зафиксировать увеличение отражательной

способности в окрестностях кратеров [35]. Еще более точные карты были получены при радиолокационных исследованиях на частоте 7,84 ГГц. Разрешение карт в плановых координатах составило 1–3 км, а по высоте – от 10 до 100 м. Отдельные карты были объединены в топографическую мозаику. В процессе интерпретации построенных по результатам вышеописанных экспериментов карт было сделано предположение о том, что существует определенная зависимость обратного рассеивания и наличия в вещественном составе титана и железа. В частности, анализ образцов, доставленных на Землю космическим аппаратом Apollo, показал [37], что присутствие этих элементов приводит к ослаблению отраженного радио-сигнала. В работе [38] был проведен сравнительный анализ лунных карт, построенных на основе радиолокационных, инфракрасных и геологических измерений, который доказал, что области в окрестностях новых кратеров, эффективнее рассеивающие радио-сигнал и имеющие более высокие температуры при затмениях, в значительно меньшей степени подвергаются изменениям в ходе последующей метеоритной бомбардировки. Подобные исследования были проведены в настоящем диссертационном исследовании по определению одинаковых по эволюционному происхождению областей с использованием авторского синтетического метода. Это дало возможность получить новые данные о таких областях, учитывая, что наши карты имеют более высокое разрешение рельефа, чем те, что были получены по радиолокационным измерениям.

Особое развитие в области картографирования произошло после успешных миссий Clementine (NASA), Kaguya (JAXA) и LRO (NASA), и позволило как получить альтиметрические данные для всей сферы Луны, так и сопоставить их между собой. Успех этих миссий обеспечивается наличием точных моделей гравитационного поля Луны (ГПЛ), поскольку в процессе съемки поверхности необходимо сохранять постоянный радиус орбиты космического аппарата на всей траектории. Спутниковые исследования ГПЛ были начаты в середине 1960-ых гг. XX в., когда была реализована советская космическая миссия «Луна-10». Одним из главных научных результатов последней стало доказательство несовпадения центров фигуры и масс Луны. Впоследствии были реализованы еще несколько космических лунных миссий, которые на основе анализа данных доплеровского слежения показали, что плотность внутреннего вещества Луны выше плотности коры (по мере продвижения к центру Луны

плотность вещества возрастает). Это открытие привело к тому, что на рубеже XX–XXI вв. был создан ряд моделей ГПЛ.

Однако при создании прецизионных моделей ГПЛ существует ряд проблем. В первую очередь следует отметить, что до сих пор в недостаточном количестве представлены наблюдательные данные (НД) для обратной стороны Луны. Второй проблемой является наличие гравитационных аномалий под поверхностью морей. Третья проблема заключается в том, что недостаточная точность НД препятствует получению топографической информации в необходимом объеме. Четвертая проблема возникает при построении гравиметрической модели с использованием многочленов Лежандра: точность модели может быть улучшена за счет увеличения порядка разложения, что в случае высоких порядков приводит к необходимости задействования больших вычислительных мощностей.

В настоящий момент существуют несколько вариантов представления функции гравитационного потенциала (ФГП). Ее сферическое гармоническое представление [39] задается как

$$V = \frac{\mu}{R} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{-(n+1)}}{R} \sum_{m=0}^n \left( C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda) \right) \times \right. \\ \left. \times P_{nm}(\sin \beta) \right], \quad (1.1)$$

где  $R$  – средний радиус,  $r$  – расстояние от данной точки до центра Луны,  $\mu$  – константа гравитационного взаимодействия,  $\lambda$  и  $\beta$  – долгота и широта данной точки,  $C_{nm}$ ,  $S_{nm}$  – гармонические амплитуды,  $P_{nm}$  – полиномы Лежандра;  $n$  и  $m$  – порядки гравитационного разложения. Трудоемкой задачей является определение параметров  $C_{nm}$  и  $S_{nm}$ : при высоких порядках разложения появляется большое количество неизвестных  $C_{nm}$  и  $S_{nm}$ , и требуются значительные мощности для вычисления обратной матрицы. Кроме того, при больших  $n$  и  $m$  невозможно определить влияние каждого отдельного гармонического коэффициента.

Другое представление ФГП используется для описания поверхностных и приповерхностных гравитационных аномалий. Согласно [40], это представление

может быть записано как:

$$V = \frac{\mu}{R} + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\epsilon_i \mu}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right), \quad (1.2)$$

где  $\vec{r}$  и  $\vec{r}'$  – радиус-векторы центра Луны и точечных масс, соответственно, начало координат соответствует спутнику;  $\epsilon_i$  – отношение точечной массы с индексом  $i$  к массе сферического тела; другие обозначения совпадают с использованными при описании уравнения (1.1).

Еще одна модель ГПЛ – Line-of-Sight (LOS) – основана на наземных наблюдениях видимой стороны Луны, и как следствие, не является глобальной.

## 1.2 Анализ селеноцентрической системы координат

Несмотря на значительные результаты, достигнутые в области установления селенофизических параметров с использованием наблюдений космических зондов, проблема разработки высокоточного навигационного ориентирования в окололунном пространстве является актуальной. В частности, в работе [41] авторы приходят к заключению о том, что в спутниковых миссиях NASA «GRAIL» и «Lunar Reconnaissance Orbiter» получены орбитальные элементы, и произведена их привязка к небесной СК с высокой точностью, достигающей  $\pm 1$  м. Данный вывод основан на том факте, что изображения, полученные «Lunar Reconnaissance Orbiter», имеют взаимную привязку с этой точностью, если говорить о селенодезических координатах. При этом на снимках 1 пиксел соответствует расстоянию 50 см. Кроме того, существует мнение о том, что гравиметрическая модель Луны, построенная с использованием данных «GRAIL», согласована с орбитальными параметрами «Lunar Reconnaissance Orbiter». Тем не менее в работе [42], посвященной анализу полученных проектом «Lunar Reconnaissance Orbiter» данных, координатные положения спутника определялись сетью радиотелескопов NASA Deep Space Network, что не может являться в достаточной степени точной как в случае небесной, так и в случае земной СК. Таким образом результаты радиолокационной альтиметрии, описанные в работе [42], и соответственно модель селеноида Луны, не имеют привязки ни

к одной СК, и положения КА определены в процессе привязки одной орбиты спутника к другой. То есть каждому обороту окололунного спутника может быть сопоставлена определенная орбита, и на основе анализа точек пересечения нескольких орбит может быть получена только «внутренняя» точность, что является единственной навигационной привязкой. Благодаря применению высокоточных спутниковых наблюдений и введению в расчеты гравитационных пертурбаций повышается именно «внутренняя» точность, но проблема оценки «внешней» остается, и для ее решения необходимы принципиально иные методы. В качестве такого рода методов могут использоваться те, что основаны на селенографической привязке зондов и спутников как к звездам, так и к тем объектам, которые находятся непосредственно на лунной поверхности [43]. В рамках нашего диссертационного исследования предложен подход регрессионного моделирования с целью преобразования наблюдений различного типа в единую систему отсчета и при этом создания каталога референчных объектов. На основе этого метода появилась возможность создания цифровой базы данных (ЦБД). Первым космическим проектом, в рамках которого осуществлялась привязка к каталогу опорных лунных объектов, стал «Lunar Reconnaissance Orbiter», оборудованный как оптической съемочной аппаратурой («LROC»), так и лазерным высотомером («LOLA»). Основной целью проекта являлось повышение точности при определении орбитальных параметров самого зонда. Изначально изображения лунной поверхности в высоком разрешении были получены специализированной камерой с панорамным обзором, после чего была апробирована возможность привязки орбиты зонда к селенодезическому каталогу. Однако окончательные результаты данного исследования не опубликованы. Еще одним весьма многообещающим направлением селенографических исследований является привязка к световым лазерным маякам (СЛМ) [21], установленным на лунной поверхности. Набор маяков по своей сути аналогичен опорным точкам, взятым из селенодезических каталогов, и отличие заключается лишь в точности размеров первых. С применением предложенного в параграфе 3.2 настоящей работы метода может быть достигнута сантиметровая точность привязки к системе налунных маяков. Размещение на лунной поверхности такой системы запланировано в рамках будущих космических миссий ГК «Роскосмос». Наличие системы маяков обеспечит возможность как прилунения с высокой расчетной точностью, так и получения точных координат объектов

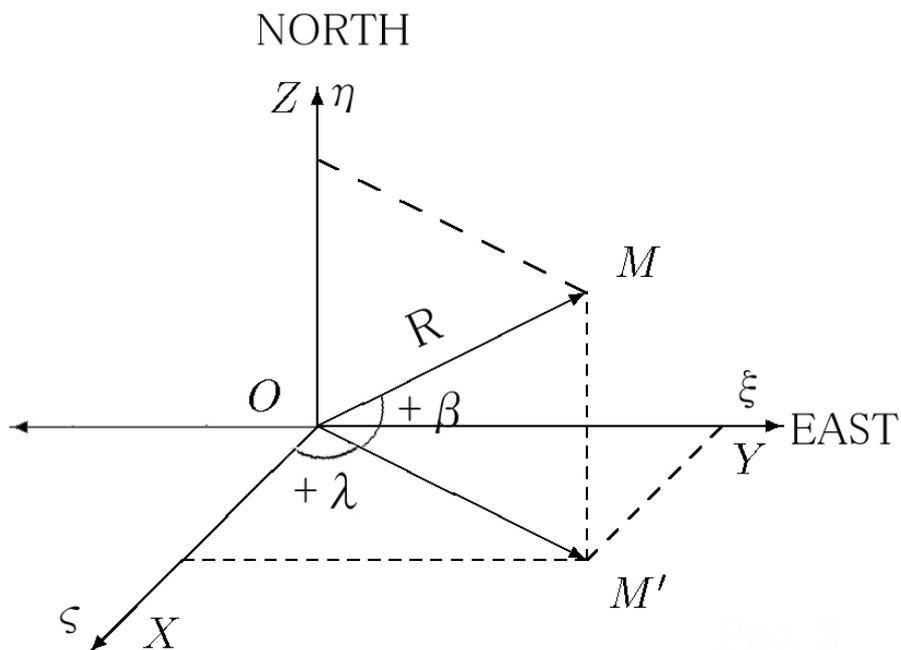


Рис. 1: Используемая селенографическая СК

на высокодетализированных снимках поверхности спутника Земли. Описанная ниже в данном параграфе методика позволит выполнять селенодезическую привязку космических аппаратов к лунной СК как с использованием каталогизированных объектов, чьи координаты установлены, так и системы оптических квантовых устройств, примерами которых являются СЛМ с известными координатными положениями.

При формировании селенодезических систем ключевую роль играет установление самой СК, относительно которой будут определяться положения искомых объектов. В настоящий момент как в учебных монографиях, так и в научных статьях можно встретить противоречивую информацию относительно установления координатных осей. Прямоугольные координаты в случае Луны измеряются в долях ее радиуса, средняя величина которого составляет 1738,1 км. При этом оси ориентированы следующим образом (рис. 1):

1.  $\zeta$  – имеет направление к Земле ( $\equiv x$  в декартовой СК);
2.  $\xi$  – лежит в плоскости экватора Луны, имеет направление на восток ( $\equiv y$  в декартовой СК);
3.  $\eta$  – лежит в плоскости нулевого меридиана, имеет направление на север ( $\equiv z$  в декартовой СК).

Долгота меридиана, проведенного через ось инерции  $X$ , равна  $0^\circ$ , при этом единица измерения долготы – градус. Если следовать классическим определениям селенографии [44, 45], то долгота определяемого объекта на лунной поверхности – это дуга от нулевого меридиана до меридиана данного объекта вдоль экватора Луны. Значения долгот являются положительными в восточном направлении, и отрицательными – в западном, при этом диапазон положительных значений долгот –  $[0^\circ, 180^\circ]$ , отрицательных –  $[0^\circ, -180^\circ]$ . Меридиан для долготы  $180^\circ$  проводится через центральную точку на обратной стороне и пересекает *Mare Ingenii*. Однако, например, в работе [46] показано, что вариант отсчета положительных долгот к западу является неверным. Таким образом возникает необходимость тщательного анализа систем координат, используемых в каждой публикации.

Единица измерения широты – градус. Соответственно, диапазон изменения широты –  $[0^\circ, 90^\circ]$  к Северному полюсу и  $[0^\circ, -90^\circ]$  – к Южному.

Можно записать для перехода от селенографических сферических координат к прямоугольным:

$$\xi = R_M \sin \lambda_M \cos \beta_M, \quad (1.3)$$

$$\eta = R_M \sin_M \beta_M, \quad (1.4)$$

$$\zeta = R_M \cos \lambda_M \cos \beta_M. \quad (1.5)$$

В выражениях (1.3), (1.4), (1.5)  $\lambda_M$ ,  $\beta_M$  и  $R_M$  обозначают, соответственно, широту, долготу и радиус-вектор точки на поверхности Луны.

Обозначим как  $l_E$  и  $b_E$  селенографические долготу и широту центра Земли, что равнозначно геоцентрическим долготу и широте центра масс Луны, а лунные оптические либрации по долготу и широте как  $l_M$ ,  $b_M$ . Далее введем наклон средней оси вращения Луны  $\Pi_M$ , определяемый как угол между плоскостью круга склонений и плоскостью нулевого лунного меридиана.

Тогда для  $l_E, l_M, b_E, b_M$  можно записать [47–49]:

$$\begin{pmatrix} \cos b_E \cos l_E \\ \cos b_E \sin l_E \\ \sin b_E \end{pmatrix} = \bar{r}_R (180^\circ + D + \tau_M - \Omega_M - \sigma_M) \bar{p}_R [-(I'_M + \rho_M)] \times \\ \times \bar{r}_R (\Omega_M + \Delta\Psi_M + \sigma_M) \times \begin{pmatrix} \cos(-\beta_M) \cos(180^\circ + \lambda_M) \\ \cos(-\beta_M) \sin(180^\circ + \lambda_M) \\ \sin(-\beta_M) \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

$$\begin{pmatrix} \cos b_M \cos l_M \\ \cos b_M \sin l_M \\ \sin b_M \end{pmatrix} = \bar{r}_R (180^\circ + D - \Omega_M) \bar{p}_R (-I'_M) \bar{r}_M (\Omega_M + \Delta\Psi_M) \times \\ \times \begin{pmatrix} \cos(-\beta_M) \cos(180^\circ + \lambda_M) \\ \cos(-\beta_M) \sin(180^\circ + \lambda_M) \\ \sin(-\beta_M) \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

В уравнениях 1.6 и 1.7 используются следующие обозначения:

$D$  – средняя лунная долгота в проекции на земной экватор;  $\tau_M$  – параметр физической либрации в лунной долготе;  $\Omega_M$  – СДВУ лунной орбиты в проекции на эклиптику;  $\sigma_M$  – параметр физической либрации в лунном узле; в настоящее время т.к. данный параметр характеризует движение полюса Луны, его часто называют физической либрацией по широте;  $I'_M$  – наклон плоскости экватора Луны к плоскости эклиптики ( $5552''64$ );  $\rho_M$  – параметр физической либрации в наклоне;  $\Delta\Psi_M$  – нутация в лунной долготе;  $\lambda_M, \beta_M$  – лунные селеноцентрические видимые долгота и широта.

Присутствующие в уравнениях 1.6 и 1.7 параметры  $\bar{p}$  и  $\bar{r}$  представляют собой матрицы поворота СК. Для некоторого угла  $\psi$  они будут иметь следующий вид:

$$\bar{p}_R(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ 0 & -\sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

$$\bar{r}_R(\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

$b_\Delta$  и  $l_\Delta$  являются поправками к известным значениям оптических либраций в долготе и широте ( $l_M, b_M$ ), которые обязаны влиянию ФЛЛ при переходе от СК  $OXYZ$  к СК  $O\xi\eta\zeta$ :

$$\begin{aligned} b_E &= b_M + b_\Delta, \\ l_E &= l_M + l_\Delta, \\ b_\Delta &= -\rho_M \sin(D - \Omega_M + l_M) + \\ &+ \sigma_M \sin I_M \cos(D - \Omega_M + l_M), \\ l_\Delta &= -\tau_M + (\rho_M \cos(D - \Omega_M + l_M) + \\ &+ \sigma_M \sin I_M \sin(D - \Omega_M + l_M)) \tan b_M. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Фундаментальные аргументы (ФА)  $l_f, l'_f, F_f, E_f, \Omega_f$  теории движения могут быть записаны как:

$$\begin{aligned} l_f &= 485866''.73 + (1\ 717\ 915\ 922''.6) \times T + 31''.31 \times T^2 + 0''.06 \times T^3, \\ l'_f &= 1287099''.80 + (129\ 596\ 581''.2) \times T - 0''.58 \times T^2 - 0''.01 \times T^3, \\ F_f &= 335778''.90 + (1\ 739\ 527\ 263''.1) \times T + 13''.26 \times T^2 + 0''.01 \times T^3, \\ E_f &= 1072261''.30 + (1\ 602\ 961\ 601''.3) \times T - 6''.89 \times T^2 + 0''.02 \times T^3, \\ \Omega_f &= 450160''.28 - (6\ 962\ 890''.5) \times T + 7''.455 \times T^2 + 0''.008 \times T^3, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где:

$l_f = D - G'$  – средняя аномалия Луны,  $G'$  – средняя долгота перигея орбиты Луны;  $l'_f = A - G$  – средняя солнечная аномалия,  $A$  – средняя солнечная долгота,  $G$  – средняя солнечная долгота перигея;  $F_f = D - \Omega_f$  – средний аргумент лунной широты,  $E_f = D - A$  – средняя солнечная и лунная элонгации.

$$\begin{aligned} A &= 1009677''.850 + (129\ 602\ 771''.210) \times T + 1''.089 \times T^2, \\ G &= 1018578''.046 + 6190''.046 \times T + 1''.666 \times T^2 + 0''.012 \times T^3. \end{aligned} \quad (1.12)$$

$\Pi_M$  и  $\Pi'_M$  могут быть получены из уравнений:

$$\begin{aligned}\sin \Pi_M &= \sin a_1 \cos(l_E + U_1 + D - \Omega_M) \sec \delta_M = \\ &= -\sin a_1 \cos(\alpha_M - \Lambda'_1) \sec b_E, \\ \sin \Pi'_M &= \sin a \cos(l_M + U + D - \Lambda) \sec \delta_M = \\ &= -\sin a \cos(\alpha_M - \Lambda') \sec b_M,\end{aligned}\tag{1.13}$$

где  $U, U_1$  – дуги, измеренные от восходящего узла усредненного и истинного земного экваторов до восходящего узла усредненного и истинного экваторов Луны, отсчитываемые по эклиптике.

Тогда влияние физической либрации в позиционном угле оси вращения Луны можно обозначить как  $\Pi''_M = \Pi_M - \Pi'_M$ .

Средний наклон эклиптики  $i_0$  к экватору может быть найден как

$$i_0 = 84381''448 - 46''815 \times T - 0''001 \times T^2 + 0''002 \times T^3,\tag{1.14}$$

при этом отсчет  $T$  ведется от эпохи J 2000 по юлианским столетиям (36525 суток).

Значения орбитальных элементов можно получить из разложения во временной ряд ФА:

$$D = 785939''157 + (1\ 732\ 564\ 372''598) \times T - 5''802 \times T^2 + 0''019 \times T^3;\tag{1.15}$$

$$G' = 300072''425 + (14\ 648\ 449''966) \times T - 37''113 \times T^2 + 0''046 \times T^3.\tag{1.16}$$

$$\begin{aligned}\cos U \sin a &= -\cos I'_M \sin i \cos(\Delta\Psi_M + \Omega_M) + \sin I'_M \cos i, \\ \sin U \sin a &= -\sin i \sin(\Delta\Psi_M + \Omega_M), \\ \sin \Omega'_M \sin a &= \sin I'_M \sin(\Delta\Psi_M + \Omega_M), \\ \cos a &= \cos(\Delta\Psi_M + \Omega_M) + \cos I'_M \cos i + \sin I'_M \sin i, \\ \cos \Omega'_M \sin a &= -\sin I'_M \cos i \cos(\Delta\Psi_M + \Omega_M) + \cos I'_M \sin i,\end{aligned}\tag{1.17}$$

$$\begin{aligned}
\cos U_1 \sin a_1 &= \sin(\rho_M + I'_M) \cos i - \\
&- \cos(\rho_M + a) \sin i \cos(\sigma_M + \Omega_M + \Delta\Psi_M), \\
\sin U_1 \sin a_1 &= -\sin i \sin(\sigma_M + \Omega_M + \Delta\Psi_M), \\
\sin \Lambda'_1 \sin a_1 &= -\sin(\rho_M + I'_M) \sin(\sigma_M + \Omega_M + \Delta\Psi_M), \\
\cos a_1 &= \cos(\rho_M + I'_M) \cos i + \\
&+ \sin(\rho_M + I'_M) \sin i \cos(\sigma_M + \Omega_M + \Delta\Psi_M), \\
\cos \Lambda'_1 \sin a_1 &= \cos(\rho_M + I'_M) \sin i - \\
&- \sin(\rho_M + I'_M) \cos i \cos(\sigma_M + \Omega_M + \Delta\psi_M).
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Элементы положения истинного и среднего экваторов Луны можно записать как (1.17) и (1.18). В них:  $i$  – истинный наклон эклиптики к экватору,  $a, a_1$  – взаимный наклон усредненного и истинного экваторов Луны и Земли,  $\Lambda', \Lambda'_1$  – дуги от восходящего узла до направления на ТВР.

В мировой астрономической практике используется ряд теорий физической либрации Луны, среди которых наиболее достоверными и точными являются теории, описанные в работах [50–54]. В предшествующих им теориях выполнялось разложение ГПЛ вплоть до сферической гармоники 2-го порядка, однако для современных исследований требуется учитывать гармоники более высоких порядков. Решение данной задачи производится на основе методов численного интегрирования уравнений ФЛЛ.

В данной диссертационной работе определение параметров  $\tau, \rho, \sigma$  выполнялось с использованием теории ФЛЛ Мигуса, описанной в [53].

Влияние погрешности теории физической либрации Луны на точность координатного положения лунных объектов было исследовано на основе метода, описанного в работе [55]. Кратко данный метод заключается в следующем. Рассмотрим рис. 2.

На рис. 2 в точке  $O$  находится наблюдатель,  $M$  – центр масс Луны,  $R_{\mathcal{L}}$  – средний радиус Луны (согласно данным миссии Clementine  $R_{\mathcal{L}} = 1737,1$  км),  $r$  – расстояние до выбранной точки лунной поверхности. Из рис. 2 видно, что для плановых координат изменение угла направления на Луну  $\Delta\alpha = 0,01''$  будет

соответствовать расстоянию на лунной поверхности

$$\Delta S = AB \times R_{\zeta} \times \Delta\alpha \approx 8 \text{ см.} \quad (1.19)$$

Далее рассмотрим влияние изменения угла позиционирования на расстояние до искомой точки. Согласно теореме косинусов, можно записать

$$r^2 = R_{\zeta}^2 + a^2 - 2aR_{\zeta} \cos \alpha. \quad (1.20)$$

Для малых  $\Delta\alpha$ , продифференцировав, можно записать

$$2r\Delta r = 2aR_{\zeta} \sin \alpha \Delta\alpha. \quad (1.21)$$

При наблюдении с Земли  $a$  имеет достаточно большую величину по сравнению с  $R_{\zeta}$  и в первом приближении можно считать  $r \approx a$ . Тогда можно записать

$$\Delta r = R_{\zeta} \sin \alpha \Delta\alpha. \quad (1.22)$$

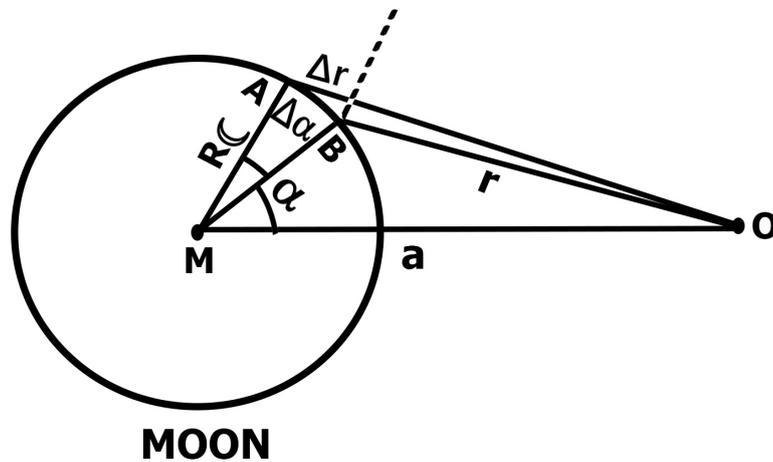


Рис. 2: Схема координатных положений искомой точки согласно вычисляемому углу  $\alpha$  налунного объекта и его поправки  $\Delta\alpha$  вследствие погрешности ФЛЛ

Вначале протестируем данный метод для случая лазерной локации Луны (ЛЛЛ), при которой расстояния до уголкового отражателей определяются с точностью до 2 см. Примем за  $a = 26^\circ$ , что соответствует наибольшему угловому расстоянию до уголкового отражателя миссии Apollo от центра лунного диска, за средний радиус Луны возьмем данные миссии Clementine  $R_{\zeta} = 1737,1$  км.

Тогда для  $\Delta r = 2$  см, подставив все величины в наше выражение, получим расчетную погрешность углов ФЛЛ  $\Delta\alpha = 0,006''$ . Согласно полученным результатам можно заключить, что для полноценной редукции наблюдений ЛЛЛ существующие аналитические теории ФЛЛ и полуэмпирическая численная теория DE421, используемая многими исследователями [56], требуют развития, так как имеют точность порядка  $0,01''$ , что следует из работ [23, 57].

Следует отметить, что для решения задачи по определению координатных положений на лунной поверхности требуются точности метрового порядка. Построим диаграмму изменения  $\Delta r$  в зависимости от позиционного угла  $\alpha$  опорной точки согласно выражению (1.22). В общем случае точкой наблюдения, в отличие от ЛЛЛ, может быть как земной наблюдатель, так и бортовая аппаратура КА. Полученная диаграмма изображена на рис. 3.

Как видно из рис. 3, максимальная погрешность  $\Delta r$  достигает 8 см. Таким образом, точности современных теорий ФЛЛ достаточно для использования их при выполнении работ по созданию селеноцентрической системы координат, в частности, используемой нами теории Migus [53], что нельзя сказать об ЛЛЛ, особенно в случае удаления лазерного уголкового отражателя от линии  $a$ .

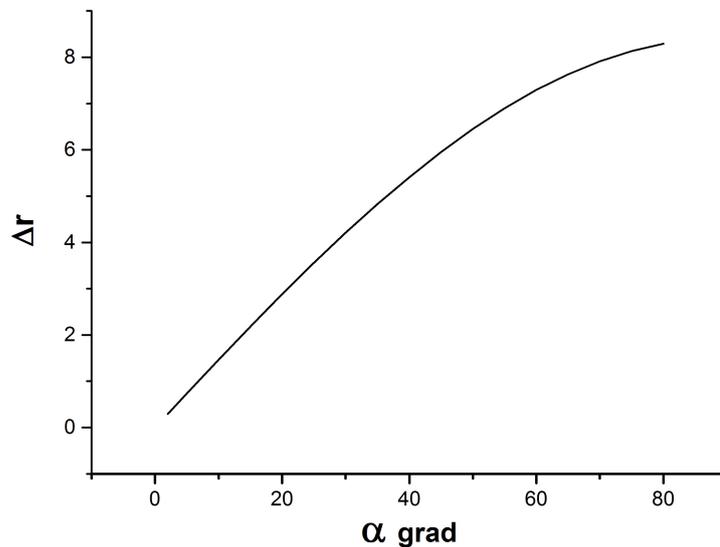


Рис. 3: Диаграмма зависимости погрешности в расстоянии  $\Delta r$  (в см) на лунной точки относительно угла  $\alpha$  (в градусах дуги)

Для полюсов эклиптики направляющие косинусы  $(p_1, p_2)$  и либрация в

долготе ( $\tau_M$ ) могут быть записаны с помощью аргументов Делоне:

$$p_1 = \sum_1^{42} [a_j \sin(A_{1j}l_f + A_{2j}l'_f + A_{3j}F_f + A_{4j}E_f) + b_j \cos(A_{1j}l_f + A_{2j}l'_f + A_{3j}F_f + A_{4j}E_f)], \quad (1.23)$$

$$p_2 = \sum_1^{34} [d_k \sin(A_{1k}l_f + A_{2k}l'_f + A_{3k}F_f + A_{4k}E_f) + c_k \cos(A_{1k}l_f + A_{2k}l'_f + A_{3k}F_f + A_{4k}E_f)], \quad (1.24)$$

$$\tau = \sum_1^{37} [M_i \sin(A_{1i}l_f + A_{2i}l'_f + A_{3i}F_f + A_{4i}E_f) + R_i \cos(A_{1i}l_f + A_{2i}l'_f + A_{3i}F_f + A_{4i}E_f)]. \quad (1.25)$$

Определив  $p_1, p_2$  и  $\tau_M$ , далее получают  $\rho_M$  и  $\sigma_M$ :

$$\begin{aligned} (J + \rho_M) &= p_1 \sin F_f + p_2 \cos F_f, \\ \sigma_M &= \tau_M + (p_2 \sin F_f - p_1 \cos F_f) / \sin J, \end{aligned} \quad (1.26)$$

В уравнениях (1.26) за  $J$  обозначен наклон к эклиптике экватора Кассини для Луны.

Далее с учетом того, что определены  $\tau_M, \rho_M, \sigma_M$ , селенографические долготы ( $\lambda_M$ ) и широта ( $\beta_M$ ) вычисляются как:

$$\begin{aligned} \lambda_M &= \lambda_0 - \Delta\lambda_M, \\ \beta_M &= \beta_0 - \Delta\beta_M, \end{aligned} \quad (1.27)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_M &= -\tau_M + \tan \beta_0 [\rho_M \cos(D - \Omega_M + \lambda_0) + \\ &+ \sigma_M \sin J \sin(D - \Omega_M + \lambda_0)], \\ \Delta\beta_M &= -\rho_M \sin(D - \Omega_M + \lambda_0) + \sigma_M \sin J \cos(D - \Omega_M + \lambda_0). \end{aligned} \quad (1.28)$$

В уравнениях (1.27) и (1.28)  $\lambda_0$  и  $\beta_0$  – селенографические координаты,

отнесенные к экватору Кассини.

Все описанные выше подходы были использованы нами для построения динамической селеноцентрической системы, подробное описание этих подходов было приведено по той причине, что в предыдущих работах других авторов присутствуют разная интерпретация и математический аппарат для задания селеноцентрической СК. Как показала практика, приведенный алгоритм позволяет получить требуемую точность для создания динамической селеноцентрической системы, которая обеспечивает точность в несколько десятков метров в плановых координатах и в пределах 200 м по радиусу-вектору опорной точки на поверхности Луны.

### 1.3 Метод построения динамической селеноцентрической системы

При создании селеноцентрической динамической опорной системы координат применяются методы, обеспечивающие прямую привязку объектов поверхности к звездам. Чтобы увеличить число опорных объектов, повысив тем самым точность создаваемых моделей, в исходный каталог необходимо добавить другие объекты, координаты которых были получены при картографировании поверхности зондами NASA и JAXA. Из-за несоответствия систем координат, в которых определялись положения объектов, выполнялось преобразование координат с использованием подхода робастных оценочных параметров. В процессе трансформации одной СК в другую приходится выполнять достаточно много дополнительных вычислений. Чтобы оптимизировать данный процесс, необходимо провести оценку их вклада в основной результат. Существует ряд методов для выполнения данной операции, но в настоящее время чаще всего применяется адаптивное регрессионное моделирование, к основным компонентам которого относятся:

1. Метод полного перебора составляющих регрессионной модели (РМ), базирующийся на разложении координат в ряд полиномов степени 2 и 3. При этом в процессе выполнения координатного преобразования ищется оптимальная структура РМ с минимально возможным среднеквадратичным отклонением. За счет применения «плавающей» РМ возможно добиться

10% повышения точности при преобразовании координат.

2. Метод аффинных преобразований, используемый для перевода селеноцентрических координат из одной СК в другую.

Рациональность вышеописанных подходов может быть оценена с использованием робастного анализа, который в свою очередь включает следующие компоненты:

1. адаптивный анализ многопараметрических систем;
2. аффинные процедуры при выполнении координатных трансформаций;
3. учет систематических ошибок с использованием ортогональных преобразований;
4. вывод искомым параметров на основе регрессионного моделирования.

Самым важным этапом создания глобальной опорной селеноцентрической системы на основе наблюдений, выполненных разными методами и наблюдательными аппаратами, является их приведение к единой СК, так как по сути они относятся к разнородным системам отсчета данных. С этой целью создается регрессионная модель следующего вида:

$$X = A \cdot Y + X_0 + \varepsilon. \quad (1.29)$$

В уравнении (1.29) использованы следующие обозначения:  $X$  – матрица, элементами которой являются приведенные к единой СК координатных положений лунных объектов,  $Y$  – матрица данных наблюдений, полученных в различных СК,  $A$  – матрица поворота систем координат,  $X_0$  – вектор-столбец смещения центров отсчета СК,  $\varepsilon$  – матрица ошибок. Для решения 1.29 использовался комплекс методов АРМ, к основным составляющим которого относятся:

1. оценка качественных параметров РМ (1.29);
2. проверка соответствия решения РМ условиям МНК;
3. в случае, если п.2 не соблюдается, – выполнение процедуры численной адаптации.

При робастном моделировании нахождение неизвестных параметров основано на выполнении следующих этапов:

1. анализ алгоритма для трансформации данных из одной СК в другую;
2. определение структуры РМ с целью возможности приведения разнородных наблюдений к единой системе отсчета;
3. выбор наиболее эффективной РМ, позволяющей проводить ее идентификацию относительно структурных параметров;
4. рассмотрение различных сценариев редукции наблюдений для определения качественных свойств РМ с точки зрения оценки нарушений условий МНК;
5. В случае отличия построенной РМ от постулируемой модели, причем последняя определяется наиболее оптимальными параметрами регрессии, – выполнение адаптации для приведения РМ к соответствующему виду.

Преобразование координат для системы референчных объектов на поверхности Луны можно представить в виде регрессионной модели, с помощью которой можно производить как оценку неизвестных параметров, так и увеличение количества входящих опорных точек:

$$A \times \Theta + \varepsilon = Z, \quad (1.30)$$

где  $A$  является матрицей поворота координатной системы,  $\Theta$  – вектор смещения начала координат систем,  $\varepsilon$  – вектор ошибок,  $Z$  – матрица поправок к искомым данным, определяемая из наблюдений.

При робастном адаптивном моделировании следует помнить, что процедура перехода из одной СК в другую является недостаточно определенной для решения РМ (1.30), поэтому необходимо выполнять поиск наиболее эффективной структуры согласно постулируемым данным [58]. В стандартном выражении уравнение (1.30) можно представить как регрессионную матрицу вида [59]:

$$Y = X\bar{\beta} + \varepsilon \quad (1.31)$$

здесь  $Y$  – вектор поправок для перехода между СК,  $\beta$  – матрица, содержащая только первую строку матрицы  $A$ ,  $X$  – матрица исходной системы,  $\varepsilon$  соответствует матрице ошибок.

В случае наличия ошибок при определении координатных положений лунных объектов и эффекта мультиколлинеарности матрица  $A$  может не удовлетворять условиям ортогональности при трансформации системы  $X$  в систему  $Y$ . Тогда требуется выполнение следующего условия:

$$A^T A = E, \det A = 1. \quad (1.32)$$

Если говорить математическим языком, то выражение (1.31) с учетом условия (1.32) можно считать детерминированным преобразованием. В этом случае используется процедура численной оптимизации, которая позволяет достигать точности преобразования не менее, чем разница между СК  $X$  и  $Y$ .

Определение элементов матрицы  $\Theta(\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta)$  можно выполнить, используя выражение:

$$\Theta = (A^T P A)^{-1} (A^T P Z). \quad (1.33)$$

При этом ошибки к прямоугольным селенографическим координатам  $\Delta\xi$ ,  $\Delta\eta$ ,  $\Delta\zeta$  находятся из решения ковариационного уравнения

$$D(\Theta) = \frac{V^T P V}{2n - 3} (A^T P A)^{-1}, \quad (1.34)$$

где  $V$  – вектор остаточных погрешностей.

При аппроксимированных и детерминированных преобразованиях координатных систем могут использоваться разные подходы. В нашем случае при построении селеноцентрического каталога опорных объектов использовалась абсолютная привязка их к звездам или к небесной СК. С целью выполнения поставленной задачи произведена корректировка МНК на основе методов робастного анализа. В данном случае применяется подход аффинного преобразования координат из одной СК в другую [60].

При построении селеноцентрической опорной СК были приняты в обработку как наземные наблюдения, так и данные космических миссий, разработаны авторские программы, которые можно использовать при создании регрессионных моделей и производить оценку полученных результатов моделирования.

Такие исследования включают два основных этапа:

1. определение систематических и случайных ошибок построенной лунной СК;
2. гармонический многофакторный анализ каталожных положений лунных объектов на всей сфере Луны.

Как отмечалось выше, при выполнении данных этапов использовались специализированные программные пакеты, позволяющие выполнять привязку лунных объектов к небесной СК. При этом для того, чтобы выполнить задачу более эффективно, необходимо определить, какими вычислительными процедурами можно пренебречь с сохранением достаточного уровня точности.

Следует отметить, что при решении регрессионных моделей в области астрономических задач основным этапом вычислительного алгоритма при обработке наблюдательных данных является оценивание составляющих РМ. В настоящее время при выполнении данного этапа постулирование стационарной устойчивой модели и применение МНК считаются не соответствующими современной практике РМ. Методы, которые предполагают совершение процедур, выходящих за стандартные вычисления МНК, обременены определенными проблемами и не способствуют полноценному решению поставленной задачи. При обработке наземных и космических измерений присутствуют стандартные ошибки, которые обязаны корреляциям между полиномиальными элементами РМ, наличию повторяющихся, нелинейных и незначительных членов, нарушениям алгоритма Гаусса-Маркова в ходе применения МНК, поэтому было принято решение использовать альтернативный существующим методам подход. Суть его заключалась в том, что при определении неизвестных параметров совместно с использованием регрессионного анализа осуществлялась проверка отличия от постулируемой модели и выполнение адаптации, если такие отличия существовали. Это осуществлялось с помощью специализированного автоматизированного программного обеспечения, что позволило значительно сократить время производства вычислений и анализа полученных результатов. Большую роль при этом играет то, что РМ является системным подходом, обеспечивающим корректность применения всех элементов системы, таких как оценивание структуры модели, нахождение искомых параметров, осуществление необходимых выборов, создание параметров постулирования, работа с мерами качества.

При этом появляется возможность выполнять редукцию измерений как для многопараметрических, так и для динамических РМ. Специализированные пакеты кратко описаны ниже:

1. Программный пакет регрессионного моделирования (ППРМ), который направлен на исследование оптимальной структуры РМ, редуцирование данных и получение прогнозных значений. ППРМ состоит из рациональных структурных элементов: а) модуль контроля работы программы; б) программный модуль создания постулирующих требований; в) программный модуль выборки алгоритма; г) интерактивный узел изменения настроек ППРМ; д) узел для редактирования поступающих в обработку данных; е) система построения интерактивных числовых таблиц; ж) модуль справочных материалов.
2. Программный комплекс гармонического многофакторного анализа (ПКГМА). ПКГМА является автоматизированной системой для осуществления операций регрессионного моделирования. Может использоваться при анализе динамических процессов в селенодезических системах и аномалий селеноида. Важным качеством ПКГМА является его способность осуществлять прогнозирование ожидаемых искомым результатов (откликов).
3. Программный пакет многофакторного оценивания корреляционных связей (ППМОКС). Основное предназначение ППМОКС состоит в разработке регрессионных многофакторных структурированных моделей и нахождении причинно-следственных связей изучаемых процессов. В отличие от предыдущего программного продукта в данном случае прогнозные значения не моделируются.

## Глава 2

# Цифровая база динамических селенографических координат

При написании данной Главы диссертации использована публикация [20], выполненная соискателем в соавторстве, в которой, согласно Положению о присуждении учёных степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования.

### 2.1 Анализ данных современных космических миссий для использования их при построении ЦБД

В диссертационной работе была построена база топографических оптических наблюдений, как на основе наземных измерений, так и на результатах космических миссий, подробное описание которой приведено в параграфе 2.2. Соответственно, к наземным топографическим измерениям относятся наземная астрофотограмметрия и лазерная локация. Эти исследования предоставляют информацию ограниченного пространственного распределения, так как по естественным причинам наземные наблюдения ограничены видимой стороной Луны. Совместно с наземными наблюдениями основную часть базы оптических наблюдений Луны составляют данные космических миссий, начиная от «Apollo» и заканчивая «LRO».

В проекте Apollo были выполнены орбитальные измерения по отслеживанию ориентиров командными и сервисными модулями [61], получены фотограмметрические данные с лунных орбитальных аппаратов [62] и сформированы профили лунной поверхности с помощью широкополосного радиолокатора «Apollo» [63]. Все эти наблюдения не были селенодезически отнесены к центру масс Луны и формировали квазидинамическую СК, при этом абсолютные

ошибки достигали 500 м в плановых координатах.

Более точная информация о поверхности Луны была получена в результате орбитальной лазерной локации. Миссии «Apollo» (15, 16, 17) были оснащены лазерными альтиметрами, которые определяли высоту командных модулей относительно лунной поверхности. Основной задачей, решавшейся с использованием этого оборудования, являлось измерение расстояний для масштабирования изображений с метрических камер «Apollo». Благодаря высокой точности орбитальных измерений было принято решение использовать альтиметры не только при съемке. Эти измерения позволили получить первую информацию о форме Луны в системе координат центра масс.

Альтиметры «Apollo» характеризовались угловой шириной пучка в 300 мкрад, с помощью которого анализировался участок поверхности диаметром 300 м. Вертикальная точность инструментов, которая контролировалась системным излучателем, составляла  $\pm 2$  м. Интервал срабатывания лазера варьировался от 16 с до 32 с, в результате чего сформировались выборки вдоль пути следования КА к лунной поверхности длиной от 30 км до 43 км. Лазерный альтиметр «Apollo 15» [64] получил данные для 2 полуоборотов (революций), в то время как альтиметры «Apollo 16» [65] и «Apollo 17» [66] получили данные для 7 полуоборотов и 12 полных, соответственно. Всего по итогам трех миссий было сделано 7080 альтиметрических измерений. Абсолютная радиальная точность альтиметрических данных «Apollo» составила  $\approx 400$  м, причем в значительной степени такая неточность была обусловлена ошибками орбиты КА, возникшими вследствие недостаточной на тот момент изученности ГПЛ. Основным недостатком данных, полученных альтиметрами серии КА «Apollo», была зона покрытия, ограничивающаяся областью  $\pm 26^\circ$  от экватора. Полученные в процессе этих измерений данные были приведены нами в единую динамическую систему и включены в базу данных оптических наблюдений. Метод трансформации координат подробно описан в параграфе 1.3.

В дополнение к сказанному выше следует отметить, что данные лазерной альтиметрии «Apollo» были использованы для определения среднего радиуса Луны (1737,7 км), а также величины сдвига центра отсчета (ЦО) относительно ЦМ. До миссии «Clementine» лучшее сферическое гармоническое представление лунной топографии было выполнено Bills и Ferrari [67], которое включало модель 12-го порядка и степени, данные лазерной альтиметрии «Apollo», а так-

же орбитальные фотограмметрические измерения, измерения реперных точек, наземную фотограмметрию и измерения профилей лимба. По оценкам авторов, ошибки для этих данных лежали в пределах от 300 м до 900 м; однако для значительной части поверхности обратной стороны Луны не было проведено вообще никаких измерений.

Как отмечено в работе [68], местоположение лунных уголковых отражателей, размещенных как в ходе миссий «Apollo», так и советскими посадочными аппаратами, известно с точностью до нескольких сантиметров. Тем не менее даже к настоящему моменту времени не вполне понятно, как эти точки могут быть привязаны к текущей опорной лунной сети. Точки в окрестностях посадочных аппаратов «Apollo» имели позиционные ошибки менее 150 м. В зоне, покрытой картографическими камерами «Apollo», позиционные ошибки возрастали примерно до 300 метров. В областях, где доступно только телескопическое покрытие, позиционные ошибки составили до 2 км, в то время как в некоторых областях обратной стороны Луны ошибки возрастали до нескольких км.

Следующей важной с точки зрения исследования лунной топографии миссией стала «Clementine». С ее помощью были улучшены геодезические знания о видимой стороне Луны, точность полученных результатов зависела в основном от точности орбит КА и полноты высотных данных, обеспечивавшихся высотными сенсорами КА. Оба этих фактора будут рассмотрены ниже.

В миссии «Clementine» топографические измерения проводились с помощью инструмента LIDAR, представлявшего собой Nd:YAG-лазер. В первый месяц работы КА были получены топографические профили в диапазоне широт от  $79^\circ$  ю.ш. до  $22^\circ$  с.ш. За второй месяц картографирования, когда КА находился в точке периселения (точка орбиты искусственного спутника Луны, наиболее близкая к центру Луны) на широте  $30^\circ$  с.ш., были получены профили в широтном диапазоне от  $20^\circ$  ю.ш. до  $81^\circ$  с.ш. Расстояние между двумя последовательными излучениями составляло около 20 км, и такое разрешение было достигнуто над некоторыми гладкими поверхностями морей. Однако в неровных высокогорных территориях, где инструмент не поддерживал привязку к поверхности, это расстояние составляло примерно 100 км. Поперечное разрешение определялось продолжительностью миссии, т.е. расстоянием между орбитальными треками, и составило 60 км на экваторе, в других точках оно было ниже. К основным источникам ошибок можно отнести:

1. Ошибку орбиты, которая в 3 раза больше 10-метровой воспроизводимости радиального положения;
2. Систематическую ошибку прибора (40 м);
3. Ошибки при определении селеноида (лунного геоида) ( $\approx 10$  м);
4. Ошибки в наведении прибора (pointing errors) с КА, движущегося по орбите вокруг Луны ( $\approx$  несколько метров). Следует отметить, что в ходе нескольких проходов КА был умышленно направлен от надира для получения изображений некоторых объектов лунной поверхности. LIDAR успешно измерял расстояния при отклонениях на величину до  $6^\circ$  от надира, хотя в целом измерения расстояний при отклонениях от надира на углы  $> 4^\circ$ , имели огромные ошибки и поэтому были отброшены.

Неровность лунной поверхности – еще один источник ошибок. Неровность, соответствующая углу наклона поверхности в  $5^\circ$ , типичная для горных местностей, дает ошибку в 17 м. В ходе постобработки было выявлено, что отклонение частоты или фазы передаваемого сигнала равна примерно одному элементу разрешения по дальности ( $\approx 40$  м). Кроме того, расходимость луча дальномера может давать ошибку до 70 м.

Поскольку источники ошибок статистически независимы, мы можем оценить общую ошибку как  $\sqrt{\sum_i a_i^2}$ , где  $a_i$  –  $i$ -ый вклад, и это даст общую радиальную ошибку, равную примерно 100 м. 30% поправка на дополнительные несмоделированные или не вполне корректно смоделированные источники ошибок дает общую радиальную ошибку в 130 м. Лазерная альтиметрия выполнялась при орбитальных проходах от 8 до 163 в южном полушарии и при проходах от 165 до 332 – в северном. Прохождения от 8 до 19 были калибровочными, а данные были отброшены из-за их низкого качества. В процессе картографирования LIDAR сработал 123 тыс. раз, что соответствовало 19% переданных лазерных импульсов. Следует отметить, что над пересеченной местностью происходили ложные срабатывания из-за шума, что не коррелировало с особенностями лунной поверхности. Главными источниками шума были джиттеры (дрожания), нормально распределенные со среднеквадратичной ошибкой около 40 м; искажения боковых лепестков диаграммы направленности лазерного альтиметра, которые зависят от территории и мало изучены; шум

детектора, зависящий от условий окружающей среды (особенно от изменений температуры на КЛФД-детекторе), настроек диапазона и порога и энергетического запаса линии связи; фоновое солнечное излучение на длине волны лазера, прямо передаваемое на детектор и отражающееся от лунной поверхности. Чтобы создать цифровую топографическую модель Луны, необходимо было разработать фильтр, который, будучи примененным к данным, возвращал бы максимум одно допустимое значение диапазона для каждой точки, в которой происходит радиоэхо от лунной поверхности. Поскольку детальная топография в значительной степени неизвестна, требовалось, чтобы данный фильтр был основан на априорных знаниях о свойствах лунной поверхности. В результате была создана стохастическая модель для топографии, которая выполняла роль фильтра.

Данные, «очищенные» от шума с помощью этой модели, были собраны в сетку размером  $0,25^\circ \times 0,25^\circ$ , что соответствовало минимальному расстоянию между орбитальными прохождениями. LIDAR практически не получал альтиметрическую информацию для областей, находящихся выше  $78^\circ$  с.ш. и ниже  $78^\circ$  ю.ш. В этой связи требовалось выполнить интерполяцию для полярных областей, составляющих около 2% от всей лунной поверхности. Для этого был использован метод «splines with tension» [69]. Затем было выполнено сферическое гармоническое разложение высот в системе центра масс. Это разложение было названо второй лунной топографической моделью Годдарда (Goddard Lunar Topography Model 2 – GLTM 2).

GLTM 2 представляла собой уточнение модели GLTM 1 [70] – первого достоверного описания распределения высот на поверхности Луны. Сравнение с данными, полученными в работе [67] в до-клементиновскую эпоху, приведено в Таблице 2.1. Различия в параметрах лунной фигуры между «Clementine» и «Apollo» в основном обусловлены тем, что покрытие в миссии «Apollo» ограничено областью от  $26^\circ$  ю.ш. до  $26^\circ$  с.ш. Наиболее существенные различия зафиксированы на обратной стороне Луны над достаточно протяженной широтной зоной, которая была неудачно обработана оборудованием «Apollo».

Сравнение высот, полученных «Clementine LIDAR», и высот в контрольных точках, полученных лазерными альтиметрами «Apollo», приведено в Таблице 2.2. Следует отметить, что в областях, где зоны покрытия «Apollo» и «Clementine» перекрываются, измеренные относительные топографические вы-

соты в целом согласуются до  $\sim 200$  м, а различия в основном обусловлены более точными поправками к орбите [71] и вариациями крупномасштабных неровностей поверхности.

Альтиметрические данные «Clementine» позволили получить более точные оценки фундаментальных параметров фигуры Луны.

Таблица 2.1: Сравнение лунных глобальных топографических моделей

Параметры	Bills, Ferrari [1977]	GLTM 2
Количество наблюдений	5631 – лазерные наблюдения Apollo 12342 – орбитальные фотографии 31 – отслеживание угловых отражателей 3311 – профили лимба	72548 – Clementine LIDAR
Всего наблюдений	21999	72548
Размер пространственной сетки	$5^\circ \sim 150$ км	$2^\circ, \sim 60$ км
Степень сферического гармонического разложения	$12 \times 12; 1820$ км	$72 \times 72; 340$ км
Региональная точность	$\sim 500$ м (только видимая сторона Луны)	$\sim 40$ м
Точность относительно центра масс	$\sim 1$ км	$\sim 100$ м

Таблица 2.2: Сравнение профилей данных, полученных лазерными альтиметрами «Apollo» и «Clementine LIDAR»

Параметры	Apollo	Clementine
Количество измерений	7080	72548
Покрытие	От $26^\circ$ ю.ш. до $26^\circ$ с.ш.	От $79^\circ$ ю.ш. до $81^\circ$ с.ш.
Продольное разрешение	$30\text{--}43$ км	$\geq 20$ км
Поперечное разрешение	Н/Д	$\sim 60$ км
Вертикальное разрешение одиночного импульса	2 м	39, 972 м

Позднее на основе фотограмметрического анализа снимков, сделанных «Clementine» и объединенных с данными по лунным историческим контрольным точкам, была построена полная топографическая карта [72], включающая полярные области. Однако эта карта содержала большие систематические

ошибки. Топографические данные, получаемые с помощью наземных радаров, содержат пробелы из-за ограниченности поля зрения и условий освещенности. Эти негативные эффекты особенно сильно проявляются в полярных областях.

Данные, полученные миссией «Clementine» по построению топографических моделей Луны, использовались нами для анализа положения ЦМ относительно ЦО, что будет описано в параграфе №2.3.

Следующей важной с точки зрения топографических исследований лунной поверхности стала японская миссия «Kaguya» (Selene). Однако полученные данные характеризуются некоторыми ошибками, связанными с дискретизацией данных, термальными изменениями синхронизатора и электроники бортовой аппаратуры и, согласно оценкам, составили  $\pm 0,55$  м (СКО) [73]. Еще одна ошибка возникала из-за уклона или неровности поверхности в сочетании с малоизученными эффектами альбедо. Эта ошибка (смещение дальномера) может приводить к некорректному измерению расстояний и достигает 12 м в случае, когда наклон луча составляет  $30^\circ$ , соответственно, отражательная способность составляет 30% до коррекции уширения импульса. Для умеренно плоских поверхностей систематическая ошибка при определении расстояния составляет около 2,5 м. Первые тесты дальнометрии были успешно выполнены 25 ноября 2007 г., а картографирование началось 30 декабря 2007 г. Топографические данные были получены включением точных орбит главной орбитальной станции «Kaguya». Эти орбиты были рассчитаны на основе доплеровских данных с помощью программного обеспечения GEODYN-II с использованием самой последней гравитационной модели SGM90em (SELENE Gravity Model), которая является адаптированной в целях определения орбиты версией модели SGM90d [74]. Точность орбиты определялась разностью орбит при их перекрывании; радиальная ошибка орбиты лежала в пределах 1 м, а общая ошибка позиционирования составила около 50 м. Таким образом радиальная топографическая ошибка, возникающая из-за повторяемости орбиты, составила 1 м, ошибка инструмента 0,55 м, смещение дальномера лежала в пределах от +2,5 м до +12 м, что в сумме давало итоговую ошибку  $\pm 4,1$  м, если значение смещения дальномера составляло 4 м. Аналогично горизонтальная топографическая ошибка, возникающая из-за повторяемости орбиты, была равна 50 м (СКО), погрешность, обусловленная неправильным положением указателя или стрелки прибора, составила 175 м (максимальное значение), ошибка тегирования по времени 1,5 м (макси-

мальное значение), что в сумме давало окончательную ошибку +77 м. Ошибка, связанная с неправильным положением указателя или стрелки прибора, считалась равной  $< 0,1^\circ$  (или 175 м при условии, что КА находился на высоте 100 км). Эта цифра была основана на тепловом и других видах анализа деформаций основного орбитального аппарата. Ошибка тегирования по времени составила менее 1 мс (или 1,5 м вдоль трека на высоте КА в 100 км), она базировалась на учете времени распространения сигнала от основного орбитального аппарата до каждой станции и задержке при обработке сигнала на этих станциях. Информацию о пространственном положении и тегировании по времени предоставлял центр отслеживания и управления JAXA (Japan Aerospace Exploration Agency). Общее число проанализированных альтиметрических точек составило  $6,77 \times 10^6$  по состоянию на 31 марта 2008 г.

Поскольку «Кагуя» двигался по полярной орбите, поверхностные траектории оказались практически параллельными на малых широтах, межтрековый интервал составил менее  $0,5^\circ$  (около 15 км на экваторе). В полярных областях расстояние между ближайшими точками, в которых проводились альтиметрические измерения, составило не более 2 км внутри зоны шириной  $1^\circ$  от полюсов. Было определено, что самая высокая точка на Луне находится на южном краю бассейна Дирихле-Джексона, а самая низкая – в кратере Антониади (Южный полюс-Эйткен). Полная топографическая амплитуда составила около 19,81 км, что превышает значение, полученное другими исследователями (17,53 км) [67, 75].

С использованием топографических данных, полученных LALT к 31 марта 2008 г., была разработана сферическая гармоническая модель 359 порядка и степени [STM359\_grid-02 (SELENE Topography Model)]. Топографические данные были интерполированы и собраны в сетку размером  $0,0625 \times 0,0625$ , затем была произведена процедура фильтрации данных, после чего они были пересобраны в сетку размером  $0,25 \times 0,25$  [76] и преобразованы в сферические гармонические коэффициенты. Коэффициенты низких порядков и степеней (0, 1 и 2) перечислены в Таблице 2.3.

Учитывая перечисленные выше ошибки при лазерной дальнометрии,  $S_{00}$  – средний радиус Луны – составил  $1735,15 \pm 0,01$  км. Ошибка, возникающая в результате неточности орбиты и измерений прибора, при усреднении оказалась очень мала. Средний радиус, рассчитанный на основе данных работы [67],

равен  $1736,93 \pm 2,1$  км, что хорошо согласуется с результатом, полученным в миссии «Kaguya». Данные «Kaguya» по величине сдвига ЦМ относительно ЦО в высокой степени соответствуют данным «Clementine».  $R_{\text{поляр.}}$  и  $R_{\text{сред. экват.}}$  были вычислены через  $R_{\text{сред.}}$  (1737,15 км) и коэффициент  $C_{20}$  и равны 1735,66 км и 1738,64 км, соответственно.

Получение топографических данных чрезвычайно важно для безопасного прилунения. Если говорить о первостепенном значении необходимых параметров при планировании прилунения, то в локальной и глобальной области на Луне необходима высокоточная топография. Также необходимо отметить вадность структуры поверхности, в частности, ее уклона и неровности рельефа.

Таблица 2.3: Нормированные коэффициенты 0, 1 и 2 степени и порядка, полученные на основе модели фигуры Луны с помощью сферического гармонического анализа.

Степень: $l$	Порядок: $m$	$\overline{C}$ (м)	$\overline{S}$ (м)
0	0	1737156,3	–
1	0	137,9	–
1	1	–1023,2	–421,9
2	0	–668,1	–
2	1	–769,5	–16,9
2	2	109,2	383,4

Данные, полученные миссией Kaguya, использовались нами при создании ЦБД, определении положения центра масс относительно центра фигуры, построении цифровых карт физической поверхности Луны.

Большой объем топографической информации был получен при выполнении миссии Lunar Reconnaissance Orbiter и использовался нами при создании ЦБД и селеноцентрической многопараметрической модели. В проекте LRO были решены 2 главные задачи [77]. Во-первых, была сформирована глобальная топографическая модель высокого разрешения и геодезическая система отсчета, что улучшило позиционирование, точность посадки и мобильность на поверхности для будущих научных целей и космических исследований. Также альтиметр LRO (LOLA) должен был описать среду полярного освещения и сформировать изображения областей, находящихся в постоянной тени с целью выявления областей, содержащих водяной лед в полярных кратерах, находящихся в постоянной тени.

LOLA обеспечил 10 см локальную топографию в системе координат цен-

тра масс для областей с низким уклоном. Измерения центра масс имели номинальную точность опорного положения около 50 м на поверхности и 1 м по высоте.

На 19 июня 2010 г. Lunar Orbiter Laser Altimeter (LOLA) произвел свыше  $2,0 \times 10^9$  измерений высот, которые в совокупности представляли собой глобальную модель лунной топографии самого высокого разрешения среди всех когда-либо созданных [17]. Эти альтиметрические наблюдения были использованы для усовершенствования лунной геодезической сетки до  $\approx 10$  м радиальной (высотной) и до  $\approx 100$  м пространственной точности в системе центра масс Луны. По результатам измерений LOLA были также построены глобальные карты уклонов и неровностей лунной поверхности в самом высоком разрешении. Региональная топография областей лунных полюсов позволила точно описать текущие и прошлые условия освещенности.

Альтиметрические данные LOLA были использованы для создания глобальной топографической координатной сетки. Самая высокая точка имеет высоту, равную 10,7834 км, ее координаты 201,378 в.д., 5,401 с.ш. Высота (или глубина) самой низкой составляет  $-9,117$  км, ее координаты 187,5074 в.д., 70,360 ю.ш., она лежит внутри кратера Антониади.

Все перечисленные выше исследования являются одними из единственных источников современной селенографической информации, которая использовалась в нашей работе для построения и исследования селеноцентрической опорной системы координат.

В дальнейшем для уточнения глобальной селеноцентрической модели в полярных областях планируется включить данные «Chandrayaan-1» – индийской лунной миссии, в которой изучались топография лунной поверхности и ее гравитационного поля посредством высокоточного измерения высоты с полярной орбиты Луны. В данном случае используется прибор Lunar Laser Ranging Instrument (LLRI). С его помощью были получены альтиметрические данные для областей, близких к полюсам Луны, которые находились вне зоны охвата предыдущих миссий.

В данном параграфе нами проведен анализ развития построения систем селенографических координат. Следует отметить, что эпоха определения положений объектов на поверхности Луны визуальным методом началась в середине XIX в., когда был предложен гелиометрический метод определения параметров

лунной либрации [78]. В работе [79] были проанализированы несколько селенодезических каталогов на основе оценивания СКО ( $\varepsilon_b$ ) альтиметрических компонентов соседних точек, принадлежащих области с малым уклоном, относительно усредненных ошибок ( $\varepsilon_a$ ), приводимых авторами работы. Точность и достоверность рассматриваемых каталогов оценивались как по абсолютной величине самих параметров  $\varepsilon_b$  и  $\varepsilon_a$ , так и по их соответствию друг другу. По этим критериям наиболее точной и достоверной оказалась система Mills-2, в некоторой степени ей уступает АСЖС. В соответствии с результатами, опубликованными в [79–81], величины ошибок при вычислении позиций центров каталогов значительно меньше по сравнению с ошибками при определении альтиметрических данных. Учитывая все вышесказанное, можно сделать вывод, что различные селенодезические системы были приведены к общему центру отсчета координат.

Та же особенность характерна и для каталога, составленного в ГАО НАНУ [80,82]. Следует отметить, что начало координат этого каталога было вычислено с использованием измерений, выполненных КА «Луна 10» и «Lunar Orbiter». Согласно работе [83], в которой была выполнена редукция наблюдений КА Зонд-8, оказалось, что в высоты некоторых кратеров необходимо внести уточняющие поправки для того, чтобы система стала более точной. Последнее было подтверждено сравнением уровенной поверхности до и после внесения поправок.

Следующим шагом по расширению системы [82] стало построение каталога, включающего 4,9 тыс. опорных кратеров [84]. При этом были с более высокой точностью определены начало координат и параметры, описывающие ориентацию координатных осей, благодаря использованию новых альтиметрических данных, полученных в миссиях NASA «Apollo 15» и «Apollo 16».

В работе [85], в которой 9 каталогов были приведены к единой системе координат, для решения вопроса о положении центра отсчета данных система привязывалась в первом случае к центру фигуры, во втором – к центру масс.

Попыткой создания селеноцентрической опорной сети стала работа С.Г. Валеева, основанная на крупномасштабных снимках нескольких десятков кратеров со звездами [86]. Как результат, были определены положения опорных объектов в системе эфемеридного ЦМ. Существенным минусом этой сети является низкая точность при определении координаты, направленной к Земле, из-

за небольшого количества набора либраций и соответственно, недостаточного стереоэффекта, от которого и зависит точность определения данной координаты.

В дальнейшем для решения данной проблемы был предложен уникальный метод отдельной синхронизированной съемки луны и звезд с использованием специальной фотографической камеры. Нами был выполнен анализ точности подобных наблюдений и получено, что в случае использования второй экваториальной СК снимки имеют среднюю точность привязки по  $\alpha$  от  $0''04$  до  $0''13$  и по  $\delta$  от  $0''05$  до  $0''11$ . В работах [87–91] был разработан метод двойных изображений, который позволил привязать 264 кратера к звездам и в итоге построить динамическую селеноцентрическую систему координат (ССК). Если обозначить оси инерции Луны, центр отсчета данных и центр масс луны как ОИЛ, ЦОД и ЦМЛ, соответственно, то ССК – это такая система, в которой оси совпадают с ОИЛ, а ЦОД – с ЦМЛ.

Разработка спутниковых моделей поверхности Луны началась в 1966 г., когда был запущен первый из пяти зондов программы «Lunar Orbiter». В результате выполнения этой миссии было получено более 2600 снимков поверхности, в том числе и участков, расположенных на обратной стороне Луны. Несмотря на то, что эти материалы оказались крайне важными для выбора области прилунения космических аппаратов «Apollo», их разрешение оказалось недостаточным для использования в селенодезических исследованиях [19]. Поэтому первым селенодезическим каталогом, основанном на спутниковых данных миссии «Apollo», стал каталог, описанный в работе [92]. Следует отметить, что содержащиеся в нем данные приведены к единой СК, а координаты опорных точек заданы относительно ЦМ Луны. Главными недостатками этой системы являются малая площадь покрытия –  $1/10$  всей лунной поверхности, а также то, что, если в области, заключенной между станциями ALSEP точность определения высот составляет несколько десятков метров, а плановых координат – 0,3 км, то исследование интегральных каталогов данной сети (DMA (A 15), NOS (USGS), и DMA (603)), выполненное Дэвисом показало [93], что при удалении от станций ALSEP точность резко уменьшается и может достигать километровых отметок. При создании этих интегральных каталогов для их приведения к единой СК, привязанной к пунктам ALSEP, были рассчитаны коэффициенты, определяющие необходимый угол поворота преобразуемой СК, а также ее сдвиг

относительно единой СК. Для упомянутых систем вычисленные СКО составили 58 м, 73 м и 76 м соответственно. Усредненное значение сдвига составило 0,308 км, 0,333 км и 2,110 км. Хотя все эти сети определялись в на основании наблюдений одного и того же набора точек, их положения могли сильно друг от друга отличаться. Результаты преобразования координат приведены в Таблице 2.5. Но тем не менее, как нами отмечалось выше, несмотря на малые значения СКО, при удалении от ALSEP точность падает.

После миссий Apollo был осуществлен еще ряд лунных проектов, на основе которых получены селенографические данные, – это миссии Clementine, LRO, SMART-1. Это позволило создать каталог ULCN 2005, содержащий информацию о более, чем 250 тыс. положениях лунных объектов [75]. ULCN 2005 отличается от предыдущих систем тем, что в нем произведен поиск решений для радиус-векторов опорных объектов, в результате чего удалось минимизировать ошибки при их определении, которые в некоторых случаях могут превышать 10 км [94, 95]. Если обозначить квазидинамическими те системы, координатные оси которых не совпадают с ОИЛ, то к ним относится большинство спутниковых, в том числе и ULCN 2005, так как она была привязана к спутниковой СК.

Таблица 2.4: Результаты преобразования каталогов

Исследуемые каталоги	Количество общих точек	Сдвиг до преобразования, км	Сдвиг после преобразования, км
DMA (A 15) и NOS (USGS)	3791	1,995	0,335
DMA (A 15) и DMA (603)	4284	0,340	0,301
NOS (USGS) и DMA (603)	2624	2,140	2,740

Следующим этапом создания динамической селеноцентрической системы (ДСС) стало построение сети 1162 референчных точек на основе наблюдений на горизонтальном телескопе по привязке кратеров к звездам и с использованием данных миссии LRO. Нами данная сеть была исследована в работе [43], результаты данного анализа описаны в параграфе 2.3.

## 2.2 Цифровая база данных

Цифровая база данных (ЦБД), предназначенная для эффективного хранения информации о спутниковых наблюдениях лунных объектов, была создана при выполнении Государственного оборонного заказа и использована в системах навигационного обеспечения планируемых российских лунных миссий, получено свидетельство о ее государственной регистрации RU 2019620426 от 18.03.2019. В качестве основы для формирования ЦБД были взяты материалы наблюдений спутниковых наблюдений миссий «Clementine», «Kaguya», «LRO» и «Apollo», полученные из интернет-ресурсов и в ходе международного сотрудничества. В частности, селенографические данные, полученные миссией Apollo, описаны на сайте: [https://www.nasa.gov/mission\\_pages/apollo/revisited/index.html](https://www.nasa.gov/mission_pages/apollo/revisited/index.html) и в работах [92, 96]. Описание селенографических данных миссии Clementine на сайте: <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/clementine.html>.

Навигационные данные миссии LRO доступны на сайте <http://lroc.sese.asu.edu/>. Исходные данные миссии Kaguya доступны на сайте <http://gisstar.gsi.go.jp/selene/index-E.html>.

Структуру ЦБД составляют значения селенографических прямоугольных координат наблюдаемых точек на лунной поверхности, полученные из разнородных спутниковых наблюдений и приведенные робастным моделированием в единую селеноцентрическую динамическую систему отсчета. Метод и практика сведения селенографических данных в единую систему с помощью регрессионного моделирования описан в параграфе №1.3.

В зависимости от вида содержащейся информации, данные в базе условно можно разделить на два структурных раздела: северное и южное полушария Луны. При этом принадлежность цифровой информации к определенному структурному разделу характеризуется знаком представленных значений координат.

Для работы с ЦБД могут быть использованы как стандартные текстовые редакторы, так и программа **SampleCoordinates**, разработанная авторами для решения задач диссертационного исследования. Данное ПО позволяет задавать требуемые опции: значения селенографической широты и долготы, тип выборки (куб или сфера), радиус выборки в долях среднего радиуса Луны. Итоговую информацию можно получить в виде пакета цифровых данных,

в который входят все объекты, попадающие в куб или сферу выборки. Данный подход планируется в дальнейшем использовать при решении задач фотограмметрической привязки космического аппарата к электронным лунным картам и других навигационных задач.

Программное обеспечение **SampleCoordinates** для тестирования и осуществления выборки данных из ЦБД написана в системе Matlab, так как это дает возможность включить данный программный пакет в систему LabView, которая является предпочтительной для использования в космических аппаратах.

Структура ЦБД следующая (см. Таблицу 2.5). Каждая строка ЦБД содержит наблюдаемые как сферические  $(\lambda, \beta, R)$ , так и селенографические прямоугольные координаты  $(\xi, \eta, \zeta)$  (в долях среднего радиуса Луны).

Более крупный фрагмент ЦБД приводится в разделе Приложение А. По причине большого количества строк (более 270 тыс.) в ЦБД приведение ее в полном объеме затруднительно.

Таблица 2.5: Фрагмент цифровой базы данных

	$\xi$	$\eta$	$\zeta$	$\lambda$ (град.)	$\beta$ (град.)	$R$ (км)
<b>№</b> п/п в ЦБД	$\sigma_\xi =$ $\pm 0,0001 \times \bar{R}$	$\sigma_\eta =$ $\pm 0,0001 \times \bar{R}$	$\sigma_\zeta =$ $\pm 0,0002 \times \bar{R}$			
400	0,00954	0,22590	-0,97457	179,43915	13,04978	1738,89
401	0,00981	0,03720	-1,00042	179,43818	2,12942	1740,11
402	0,00365	0,92853	-0,37046	179,43550	68,24829	1737,60
403	0,00613	-0,78057	-0,62061	179,43409	-51,51138	1733,30
404	0,00422	0,90356	-0,42710	179,43390	64,69948	1737,10
405	0,00979	-0,15002	-0,98962	179,43321	-8,61962	1739,79
406	0,00613	-0,78356	-0,61676	179,43055	-51,79144	1733,22
407	0,00855	-0,50698	-0,85970	179,43019	-30,52735	1734,78
408	0,00632	-0,77008	-0,63362	179,42853	-50,55113	1733,35
409	0,00867	0,50027	-0,86755	179,42742	29,96853	1740,70

На рис. 4 и 5 представлено распределение объектов базы данных по различным широтам и долготам. Хорошо видно, что в областях, близких к полюсам, концентрация объектов значительно ниже по сравнению с зонами, находящимися в умеренных широтах. Причина этой особенности заключается в том, что полярные области изучались спутниковыми миссиями не столь интенсивно из-за особенностей их орбит. В экваториальной области, напротив, наблюдается

повышенная концентрация объектов. Следует отметить и зону от  $0^\circ$  до  $-10^\circ$  по долготе и от  $-10^\circ$  до  $50^\circ$  по широте – на этом участке наблюдается очень высокая концентрация опорных кратеров: в каждом участке размером  $10^\circ$  в этой области присутствует от 700 до 1200 объектов.

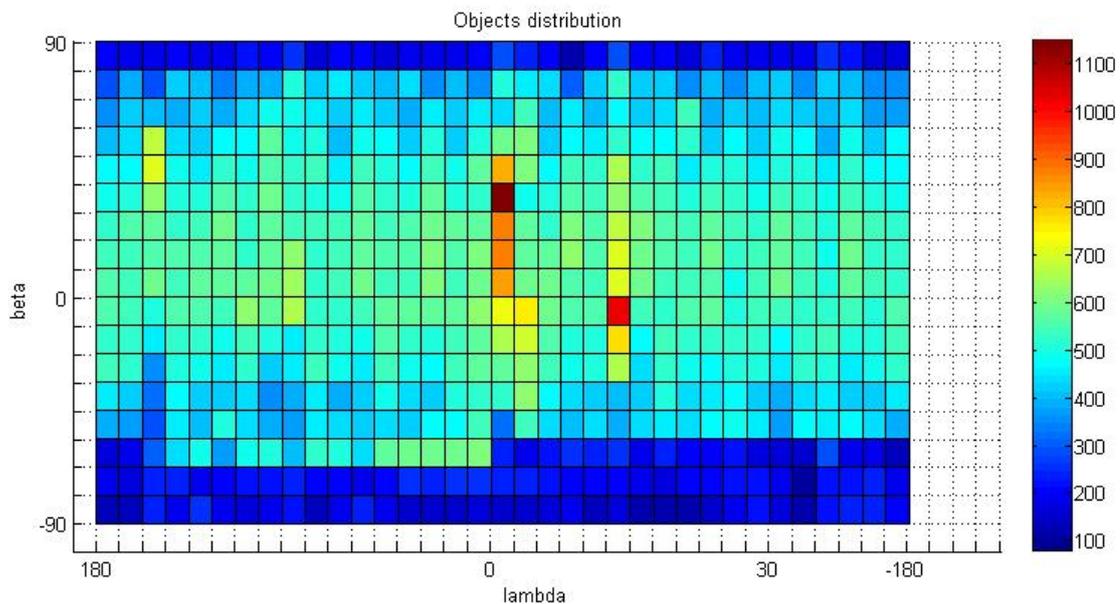


Рис. 4: Анализ распределения объектов базы данных в виде 2D-модели

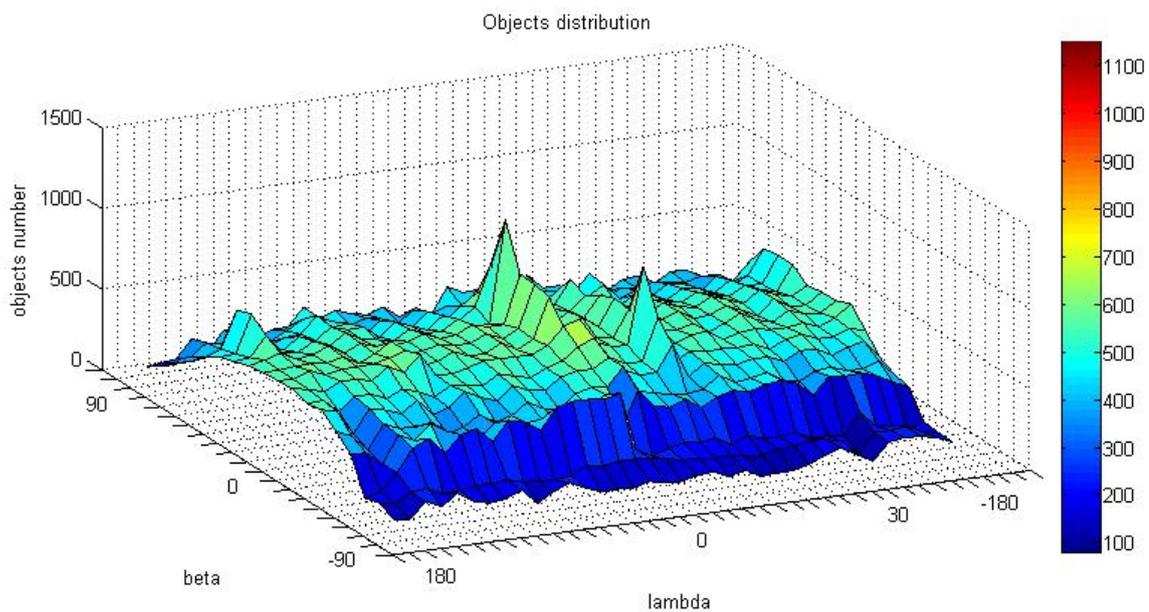


Рис. 5: Анализ распределения объектов базы данных в виде 3D-модели

## 2.3 Исследование ЦБД

Известно [59], что топографические данные искусственных спутников Луны, в том числе «Clementine» (NASA) и «Kaguya» (JAXA), получены в квазидинамической СК, начало координат которой располагается вблизи центра масс (ЦМ) нашего естественного спутника. Однако оси этой СК не коллинеарны с осями инерции, по этой причине то, насколько близко расположен центр отсчета (ЦО) ЦБД к ЦМ Луны, позволяет оценить «динамичность» СК, используемой в ЦБД.

Установление положения ЦО ЦБД относительно ЦМ Луны осуществляется следующим образом:

1. Сначала данные ЦБД представляются в виде разложения в ряд по сферическим функциям. В этом ряду фигурируют гармонические амплитуды (ГА) различных порядков, подлежащие определению;
2. Далее с использованием метода наименьших квадратов вычисляются значения ГА;
3. В итоге на основе вычисленных значений ГА определяется положение ЦО относительно ЦМ Луны. Точность полученных результатов может быть оценена по результатам сравнения их с положением ЦМ, определенным с использованием спутниковых измерений.

При представлении данных ЦБД в виде ряда сферических функций анализировалась следующая регрессионная модель [22]:

$$h(\lambda, \beta) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm} \cos \beta + \varepsilon, \quad (2.1)$$

где  $\lambda, \beta$  – селеноцентрические долгота и широта объекта ЦБД;  $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$  – нормированные ГА;  $\bar{P}_{nm}$  – нормированные присоединенные функции Лежандра;  $\varepsilon$  – случайные погрешности регрессии.

В таблице 2.6 в первом столбце приводится степень разложения функции высоты (уравнение 2.1) по гармоническим коэффициентам. Далее размещены амплитуды  $C_{nm}, S_{nm}$  разложения по сферическим функциям ЦБД (степень разложения  $N = 17$ ) и их СКО, ниже в таблице приводятся результаты,

полученные по данным КА Clementine (степень разложения  $N = 40$ ), миссии Kaguya (степень разложения  $N = 180$ ), каталога ULCN 2005 (степень разложения  $N = 359$ ) и каталога Киев-4900. Поправки к стандартному  $R_{\text{сред.}} (\bar{C}_{00})$  приводятся в строке «0,0».

Таблица 2.6: Нормированные коэффициенты разложения функции высоты Луны на основании 5 источников альтиметрической информации, км

<b>ЦБД</b>				
	$\bar{C}$	$\bar{S}$	$\sigma_C$	$\sigma_S$
0,0	-1,34			
1,0	0,06		$\pm 0,03$	
1,1	0,84	0,21	$\pm 0,04$	$\pm 0,03$
<b>Clementine</b>				
	$\bar{C}$	$\bar{S}$	$\sigma_C$	$\sigma_S$
0,0	-0,84			
1,0	0,14		$\pm 0,02$	
1,1	1,10	0,18	$\pm 0,02$	$\pm 0,02$
<b>Kaguya</b>				
	$\bar{C}$	$\bar{S}$	$\sigma_C$	$\sigma_S$
0,0	-0,79			
1,0	0,02		$\pm 0,02$	
1,1	1,06	0,19	$\pm 0,03$	$\pm 0,01$
<b>ULCN 2005</b>				
	$\bar{C}$	$\bar{S}$	$\sigma_C$	$\sigma_S$
0,0	-1,22			
1,0	0,02		$\pm 0,03$	
1,1	0,97	0,18	$\pm 0,02$	$\pm 0,04$
<b>Киев-4900</b>				
	$\bar{C}$	$\bar{S}$	$\sigma_C$	$\sigma_S$
0,0	-0,68			
1,0	0,01		$\pm 0,02$	
1,1	0,01	0,07	$\pm 0,02$	$\pm 0,01$

Отклонение ЦО DSS относительно ЦМ Луны главным образом определяется ГА 1-го порядка:

$$\Delta\xi = \sqrt{3}\bar{C}_{11}, \Delta\eta = \sqrt{3}\bar{S}_{11}, \Delta\zeta = \sqrt{3}\bar{C}_{10}. \quad (2.2)$$

В уравнениях (2.2)  $\Delta\xi$ ,  $\Delta\eta$ ,  $\Delta\zeta$  представляют собой смещения ЦО ЦБД относительно ЦМ Луны вдоль осей, приведенных на рис. 1, а  $\bar{C}_{11}$ ,  $\bar{S}_{11}$ ,  $\bar{C}_{10}$  – ГА 1-го

порядка в разложении (2.1).

Таким образом вычислено положение центра отсчета данных исследуемых систем относительно ЦМ Луны.

По результатам анализа Таблицы 2.7 можно сделать следующие выводы. Для ЦБД предполагается, что она построена в динамической селеноцентрической СК (координатные оси относятся к лунному ЦМ и принадлежат главным осям инерции Луны), наблюдается хорошее согласие по осям  $\xi$  и  $\eta$  для положения ЦМ по отношению к ЦФ, если рассматривать результаты КА Clementine, Kaguya и системы ULCN-2005. При этом во всех этих случаях наблюдается отчетливый сдвиг  $\approx 1,7$  км. Для каталога Киев-4900 можно видеть, что ЦО данных практически совпадает с центром фигуры Луны. Полученные результаты подтверждают, что ЦБД относится к селеноцентрической СК, а учитывая, что система ЦБД привязана к звездному полю, она может характеризоваться как динамическая. Таким образом, ЦБД может применяться для решения задач настоящего диссертационного исследования.

Таблица 2.7: Координаты ЦО систем ЦБД, Clementine, Kaguya, ULCN 2005 и Киев-4900 относительно ЦМЛ, км

	ЦБД	Clementine	Kaguya	ULCN 2005	Киев-4900
$\Delta\xi$	1,59	1,82	1,78	1,71	-0,14
$\Delta\eta$	0,79	0,74	0,76	0,73	-0,47
$\Delta\zeta$	-0,43	0,64	-0,25	-0,26	-0,17

Было проведено сравнение ориентации ЦБД (в уравнении 2.3 обозначена верхним индексом DDB) с другими каталогами (в уравнениях 2.4 и 2.5 обозначены нижним индексом Cat). Для этого использовался следующий метод. Рассмотрим выражение:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ E & F & G \\ M & N & L \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \xi_i^{DDB} \\ \eta_i^{DDB} \\ \zeta_i^{DDB} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D \\ H \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta\xi_i \\ \Delta\eta_i \\ \Delta\zeta_i \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

где  $A, F, L$  – масштабные коэффициенты, определяющие различия двух координатных систем по осям  $\xi, \eta, \zeta$ ;

$B, C, E, G, M, N$  – используются для вычисления углов ориентации ( $\pi, \nu, \mu$ ) сравниваемых координатных систем между осями  $\xi, \eta, \zeta$ ;

$D, H, K$  – свободные члены, характеризующие различие положений начал ко-

ординат сравниваемых систем.

$$\xi_{Cat} = (1 - A)\xi_{DDB}, \eta_{Cat} = (1 - F)\eta_{DDB}, \zeta_{Cat} = (1 - L)\zeta_{DDB}, \quad (2.4)$$

$$\Delta\xi_i = \xi_i^{Cat} - \xi_i^{DDB}, \Delta\eta_i = \eta_i^{Cat} - \eta_i^{DDB}, \Delta\zeta_i = \zeta_i^{Cat} - \zeta_i^{DDB}, \quad (2.5)$$

где  $\xi_i^{DDB}, \eta_i^{DDB}, \zeta_i^{DDB}$  – координаты точек, входящих и в ЦБД, и в каталоги;  
 $\xi_i^{Cat}, \eta_i^{Cat}, \zeta_i^{Cat}$  – координаты кратеров, входящих в разные каталоги и, соответственно, полученные в разных СК.

$$\pi = \frac{N - G}{2}, \nu = \frac{C - M}{2}, \mu = \frac{E - B}{2}. \quad (2.6)$$

Таблица 2.8: Параметры сравнения ориентации ЦБД с другими каталогами

СК	A E M	B F N	C G L	D H K	$\pi$ $\nu$ $\mu$
ЦБД – DSN	$6 \pm 7$	$14 \pm 7$	$54 \pm 17$	$-7 \pm 9$	27,85
	$4 \pm 6$	$17 \pm 5$	$22 \pm 10$	$-20 \pm 7$	18,56
	$36 \pm 15$	$49 \pm 30$	$14 \pm 13$	$-32 \pm 15$	-10,31
ЦБД – ULCN	$9 \pm 11$	$28 \pm 16$	$23 \pm 18$	$-14 \pm 16$	41,25
	$11 \pm 17$	$24 \pm 18$	$22 \pm 16$	$-32 \pm 22$	-25,78
	$48 \pm 31$	$62 \pm 40$	$28 \pm 22$	$-43 \pm 34$	-17,53
ЦБД – Киев	$20 \pm 6$	$55 \pm 24$	$78 \pm 19$	$25 \pm 10$	31,97
	$32 \pm 9$	$34 \pm 15$	$14 \pm 14$	$99 \pm 35$	13,41
	$65 \pm 37$	$45 \pm 28$	$36 \pm 34$	$134 \pm 41$	-23,72

Как видно из Таблицы 2.8, между ЦБД, DNS и ULCN 2005 существует хорошее согласие, небольшое отличие по масштабным коэффициентам наблюдается при сравнении с каталогом Киев-4900. Наилучшее совпадение между нуль-пунктами наблюдается в случае ЦБД – DSN, для ЦБД – ULCN 2005 также имеется неплохое соответствие, для ЦБД – Киев 4900 отличие наблюдается по осям  $\eta$  и  $\zeta$ , что объясняется привязкой центра координатной системы каталога Киев-4900 к центру фигуры Луны. Наибольшее отличие в ориентации наблюдается у пары ЦБД – ULCN 2005 по оси  $\xi$ , это можно объяснить тем, что каталог ULCN 2005 ориентирован ближе к квазидинамической системе, которая присуща спутниковым наблюдениям без привязки их к небесной системе координат.

Учитывая данные Таблиц 2.7 и 2.8 можно сделать основной вывод, что в пределах точности ЦБД наиболее близко соответствует по ориентации к селеноцентрической динамической системе координат.

## Глава 3

# Построение селеноцентрической опорной системы координат

При написании данной Главы диссертации использованы публикации [20, 59], выполненные соискателем в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении учёных степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования.

### 3.1 Селеноцентрическая многопараметрическая модель (СММ)

Селеноцентрическая опорная система координат в программном виде представлена как селеноцентрическая многопараметрическая модель.

В последнее время в качестве программного обеспечения для космических миссий при решении задач, связанных с картографированием лунной поверхности, используется система LabVIEW, совместимая с математическим аппаратом MatLAB. Учитывая это, система MatLAB была выбрана для разработки программного пакета **HeightsComparison** с возможностью его интеграции в систему LabVIEW.

Работа созданного программного пакета включает несколько этапов. Сначала производится выборка селенографических координат опорных объектов из ЦБД. Данная задача решается двумя способами:

1. Строится куб с длиной стороны  $Range$ , имеющий координаты  $(\xi_0 \pm Range, \eta_0 \pm Range, \zeta_0 \pm Range)$ , и программа выделяет объекты из базы данных, попадающие в данный объем (находит координаты  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  этих объектов в базе данных). В «кубическую» выборку попадают объекты, для координат которых одновременно выполняются 3 условия: 1)  $|\xi_i - \xi_0| < Range$ ; 2)  $|\eta_i - \eta_0| < Range$ ; 3)  $|\zeta_i - \zeta_0| < Range$ .

2. Вокруг точки  $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$  строится сфера радиуса  $Range$ , и программа выделяет объекты из базы данных, попадающие в данный объем (находит координаты  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  этих объектов в базе данных). В «сферическую» выборку попадают объекты, для координат которых выполняется условие:  $\sqrt{(\zeta_i - \zeta_0)^2 + (\eta_i - \eta_0)^2 + (\xi_i - \xi_0)^2} < Range$ .

Следует отметить, что каждая строка ЦБД содержит селенографические прямоугольные координаты наблюдаемой точки на лунной поверхности. Как отмечалось выше, в ЦБД содержится 279507 строк.

### Описание операций

Программа «**HeightsComparison**» включает модули, блок-схема функциональных модулей приведена на рис. 6.

При запуске модуля **readBD2** выполняется перевод ЦБД из табличного вида (BD2.xlsx) в матричный (в матрицу **A**) и вычисляется ее размер **B**.

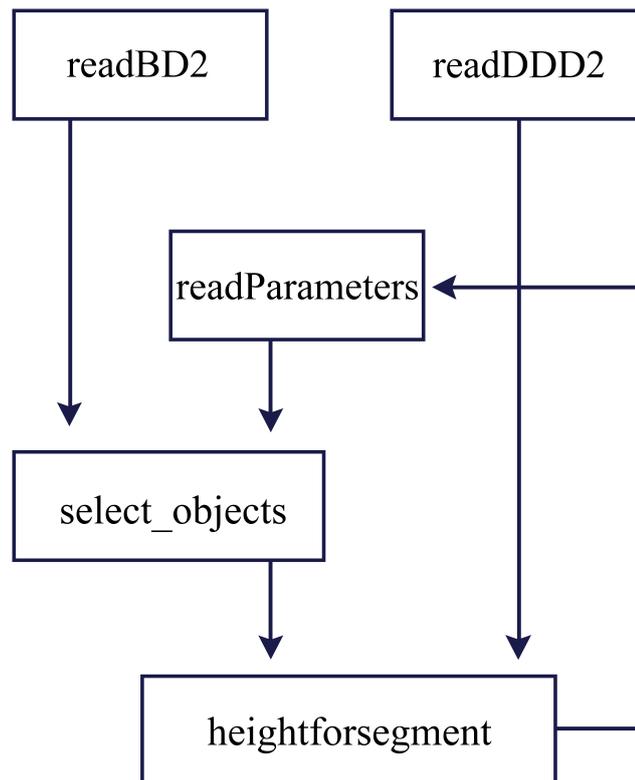


Рис. 6: Блок-схема рабочих функциональных модулей

Для осуществления выборки данных из ЦБД была разработана программа **SampleCoordinates**, которая вошла в «**HeightsComparison**» как модуль **readBD2**. В начале работы программы загружается ЦБД с любого цифрового носителя. После загрузки в окне **Database** выведется фрагмент ЦБД (рис. 7).

Для задания области, подлежащей анализу при поиске альтиметрической компоненты искомой точки, используется окно **Input Coordinates**: здесь устанавливаются долгота **Lambda**, широта **Beta** (оба параметра – в градусах) точки, в окрестности которой будут выделяться объекты ЦБД, и радиус выборки **Range** (в долях среднего радиуса Луны).

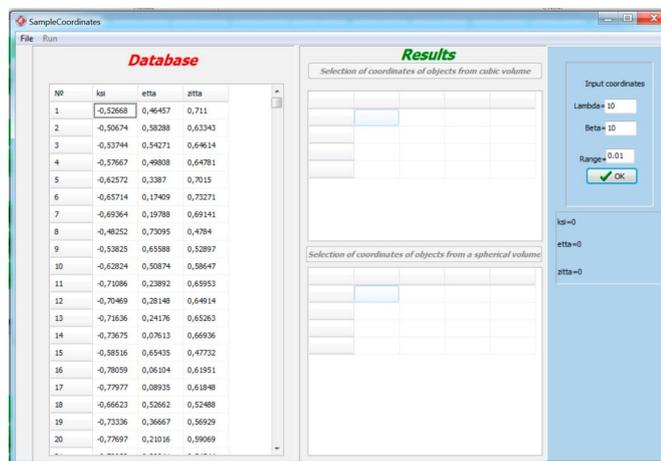


Рис. 7: Рабочее окно программы SampleCoordinates

После подтверждения введенных данных в окнах **Selection of coordinates of objects from cubic volume** и **Selection of coordinates of objects from a spherical volume** появляются координаты лунных объектов, попавших в «кубическую» и «сферическую» выборки, соответственно, с координатами центров выборки **Lambda** и **Beta** и радиусом **Range** (рис. 8).

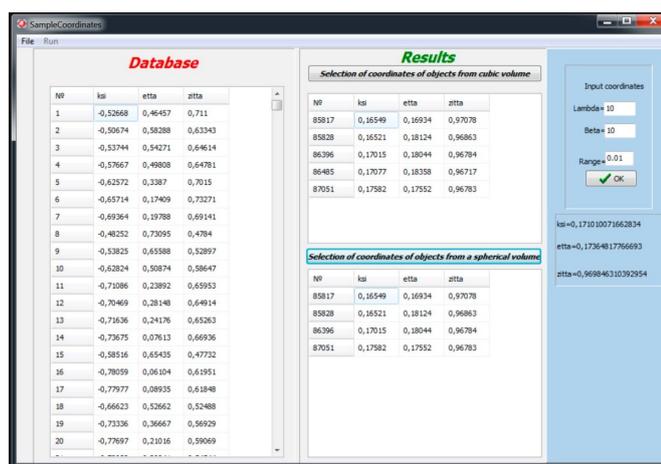


Рис. 8: Результаты работы программы SampleCoordinates

### Модуль чтения цифровых альтиметрических карт

После загрузки ЦБД начинает работать модуль readDDD2, который загружает из файла DDD2.xlsx электронную карту высот на лунной поверхности,

преобразует высоты к матричному виду (к матрице **A1**) и вычисляет ее размер **B1**. Технологически предпочтительно использовать систему картографического обеспечения по данным миссии LRO, которая приводится в электронном виде. Созданная система картографического обеспечения позволяет получить высоту точки поверхности Луны относительно среднего радиуса, равного 1737,4 км. Селенодезические координаты точки задаются в градусах, оси привязаны к Principal Axis (PA) осям эфемериды EPM2017. Для работы системы картографического обеспечения необходимо загрузить карты. Это можно сделать, скачав по ссылке [http://imbrium.mit.edu/DATA/LOLA\\_GDR/CYLINDRICAL/JP2/](http://imbrium.mit.edu/DATA/LOLA_GDR/CYLINDRICAL/JP2/) все JP2-файлы с префиксом LDEM\_1024. Карта согласована с Mean Earth (ME) осями эфемериды DE421 и имеет разрешение 1024 пиксела на градус. Карта представлена в цилиндрической проекции и разбита на участки по 30° долготы и 15° широты. Суммарное разрешение – 460800 на 460800 пикселей. Точность высот – не менее 0,5 метров. Гарантируется работа средства лишь с указанным набором карт. Поскольку карты привязаны к ME осям эфемериды DE421, а входные параметры привязаны к осям PA эфемериды EPM2017, необходимо выполнить преобразование осей следующим образом:

$$\vec{n}_{ME}^{DE}(t) = R_{PA \rightarrow ME}^{DE} R_{C2L}^{DE}(t) R_{L2C}^{EPM}(t) \vec{n}_{PA}^{EPM}(t), \quad (3.1)$$

$\vec{n}_{ME}^{DE}(t)$  – единичный вектор, привязанный к ME осям эфемериды DE421.

$R_{PA \rightarrow ME}^{DE}$  – матрица перехода от PA осей к ME эфемериды DE421, описанная в документе [ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/ioms/de421\\_moon\\_coord\\_iom.pdf](ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/ioms/de421_moon_coord_iom.pdf).

$R_{C2L}^{DE}(t)$  – матрица перехода из небесной системы координат (НСК) к ME осям, полученная из эйлеровых углов эфемериды DE421.

$R_{L2C}^{EPM}(t)$  – матрица перехода из PA осей к НСК, полученная из эйлеровых углов эфемериды EPM2017.

$\vec{n}_{PA}^{EPM}(t)$  – единичный вектор, привязанный к PA осям эфемериды EPM421.

Коэффициенты матрицы  $R_{PA \rightarrow ME}^{DE} R_{C2L}^{DE}(t) R_{L2C}^{EPM}(t)$  меняются со временем незначительно и периодически. Поэтому для исключения временной зависимости  $\vec{n}_{ME}^{DE}(t)$  матрица  $R_{C2L}^{DE}(t) R_{L2C}^{EPM}(t)$  усредняется:

$$\vec{n}_{ME}^{DE}(t) = R_{PA \rightarrow ME}^{DE} \overline{R_{C2L}^{DE}(t) R_{L2C}^{EPM}(t)} \vec{n}_{PA}^{EPM}(t). \quad (3.2)$$

Итоговая формула приведения осей:

$$\vec{n}_{ME}^{DE}(t) = R_{PA \rightarrow ME}^{DE} \vec{n}_{PA}^{EPM}(t), \quad (3.3)$$

где

$$R_{PA \rightarrow ME}^{DE} = \begin{pmatrix} 9.98958451 \times 10^{-1} & -3.94977627 \times 10^{-2} & -3.94977627 \times 10^{-2} \\ 3.94977621 \times 10^{-2} & 9.99219557 \times 10^{-1} & 4.51446067 \times 10^{-4} \\ -2.28460239 \times 10^{-2} & 4.51390912 \times 10^{-4} & 9.99738894 \times 10^{-1} \end{pmatrix}.$$

Далее определяются высоты точек согласно данным электронной карты.

После окончания загрузки базы данных начинается работа основной программы с модуля **readParameters**, который создает меню программы.

Изменение значений долготы и широты выполняется при нажатии на клавиши **lambda** и **beta**, что позволяет вызвать строку-диалог, в которой представлены поля ввода:

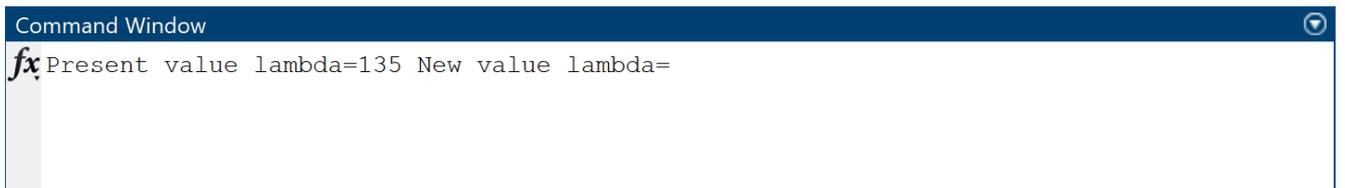


Рис. 9: Ввод нового значения долготы (lambda)

Введенные значения долготы и широты в появляются в меню. Аналогично можно изменить и **Range**. Запуск программы осуществляется при нажатии на кнопку **RUN**. Суть решаемой задачи заключается в определении прямоугольных координат объектов ЦБД, попадающих в заданную область вокруг заданной точки.

### Решение имитационной задачи

С использованием разработанной цифровой базы данных (ЦБД) спутниковых наблюдений лунной поверхности по селенографическим долготе  $\lambda$  и широте  $\beta$  для искомой точки и радиуса выборки (**Range**), указываемого в долях среднего радиуса Луны  $R_0$ , можно получить выборку координат лунных объектов в объеме сферы радиуса **Range**.

Программный пакет **HeightsComparison** выделяет объекты из базы данных, попадающие в данный объем (находит в ЦБД координаты этих объектов). Эта работа выполняется модулем **select\_objects**.

В итоге получаем положения заданного объекта (красная точка) и объектов ЦБД (синие точки) в пространстве. В заданной области найдено 7 объектов ЦБД (рис. 10).

Далее начинает работу модуль **heightforsegment**. Этот модуль решает следующие задачи. Для  $N$ -го выделенного объекта вычисляется высота по формуле:  $H_N = R_0 \left( \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} \right)$ . Далее эта высота сравнивается с высотой для этого же объекта, полученной из электронной карты высот лунной поверхности. Соответственно, сама электронная карта имеет ограниченную точность.

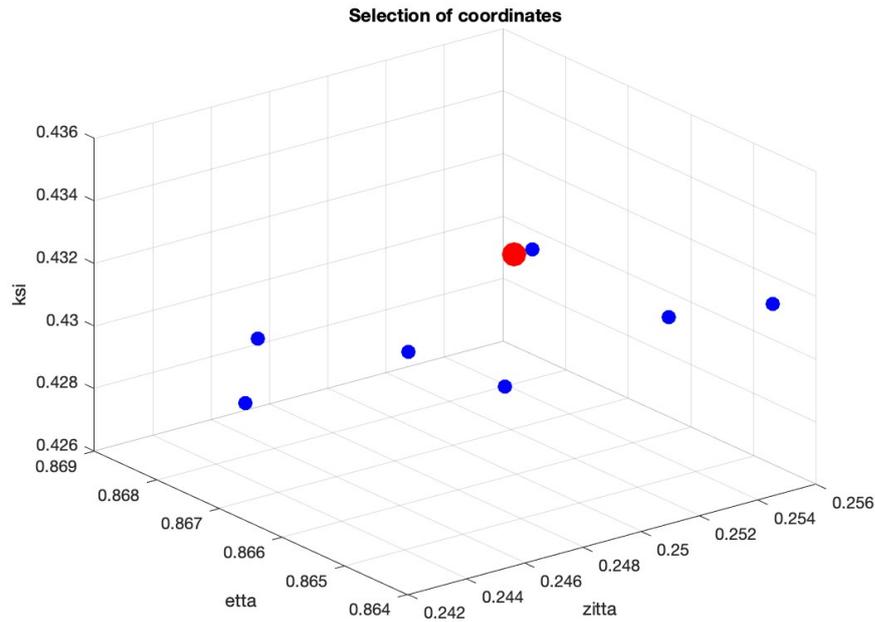


Рис. 10: Выделенные объекты ЦБД, находящиеся в окрестности заданной точки с координатами  $(60^\circ, 60^\circ)$

Number =	Selection of coordinates ksi, etta, zitta		
	<b>ans =</b>		
111132	0.4307	0.8673	0.2439
111143	0.4356	0.8642	0.2468
111877	0.4292	0.8671	0.2487
111891	0.4263	0.8690	0.2471
112354	0.4309	0.8652	0.2534
112560	0.4314	0.8645	0.2556
112590	0.4267	0.8675	0.2529

Рис. 11: Номера выделенных объектов в ЦБД (слева) и их прямоугольные координаты (справа)

Высота в электронной базе дается для центра квадратного сегмента, а центр квадрата соответствует координатам центра сегмента из таблицы по долготе и широте. Поскольку координаты выделенного объекта не совпадают с центром соответствующего сегмента, то для нахождения высоты необходима интерполяция.

Используемый в настоящей работе метод по определению селеноцентрической высоты искомого объекта на лунной поверхности основан на постулировании того, что объекты, находящиеся на близких друг от друга расстояниях имеют и схожие значения высотных данных, что в значительно меньшей степени присуще объектам, расположенным на больших расстояниях друг от друга. Для определения высотных параметров искомого объекта применяется метод взвешенных высотных параметров (WAP). Суть метода заключается в привязке отождествляемой точки к опорным объектам с известными координатами, расположенным в окрестностях отождествляемого объекта. В случае равномерного распределения высотных выборок и стабильных поверхностных характеристик для разных областей ландшафта возникает возможность точной интерполяции высотных значений лунной поверхности на основе известных высот близлежащих объектов. При этом для учета различной удаленности опорных объектов от отождествляемой точки используется подход назначаемых весов: более близким к отождествляемой точке опорным объектам присваивается и большее значение веса. При реализации метода WAP считается, что каждый опорный лунный объект производит локальное воздействие на значение высотного параметра отождествляемого объекта в зависимости от величины расстояния между этими объектами. Поэтому опорным объектам, близким к искомому, придаются более высокие значения, чем находящимся на больших расстояниях. Исходя из этих предпосылок можно записать основное выражение метода в виде:

$$\hat{H}(O_0) = \sum_{i=1}^N P_i H(O_i), \quad (3.4)$$

где  $\hat{H}(O_0)$  представляет собой отождествляемую (неизвестную) величину высотного параметра для объекта  $O_0$ ;

$P_i$  – задаваемые значения веса для каждого опорного объекта, который будет использоваться в исследованиях. Величина веса изменяется в зависимости от расстояния до отождествляемого объекта;

$H(O_i)$  – измеренное (известное) значение высотного параметра для объекта  $O_i$ ;  $N$  – число опорных объектов найденных вблизи отождествляемого объекта, которые планируется использовать при интерполяционных процедурах.

Величины весов вычисляются согласно следующему выражению:

$$P_i = \frac{D_{i0}^{-k}}{\sum_{i=1}^N D_{i0}^{-k}}, \quad (3.5)$$

где  $D_{i0}$  представляет собой расстояние между  $i$ -той опорного объекта  $O_i$  и отождествляемого объекта  $O_0$ .

В выражении (3.5) величина веса изменяется в зависимости от величины подбираемого с помощью специального алгоритма, описанного ниже, безразмерного параметра  $k$ . Степенной коэффициент  $k$  влияет на то, какие веса будут назначены опорным объектам. Необходимо отметить, что в зависимости от увеличения расстояния между отождествляемым и опорными объектами величина веса, придаваемого опорным объектам, будет уменьшаться и, соответственно, высотный параметр отождествляемого объекта также экспоненциально уменьшится. Если сложить веса для всех опорных объектов, включенных в процесс интерполяции, то их сумма будет равна единице:

$$\sum_{i=1}^N P_i = 1. \quad (3.6)$$

Оптимальную величину параметра  $k$  определяют в процессе вычислений, добиваясь с помощью подгонки минимальной величины среднеквадратичной ошибки.

В итоге, алгоритм для получения значения высоты  $H$  заданной точки с координатами  $(\lambda, \beta)$  методом WAP заключается в следующем. При исследовании используется цифровая карта, которая представляет собой разбитую на пиксели цилиндрическую проекцию (возможны и другие проекции). Для центра каждого пикселя имеется значение усредненной высоты по всему пикселю. Размеры пикселя соответствуют размерам принятым при оцифровке карты. Программа **HeightsComparison** находит пиксель (сегмент) №=0 на электронной карте, которому принадлежит точка с координатами  $(\lambda, \beta)$  (т.е. данная точка находится внутри границ данного пикселя, рис. 12). Соответственно, для центра этого пикселя известны координаты и высота  $\lambda_0, \beta_0, H_0$ . Задача – для искомой

точки  $(\lambda, \beta)$  определить высоту  $H$  методом WAP.

Вокруг выделенного пикселя берутся 8 пикселей с известными высотами (полученными усреднением по каждому сегменту высотных данных) и координат центров пикселей, окружающих его. В принципе можно взять еще 16 высот в следующих квадратах окружающих первые 8 и т.д.

Поскольку искомая точка принадлежит пикселю №=0 (рис. 12), то для нахождения ее высоты  $H$  методом WAP необходимо знать величину параметра  $k$  для этого пикселя. Для его оценки можно исходить из того, что известна высота и координаты центра сегмента №=0 на рис. 12  $\lambda_0, \beta_0, H_0$ , а также известны высоты и координаты центров окружающих пикселей  $\lambda_i, \beta_i, h_i$ . Поэтому для оценки параметра  $k$  можно интерполировать с помощью вычислений высоту центра пикселя №=0 на рис. 12.  $H_{0j}$  по известным высотам  $h_i$  окружающих пикселей и перебор разных значений параметра  $k_i$ , и при этом сравнивать полученные значения  $H_{0j}$  с  $H_0$ . Тогда в случае минимальной квадратической ошибки  $RMS = (H_{0j} - H_0)^2$  и придается соответствующее значение параметру  $k$ .

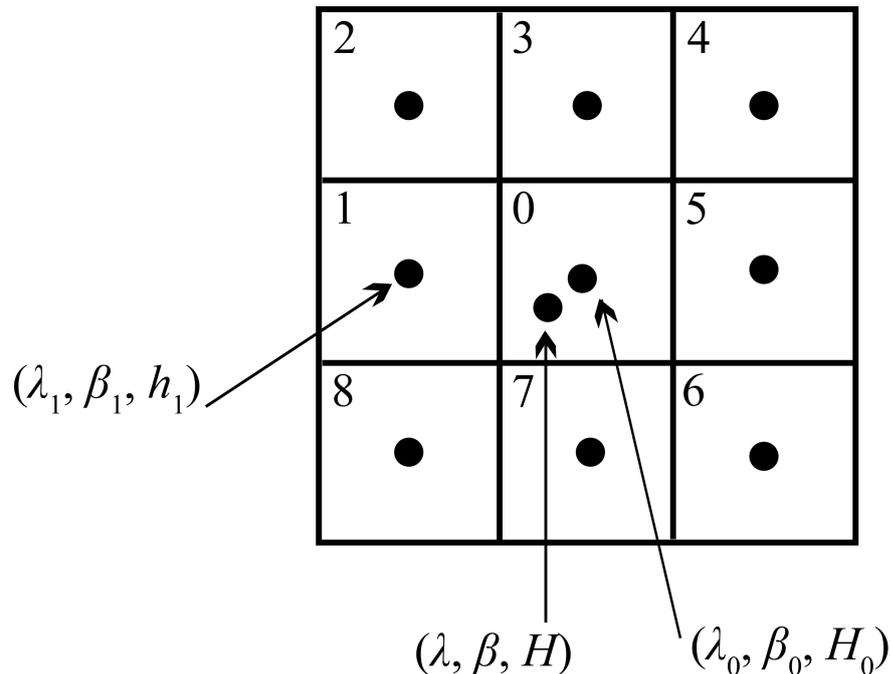


Рис. 12: Графическое изображение пикселей электронной карты

Более предметно для описанного выше подхода можно записать следующий вычислительный алгоритм. Для определения параметра  $k$  вычислим вы-

соту  $H_{0j}$  точки  $(\lambda_0, \beta_0)$ , перебирая значения параметра  $k_j$ .

$$H_{0j} = \sum_{i=1}^8 W_{ij} h_i, \quad (3.7)$$

где  $h_i$  – высоты центров сегментов, окружающих выделенный сегмент,  $W_{ij} = \frac{d_i^{-k_j}}{\sum_{i=1}^8 d_i^{-k_j}}$ ,  $d_i = \sqrt{(\lambda_i - \lambda_0)^2 + (\beta_i - \beta_0)^2}$ .

Программа **HeightsComparison** находит параметр  $k$ , соответствующий минимальной квадратической ошибке  $RMS = (H_{0j} - H_0)^2$ . На рис. 13 и 14 приведены два варианта изменения квадратической ошибки при варьировании параметра  $k$ .

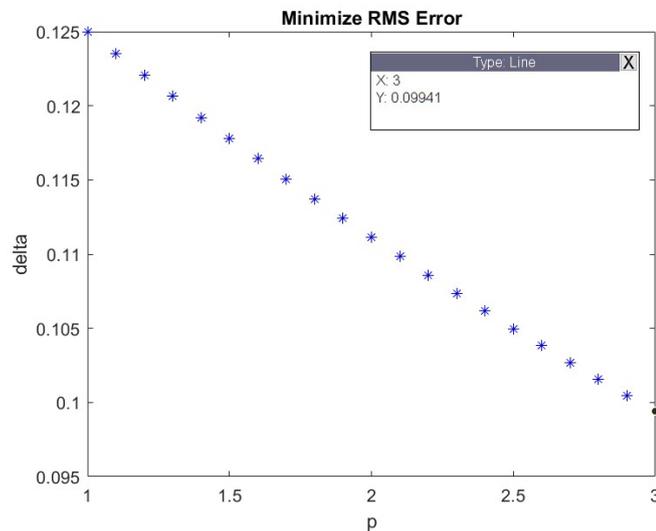


Рис. 13: Изменение квадратической ошибки при варьировании  $k$

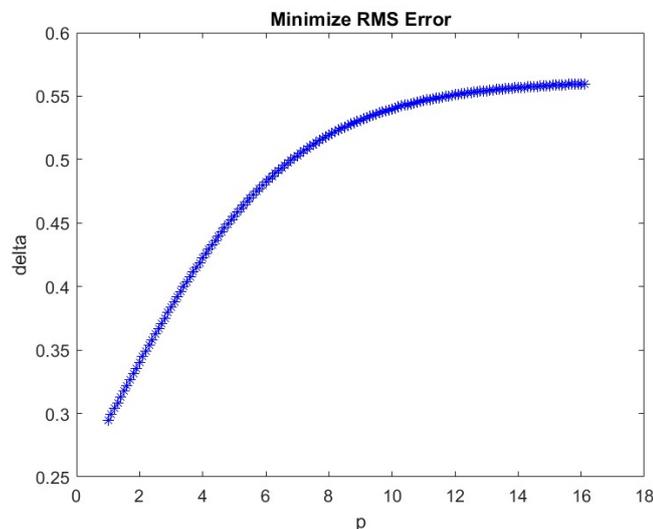


Рис. 14: Изменение квадратической ошибки при варьировании параметра  $k$

В первом случае (рис. 13) было принято, что минимальная ошибка должна быть равна  $RMS_{min} = 0,1$ , тогда  $k = 3$ . Во втором случае (рис. 14), если при увеличении  $k$  растет и квадратическая ошибка, а это происходит, когда существует резкий перепад высот в анализируемых пикселях, программа придает параметру значение  $k = 1$ .

Далее, используя определенное таким образом значение параметра  $k$ , найдем высоту точки  $(\lambda, \beta)$ :

$$H = \sum_{i=1}^8 W_i h_i, W_i = \frac{d_i^{-k}}{\sum_{i=1}^8 d_i^{-k}}, d_i = \sqrt{(\lambda_i - \lambda)^2 + (\beta_i - \beta)^2}. \quad (3.8)$$

Программа **HeightsComparison** представляет итоговый результат работы в виде набора данных (рис. 15).

```

The height of an object from the database
Hn = -1.2096

Spherical selenographic coordinates of the object from the database
lambda = 59.3457

beta = 60.2414

The height of the segment with the desired point
h0 = -2

P parameter value
p = 18.1000

Angular distances from the centers of the surrounding segments to the desired
point
d1 = 0.6974  2.3581  3.6211  2.8352  4.5786  3.6623  4.8847  3.3068
4.0011

The height of the desired point
H1 = -2.0000

Quadratic error
delt = 0.6248

height difference
delt1 = 0.7904

```

Рис. 15: Результат работы программы **HeightsComparison**

## 3.2 Тестирование селеноцентрической многопараметрической модели

Было проведено тестирование системы технологической интеграции селеноцентрической многопараметрической модели картографического обеспечения лунной навигационной системы. Для этого были выбраны модельные значения положения искомой точки на поверхности Луны. Следует отметить, что селенографические координаты (долгота  $\equiv \lambda$  и широта  $\equiv \beta$ ) меняются в пределах  $\pm 180^\circ$  и  $\pm 90^\circ$ . Однако для определения высоты точки согласно электронной альтиметрической карте с использованием вышеописанной интерполяционной процедуры необходимо ограничиться пределами  $\pm 177^\circ$  по  $\lambda$  и  $\pm 84^\circ$  по  $\beta$ .

Сопоставим высоты, представленные в ЦБД и на электронной карте (с учетом интерполяции) для различных областей лунной поверхности. Для этого условно разделим сферу Луны на 8 одинаковых по площади участков, называемых октантами. Координаты октантов представлены в Таблице 3.1.

Таблица 3.1: Соответствие прямоугольных и сферических координат октантам

№ октанта	$\xi$	$\eta$	$\zeta$	$\lambda$	$\beta$
1	+	+	+	$[0^\circ, +90^\circ]$	$[0^\circ, +90^\circ]$
2	-	+	+	$[0^\circ, -90^\circ]$	$[0^\circ, +90^\circ]$
3	-	-	+	$[0^\circ, -90^\circ]$	$[0^\circ, -90^\circ]$
4	+	-	+	$[0^\circ, +90^\circ]$	$[0^\circ, -90^\circ]$
5	+	+	-	$[+90^\circ, +180^\circ]$	$[0^\circ, +90^\circ]$
6	-	+	-	$[-90^\circ, -180^\circ]$	$[0^\circ, +90^\circ]$
7	-	-	-	$[-90^\circ, -180^\circ]$	$[0^\circ, -90^\circ]$
8	+	-	-	$[+90^\circ, +180^\circ]$	$[0^\circ, -90^\circ]$

Октанты № 1–4 относятся к видимой стороне Луны, а октанты № 5–8 – к обратной. При анализе использовались по три точки из каждого октанта, координаты этих точек указаны в строках  $\lambda_i, \beta_i$ .  $H_{BD}$  – высота точки, представленная в ЦБД.  $H_{Map}$  – высота точки, полученная из электронной карты методом WAP.  $\Delta$  – разница между высотой согласно ЦБД и электронной карты,  $\Delta = H_{BD} - H_{Map}$ . Среднеквадратическое отклонение рассчитывалось по формуле  $\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ , где в качестве  $x_i$  выступали разности высот  $\Delta$ , а в качестве  $\bar{x}$  – их среднее арифметическое значение. Средняя абсолютная разница в высотах между ЦБД и электронной картой оценивалась по формуле  $\bar{\Delta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \delta_i^2}{n}}$ , где  $\delta_i = \Delta_i^2$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ). Полученные результаты представ-

лены в Таблицах 3.2 – 3.8.

Таблица 3.2: Результаты анализа высотных данных для октантов видимой стороны Луны

Октант 1	$\lambda_i, \beta_i$	$30^\circ, 30^\circ$	$50^\circ, 50^\circ$	$70^\circ, 70^\circ$
	$H_{BD}$ , км	-2,13	-2,42	-2,61
	$H_{Map}$ , км	-2,51	-1,51	-3,07
	$\Delta$ , км	+0,38	-0,91	+0,46
	СКО, км	$\pm 0,7689$		
	$\delta$ , км <sup>2</sup>	0,1444	0,8281	0,2116
	$\bar{\Delta}$ , км	0,6282		
Октант 2	$\lambda_i, \beta_i$	$-30^\circ, 30^\circ$	$-50^\circ, 50^\circ$	$-70^\circ, 70^\circ$
	$H_{BD}$ , км	-2,55	-2,99	-2,17
	$H_{Map}$ , км	-1,01	-2,00	-0,66
	$\Delta$ , км	-1,54	-0,99	-1,51
	СКО, км	$\pm 0,8806$		
	$\delta$ , км <sup>2</sup>	2,3716	0,9801	2,2801
	$\bar{\Delta}$ , км	1,3701		
Октант 3	$\lambda_i, \beta_i$	$-30^\circ, -30^\circ$	$-50^\circ, -50^\circ$	$-70^\circ, -70^\circ$
	$H_{BD}$ , км	-2,03	-1,29	-2,02
	$H_{Map}$ , км	-1,41	-0,99	+0,08
	$\Delta$ , км	-0,62	-0,30	-2,10
	СКО, км	$\pm 0,9603$		
	$\delta$ , км <sup>2</sup>	0,3844	0,0900	4,4100
	$\bar{\Delta}$ , км	1,2760		
Октант 4	$\lambda_i, \beta_i$	$30^\circ, -30^\circ$	$50^\circ, -50^\circ$	$70^\circ, -70^\circ$
	$H_{BD}$ , км	+0,78	-1,82	+1,01
	$H_{Map}$ , км	+3,00	-1,80	+4,00
	$\Delta$ , км	-2,22	-0,02	-2,99
	СКО, км	$\pm 1,5413$		
	$\delta$ , км <sup>2</sup>	4,9284	0,0004	8,9401
	$\bar{\Delta}$ , км	2,1501		

Таблица 3.3: Результаты анализа высотных данных для октантов обратной стороны Луны

ОКТАНТ 5	$\lambda_i, \beta_i$	$120^\circ, 30^\circ$	$140^\circ, 50^\circ$	$160^\circ, 70^\circ$
	$H_{BD}$ , км	-1,11	-0,39	-0,72
	$H_{Map}$ , км	-0,27	+1,76	-1,00
	$\Delta$ , км	-0,84	-2,15	+0,28
	СКО, км	$\pm 1,2162$		
	$\delta$ , км <sup>2</sup>	0,7056	4,6225	0,0784
	$\overline{\Delta}$ , км	1,3424		
ОКТАНТ 6	$\lambda_i, \beta_i$	$-120^\circ, 30^\circ$	$-140^\circ, 50^\circ$	$-160^\circ, 70^\circ$
	$H_{BD}$ , км	+1,01	+1,74	-1,55
	$H_{Map}$ , км	+2,29	+3,75	+1,49
	$\Delta$ , км	-1,28	-2,01	-3,04
	СКО, км	$\pm 0,8843$		
	$\delta$ , км <sup>2</sup>	1,6384	4,0401	9,2416
	$\overline{\Delta}$ , км	2,2301		
ОКТАНТ 7	$\lambda_i, \beta_i$	$-120^\circ, -30^\circ$	$-140^\circ, -50^\circ$	$-160^\circ, -70^\circ$
	$H_{BD}$ , км	+2,12	-5,86	-7,26
	$H_{Map}$ , км	3,87	-5,06	-5,12
	$\Delta$ , км	-1,75	-0,80	-2,14
	СКО, км	$\pm 0,6892$		
	$\delta$ , км <sup>2</sup>	3,0625	0,6400	4,5796
	$\overline{\Delta}$ , км	1,6615		
ОКТАНТ 8	$\lambda_i, \beta_i$	$120^\circ, -30^\circ$	$140^\circ, -50^\circ$	$160^\circ, -70^\circ$
	$H_{BD}$ , км	+0,14	-1,83	-4,79
	$H_{Map}$ , км	+1,52	-0,70	-3,75
	$\Delta$ , км	-1,38	-1,13	-1,04
	СКО, км	$\pm 0,1762$		
	$\delta$ , км <sup>2</sup>	1,9044	1,2769	1,0816
	$\overline{\Delta}$ , км	1,1920		

Таблица 3.4: Результаты анализа высотных данных для октантов видимой стороны Луны (без учета приполярных областей)

Октант 1	$\lambda_i, \beta_i$	$30^\circ, 30^\circ$	$50^\circ, 50^\circ$
	$H_{BD}$ , км	-2, 13	-2, 42
	$H_{Map}$ , км	-2, 51	-1, 51
	$\Delta$ , км	+0,38	-0, 91
	СКО, км	$\pm 0, 9122$	
	$\delta$ , км <sup>2</sup>	0,1444	0, 8281
	$\overline{\Delta}$ , км	0, 6973	
Октант 2	$\lambda_i, \beta_i$	$-30^\circ, 30^\circ$	$-50^\circ, 50^\circ$
	$H_{BD}$ , км	-2, 55	-2, 99
	$H_{Map}$ , км	-1, 01	-2, 00
	$\Delta$ , км	-1, 54	-0, 99
	СКО, км	$\pm 0, 3889$	
	$\delta$ , км <sup>2</sup>	2,3716	0,9801
	$\overline{\Delta}$ , км	1, 2945	
Октант 3	$\lambda_i, \beta_i$	$-30^\circ, -30^\circ$	$-50^\circ, -50^\circ$
	$H_{BD}$ , км	-2, 03	-1, 29
	$H_{Map}$ , км	-1, 41	-0, 99
	$\Delta$ , км	-0, 62	-0, 30
	СКО, км	$\pm 0, 2263$	
	$\delta$ , км <sup>2</sup>	0,3844	0,0900
	$\overline{\Delta}$ , км	0, 4870	
Октант 4	$\lambda_i, \beta_i$	$30^\circ, -30^\circ$	$50^\circ, -50^\circ$
	$H_{BD}$ , км	+0, 78	-1, 82
	$H_{Map}$ , км	+3, 00	-1, 80
	$\Delta$ , км	-2, 22	-0, 02
	СКО, км	$\pm 1, 5556$	
	$\delta$ , км <sup>2</sup>	4,9284	0,0004
	$\overline{\Delta}$ , км	1, 5698	

Таблица 3.5: Результаты анализа высотных данных для октантов обратной стороны Луны (без учета приполярных областей)

Октант 5	$\lambda_i, \beta_i$	$120^\circ, 30^\circ$	$140^\circ, 50^\circ$
	$H_{BD}$ , км	-1,11	-0,39
	$H_{Map}$ , км	-0,27	+1,76
	$\Delta$ , км	-0,84	-2,15
	СКО, км	$\pm 0,9263$	
	$\delta$ , км <sup>2</sup>	0,7056	4,6225
	$\overline{\Delta}$ , км	1,6322	
Октант 6	$\lambda_i, \beta_i$	$-120^\circ, 30^\circ$	$-140^\circ, 50^\circ$
	$H_{BD}$ , км	+1,01	+1,74
	$H_{Map}$ , км	+2,29	+3,75
	$\Delta$ , км	-1,28	-2,01
	СКО, км	$\pm 0,5162$	
	$\delta$ , км <sup>2</sup>	1,6384	4,0401
	$\overline{\Delta}$ , км	1,6850	
Октант 7	$\lambda_i, \beta_i$	$-120^\circ, -30^\circ$	$-140^\circ, -50^\circ$
	$H_{BD}$ , км	+2,12	-5,86
	$H_{Map}$ , км	3,87	-5,06
	$\Delta$ , км	-1,75	-0,80
	СКО, км	$\pm 0,6718$	
	$\delta$ , км <sup>2</sup>	3,0625	0,6400
	$\overline{\Delta}$ , км	1,3606	
Октант 8	$\lambda_i, \beta_i$	$120^\circ, -30^\circ$	$140^\circ, -50^\circ$
	$H_{BD}$ , км	+0,14	-1,83
	$H_{Map}$ , км	+1,52	-0,70
	$\Delta$ , км	-1,38	-1,13
	СКО, км	$\pm 0,1768$	
	$\delta$ , км <sup>2</sup>	1,9044	1,2769
	$\overline{\Delta}$ , км	1,2612	

Таблица 3.6: Сравнительный анализ высотных данных для различных октантов с учетом приполярных областей и без учета приполярных областей

С учетом ППО		Без учета ППО	
Номер октанта	$\bar{\Delta}$ , км	Номер октанта	$\bar{\Delta}$ , км
1	0,6282	1	0,6973
2	1,3701	2	1,2945
3	1,2760	3	0,4870
4	2,1501	4	1,5698
5	1,3424	5	1,6322
6	2,2301	6	1,6850
7	1,6615	7	1,3606
8	1,1920	8	1,2612
Среднее $\bar{\Delta}$ , км	<b>1,4813</b>	Среднее $\bar{\Delta}$ , км	<b>1,2485</b>

Согласно рис. 4 и 5 в ЦБД в областях, близких к полюсам Луны, количество опорных объектов в несколько раз меньше, чем в областях, расположенных ближе к экватору. С учетом особенностей алгоритма, на основе которого был разработан интерполяционный метод, интерес представлял анализ тех же участков лунной поверхности без учета приполярных областей (ППО). Данные представлены в Таблицах 3.4 и 3.5.

Результаты сравнительного анализа высотных данных для различных октантов с учетом ППО и без учета ППО представлены в Таблице 3.6.

Как показано в Таблице 3.6, исключение из анализа областей с низкой плотностью опорных объектов позволяет сократить разницу между высотами из ЦБД и альтиметрической карты на 15,72%.

Исследуя распределение опорных объектов ЦБД по селенографическим долготам и широтам (рис. 4), можно заметить, что существуют и такие участки лунной поверхности, в которых наблюдается повышенная концентрация кратеров (ПКК). К ним относятся области диаметром порядка  $10^\circ$ , центры которых имеют следующие координаты: 1)  $(-5^\circ, 45^\circ)$ ; 2)  $(-5^\circ, 35^\circ)$ ; 3)  $(-5^\circ, 25^\circ)$ ; 4)  $(-5^\circ, 15^\circ)$ ; 5)  $(-5^\circ, 5^\circ)$ ; 6)  $(-45^\circ, -5^\circ)$ . Из-за наличия большего количества объектов, попадающих в выборку, что в свою очередь влияет на точность выполнения интерполяционной процедуры, в этих областях разница в высотных компонентах между ЦБД и электронной картой должна быть минимальной.

Чтобы повысить репрезентативность выборки в каждой из этих областей были взяты по три точки, одна из которых находилась в центре области, а две другие располагались на расстоянии  $\pm 2^\circ$  по долготе и широте от центра. Полученные результаты представлены в Таблице 3.7.

Рассчитав среднее арифметическое значение  $\bar{\Delta}$  по 6 областям, данные о которых приведены в Таблице 3.7, можно сопоставить все полученные для различных участков и областей результаты.

Как и предполагалось, высоты точек ЦБД из областей с повышенной концентрацией кратеров в наименьшей степени отличаются от высот, полученных согласно цифровой альтиметрической карте с использованием метода WAP.

Полученные результаты можно объяснить следующим образом. Существующие лунные топографические карты, построенные как на основе наземных, так и спутниковых измерений, в своей основе имеют некую уровенную усредненную поверхность. Объекты цифровой базы данных же в отличие от карт привязаны к селеноцентрической системе координат и при этом учитывается макрофигура Луны, так как была осуществлена абсолютная привязка к звездам опорного каталога. Таким образом отличия порядка 1 км ЦБД от электронных карт вполне обоснованы и говорят о том, что карты необходимо в дальнейшем привязать к поверхности макрофигуры Луны. Если говорить об обратной стороне Луны, то к сожалению, привязка опорного каталога к звездам там не осуществлялась, а проводилось регрессионное моделирование координатных положений, поэтому в принципе и ЦБД в основном ориентирована относительно некой уровенной поверхности. Надеемся, в будущем исследования по нахождению координат объектов, привязанных абсолютным методом к звездам будут проведены бортовой аппаратурой космических миссий с использованием селеноцентрической многопараметрической модели, созданной в нашем диссертационном исследовании. Что касается полярных областей, то понижение точности сопоставления ЦБД и ЭК объясняется тем, что в этих областях было выполнено достаточно мало исследований топографии Луны, соответственно, как видно из рис. 4 и 5, в этих областях очень небольшая концентрация опорных кратеров.

Таблица 3.7: Сравнительный анализ высотных данных для областей, отличающихся повышенной концентрацией опорных объектов в ЦБД

Область 1	$\lambda_i, \beta_i$	$-3^\circ, 43^\circ$	$-5^\circ, 45^\circ$	$-7^\circ, 47^\circ$
	$H_{BD}$ , км	-3,37	-3,26	-3,58
	$H_{Map}$ , км	-2,00	-2,14	-2,24
	$\Delta$ , км	-1,37	-1,12	-1,34
	СКО, км	0,1365		
	$\delta$ , км <sup>2</sup>	1,8769	1,2544	1,7956
	$\bar{\Delta}$ , км	1,2815		
Область 2	$\lambda_i, \beta_i$	$-3^\circ, 33^\circ$	$-5^\circ, 35^\circ$	$-7^\circ, 37^\circ$
	$H_{BD}$ , км	-3,12	-3,07	-3,17
	$H_{Map}$ , км	-2	-2,00	-2,00
	$\Delta$ , км	-1,12	-1,07	-1,17
	СКО, км	0,0500		
	$\delta$ , км <sup>2</sup>	1,2544	1,1449	1,3689
	$\bar{\Delta}$ , км	1,1207		
Область 3	$\lambda_i, \beta_i$	$-3^\circ, 23^\circ$	$-5^\circ, 25^\circ$	$-7^\circ, 27^\circ$
	$H_{BD}$ , км	-2,22	-2,08	-2,25
	$H_{Map}$ , км	-1,1	-1,66	-1,89
	$\Delta$ , км	-1,12	-0,42	-0,36
	СКО, км	0,4225		
	$\delta$ , км <sup>2</sup>	1,2544	0,1764	0,1296
	$\bar{\Delta}$ , км	0,7212		
Область 4	$\lambda_i, \beta_i$	$-3^\circ, 13^\circ$	$-5^\circ, 15^\circ$	$-7^\circ, 17^\circ$
	$H_{BD}$ , км	-1,44	-1,59	-2,36
	$H_{Map}$ , км	-0,59	-2,00	-2,00
	$\Delta$ , км	-0,85	0,41	-0,36
	СКО, км	0,6352		
	$\delta$ , км <sup>2</sup>	0,7225	0,1681	0,1296
	$\bar{\Delta}$ , км	0,5831		
Область 5	$\lambda_i, \beta_i$	$-3^\circ, 3^\circ$	$-5^\circ, 5^\circ$	$-7^\circ, 7^\circ$
	$H_{BD}$ , км	-1,34	-1,25	-1,43
	$H_{Map}$ , км	-0,04	-0,36	-0,50
	$\Delta$ , км	-1,30	-0,89	-0,93
	СКО, км	$\pm 0,2261$		
	$\delta$ , км <sup>2</sup>	1,6900	0,7921	0,8649
	$\bar{\Delta}$ , км	1,0562		
Область 6	$\lambda_i, \beta_i$	$-53^\circ, -3^\circ$	$-55^\circ, -5^\circ$	$-57^\circ, -7^\circ$
	$H_{BD}$ , км	-2,60	-2,54	-2,39
	$H_{Map}$ , км	-1,08	-1,13	-1,00
	$\Delta$ , км	-1,52	-1,41	-1,39
	СКО, км	$\pm 0,0700$		
	$\delta$ , км <sup>2</sup>	2,3104	1,9881	1,9321
	$\bar{\Delta}$ , км	1,4411		

Таблица 3.8: Итоговые результаты

	Окранты		Области с ПКК
	С учетом ППО	Без учета ППО	
Среднее $\bar{\Delta}$ , км	<b>1,4813</b>	<b>1,2485</b>	<b>1,0340</b>

## Глава 4

# Исследование лунной поверхности с использованием синтетического метода

При написании данной Главы диссертации использована публикация [97], выполненная соискателем в соавторстве, в которой, согласно Положению о присуждении учёных степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования.

### 4.1 Построение цифровых спутниковых карт поверхности Луны

В ходе реализации проектов по изучению планет Солнечной системы был собран и проанализирован значительный объем информации об их топографических и морфологических характеристиках, который способствовал созданию новой области астрономии – сравнительной планетологии. Ключевой особенностью последней является концентрация на описании и моделировании физических процессов и явлений, наблюдающихся на планетах и малых небесных телах.

Изучение структурных и эволюционных характеристик астрономических объектов предполагает использование широкого спектра методов, включая робастный и гармонический анализ [98–100]. На сегодняшний день весьма многообещающими методами исследования физических тел и их структурных особенностей считаются те, что основаны на оценках фрактальных свойств объектов. Преимуществом фрактального подхода является то, что фрактальные свойства не меняются при масштабировании.

Одной из количественных характеристик фрактального метода является фрактальная размерность  $F$ . Анализ ее вариаций позволяет не только изучить физические характеристики поверхности, но и обнаруживать взаимосвязи

структурных параметров и эволюционными процессами. Наличие фрактальных структур также свойственно для динамических систем. В статье [101] приводится основной алгоритм количественного фрактального описания моделей тел Солнечной системы. Тем не менее, в настоящем диссертационном исследовании предложен авторский подход высокоточного вычисления параметра самоподобия (ПС) и фрактальных размерностей, основанный на анализе трех диапазонов высотных параметров, которые были формально обозначены красным, синим и зеленым цветами. Данный подход использовался для выявления областей, обладающих самоподобными свойствами.

Стандартным методом изучения топографических моделей Луны является анализ рядов сферических функций, получаемых в результате разложения альтиметрических данных. Созданные таким образом модели имеют следующий вид:

$$R(\lambda_n, \beta_n) = F(\overline{C}_{jk}, \overline{S}_{jk}, \overline{P}_{jk}) \quad (4.1)$$

где  $\lambda_n, \beta_n$  – долгота и широта  $n$ -ой точки поверхности;  $\overline{C}_{jk}, \overline{S}_{jk}$  – нормированные параметры при сферических гармониках;  $\overline{P}_{jk}$  – нормированные многочлены Лежандра;  $j, k$  – параметры, определяющие степень разложения.

Для анализа этих моделей был создан специализированный программный комплекс (ПК) «Программа построения имитационной модели отдельных элементов ЛНСС в части картографического обеспечения» (ППИМ) (свидетельство о регистрации программы для ЭВМ №2020619719 от 21 августа 2020 г.). Данный ПК основан на модульном принципе и позволяет применять системный подход к обработке наблюдательных данных, основанный на регрессионном описании изучаемых структур. Программные модули ППИМ предназначены для поиска решений переопределенных и нормальных систем уравнений с использованием метода наименьших квадратов. При таком подходе в качестве выходных данных рассматриваются неизвестные и их ошибки, параметры матрицы корреляции, а также индикаторы, характеризующие точность вычислений и применяемые для повышения точности при описании структуры модели поверхности нашего естественного спутника. В случае, когда число наблюдений не превосходит количество весовых параметров, возможно использование step by step режима регрессионного анализа. Такая возможность обеспечивается тем обстоятельством, что гармонические компоненты интегрируются в модель

постепенно, и расчеты могут завершиться до того момента, когда появятся дополнительные решения. Как результат, получены цифровые модели вариаций лунной поверхности на основе как топографических, так и гравиметрических спутниковых данных.

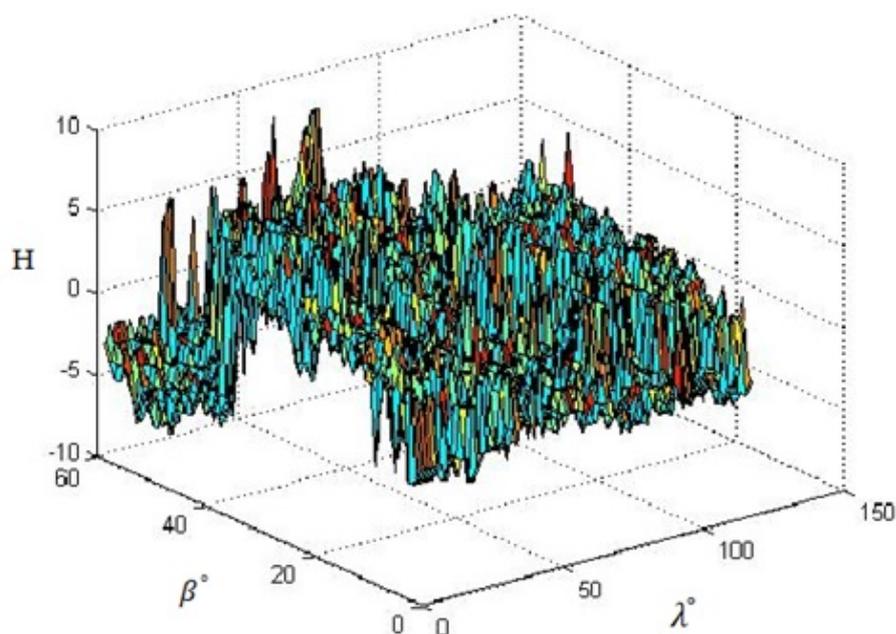


Рис. 16: Пример построенной цифровой карты поверхности Луны

Для оценки построенных моделей использован инновационный алгоритм прогнозирования. Модуль, ответственный за прогнозирование, позволяет отслеживать понижение и повышение исходных данных (значений высоты или гравитационного потенциала), для этого требуется 10 и более точек. При создании ПК большое внимание было уделено построению картографических моделей на основе использования выходных данных для визуального прогнозирования. ППИМ позволяет осуществлять контурное картографирование с возможностью масштабирования, а также тональную окраску изолиний и экспортрование изображений. Программная оболочка может использоваться для анализа построенной модели благодаря удобному интерфейсу. При этом обеспечивается идентификация и оценка точности контурного картирования. Также присутствует 3D-режим визуализации. С помощью ППИМ были построены цифровые карты поверхности Луны, один из примеров таких карт представлен на рис. 16.

## 4.2 Синтетический метод исследования структуры лунной поверхности

Высокая степень чувствительности фрактального метода достигается при использовании фрактальных размерностей, определенных не по одному свойству анализируемых участков моделей, а по набору свойств [102].

Представим, что структура исследуемой модели задана с помощью частично упорядоченного множества  $S(K^2)$ , при этом  $K^2$  – количество элементов  $s_{nm}$  в  $S(K^2)$ ,  $n, m = 1 \dots, K$ .

В ходе дальнейших рассуждений будем исходить из того, что частичное упорядочение реализовано с использованием диаграммы Хассе (рис. 17), а элементы отличаются характерными лишь для рассматриваемого множества параметрами  $P_\eta(s)$ , в качестве которых могут выступать площадь, цвет и пр., т.е.  $\forall s_{nm} (s_{nm} \in \{s | P_\eta(s)\})$ . Если существует более одного общего свойства (т.е.  $\eta > 1$ ), следует описывать множество, используя несколько фрактальных размерностей.

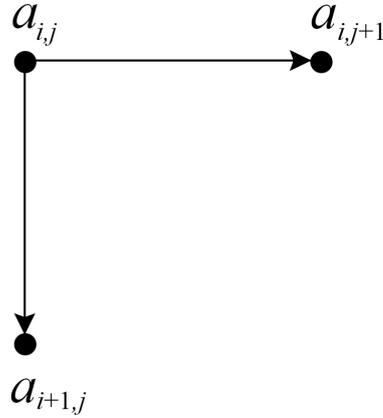


Рис. 17: Диаграмма Хассе

Рассмотрим множество  $S(K^2)$  как объединение его непересекающихся подмножеств:

$$S(K^2) = L^{(1)}(k^2) \cup L^{(2)}(k^2) \cup \dots \cup L^{(\delta^2)}(k^2). \quad (4.2)$$

Очевидно, что

$$L^{(n)}(k^2) \cap L^{(n')}(k^2) = \emptyset, \quad (4.3)$$

где  $\delta = \frac{K}{k}$ , причем  $\delta$  и  $k$  являются целыми, и их также можно представить как множества  $\forall \delta \in \{\delta_\theta\}$  и  $\forall k \in \{k_\theta\}$ . В этих множествах найдутся элементы с

наибольшим и наименьшим значениями:

$$i_{max} = \sup\{i_\theta\} \in \{i_\theta\} = K;$$

$$i_{min} = \inf\{i_\theta\} \in \{i_\theta\} = 1;$$

$$\delta_{max} = \sup\{\delta_\theta\} \in \{\delta_\theta\} = K;$$

$$\delta_{min} = \inf\{\delta_\theta\} \in \{\delta_\theta\} = 1.$$

Например, если  $K = 48$ , то

$$\{\delta_\theta\} = \{48, 24, 16, 12, 8, 6, 4, 1\}$$

и

$$\{i_\theta\} = \{1, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}.$$

Введем параметры, соответствующие верхней и нижней границам  $S(K^2)$  по всем характеристическим параметрам  $P_\eta(s)$ :

$$B_\eta = \sup S(K^2), \quad (4.4)$$

$$b_\eta = \inf S(K^2). \quad (4.5)$$

Следует отметить, что  $B_\eta$  и  $b_\eta$  являются элементами  $S(K^2)$ , а значит, можно выполнить шкалирование  $S(K^2)$  по всем характеристическим параметрам. С этой целью  $B_\eta$  и  $b_\eta$  сопоставим числа  $X_\eta$  и  $x_\eta$ . Следовательно, в пространстве каждого характеристического параметра исследуемое множество  $S(K^2)$  будет покрыто кубической структурой, объем которой составит  $V_\eta = (X_\eta - x_\eta)^3$ . Тогда каждому элементу  $S(K^2)$  будет соответствовать участок пространства характеристических параметров, площадь которого  $t_\eta = (X_\eta - x_\eta)^2 / K^2$ . Очевидно, что на каждое подмножество  $L^{(n)}(i^2)$  будет приходиться кубическая структура объемом  $v = \frac{V_\eta}{\delta^3}$ , и таких структур будет  $\sup L^{(n)}(k^2) \in L^{(n)}(k^2)$ . Элементы же подмножества займут площадь, равную  $T_\eta(k^2) = t_\eta k^2$ .

Фрактальную размерность  $F_\eta$  для рассматриваемого множества  $S(K^2)$  по характеристическому параметру  $P_\eta(s)$  определим согласно следующему выражению:

$$F_\eta = \sum_{\theta} \frac{\log Z_\eta(k_{\theta+1}^2) - \log Z_\eta(k_\theta^2)}{|\log T_\eta(k_{\theta+1}^2)| - |\log T_\eta(k_\theta^2)|} \times \frac{\delta_{\theta+1} - \delta_\theta}{K - 1}, \quad (4.6)$$

Уравнение (4.6) представляет собой тангенс угла наклона зависимости  $\log Z_\eta(k^2)$  от  $\log t_{k^2}$ , в нем  $\log Z_\eta(k^2)$  обозначено количество несоприкасающихся граней кубических структур, которыми покрыто подмножество  $L^{(n)}(k^2)$ .

Тогда показателем самоподобия  $R_\eta$  будет являться следующее отношение

$$R_\eta = \frac{F_\eta^0}{F_\eta}, \quad (4.7)$$

при том условии, что  $F_\eta^0$  – фрактальная размерность самоподобного множества

$$F_\eta^0 = \frac{\log Z_\eta(K^2) - \log Z_\eta(1)}{|\log T_\eta(K^2)| - |\log T_\eta(1)|}. \quad (4.8)$$

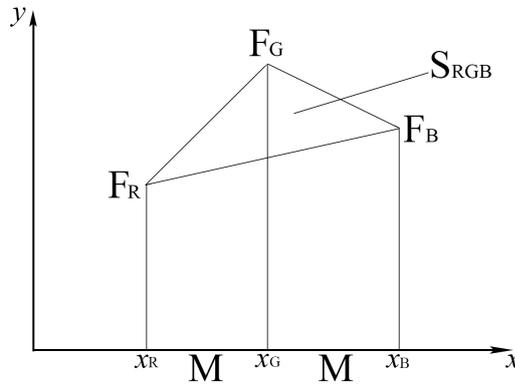


Рис. 18: Треугольник, вершинами которого являются цветовые фрактальные размерности

В диссертационном исследовании с помощью вышеописанного метода исследовалась топографическая модель, созданная по результатам измерений спутника «Кагуа» (JAXA). При этом в качестве характеристических параметров  $P_\eta(s)$  выступили цвета пикселей – красный ( $\eta \equiv R$ ), синий ( $\eta \equiv B$ ), зеленый ( $\eta \equiv G$ ) – соответствующие альтиметрическим данным областей. В результате цифровая структура поверхности описывается следующими фрактальными размерностями:  $F_R, F_G, F_B$ . С использованием этих величин в качестве вершин

треугольников, вычислены их площади, с высокой точностью описывающие вариации высотных составляющих, – цветовые фрактальные параметры (ЦФП).

Определим из рис. 18 площадь треугольника, образованного  $F_R$ ,  $F_G$  и  $F_B$ :

$$S_{RGB} = \begin{pmatrix} x_R & F_R & 1 \\ x_G & F_G & 1 \\ x_B & F_B & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

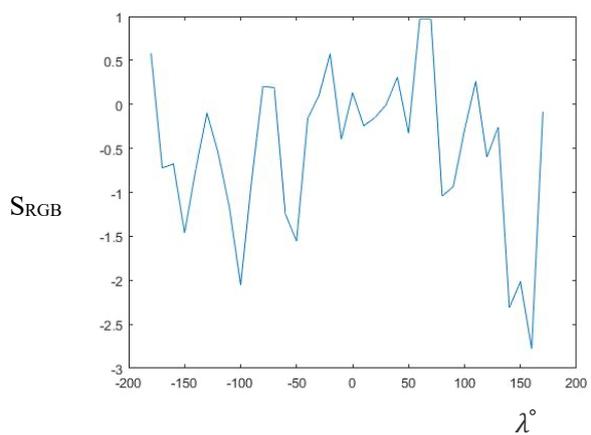
### 4.3 Результаты исследования структуры поверхности Луны с помощью синтетического метода

С целью исследования структурных параметров поверхности Луны использовалась созданная по данным миссии «Kaguya» (JAXA) топографическая модель. В итоге получены следующие результаты:

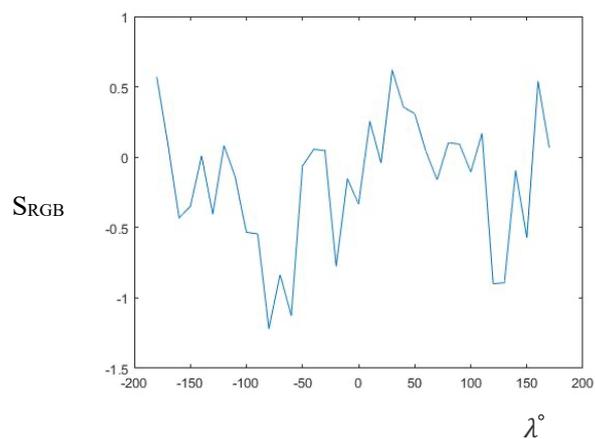
1. Были построены диаграммы (см. Приложения к диссертации) распределения ЦФП по селенографическим долготам и широтам. Выявлены самоподобные участки поверхности.
2. Для такой выборки использовалось более 250 участков поверхности, которые наилучшим образом соответствуют понятию структурного самоподобия.

Суть анализа с использованием параметра самоподобия – следующая: участки с высокими показателями данного параметра и в то же время имеющие близкие значения фрактальных размерностей, являются подобными структурно, и по всей вероятности, образовались под действием одинаковых эволюционных процессов, как показано в параграфе 4.4.

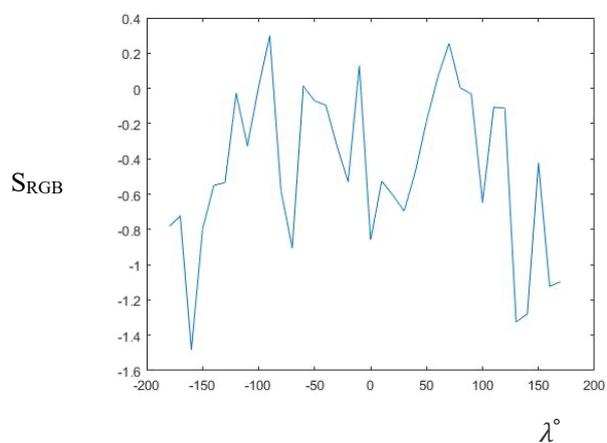
Ниже приведено несколько полученных нами графиков зависимости параметра ЦФП от селенографической долготы при зафиксированной широте (рис. 19) и от селенографической широты при зафиксированной долготе (рис. 20). Получено 162 таких графика для случаев вычисления согласно формуле (4.9) с модификациями положения цветовых фрактальных размерностей  $S_{RGB}$ ,  $S_{GRB}$ ,  $S_{GBR}$ . Все 162 графика приводятся в разделе Приложения (рисунки 1 – 162).



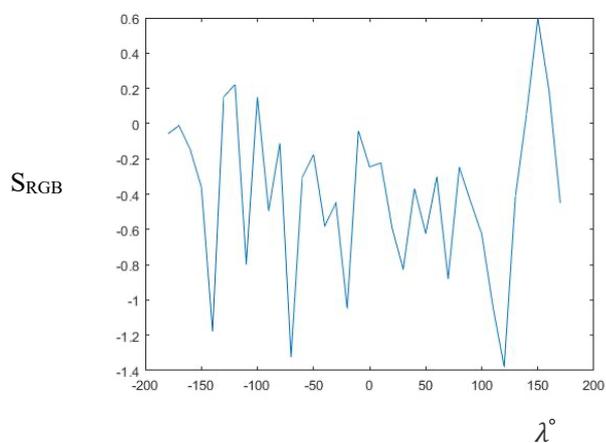
а) Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 90^\circ$



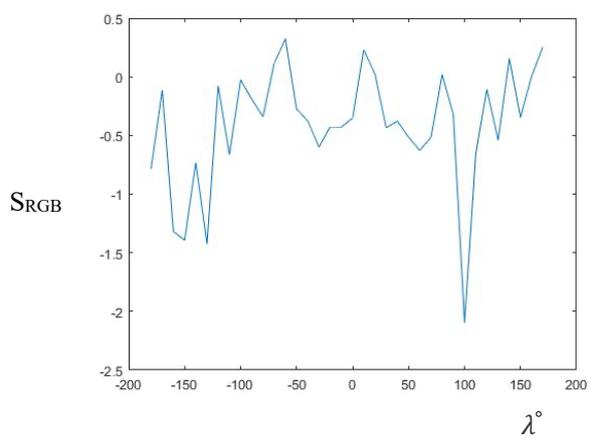
б) Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 80^\circ$



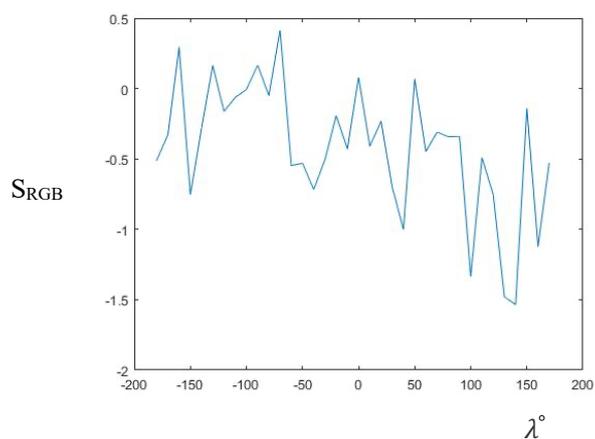
в) Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 70^\circ$



г) Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 60^\circ$

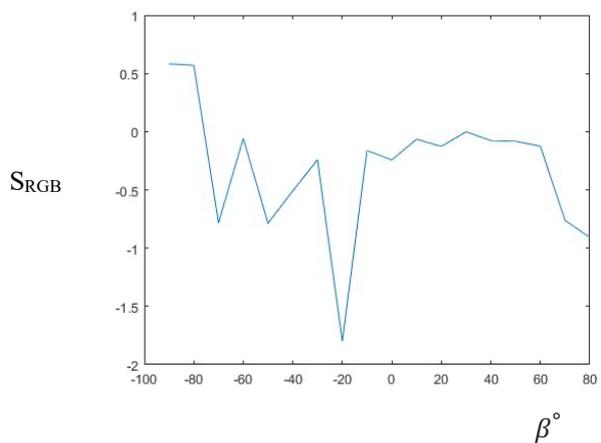


д) Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 50^\circ$

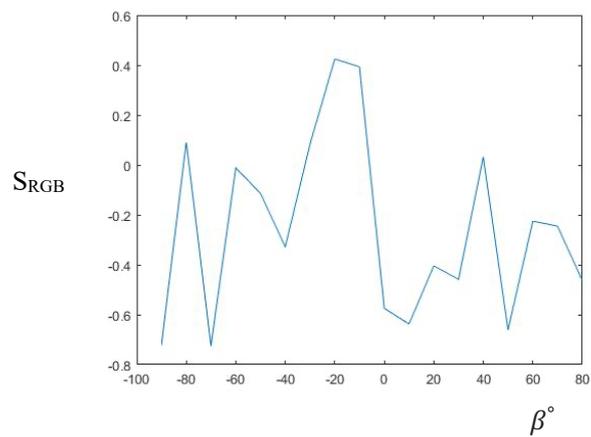


е) Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 40^\circ$

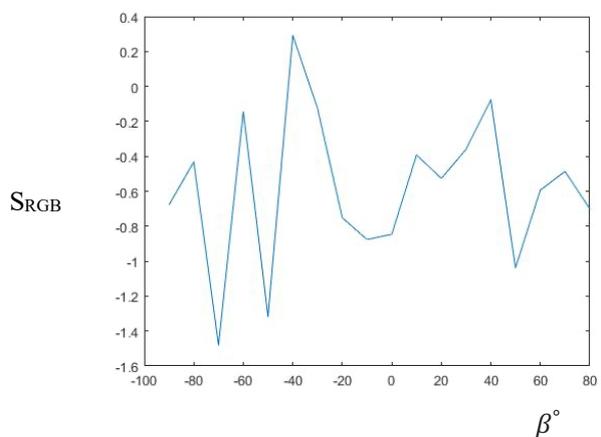
Рис. 19: Примеры графиков зависимости ЦФП от селенографической долготы, ось  $S_{RGB}$  нормирована (нормировочный коэффициент = 0,01)



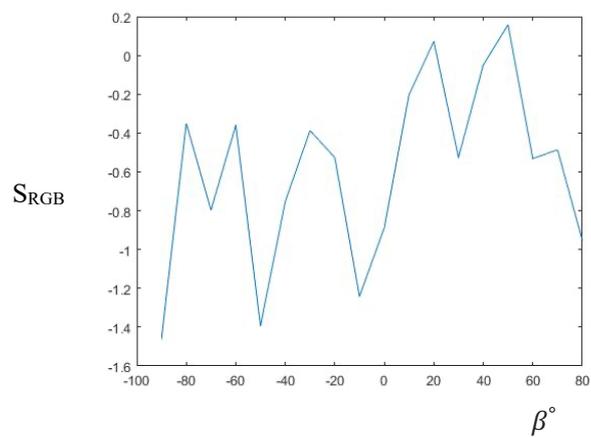
a) Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -180^\circ$



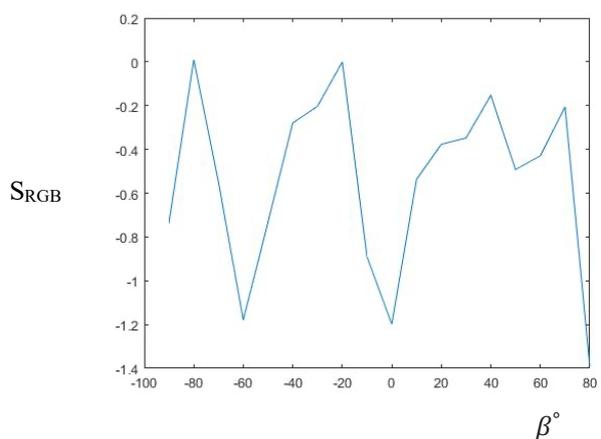
b) Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -170^\circ$



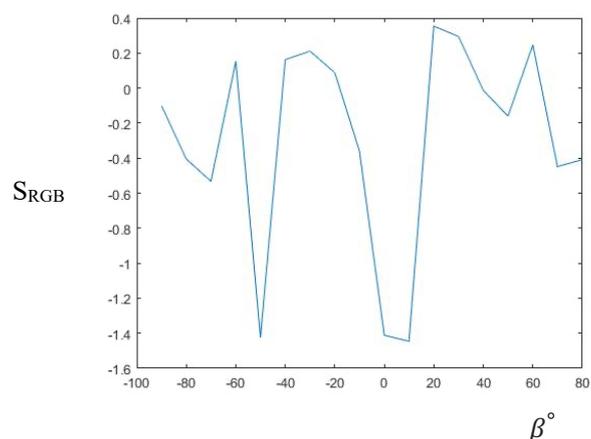
c) Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -160^\circ$



d) Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -150^\circ$



e) Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -140^\circ$



f) Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -130^\circ$

Рис. 20: Примеры графиков зависимости ЦФП от селенографической широты, ось  $S_{RGB}$  нормирована (нормировочный коэффициент = 0,01)

Поскольку значения ЦФП варьируются от  $-60$  до  $+40$ , удобно ввести несколько диапазонов значений, выделив среди них малые, умеренные и высокие:  $0 < S_{RGB} \leq 20$ ,  $20 < S_{RGB} \leq 40$ ,  $40 < S_{RGB} \leq 60$ ,  $-60 \leq S_{RGB} < -40$ ,  $-40 \leq S_{RGB} < -20$ ,  $-20 \leq S_{RGB} < 0$ . Исследование зависимостей, представленных на рис. 19 и 20, приведено в Таблице 4.1:

Таблица 4.1: Значения ЦФП для различных областей лунной поверхности

№	$S_{RGB}$	Рассматриваемый участок поверхности
1	$-60 < S_{RGB} < -40$	$(150^\circ < \lambda < 165^\circ, -45^\circ < \beta < -30^\circ)$ $(75^\circ < \lambda < 120^\circ, -30^\circ < \beta < -15^\circ)$ $(75^\circ < \lambda < 90^\circ, -15^\circ < \beta < 45^\circ)$ $(45^\circ < \lambda < 60^\circ, -15^\circ < \beta < 0^\circ)$ $(60^\circ < \lambda < 75^\circ, 15^\circ < \beta < 30^\circ)$ $(45^\circ < \lambda < 60^\circ, 45^\circ < \beta < 60^\circ)$ $(60^\circ < \lambda < 75^\circ, 60^\circ < \beta < 75^\circ)$ $(30^\circ < \lambda < 45^\circ, 60^\circ < \beta < 75^\circ)$ $(-75^\circ < \lambda < -60^\circ, -45^\circ < \beta < -30^\circ)$ $(-165^\circ < \lambda < -150^\circ, -45^\circ < \beta < -15^\circ)$ $(-150^\circ < \lambda < -135^\circ, -30^\circ < \beta < 30^\circ)$ $(75^\circ < \lambda < 120^\circ, -30^\circ < \beta < -15^\circ)$
2	$-40 < S_{RGB} < -20$	$(150^\circ < \lambda < 165^\circ, -75^\circ < \beta < -45^\circ)$ $(120^\circ < \lambda < 150^\circ, -60^\circ < \beta < -30^\circ)$ $(135^\circ < \lambda < 165^\circ, 45^\circ < \beta < 60^\circ)$ $(75^\circ < \lambda < 105^\circ, 60^\circ < \beta < 90^\circ)$ $(-120^\circ < \lambda < 0^\circ, 75^\circ < \beta < 90^\circ)$ $(-180^\circ < \lambda < -165^\circ, -75^\circ < \beta < -15^\circ)$
3	$-20 < S_{RGB} < 40$	$(150^\circ < \lambda < 175^\circ, 15^\circ < \beta < 45^\circ)$ $(105^\circ < \lambda < 135^\circ, -75^\circ < \beta < -60^\circ)$ $(-75^\circ < \lambda < -30^\circ, -75^\circ < \beta < -45^\circ)$ $(-180^\circ < \lambda < -165^\circ, 60^\circ < \beta < 75^\circ)$
4	$-20 < S_{RGB} < 20$	Остальные участки лунной поверхности

При исследовании распределения ЦФП по участкам поверхности Луны установлено, что их структуры в значительной степени зависят от перепадов высот. Следует отметить, что это – следствие того, что ЦФП вычисляется в соответствии с альтиметрической информацией, заложенной в цветовых параметрах пикселей, описывающих данный участок поверхности. По этой причине наименьшие значения ЦФП наблюдаются на участках, характеризующихся минимальными изменениями рельефа. Комплексная структура лунного рельефа, по всей видимости, связана с различающимися условиями, при которых дан-

ные области поверхности формировались. Впрочем, удается выявить некоторые участки, структуры которых подобны, результаты приведены в Таблице 4.2.

Таблица 4.2: Самоподобные участки лунной поверхности

$S_{RGB}$	Участок поверхности
-10	Участок в окрестности кратера Метон ( $73^{\circ}34'$ с.ш. $19^{\circ}38'$ в.д.)
	Участок в окрестности кратера Платон ( $51^{\circ}37'$ с.ш. $9^{\circ}23'$ з.д.)
	Участок между кратером Аристотель ( $50^{\circ}14'$ с.ш. $17^{\circ}19'$ в.д.) и <i>Lacus Mortis</i> ( $45^{\circ}00'$ с.ш. $27^{\circ}12'$ в.д.)
	Участок в окрестности кратера Шайн ( $32.6^{\circ}$ с.ш. $172.5^{\circ}$ в.д.)
	Участок между кратерами Аль Бируни ( $18^{\circ}04'$ с.ш. $92^{\circ}37'$ в.д.) и Эдисон ( $25.0^{\circ}$ с.ш. $99.1^{\circ}$ в.д.)
	Участок к северу от кратера Ингирами ( $47^{\circ}29'$ ю.ш. $68^{\circ}57'$ з.д.)
	Участок в окрестности кратера Пуанкаре ( $56^{\circ}52'$ ю.ш. $163^{\circ}59'$ в.д.)
	Участок к северу от кратера Крамера ( $53.6^{\circ}$ с.ш. $127.6^{\circ}$ з.д.)
	Участок в окрестности кратера Де ля Рю ( $59^{\circ}01'$ с.ш. $52^{\circ}50'$ в.д.)
	Участок в окрестности кратера Лютер ( $33^{\circ}12'$ с.ш. $24^{\circ}09'$ в.д.)
	Участок в окрестности кратера Шуберт ( $2.8^{\circ}$ с.ш. $81.0^{\circ}$ в.д.)
	Участок между кратерами Венделин ( $16^{\circ}28'$ ю.ш. $61^{\circ}33'$ в.д.) и Каптейн ( $10^{\circ}47'$ ю.ш. $70^{\circ}35'$ в.д.)
	Участок в окрестности кратера Ридберг ( $46^{\circ}26'$ ю.ш. $96^{\circ}26'$ з.д.)
	Участок в окрестности кратера Де Руа ( $55^{\circ}14'$ ю.ш. $98^{\circ}59'$ з.д.)
	Участок в окрестности кратера Чемберлин ( $58.9^{\circ}$ с.ш. $95.7^{\circ}$ в.д.)
Участок в окрестности кратера Планк ( $57^{\circ}23'$ ю.ш. $135^{\circ}05'$ в.д.)	
-25	Участок в окрестности кратера Нансен ( $81^{\circ}10'$ с. ш. $95^{\circ}23'$ в. д.)
	Участок в окрестности кратера Сегерс ( $47.1^{\circ}$ с. ш. $127.7^{\circ}$ в. д.)
	Участок в окрестности кратера Нильсен ( $31^{\circ}48'$ с. ш. $51^{\circ}46'$ з. д.)
	Участок в окрестности кратера Лауритсен ( $27^{\circ}32'$ ю. ш. $96^{\circ}19'$ в. д.)
-30	Участок к северу от кратера Петерман ( $74^{\circ}21'$ с. ш. $67^{\circ}53'$ в. д.)
	Участок в окрестности кратера Маундер ( $14^{\circ}31'$ ю. ш. $93^{\circ}53'$ з. д.)

Распределение средних значений параметра самоподобия для участков лунной поверхности приведено на рис. 21.

Из исследования распределения параметра самоподобия по участкам поверхности Луны установлен диапазон его изменения –  $[0.8; 1]$ , что свидетельствует о существенных вариациях структуры от участка к участку.

В Таблице 4.2 приводятся выделенные самоподобные участки поверхности Луны. Необходимо учитывать, что площадь ЦФП отображает подобие структур для участков поверхности, тогда как наибольшее значение параметра самоподобия указывает на их фрактальное самоподобие. Следовательно, участки, име-

ющие близкие значения ЦФП и наибольшие значения параметра самоподобия, с высокой степенью вероятности формировались при аналогичных условиях и в результате идентичных эволюционных процессов.

В соответствии с Таблицей 4.2, для большинства участков лунной поверхности значение площади ЦФП составляет  $-10$ , что указывает на сравнительно небольшие перепады высот на них. Участки с максимальными значениями ЦФП находятся в северном полушарии на обратной стороне (ОС) Луны. Для участков, находящихся на видимой стороне (ВС), характерны значения ЦФП  $< 0$ ; при этом значения ЦФП возрастают по мере движения к южному полюсу.

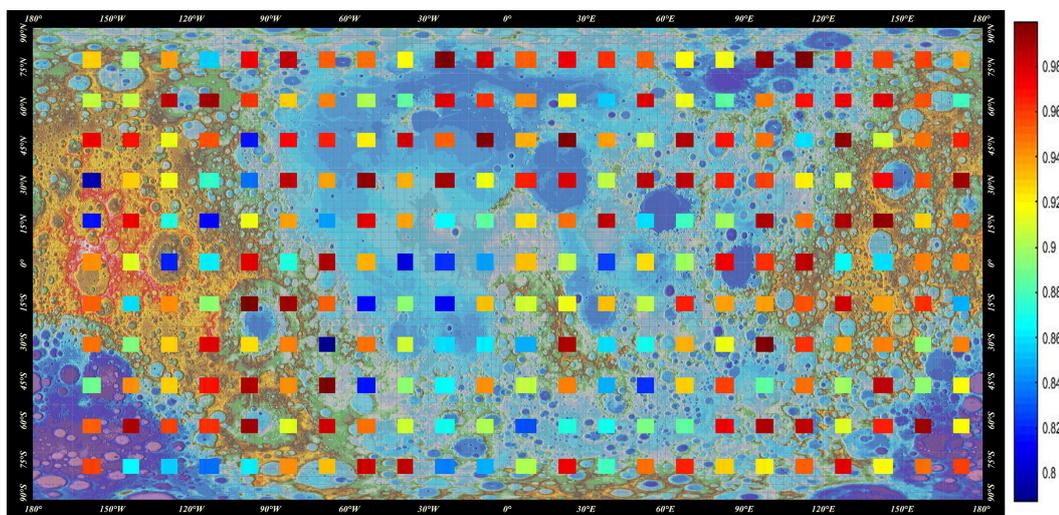


Рис. 21: Распределение средних значений параметра самоподобия для участков лунной поверхности

На рис. 22 приведено распределение площади ЦФП для участков лунной поверхности.

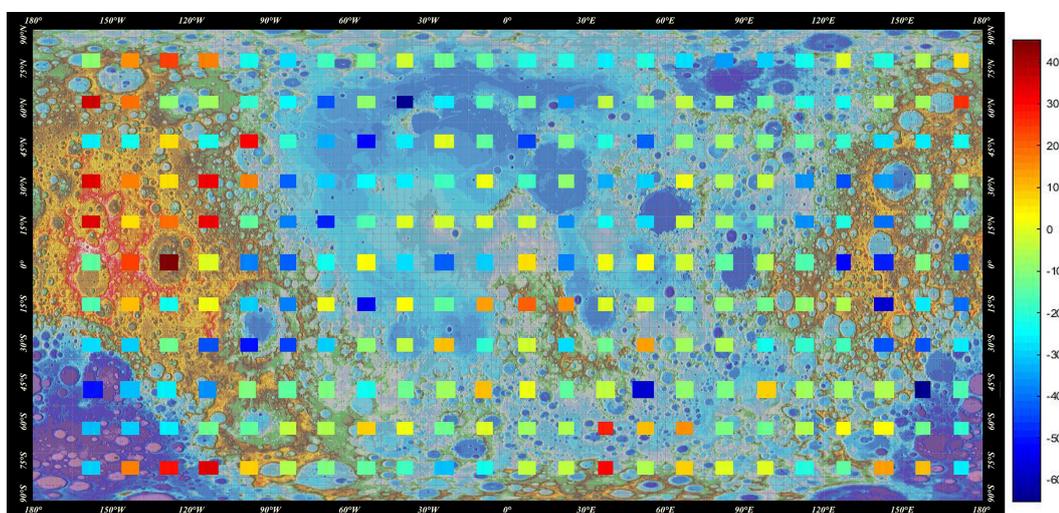


Рис. 22: Распределение ЦФП для участков лунной поверхности

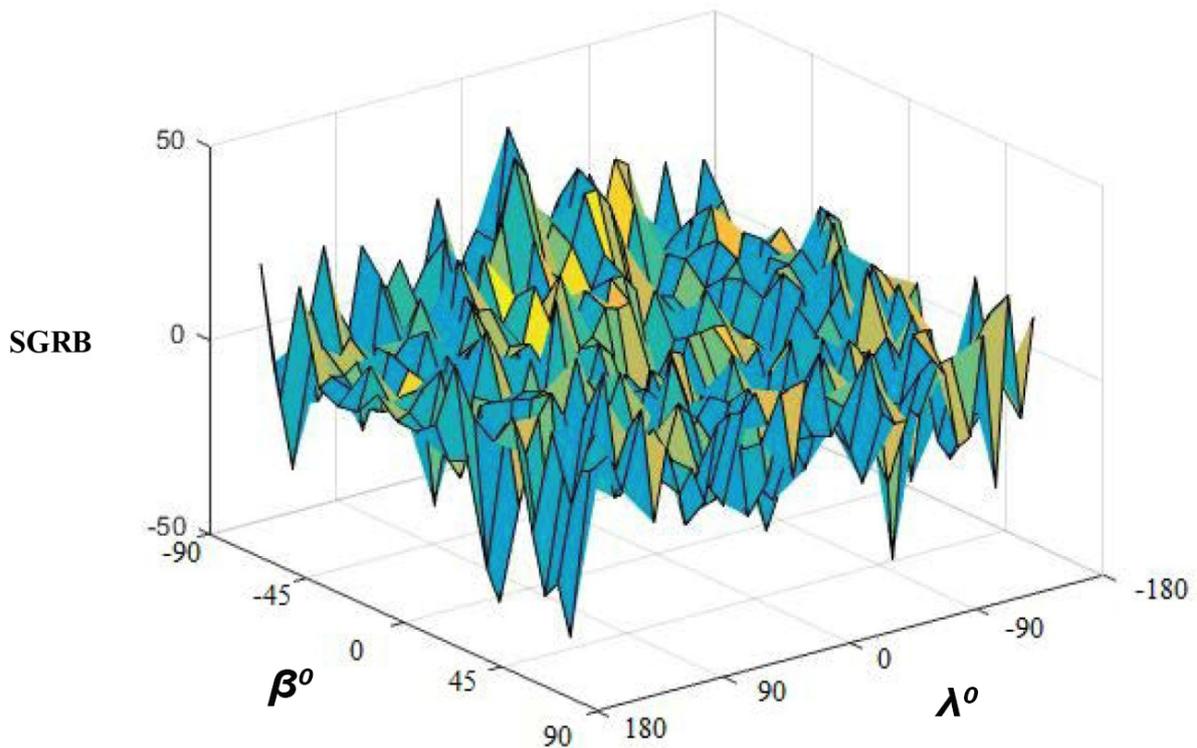


Рис. 23: Трехмерное представление распределения ЦФП по лунной поверхности

Таким образом можно установить, что в процессе формирования поверхности Луны в северных областях ОС и южных областях ВС преимущественно происходил выброс внутренних пород лунной мантии. Одним из вариантов подобного воздействия является падение массивных ударников высокой плотности. Другие же участки поверхности бомбардировались телами с более пористой структурой. Разумно предположить, что и объем ценных элементов и соединений, оставшихся на поверхности в результате падений медленных (скорость в момент столкновения с поверхностью  $\leq 12$  км/с) метеороидов, в северном полушарии ОС и южном ВС должен быть значительно выше. Это связано с тем фактом, что высокая плотность массивных ударников обеспечивается содержанием в них металлических компонентов. Следует отметить, что в статье [103] проанализированы фрактальные характеристики поверхности Меркурия, и авторы объясняют более высокую подверженность северной полусферы метеороидной бомбардировке тем, что преимущественные ориентации плоскости орбит металлических и низкоплотных метеороидов относительно плоскости эклиптики отличаются.

Трехмерное представление того, как площади ЦФП распределены по се-

ленографическим долготам и широтам приведено на рис. 23. Из его анализа следует, что площади ЦФП имеют высокую чувствительность к вариациям рельефа.

## 4.4 Анализ корреляционных связей физических и химических параметров с фрактальными моделями поверхности

Физический смысл использования методов фрактальной геометрии для различных областей лунной поверхности, как отмечалось выше, заключается в выявлении самоподобных при эволюционном формировании участков на Луне. Как подтверждение достоверности данной методики был выполнен корреляционный анализ коэффициентов фрактального самоподобия с физико-химическими данными, полученными из независимых источников. Были использованы результаты распределения химических элементов и соединений по лунной поверхности [104] и разработан метод определения их корреляционной связи с фрактальными параметрами. Суть метода описана ниже.

Корреляционную матрицу можно представить в следующем виде: строки соответствуют различным долготам, а столбцы – параметрам, описывающим фрактальные свойства поверхности и ее физико-химические характеристики.

Если количество строк и параметров обозначить как  $N$  и  $n$  соответственно, то матрица данных (МД) примет вид:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_{11} & \dots & z_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{N1} & \dots & z_{Nn} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Матричный элемент  $z_{ij}$  соответствует значению, принимаемому  $j$ -ым параметром в  $i$ -ой области селенографической поверхности на данной широте. Матрицей-столбцом  $z^j$  будет обозначаться  $j$ -ый столбец  $\mathbf{Z}$ , а матрицей-строкой  $z_i$  (соответствует  $i$ -ой строке  $\mathbf{Z}$ ).

Важно подчеркнуть, что параметры, описывающие одни и те же области лунной поверхности, будут иметь значительно отличающийся физический смысл. Данное обстоятельство является причиной изменения самой матрицы  $\mathbf{Z}$

в случае изменения шкалы, относительно которой определяются параметры.

Таблица 4.3: Пример корреляционной матрицы на интервале широт от  $0^\circ$  до  $15^\circ$

$\lambda$	$K$	$S_{RGB}$	Code	Red	Green	Blue
-180	0,925	2,637	0,945	151	142	144
-165	0,934	3,286	0,826	136	125	123
-150	0,918	1,686	0,904	147	137	133
-135	0,896	6,555	1,023	139	148	156
-120	0,897	5,198	1,020	127	145	155
-105	0,921	-4,183	1,001	130	145	154
-90	0,863	-6,729	1,011	134	146	153
-75	0,902	-12,801	0,812	152	108	127
-60	0,887	-6,998	0,696	169	70	104
-45	0,841	1,125	0,713	158	76	110
-30	0,857	-8,205	0,661	156	97	96
-15	0,856	-13,894	0,705	155	83	108
15	0,844	-5,128	0,839	148	110	128
30	0,863	0,676	0,724	160	83	107
45	0,841	-3,386	0,792	161	91	120
60	0,859	-2,008	0,731	144	98	111
75	0,844	-2,127	0,767	143	106	116
90	0,868	-0,294	0,695	139	98	107
105	0,874	-8,211	0,777	130	117	115
120	0,873	-6,033	0,724	128	117	108
135	0,913	-2,513	0,701	135	116	107
150	0,910	-2,559	0,859	145	137	136
165	0,916	-0,354	0,842	143	129	128
180	0,905	7,615	0,858	152	143	132

Как следствие, задача сопоставления различных столбцов  $\mathbf{Z}$  значительно усложняется. По этой причине первым этапом анализа является приведение матрицы данных к единой системе отсчета, в которой усредненные величины параметров имеют нулевые значения, дисперсии же равны друг другу. Преобразованную МД можно обозначить как  $X = x_{ij}$ . Тогда средние значения параметров вычисляются как

$$\bar{z}^j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_{ij}, j = 1 \dots n, \quad (4.11)$$

дисперсия параметра  $z^j$  определяется как

$$\bar{\sigma}_j^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (z_{ij} - \bar{z}^j)^2, j = 1 \dots n. \quad (4.12)$$

В итоге элементы преобразованной матрицы  $X$  будут равны

$$x_{ij} = \frac{z_{ij} - \bar{z}^j}{\bar{\sigma}_j}, i = 1 \dots N; j = 1 \dots n. \quad (4.13)$$

С геометрической точки зрения матрица данных  $X$  может рассматриваться как комплекс  $n$  векторов, находящихся в пространстве размерностью  $N$ , в котором оси образуют распределенное пространство объектов (РПО). Преимуществом РПО является то, что в нем длина каждого вектора будет одинакова (т.е. равна  $\sqrt{N}$ ) и, следовательно, задача определения соответствия параметров будет решаться через вычисление угла между ними в данном пространстве объектов.

Пример выборки параметров для корреляционной матрицы на широтном интервале от  $0^\circ$  до  $15^\circ$  приводится ниже в Таблице 4.3, при этом используются следующие обозначения:  $K$  – коэффициент самоподобия;  $S_{RGB}$  – площадь треугольника, образованного цветовыми фрактальными размерностями  $F_R, F_G, F_B$ ; Code, Red, Green, Blue, представляют цветовые коды физико-химических параметров, в которых зашифрована соответствующая информация.

Запишем коэффициент корреляции (КК) по выборке – т.е. КК, определенный на основе объектов, являющихся элементами МД:

$$\bar{\rho}_{jk} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{ij}x_{ik} = \frac{1}{N}(x^j, x^k), \quad (4.14)$$

где  $\bar{\rho}_{jk}$  зависит от скалярного произведения столбцов  $x^j$  и  $x^k$  матрицы  $X$ .

Как отмечалось выше, модули этих векторов одинаковы и равны  $\sqrt{N}$ , поэтому

$$\bar{\rho}_{jk} = \cos \alpha_{jk}, \quad (4.15)$$

где  $\alpha_{jk}$  – это угол между  $x^j$  и  $x^k$  в РПО. Таким образом для любой пары параметров значение КК будет лежать в диапазоне  $-1 < \bar{\rho}_{jk} < 1$ .

Значение КК характеризует то, насколько параметры соответствуют друг другу. В результате задача анализа данных сводится к анализу соответствующих корреляционных матриц.

Принято считать, что КК подходит только для исследования нормально распределенных величин. Однако используемый нами КК характеризуется отличным от нормального распределением и сложно описывается стохастиче-

скими законами. Тем не менее только для стохастического подхода возможно выполнять работы по определению доверительных оценок, построению робастных моделей и т.д.

Значение КК могут отличаться от нуля по причине случайного разброса результатов экспериментов, что приводит к неверным выводам относительно построенных графов. Чтобы этого избежать, необходимо проверить гипотезу о некоррелированности рассматриваемых величин.

Надежность коэффициента корреляции определяется на основе сравнения величины наблюдаемого КК ( $r$ ) по модулю, умноженного на  $\sqrt{n-1}$ , и его пороговым значением для надежности вывода  $RC$ . Пороговые величины для выражения  $|r|\sqrt{n-1} = H$  для различных значений  $RC$  и количеств измерений  $n$  даются в таблицах, которые вычисляются на основе распределения Стьюдента  $t$ .

Если для наблюдаемого КК ( $r$ ) выражение  $|r|\sqrt{n-1}$  превосходит пороговое значение  $H$  при данном  $RC$ , то для определенного  $RC$  можно утверждать о коррелированности исследуемых параметров. Как следствие, можно упростить значения определенных строк матрицы, сортировать их в зависимости  $RC$  и корреляционной связи элементов.

С надежностью вывода  $RC > 0.9$  на рис. 24 – 26 приведены примеры взвешенных графов корреляционных связей для различных широт:

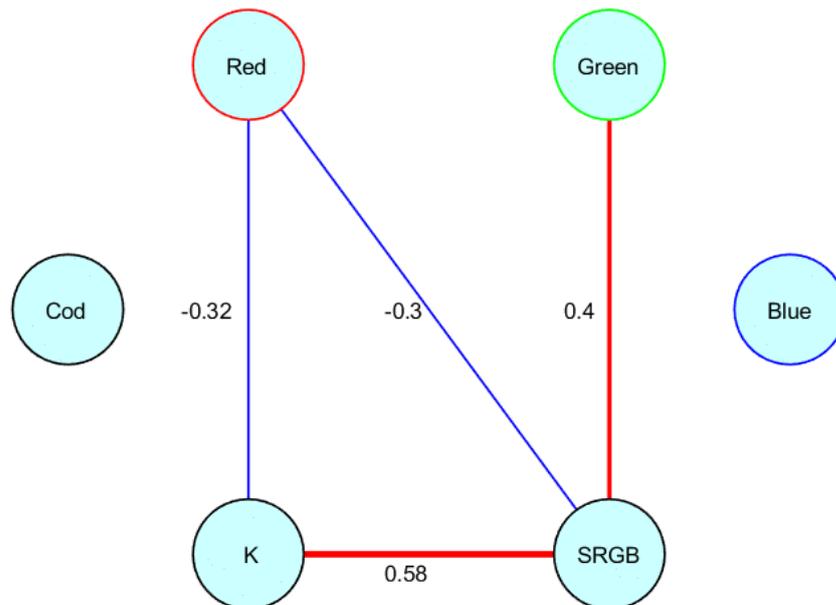


Рис. 24: Корреляционные связи на интервале широт  $\beta = -15^\circ - 0^\circ$

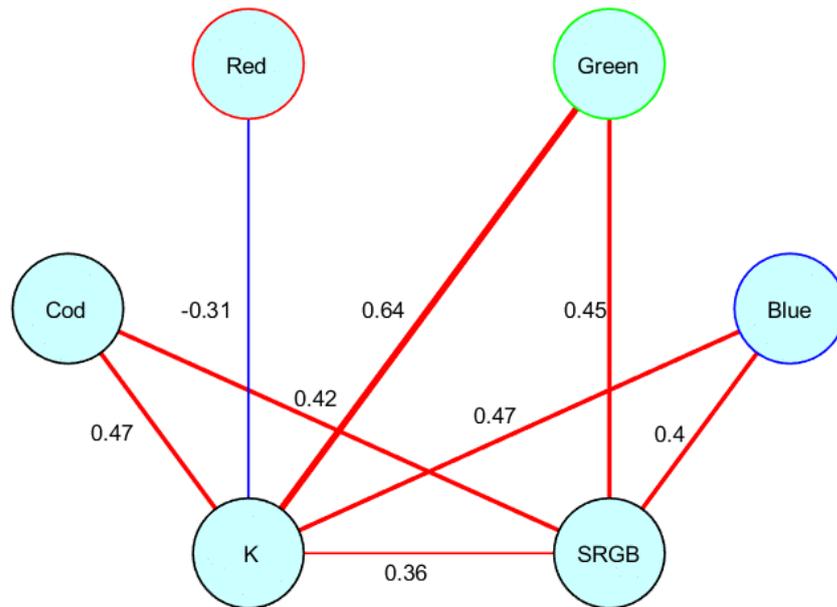


Рис. 25: Корреляционные связи на интервале широт  $\beta = 0^\circ - 15^\circ$

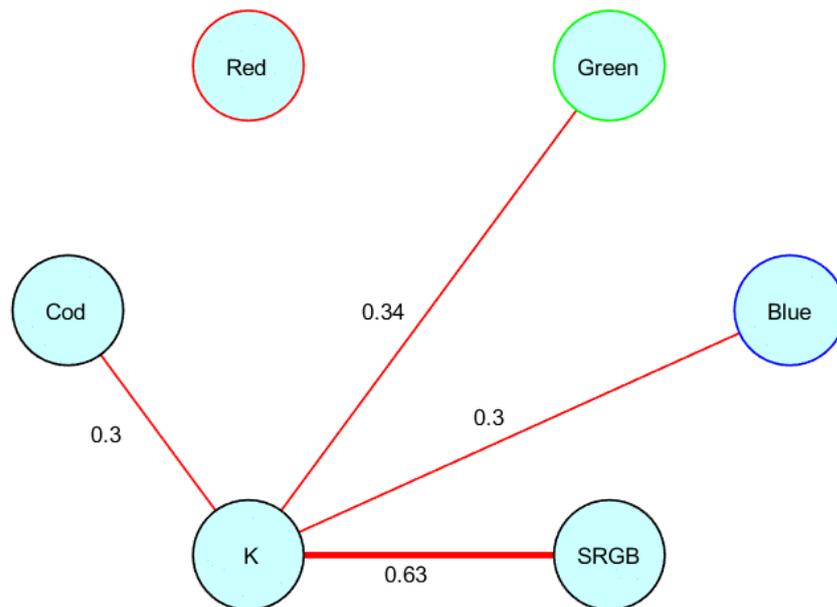


Рис. 26: Корреляционные связи на интервале широт  $\beta = 15^\circ - 30^\circ$

Как следует из исследования [105], в зависимости от приходящего на Луну излучения от Солнца, максимальное значение температуры на лунной поверхности наблюдается в области от  $0^\circ$  до  $\approx 7^\circ$  по широте, т.е. максимум распределения температур имеет небольшой сдвиг в северное полушарие. Таким образом, в этой области должен наблюдаться наибольший перепад температур,

что может приводить к изменению в структуре и составе поверхности, что и демонстрируют полученные результаты.

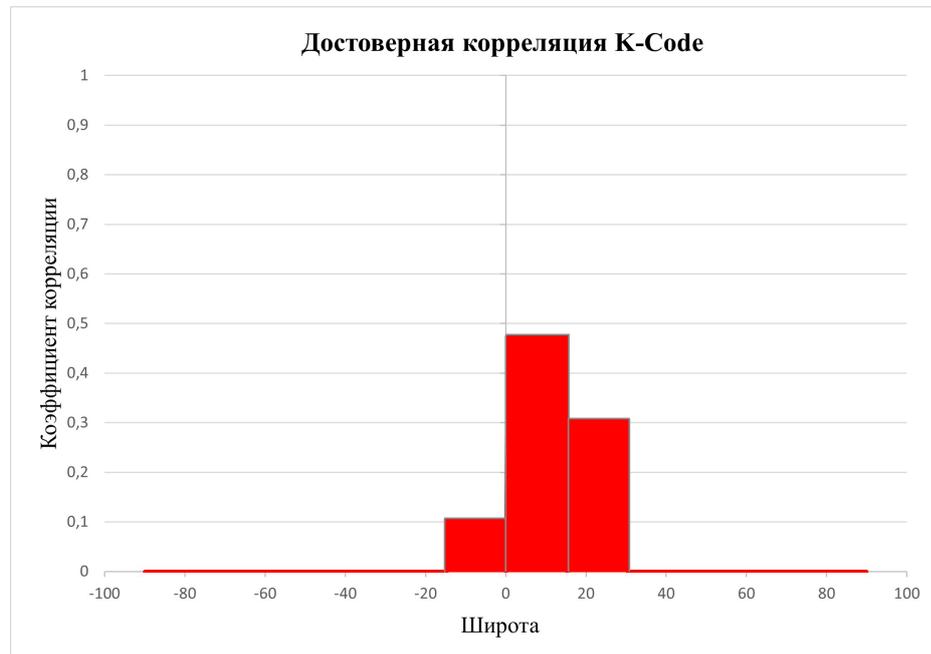


Рис. 27: Корреляционная связь коэффициента самоподобия и цветового кода геологической карты в зависимости от селенографической широты

Как видно из рис. 27, наибольшее значение коэффициент корреляции приобретает для селенографических широт от 0 до 15 градусов, в целом остается довольно значительным на интервале широт от  $-18^\circ$  до  $+30^\circ$ , что косвенно подтверждает взаимосвязь распределения температурного градиента на лунной поверхности и образования химических элементов.

## Заключение

Все задачи диссертационного исследования полностью решены, а результаты опубликованы в статьях в рецензируемых журналах, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI. Получены конкретные результаты:

1. Были проанализированы результаты современных спутниковых оптических наблюдений Луны, выполненных космическими миссиями «Apollo», «Clementine», «Kaguya» и «LRO». В результате проведенного анализа были отображены соответствующие данные для включения в ЦБД. Был рассмотрен вопрос о влиянии на результаты физической либрации Луны. Данное исследование было включено в значимые результаты АН РФ по секции «Астрометрия и небесная механика» в 2021 г., а в феврале 2022 г. опубликован дайджест «Ruminating on the wobble of the Moon» на сайте Nature <https://www.nature.com/articles/d42473-021-00125-3>.

2. Был разработан метод построения динамической селеноцентрической системы с использованием регрессионного моделирования и многопараметрического анализа. В данный метод включены математические алгоритмы по учету физической либрации Луны, возможность трансформации селенографических координат из одной системы в другую, программы для регрессионного моделирования, которые включают сам программный пакет регрессионного моделирования, программный комплекс гармонического многофакторного анализа, программный пакет многофакторного оценивания корреляционных связей, приведение разнородных наблюдений в единую систему. Метод предполагает выполнение редукции измерений как для многопараметрических, так и для динамических регрессионных моделей. По результатам выполнения этой задачи была опубликована монография:

Андреев А. О. Создание системы обработки и анализа селенографических данных космических миссий и станций наземного базирования / Н. Ю. Демина, А. О. Андреев, Ю. А. Нефедьев и др. // Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2017. – 108 с.

Также были опубликованы следующие статьи:

I) Andreev, A. O. Application of antijamming robust analysis method for selenocentric

reference net building / Y. A. Nefedyev, V. M. Bezmenov, S. A. Demin, A. O. Andreev, N. Y. Demina // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. – 2016. – V. 19, N. 1. – P. 102-106.

II) Andreev, A. The analytical and numerical approaches to the theory of the Moon's librations: Modern analysis and results / N. Petrova, A. Zagidullin, Y. Nefedyev, V. Kosulin, A. Andreev // *Advances in Space Research*. – 2017. – V. 60, N. 10. – P. 2303-2313.

3. Создана единая система селеноцентрических координат в виде цифровой базы данных (ЦБД) оптических наблюдений Луны для ее использования совместно с актуальными методами позиционирования. 279507 координатных положений точек лунной поверхности, включенных в ЦБД, были приведены к единой динамической СК с помощью регрессионного моделирования. Для удобства работы с ЦБД в системе MATLAB разработано специализированное ПО, позволяющее осуществлять выборку данных в задаваемой пользователем области. В каждой строке ЦБД хранятся как прямоугольные  $(\xi, \eta, \zeta)$ , так и сферические  $(\lambda, \beta, R)$  координаты лунного объекта. Распределение объектов, входящих в ЦБД, неравномерно в силу того, что альтиметрические измерения в полярных областях проводились в меньшем объеме по сравнению с зонами, расположенными ближе к экватору. Анализ распределения показал, что концентрация опорных объектов в полярных и экваториальных областях различается в 5-10 раз. Далее было проведено исследование ЦБД. В частности, на основании близости расположения центра отсчета ЦБД к центру масс Луны оценена возможность отнести ЦБД к динамической СК. Для этого альтиметрические данные ЦБД, космических миссий «Clementine» и «Kaguya», а также каталогов «ULCN 2005» и «Киев-4900» были представлены в виде суммы произведений гармонических коэффициентов (ГК) и сферических функций. С помощью ГК первых порядков определены координаты центра отсчета для исследуемых систем относительно центра фигуры Луны. Также был проведен сравнительный анализ ориентации ЦБД и 3 каталогов («Dynamic Selenocentric Network» – «DSN», «ULCN 2005» и «Киев-4900»). Вычислены матричные элементы, характеризующие различия углов ориентации сравниваемых систем между осями  $\xi, \eta, \zeta$  и различие положений их начал отсчета. Полученные результаты подтвердили, что СК, используемая в ЦБД, является динамической, а с учетом ее привязки к звездам ее следует считать и селеноцентрической, что позволя-

ет использовать данные ЦБД для решения основных задач диссертационного исследования. ЦБД зарегистрирована в Роспатенте, получено Свидетельство о регистрации базы данных «База данных оптических наблюдений Луны» от 18.03.2019 (авторы: Нефедьев Ю. А., Андреев А. О., Демина Н. Ю., Нефедьев Л. А.).

Результаты создания и исследования ЦБД представлены в двух статьях:  
I) Andreev, A. O. Analysis of data of “Clementine” and “KAGUYA” missions and “ULCN” and “KSC-1162” catalogues / Y. A. Nefedyev, S. G. Valeev, R. R. Mikeev, A. O. Andreev, N. Y. Varaksina / *Advances in Space Research.* – 2012. – V. 50, N. 11. – P. 1564-1569.

II) Andreev, A. O. Creation of a global selenocentric coordinate reference frame / Y. A. Nefedyev, A. O. Andreev, N. K. Petrova, N. Y. Demina, A. A. Zagidullin // *Astronomy Reports.* – 2018. – V. 62, N. 12. – P. 1016-1020.

4. Построена селеноцентрическая опорная система координат, которая в программном виде представлена как селеноцентрическая многопараметрическая модель (СММ), включающая цифровую карту Луны, цифровую базу данных опорных точек на Луне в системе центра масс и осей инерции и программный комплекс для определения и анализа координат точек на лунной поверхности. СММ позволяет найти опорные объекты ЦБД, находящиеся в окрестности задаваемой точки лунной поверхности. Далее с использованием метода взвешенных расстояний на основе известных координат объектов из этой выборки выполняется привязка к ним задаваемой точки, т.е. определяется ее высота. Учет различной удаленности опорных объектов из выборки от искомой точки реализован с помощью введения весовых коэффициентов. СММ представляет собой ПО, зарегистрированное в Роспатенте, получено Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ «Программа построения имитационной модели отдельных элементов ЛНСС в части картографического обеспечения» от 21.08.2020 (авторы Нефедьев Ю.А., Нефедьев Л.А., Андреев А.О., Демина Н.Ю.).

5. Проведен анализ точности определения координат избранной точки на лунной поверхности и выполнено сравнение полученных результатов с альтиметрическими данными космических миссий. Для этого высоты объектов из ЦБД были сопоставлены с данными альтиметрической карты, построенной по измерениям LRO. При этом лунная сфера была разделена на 8 октантов. Точ-

ность определения координат произвольно выбранной точки на поверхности Луны разработанным в диссертационном исследовании методом оценивалась на основе разности высот между ЦБД и электронной картой. Наиболее точный результат (0,4870 км) получен для октанта № 3, которому соответствует диапазоны долгот и широт  $\lambda = [0^\circ, -90^\circ]$ ,  $\beta = [0^\circ, -90^\circ]$ . Как отмечалось выше, распределение опорных объектов по селенографическим широтам и долготам – неравномерное: в приполярных областях концентрация опорных объектов от 2 до 10 раз ниже, это обстоятельство было учтено при сравнительном анализе результатов тестирования работы СММ. Исключение из анализа данных областей позволяет сократить разницу между высотами из ЦБД и электронной альтиметрической картой примерно на 16% (усредненные разности между высотами ЦБД и электронной картой по 8 октантам с учетом полярных областей и без них равны 1,4813 и 1,2485 км соответственно). Были также исследованы 6 областей, в которых наблюдается повышенная концентрация опорных объектов. Так как для этих областей характерно большее количество опорных кратеров, вероятность того, что попадающие в выборку объекты находятся ближе к произвольно выбранной точке, выше, и, следовательно, разность высот между ЦБД и электронной картой должна быть минимальной. Это предположение подтвердилось: в областях с повышенной концентрацией кратеров разность высот оказалась наименьшей (1,0340 км). Результаты данного исследования были опубликованы в статье:

Andreev, A. O. Development of Methods for Navigational Referencing of Circumlunar Spacecrafts to the Selenocentric Dynamic Coordinate System / A. O. Andreev, Y. A. Nefedyev, N. Y. Demina, L. A. Nefediev, N. K. Petrova, A. A. Zagidullin // *Astronomy Reports*. – 2020. – V. 64, N. 9. – P. 795-803.

6. Разработан синтетический метод для исследования параметров макрофигуры небесных тел и выполнено моделирование фрактальных карт лунной поверхности. В качестве характеристических параметров рассматривались цвета пикселей на цифровой топографической карте, составленной на основании измерений КА “Kaguya”. Структура поверхности таким образом описывалась тремя фрактальными размерностями ( $F_R$ ,  $F_G$ ,  $F_B$ ), и вычислялись площади треугольников, образованных ими, – цветовые фрактальные параметры (ЦФП). По результатам анализа 162 распределений ЦФП найдены участки поверхности, являющиеся структурно подобными. Вероятно, они были образованы в резуль-

тате идентичных эволюционных процессов. Построены карты распределения средних значений параметра самоподобия и ЦФП. По результатам их анализа найдены самоподобные области на поверхности Луны. Для исследования топографической карты Kaguya было разработано специализированное ПО, зарегистрированное в Роспатенте, получено Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ «Комплекс трансформации картографических проекций в цифровую форму» от 23.03.2021 (авторы: Карлос Де Ла Морена, Нefeldьев Ю. А., Андреев А. О.). Полученные результаты были опубликованы в статьях:

- I) Andreev, A. O. The Physical Surface of the Moon: A Digital Model Based on Satellite Altimetry / A.O. Andreev, E. N. Akhmedshina, L. A. Nefediev, Y. A. Nefedyev, N. Y. Demina // Astronomy Reports. – 2021. – V. 65, N. 5. – P. 435-444.
- II) Andreev, A. O. The use of multi-parameter analysis and fractal geometry for investigating the structure of the lunar surface / A. O. Andreev, Y. A. Nefedyev, L. A. Nefed'ev, E. N. Akhmedshina, N. Y. Demina, A. A. Zagidullin // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko- Matematicheskie Nauki. – 2020. – V. 162, N. 2. – P. 223-236.

7. Был создан метод для оценки корреляционной связи самоподобных областей с селено-химической картой Луны. Суть метода заключалась в создании корреляционной матрицы, в которую входили параметры, описывающие фрактальные свойства лунной поверхности и ее физико-химические характеристики. Данная матрица может рассматриваться как совокупность векторов, находящихся в пространстве объектов. Корреляционная связь оценивалась, как результат скалярного произведения столбцов данной матрицы, таким образом коэффициент корреляции находился в диапазоне от  $-1$  до  $1$ . В итоге задача анализа данных была сведена к исследованию соответствующих корреляционных матриц. С надежностью вывода выше 90% получены графы корреляционных зависимостей для различных диапазонов широт. По результатам исследования рассмотренных диаграмм установлена зависимость от температурных условий: максимум температур несколько смещен в северное полушарие Луны и наблюдается в широтной области  $[0^\circ, 7^\circ]$ , соответственно, там же наблюдается и наибольший перепад температур, что должно способствовать изменениям как в составе, так и в структуре поверхности, а коэффициент корреляции, вычисленный в диссертационной работе, принимает максимальные значения на интервале широт  $[0^\circ, 15^\circ]$ .

В результате выполнения работы построена селеноцентрическая опорная система координат на основе методов космической астрометрии и небесной механики. Созданная система включает ЦБД, цифровые карты Луны, программный комплекс и позволяет проводить имитационные эксперименты по определению координатных положений искомых точек на Луне как с борта КА, так и на поверхности Луны. Важным элементом селеноцентрической опорной системы является возможность использования для позиционирования квантово-оптических систем, в частности, световых лазерных маяков, что может повысить точность привязки к лунной системе координат до нескольких метров, а при использовании лазерного интерферометра – достичь сантиметровых величин. Все компоненты, относящиеся к селеноцентрической опорной системе координат, были исследованы синтетическим методом; подтверждены их достоверность и соответствие динамической системе координат.

### **Дальнейшие перспективы исследования**

Как было показано в настоящей работе, существующие в настоящее время селенографические системы могут значительно различаться по точности, а представленные в них данные – относиться к различным системам отсчета. Таким образом, будущие работы в данной области будут включать в себя как переобработку с использованием более точных методик имеющихся космических наблюдений, так и редукцию новых космических измерений, а также применение современных теорий ФЛЛ. Планируемые ведущими космическими агентствами мира лунные миссии позволят получить альтиметрию более высокого разрешения, что должно будет существенно повысить как количество опорных точек, так и точность определения их координатных положений. Все вышеперечисленное будет способствовать уменьшению ошибок в результатах, которые будут получены, в частности, с использованием разработанной селеноцентрической опорной системы координат. Все полученные в диссертационном исследовании результаты могут быть применены при проведении селенодезических исследований в ИКИ РАН, ГАИШ МГУ, ИНАСАН, ГЕОХИ, ИПА РАН, ГАО РАН, КФУ, МИИГАиК и других институтах в России и в зарубежных организациях.

### **Благодарности**

Автор приносит благодарность сотрудникам Кафедры астрономии и космической геодезии Института физики КФУ за всестороннюю поддержку при написании работы, д.ф.-м.н., доц. Кащееву Рафаэлю Александровичу, потратившему свое время на прочтение данного труда и ценные советы, а также своему научному руководителю д.ф.-м.н., доц. Нефедьеву Юрию Анатольевичу за руководство диссертационной работой и большую помощь при проведении научных исследований.

## Список обозначений и сокращений

СК – система координат

ДСК – динамическая система координат

ЦБД – цифровая база данных

ЦО – центр отсчета

МГА – многопараметрический гармонический анализ

ФР – фрактальная размерность

ГПЛ – гравитационное поле Луны

НД – наблюдательные данные

ФА – фундаментальные аргументы

ФЛЛ – физическая либрация Луны

ЛЛЛ – лазерная локация Луны

КА – космический аппарат

СЛМ – световой лазерный маяк

ЦМ – центр масс

НД – наблюдательные данные

GRAIL – The Gravity Recovery and Interior Laboratory

LRO – Lunar Reconnaissance Orbiter

СДВУ – средняя долгота восходящего узла

ТВР – точка весеннего равноденствия

ФА – фундаментальные аргументы

JAXA – The Japan Aerospace Exploration Agency

МНК – метод наименьших квадратов

LIDAR – Light Detection and Ranging

GLTM – Goddard Lunar Topography Model

SGM – SELENE Gravity Model

STM – SELENE Topography Model

LOLA – Lunar Orbiter Laser Altimeter

LLRI – Lunar Laser Ranging Instrument

ССК – селеноцентрическая система координат

ALSEP – The Apollo Lunar Surface Experiments Package

ГА – гармонические амплитуды

ППО – приполярная область

ПС – параметр самоподобия

ПК – программный комплекс

ЦФП – цифровой фрактальный параметр

## Список литературы

1. Lunar laser ranging: a continuing legacy of the Apollo program / J. O. Dickey, P. L. Bender, J. E. Faller, X. X. Newhall, R. L. Ricklefs, J. G. Ries, P. J. Shelus et al. // *Science*. — 1994. — Vol. 265, no. 5171. — Pp. 482–490.
2. The Clementine mission to the Moon: Scientific overview / S. Nozette, P. Rustan, L. Pleasance, J. Kordas, I. Lewis, H. Park, R. Priest et al. // *Science*. — 1994. — Vol. 266, no. 5192. — Pp. 1835–1839.
3. *Binder, A. B.* Lunar prospector: overview / A. B. Binder // *Science*. — 1998. — Vol. 281, no. 5382. — Pp. 1475–1476.
4. *Vondrak, R.* Lunar Reconnaissance Orbiter (LRO): Observations for lunar exploration and science / R. Vondrak, J. Keller, G. Chin, J. Garvin // *Space Science Reviews*. — 2010. — Vol. 150, no. 1-4. — Pp. 7–22.
5. Gravity field of the Moon from the Gravity Recovery and Interior Laboratory (GRAIL) mission / M. T. Zuber, D. E. Smith, M. M. Watkins, S. W. Asmar, A. S. Konopliv, F. G. Lemoine, H. J. Melosh et al. // *Science*. — 2013. — Vol. 339, no. 6120. — Pp. 668–671.
6. SMART-1 mission to the Moon: status, first results and goals / B. Foing, G. D. Racca, A. Marini, E. Evrard, L. Stagnaro, M. Almeida, D. Koschny et al. // *Advances in Space Research*. — 2006. — Vol. 37, no. 1. — Pp. 6–13.
7. *Kato, M.* The Kaguya mission overview / M. Kato, S. Sasaki, Y. Takizawa // *Space Science Reviews*. — 2010. — Vol. 154, no. 1. — Pp. 3–19.
8. The Chang'e 3 mission overview / C. Li, J. Liu, X. Ren, W. Zuo, X. Tan, W. Wen, H. Li et al. // *Space Science Reviews*. — 2015. — Vol. 190, no. 1. — Pp. 85–101.
9. Overview of the Chang'e-4 mission: Opening the frontier of scientific exploration of the lunar far side / C. Li, W. Zuo, W. Wen, X. Zeng, X. Gao, Y. Liu, Q. Fu et al. // *Space Science Reviews*. — 2021. — Vol. 217, no. 2. — Pp. 1–32.

10. Geology and scientific significance of the Rümker region in northern Oceanus Procellarum: China's Chang'E-5 landing region / Y. Qian, L. Xiao, S. Zhao, J. Zhao, J. Huang, J. Flahaut, M. Martinot et al. // *Journal of Geophysical Research: Planets*. — 2018. — Vol. 123, no. 6. — Pp. 1407–1430.
11. *Goswami, J. N.* Chandrayaan-1 mission to the Moon / J. N. Goswami, M. Anandurai // *Acta Astronautica*. — 2008. — Vol. 63, no. 11-12. — Pp. 1215–1220.
12. *MySwamy, A.* Chandrayaan-2: India's First Soft-landing Mission to Moon / A. MySwamy, A. Krishnan, T. Alex, G. Rama Murali // *39th COSPAR Scientific Assembly*. — 2012. — Vol. 39. — P. 1311.
13. *Иванов, М.* Кратер Богуславский на Луне: выбор места посадки для спускаемого аппарата миссии «ЛУНА-ГЛОБ» / М. Иванов, М. Маров, А. Базилевский, Ю. Костицын // *Вестник НПО им. С.А. Лавочкина*. — 2017. — № 2. — С. 44–51.
14. *Bagrov, A. V.* Single-satellite global positioning system / A. V. Bagrov, V. A. Leonov, A. S. Mitkin, A. F. Nasyrov, A. D. Ponomarenko, K. M. Pichkhadze, V. K. Sysoev // *Acta Astronautica*. — 2015. — Vol. 117. — Pp. 332–337.
15. *Pugacheva, S. G.* The proposed landing site for the luna-25 mission in the south polar region of the moon // *The Eleventh Moscow Solar System Symposium 11M-S3*. — 2020. — Pp. 232–232.
16. Landing site selection for luna-glob mission in crater boguslawsky / M. A. Ivanov, H. Hiesinger, A. M. Abdrakhimov, A. T. Basilevsky, J. W. Head, J. H. Pasckert, K. Bauch et al. // *Planetary and Space Science*. — 2015. — Vol. 117. — Pp. 45–63.
17. Initial observations from the lunar orbiter laser altimeter (LOLA) / D. E. Smith, M. T. Zuber, G. A. Neumann, F. G. Lemoine, E. Mazarico, M. H. Torrence, J. F. McGarry et al. // *Geophysical Research Letters*. — 2010. — Vol. 37, no. 18.
18. *Rizvanov, N.* Research on selenodesy and dynamics of the Moon in Kazan / N. Rizvanov, Y. A. Nefed'ev, M. Kibardina // *Solar System Research*. — 2007. — Vol. 41, no. 2. — Pp. 140–149.

19. *Кислюк, В. С.* Геометрические и динамические характеристики Луны / В. С. Кислюк. — Наук. думка, 1988.
20. *Andreev, A. O.* Development of methods for navigational referencing of circumlunar spacecrafts to the selenocentric dynamic coordinate system / A. O. Andreev, Y. A. Nefedyev, N. Y. Demina, L. A. Nefediev, N. K. Petrova, A. A. Zagidullin // *Astronomy Reports*. — 2020. — Vol. 64, no. 9. — Pp. 795–803.
21. *Shirenin, A. M.* Development of a high-precision selenodetic coordinate system for the physical surface of the Moon based on LED beacons on its surface / A. M. Shirenin, E. M. Mazurova, A. V. Bagrov // *Cosmic Research*. — 2016. — Vol. 54, no. 6. — Pp. 452–457.
22. *Чуйкова, Н.* Геометрическая фигура Луны, представленная в виде разложения по сферическим и выборочным функциям / Н. Чуйкова // *Астрономический журнал*. — 1975. — Т. 52, № 6. — С. 1279–1292.
23. *Petrova, N.* The analytical and numerical approaches to the theory of the Moon's librations: Modern analysis and results / N. Petrova, A. Zagidullin, Y. Nefedyev, V. Kosulin, A. Andreev // *Advances in Space Research*. — 2017. — Vol. 60, no. 10. — Pp. 2303–2313.
24. *Draper, J. W.* XXXII. On the process of Daguerreotype, and its application to taking portraits from the life / J. W. Draper // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. — 1840. — Vol. 17, no. 109. — Pp. 217–225.
25. *Gregory, R. A.* Lunar Photography / R. A. Gregory // *Nature*. — 1890. — Vol. 42, no. 1093. — Pp. 568–571.
26. *de La Rue, W.* Photographs of the Moon / W. de La Rue // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 1858. — Vol. 18. — P. 257.
27. *Kopal, Z.* Mapping of the Moon / Z. Kopal // *An Introduction to the Study of the Moon*. — Springer, 1966. — Pp. 207–239.
28. *Loewy, M.* Atlas photographique de la Lune / M. Loewy, P. H. Puiseux // *Bulletin de la Societe Belge d'Astronomie*. — 1899. — Vol. 4. — Pp. 333–348.

29. *Camichel, H.* Photographies Planétaires a l'Observatoire du Pic du Midi / H. Camichel // *L'Astronomie*. — 1946. — Vol. 60. — Pp. 161–162.
30. *Rösch, J.* L'éclipse totale de Lune des 29-30 janvier 1953, observée au Pic du Midi / J. Rösch // *L'Astronomie*. — 1953. — Vol. 67. — P. 41.
31. *Hagfors, T.* A study of the depolarization of lunar radar echoes / T. Hagfors // *Radio Science*. — 1967. — Vol. 2, no. 5. — Pp. 445–465.
32. *Hagfors, T.* Remote probing of the moon by infrared and microwave emissions and by radar / T. Hagfors // *Radio Science*. — 1970. — Vol. 5, no. 2. — Pp. 189–227.
33. *Pettengill, G.* Enhancement of radar reflectivity associated with the lunar crater Tycho / G. Pettengill, J. Henry // *Journal of Geophysical Research*. — 1962. — Vol. 67, no. 12. — Pp. 4881–4885.
34. *Thompson, T. W.* High resolution lunar radar map at 7.5 meter wavelength / T. W. Thompson // *Icarus*. — 1978. — Vol. 36, no. 2. — Pp. 174–188.
35. *Thompson, T. W.* Atlas of lunar radar maps at 70-cm wavelength / T. W. Thompson // *The Moon*. — 1974. — Vol. 10, no. 1. — Pp. 51–85.
36. *Zisk, S. H.* High-resolution radar maps of the lunar surface at 3.8-cm wavelength / S. H. Zisk, G. H. Pettengill, G. W. Catuna // *The Moon*. — 1974. — Vol. 10, no. 1. — Pp. 17–50.
37. *Gold, T.* Electrical properties of Apollo 17 rock and soil samples and a summary of the electrical properties of lunar material at 450 MHz frequency // Lunar and Planetary Science Conference Proceedings. — Vol. 7. — 1976. — Pp. 2593–2603.
38. *Thompson, T.* Mare Serenitatis: A preliminary definition of surface units by remote observations / T. Thompson, R. Shorthill, E. Whitaker, S. Zisk // *The moon*. — 1974. — Vol. 9, no. 1. — Pp. 89–96.
39. *Kaula, W. M.* Theory of satellite geodesy, Blaisdell Publ / W. M. Kaula // *Co., Waltham, Mass.* — 1966. — Vol. 345.

40. *Ananda, M. P.* Lunar gravity: A mass point model / M. P. Ananda // *Journal of Geophysical Research*. — 1977. — Vol. 82, no. 20. — Pp. 3049–3064.
41. Lunar interior properties from the GRAIL mission / J. G. Williams, A. S. Konopliv, D. H. Boggs, R. S. Park, D.-N. Yuan, F. G. Lemoine, S. Goossens et al. // *Journal of Geophysical Research: Planets*. — 2014. — Vol. 119, no. 7. — Pp. 1546–1578.
42. The JPL lunar gravity field to spherical harmonic degree 660 from the GRAIL Primary Mission / A. S. Konopliv, R. S. Park, D.-N. Yuan, S. W. Asmar, M. M. Watkins, J. G. Williams, E. Fahnestock et al. // *Journal of Geophysical Research: Planets*. — 2013. — Vol. 118, no. 7. — Pp. 1415–1434.
43. *Nefedyev, Y.* Analysis of data of “Clementine” and “Kaguya” missions and “ULCN” and “KSC-1162” catalogues / Y. Nefedyev, S. Valeev, R. Mikeev, A. Andreev, N. Varaksina // *Advances in space research*. — 2012. — Vol. 50, no. 11. — Pp. 1564–1569.
44. *Куликов, К. А.* Основы лунной астрометрии / К. А. Куликов, В. Б. Гуревич // *М.: Наука*. — 1972.
45. *Шевченко, В. В.* Современная селенография / В. В. Шевченко. — М.: Наука, 1980.
46. *Хабибуллин, Ш. Т.* К вопросу о системах селенографических координат, о прецессии и нутации оси вращения Луны / Ш. Т. Хабибуллин // *Астрономический журнал*. — 1968. — Т. 45, № 3. — С. 663–674.
47. *Абалакин, В. К.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / В. К. Абалакин, Е. П. Аксенов, Е. А. Гребеников. — Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1976. — С. 72–81.
48. *Абалакин, В. К.* Использование лазерных светолокационных наблюдений Луны для решения некоторых задач небесной механики и геодинамики / В. К. Абалакин // *Тр. Ин-та теоретической астрономии АН СССР*. — 1978. — № 17. — С. 82–133.
49. *Абалкин, В. К.* Основы эфемеридной астрономии / В. К. Абалкин. — Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979.

50. *Eckhardt, D. H.* Lunar physical libration theory / D. H. Eckhardt // Measure of the Moon. — Springer, 1967. — Pp. 40–51.
51. *Eckhardt, D. H.* Physical librations due to the third and fourth degree harmonics of the lunar gravity potential / D. H. Eckhardt // *The moon.* — 1973. — Vol. 6, no. 1-2. — Pp. 127–134.
52. *Eckhardt, D. H.* Theory of the libration of the Moon / D. H. Eckhardt // *The Moon and the planets.* — 1981. — Vol. 25, no. 1. — Pp. 3–49.
53. *Migus, A.* Analytical lunar libration tables / A. Migus // *The moon and the planets.* — 1980. — Vol. 23, no. 4. — Pp. 391–427.
54. *Moons, M.* Analytical theory of the libration of the Moon / M. Moons // *The Moon and the planets.* — 1982. — Vol. 27, no. 3. — Pp. 257–284.
55. *Гусев, А. В.* Вращение, физическая либрация и внутреннее строение активной и многослойной Луны / А. В. Гусев, Н. К. Петрова, Х. Ханада // *Монография. Изд-во Казанского унив.* — 2015.
56. *Rambaux, N.* The Moon's physical librations and determination of their free modes / N. Rambaux, J. G. Williams // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy.* — 2011. — Vol. 109, no. 1. — Pp. 85–100.
57. *Petrova, N.* Analytical extension of lunar libration tables / N. Petrova // *Earth, Moon, and Planets.* — 1996. — Vol. 73, no. 1. — Pp. 71–99.
58. *Demin, S. A.* The fractal analysis of the topography and gravitational field of Venus // *Journal of Physics: Conference Series* / IOP Publishing. — Vol. 1038. — 2018. — P. 012020.
59. *Nefedyev, Y. A.* Creation of a global selenocentric coordinate reference frame / Y. A. Nefedyev, A. Andreev, N. Petrova, N. Y. Demina, A. Zagidullin // *Astronomy Reports.* — 2018. — Vol. 62, no. 12. — Pp. 1016–1020.
60. *Varaksina, N. Y.* Selenocentric reference coordinates net in the dynamic system // *Journal of Physics: Conference Series* / IOP Publishing. — Vol. 661. — 2015. — P. 012014.

61. *Wollenhaupt, W. R.* Comments on the figure of the Moon from Apollo landmark tracking / W. R. Wollenhaupt, R. K. Osburn, G. A. Ransford // *The Moon*. — 1972. — Vol. 5, no. 1-2. — Pp. 149–157.
62. *Jones, R. L.* Estimates of the Moon's geometry using lunar orbiter imagery and Apollo laser altimeter data / R. L. Jones. — National Aeronautics and Space Administration, 1973. — Vol. 407.
63. Preliminary Results of the Apollo Lunar Sounder Experiment / R. J. Phillips, G. F. Adams, W. E. Brown Jr, R. E. Eggleton, P. Jackson, R. Jordan, W. J. Peeples et al. — 1973. — Vol. 4.
64. *Kaula, W. M.* Lunar topography from apollo 15 and 16 laser altimetry // Lunar and Planetary Science Conference Proceedings. — Vol. 4. — 1973. — P. 2811.
65. *Sjogren, W. L.* Lunar shape via the apollo laser altimeter / W. L. Sjogren, W. R. Wollenhaupt // *Science*. — 1973. — Vol. 179, no. 4070. — Pp. 275–278.
66. *Kaula, W. M.* Apollo laser altimetry and inferences as to lunar structure // Lunar and Planetary Science Conference Proceedings. — Vol. 5. — 1974. — Pp. 3049–3058.
67. *Bills, B. G.* A harmonic analysis of lunar topography / B. G. Bills, A. J. Ferrari // *Icarus*. — 1977. — Vol. 31, no. 2. — Pp. 244–259.
68. *Williams, J. G.* Lunar laser ranging tests of the equivalence principle with the Earth and Moon / J. G. Williams, S. G. Turyshev, D. H. Boggs // *International Journal of Modern Physics D*. — 2009. — Vol. 18, no. 07. — Pp. 1129–1175.
69. *Smith, W. H. F.* Gridding with continuous curvature splines in tension / W. H. F. Smith, P. Wessel // *Geophysics*. — 1990. — Vol. 55, no. 3. — Pp. 293–305.
70. *Zuber, M. T.* The shape and internal structure of the Moon from the Clementine mission / M. T. Zuber, D. E. Smith, F. G. Lemoine, G. A. Neumann // *Science*. — 1994. — Vol. 266, no. 5192. — Pp. 1839–1843.
71. *Lemoine, F. G.* Results from the Clementine lunar geodesy investigation / F. G. Lemoine, D. E. Smith, D. D. Rowlands, M. T. Zuber, G. Neumann // *Astrodynamics 1995*. — 1996. — Pp. 201–223.

72. *Archinal, B. A.* The unified lunar control network 2005 / B. A. Archinal, M. R. Rosiek, R. L. Kirk, B. L. Redding et al. // *US Geological Survey Open-File Report*. — 2006. — Vol. 1367. — P. 18.
73. *Araki, H.* Observation of the lunar topography by the laser altimeter LALT on board Japanese lunar explorer SELENE / H. Araki, S. Tazawa, H. Noda, T. Tsubokawa, N. Kawano, S. Sasaki // *Advances in Space Research*. — 2008. — Vol. 42, no. 2. — Pp. 317–322.
74. *Pavlis, D. E.* GEODYN II system description / D. E. Pavlis, J. Wimert, J. J. McCarthy // *Hughes STX Contractor Report, Greenbelt, Maryland*. — 1998.
75. *Archinal, B. A.* Final completion of the unified lunar control network 2005 and topographic model // Lunar and Planetary Science Conference. — No. 1338. — 2007. — P. 1904.
76. *Wessel, P.* Free software helps map and display data / P. Wessel, W. H. F. Smith // *Eos, Transactions American Geophysical Union*. — 1991. — Vol. 72, no. 41. — Pp. 441–446.
77. Lunar Reconnaissance Orbiter overview: The instrument suite and mission / G. Chin, S. Brylow, M. Foote, J. Garvin, J. Kasper, J. Keller, M. Litvak et al. // *Space Science Reviews*. — 2007. — Vol. 129, no. 4. — Pp. 391–419.
78. *Bessel, F. W.* Über die Bestimmung der Libration des Mondes, durch Beobachtungen / F. W. Bessel // *Astronomische Nachrichten*. — 1839. — Vol. 16. — Pp. 257–272.
79. *Nikonov, V. A.* Equalization results of the positions of centers of selenodetic catalogues in the Mills-2 system / V. A. Nikonov, T. P. Skobeleva // *Astronomicheskij Tsirkulyar*. — 1971. — Vol. 627. — Pp. 1–3.
80. *Nikonov, V. A.* An analysis of systematic errors in selenodesic coordinate systems / V. A. Nikonov // *Astronomicheskii Vestnik*. — 1984. — Vol. 18, no. 2. — Pp. 66–72.
81. *Никонов, В. А.* Оценка точности высот селенодезических каталогов / В. А. Никонов, Т. П. Скобелева // *Астрон. циркуляр*. — 1970. — no. 582. — P. 3.

82. *Гаврилов, И. В.* Сводный каталог селеноцентрических положений 2580 базисных точек на Луне / И. В. Гаврилов, В. С. Кислюк // *Киев, «Наукова думка»*. — 1970.
83. *Кислюк, В. С.* Об уточнении координаты  $\zeta$  кратеров видимого полушария Луны по данным съемки КА «Зонд-8» / В. С. Кислюк // *Космические исследования*. — 1975. — Т. 13, № 3. — С. 415–422.
84. *Гаврилов, И. В.* Сводная система селенодезических координат 4900 точек лунной поверхности / И. В. Гаврилов, В. С. Кислюк, А. С. Дума // *Киев: Наукова думка*. — 1977. — С. 172.
85. *Липский, Ю. Н.* Единая система селенодезических координат из девяти каталогов на видимом полушарии Луны / Ю. Н. Липский, В. А. Никонов, Т. П. Скобелев. — М.: Наука, 1973. — С. 1–384.
86. *Валеев, С. Г.* Эфемеридное время и точность селенодезических контрольных систем / С. Г. Валеев // *Известия АОЭ*. — 1968. — № 36. — С. 169–184.
87. *Быстров, Н. Ф.* Автоматизация астрометрических измерений снимков Луны при помощи фотоэлектрического прибора / Н. Ф. Быстров // *Астрономический журнал*. — 1962. — Т. 39, № 1. — С. 146–150.
88. *Быстров, Н. Ф.* Использование длиннофокусного горизонтального телескопа с целостатной установкой для позиционных фотографических наблюдений Луны в Пулковке / Н. Ф. Быстров // *Известия ГАО АН СССР*. — 1976. — № 194. — С. 158–159.
89. *Быстров, Н. Ф.* Позиционные наблюдения Луны на 8-метровом горизонтальном телескопе АОЭ / Н. Ф. Быстров, Н. Г. Ризванов // *Сборник трудов 18-й Астрометрической конференции СССР*. — 1972. — С. 325–327.
90. *Ризванов, Н. Г.* Позиционные наблюдения Луны с горизонтальным телескопом на обсерватории им. В.П. Энгельгардта / Н. Г. Ризванов // *Труды 18-й Астрометрической конференции СССР*. — 1972. — С. 321–324.
91. *Ризванов, Н. Г.* Применение длиннофокусного горизонтального телескопа с целостатом для позиционных наблюдений Луны фотографическим методом / Н. Г. Ризванов. — Наука, 1965. — С. 56–57.

92. *Schimerman, L. A.* The expanding Apollo control system / L. A. Schimerman // *Appendix. Apollo.* — 1976. — Vol. 15.
93. *Davies, M. E.* A unified lunar control network: The near side / M. E. Davies, T. R. Colvin, D. L. Meyer // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth.* — 1987. — Vol. 92, no. B13. — Pp. 14177–14184.
94. *Cook, A. C.* Lunar polar topography derived from Clementine stereoimages / A. C. Cook, T. R. Watters, M. S. Robinson, P. D. Spudis, D. B. J. Bussey // *Journal of Geophysical Research: Planets.* — 2000. — Vol. 105, no. E5. — Pp. 12023–12033.
95. *Malin, M.* Clementine high resolution camera mosaicking project / M. Malin, M. Revine // *NASA STI/Recon Technical Report N.* — 1998. — Vol. 1. — P. 00259.
96. *Schimerman, L. A.* Relationship of spacecraft and earthbased selenodetic systems / L. A. Schimerman, W. D. Cannel, D. Meyer // *Def. Mapp. Agency, Aerosp. Cent., St. Louis, Mo.* — 1973.
97. *Andreev, A.* The Physical Surface of the Moon: A Digital Model Based on Satellite Altimetry / A. Andreev, E. Akhmedshina, L. Nefediev, Y. A. Nefedyev, N. Y. Demina // *Astronomy Reports.* — 2021. — Vol. 65, no. 5. — Pp. 435–444.
98. *Turcotte, D. L.* A fractal interpretation of topography and geoid spectra on the Earth, Moon, Venus, and Mars / D. L. Turcotte // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth.* — 1987. — Vol. 92, no. B4. — Pp. E597–E601.
99. *Stepinski, T. F.* Martian geomorphology from fractal analysis of drainage networks / T. F. Stepinski, M. L. Collier, P. J. McGovern, S. M. Clifford // *Journal of Geophysical Research: Planets.* — 2004. — Vol. 109, no. E2.
100. *Linkevich, A. D.* Representation of Information in Dynamical Systems: Measures, Entropy and Fractals / A. D. Linkevich // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* — 1999. — Vol. 2, no. 4. — Pp. 93–104.
101. *Massopust, P. R.* Fractal functions, fractal surfaces, and wavelets / P. R. Massopust. — Academic Press, 2016.

102. *Nefed'eva, D. L.* Structural analysis of the diffusion violations in the ischemic focus of the patients with impaired carbohydrate metabolism / D. L. Nefed'eva, A. R. Sakhbieva, L. A. Nefediev, D. R. Khasanova // *International Journal of Development Research*. — 2016. — Vol. 06, no. 10. — Pp. 9760–9764.
103. *Ranguelov, B.* Mercury's DEM and FAG fractal structure–indicator for meteorite bombardment by different density space bodies / B. Ranguelov, R. Iliev // *Russian Journal of Earth Sciences*. — 2019. — Vol. 19, no. 6.
104. The 1: 2,500,000-scale geologic map of the global Moon / J. Ji, D. Guo, J. Liu, S. Chen, Z. Ling, X. Ding, K. Han et al. // *Science Bulletin*. — 2022.
105. *Racca, G. D.* Moon surface thermal characteristics for moon orbiting spacecraft thermal analysis / G. D. Racca // *Planetary and Space Science*. — 1995. — Vol. 43, no. 6. — Pp. 835–842.

## Приложение А

В таблице А.1 приведен фрагмент цифровой базы данных, содержащий прямоугольные ( $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ) и сферические ( $\lambda$ ,  $\beta$ ,  $R$ ) координаты объектов с номерами от 1000 до 1400.

Таблица А.1. Прямоугольные и сферические координаты объектов с номерами от 1000 до 1400, входящих в цифровую базу данных

№ объекта	$\xi$	$\eta$	$\zeta$	$\lambda$	$\beta$	$R$
1000	0.02147	0.41455	-0.90977	178.64811	24.49106	1738.09
1001	0.01631	0.72319	-0.69106	178.64799	46.29350	1738.82
1002	0.01502	0.77168	-0.63604	178.64722	50.49587	1738.33
1003	0.02145	0.41815	-0.90819	178.64702	24.71628	1738.20
1004	0.01212	-0.85416	-0.51332	178.64744	-58.98857	1732.21
1005	0.01675	0.70576	-0.70886	178.64638	44.86645	1738.85
1006	0.01680	0.70400	-0.71066	178.64578	44.72226	1738.91
1007	0.02119	0.44626	-0.89534	178.64423	26.48642	1739.17
1008	0.02041	0.51293	-0.86046	178.64121	30.79256	1741.49
1009	0.02171	0.40360	-0.91447	178.64002	23.80823	1737.77
1010	0.01425	0.80022	-0.60002	178.63953	53.12899	1738.60
1011	0.01401	0.80786	-0.58978	178.63922	53.86091	1738.69
1012	0.01374	0.81611	-0.57832	178.63900	54.66984	1738.69
1013	0.01297	-0.83469	-0.54480	178.63622	-56.86019	1732.60
1014	0.02208	0.37978	-0.92479	178.63228	22.32056	1738.06
1015	0.01474	0.78788	-0.61620	178.62970	51.96313	1738.69
1016	0.02039	0.52724	-0.85165	178.62850	31.75350	1741.32
1017	0.00658	0.96103	-0.27451	178.62688	74.05412	1737.21
1018	0.00661	-0.95839	-0.27454	178.62078	-74.01074	1732.81
1019	0.02228	0.38507	-0.92258	178.61659	22.64893	1738.04
1020	0.02253	0.36310	-0.93138	178.61429	21.29273	1737.94
1021	0.02422	0.00898	-1.00082	178.61370	0.51393	1740.10
1022	0.01505	0.78374	-0.62136	178.61251	51.58395	1738.59
1023	0.01483	0.79185	-0.61104	178.60970	52.33586	1738.64
1024	0.02440	0.02307	-1.00069	178.60322	1.32028	1740.28
1025	0.02444	-0.00636	-1.00084	178.60114	-0.36398	1740.11
1026	0.00900	0.92906	-0.36809	178.59937	68.38086	1736.99
1027	0.02162	0.47071	-0.88373	178.59857	28.03444	1740.72
1028	0.01545	0.77551	-0.63141	178.59831	50.83958	1738.39

*Продолжение таблицы на след. стр.*

Продолжение таблицы А.1

№ объекта	$\xi$	$\eta$	$\zeta$	$\lambda$	$\beta$	$R$
1029	0.02150	0.48137	-0.87807	178.59736	28.72492	1740.87
1030	0.02205	0.43891	-0.89886	178.59475	26.01929	1739.04
1031	0.00041	0.99906	-0.01691	178.61108	89.03002	1736.72
1032	0.02163	0.47840	-0.87976	178.59160	28.52940	1740.98
1033	0.02458	0.04994	-0.99961	178.59140	2.85923	1740.11
1034	0.01597	0.76006	-0.64946	178.59140	49.47805	1737.88
1035	0.01625	0.75135	-0.65945	178.58842	48.71838	1737.81
1036	0.01582	0.76761	-0.64071	178.58558	50.14028	1738.09
1037	0.02245	0.41655	-0.90885	178.58499	24.61662	1738.12
1038	0.01676	0.73559	-0.67752	178.58295	47.34444	1738.45
1039	0.02206	0.45787	-0.88977	178.57976	27.22290	1739.68
1040	0.01487	0.80061	-0.59947	178.57906	53.16690	1738.59
1041	0.02479	0.07700	-0.99818	178.57734	4.40973	1740.62
1042	0.01660	0.74373	-0.66830	178.57711	48.04902	1738.13
1043	0.02485	0.03577	-1.00021	178.57679	2.04754	1740.11
1044	0.02488	0.09009	-0.99707	178.57059	5.16133	1740.60
1045	0.02123	0.52949	-0.85026	178.56969	31.90412	1741.36
1046	0.02498	0.06221	-0.99907	178.56772	3.56198	1740.39
1047	0.02494	0.10316	-0.99592	178.56549	5.91192	1740.81
1048	0.01639	-0.75212	-0.65385	178.56407	-48.98926	1732.42
1049	0.00259	-0.99311	-0.10309	178.56082	-84.07177	1735.41
1050	0.01727	0.72738	-0.68662	178.55919	46.64211	1738.82
1051	0.02499	0.13011	-0.99329	178.55881	7.46029	1741.73
1052	0.01796	0.70102	-0.71356	178.55819	44.48303	1738.90
1053	0.02509	0.11714	-0.99468	178.55507	6.71447	1741.35
1054	0.01653	0.75564	-0.65454	178.55334	49.09165	1737.83
1055	0.02495	0.17099	-0.98624	178.55083	9.83283	1740.30
1056	0.02509	0.15762	-0.98910	178.54692	9.05149	1741.39
1057	0.02494	0.18502	-0.98295	178.54657	10.65667	1739.01
1058	0.02492	0.19729	-0.98010	178.54351	11.37772	1738.22
1059	0.02476	-0.23447	-0.97311	178.54247	-13.54292	1740.30
1060	0.01770	0.71876	-0.69573	178.54266	45.92351	1738.94
1061	0.02523	0.14441	-0.99138	178.54217	8.28509	1741.85
1062	0.01839	0.69256	-0.72204	178.54102	43.79686	1739.25
1063	0.02492	0.20947	-0.97757	178.53974	12.09042	1738.22
1064	0.00874	0.93874	-0.34276	178.53934	69.93546	1737.05
1065	0.01796	0.71017	-0.70449	178.53964	45.22074	1738.94
1066	0.00396	-0.98521	-0.15518	178.53820	-81.04604	1733.52
1067	0.01866	0.68373	-0.73061	178.53697	43.09224	1739.51

Продолжение таблицы на след. стр.

Продолжение таблицы А.1

№ объекта	$\xi$	$\eta$	$\zeta$	$\lambda$	$\beta$	$R$
1068	0.02469	0.25785	-0.96620	178.53620	14.93765	1738.65
1069	0.02485	0.23374	-0.97241	178.53612	13.51163	1738.82
1070	0.02496	0.22141	-0.97512	178.53373	12.78858	1738.54
1071	0.01892	0.67457	-0.73917	178.53376	42.37438	1739.64
1072	0.00910	0.93266	-0.35536	178.53310	69.13602	1734.81
1073	0.01247	0.87354	-0.48631	178.53114	60.88680	1737.86
1074	0.01919	0.66501	-0.74724	178.52890	41.65827	1738.95
1075	0.02491	0.24578	-0.96957	178.52829	14.21999	1739.05
1076	0.02480	0.26934	-0.96277	178.52444	15.62431	1738.17
1077	0.01299	-0.85978	-0.50376	178.52289	-59.62492	1732.15
1078	0.02260	0.48449	-0.87630	178.52265	28.92933	1740.83
1079	0.01971	0.64609	-0.76353	178.52128	40.22809	1738.79
1080	0.02240	0.50044	-0.86743	178.52076	29.97335	1741.03
1081	0.00724	0.95986	-0.28053	178.52162	73.70326	1738.17
1082	0.02474	0.29379	-0.95556	178.51691	17.08482	1738.12
1083	0.02059	0.60722	-0.79538	178.51712	37.35008	1739.64
1084	0.01233	-0.87571	-0.47565	178.51509	-61.48292	1732.24
1085	0.02412	0.36503	-0.93056	178.51523	21.41201	1737.90
1086	0.02001	0.63665	-0.77193	178.51511	39.50469	1739.49
1087	0.02487	0.28177	-0.95913	178.51467	16.36635	1738.05
1088	0.02024	0.62707	-0.77987	178.51333	38.79229	1739.68
1089	0.02449	0.32935	-0.94332	178.51285	19.24009	1737.16
1090	0.02045	0.61715	-0.78765	178.51275	38.07051	1739.56
1091	0.02471	0.30579	-0.95156	178.51248	17.80952	1737.74
1092	0.01962	0.65547	-0.75515	178.51170	40.94840	1738.34
1093	0.02461	0.31756	-0.94730	178.51184	18.52669	1737.08
1094	0.02441	0.34120	-0.93927	178.51132	19.95789	1737.44
1095	0.02433	0.35309	-0.93502	178.50945	20.68155	1737.69
1096	0.02413	0.37672	-0.92600	178.50731	22.13094	1738.08
1097	0.02151	0.56657	-0.82527	178.50697	34.46157	1740.30
1098	0.02240	0.51520	-0.85907	178.50637	30.94330	1741.52
1099	0.02094	0.59723	-0.80284	178.50593	36.63611	1739.55
1100	0.02389	0.39990	-0.91607	178.50613	23.57599	1737.82
1101	0.02295	0.48009	-0.87874	178.50395	28.64129	1740.88
1102	0.02136	0.57668	-0.81792	178.50406	35.17681	1739.85
1103	0.02407	0.38832	-0.92110	178.50310	22.85246	1737.92
1104	0.02175	0.55621	-0.83243	178.50330	33.74088	1740.52
1105	0.02118	0.58699	-0.81035	178.50281	35.90900	1739.55
1106	0.01373	-0.84696	-0.52524	178.50260	-58.18622	1732.36

Продолжение таблицы на след. стр.

Продолжение таблицы А.1

№ объекта	$\xi$	$\eta$	$\zeta$	$\lambda$	$\beta$	$R$
1107	0.02233	0.52435	-0.85346	178.50125	31.55705	1741.43
1108	0.02384	0.41151	-0.91101	178.50098	24.30169	1737.97
1109	0.02217	0.53501	-0.84667	178.50006	32.27989	1741.21
1110	0.02252	0.51341	-0.86015	178.50025	30.82367	1741.53
1111	0.02331	0.45740	-0.88992	178.49957	27.19421	1739.59
1112	0.02317	0.46890	-0.88450	178.49945	27.92127	1740.48
1113	0.02199	0.54666	-0.83890	178.49846	33.08084	1740.77
1114	0.01316	-0.86085	-0.50192	178.49809	-59.74704	1732.15
1115	0.02287	0.49131	-0.87248	178.49847	29.37627	1740.82
1116	0.02365	0.43457	-0.90078	178.49604	25.74668	1738.81
1117	0.02351	0.44610	-0.89538	178.49593	26.47572	1739.20
1118	0.02379	0.42311	-0.90592	178.49572	25.02736	1738.34
1119	0.02190	0.55459	-0.83360	178.49509	33.62651	1740.65
1120	0.02206	0.54559	-0.83967	178.49506	33.00546	1740.88
1121	0.02280	0.50196	-0.86657	178.49286	30.07294	1741.08
1122	0.00554	0.97561	-0.21007	178.48934	77.84440	1734.60
1123	0.01841	-0.71480	-0.69409	178.48065	-45.83209	1732.04
1124	0.00768	-0.95394	-0.28918	178.47870	-73.13009	1732.60
1125	0.01817	0.73137	-0.68218	178.47428	46.98289	1738.62
1126	0.02196	0.56812	-0.82422	178.47381	34.56830	1740.34
1127	0.02341	0.48257	-0.87737	178.47160	28.80301	1740.88
1128	0.02196	0.57166	-0.82163	178.46900	34.81919	1740.14
1129	0.02195	0.57525	-0.81909	178.46495	35.07084	1740.10
1130	0.00557	-0.97557	-0.20754	178.46265	-77.98590	1733.61
1131	0.02189	0.58018	-0.81539	178.46220	35.42350	1739.79
1132	0.02376	0.47064	-0.88367	178.45981	28.03104	1740.65
1133	0.02190	0.58306	-0.81326	178.45747	35.62848	1739.69
1134	0.00113	-0.99797	-0.04213	178.46360	-87.58179	1736.12
1135	0.02187	0.58602	-0.81109	178.45547	35.83858	1739.63
1136	0.00889	0.94420	-0.32955	178.45475	70.75322	1738.27
1137	0.01388	-0.85346	-0.51445	178.45452	-58.90998	1732.22
1138	0.00561	-0.97578	-0.20765	178.45244	-77.98217	1734.01
1139	0.01323	-0.86829	-0.48890	178.44991	-60.60888	1732.12
1140	0.01300	-0.87602	-0.47493	178.43207	-61.52689	1732.13
1141	0.01960	-0.69578	-0.71330	178.42603	-44.27683	1732.26
1142	0.02164	0.61872	-0.78645	178.42384	38.18248	1739.65
1143	0.00707	-0.96313	-0.25675	178.42267	-75.06788	1732.52
1144	0.00786	0.95881	-0.28363	178.41262	73.51503	1737.95
1145	0.01229	-0.89381	-0.43953	178.39833	-63.80554	1731.34

Продолжение таблицы на след. стр.

Продолжение таблицы А.1

№ объекта	$\xi$	$\eta$	$\zeta$	$\lambda$	$\beta$	$R$
1146	0.00856	-0.94877	-0.30476	178.39112	-72.18558	1732.11
1147	0.01967	0.71440	-0.70022	178.39092	45.56301	1739.02
1148	0.01464	0.85526	-0.51813	178.38151	58.78172	1738.22
1149	0.02014	0.70296	-0.71164	178.37891	44.63697	1738.96
1150	0.01529	-0.83823	-0.53920	178.37571	-57.23796	1732.53
1151	0.01655	-0.80896	-0.58288	178.37361	-54.21517	1733.26
1152	0.02461	0.50260	-0.86623	178.37264	30.11294	1741.20
1153	0.02472	0.49852	-0.86838	178.36941	29.84927	1740.89
1154	0.01657	-0.81015	-0.58106	178.36655	-54.33993	1733.09
1155	0.02176	0.64749	-0.76219	178.36469	40.33680	1738.67
1156	0.02176	0.65083	-0.75911	178.35806	40.59682	1738.36
1157	0.02101	0.68806	-0.72634	178.34313	43.43774	1739.35
1158	0.00021	0.99970	-0.00738	178.37007	89.57687	1737.63
1159	0.02167	0.66641	-0.74602	178.33617	41.76200	1739.07
1160	0.02162	0.66990	-0.74316	178.33362	42.02011	1739.42
1161	0.00709	-0.96716	-0.24187	178.32095	-75.95350	1732.83
1162	0.02206	0.66982	-0.74322	178.29987	42.01391	1739.42
1163	0.02157	0.68815	-0.72619	178.29865	43.44673	1739.29
1164	0.00090	0.99860	-0.03015	178.29019	88.26987	1736.46
1165	0.02488	0.55092	-0.83598	178.29530	33.37367	1740.70
1166	0.02217	-0.66843	-0.73960	178.28304	-42.09360	1733.14
1167	0.01256	-0.90553	-0.41573	178.26951	-65.33017	1731.98
1168	0.02636	-0.48329	-0.87274	178.26998	-28.96494	1734.57
1169	0.01653	0.83849	-0.54521	178.26340	56.95490	1738.61
1170	0.02674	-0.46783	-0.88115	178.26180	-27.95431	1734.62
1171	0.02620	-0.50080	-0.86287	178.26082	-30.11894	1734.65
1172	0.02587	-0.51998	-0.85150	178.25979	-31.39914	1734.71
1173	0.02737	-0.43469	-0.89773	178.25371	-25.82630	1734.29
1174	0.02315	0.65068	-0.75914	178.25330	40.58764	1738.29
1175	0.02762	-0.41783	-0.90550	178.25288	-24.76015	1733.99
1176	0.02716	-0.45104	-0.88983	178.25172	-26.86893	1734.60
1177	0.02879	-0.32910	-0.94331	178.25186	-19.22446	1737.20
1178	0.02928	-0.28220	-0.95920	178.25156	-16.38684	1738.59
1179	0.02409	-0.60805	-0.78893	178.25102	-37.60952	1731.76
1180	0.02564	-0.53861	-0.83966	178.25095	-32.66650	1734.43
1181	0.02900	-0.31310	-0.94893	178.24954	-18.25238	1737.53
1182	0.02529	-0.55656	-0.82742	178.24931	-33.91417	1733.77
1183	0.02168	0.70576	-0.70877	178.24797	44.86468	1738.90
1184	0.02491	-0.57413	-0.81437	178.24798	-35.17118	1732.39

Продолжение таблицы на след. стр.

Продолжение таблицы А.1

№ объекта	$\xi$	$\eta$	$\zeta$	$\lambda$	$\beta$	$R$
1185	0.01207	-0.91417	-0.39423	178.24634	-66.66242	1730.50
1186	0.02797	-0.40017	-0.91363	178.24649	-23.64356	1734.31
1187	0.02952	-0.26720	-0.96419	178.24636	-15.48241	1739.78
1188	0.02980	-0.23500	-0.97296	178.24568	-13.57252	1740.50
1189	0.03003	-0.20146	-0.98012	178.24506	-11.60986	1739.94
1190	0.02825	-0.38326	-0.92124	178.24356	-22.57904	1734.94
1191	0.02929	-0.29747	-0.95417	178.24175	-17.30761	1737.91
1192	0.02460	-0.59180	-0.80126	178.24148	-36.43619	1731.88
1193	0.02977	-0.25067	-0.96903	178.24034	-14.49687	1740.48
1194	0.03022	-0.18549	-0.98290	178.23895	-10.68207	1739.33
1195	0.02857	-0.36578	-0.92880	178.23813	-21.48628	1735.74
1196	0.00366	0.99178	-0.11899	178.23820	83.15537	1736.19
1197	0.02880	-0.34816	-0.93610	178.23780	-20.39263	1736.65
1198	0.03056	-0.12455	-0.99285	178.23699	-7.14688	1740.01
1199	0.01624	-0.84560	-0.52741	178.23631	-58.03557	1732.41
1200	0.00844	-0.95850	-0.27379	178.23433	-74.05113	1732.66
1201	0.03039	-0.16835	-0.98573	178.23413	-9.68736	1738.91
1202	0.02389	-0.62600	-0.77484	178.23401	-38.92174	1731.85
1203	0.01216	-0.91436	-0.39430	178.23359	-66.66291	1730.85
1204	0.00898	-0.95284	-0.29116	178.23344	-73.00077	1731.80
1205	0.00898	-0.95292	-0.29117	178.23350	-73.00156	1731.93
1206	0.03051	-0.15329	-0.98846	178.23206	-8.81106	1739.39
1207	0.03089	0.00893	-1.00069	178.23192	0.51104	1740.20
1208	0.01186	-0.91914	-0.38350	178.22865	-67.34252	1731.16
1209	0.03094	-0.03655	-1.00016	178.22812	-2.09189	1740.37
1210	0.03104	0.02303	-1.00051	178.22302	1.31798	1740.28
1211	0.01581	-0.85648	-0.50945	178.22248	-59.24292	1732.31
1212	0.02409	0.63178	-0.77595	178.22178	39.13904	1739.69
1213	0.00662	-0.97420	-0.21312	178.22083	-77.65437	1733.34
1214	0.00577	0.98149	-0.18558	178.21915	79.28787	1736.18
1215	0.03105	0.04990	-0.99944	178.22054	2.85691	1740.13
1216	0.02153	0.72316	-0.69101	178.21540	46.28846	1738.90
1217	0.03121	-0.00641	-1.00072	178.21366	-0.36682	1740.23
1218	0.03113	0.07699	-0.99796	178.21332	4.40934	1740.55
1219	0.00390	-0.99065	-0.12482	178.21038	-82.81522	1735.48
1220	0.01177	-0.92193	-0.37669	178.21033	-67.76585	1731.12
1221	0.03125	0.09008	-0.99683	178.20440	5.16107	1740.50
1222	0.00934	-0.95069	-0.29788	178.20408	-72.59461	1731.68
1223	0.03123	0.10313	-0.99568	178.20348	5.91058	1740.70

Продолжение таблицы на след. стр.

Продолжение таблицы А.1

№ объекта	$\xi$	$\eta$	$\zeta$	$\lambda$	$\beta$	$R$
1224	0.03114	0.13006	-0.99299	178.20380	7.45839	1741.50
1225	0.01368	-0.89586	-0.43607	178.20316	-64.03388	1731.93
1226	0.03143	0.03573	-1.00004	178.19986	2.04522	1740.14
1227	0.03145	0.06216	-0.99892	178.19670	3.55901	1740.44
1228	0.03109	0.17096	-0.98595	178.19389	9.83227	1740.09
1229	0.00696	0.97398	-0.22059	178.19282	77.23262	1735.79
1230	0.03137	0.11711	-0.99436	178.19304	6.71371	1741.10
1231	0.02498	0.61214	-0.79147	178.19226	37.70534	1739.63
1232	0.02138	0.73653	-0.67635	178.18943	47.42472	1738.43
1233	0.03106	0.18499	-0.98272	178.18970	10.65557	1738.90
1234	0.03126	0.15758	-0.98877	178.18919	9.05062	1741.12
1235	0.03134	0.14435	-0.99110	178.18883	8.28257	1741.66
1236	0.03101	0.19728	-0.97986	178.18734	11.37791	1738.11
1237	0.03098	0.20943	-0.97736	178.18447	12.08862	1738.15
1238	0.00844	0.96187	-0.26636	178.18511	74.51419	1734.81
1239	0.02133	0.73968	-0.67281	178.18417	47.69614	1738.32
1240	0.03071	0.25781	-0.96601	178.17915	14.93569	1738.61
1241	0.03091	0.23369	-0.97223	178.17902	13.50893	1738.79
1242	0.01849	-0.81015	-0.58108	178.17746	-54.33629	1733.17
1243	0.01818	0.82115	-0.57103	178.17648	55.17154	1738.70
1244	0.02131	0.74276	-0.66924	178.17620	47.96615	1738.12
1245	0.03105	0.22137	-0.97491	178.17580	12.78679	1738.46
1246	0.03088	0.24575	-0.96934	178.17536	14.21915	1738.94
1247	0.03073	0.26929	-0.96259	178.17149	15.62169	1738.14
1248	0.00782	-0.96644	-0.24474	178.16989	-75.78228	1732.85
1249	0.00852	0.96185	-0.26628	178.16737	74.51816	1734.74
1250	0.00570	-0.98113	-0.17785	178.16433	-79.72036	1733.12
1251	0.00570	-0.98113	-0.17785	178.16433	-79.72036	1733.12
1252	0.03078	0.28173	-0.95892	178.16152	16.36477	1737.97
1253	0.00571	-0.98114	-0.17774	178.15997	-79.72667	1733.10
1254	0.03069	0.29375	-0.95531	178.15997	17.08393	1737.97
1255	0.03058	0.30575	-0.95128	178.15879	17.80926	1737.54
1256	0.02528	0.61870	-0.78638	178.15873	38.18022	1739.68
1257	0.03035	0.32931	-0.94313	178.15685	19.23830	1737.11
1258	0.02998	0.36499	-0.93039	178.15439	21.40986	1737.88
1259	0.03014	0.35305	-0.93484	178.15338	20.67962	1737.65
1260	0.03054	0.31752	-0.94706	178.15301	18.52574	1736.95
1261	0.02484	0.63891	-0.76989	178.15203	39.67368	1739.45
1262	0.03031	0.34116	-0.93906	178.15131	19.95648	1737.35

Продолжение таблицы на след. стр.

Продолжение таблицы А.1

№ объекта	$\xi$	$\eta$	$\zeta$	$\lambda$	$\beta$	$R$
1263	0.02522	0.62560	-0.78085	178.15010	38.68637	1739.61
1264	0.02114	0.75574	-0.65425	178.14931	49.10221	1737.78
1265	0.02993	0.37668	-0.92583	178.14840	22.12883	1738.05
1266	0.00135	-0.99804	-0.04185	178.15239	-87.59762	1736.22
1267	0.02971	0.39986	-0.91590	178.14209	23.57388	1737.79
1268	0.02990	0.38829	-0.92093	178.14042	22.85085	1737.90
1269	0.02964	0.41149	-0.91082	178.13613	24.30111	1737.92
1270	0.02952	0.42308	-0.90573	178.13325	25.02632	1738.29
1271	0.02901	0.45737	-0.88981	178.13268	27.19118	1739.66
1272	0.02937	0.43455	-0.90060	178.13216	25.74593	1738.77
1273	0.02921	0.44607	-0.89520	178.13113	26.47449	1739.16
1274	0.02871	0.48007	-0.87858	178.12837	28.64003	1740.87
1275	0.02893	0.46887	-0.88435	178.12633	27.91923	1740.49
1276	0.00128	-0.99847	-0.03921	178.13026	-87.74995	1736.78
1277	0.02861	0.49129	-0.87234	178.12155	29.37445	1740.85
1278	0.03206	-0.21960	-0.97643	178.11943	-12.66837	1740.42
1279	0.02827	0.51338	-0.85998	178.11720	30.82221	1741.51
1280	0.02849	0.50193	-0.86640	178.11661	30.07150	1741.05
1281	0.02806	0.52432	-0.85332	178.11660	31.55472	1741.45
1282	0.01737	-0.84502	-0.52824	178.11663	-57.97570	1732.35
1283	0.02793	0.53499	-0.84652	178.11027	32.27830	1741.22
1284	0.02746	0.55617	-0.83223	178.11017	33.73996	1740.43
1285	0.02689	0.58176	-0.81406	178.10810	35.53635	1739.72
1286	0.02101	0.77161	-0.63593	178.10774	50.49068	1738.30
1287	0.01065	-0.94386	-0.32178	178.10437	-71.16519	1733.34
1288	0.02731	0.56653	-0.82511	178.10428	34.45930	1740.28
1289	0.02783	0.54556	-0.83949	178.10128	33.00429	1740.84
1290	0.02711	0.57665	-0.81776	178.10125	35.17506	1739.83
1291	0.00507	0.98551	-0.15251	178.09598	81.19834	1733.33
1292	0.02645	0.60718	-0.79518	178.09488	37.34919	1739.56
1293	0.02671	0.59719	-0.80269	178.09415	36.63354	1739.54
1294	0.01984	0.80306	-0.59611	178.09376	53.39839	1738.66
1295	0.02702	0.58695	-0.81019	178.08988	35.90669	1739.53
1296	0.00130	-0.99848	-0.03911	178.09621	-87.75566	1736.79
1297	0.02632	0.61711	-0.78747	178.08569	38.06891	1739.51
1298	0.02607	0.62704	-0.77971	178.08500	38.79049	1739.67
1299	0.00131	-0.99851	-0.03917	178.08452	-87.75227	1736.85
1300	0.02593	0.63662	-0.77177	178.07569	39.50278	1739.48
1301	0.02566	0.64607	-0.76339	178.07483	40.22586	1738.82

Продолжение таблицы на след. стр.

Продолжение таблицы А.1

№ объекта	$\xi$	$\eta$	$\zeta$	$\lambda$	$\beta$	$R$
1302	0.01445	-0.89894	-0.42970	178.07398	-64.43925	1731.96
1303	0.02485	0.67455	-0.73902	178.07412	42.37255	1739.65
1304	0.02405	0.70101	-0.71344	178.06930	44.48024	1738.96
1305	0.02518	0.66498	-0.74708	178.06960	41.65630	1738.93
1306	0.00523	0.98508	-0.15506	178.06821	81.04955	1733.27
1307	0.02469	0.68370	-0.73044	178.06405	43.09063	1739.49
1308	0.01879	-0.82757	-0.55572	178.06345	-56.10317	1732.92
1309	0.02291	0.73558	-0.67736	178.06285	47.34321	1738.46
1310	0.01385	-0.90826	-0.40944	178.06261	-65.72206	1731.80
1311	0.02579	0.64742	-0.76212	178.06186	40.33168	1738.66
1312	0.02558	0.65544	-0.75495	178.05939	40.94792	1738.28
1313	0.02446	0.69253	-0.72188	178.05935	43.79482	1739.24
1314	0.01705	-0.86010	-0.50297	178.05849	-59.66738	1732.04
1315	0.02110	0.78415	-0.62074	178.05317	51.61845	1738.67
1316	0.01880	-0.82943	-0.55282	178.05227	-56.30103	1732.81
1317	0.02338	0.72735	-0.68645	178.04930	46.64048	1738.79
1318	0.00889	-0.96213	-0.26065	178.04657	-74.83347	1732.63
1319	0.01860	-0.83457	-0.54474	178.04441	-56.85146	1732.52
1320	0.01842	-0.83801	-0.53935	178.04398	-57.21914	1732.44
1321	0.01177	-0.93529	-0.34451	178.04328	-69.76810	1732.52
1322	0.01802	-0.84547	-0.52736	178.04295	-58.03123	1732.23
1323	0.03326	-0.23427	-0.97310	178.04243	-13.52854	1740.63
1324	0.02407	0.71015	-0.70437	178.04283	45.21740	1738.99
1325	0.02286	0.74370	-0.66813	178.04040	48.04724	1738.11
1326	0.02256	0.75133	-0.65930	178.04021	48.71609	1737.82
1327	0.01881	-0.83135	-0.54986	178.04075	-56.50369	1732.74
1328	0.02059	0.79911	-0.60138	178.03908	53.02014	1738.67
1329	0.01798	-0.84724	-0.52463	178.03714	-58.21823	1732.33
1330	0.01857	-0.83646	-0.54182	178.03705	-57.05136	1732.51
1331	0.02385	0.71874	-0.69558	178.03622	45.92133	1738.96
1332	0.02889	0.54136	-0.84231	178.03561	32.71389	1741.04
1333	0.01841	-0.83998	-0.53627	178.03382	-57.42924	1732.43
1334	0.02116	0.78784	-0.61610	178.03295	51.95779	1738.72
1335	0.00031	0.99962	-0.00915	178.05957	89.47526	1737.51
1336	0.02231	0.76002	-0.64929	178.03206	49.47583	1737.84
1337	0.00134	-0.99848	-0.03912	178.03818	-87.75501	1736.79
1338	0.03435	-0.05253	-0.99891	178.03052	-3.00848	1739.63
1339	0.01830	-0.84244	-0.53226	178.03085	-57.69971	1732.30
1340	0.01853	-0.83844	-0.53888	178.03060	-57.25504	1732.63

Продолжение таблицы на след. стр.

Продолжение таблицы А.1

№ объекта	$\xi$	$\eta$	$\zeta$	$\lambda$	$\beta$	$R$
1341	0.02083	0.79612	-0.60542	178.02947	52.73201	1738.77
1342	0.01186	-0.93502	-0.34443	178.02787	-69.76688	1732.04
1343	0.02190	0.77156	-0.63598	178.02780	50.48533	1738.32
1344	0.03412	-0.13796	-0.99082	178.02773	-7.92216	1739.77
1345	0.02932	0.52963	-0.84998	178.02437	31.91211	1741.43
1346	0.01839	-0.84198	-0.53315	178.02447	-57.64221	1732.46
1347	0.01801	-0.84886	-0.52177	178.02310	-58.40693	1732.12
1348	0.02067	0.80112	-0.59870	178.02266	53.21182	1738.68
1349	0.02212	0.76760	-0.64055	178.02220	50.13874	1738.10
1350	0.02213	0.76832	-0.63972	178.01874	50.20165	1738.14
1351	0.03460	-0.03598	-1.00001	178.01838	-2.05936	1740.28
1352	0.02150	0.78373	-0.62120	178.01776	51.58226	1738.61
1353	0.02185	0.77550	-0.63123	178.01750	50.83881	1738.39
1354	0.02077	0.80020	-0.59986	178.01694	53.12692	1738.61
1355	0.02062	0.80414	-0.59465	178.01402	53.50115	1738.69
1356	0.02125	0.79186	-0.61092	178.00785	52.33306	1738.72
1357	0.02279	0.75572	-0.65431	178.00516	49.09647	1737.89
1358	0.02054	0.80785	-0.58962	178.00485	53.85912	1738.70
1359	0.03455	-0.14075	-0.99033	178.00191	-8.08410	1739.63
1360	0.02605	0.66633	-0.74593	177.99988	41.75667	1739.04
1361	0.00136	-0.99856	-0.03898	178.00178	-87.76317	1736.92
1362	0.03484	-0.12548	-0.99252	177.98960	-7.20104	1739.88
1363	0.02065	0.80899	-0.58797	177.98855	53.97373	1738.62
1364	0.02399	0.73144	-0.68195	177.98525	46.98773	1738.65
1365	0.00907	0.96440	-0.25744	177.98222	75.04493	1734.99
1366	0.02038	0.81609	-0.57816	177.98117	54.66750	1738.70
1367	0.03043	0.50803	-0.86291	177.98034	30.47148	1741.26
1368	0.01985	0.82723	-0.56232	177.97829	55.77701	1738.89
1369	0.02006	0.82353	-0.56753	177.97566	55.41089	1738.70
1370	0.01988	0.82730	-0.56224	177.97495	55.78300	1738.91
1371	0.02712	0.64205	-0.76698	177.97490	39.91557	1739.16
1372	0.01644	0.88448	-0.46508	177.97551	62.24883	1737.12
1373	0.01893	-0.84071	-0.53509	177.97388	-57.50808	1732.42
1374	0.01015	0.95800	-0.28656	177.97142	73.33699	1738.09
1375	0.01139	0.94592	-0.32135	177.97005	71.22528	1736.50
1376	0.01795	0.86223	-0.50631	177.96957	59.56241	1738.20
1377	0.01975	0.83092	-0.55687	177.96879	56.15395	1738.90
1378	0.01938	0.83820	-0.54562	177.96575	56.92167	1738.67
1379	0.00394	0.99363	-0.11093	177.96583	83.62583	1737.77

Продолжение таблицы на след. стр.

Продолжение таблицы А.1

№ объекта	$\xi$	$\eta$	$\zeta$	$\lambda$	$\beta$	$R$
1380	0.01168	0.94438	-0.32818	177.96169	70.82598	1737.83
1381	0.02294	0.76447	-0.64419	177.96052	49.86253	1738.03
1382	0.01864	0.85231	-0.52293	177.95854	58.45282	1738.30
1383	0.01822	0.85953	-0.51099	177.95791	59.25255	1738.30
1384	0.01788	0.86546	-0.50073	177.95496	59.93175	1738.16
1385	0.02488	0.71769	-0.69664	177.95459	45.83444	1738.97
1386	0.01829	0.85892	-0.51189	177.95367	59.19028	1738.20
1387	0.01519	0.90445	-0.42509	177.95349	64.81248	1737.20
1388	0.03149	0.47562	-0.88087	177.95262	28.35125	1740.82
1389	0.01891	0.84864	-0.52903	177.95285	58.04475	1738.47
1390	0.01681	0.88204	-0.47008	177.95198	61.92958	1737.45
1391	0.01610	0.89202	-0.45002	177.95105	63.21453	1736.78
1392	0.01919	0.84486	-0.53507	177.94600	57.63630	1738.50
1393	0.00697	-0.97846	-0.19413	177.94375	-78.77100	1733.85
1394	0.01757	0.87196	-0.48909	177.94260	60.69578	1737.95
1395	0.00140	-0.99855	-0.03911	177.94989	-87.75562	1736.91
1396	0.01547	0.90193	-0.43034	177.94120	64.47830	1737.15
1397	0.00426	-0.99179	-0.11816	177.93522	-83.20154	1736.04
1398	0.01669	0.88522	-0.46326	177.93668	62.36043	1736.80
1399	0.01677	-0.88145	-0.46505	177.93477	-62.16866	1732.45
1400	0.02618	0.68807	-0.72610	177.93506	43.44099	1739.27

## Приложение В

В приложении В приводятся 162 диаграммы распределения цветового фрактального параметра (ЦФП) по селенографическим широтам и долготам.

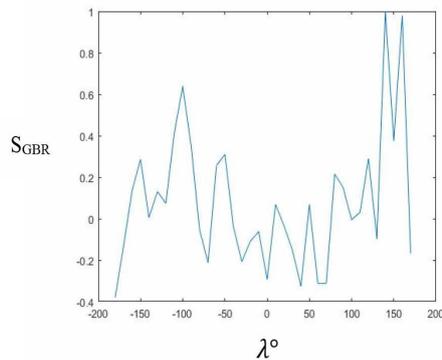


Рис. 1. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 90^\circ$

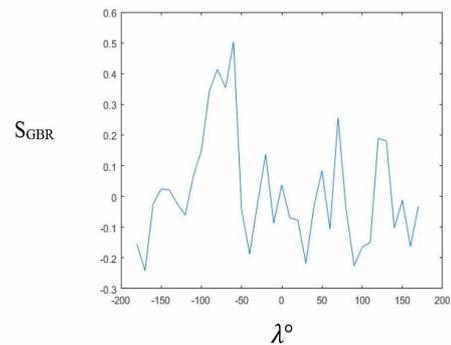


Рис. 2. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 80^\circ$

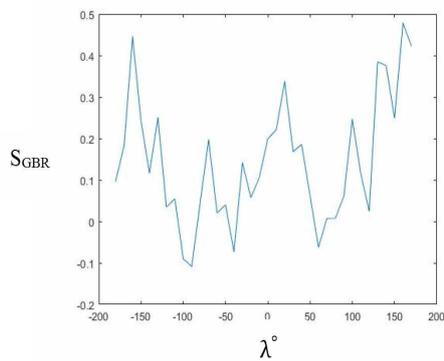


Рис. 3. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 70^\circ$

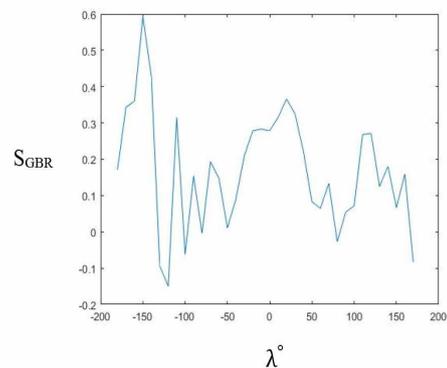


Рис. 4. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 60^\circ$

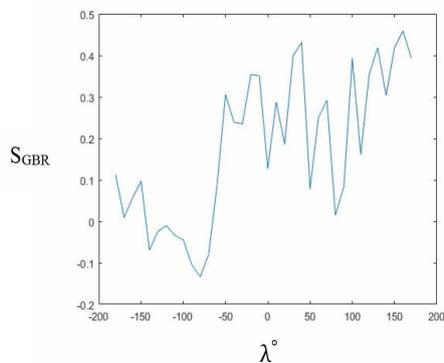


Рис. 5. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 50^\circ$

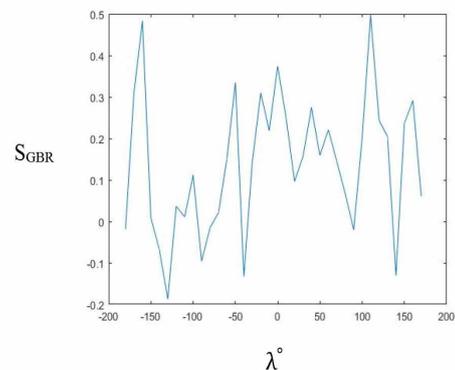


Рис. 6. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 40^\circ$

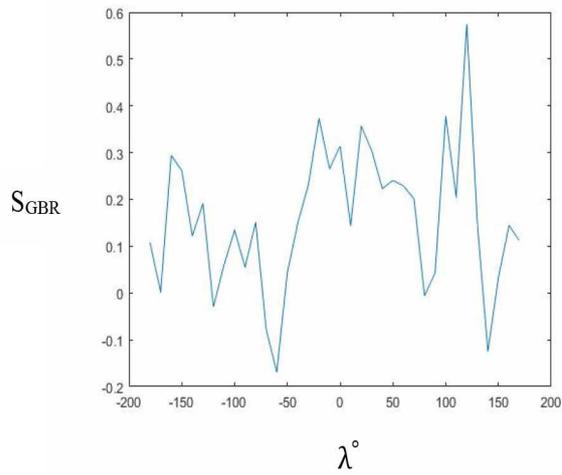


Рис. 7. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 30^\circ$

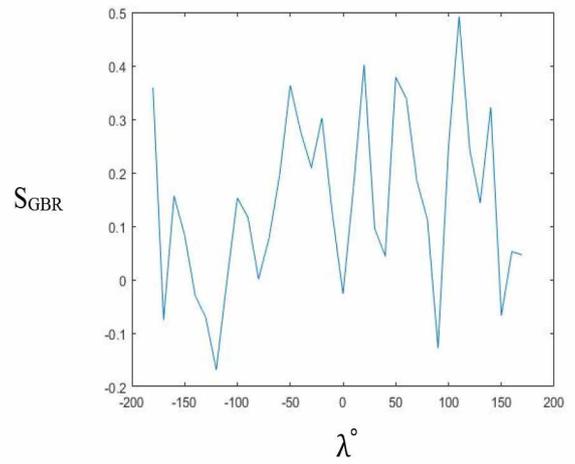


Рис. 8. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 20^\circ$

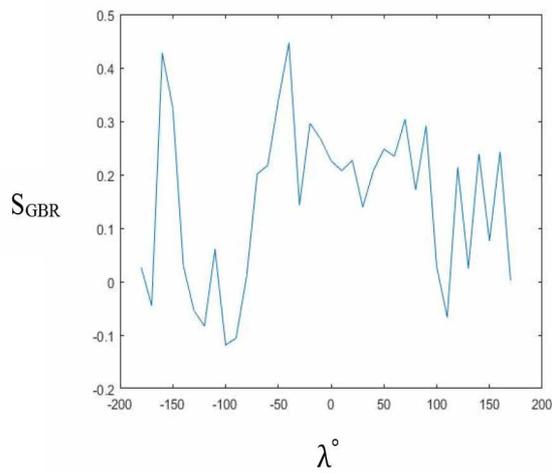


Рис. 9. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 10^\circ$

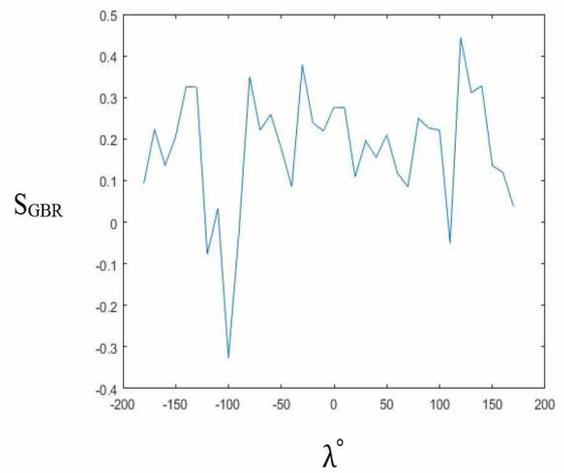


Рис. 10. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 0^\circ$

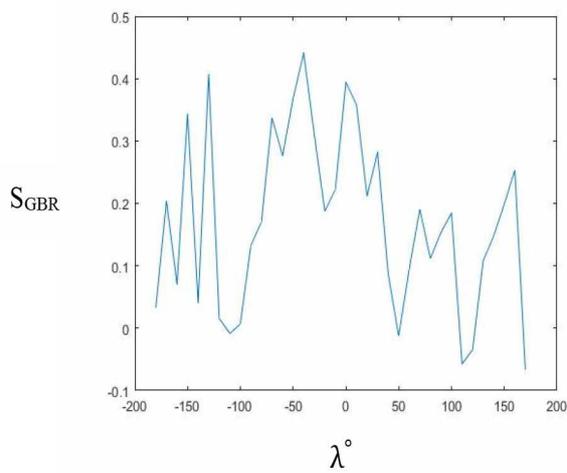


Рис. 11. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = -10^\circ$

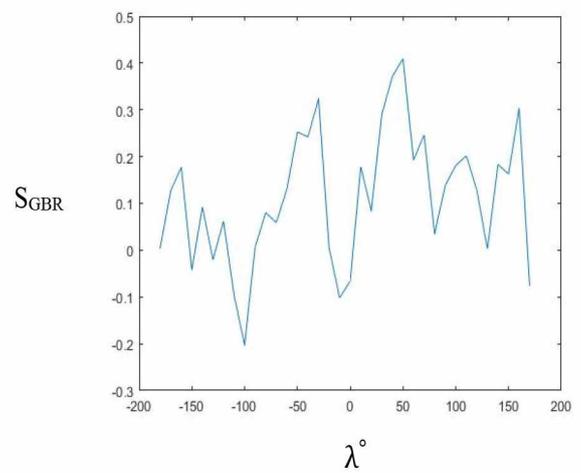


Рис. 12. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = -20^\circ$

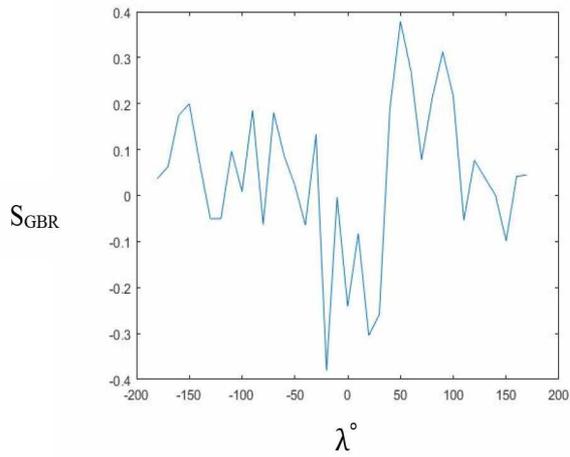


Рис. 13. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = -30^\circ$

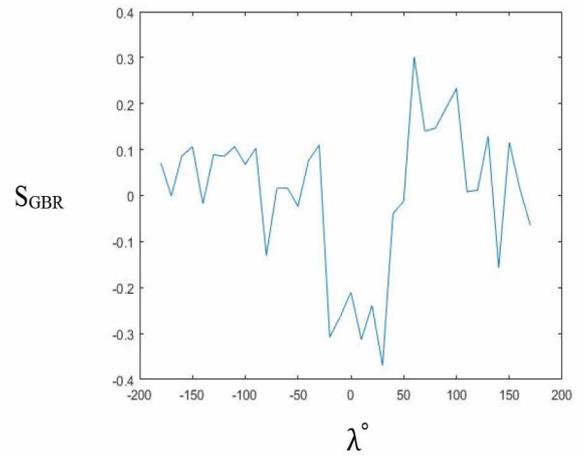


Рис. 14. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = -40^\circ$

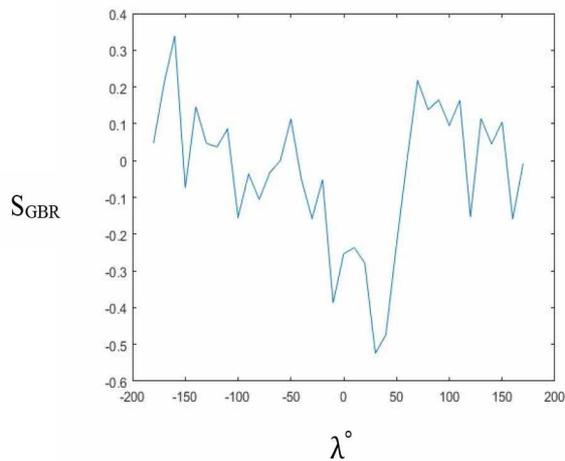


Рис. 15. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = -50^\circ$

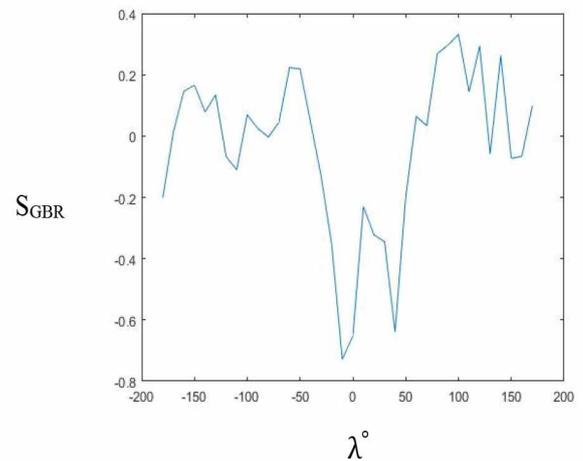


Рис. 16. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = -60^\circ$

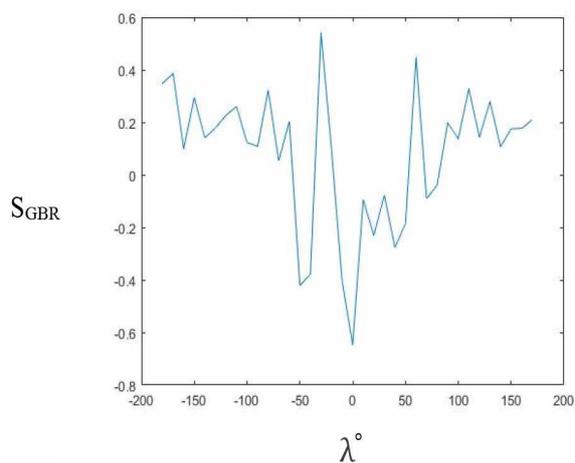


Рис. 17. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = -70^\circ$

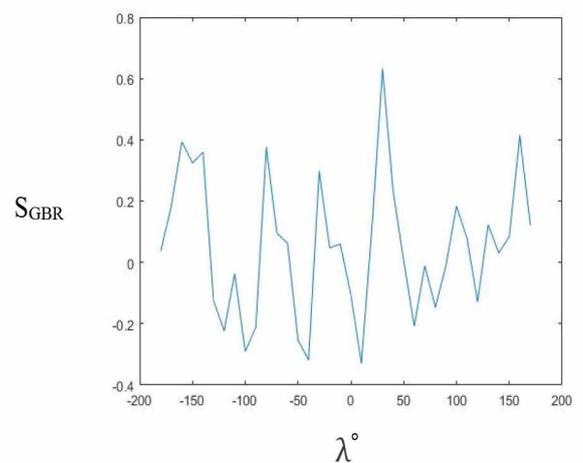


Рис. 18. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = -80^\circ$

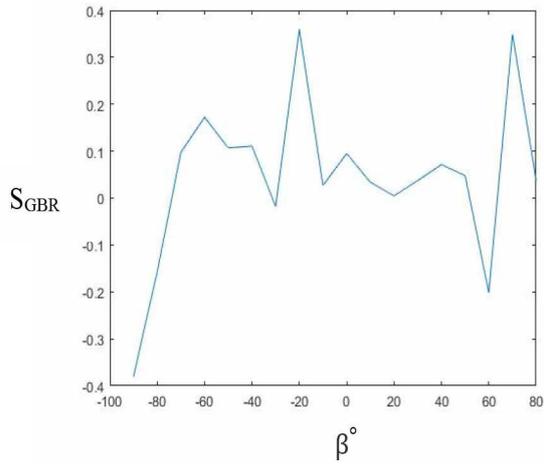


Рис. 19. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -180^\circ$

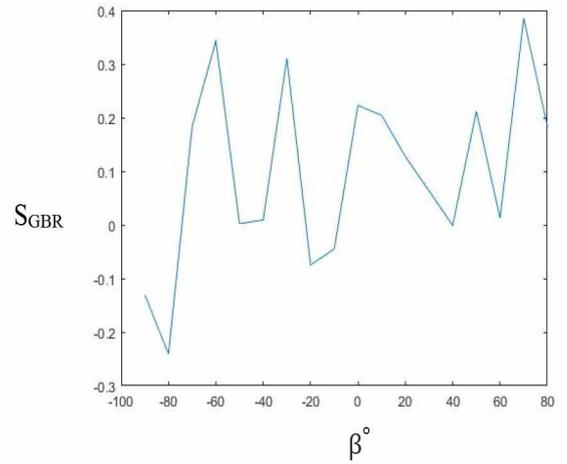


Рис. 20. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -170^\circ$

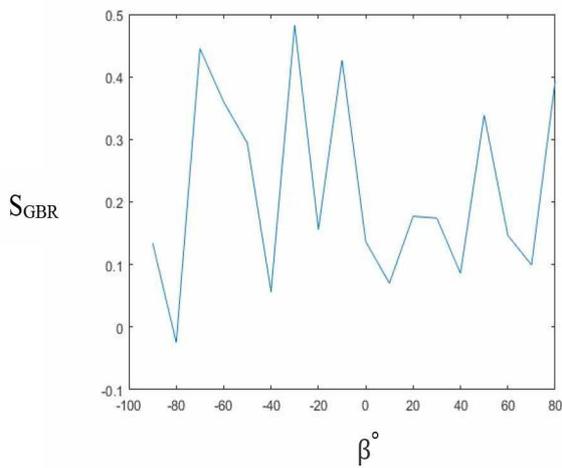


Рис. 21. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -160^\circ$

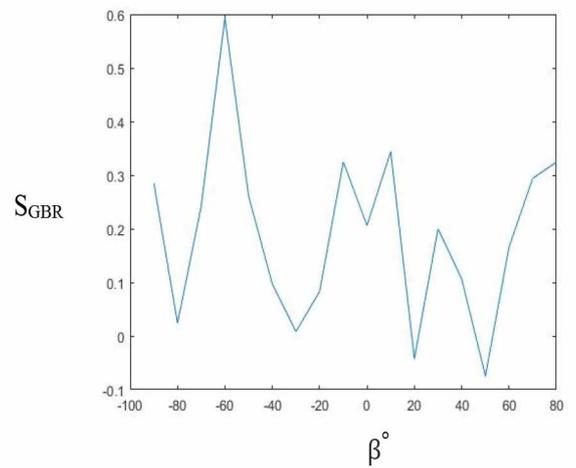


Рис. 22. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -150^\circ$

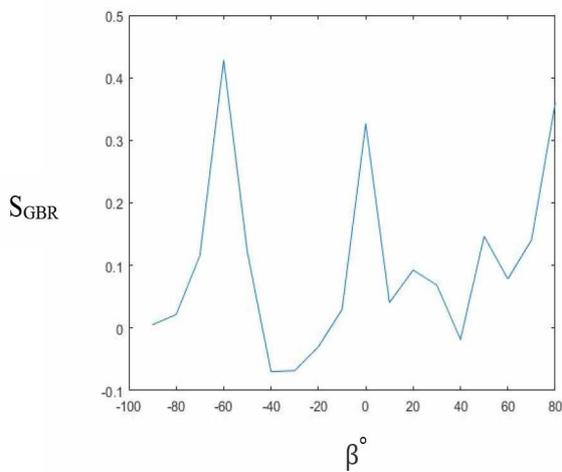


Рис. 23. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -140^\circ$

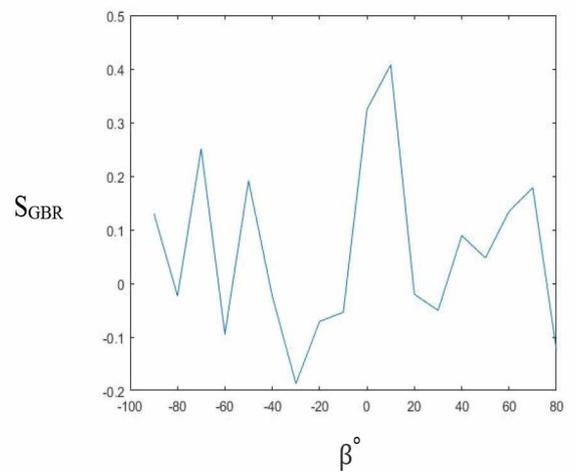


Рис. 24. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -130^\circ$

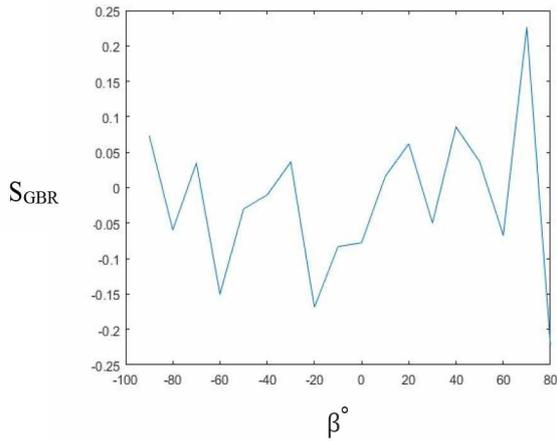


Рис. 25. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -120^\circ$

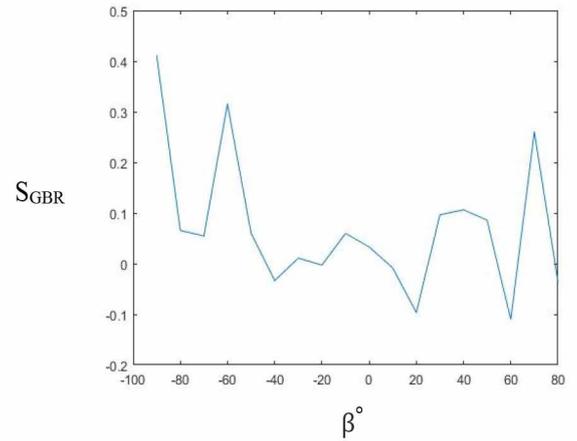


Рис. 26. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -110^\circ$

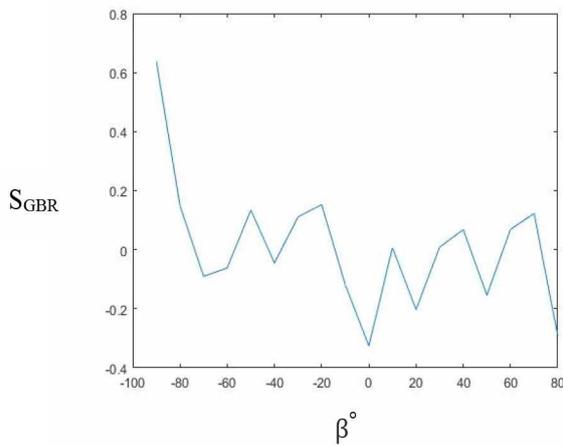


Рис. 27. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -100^\circ$

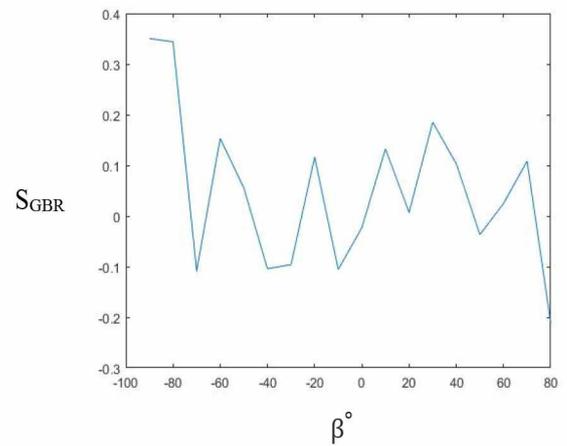


Рис. 28. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -90^\circ$

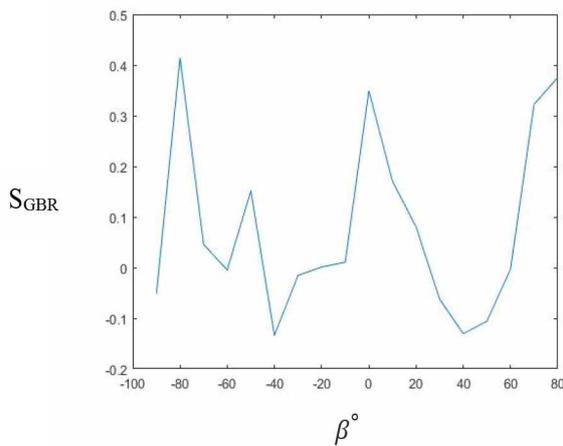


Рис. 29. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -80^\circ$

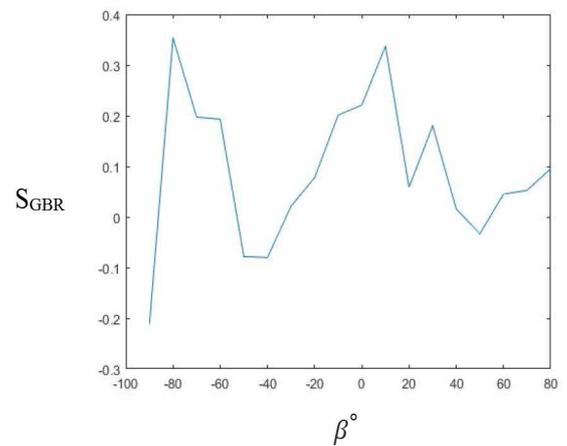


Рис. 30. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -70^\circ$

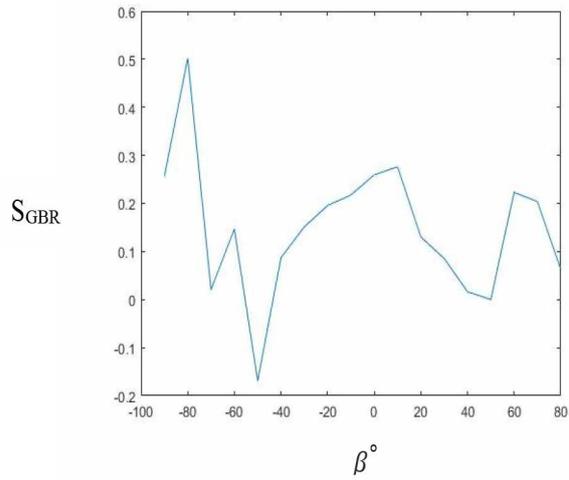


Рис. 31. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -60^\circ$

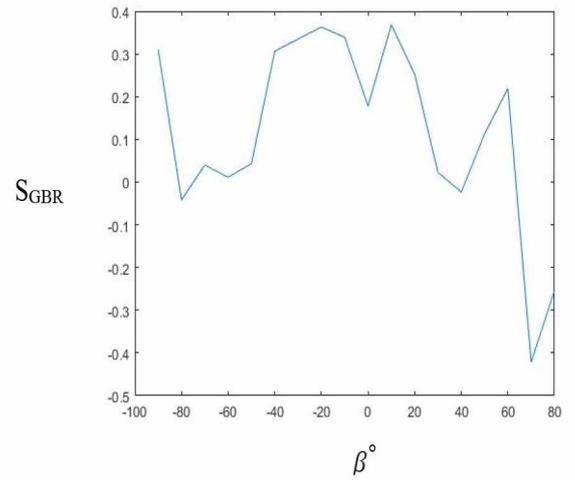


Рис. 32. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -50^\circ$

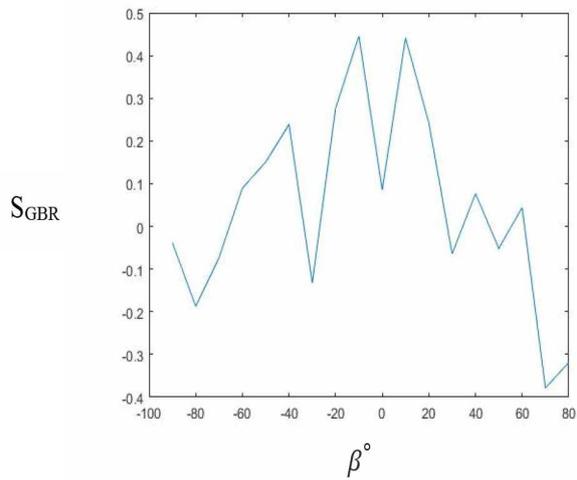


Рис. 33. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -40^\circ$

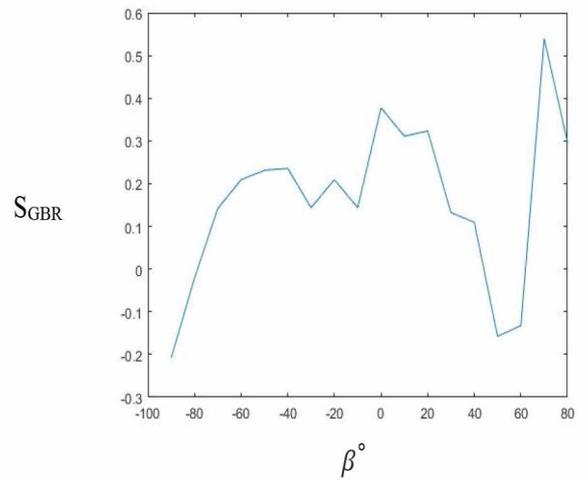


Рис. 34. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -30^\circ$

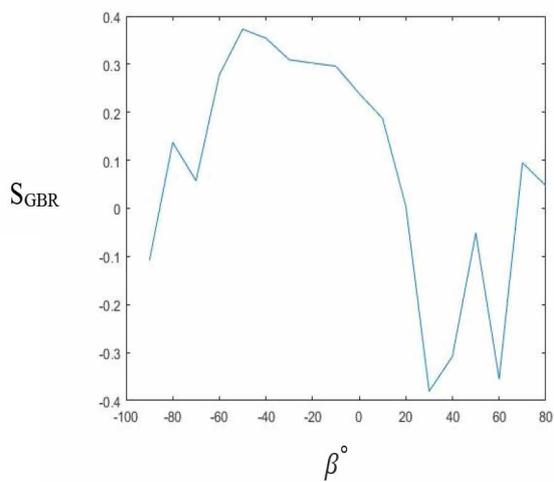


Рис. 35. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -20^\circ$

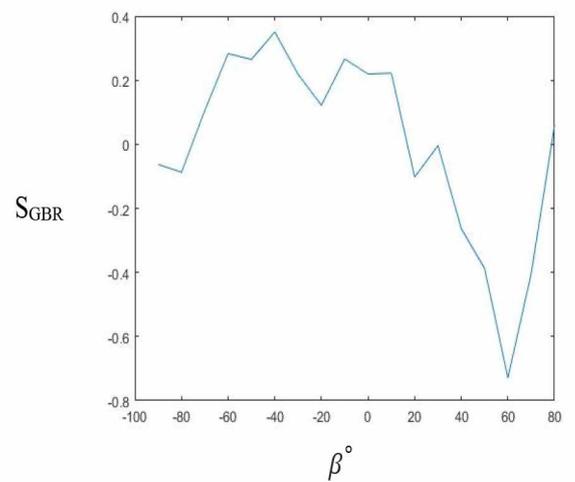


Рис. 36. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -10^\circ$

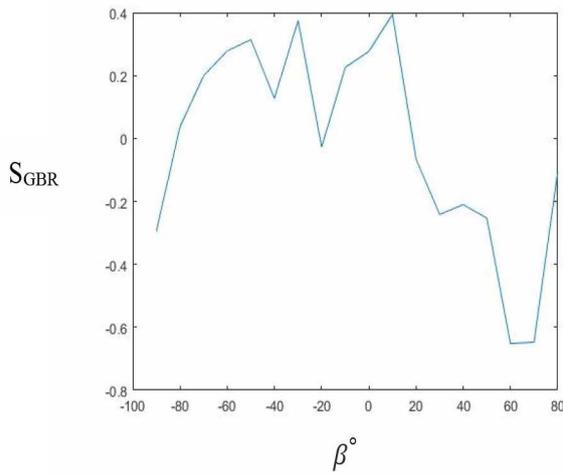


Рис. 37. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 0^\circ$

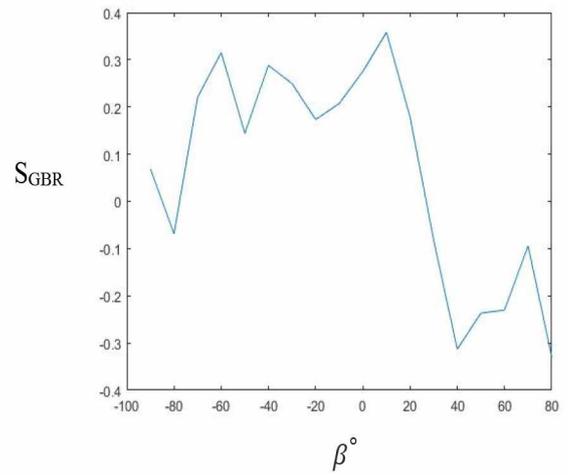


Рис. 38. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 10^\circ$

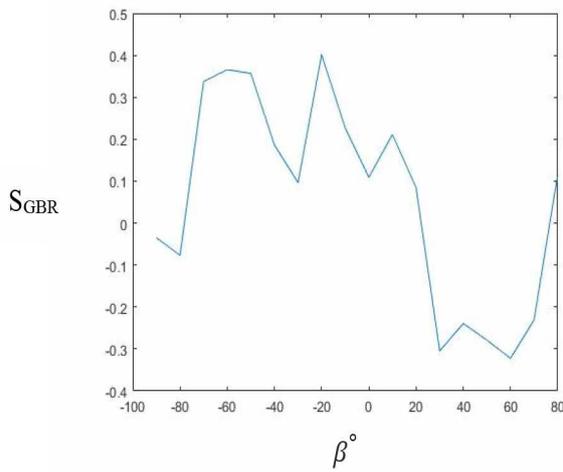


Рис. 39. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 20^\circ$

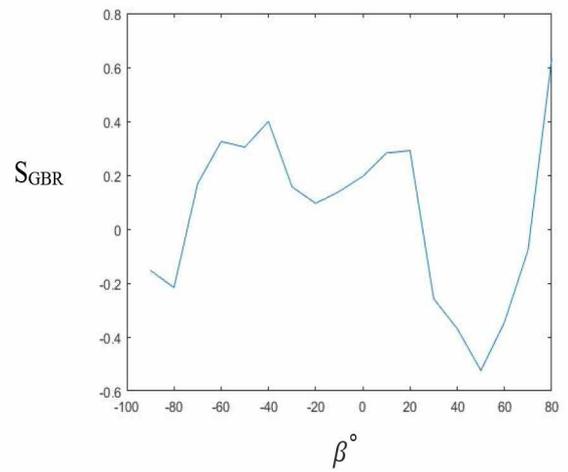


Рис. 40. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 30^\circ$

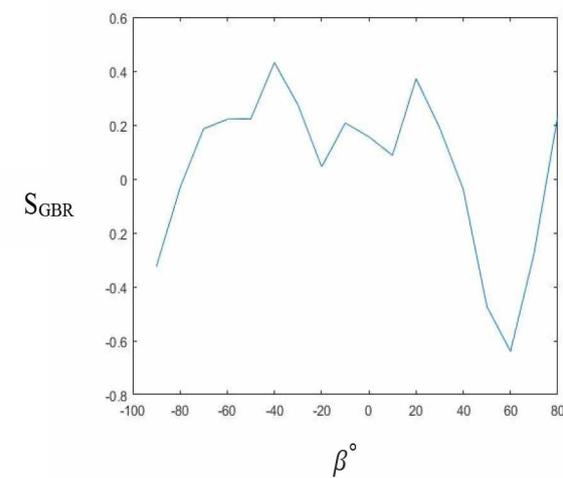


Рис. 41. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 40^\circ$

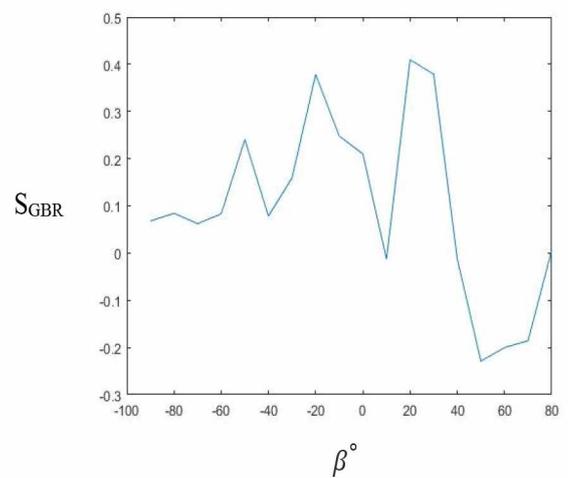


Рис. 42. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 50^\circ$

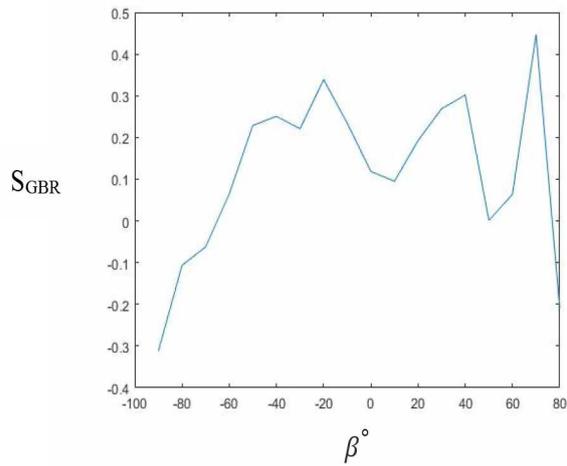


Рис. 43. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 60^\circ$

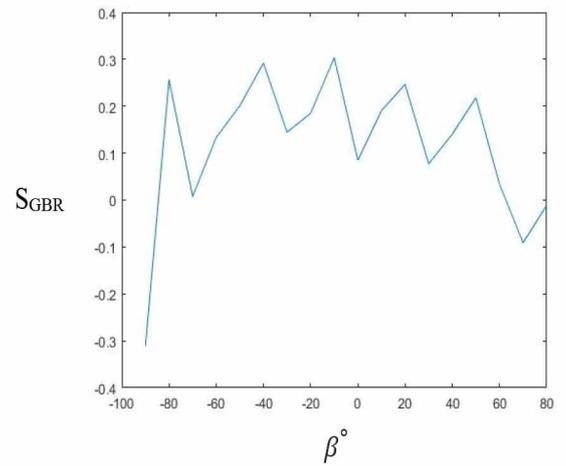


Рис. 44. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 70^\circ$

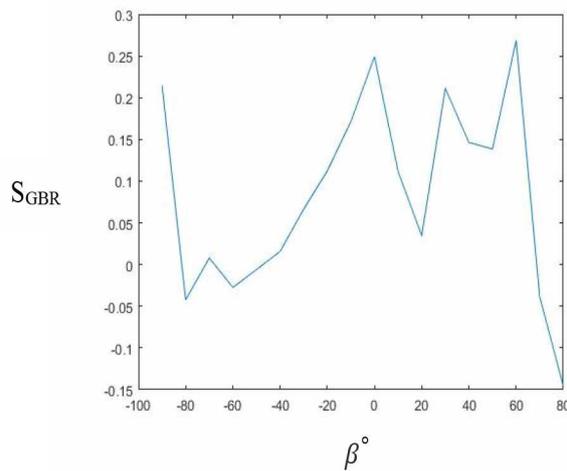


Рис. 45. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 80^\circ$

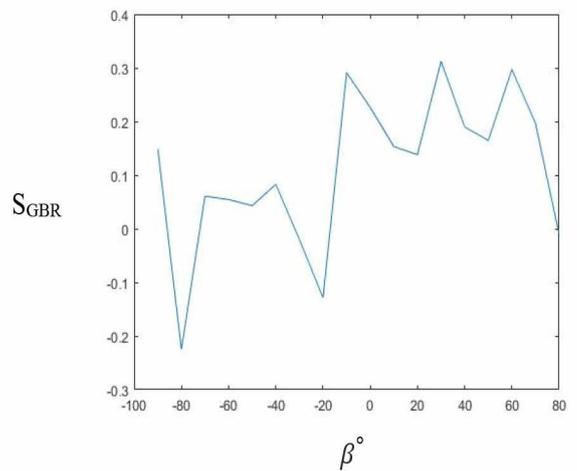


Рис. 46. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 90^\circ$

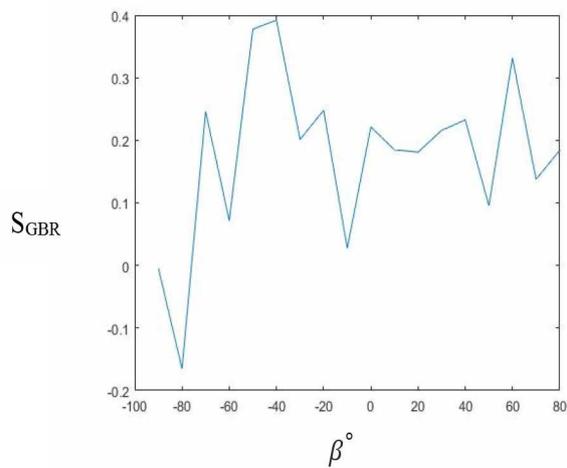


Рис. 47. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 100^\circ$

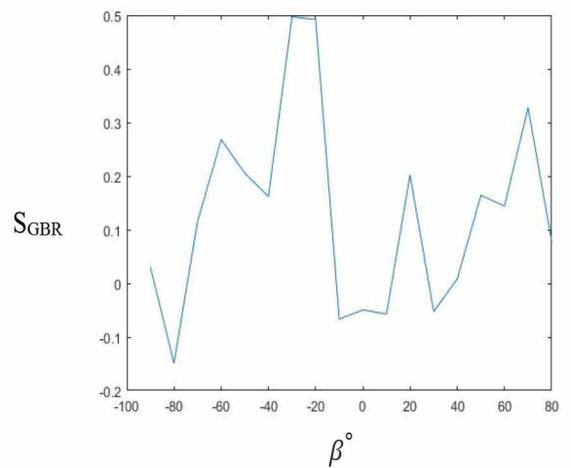


Рис. 48. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 110^\circ$

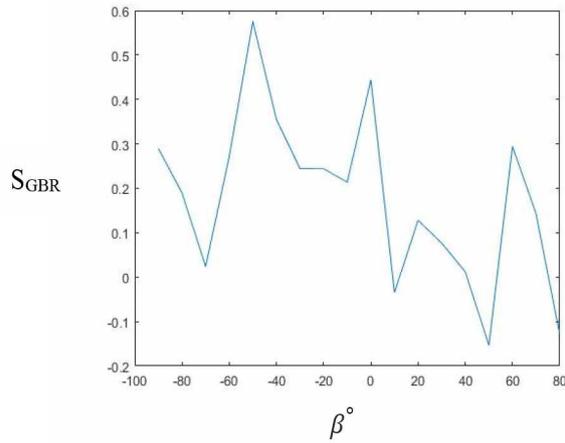


Рис. 49. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 120^\circ$

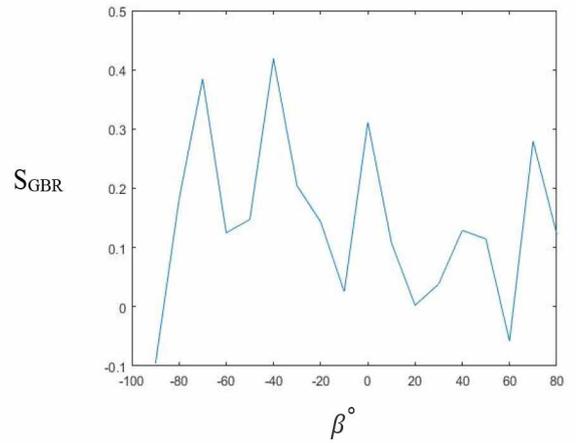


Рис. 50. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 130^\circ$

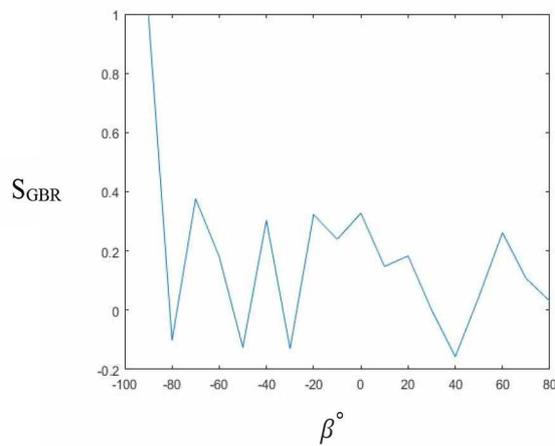


Рис. 51. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 140^\circ$

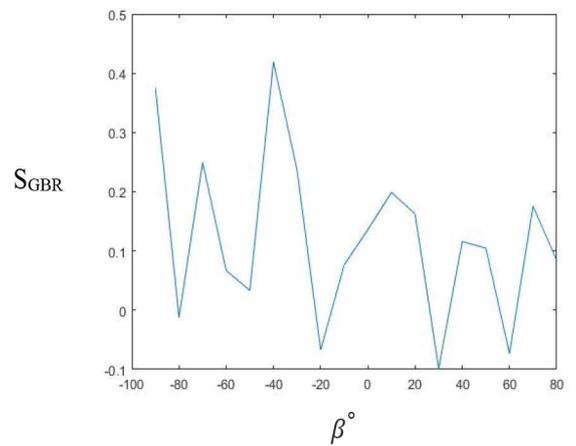


Рис. 52. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 150^\circ$

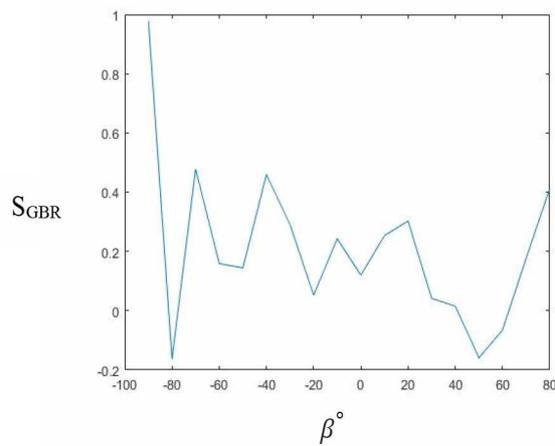


Рис. 53. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 160^\circ$

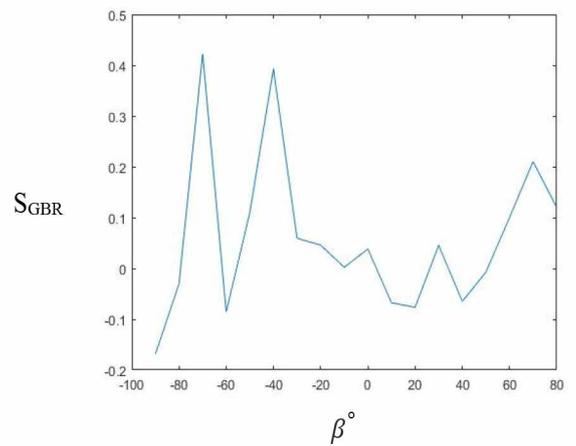


Рис. 54. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 170^\circ$

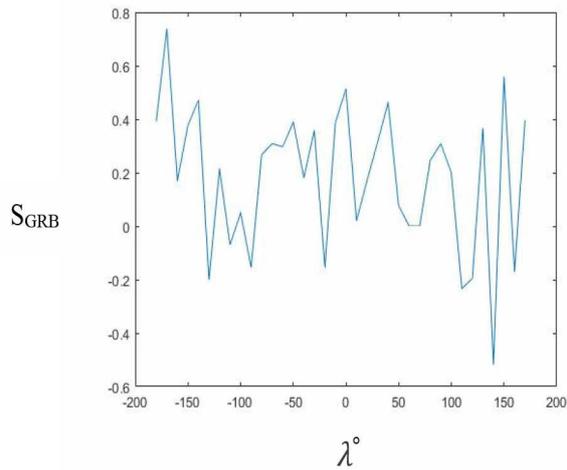


Рис. 55. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 90^\circ$

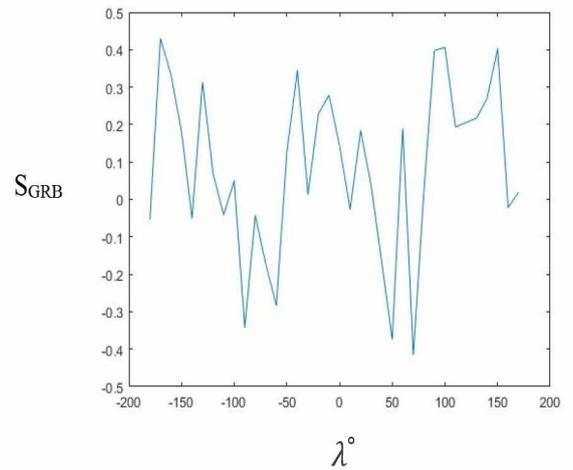


Рис. 56. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 80^\circ$

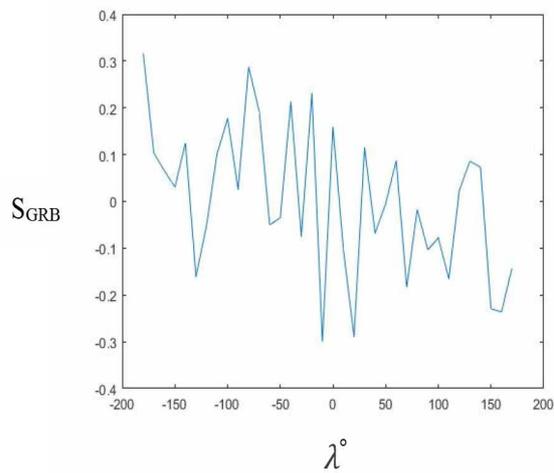


Рис. 57. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 70^\circ$

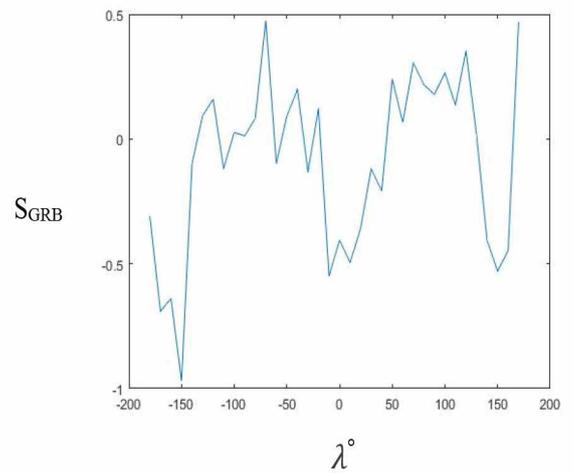


Рис. 58. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 60^\circ$

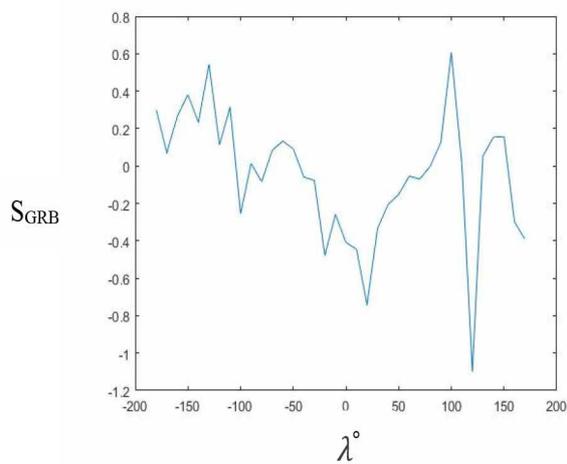


Рис. 59. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 50^\circ$

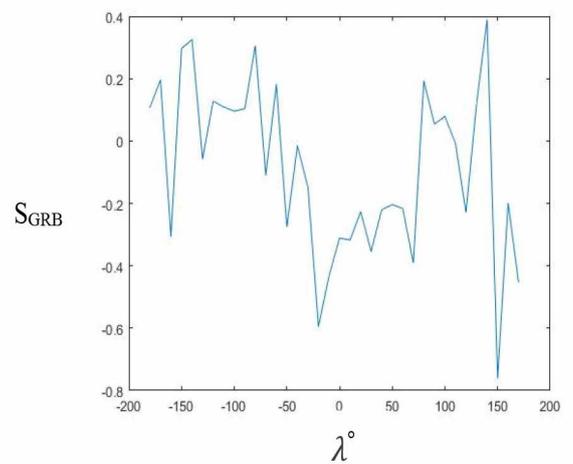


Рис. 60. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 40^\circ$

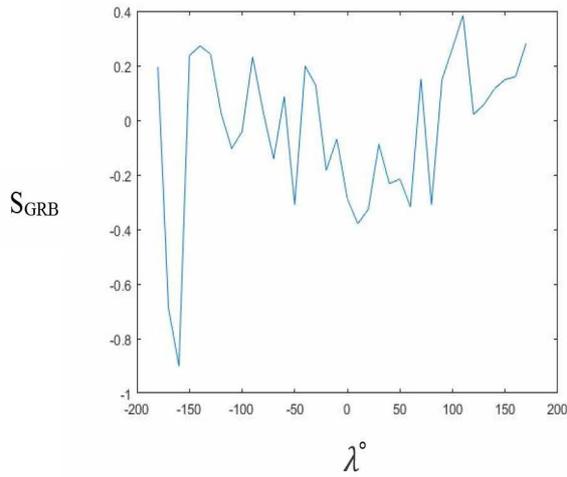


Рис. 61. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 30^\circ$

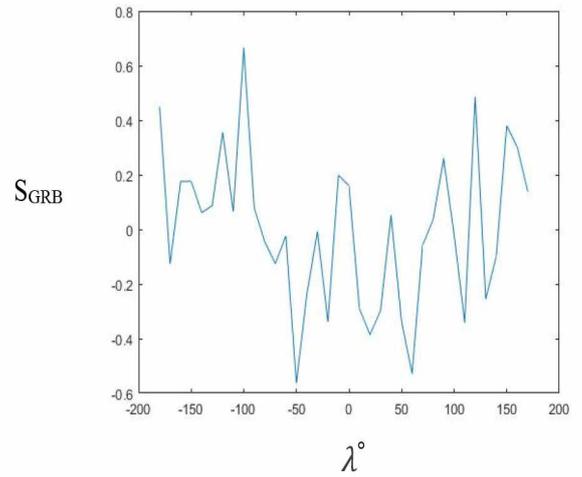


Рис. 62. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 20^\circ$

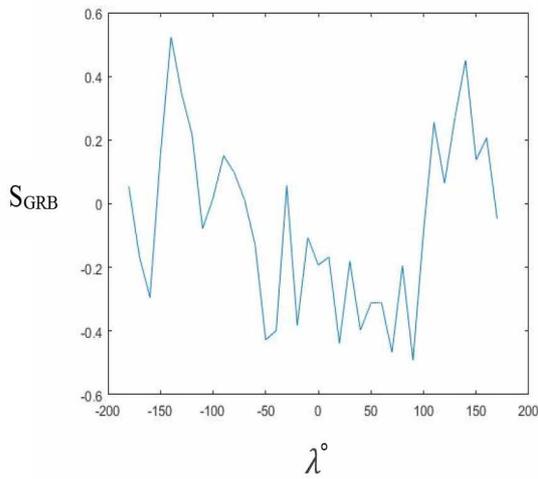


Рис. 63. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 10^\circ$

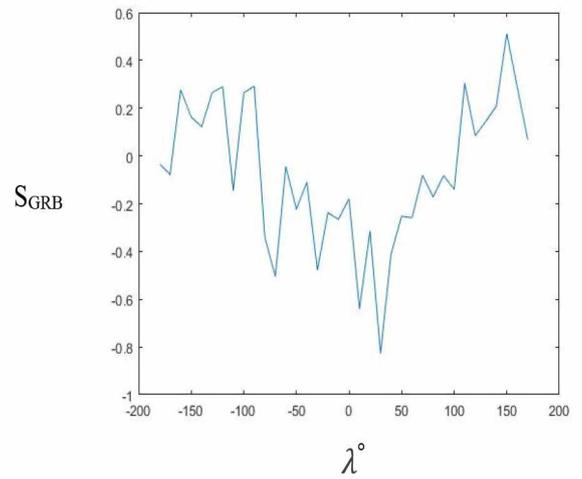


Рис. 64. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 0^\circ$

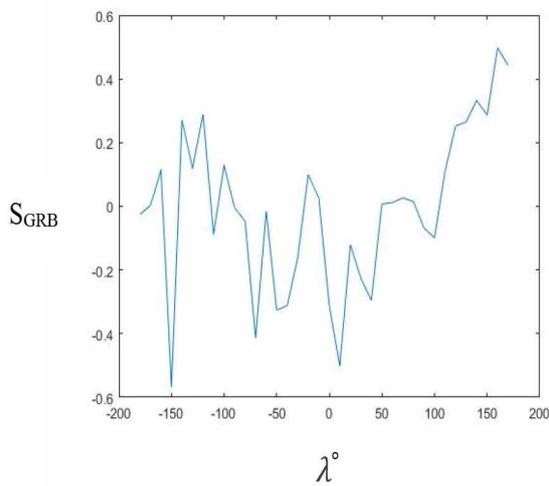


Рис. 65. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = -10^\circ$

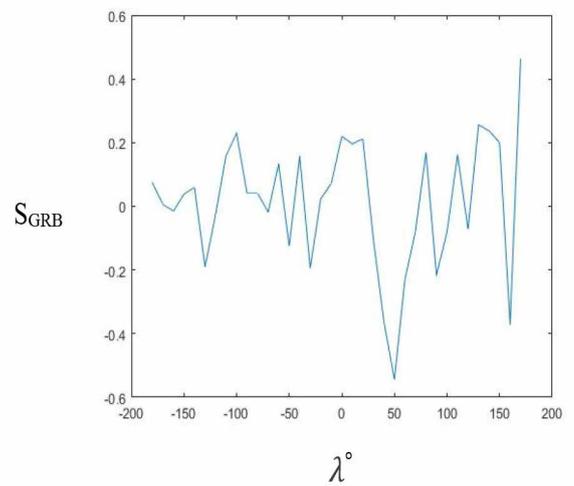


Рис. 66. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = -20^\circ$

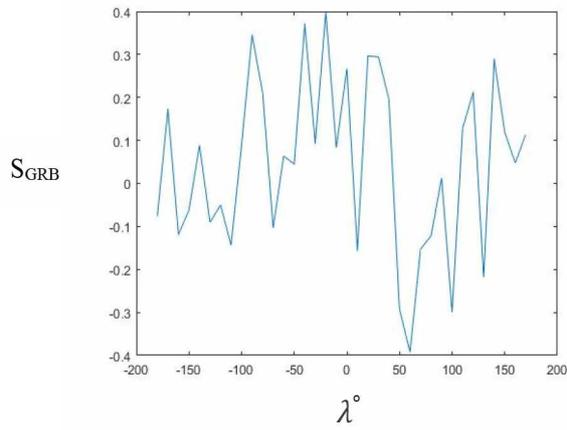


Рис. 67. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = -30^\circ$

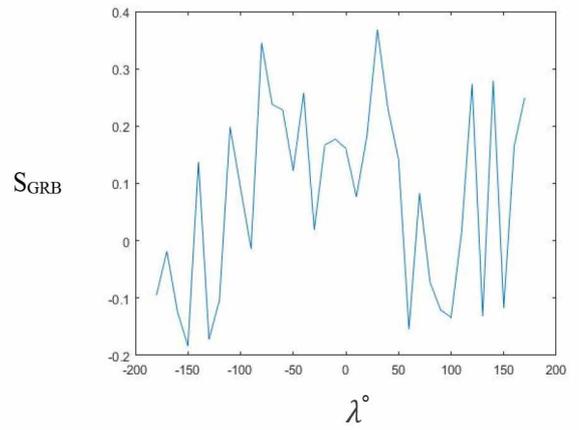


Рис. 68. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = -40^\circ$

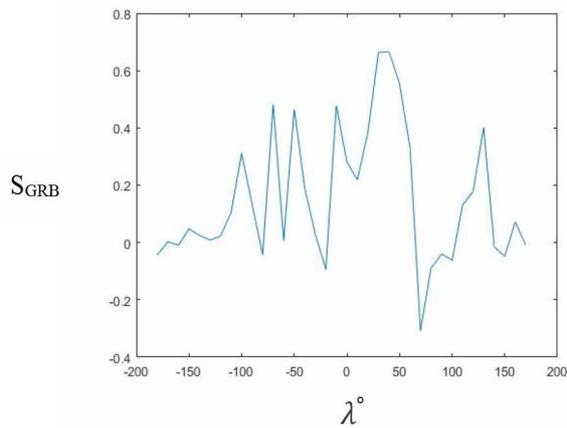


Рис. 69. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = -50^\circ$

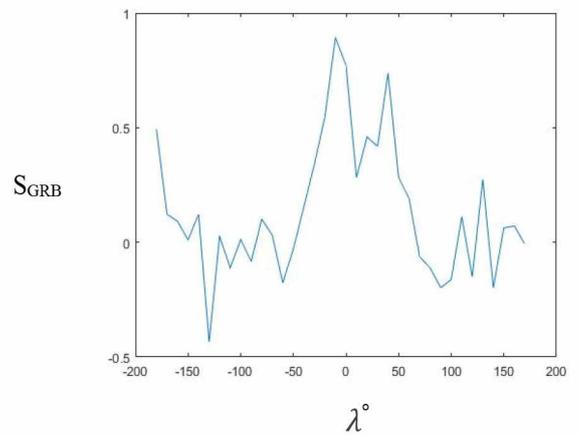


Рис. 70. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = -60^\circ$

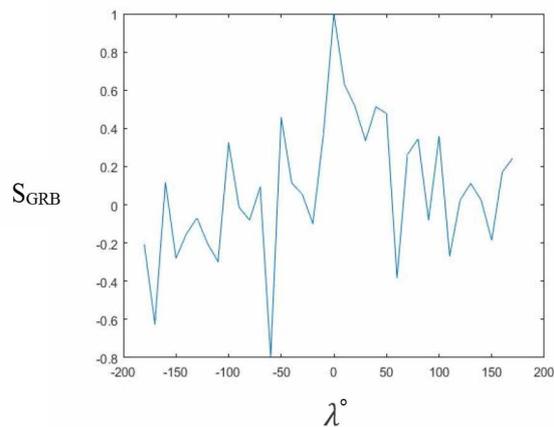


Рис. 71. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = -70^\circ$

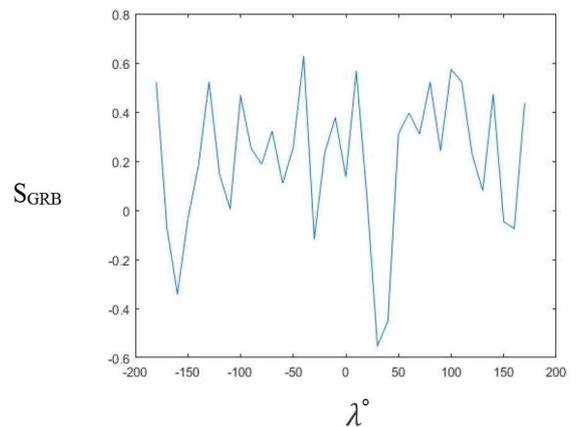


Рис. 72. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = -80^\circ$

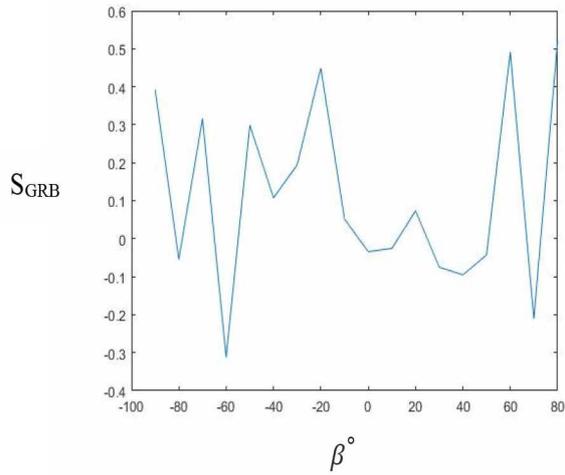


Рис. 73. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -180^\circ$

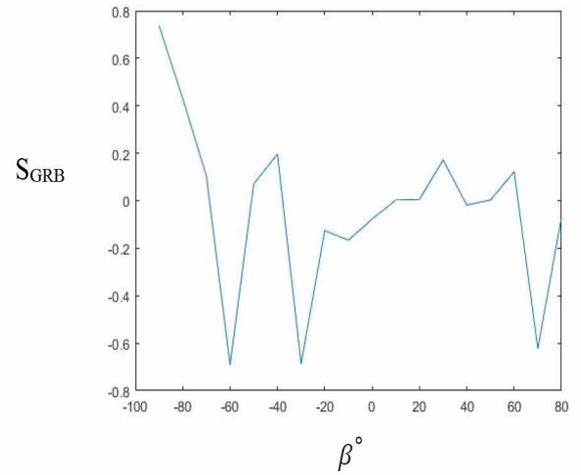


Рис. 74. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -170^\circ$

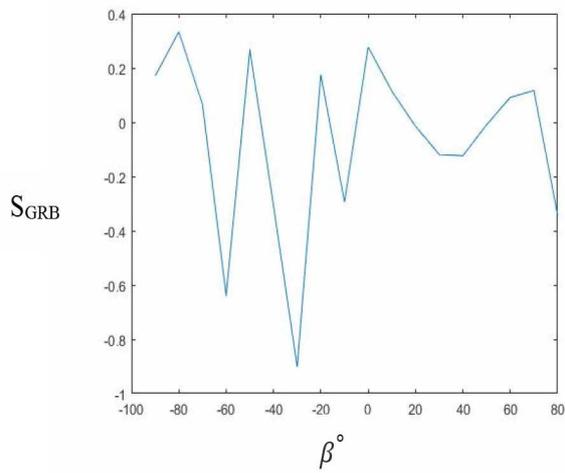


Рис. 75. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -160^\circ$

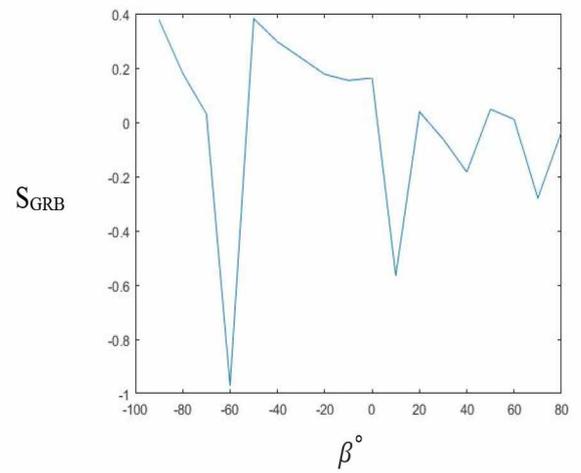


Рис. 76. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -150^\circ$

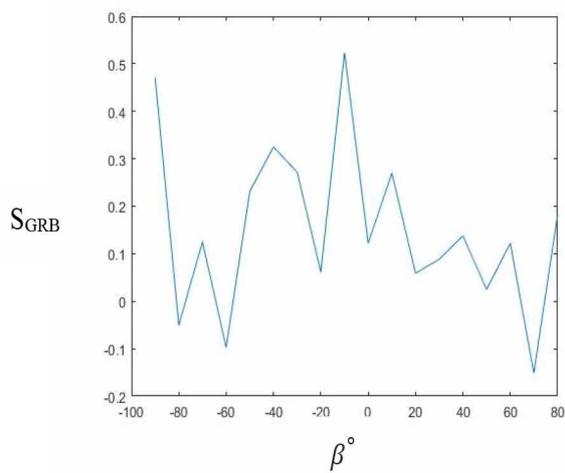


Рис. 77. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -140^\circ$

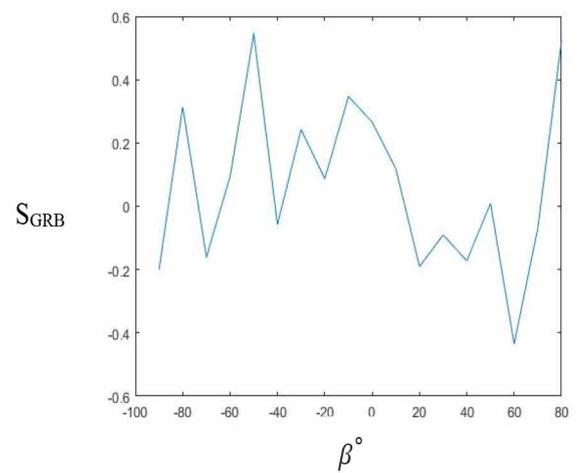


Рис. 78. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -130^\circ$

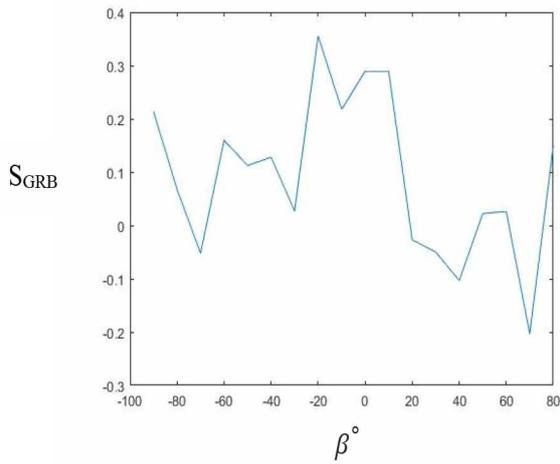


Рис. 79. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -120^\circ$

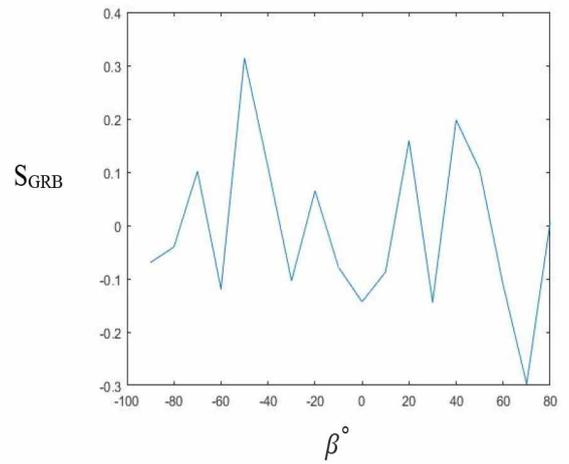


Рис. 80. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -110^\circ$

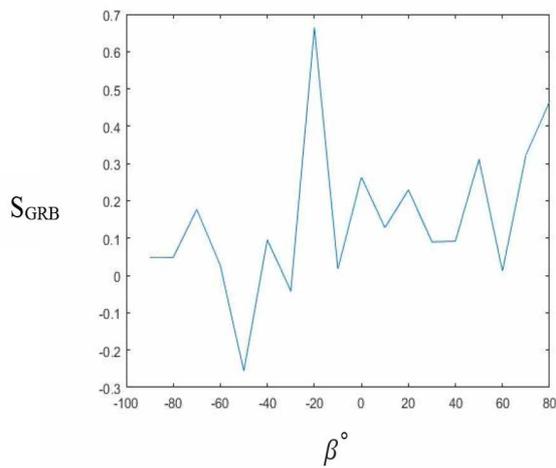


Рис. 81. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -100^\circ$

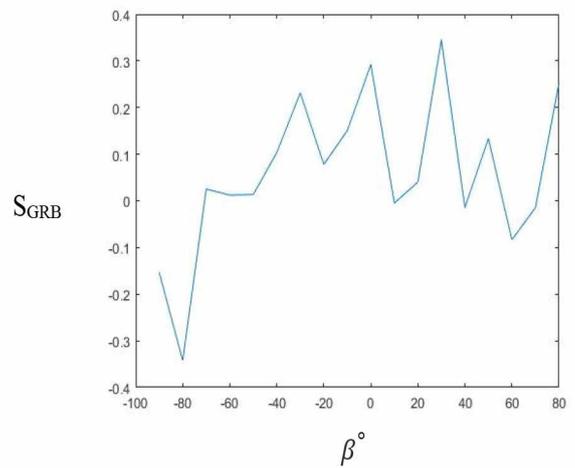


Рис. 82. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -90^\circ$

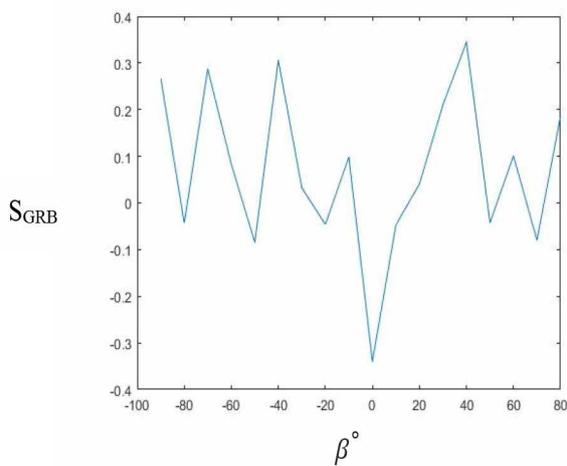


Рис. 83. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -80^\circ$

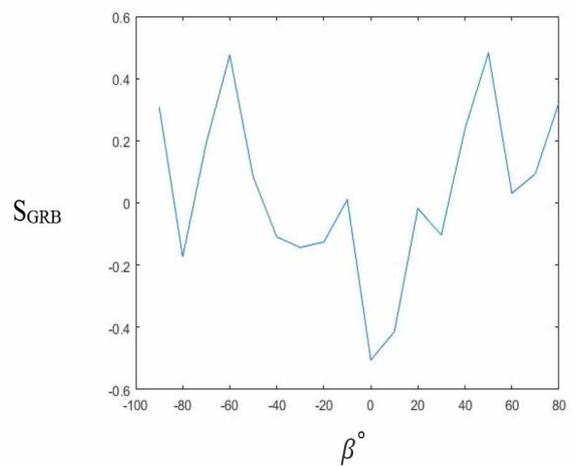


Рис. 84. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -70^\circ$

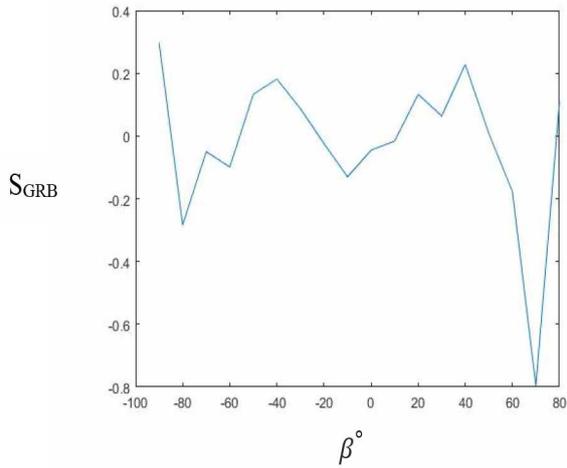


Рис. 85. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -60^\circ$

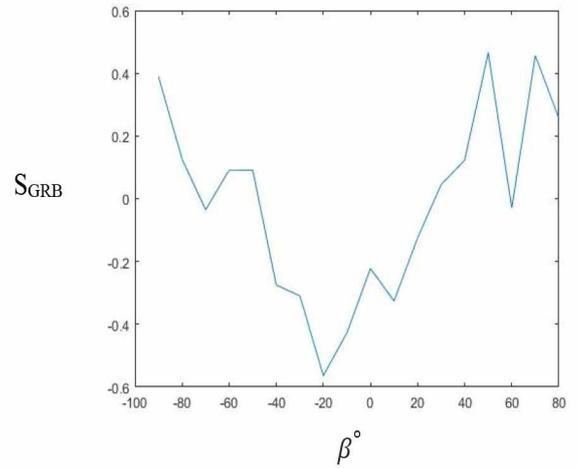


Рис. 86. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -50^\circ$

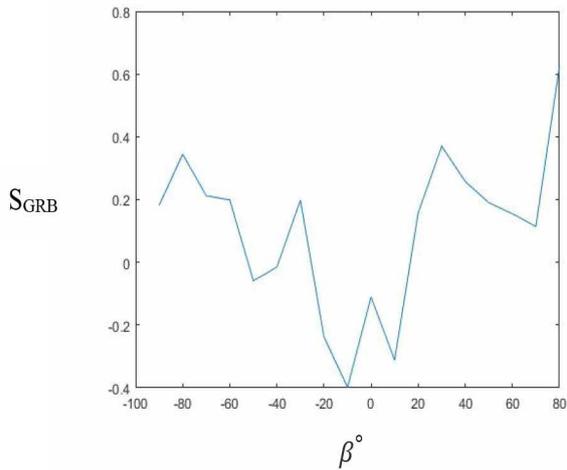


Рис. 87. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -40^\circ$

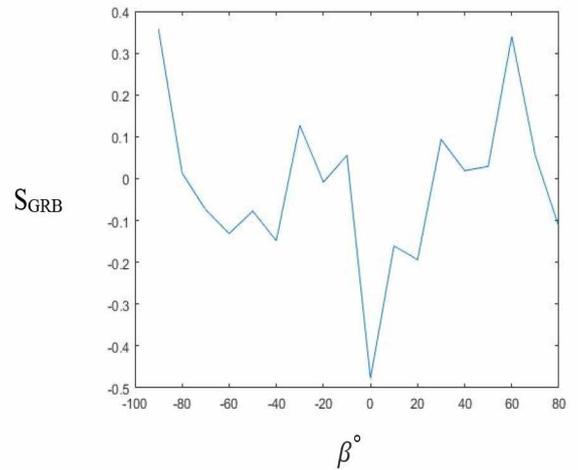


Рис. 88. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -30^\circ$

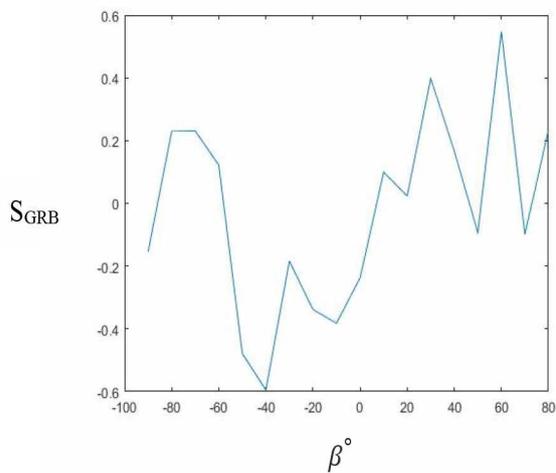


Рис. 89. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -20^\circ$

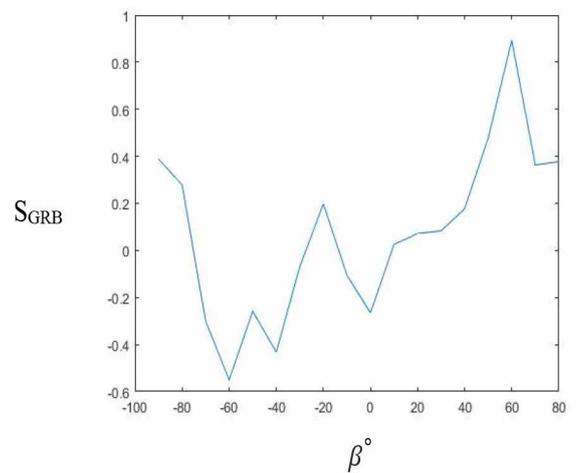


Рис. 90. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -10^\circ$

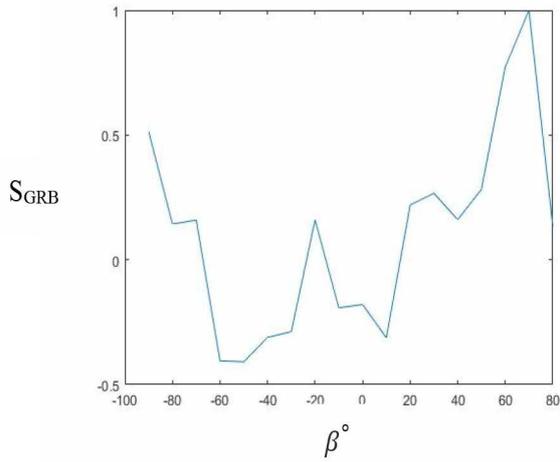


Рис. 91. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 0^\circ$

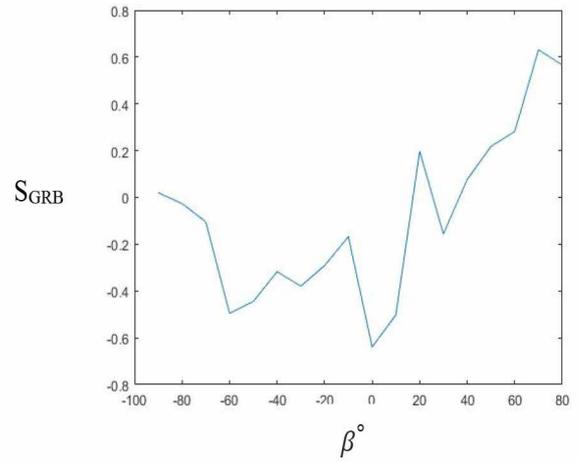


Рис. 92. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 10^\circ$

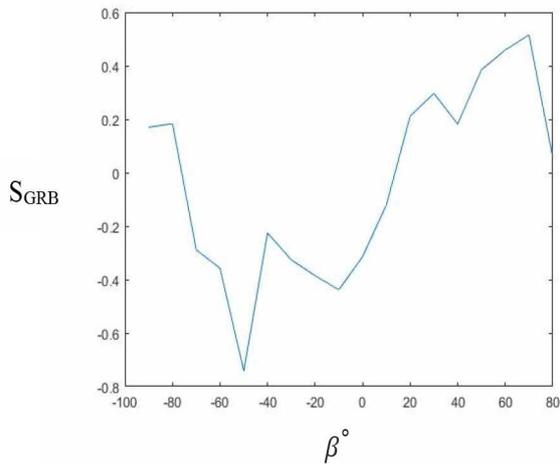


Рис. 93. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 20^\circ$

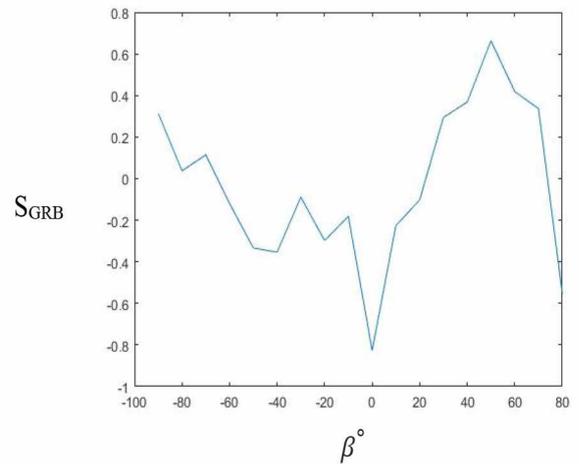


Рис. 94. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 30^\circ$

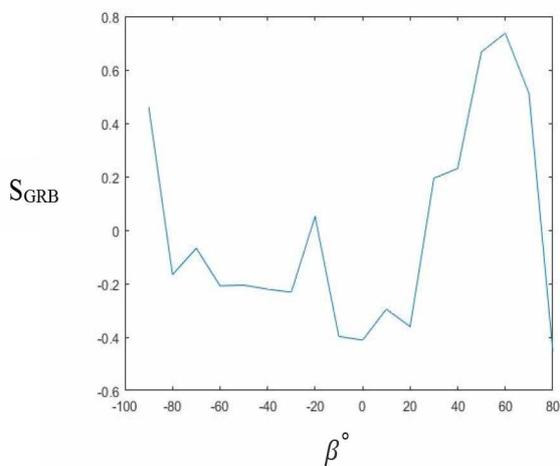


Рис. 95. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 40^\circ$

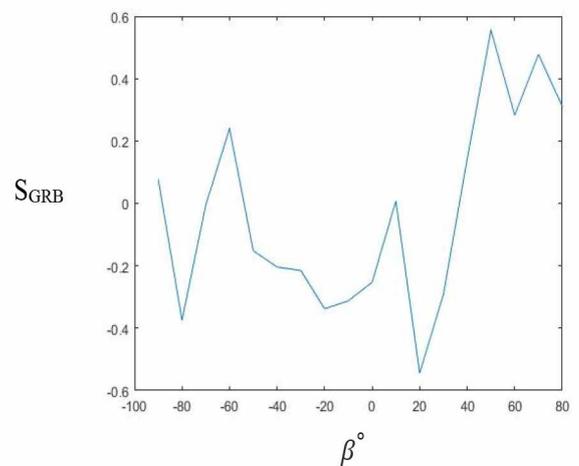


Рис. 96. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 50^\circ$

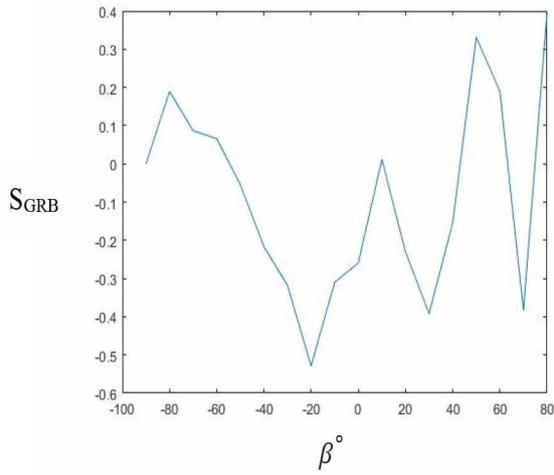


Рис. 97. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 60^\circ$

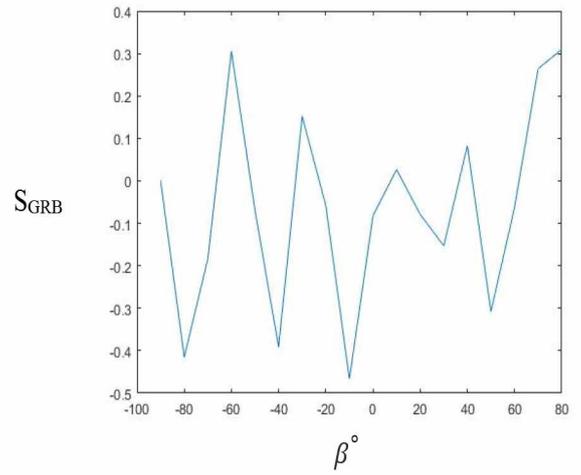


Рис. 98. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 70^\circ$

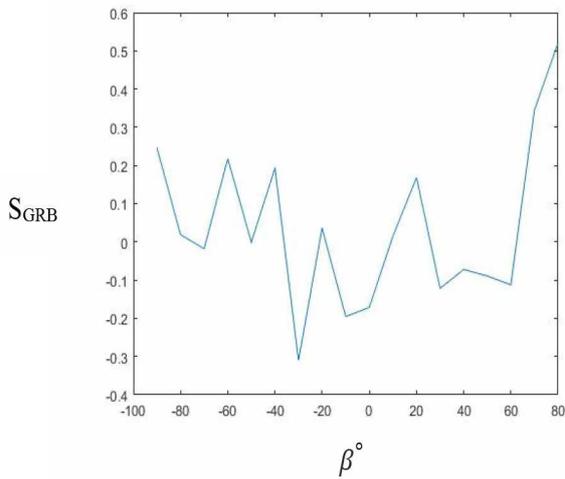


Рис. 99. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 80^\circ$

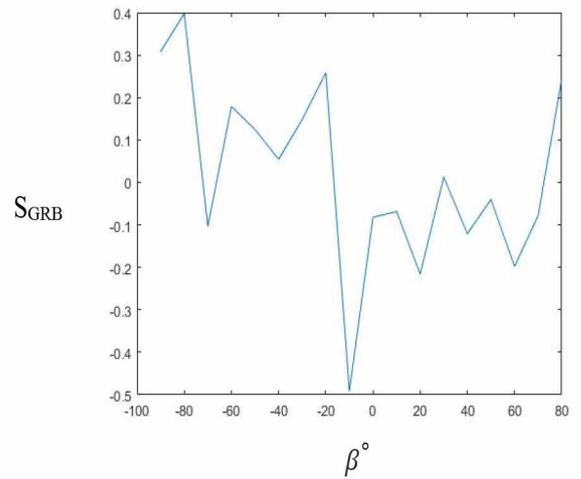


Рис. 100. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 90^\circ$

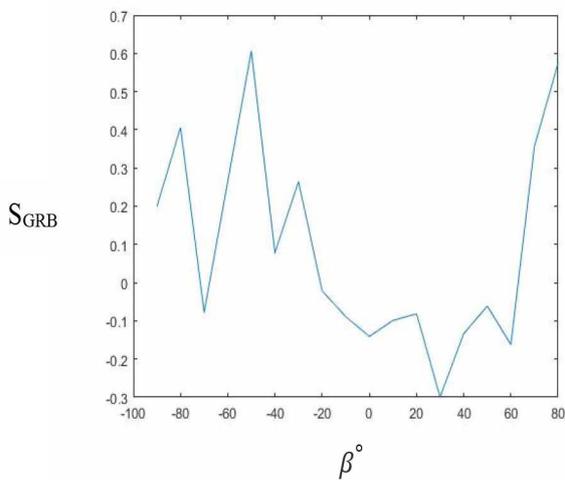


Рис. 101. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 100^\circ$

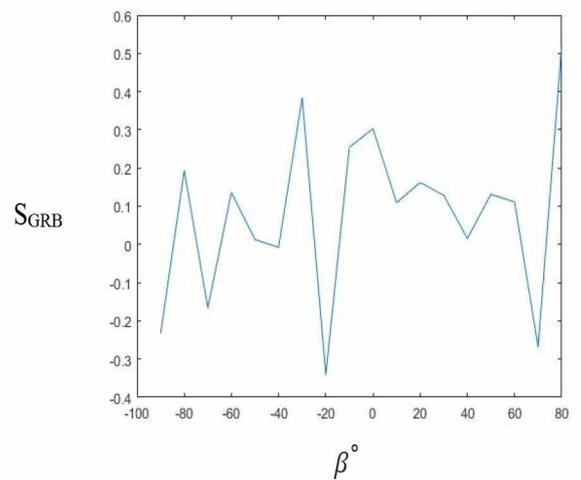


Рис. 102. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 110^\circ$

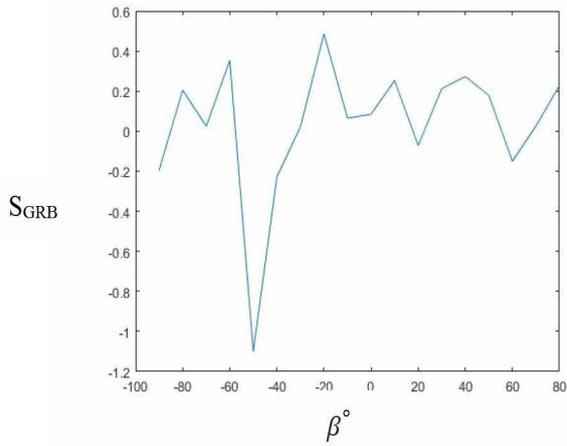


Рис. 103. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 120^\circ$

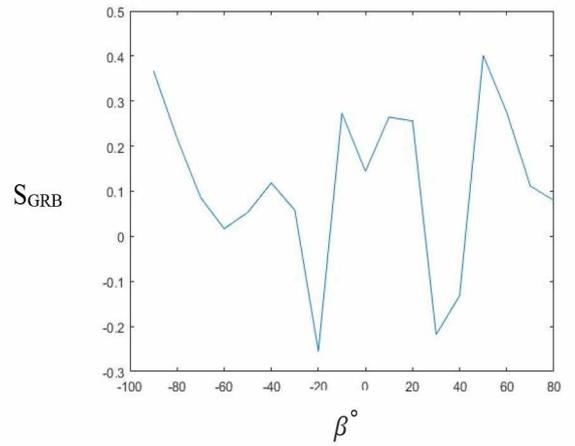


Рис. 104. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 130^\circ$

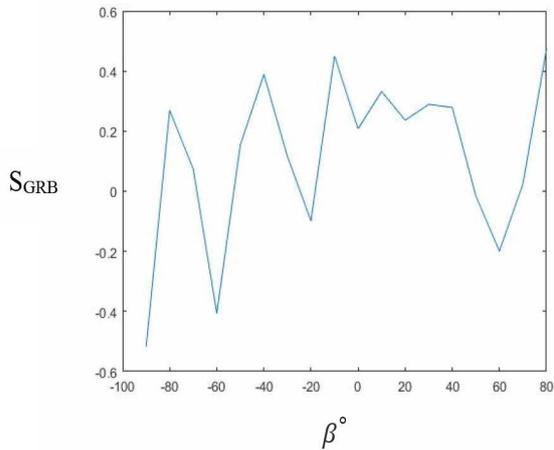


Рис. 105. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 140^\circ$

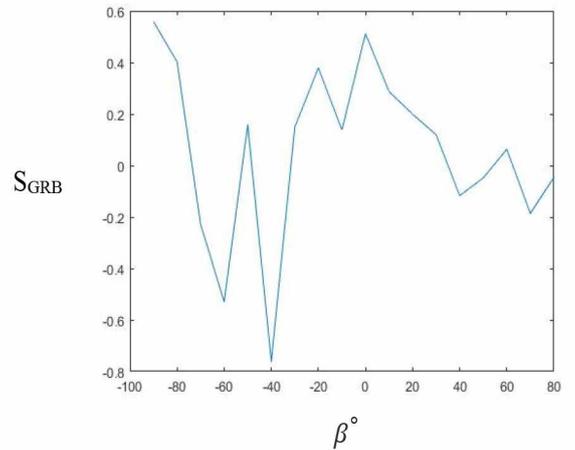


Рис. 106. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 150^\circ$

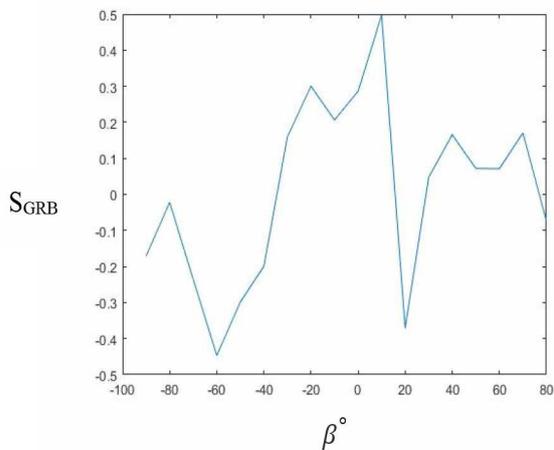


Рис. 107. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 160^\circ$

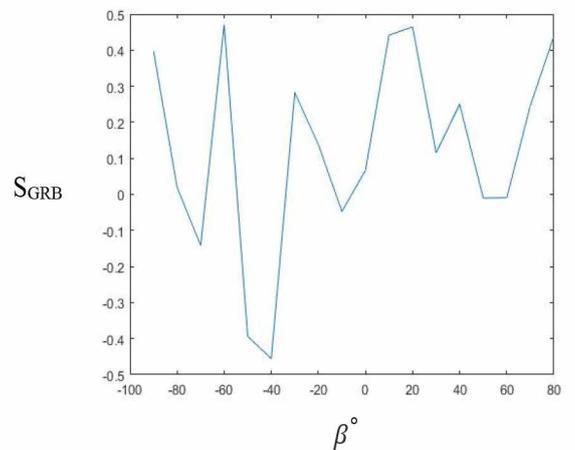


Рис. 108. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 170^\circ$

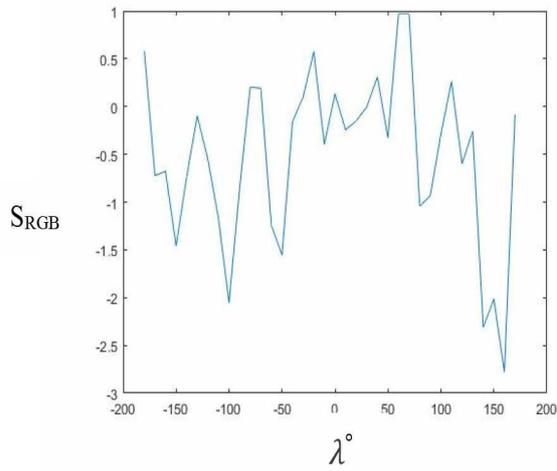


Рис. 109. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 90^\circ$

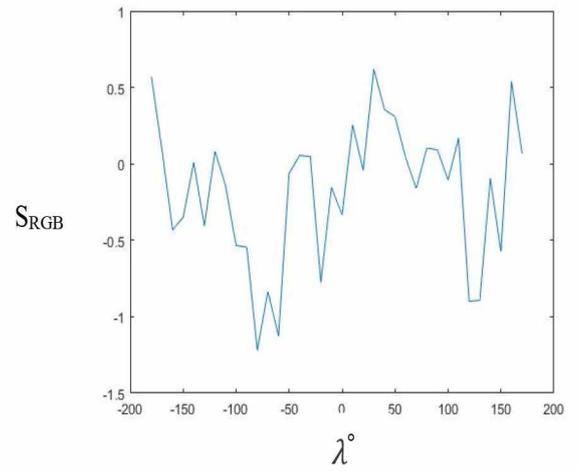


Рис. 110. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 80^\circ$

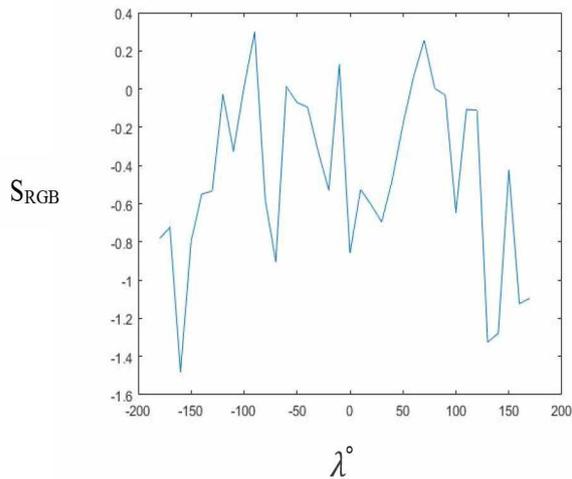


Рис. 111. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 70^\circ$

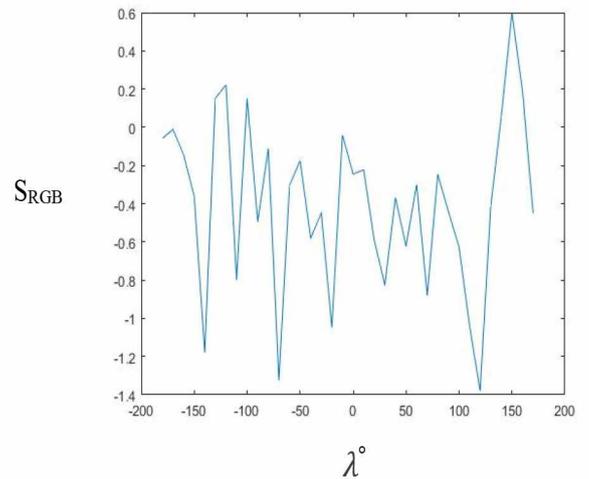


Рис. 112. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 60^\circ$

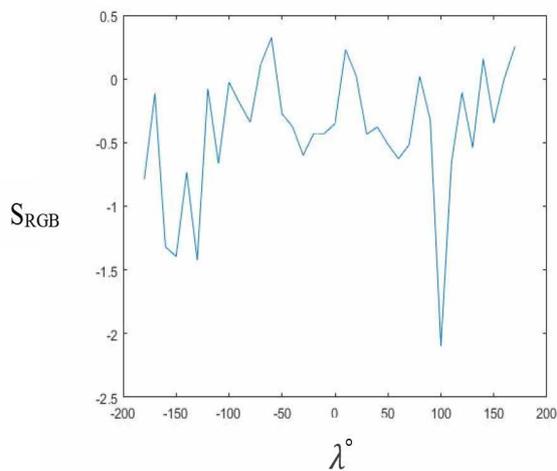


Рис. 113. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 50^\circ$

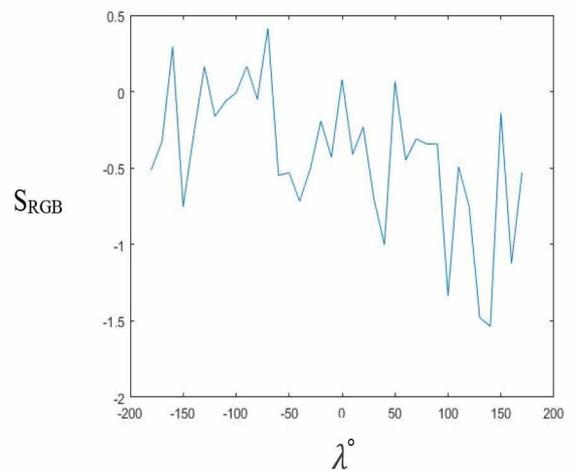


Рис. 114. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 40^\circ$

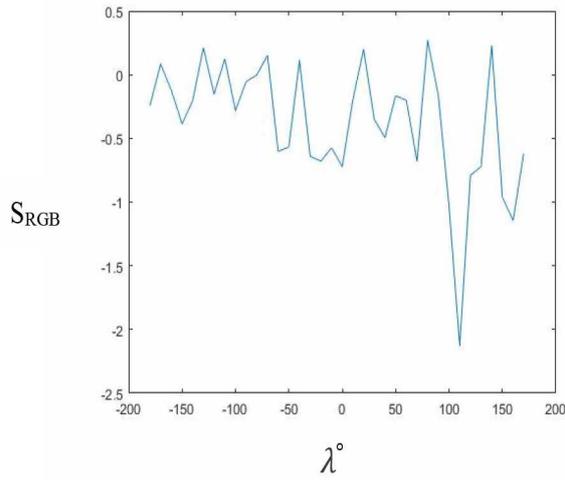


Рис. 115. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 30^\circ$

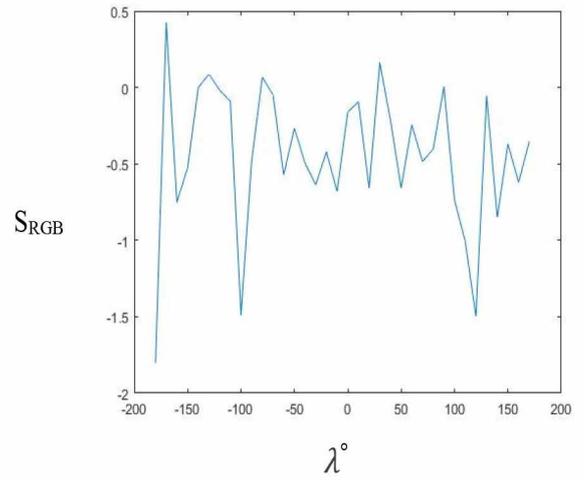


Рис. 116. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 20^\circ$

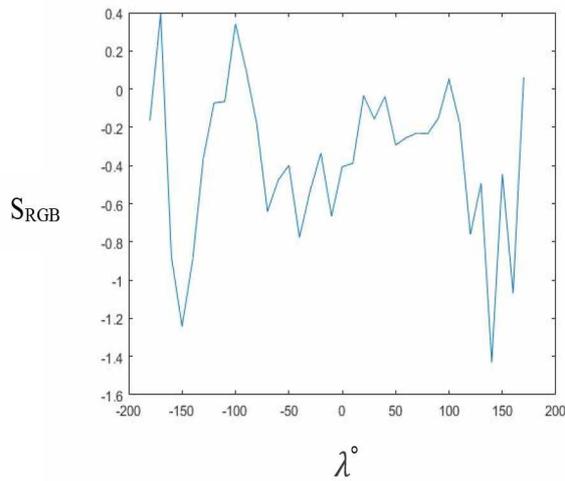


Рис. 117. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 10^\circ$

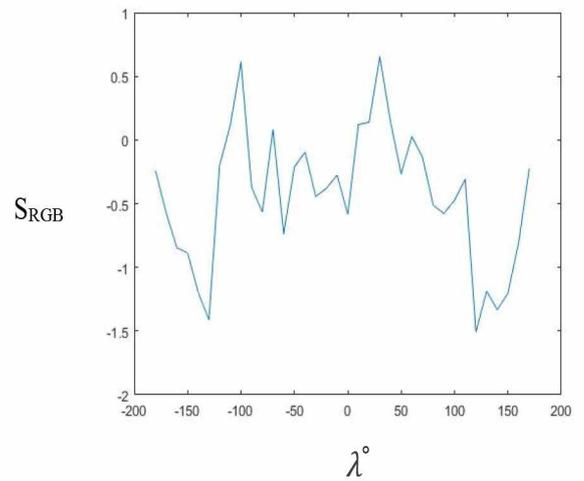


Рис. 118. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = 0^\circ$

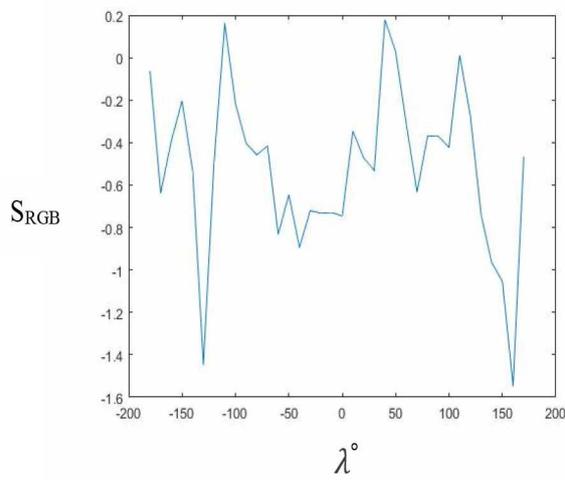


Рис. 119. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = -10^\circ$

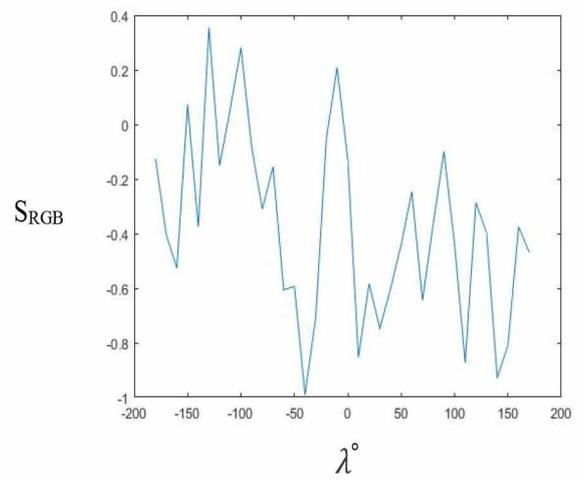


Рис. 120. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = -20^\circ$

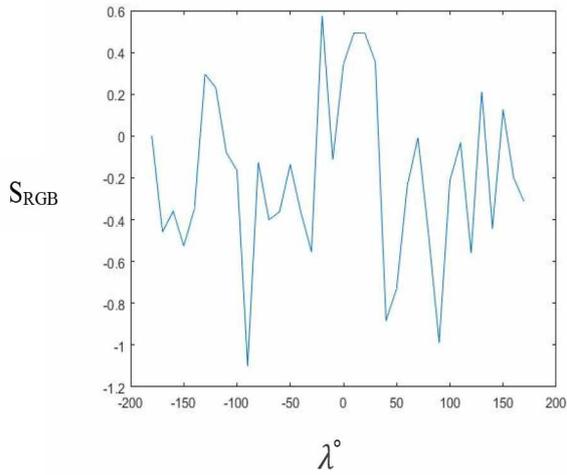


Рис. 121. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = -30^\circ$

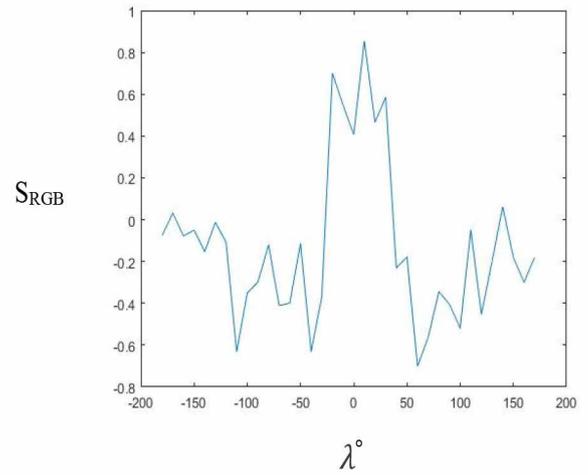


Рис. 122. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = -40^\circ$

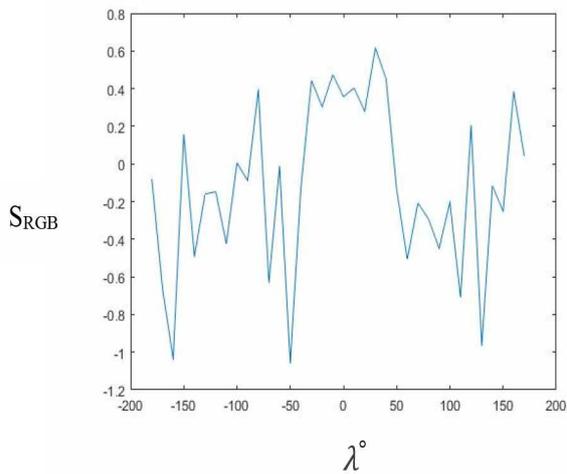


Рис. 123. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = -50^\circ$

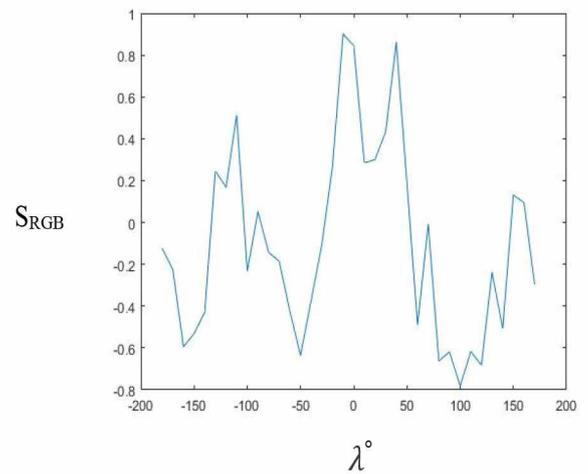


Рис. 124. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = -60^\circ$

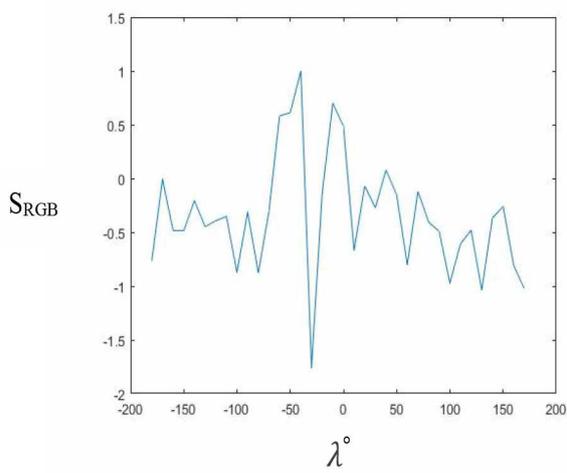


Рис. 125. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = -70^\circ$

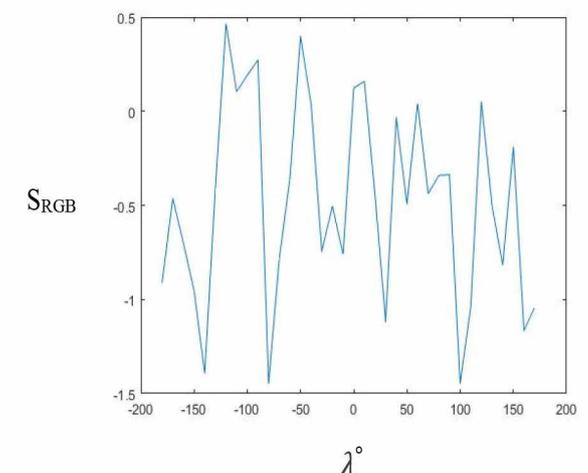


Рис. 126. Распределение ЦФП по долготе  $\lambda^\circ$  при  $\beta^\circ = -80^\circ$

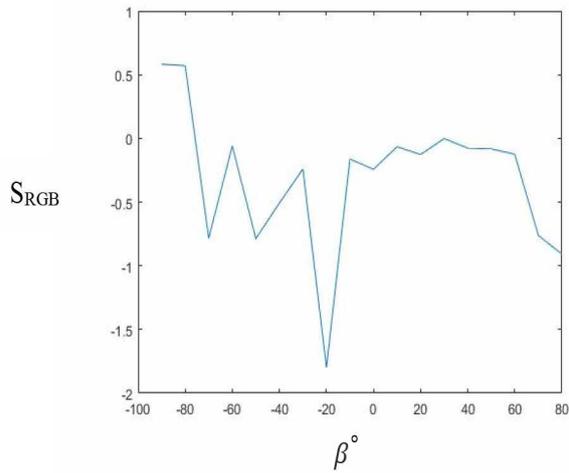


Рис. 127. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -180^\circ$

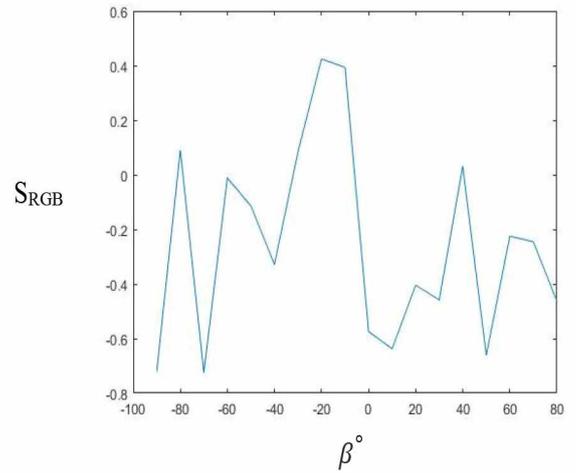


Рис. 128. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -170^\circ$

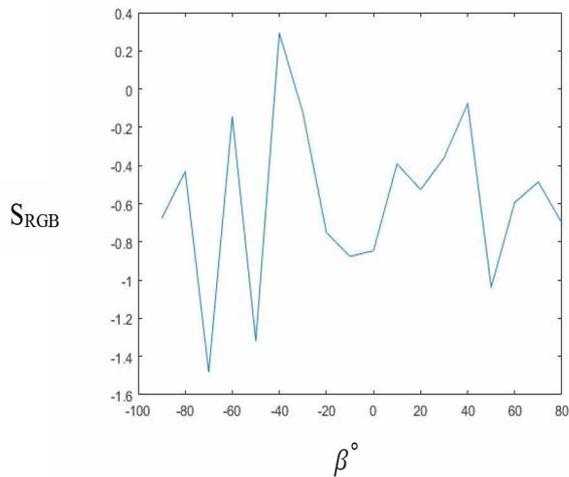


Рис. 129. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -160^\circ$

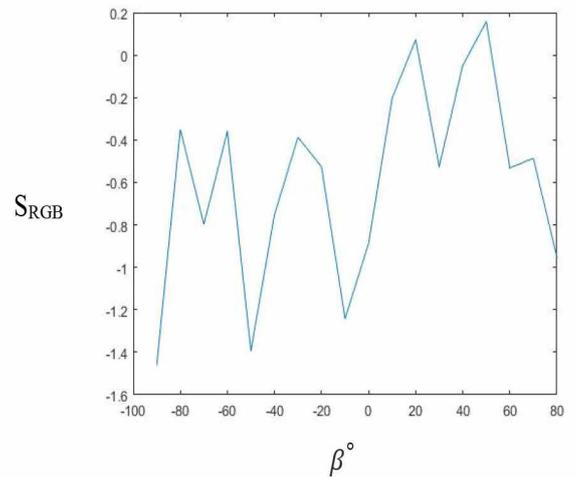


Рис. 130. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -150^\circ$

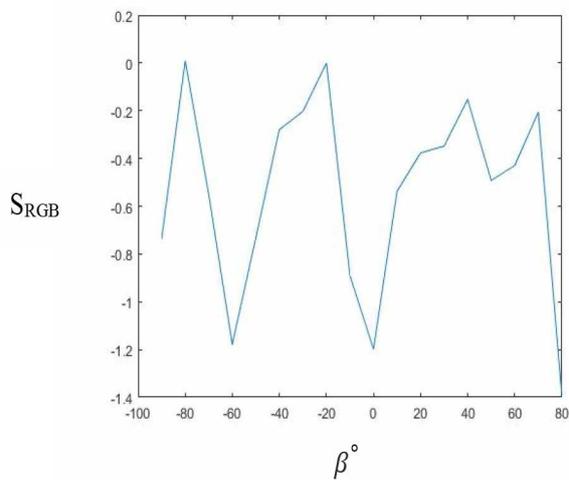


Рис. 131. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -140^\circ$

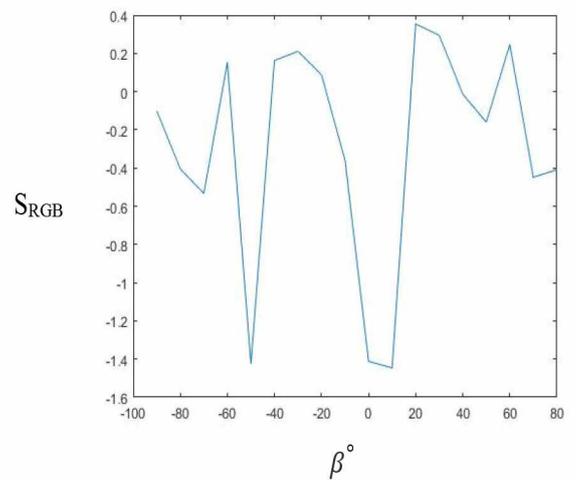


Рис. 132. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -130^\circ$

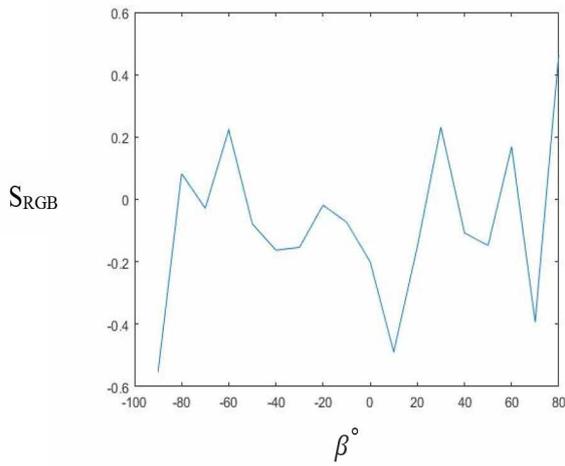


Рис. 133. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -120^\circ$

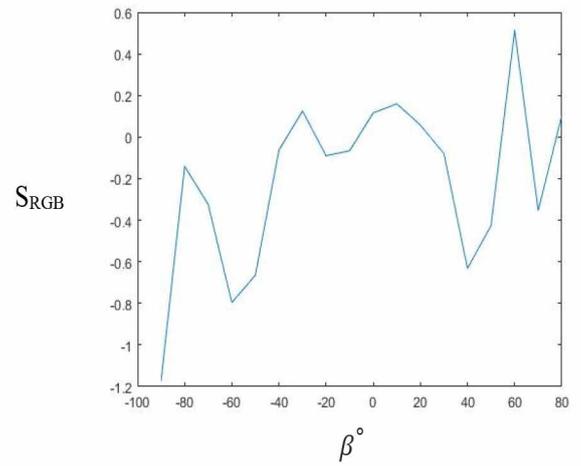


Рис. 134. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -110^\circ$

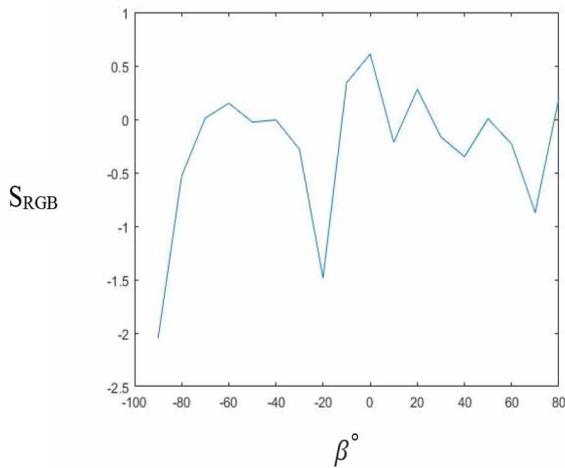


Рис. 135. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -100^\circ$

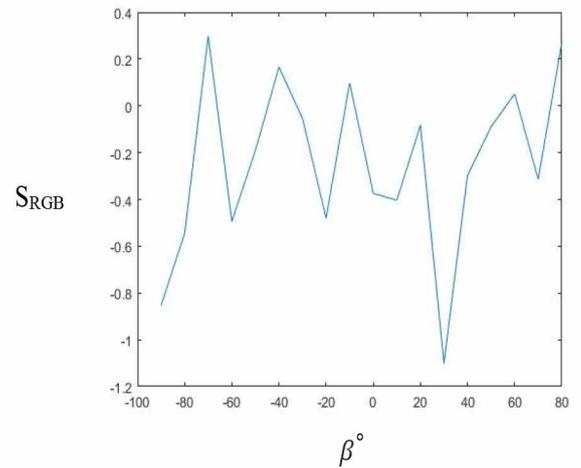


Рис. 136. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -90^\circ$

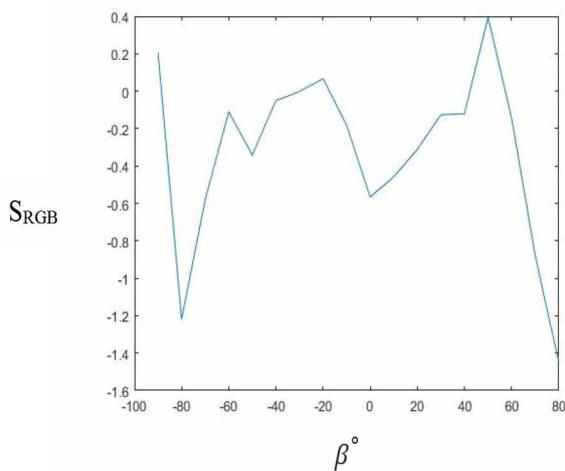


Рис. 137. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -80^\circ$

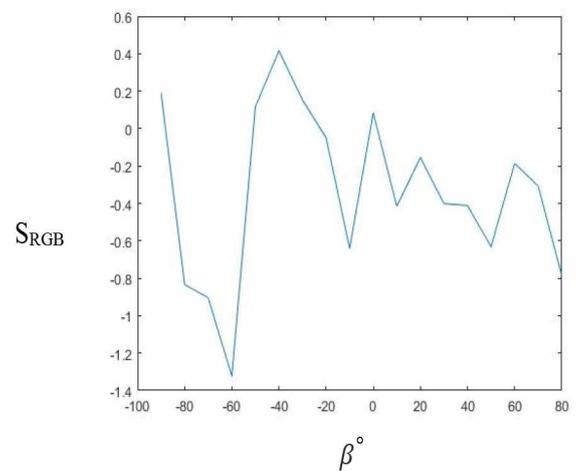


Рис. 138. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -70^\circ$

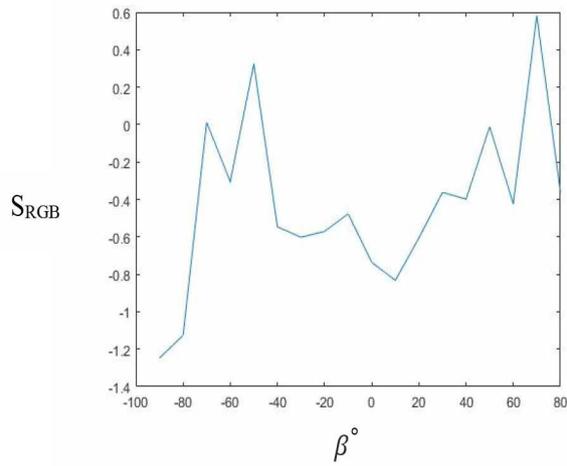


Рис. 139. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -60^\circ$

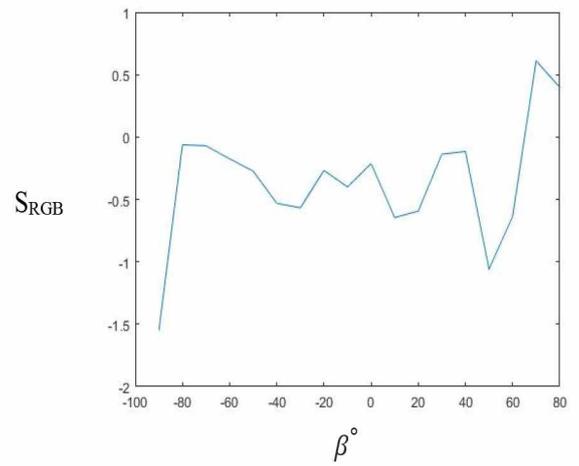


Рис. 140. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -50^\circ$

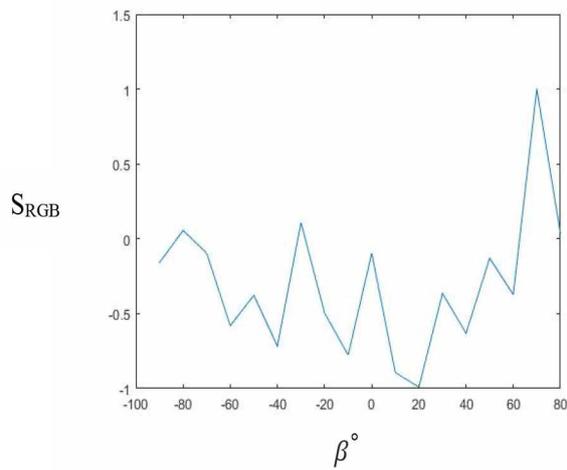


Рис. 141. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -40^\circ$

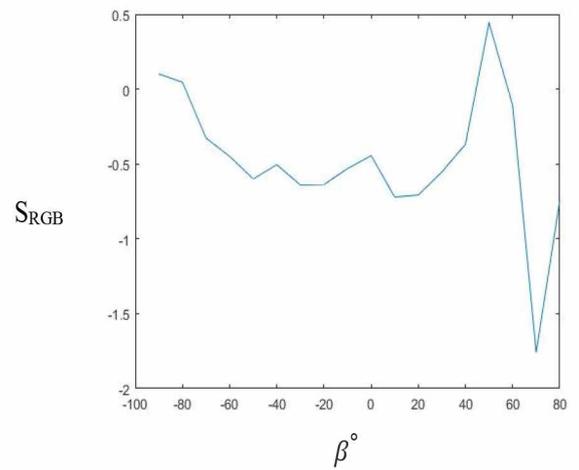


Рис. 142. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -30^\circ$

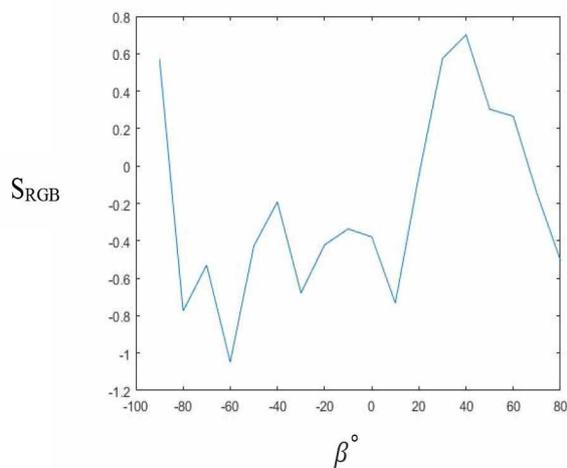


Рис. 143. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -20^\circ$

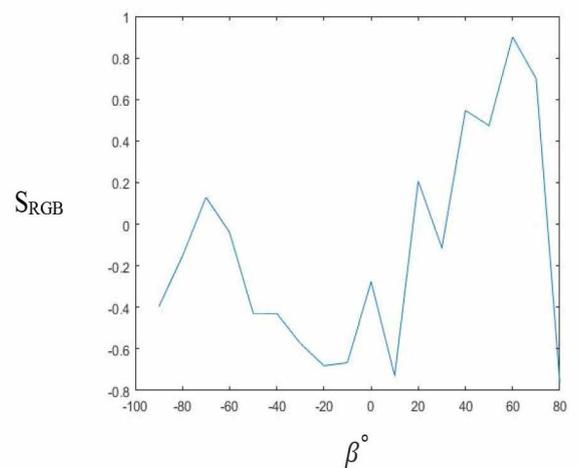


Рис. 144. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = -10^\circ$

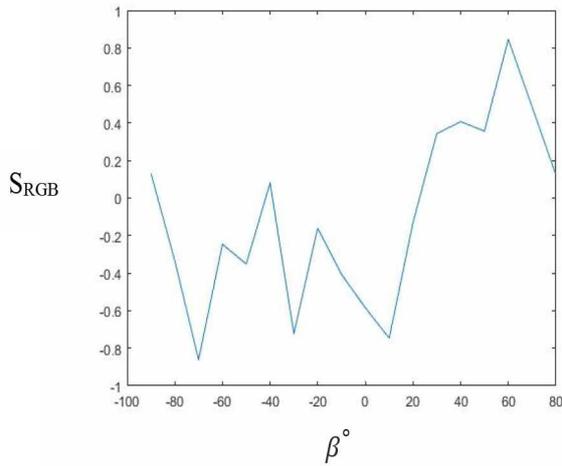


Рис. 145. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 0^\circ$

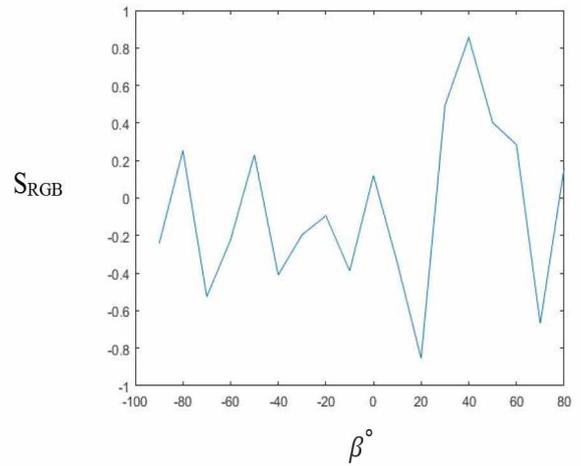


Рис. 146. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 10^\circ$

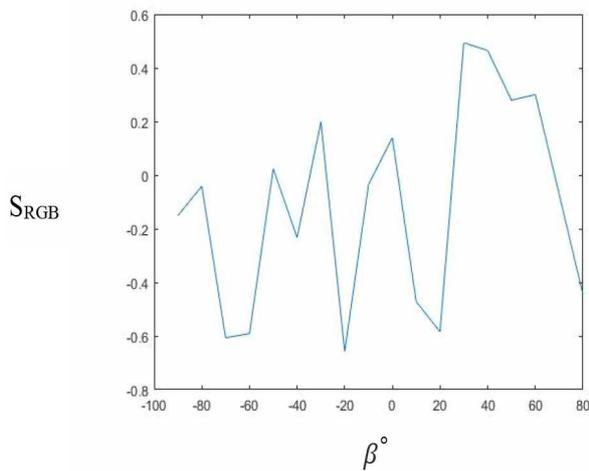


Рис. 147. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 20^\circ$

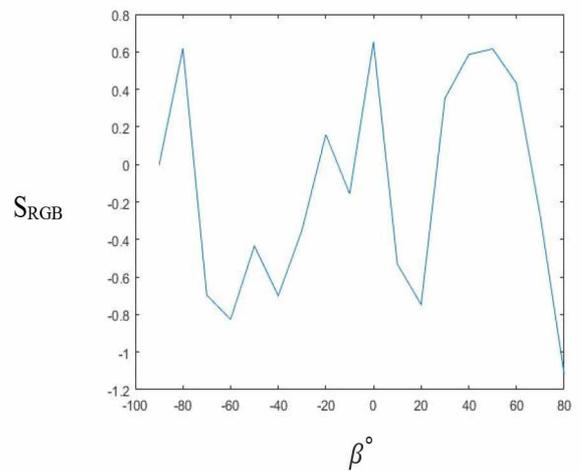


Рис. 148. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 30^\circ$

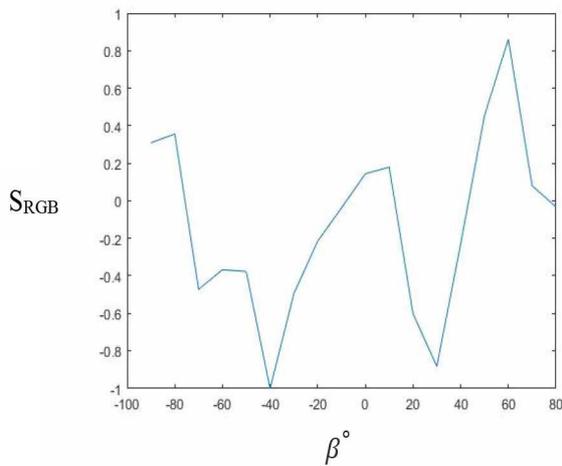


Рис. 149. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 40^\circ$

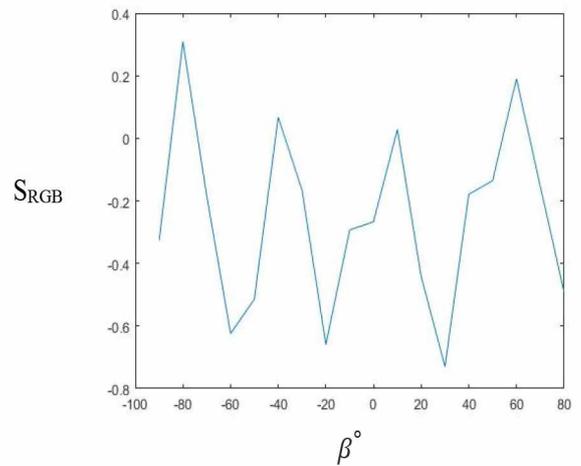


Рис. 150. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 50^\circ$

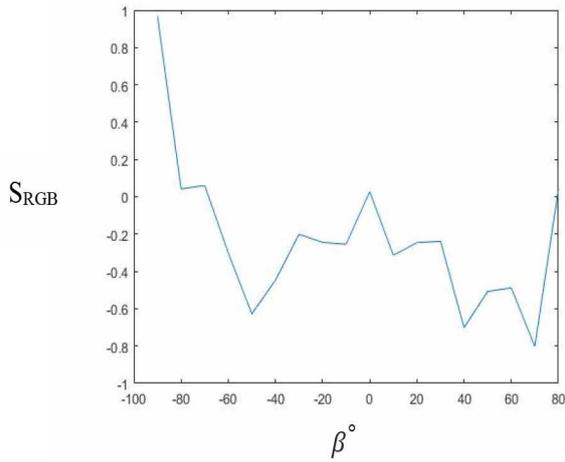


Рис. 151. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 60^\circ$

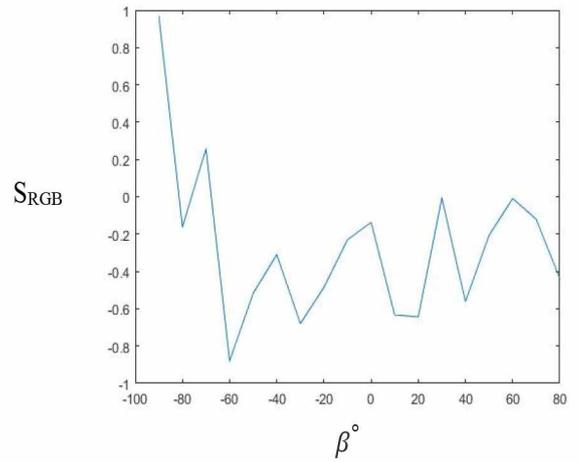


Рис. 152. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 70^\circ$

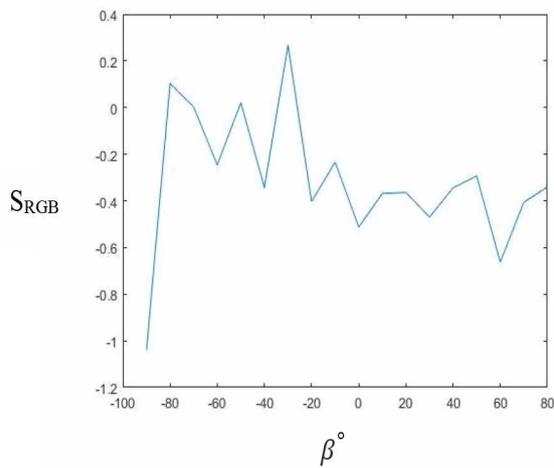


Рис. 153. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 80^\circ$

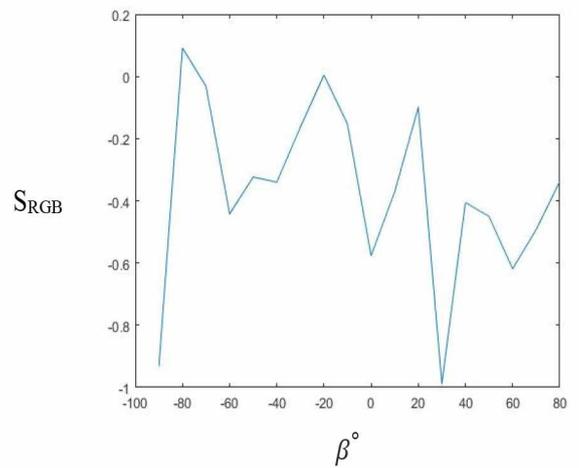


Рис. 154. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 90^\circ$

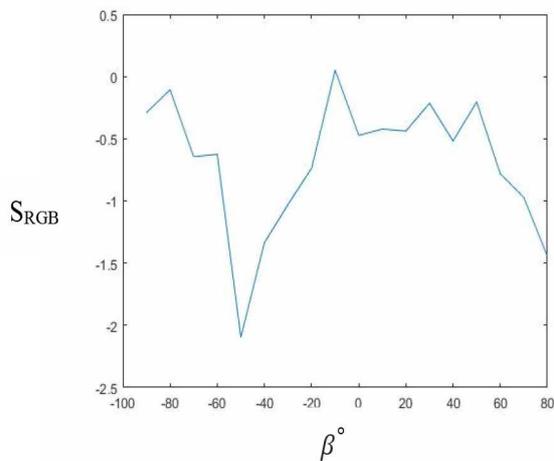


Рис. 155. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 100^\circ$

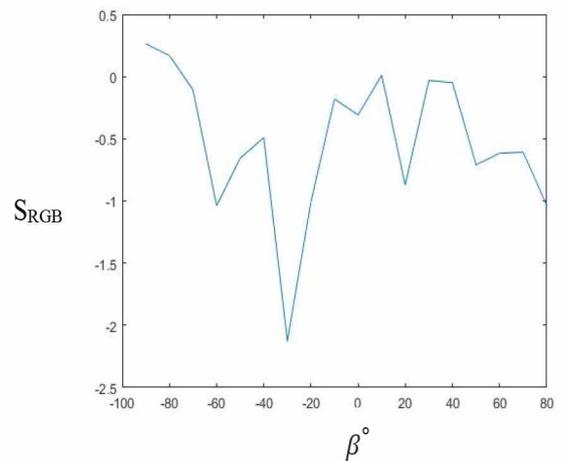


Рис. 156. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 110^\circ$

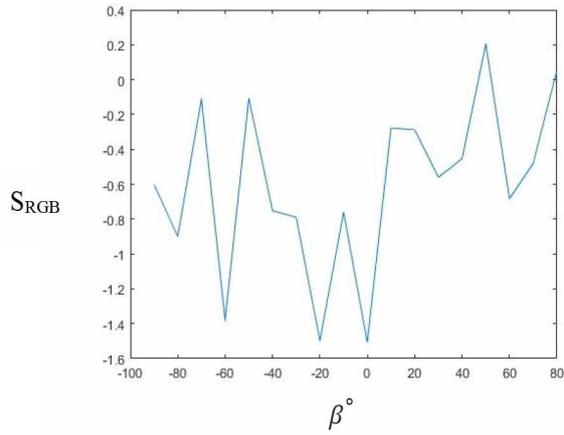


Рис. 157. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 120^\circ$

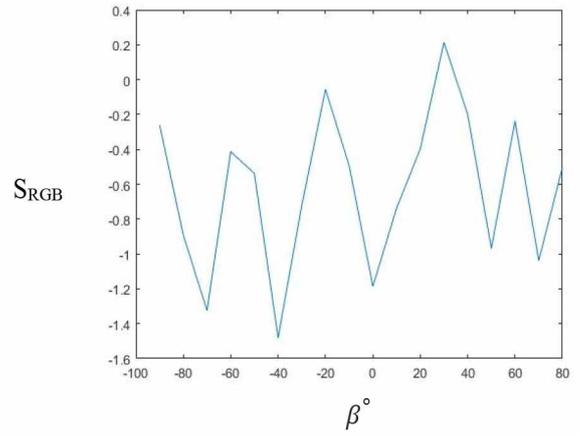


Рис. 158. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 130^\circ$

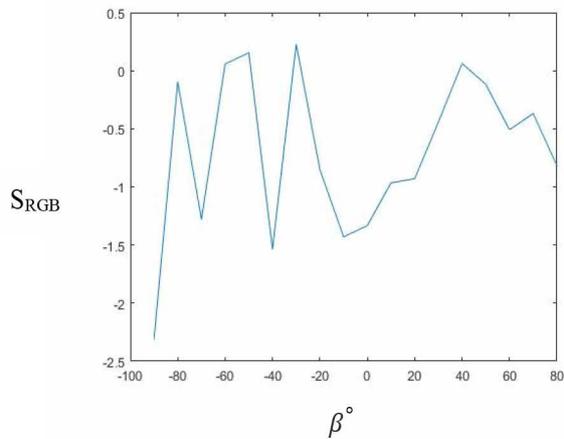


Рис. 159. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 140^\circ$

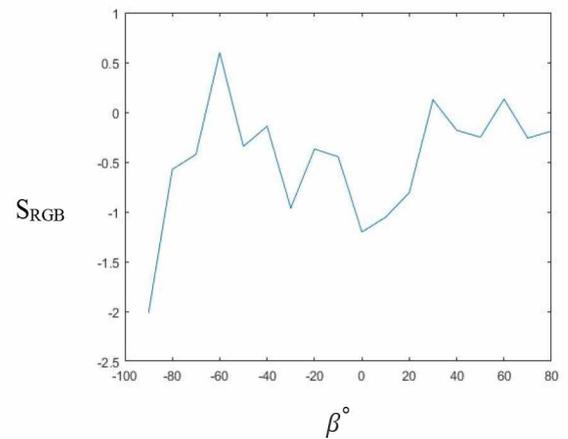


Рис. 160. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 150^\circ$

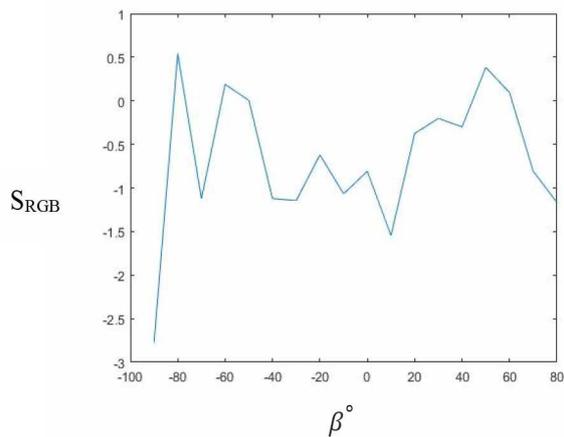


Рис. 161. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 160^\circ$

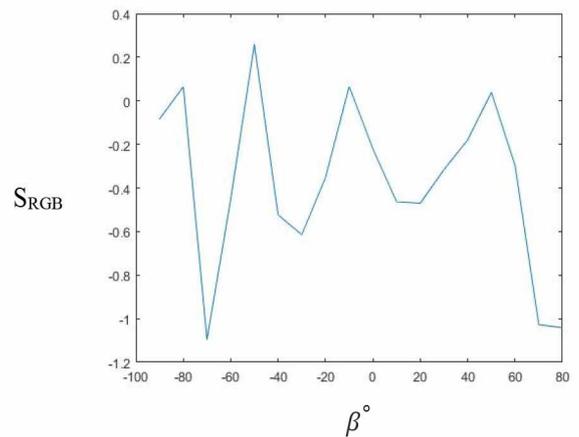


Рис. 162. Распределение ЦФП по широте  $\beta^\circ$  при  $\lambda^\circ = 170^\circ$