

**Заключение диссертационного совета МГУ.011.4**  
**по диссертации на соискание ученой степени доктора наук**  
**Решение диссертационного совета от «29» марта 2024 г. № 27**  
**О присуждении Добровольскому Николаю Николаевичу,**  
**гражданину Российской Федерации ученой степени**  
**доктора физико-математических наук**

Диссертация «Дзета-функции моноидов натуральных чисел и смежные вопросы» по специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика принята к защите диссертационным советом 22.12.2023, протокол № 20.

Соискатель **Добровольский Николай Николаевич**, 1986 года рождения, диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук «Гиперболический параметр сеток с весами и его применение» защитил в диссертационном совете Д.501.001.84 Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова по специальности 01.01.06 Математическая логика, алгебра и теория чисел (физ.-мат. науки).

Соискатель работает в Тульском государственном педагогическом университете им. Л.Н. Толстого на физико-математическом факультете заведующим молодежной научно-исследовательской лаборатории теоретико-числовых методов в приближенном анализе.

Соискатель работает по совместительству в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, кафедра математических и компьютерных методов анализа младшим научным сотрудником.

**Диссертация выполнена** на кафедре математических и компьютерных методов анализа Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

**Научный консультант** — доктор физико-математических наук, профессор Иванов Валерий Иванович, Тульский государственный университет, институт прикладной математики и компьютерных наук, кафедра прикладной математики и информатики, профессор. По совместительству работает главным научным сотрудником в лаборатории «Многомерная аппроксимация и приложения» Механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.

**Официальные оппоненты:**

Быковский Виктор Алексеевич,  
Член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук,  
профессор, Хабаровское отделение Федерального государственного  
бюджетного учреждения науки Института прикладной математики

Дальневосточного отделения Российской академии наук, главный научный сотрудник.

Королёв Максим Александрович,

Доктор физико-математических наук, профессор, профессор РАН, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии

наук, заместитель директора по научной работе. По совместительству

работает профессором на кафедре теории чисел Механико-

математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова

Чирский Владимир Григорьевич,

доктор физико-математических наук, доцент, Московский

государственный университет имени М. В. Ломоносова, Механико-

математический факультет, кафедра теории чисел, профессор.

дали **положительные отзывы** на диссертацию.

Соискатель имеет **140 опубликованных работ**, в том числе по теме диссертации **48 работ**, из них **28 статей опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра и теория чисел и в периодических научных журналах, индексируемых в Web of Science, Scopus и RSCI.**

1. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский О минимальных многочленах остаточных дробей для алгебраических иррациональностей // Чебышевский сборник, 2015. Т. 16, вып. 3. С. 147–182.

DOI: 10.22405/2226-8383-2015-16-3-147-182

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

English transl.: Dobrovolskii, N. M.; Dobrovolskii, N. N. About minimal polynomial of residual fractions for algebraic irrationalities. Doklady Mathematics 106, Part Suppl. 2, S165-S180 (2022)

Н. Н. Добровольскому принадлежат все теоремы.

2. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Е. И. Юшина. Гиперболическая дзета-функция решётки квадратичного поля // Чебышевский сборник, 2015. Т. 16, вып. 4 (56). С. 100–149.

DOI: 10.22405/2226-8383-2015-16-4-100-149

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Н. Н. Добровольскому принадлежат все теоремы.

3. N. M. Dobrovolskii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, N. N. Dobrovolskii. On Lagrange algorithm for reduced algebraic irrationalities // Buletinul Academiei de Stiinta a Republicii Moldova. Matematica, 2016. № 2. P. 27–39.

Журнал индексируется в Scopus. IF: SJR 0.29

Н. Н. Добровольскому принадлежат все теоремы.

4. Nikolai M. Dobrovolskii, Nikolai N. Dobrovolsky, Irina N. Balaba, Irina Yu. Rebrova, Dmitrii K. Sobolev and Valentina N. Soboleva Generalized Pisot Numbers

and Matrix Decomposition // Springer International Publishing Switzerland 2016 V. A. Sadovnichiy and M. Z. Zgurovsky (eds.), Advances in Dynamical Systems and Control, Studies in Systems, Decision and Control 69, 81-140

DOI: 10.1007/978-3-319-40673-2\_5

Книга проиндексирована в WoS, Scopus.

Н. Н. Добровольскому принадлежат все теоремы.

5. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова О гиперболической дзета-функции Гурвица // Чебышевский сборник, 2016. Т. 17, вып. 3. С. 72–105.

DOI: 10.22405/2226-8383-2016-17-3-72-105

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Н. Н. Добровольскому принадлежат все теоремы.

6. Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва, Н. Н. Добровольский, Е. А. Матвеева. О дробно-линейных преобразованиях форм А. Туэ — М. Н. Добровольского — В. Д. Подсыпанина // Чебышевский сборник, 2017. Т. 18, вып. 2. С. 54–97.

DOI: 10.22405/2226-8383-2017-18-2-54-97

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Н. Н. Добровольскому принадлежат все теоремы.

7. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Д. К. Соболев, В. Н. Соболева. Классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей // Чебышевский сборник, 2017. Т. 18, вып. 2. С. 98–128.

DOI: 10.22405/2226-8383-2017-18-2-98-128

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Н. Н. Добровольскому принадлежат все теоремы.

8. Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский Алгебраические решётки в метрическом пространстве решёток // Чебышевский сборник, 2017. Т. 18, вып. 4. С. 326–338.

DOI: 0.22405/2226-8383-2017-18-4-325-337

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Н. Н. Добровольскому принадлежат все теоремы.

9. Н. Н. Добровольский Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сборник, 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.

DOI: 10.22405/2226-8383-2017-18-4-187-207

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

10. Н. Н. Добровольский. О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сборник, 2018. Т. 19, вып. 1. С. 79–105.

DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-1-79-105

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

11. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сборник, 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 106–123.

DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-1-106-123

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Н. Н. Добровольскому принадлежат все теоремы.

12. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости // Чебышевский сборник, 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 142–150.

DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-142-150

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

13. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 123–141.

DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-123-141

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Н. Н. Добровольскому принадлежат все теоремы.

14. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О моноиде квадратичных вычетов // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 3. — С. 95–108.

DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-3-95-108

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Н. Н. Добровольскому принадлежат все теоремы.

15. Добровольский Н. Н. О двух асимптотических формулах в теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник, 2018. Т. 19, вып. 3. С. 109–134.

DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-3-109-134

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

16. И. Ю. Реброва, В. Н. Чубариков, Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О классических теоретико-числовых сетках // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 4, С. 118–176.

DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-4-118-176

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

17. Н. Н. Добровольский. Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 148–163.

DOI: 10.22405/2226-8383-2019-20-1-148-163

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

English trans.: Dobrovolskii, N. N. A model zeta function of the monoid of natural numbers. Dokl. Math. 106, Part Suppl. 2, S192-S200 (2022);

18. Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов. Моноиды натуральных чисел в теоретико-числовом методе в приближенном анализе // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1. С. 164–179.

DOI: 10.22405/2226-8383-2019-20-1-164-178

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Н. Н. Добровольскому принадлежат все теоремы.

19. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 180–196.  
DOI: 10.22405/2226-8383-2019-20-1-179-194  
Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31  
Н. Н. Добровольскому принадлежат все теоремы.
20. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Об одном обобщенном эйлеровом произведении, задающем мероморфную функцию на всей комплексной плоскости // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 2, С. 156–168.  
DOI: 10.22405/2226-8383-2019-20-2-156-168  
Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31  
Н. Н. Добровольскому принадлежат все теоремы.
21. Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Гладкое многообразие одномерных решёток // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, вып. 3, С. 165–185.  
DOI: 10.22405/2226-8383-2020-21-3-165-185  
Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31  
Н. Н. Добровольскому принадлежат все теоремы.
22. Н. Н. Добровольский, Д. В. Горбачёв, В. И. Иванов. О трёхмерных сетках Смоляка II // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 3, С. 100–121.  
DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-3-100-121  
Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31  
Н. Н. Добровольскому принадлежат все теоремы.
23. Е. М. Рарова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Тригонометрические суммы сеток алгебраических решеток с бесконечно дифференцируемыми весами // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 3, С. 166–178.  
DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-3-166-178  
Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31  
Н. Н. Добровольскому принадлежат все теоремы.
24. Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов, Н. М. Добровольский. Гладкое многообразие одномерных сдвинутых решёток // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 3, С. 196–231.  
DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-3-196-231  
Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31  
Н. Н. Добровольскому принадлежат все теоремы.
25. Н. Н. Добровольский, С. А. Скобельцын, Л. А. Толоконников, Н. В. Ларин. О применении теоретико-числовых сеток в задачах акустики // Чебышевский сборник, 2021, Т. 22, вып. 3, С. 368–382.  
DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-3-368-382  
Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31  
Н. Н. Добровольскому принадлежат все теоремы.

26. А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. О гиперболическом параметре двумерной решётки сравнений // Чебышевский сборник, 2021, Т. 22, вып. 4, С. 167–181.

DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-4-167-181

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Н. Н. Добровольскому принадлежат все теоремы.

27. М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Об одном функциональном уравнении // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 5, С. 359–364.

DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-5-359-364

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Н. Н. Добровольскому принадлежат все теоремы.

28. Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Об обобщённых неравномерных сетках Коробова // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 5, С. 365–373.

DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-5-365-373

Журнал индексируется в Scopus, RSCI. IF: SJR 0.31

Н. Н. Добровольскому принадлежат все теоремы.

На диссертацию и автореферат не поступило дополнительных отзывов.

Выбор официальных оппонентов обосновывался высоким уровнем их компетентности в области аналитической теории чисел, диофантовых приближений, а также наличием публикаций близких к теме диссертации, в том числе публикаций за последние пять лет, список которых был представлен диссертационному совету.

**Диссертационный совет отмечает, что представленная диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований решены крупные научные задачи в разделах аналитической теории чисел, диофантовых приближений, автором разработаны новые методы параметрических множеств и дробно-линейных преобразований минимальных многочленов остаточных дробей, которые могут быть использованы при чтении обязательных курсов и спецкурсов по теоретико-числовому методу в приближенном анализе в ВУЗ-ах Российской Федерации.**

**Диссертация представляет собой самостоятельное законченное исследование, обладающее внутренним единством.** Положения, выносимые на защиту:

1. Почленное логарифмирование бесконечного эйлерова произведения задает в области абсолютной сходимости непрерывную функцию, которая в подходящей полуплоскости задает главное значение логарифма эйлерова произведения, а при приближении к границе области абсолютной сходимости пробегает все ветви логарифмической функции.

2. Теория гиперболической дзета-функции Гурвица является вполне содержательной и аналогична теории обычной дзета-функции Гурвица.

3. Моноиды натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы характеризуются тем свойством, что их дзета-функция равна произведению Эйлера.

4. Для дзета-функций вложенных моноидов натуральных чисел справедлив принцип вложенности.

5. Для дзета-функции моноидов натуральных чисел значение абсциссы абсолютной сходимости может изменяться от 0 до 1.

6. Областью голоморфности дзета-функции  $\zeta(M(PE)|\alpha)$  является  $\alpha$ -полуплоскость  $\sigma > 0$ .

7. Методом параметрических множеств, получены две новые асимптотические формулы из теории гиперболической дзета-функции решёток.

8. Любой моноид  $M(PE)$  для произвольной экспоненциальной последовательности простых  $PE$  типа  $q$  имеет  $C$  логарифмическую  $\theta$ -степенную плотность.

9. Приведённые алгебраические иррациональности в случае чистовещественных алгебраических полей и обобщённые числа Пизо в общем случае играют принципиальную роль в вопросах разложения алгебраических иррациональностей в цепную дробь. Начиная с некоторого места все остаточные дроби являются приведёнными алгебраическими числами в первом случае и приведёнными обобщёнными числами Пизо — во втором случае.

10. С каждым моноидом  $M$  натуральных чисел связывается класс периодических функций, который вложен в хорошо известный класс Н.М. Коробова. Этот класс периодических функций замкнут относительно интегральных операторов Фредгольма и на нем разрешимо интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

11. Теория дзета-функций моноидов натуральных чисел входит как составная часть в более общую теорию алгебры рядов Дирихле моноидов натуральных чисел.

Диссертация содержит новые научные результаты, свидетельствующие о личном вкладе автора в науку. К числу таких результатов относятся:

- 1) Почленное логарифмирование эйлерова произведения задает в области абсолютной сходимости непрерывную функцию, которая в подходящей полуплоскости задает главное значение логарифма эйлерова произведения, а при приближении к границе области абсолютной сходимости пробегает все ветви логарифмической функции.
- 2) Построена теория гиперболической дзета-функции Гурвица.

- 3) Дано определение дзета-функции моноида натуральных чисел и установлена его связь с произведением Эйлера.
- 4) Описан общий вид моноида натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы.
- 5) Построены дзета-функции моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости.
- 6) Доказана гипотеза о «заградительном ряде» для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых и построено обобщенное эйлерово произведение, задающее мероморфную функцию на всей комплексной плоскости.
- 7) Выведены две новые асимптотические формулы для гиперболической дзета-функции решёток.
- 8) Решена обратная задача для моноида с экспоненциальной последовательностью простых.
- 9) Найдены формулы для минимальных многочленов остаточных дробей для алгебраических иррациональностей.
- 10) Описаны новые направления исследований, связанные с теорией дзета-функций моноидов натуральных чисел.

В работе используются общая методология теоретико-числового метода Коробова в приближенном анализе, метод тригонометрических сумм, геометрия чисел, теория сравнений, общие подходы из теории дзета-функции Римана и теории рядов Дирихле, метод дробно-линейных преобразований для минимальных многочленов.

**Все результаты диссертации являются новыми.** Результаты других авторов, упомянутые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками. **Результаты диссертации прошли апробацию** на многочисленных международных и всероссийских конференциях и научно-исследовательских семинарах. Основные результаты опубликованы в научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки).

**Сформулированные в диссертации положения доказаны автором самостоятельно, они теоретически значимы, являются существенным продвижением в решении важной в теоретическом плане проблемы аналитических свойств широкого класса дзета-функций моноидов натуральных чисел и проблемы поведения остаточных дробей алгебраических иррациональностей.**

**На заседании 29 марта 2024 года диссертационный совет принял решение присудить Добровольскому Н. Н. ученую степень доктора физико-математических наук.**

При проведении тайного голосования диссертационный совет в количестве 19 человек, из них 9 докторов наук по специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика, участвовавших в заседании, из 22 человека, входящих в состав совета, проголосовали: за —15, против — нет, недействительных бюллетеней — 4.

Председатель  
диссертационного совета,  
доктор физико-математических наук,  
профессор

Чубариков В.Н.

Учёный секретарь  
диссертационного совета,  
доктор физико-математических наук,

Мануйлов В.М.

29 марта 2024 года