МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Гарманова Татьяна Алексеевна

КОНСТАНТЫ ВЛОЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2025

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель:	**Шейпак Игорь Анатольевич** доктор физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Безродных Сергей Игоревич** доктор физико-математических наук, профессор РАН, член-корреспондент РАН, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, главный научный сотрудник
	Степанов Владимир Дмитриевич доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, Хабаровский федеральный исследовательский центр ДВО РАН, главный научный сотрудник вычислительного центра ДВО РАН
	Шапошников Станислав Валерьевич доктор физико-математических наук, МГУ имени М.В. Ломоносова, профессор кафедры математического анализа механико-математического факультета

Защита диссертации состоится «16» мая 2025г. в 16 ч.00 мин. на заседании диссертационного совета МГУ.011.3 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119234, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д.1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 1624.

E-mail: mexmat_disser85@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале https://dissovet.msu.ru/dissertation/3380.

Автореферат разослан «   » апреля 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.3,
доктор физико-математических наук   В.Б. Шерстюков

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Пусть X, Y — банаховы пространства и имеет место непрерывное вложение $X \hookrightarrow Y$. Константой вложения (иногда точной константой вложения) пространства X в пространство Y называют норму оператора вложения $J : X \to Y$, $Jx = x$, $\forall x \in X$.

В качестве пространств X и Y часто рассматривают пространства Соболева $W_p^n(\Omega, U)$ с параметрами $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $n \in \mathbb{N}$ и $\Omega \subset \mathbb{R}$, состоящие из вещественнозначных функций, все производные которых до $n-1$ порядка включительно абсолютно непрерывны на Ω, $f^{(n)} \in L_p(\Omega)$ и функции f удовлетворяют краевым условиям U. В качестве множества Ω обычно рассматривают следующие множества:

$$\Omega \in \{\mathbb{R}, \quad [0, +\infty), \quad [-1, 1], \quad [0, 1]\}.$$

Задача о нахождении констант вложения пространств $W_p^n(\Omega, U)$ в пространства $W_q^k(\Omega, U)$ имеет достаточно долгую историю и многие результаты были получены еще до возникновения понятия пространств Соболева. Одним из предшественников теории вложений в пространствах Соболева является вопрос об оценке норм промежуточных производных функций через их нормы и нормы их старших производных, а именно неравенства типа Колмогорова.

Согласно работе[1], под неравенствами для производных колмогоровского типа традиционно понимают мультипликативные неравенства вида

$$\left\| f^{(k)} \right\|_{L_q(\Omega)} \leqslant K \left\| f \right\|_{L_p(\Omega)}^{\alpha} \left\| f^{(n)} \right\|_{L_r(\Omega)}^{\beta}, \tag{0.0.1}$$

выполненные для всех функций $f \in L_p(\Omega)$, у которых $(n-1)$-ая производная локально абсолютно непрерывна на Ω и $f^{(n)} \in L_r(\Omega)$. Здесь $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, параметры $p, q, r \in [1, \infty]$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, а множество Ω как правило выбирают равным $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}_+$. При этом, для заданного множества Ω, неравенство (0.0.1) зависит от пяти параметров: n, k, p, q и r, а величины α и β однозначно ими определяются по формулам

$$\alpha = \frac{n - k - 1/r + 1/q}{n - 1/r + 1/p}, \quad \beta = 1 - \alpha.$$

Первые точные константы в неравенствах типа Колмогорова были получены в 1913–1914 годах в работах Э. Ландау[2] ($\Omega = \mathbb{R}_+$, $n = 2$, $k = 1$,

[1] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. О неравенствах для производных колмогоровского типа // Математический сборник. – 1997. – Т. 188, № 12. – С. 73–106.

[2] Landau E. Einige Ungleichungen für zweimal differenzierbare Funk-tionen // Proc. London. Math. Soc. – 1913. – Vol. 2, No. 13. – P. 43–49.

$p = q = r = \infty$) и Ж. Адамара[3] ($\Omega = \mathbb{R}$, $n = 2$, $k = 1$, $p = q = r = \infty$). В 1939 г. в работе А. Н. Колмогорова[4] были найдены точные константы K в неравенстве (0.0.1) при $\Omega = \mathbb{R}$, $p = q = r = \infty$ и при любых $n \geqslant 2$, $k = 1, \ldots, n-1$. На сегодняшний день этот результат остается одним из наиболее выдающихся в данной тематике, и именно поэтому неравенства вида (0.0.1) и их обобщения называют неравенствами колмогоровского типа.

Для бесконечных интервалов обобщенные неравенства типа Колмогорова изучались во многих работах. Упомянем, например, работу[5], в которой были получены наилучшие константы в неравенствах

$$\|f^{(k)}\|^2_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leqslant C \sum_{j=0}^{n} \|f^{(j)}\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}, \quad f \in W_2^n(\mathbb{R}_+),$$

и работу[6], в которой были найдены наилучшие константы в неравенствах

$$\left| f^{(k)}(0) \right|^2 \leqslant C_{n,k} \sum_{j=0}^{n} a_j \|f^{(j)}\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}, \quad f \in W_2^n(\mathbb{R}_+),$$

при $a_0 > 0$, $a_n > 0$ и $a_j \geqslant 0$, $0 < j < n$.

Нахождение норм операторов вложения в некоторых пространствах Соболева эквивалентно нахождению наилучших констант в неравенствах колмогоровского типа при $\alpha = 0$. При этом множество $\Omega \subset \mathbb{R}$ обычно имеет конечную меру Лебега, а краевые условия таковы, что «усечённая» норма $\|f\| := \|f^{(n)}\|_{L_r(\Omega)}$ эквивалентна стандартной норме в $W_r^n(\Omega)$.

В пространствах Соболева на отрезке можно рассматривать достаточно широкий класс краевых условий, для которых выполнено условие эквивалентности норм, указанное выше (см. например[7,8,9]). Также существуют исследования констант вложения для весовых пространств Соболева (см.[10]).

[3] Hadamard J. Sur le module maximum d'une fonction et de ses dérivées // Bull. Soc. Math. France. – 1914. – Vol. 42. – P. 68–72.

[4] Колмогоров А. Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Уч. зап. МГУ. Математика. – 1939. – Т. 30, Кн. 3. – С. 3–16.

[5] Watanabe K., Kametaka Y., Nagai A., Takemura K., Yamagishi H. The best constant of Sobolev inequality on a bounded interval // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – Vol. 340, No. 1. – P. 699–706.

[6] Лунёв А. А., Оридорога Л. Л. Точные константы в обобщенных неравенствах для промежуточных производных // Математические заметки. – 2009. – Т. 85, № 5. – С. 737–744.

[7] Yamagishi H. The best constant of Sobolev inequality corresponding to Dirichlet–Neumann boundary value problem for $(-1)^M(d/dx)^{2M}$ // Hiroshima Math. J. – 2009. – Vol. 39, No. 3. – P. 421–442.

[8] Yamagishi H., Kametaka Y., Nagai A., Watanabe K., Takemura K. Riemann zeta function and the best constants of five series of Sobolev inequalities // RIMS Kôkyûroku Bessatsu. – 2009. – Vol. 13. – P. 125–139.

[9] Шейпак И. А. Числа Бернулли в константах вложения пространств Соболева с различными краевыми условиями // Алгебра и анализ. – 2023. – Т. 35, № 2. – С. 226–245.

[10] Калябин Г. А. О двусторонних и асимптотических оценках норм операторов вложения пространств $\mathring{W}_2^n(-1,1)$ в $L_q(d\mu)$ // Труды математического института им. В. А. Стеклова. – 2014. – Т. 284 – С. 169–175.

Однако, привести все работы по точным константам вложения, охватывающие различные краевые условия и различные весовые функции в пространствах Соболева, не представляется возможным. Одними из наиболее сложных для исследований краевых условий в пространстве $W_p^n[0,1]$ являются краевые условия Дирихле:

$$f^{(j)}(0) = f^{(j)}(1) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1$$

и именно они будут рассмотрены в данной работе.

Обозначим через $\mathring{W}_p^n[0,1]$ пространство вещественнозначных функций $W_p^n[0,1]$, для которых выполнены краевые условия Дирихле. Это пространство снабжено нормой

$$\|f\|_{\mathring{W}_p^n[0,1]} := \|f^{(n)}\|_{L_p[0,1]} = \left(\int\limits_0^1 |f^{(n)}(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\|f\|_{\mathring{W}_\infty^n[0,1]} := \|f^{(n)}\|_{L_\infty[0,1]} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[0,1]} \left|f^{(n)}(x)\right|,$$

которая для указанных краевых условий эквивалентна стандартной (см.[11,§4]).

Рассмотрим оператор вложения $J_{n,k,p,q} : \mathring{W}_p^n[0,1] \hookrightarrow \mathring{W}_q^k[0,1]$, при $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, \ldots, n-1$. Константы вложения в пространствах Соболева с краевыми условиями Дирихле определяются по формуле

$$\|J_{n,k,p,q}\| = \Lambda_{n,k,p,q} := \sup_{\substack{f\in\mathring{W}_p^n[0,1],\\ f\neq 0}} \frac{\|f^{(k)}\|_{L_q[0,1]}}{\|f^{(n)}\|_{L_p[0,1]}}.$$

Решение задачи о нахождении $\Lambda_{n,k,p,q}$ даже в случае $n = 1$, $k = 0$ заняло почти 40 лет. При $p = q = 2$ константа вложения была получена в 1901 году В. А. Стекловым[12], при $p = q = 2l$ в 1934 г. Г. Х. Харди[13], при $p = q$ в 1938 г. В. И. Левиным[14], и, наконец, при произвольных p и q, Э. Шмидтом[15] в 1940 году. Результат Э. Шмидта заключается в следующем:

Теорема (Шмидт[15], 1940). Константы $\Lambda_{1,0,p,q}$ равны

$$\Lambda_{1,0,p,q} = \frac{F(\frac{1}{q}+\frac{1}{p'})}{2F(\frac{1}{q})F(\frac{1}{p'})}, \quad F(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s^s}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

[11]Фаддеев Д. К., Вулих Б. З., Уральцева Н. Н. Избранные главы анализа и высшей алгебры // Л: Издательство Ленинградского университета – 1981 – 200 С.

[12]Stekloff W. Problème de refroidissement d'une barre hétérogène // Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques. – 1901. – Vol. 3, No. 3. – P. 281–313.

[13]Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G. Inequalities // Cambridge University Press. – 1934. – 314 P.

[14]Левин В. И. О неравенствах. II. Об одном классе интегральных неравенств. // Математический сборник. – 1938. – Т. 4, № 2. – С. 309–324.

[15]Shmidt E. Über die Ungleichung, welche die Integrale über eine Potenz einer Function und über eine andere Potenz ihrer Ableitung verbindet. // Math. Ann. – 1940. – Vol. 117. – P. 301–326.

Формула, полученная Э. Шмидтом, позволяет понять, насколько изучаемая задача сложна для произвольных p и q, а также объясняет большой временной интервал между первыми и дальнейшими результатами.

Следующее существенное продвижение в данной задаче было получено в работе А. И. Назарова[16] (2002 г.), в которой было доказано, что при $q \leqslant 3p$ справедливо соотношение

$$\Lambda_{2,1,p,q} = \frac{\Lambda_{1,0,p,q}}{2}, \quad q \leqslant 3p.$$

Дальнейшие продвижения связаны, как правило, с выбором конкретных значений параметров p, q, n и k. Исследования в гильбертовых пространствах $p = 2$ или $q = 2$ чаще всего оказываются легче других случаев, но и они значительно усложняются при увеличении значений параметров n и k.

В 2008 г. в работе[17] в терминах нулей функций Бесселя были получены точные константы $\Lambda_{n,n-1,2,2}$ (на отрезке $[-1, 1]$). Отметим, что специальные функции оказались важным и весьма мощным инструментом при изучении констант вложения.

В 2009 г. в работе[18] были получены двусторонние несходящиеся оценки для констант $\Lambda_{n,0,2,2}$ при $n \to \infty$. Данная работа также интересна тем, что в ней приведен ряд задач, эквивалентных нахождению констант $\Lambda_{n,0,2,2}$ (неравенства Вертингера–Соболева, спектральные свойства Теплицевых матриц, оценки норм функции Грина и др.).

Работа[18] дала толчок развитию исследований по крайней мере по двум направлениям. В работе[19], задача о нахождении констант $\Lambda_{n,k,2,2}$ была решена полностью. Результат оказался весьма нетривиален, константы вложения выражаются через определители, построенные по значениям функций Бесселя полуцелого порядка в специально выбранных точках.

В 2010 г. в работе[20] результаты[18] получили другое развитие. В частности в указанной работе изучалась задача о получении констант вложения $\Lambda_{n,k,2,\infty}$. С помощью методов, развитых в этой статье, Г. А. Калябину удалось получить двусторонние сходящиеся оценки для констант $\Lambda_{n,0,2,2}$ при $n \to \infty$.

Необходимо заметить, что при $q = \infty$ возникает дополнительная задача

[16] Nazarov A. I. On Exact Constant in the Generalized Poincare Inequality // Journal of Mathematical Sciences. – 2002. – Vol. 112. – P. 4029–4047.

[17] Назаров А. И., Петрова А. Н. О точных константах в некоторых теоремах вложения высокого порядка // Вестн. Санкт-Петербургского ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. Астрон. – 2008. – № 4. – С. 16–20.

[18] Böttcher A., Widom H. From Toeplitz eigenvalues through Green's kernels to higher-order Wirtinger–Sobolev inequalities // Operator Theory: Advances and Applications, Birkhäuser Basel. – 2006. – Vol. 171. – P. 73–87.

[19] Петрова Ю. П. Спектральные асимптотики для задач с интегральными ограничениями // Математические заметки. – 2017. – Т. 102, № 3. – С. 405–414.

[20] Калябин Г. А. Точные оценки для производных функций из классов Соболева $\mathring{W}_2^r(-1,1)$ // Труды МИАН. – 2010. – Т. 269. – С. 143–149.

об оценке значений производных промежуточного порядка. Определим для функций $f \in \mathring{W}_p^n[0,1]$ и произвольного числа $a \in [0,1]$ величины $A_{n,k,p}(a)$, являющиеся наилучшими в неравенствах

$$|f^{(k)}(a)| \leqslant A_{n,k,p}(a)\|f^{(n)}\|_{L_p[0,1]}.$$

Другими словами, оценочные функции $A_{n,k,p}$ определяются как

$$A_{n,k,p}(a) := \sup\{|f^{(k)}(a)| : \ \|f^{(n)}\|_{L_p[0,1]} = 1, \ f \in \mathring{W}_p^n[0,1]\}.$$

Тогда константы вложения $\Lambda_{n,k,p,\infty}$ связаны с функциями $A_{n,k,p}$ по формуле

$$\Lambda_{n,k,p,\infty} = \max_{a\in[0,1]} A_{n,k,p}(a).$$

В работе[20] были детально изучены величины $A_{n,k,2}$ и получены константы вложения $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ для произвольных $n \in \mathbb{N}$ и $k = 0, 1, 2$ (на отрезке $[-1, 1]$). Для отрезка $[0, 1]$ и $k = 0$ этот результат формулируется следующим образом:

Теорема (Калябин[20], 2010). Функции $A^2_{n,0,2}(a)$, $a \in [0, 1]$ и константы вложения $\Lambda_{n,0,2,\infty}$ имеют вид:

$$A^2_{n,0,2}(a) = \frac{(a-a^2)^{2n-1}}{(2n-1)((n-1)!)^2},$$

$$\Lambda^2_{n,0,2,\infty} = \frac{1}{2^{4n-2}\,(2n-1)\,((n-1)!)^2}.$$

На основе изучения свойств функций $A_{n,k,2}$ в этих случаях, Г. А. Калябиным была высказана следующая гипотеза о глобальном максимуме оценочных функций: при четных k глобальный максимум функций $A_{n,k,2}$ находится в середине отрезка и, соответственно, $\Lambda_{n,k,2,\infty} = A_{n,k,2}(1/2)$, а при нечетных k середина отрезка является точкой локального минимума функций $A_{n,k,2}$. Кроме того, был поставлен вопрос об описании экстремальных функций $g_{n,k}$, для которых достигается равенство

$$|g^{(k)}_{n,k}(a)| = A_{n,k,p}(a)\|g^{(n)}_{n,k}\|_{L_p[0,1]}.$$

В работе[21] (2014 г.) была доказана ослабленная гипотеза Г. А. Калябина, а именно, было показано, что при четных k середина отрезка является точкой локального максимума функции $A_{n,k,2}$, а при нечетных k — точкой локального минимума. Также в этой статье были вычислены (с арифметической ошибкой) $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ при $k = 4, 6$. Исправления даны в[22].

[21]Мукосеева Е. В., Назаров А. И. О симметрии экстремали в некоторых теоремах вложения // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2014. – Т. 425. – С. 35–45.

[22]Мукосеева Е. В., Назаров А. И. Corrigendum // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2020. – Т. 489. – С. 225.

Отметим, что помимо задачи о нахождении точных констант вложения, часто рассматривается вопрос о свойствах экстремальных функций задачи. В частности большой интерес представляет вопрос о симметрии (относительно середины отрезка) экстремальной функции. Достаточно полный на данный момент обзор по точным константам вложения в пространствах Соболева с краевыми условиями Дирихле и симметричности экстремалей данной задачи содержится в[23].

Константы вложения $\Lambda_{n,k,p,\infty}$ с показателем $p \neq 2$ изучены гораздо меньше. В работе[24] были получены точные константы вложения пространств $\mathring{W}_p^n[0,1]$ в пространства $\mathring{W}_\infty^k[0,1]$ при $k = 0$, $n = 1, 2, 3$ и $1 < p < \infty$. Также некоторые продвижения получены в работе[25], в которой в предположении симметричности экстремальной функции при $k = 0$ получены константы вложения $\mathring{W}_1^n[0,1]$ в пространство $L_\infty[0,1]$ при $n = \overline{1,6}$.

Цель работы. Целью данной работы является исследование констант вложения $\Lambda_{n,k,p,\infty}$ пространств $\mathring{W}_p^n[0,1]$ в пространства $\mathring{W}_\infty^k[0,1]$, при $p \in [1,\infty]$ и $n > k \geqslant 0$, а также связанных с ними оценочных функций $A_{n,k,p}(a)$. В частности, целями работы являются:

- Нахождение и описание экстремальных функций задачи, для которых выполнено
$$\left|g_{n,k}^{(k)}(a)\right| = A_{n,k,2}(a)\left\|g_{n,k}^{(n)}\right\|_{L_2[0,1]}.$$

- Описание функций $A_{n,k,2}(a)$ и их свойств при всех $n \geqslant k > 0$, а также нахождение точных значений констант $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ при всех четных k и получение сходящихся двусторонних оценок для $\Lambda_{n,k,2,\infty}$, при нечетных k.

- Установление эквивалентности задачи о нахождении констант вложения $\Lambda_{n,k,p,\infty}$ с некоторой задачей теории приближений.

- Вычисление констант $\Lambda_{n,n-1,1,\infty}$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

- Вычисление скалярных произведений от первообразных многочленов Лежандра и применение полученных результатов к некоторым спектральным задачам и константам вложения $\Lambda_{n,k,2,2}$.

[23]Nazarov A. I., Shcheglova A. P. Steklov-type 1D inequalities (a survey) // arXiv:2101.10752 [math.CA]. – 2021. – P. 1–13.

[24]Watanabe K., Kametaka Y., Nagai A., Yamagishi H., Takemura K. Symmetrization of Functions and the Best Constant of 1-DIM L_p Sobolev Inequality // Journal of Inequalities and Applications. – 2009. – Vol. 2009. – P. 1–12.

[25]Шейпак И. А. Многочлены чебышевского типа, возникающие в предельных неравенствах Пуанкаре // Математические заметки. – 2022. – Т. 112, № 4. – С. 153–157.

Научная новизна. Основные результаты, представленные в диссертации, являются новыми и состоят в следующем:

1. Получено явное описание экстремальных сплайнов задачи в случае, когда исходное пространство Соболева $\mathring{W}_p^n[0,1]$ является гильбертовым ($p = 2$). Доказано соответствие между симметрией экстремали и четностью параметра k.

2. Получено явное описание величин $A_{n,k,2}^2(a)$ при всех $n > k \geqslant 0$ в терминах гипергеометрических функций и описана структура их максимумов и минимумов. Доказана усиленная гипотеза Г. А. Калябина о глобальном максимуме.

3. Найдены точные константы вложения пространства $\mathring{W}_2^n[0,1]$ в пространство $\mathring{W}_\infty^k[0,1]$ при всех четных $k \geqslant 0$ и получены сходящиеся двусторонние оценки констант вложения при всех нечетных $k \geqslant 1$.

4. В случае произвольного интегрального параметра $p \in [1,\infty]$, доказана эквивалентность задачи о нахождении константы вложения $\Lambda_{n,k,p,\infty}$ и задачи о приближении сплайнов специального вида многочленами по норме $L_{p'}[0,1]$, где $1/p + 1/p' = 1$.

5. Найдены точные константы вложения $\Lambda_{n,n-1,1,\infty}$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

6. Вычислены скалярные произведения между первообразными смещенных многочленов Лежандра в пространстве $L_2[0,1]$, в том числе вычислены нормы $\|P_m^{(-j)}\|_{L_2[0,1]}$, при всех $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leqslant j \leqslant m$.

Методы исследования. В диссертации используются методы математического и функционального анализа, теории специальных функций, спектральной теории дифференциальных операторов, теории приближений и теории дифференциальных уравнений, а также ряд оригинальных конструкций.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы для дальнейшего развития теории вложений в пространствах Соболева, а также в различных вопросах теории функций, теории гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром, теории приближений и спектральной теории операторов.

Соответствие паспорту научной специальности. В диссертации изучаются константы вложения в пространствах Соболева и связанные с ними специальные функции, поэтому тема диссертации соответствует паспорту

специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ по направлениям исследований:
3. Теория функциональных пространств; исследования классов функций, возникающих в математике и ее приложениях.
9. Функциональный анализ, линейные отображения бесконечномерных пространств (функционалы, операторы).
13. Специальные функции и интегральные преобразования.

Положения, выносимые на защиту:

1. В гильбертовом случае ($p = 2$) получено явное описание экстремальных сплайнов задачи, на которых достигается равенство в неравенстве
$$\left|f^{(k)}(a)\right| \leqslant A_{n,k,2}(a)\left\|f^{(n)}\right\|_{L_2[0,1]}.$$

2. Для функций $A_{n,k,2}(a)$ доказана усиленная гипотеза о глобальном максимуме, а именно, что при всех четных k точка $a = 1/2$ является точкой глобального максимума функции $A_{n,k,2}(a)$, а при нечетных k, точкой глобального максимума $A_{n,k,2}(a)$ является точка локального максимума, ближайшая к $a = 1/2$.

3. Для функций $A_{n,k,2}(a)$ получено их явное описание в терминах гипергеометрических функций при всех $n > k \geqslant 0$, а также получены точные константы вложения $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ при всех четных k и сходящиеся двусторонние оценки для констант $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ при всех нечетных k.

4. В случае произвольного параметра $p \in [1, \infty]$ доказана эквивалентность задачи о нахождении оценочных функций $A_{n,k,p}(a)$ задаче о приближении сплайнов специального вида многочленами по норме $L_{p'}[0,1]$, где $1/p + 1/p' = 1$.

5. При всех $n \in \mathbb{N}$ найдены точные значения констант вложения $\Lambda_{n,n-1,1,\infty}$.

6. Для первообразных смещенных многочленов Лежандра $P_m^{(-j)}(x)$ фиксированного порядка $j \geqslant 0$ вычислены скалярные произведения при всех $m \geqslant j$.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались автором на следующих научных конференциях:

1. Международная научная конференция «Современные проблемы математики и механики», посвященная 80–летию академика В. А. Садовничего, МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия, 13–15 мая 2019.

2. Международная конференция «Spectral Theory and Mathematical Physics» Международный математический центр «Сириус», Сочи, Россия, 3–7 февраля 2020.

3. Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, Россия, 3–8 июля 2020.

4. Научная конференция «Ломоносовские чтения», МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия, 7–30 октября 2020.

5. Международная конференция «Spectral Theory and Mathematical Physics» посвященная М. Ш. Бирману, Санкт-Петербург, Россия, 22–26 июня 2021.

6. Международная научная конференция «Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis – X», Ростов-на-Дону, Россия, 22–27 августа 2021.

7. Международная конференция «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования, XVII: Теория операторов и дифференциальные уравнения», Владикавказ, Россия, 29 июня – 5 июля 2023.

А также на научно-исследовательских семинарах:

1. «Операторные модели в математической физике» под руководством чл.-корр. РАН А. А. Шкаликова, проф. И. А. Шейпака и проф. К. А. Мирзоева, механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова (многократно, 2019–2024).

2. «Геометрическая теория приближений» под руководством проф. П. А. Бородина, механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова (октябрь 2019).

3. Семинар по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики (семинар Никольского) под руководством чл.-корр. РАН О. В. Бесова, Математический институт имени В. А. Стеклова РАН (октябрь 2019).

4. Научно-исследовательский семинар по теории функций под руководством академика РАН Б. С. Кашина, академика РАН С. В. Конягина, проф. Б. И. Голубова, проф. М. И. Дьяченко, механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова (февраль 2024).

5. Научный семинар отдела теории приближения функций и отдела аппроксимаций и приложений, Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН (март 2024).

6. «Методы решения задач математической физики» под руководством академика РАН Ю.Г. Евтушенко, чл.-корр. РАН С.И. Безродных, д.ф.-м.н. В.И. Власова, д.ф.-м.н. С.Я. Степанова, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук (апрель 2024).

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации изложены в 7 публикациях автора. Все 7 публикаций [1—7] опубликованы в рецензируемых научных журналах, входящих в базы SCOPUS, Web of Science, RSCI.

Работы [1] и [2] выполнены совместно с И. А. Шейпаком, которому принадлежат постановка задачи и результаты нахождения констант вложения $\Lambda_{n,3,2,\infty}$ и $\Lambda_{n,5,2,\infty}$, которые не приводятся в данной диссертации. Все остальные доказательства результатов этих совместных работ получены автором диссертации лично. Работы [3,5—7] также выполнены совместно с И. А. Шейпаком, которому принадлежат постановка задачи и формулировки теорем, обозначенных в тексте как Теорема 1.4.1 и Теорема 2.3.2, а также идея применения соотношений для первообразных многочленов Лежандра к спектральным задачам. Все доказательства полученных результатов проведены автором диссертации лично. Работа [4] выполнена автором диссертации самостоятельно.

Также, автор имеет 5 публикаций в материалах международных конференций.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, основной части, состоящей из трех глав, заключения и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 78 страниц. Список литературы содержит 48 наименований.

Краткое содержание диссертации. Нумерация приводимых здесь результатов соответствует нумерации в основном тексте работы.

В **первой главе** подробно исследуется гильбертова ситуация, а именно константы вложения $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ пространств $\mathring{W}_2^n[0,1]$ в пространства $\mathring{W}_\infty^k[0,1]$, при $n \in \mathbb{N}$ и $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Для каждого $a \in [0,1]$ вводятся и изучаются величины $A_{n,k,2}(a)$, являющиеся наименьшими возможными в неравенствах вида

$$|f^{(k)}(a)| \leqslant A_{n,k,2}(a)\|f^{(n)}\|_{L_2[0,1]}, \quad f \in \mathring{W}_2^n[0,1], \tag{0.0.2}$$

и связанные с константами вложения по формуле

$$\Lambda_{n,k,2,\infty} = \max_{a\in[0,1]} A_{n,k,2}(a).$$

При этом, поскольку в первой главе изучается только случай $p=2$, то, чтобы упростить обозначения, иногда последний индекс у функций $A_{n,k,2}$ будет опускаться ($A_{n,k} := A_{n,k,2}$).

В первом разделе первой главы явно найдены экстремальные сплайны $g_{n,k}(x,a)$, для которых неравенство (0.0.2) обращается в равенство. А именно, если многочлены $h_{n,k}(x,a)$ определены следующим образом,

$$h_{n,k}(x,a)=\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^{n-1-l}C_{2n-1-k}^{n-1-l}x^{n-1-l}a^l\sum_{m=0}^{l}C_{n-1+m}^{m}x^m,$$

то выполнена теорема.

Теорема 1.1.1 *Функции $g_{n,k}$ определяются формулами:*

$$g_{n,k}(x,a)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{n-k-1}}{(2n-k-1)!}(1-a)^{n-k}x^n h_{n,k}(1-x,1-a), & x\in[0,a]\\ \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-k-1)!}a^{n-k}(1-x)^n h_{n,k}(x,a), & x\in[a,1]\end{cases}$$

Далее, во втором разделе первой главы получены рекуррентные соотношения между функциями $A^2_{n,k,2}(a)$ и первообразными смещенных (то есть определенных на отрезке $[0,1]$) многочленов Лежандра порядка $n-k$. Первообразные многочленов Лежандра порядка $0\leqslant j\leqslant m$ определяются по формуле Родрига

$$P_m^{(-j)}(x)=\left(\frac{(x^2-x)^m}{m!}\right)^{(m-j)}.$$

На основе этих соотношений получены ключевые утверждения о структуре производной функции $A^2_{n,k,2}$ и ее точках локального экстремума.

Лемма 1.2.5 *Для функций $A^2_{n,k}(a)$ справедливо соотношение*

$$\frac{d}{da}(A^2_{n,k})(a)=-P_{n-1}^{(k-n+1)}(a)\cdot P_n^{(k-n+1)}(a).$$

Лемма 1.2.6 *Нули полиномов $P_{n-1}^{(k-n+1)}$ и $P_n^{(k-n+1)}$ на интервале $(0,1)$ чередуются. Нули $P_{n-1}^{(k-n+1)}$ являются точками локального минимума, а нули $P_n^{(k-n+1)}$ — точками локального максимума функции $A^2_{n,k}(a)$.*

Основной результат второго раздела первой главы состоит в описании структуры точек локальных экстремумов функции $A^2_{n,k,2}$, которое позволяет установить какая из точек локальных экстремумов функции $A_{n,k,2}$ является её точкой глобального максимума.

Теорема 1.2.7 *При фиксированных n и k, значения функций $A^2_{n,k}(x)$ в точках локальных максимумов, лежащих на отрезке $[0,\frac{1}{2}]$, образуют неубывающую последовательность, а в точках локальных максимумов, лежащих на отрезке $[\frac{1}{2},1]$ — невозрастающую последовательность.*

Следствие 1.2.9 *Из теоремы 1.2.7 и леммы 1.2.6 непосредственно вытекает, что при любых $n \in \mathbb{N}$ и всех четных $k \geqslant 0$, точка $x = 1/2$ является точкой глобального максимума функции $A^2_{n,k}(x)$. Для нечетных k — точкой глобального максимума функции $A^2_{n,k}(x)$ является ноль многочлена $P_n^{(k-n+1)}(x)$, ближайший к середине отрезка.*

В третьем разделе первой главы вводится понятие гипергеометрического ряда, в терминах которого выражаются первообразные и производные многочленов Лежандра, а также соответсвующие рекуррентные соотношения, полученные во втором разделе первой главы. С использованием теории специальных функций удается получить явное описание функций $A_{n,k,2}$ в терминах гипергеометрических функций типа $(3,2)$.

Теорема 1.3.7 *При всех $n > k \geqslant 0$, функции $A^2_{n,k}(x)$ имеют вид*

$$A^2_{n,k}(x) = \frac{-t^{2n-2k-1}}{(2n-2k-1)((n-k-1)!)^2}\, {}_3F_2\left[\begin{matrix}-k,\, n-k-\frac{1}{2},\, 2n-k \\ n-k,\, 2n-2k\end{matrix};\, -4t\right],$$

где $t = x^2 - x$.

В четвертом разделе первой главы явно найдены константы вложения $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ при всех четных $k \geqslant 0$. Так как при четных k точкой глобального максимума функции $A_{n,k}$ является точка $a = 1/2$, то на основе свойств функций $A_{n,k}$ получен следующий результат.

Теорема 1.4.1 *Точные значения констант вложения $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ при всех четных $k \geqslant 0$ имеют вид*

$$\Lambda_{n,k,2,\infty} = A_{n,k}\,(1/2) = \frac{(k-1)!!}{2^{2n-3k/2-1}\,(n-k/2-1)!\,\sqrt{(2n-2k-1)}}.$$

В пятом разделе первой главы изучаются константы вложения при нечетных $k \geqslant 1$. Так как при нечетных k точка глобального максимума функции $A_{n,k,2}$ зависит от параметров n и k, то явные формулы для $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ при больших k получить не удается. Тем не менее, найдены двусторонние сходящиеся оценки для $\Lambda_{n,k,2,\infty}$.

Теорема 1.5.3 *Для любого нечетного $k \geqslant 1$, константы вложения $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ удовлетворяют соотношению*

$$C(n,k) \leqslant \Lambda_{n,k,2,\infty} \leqslant \sqrt{\frac{2n-k}{k+1}}C(n,k),$$

где

$$C(n,k) = \frac{k!!}{2^{2n-\frac{3k+1}{2}}\,(n-\frac{k+1}{2})!\,\sqrt{2n-2k-1}}.$$

Вторая глава посвящена описанию функций $A_{n,k,p}$ и нахождению констант вложения $\Lambda_{n,k,p,\infty}$ для произвольных значений интегрального параметра $p \in [1, \infty]$.

Аналогично определению в первой главе, для произвольного числа $a \in [0, 1]$ функции $A_{n,k,p}(a)$ определяются как наименьшие возможные величины в неравенствах

$$|f^{(k)}(a)| \leqslant A_{n,k,p}(a) \|f^{(n)}\|_{L_p[0,1]}.$$

В первом разделе второй главы доказывается ряд вспомогательных утверждений. В частности, описан класс функций $\mathcal{Q}_{n,k}$, такой что для всех $q^{(n)}_{n,k}(x, a) \in \mathcal{Q}_{n,k}$ выполнено

$$f^{(k)}(a) = \int\limits_0^1 f^{(n)}(x) q^{(n)}_{n,k}(x, a)\, dx.$$

Обозначим через p' гёльдерово сопряженное к p, то есть $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Основной результат первого раздела второй главы состоит в следующем.

Теорема 2.1.4 *При всех* $p \in (1, \infty)$, $0 \leqslant k < n$, *выполнено*

$$A_{n,k,p}(a) = \inf_{q^{(n)}_{n,k} \in \mathcal{Q}_{n,k}} \|q^{(n)}_{n,k}(\,\cdot\,, a)\|_{L_{p'}[0,1]}.$$

Во втором разделе второй главы показана связь функций $A_{n,k,p}$ с задачей о наилучшем приближении сплайнов специального вида многочленами по норме $L_{p'}[0, 1]$. Доказано, что достаточно искать наилучшее приближение для функций $g_{n,k}$, описанных в теореме 1.1.1 и являющихся экстремальными в случае $p = 2$.

Теорема 2.2.3 *При* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *справедливо равенство*

$$A_{n,k,p}(a) = \inf_{u \in \mathcal{P}_{n-1}} \|g^{(n)}_{n,k}(\,\cdot\,, a) - u\|_{L_{p'}[0,1]}.$$

Из свойств сплайнов $g_{n,k}$ также следует следующий результат.

Следствие 2.2.4 *При* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *выполнено равенство*

$$A_{n,k,p}(a) = \inf_{u \in \mathcal{P}_{n-1}} \|S_{n,k}(\,\cdot\,, a) - u\|_{L_{p'}[0,1]},$$

где $S_{n,k}(x, a) := \frac{(a-x)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \cdot \chi_{[0,a]}(x)$ *и* $\chi_{[0,a]}$ *— характеристическая функция отрезка* $[0, a]$.

В третьем разделе второй главы рассматривается случай $k = n - 1$, когда задача о нахождении констант вложения $\Lambda_{n,n-1,p,\infty}$ сводится к задаче о наилучшем приближении характеристической функции отрезка многочленами по норме $L_{p'}[0,1]$. В данном случае явно найдены константы вложения при $p=1$.

Теорема 2.3.1 *Константа вложения пространства* $\mathring{W}_1^n[0,1]$ *в пространство* $\mathring{W}_\infty^{n-1}[0,1]$ *равна*

$$\Lambda_{n,n-1,1,\infty} = \frac{1}{2}.$$

В **третьей главе** исследуются свойства первообразных смещенных многочленов Лежандра фиксированного порядка. А именно, указывается, какие первообразные многочленов Лежандра не ортогональны в пространстве $L_2[0,1]$ и явно находятся значения их скалярных произведений. В том числе явно вычислены нормы первообразных смещенных многочленов Лежандра фиксированного порядка в пространстве $L_2[0,1]$.

Эти свойства применяются для установления эквивалентности спектральных задач для некоторого класса дифференциальных операторов со спектральными задачами, порожденными обобщенными матрицами Якоби.

Основной результат третьей главы состоит в следующем.

Лемма 3.1.1 *Для любого фиксированного целого числа* $j \geqslant 0$ *и всех* $l > m \geqslant j$, *многочлены* $P_m^{(-j)}(x)$ *и* $P_l^{(-j)}(x)$ *могут быть не ортогональны друг другу только при* $l = m + 2i$, $i = 0, 1, \ldots, j$.

Теорема 3.1.2 *Для любых* $0 \leqslant j \leqslant m$ *и* $l = 0, 1, \ldots, j$, *справедливы соотношения*

$$\int\limits_0^1 P_m^{(-j)}(x) P_{m+2l}^{(-j)}(x)dx = (-1)^l C_{2j}^{j-l} \frac{(m-j+l+1)_{2j}}{(2m-2j+2l+1)_{4j+1}},$$

где $(x)_n := x(x+1)\ldots(x+n-1) = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$ *— символ Похгаммера.*

Заключение

В диссертации рассмотрены различные вопросы, касающиеся получения точных констант вложения в пространствах Соболева на отрезке. Основной акцент уделен получению констант вложения $\Lambda_{n,k,p,\infty}$ пространств $\mathring{W}_p^n[0,1]$ в пространства $\mathring{W}_\infty^k[0,1]$, при $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Основные результаты диссертации состоят в следующем.

1. Полностью изучен гильбертов случай $p = 2$ вложения пространства $\mathring{W}_2^n[0,1]$ в пространство $\mathring{W}_\infty^k[0,1]$ ($n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k < n$). Явно описаны экстремальные сплайны задачи. Доказано, что экстремаль задачи, для которой выполнено

$$\left\|\hat{f}^{(k)}\right\|_{L_\infty[0,1]} = \Lambda_{n,k,2,\infty} \left\|\hat{f}^{(n)}\right\|_{L_2[0,1]},$$

является симметричной относительно середины отрезка при четных k, а при нечетных k симметрией не обладает.

2. Получено явное описание оценочных функций $A^2_{n,k,2}(a)$, являющихся наименьшими возможными в неравенствах

$$\left|f^{(k)}(a)\right| \leqslant A_{n,k,2}(a) \left\|f^{(n)}\right\|_{L_2[0,1]}, \quad \forall f \in \mathring{W}^n_2[0,1],$$

в терминах гипергеометрических функций. Описана структура их максимумов и минимумов, и доказана усиленная гипотеза о глобальном максимуме функций $A_{n,k,2}(a)$.

3. Найдены точные значения констант вложения $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ при всех четных $k \geqslant 0$ и сходящиеся двусторонние оценки для констант $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ при всех нечетных $k \geqslant 1$.

4. Для произвольных значений параметра $p \in [1, \infty]$, доказано, что задача о нахождении функций $A_{n,k,p}(a)$ равносильна нахождению наилучшего приближения сплайна $\dfrac{(a-x)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\chi_{[0,a]}(x)$ многочленами степени не выше $n-1$ по норме пространства $L_{p'}[0,1]$, где $1/p + 1/p' = 1$.

5. Найдены точные константы вложения $\Lambda_{n,n-1,1,\infty}$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

6. Получены тождества для скалярных произведений первообразных многочленов Лежандра фиксированного порядка $j \geqslant 0$ в пространстве $L_2[0,1]$. Показана их связь со спектральными задачами для дифференциальных операторов определенного вида и с задачей о нахождении констант вложения $\Lambda_{n,k,2,2}$.

Рекомендации и перспективы по дальнейшей разработке темы диссертации.

- Исследовать функции $A_{n,n-1,p}(a)$ и константы $\Lambda_{n,n-1,p,\infty}$ с произвольным интегральным параметром $p \in (1, \infty)$, с помощью решения задачи о наилучшем приближении характеристической функции отрезка $[0, a]$ многочленами.

- Исследовать функции $A_{n,k,p}(a)$ и константы $\Lambda_{n,k,p,\infty}$ с некоторыми параметрами $p \in [1, \infty]$, с помощью решения задачи о налучшем приближении функции $\dfrac{(a-x)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\chi_{[0,a]}(x)$ многочленами по норме $L_{p'}[0,1]$.

- Исследовать константы вложения $\Lambda_{n,k,p,q}$ при других интегральных параметрах $q \in [1, \infty)$.

- Исследовать константы вложения пространств $W^n_{p,\mathcal{U}_1}[0,1]$ в пространства $W^k_{q,\mathcal{U}_2}[0,1]$ с другими классами краевых условий $\{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2\}$, отличными от краевых условий Дирихле.

Благодарности. Автор диссертации выражает признательность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Игорю Анатольевичу Шейпаку за постановку задач, их обсуждение и постоянную поддержку в работе, а также всему коллективу кафедры теории функций и функционального анализа за плодотворные дискуссии.

Работы автора по теме диссертации:

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ.011.3 по специальности 1.1.1. – вещественный, комплексный и функциональный анализ и входящих в базы цитирования Web of Science, Scopus и RSCI.

[1] Гарманова Т. А., Шейпак И. А. Свойства экстремумов оценок промежуточных производных нечетного порядка в классах Соболева // Доклады Академии наук. – 2019. – Т. 487, № 5. – С. 11–15.

ИФ РИНЦ – 0.859 / 0.313 п.л.

Garmanova T. A., Sheipak I. A. Properties of extrema of estimates for middle derivatives of odd order in Sobolev classes // Doklady Mathematics. – 2019. – Vol. 100, No. 1. – P. 367–371.

SCOPUS SJR – 0.458 / 0.313 п.л.

[2] Гарманова Т. А., Шейпак И. А. Явный вид экстремалей в задаче о константах вложения в пространствах Соболева // Труды Московского математического общества. – 2019. – Т. 80, № 2. – С. 221–246.

SCOPUS SJR – 0.325 / 1.625 п.л.

Garmanova T. A, Sheipak I. A. An explicit form for extremal functions in the embedding constant problem for Sobolev spaces // Transactions of the Moscow Mathematical Society. – 2020. – Vol. 80. – P. 189–210.

SCOPUS SJR – 0.325 / 1.375 п.л.

Работы [1] и [2] выполнены совместно с И. А. Шейпаком, которому принадлежат постановка задачи и результаты нахождения констант вложения $\Lambda_{n,3,2,\infty}$ и $\Lambda_{n,5,2,\infty}$, которые не приводятся в данной диссертации. Все остальные доказательства результатов этих совместных работ получены автором диссертации лично.

[3] Гарманова Т. А., Шейпак И. А. О точных оценках производных четного порядка в пространствах Соболева // Функциональный анализ и его приложения. – 2021. – Т. 55, № 1. – С. 43–55.

ИФ РИНЦ - 0.647 / 0.813 п.л.

Garmanova T. A., Sheipak I. A. On sharp estimates of even-order derivatives in sobolev spaces // Functional Analysis and its Applications. – 2021. – Vol. 55, No. 1. – P. 34–44.

SCOPUS SJR – 0.600 / 0.688 п.л.

Работа [3] выполнена совместно с И. А. Шейпаком, которому принадлежат постановка задачи и формулировки теоремы, обозначенной в тексте как Теорема 1.4.1. Все доказательства полученных результатов проведены автором диссертации лично.

[4] Гарманова Т. А. Оценки производных в пространствах Соболева в терминах гипергеометрических функций // Математические заметки. – 2021. – Т. 109, № 4. – С. 500–507.

ИФ РИНЦ - 0.455 / 0.5 п.л.

Garmanova T. A. Estimates of derivatives in Sobolev spaces in terms of hypergeometric functions // Mathematical Notes. – 2021. – Vol. 109, No. 4. – P. 527–533.
SCOPUS SJR – 0.418 / 0.438 п.л.

[5] Гарманова Т. А., Шейпак И. А. О соотношениях ортогональности первообразных многочленов Лежандра и их приложениях к некоторым спектральным задачам для дифференциальных операторов // Математические заметки. – 2021. – Т. 110, № 4. – С. 498–506.

ИФ РИНЦ - 0.455 / 0.563 п.л.

Garmanova T. A., Sheipak I. A. Orthogonality relations for the primitives of Legendre polynomials and their applications to some spectral problems for differential operators // Mathematical Notes. – 2021. – Vol. 110. – P. 489–496.

SCOPUS SJR – 0.418 / 0.5 п.л.

Работа [5] выполнена совместно с И. А. Шейпаком, которому принадлежат постановка задачи и идея применения соотношений для первообразных многочленов Лежандра к спектральным задачам. Все доказательства полученных результатов проведены автором диссертации лично.

[6] Гарманова Т. А., Шейпак И. А. Связь наилучших L_p приближений сплайнов многочленами с оценками значений промежуточных производных в пространствах Соболева // Математические заметки. – 2023. – Т. 114, № 4. – С. 623–627.

ИФ РИНЦ - 0.455 / 0.313 п.л.

Garmanova T. A., Sheipak I. A. Relationship between the best approximations of splines by polynomials with estimates of the values of intermediate derivatives in Sobolev spaces // Mathematical Notes. – 2023. – Vol. 114. – P. 625–629.

SCOPUS SJR – 0.418 / 0.313 п.л.

[7] Гарманова Т. А., Шейпак И. А. Точные оценки производных высокого порядка в пространствах Соболева // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2024. – № 1. – С. 3–10.

ИФ РИНЦ - 0.467 / 0.5 п.л.

Garmanova T. A., Sheipak I. A. Sharp estimates of high-order derivatives in Sobolev spaces // Moscow University Mathematics Bulletin. – 2024. – Vol. 79. – P. 1–10.

SCOPUS SJR – 0.344 / 0.625 п.л.

Работы [6] и [7] выполнены совместно с И. А. Шейпаком, которому принадлежат постановка задачи и формулировка теоремы, обозначенной в тексте как Теорема 2.3.2. Все доказательства полученных результатов проведены автором диссертации лично.