**Отзыв официального оппонента
на диссертацию Осинского Александра Игоревича
"Существование и построение близких к оптимальным столбцовых и крестовых аппроксимаций матриц" на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
по специальности 1.1.6 Вычислительная математика**

Представленная диссертация посвящена актуальным вопросам вычислительной математики, связанным с оценками погрешности столбцовых и крестовых аппроксимаций матриц в различных нормах, построением эффективных алгоритмов таких аппроксимаций и их приложениям. Полученные результаты имеют непосредственное отношение к работам Е.Е. Тыртышникова (1996 – н.вр.), С.А. Горейнова (1997 – н.вр.), Н.Л. Замарашкина (1997 – н.вр.), Д.В. Савостьянова (2001, 2006), М. Бебендорфа (2000 — н.вр.), М. Гу (1996 – 2004), И.В. Оседедца (2010 – н.вр.), Дж. Вилкинсона (1961), С. Ванга (2006–2016), Ф.Р. де Хоога (2007 – н.вр.), К. Бутсидиса (2009–2014), Н.В. Бриллиантова (2014, 2018), Д.А. Желткова (2013 – н.вр.), С.А. Матвеева (2014 – н.вр.), С.В. Петрова (2021 – н.вр.) и других математиков.

В первой главе диссертации обсуждается связь столбцовых и крестовых аппроксимаций с другими видами приближенного вычисления и представления матриц, напоминается вид наилучших столбцовых (крестовых) аппроксимаций и наилучших столбцовых (крестовых) аппроксимаций заданного ранга в норме Фробениуса (при заданном наборе столбцов или, соответственно, столбцов и строк, с помощью которых строится аппроксимация), напоминаются определения объема и r-проективного объема, выводятся вспомогательные свойства подматриц локально максимального объема.

Вторая, основная теоретическая, глава диссертации содержит доказательства (новых, известных и улучшений известных) верхних и нижних оценок погрешностей столбцовых и крестовых аппроксимаций матриц относительно их наилучшей аппроксимации заданного ранга r в трех основных нормах: чебышевской, спектральной и норме Фробениуса. Для чебышевской нормы такая относительная погрешность имеет верхнюю оценку порядка r при выборе r столбцов и строк, и верхнюю оценку порядка $\sqrt{r}$ при выборе произвольного количества строк и столбцов. Эти оценки точны по порядку, как показывают приводимые и полученные автором нижние оценки для приближения единичной матрицы. Для получения наилучших аппроксимаций в норме Чебышева используются столбцы или кресты локально максимального объема, принципиальная роль которых для приближения в чебышевской норме была выявлена Е.Е. Тыртышниковым и его учениками. Для спектральной нормы верхняя и нижняя оценки относительной погрешности столбцовых аппроксимаций матриц с N столбцами (при произвольном количестве $n \in [r, N]$ выбираемых столбцов) совпадают и равны так называемой t-функции $t(r, n, N)$ (при $n = r$ введенной Е.Е. Тыртышниковым в 1997 г.), для которой диссертант приводит различные представления и оценки. В случае нормы Фробениуса в работе получены новые верхние и нижние оценки относительной погрешности, которые хоть и не смыкаются (при количестве столбцов, большем ранга аппроксимации), но в определенном асимптотическом смысле являются оптимальными. Для нижних оценок диссертант вводит свою t_F-функцию. Особенного внимания заслуживает красивая и трудная теорема 2.20, в которой получены наилучшие на сегодня оценки относительной погрешности крестовой аппроксимации ранга r в норме Фробениуса. Глава завершается информативной таблицей, содержащей наилучшие известные верхние и нижние оценки относительной погрешности различных видов столбцовых и крестовых аппроксимаций заданного ранга для трех указанных норм. Более половины этих оценок получены диссертантом.

В третьей главе диссертации доказываются оценки сверху для математического ожидания относительной погрешности столбцовой (крестовой) аппроксимации ранга r в норме Фробениуса, построенной на основе выбора некоторой специальной подматрицы локально максимального объема, на ансамблях матриц со случайными унитарными матрицами правых сингулярных векторов (соответственно, случайными унитарными матрицами правых сингулярных векторов и левых сингулярных векторов). Эти ансамбли случайных матриц с фиксированным распределением сингулярных чисел вполне естественны в рассматриваемой задаче. Отметим, что для столбцовых аппроксимаций эти оценки сверху "в среднем" совпадают с полученными во второй главе оценками снизу в терминах t_F-функции. Интересно, что для индивидуальных матриц алгоритмы столбцовых аппроксимаций в норме Фробениуса, основанные на принципе максимального объема, могут давать далеко не оптимальную погрешность приближения — в работе строится соответствующий пример. В третьей главе получены также оценки вероятности отклонения относительных погрешностей столбцовых аппроксимаций на основе подматриц максимального (r-проективного) объема в норме Фробениуса от среднего значения, при этом рассматриваются различные случаи распределения сингулярных значений матриц ансамбля.

Четвертая, самая большая глава диссертации, посвящена алгоритмам поиска подматриц локально максимального объема и оценкам сложности этих алгоритмов. Многие из них придуманы диссертантом, а старые алгоритмы усовершенствованы или искусно комбинируются друг с другом. Все алгоритмы имеют ярко выраженный жадный характер. Описания алгоритмов сопровождаются многочисленными и зачастую точными оценками изменения на каждом шаге алгоритма тех параметров подматрицы (например, ее объема), улучшение которых преследует рассматриваемый алгоритм. Доказательства весьма геометричны. Достоинством многих алгоритмов является то, что они не задействуют всю матрицу целиком, так что имеют небольшую сложность, и при этом эффективны при должном выборе стартовой подматрицы. Для поиска подматриц ρ-локально максимального объема диссертант доказывает существование алгоритмов, сложность которых полиномиальна по размерам исходной матрицы и размерам искомой подматрицы. Интересным является приложение разработанных алгоритмов к приближенному поиску эллипсоида Левнера в последнем параграфе главы.

В пятой главе обсуждается один из алгоритмов поиска подматрицы локально максимального объема (алгоритм maxvol), который при запрете одновременной замены строк и столбцов (естественном на практике) не может гарантировать на выходе подматрицу локально максимального объема во всей матрице. Доказывается, что при определенных условиях на стартовую подматрицу такой алгоритм, действующий на том же ансамбле случайных матриц, что и в третьей главе, с большой вероятностью выдает подматрицу ρ-локально максимального объема с небольшим ρ. По ходу дела доказываются интересные свойства случайных гауссовых матриц.

В шестой главе представлены результаты тестирования алгоритмов, рассмотренных в четвертой главе, на случайных матрицах. При этом численно подтверждаются вероятностные оценки третьей главы.

Седьмая глава описывает приложения разработанных алгоритмов малоранговой крестовой аппроксимации в трех разных задачах: решение систем нестационарных дифференциальных уравнений Смолуховского из статистической физики, восстановление малоранговой матрицы по небольшому числу ее известных элементов, приближение произвольной матрицы малоранговой неотрицательной матрицей. В последних двух задачах крестовая аппроксимация встраивается диссертантом в метод альтернирующих проекций, эффективно заменяя в нем точную проекцию на семейство матриц заданного ранга.

ЗАМЕЧАНИЯ

1. стр. 25, 4 сн.: вместо $m \geqslant n$ должно быть $m \leqslant n$;
2. стр. 27, 3 сн.: в нижнем индексе суммирования во второй и третьей суммах вместо $\mathcal{I}$ должно быть $\mathcal{J}$; то же во второй сумме в формуле (1.6) на стр. 28;
3. стр. 29, выключная формула (1.9): здесь много лишнего, достаточно оставить только $c = X^{-1}a$;
4. стр. 30, 4 сн.: вместо $\tilde{V}$ должно быть $\tilde{A}$;
5. стр. 31, 3 св.: вместо A должно быть W;
6. стр. 32, выключная формула (1.20): вместо $\hat{A}_r^+$ точнее было бы $(\hat{A}_r)^+$;
7. стр. 32, 3 сн.: вместо $\tilde{B}$ должно быть $\hat{B}$; вместо $\tilde{A}$ должно быть $\hat{A}$;
8. стр. 34, 13 св.: вместо $l_{11}u_{11}$ должно быть $l_{22}u_{22}$;
9. стр. 34, 6 сн.: вместо $\hat{C}$ должно быть C;
10. стр. 36, теорема 2.1: нет условий на k (должно быть $k \in \mathbb{N}$, $k > r$); в формуле (2.9) в знаменателе под первым корнем верхний индекс суммирования должен быть $r+1$; второе неравенство в этой формуле не доказывается ниже (но есть в работе [15], из которой взята эта теорема); в формуле (2.10) под первым корнем вместо A должно быть $\tilde{A}$;
11. стр. 39, теорема 2.3: в указываемых размерах матриц $\hat{A}$ и $\tilde{A}$ вместо r должно быть n;
12. стр. 40, 3 сн.: вместо k должно быть r (2 раза);
13. стр. 41, 9 св.: вместо U и V должно быть V^* и U^* соответственно;

14. стр. 41, теорема 2.4: в числителях дробей под корнями m и n надо поменять местами; соответствующая неточность в доказательстве — на стр. 42 в 6–4 строках снизу: норма матрицы F_R с индексами должна оцениваться как $\sqrt{m}\varepsilon$;

15. стр. 42, 11 сн.: вместо $|$ должно быть $\|$ (2 раза);

16. стр. 43, 1 св.: пропущено ε;

17. стр. 49, 1 сн.: вместо P_r должно быть Z;

18. стр. 50, 7 св.: здесь подразумевается конкретная $\min_W$ — следовало бы напомнить, какая именно;

19. стр. 50, 4 сн.: вместо A должно быть I;

20. стр. 52, выключная формула в середине страницы: вместо $\operatorname{rank} \hat{V}S \geqslant r$ точнее было бы $\operatorname{rank} \hat{V}S = r$;

21. стр. 52, 14 сн.: следует указать, кого охватывает этот эллипсоид;

22. стр. 54: в неравенстве (2.44) в правой части не хватает корня;

23. стр. 55, 6 сн.: под первой нормой пропущено R^+R, под второй нормой вместо Q_2^* должно быть Q_2;

24. стр. 55, 8 сн.: неравенство можно заменить на равенство;

25. стр. 56: в лемме 2 и в первой строке ее доказательства, по-видимому, $\mathbb{R}$ следует заменить на $\mathbb{C}$;

26. стр. 56, 7 сн.: надо пояснить, что здесь $U = Q$;

27. стр. 59, 12 св.: первый размер матрицы W_2 должен быть n;

28. стр. 59, 8 сн.: вместо I_r должно быть I;

29. стр. 59, 5 сн.: вместо U_1^* должно быть U_1;

30. стр. 60, 2 св.: вместо E_1 должно быть $\|E_1\|_2$;

31. стр. 62, 5 и 7 св.: в этих выключных формулах индексы суммирования одинаковы, а между тем в первой сумме матрица C фиксирована, а во второй по ней ведется суммирование;

32. стр. 62, 10 св.: вместо “столбцов C” должно быть “подматриц C из n столбцов”;

33. стр. 63, теорема 2.14: вместо k лучше $k < n$; в выключной формуле все нормы должны быть в квадрате;

34. стр. 63, 5 сн.: непонятно, кто такая “она”;

35. стр. 64, 3 св.: здесь точнее равенство вместо неравенства;

36. стр. 65, 8 св.: вместо 1 должно быть $\|A - A_r\|_F$;
37. стр. 66, теорема 2.15: пропущено "операций"; вместо "такие строки R" должно быть "такой вес W";
38. стр. 66, 13 сн.: второй размер у матрицы $\hat{V}$ должен быть r;
39. стр. 66, 7 сн.: вместо U должно быть V;
40. стр. 67, 1 св.: здесь у матрицы $\tilde{A}$ надо брать норму Фробениуса, а не спектральную;
41. стр. 67, 3 и 4 св.: вместо 1 должно быть $\|\tilde{A}\|_F$ (2 раза); вместо V_j должно быть v_j;
42. стр. 67: в конце доказательства теоремы 2.15 надо бы доказать, что так набранные столбцы действительно дадут заявленную матрицу W;
43. стр. 67: абзац перед теоремой 2.16 явно не вписан в контекст и нуждается в расшифровке;
44. стр. 67,68: в неравенствах 2.66 и 2.68 вместо N должно быть $\min\{M, N\}$;
45. стр. 68, 7 сн.: здесь надо ссылаться на (2.62), а не на (2.63), а вот двумя строками ниже — как раз на (2.63);
46. стр. 69, 1 сн.: в нижнем индексе суммирования во второй сумме вместо $\mathcal{I}$ должно быть $\mathcal{J}$;
47. стр. 70-71: основополагающую теорему 2.18, конечно, надо было доказать, а не ссылаться на свою труднодоступную магистеркую работу;
48. стр. 71, 12 сн.: вместо "теореме 2.14" должно быть "утверждении 2.5";
49. стр. 71, 8–7 сн.: это утверждение предполагает несколько иную формулировку теоремы 2.18;
50. стр. 71, 3 сн.: во второй скобке вместо Z_C должно быть Z_{0C};
51. стр. 72, 2 св.: эту ортогональность не получишь из отмеченной выше ортогональности $ZF^* = 0$, нужна ортогональность с другой стороны, которая опять же предполагает несколько иную формулировку теоремы 2.18;
52. стр. 72, 4 св.: эта ортогональность и в строках, и в столбцах нуждается в подробном разъяснении;
53. стр. 72, 10 св.: левая скобка не в том месте;
54. стр. 73, 1 св.: здесь нужна ссылка на утверждение 2.5;
55. стр. 73, 14 св.: матрицу $\hat{A}$ надо бы определить;

56. стр. 73, 15 св.: это равенство нуждается в очень подробном разъяснении;
57. стр. 74: следовало бы дописать, что (2.80) выполнено для произвольного выбора r столбцов C, и что следующие две цитируемые оценки верны для специально построенных матриц A;
58. стр. 76, 1 сн.: в правой части не хватает корня квадратного;
59. стр. 77: в теореме 2.21 следовало бы указать, что C состоит из n столбцов матрицы A;
60. стр. 78, 5 св.: вместо CW должно быть CC^+A;
61. стр. 78, 7 св.: точнее было бы равенство вместо неравенства;
62. стр. 78, 12 св.: вместо r должно быть n; вместо I_n должно быть I_r;
63. стр. 78, 16 св.: вместо 2.21 должно быть 2.12;
64. стр. 79, 5 св.: вместо ε должно быть ε^2;
65. стр. 83, 3 св.: это верно только при достаточно малых ε, а не при всех, как утверждается;
66. стр. 84, 2 св.: в числителе ненулевого элемента под нормой вместо -1 должно быть $+1$; символ Ω, подразумевающий асимптотически эквивалентную величину, не введен (и его нет в списке обозначений; равенство выполняется только при определенных соотношениях между N, r и ε, которые не указаны;
67. стр. 85, 2 сн.: непонятно, зачем нужно это выключное неравенство — далее оно не используется;
68. стр. 86, 2 св.: вместо неравенства точнее было бы равенство;
69. стр. 86, 5 св.: это неравенство неочевидно: читатель после его расшифровки должен применить выпуклость гамма-функции;
70. стр. 86, 7–6 сн.: логически неграмотная фраза: нельзя при $n \to \infty$ сходиться к чему-то, зависящему от n;
71. стр. 86, 6–5 сн.: на самом деле ищется локальный, а не глобальный максимум;
72. стр. 87, 3 св.: это неравенство надо подробно доказывать с явной ссылкой на утверждение 3.1;
73. стр. 87, 7 св.: буква x перегружена;
74. стр. 87, 8 св.: вместо неравенства точнее было бы равенство;
75. стр. 88, 6 сн.: вместо “чисел Z” должно быть “векторов Z_0”;

76. стр. 89, 2 св.: здесь совсем не то W, что в условии теоремы (видимо, и в условии теоремы под нормой стоит не то W, по которому берется усреднение); первое равенство нуждается в подробном доказательстве;

77. стр. 89, 11 св.: в последнем вычитаемом вместо $\hat{V}$ должно быть $\hat{V}_Z$;

78. стр. 90, 4 св.: вместо M должно быть $N - r$; второе равенство просто неверно: в правой его части надо, после подробного обоснования, вычесть $\|\hat{V}_Z^+ \hat{V}_Z\|^2 = r$ из квадрата последней нормы, — только тогда оценка в (3.7) даст желаемый результат;

79. стр. 90, 6 сн.: вместо (2.84) должно быть (2.87);

80. стр. 92, формула (3.11): внутри вторых скобок вместо $Z_C Z_C^+$ должно быть $Z_C^+ Z_C$; последнее равенство нуждается в пояснении;

81. стр. 92, 2–1 сн.: это утверждение нуждается в пояснении (используется неравенство Маркова);

82. стр. 93: в (3.12) буква C перегружена.

Эти замечания относятся к первой, второй и третьей главам, которые я читал наиболее подробно. В них не отмечены описки в словах и грамматические ошибки, которые также имеются в диссертации. Большинство замечаний — описки в формулах, которые, однако, часто сбивают с толку и заставляют читателя надолго "зависнуть". Имеются также как пробелы в обосновании выкладок и умозаключений, так и неточности в доказательствах, приводящие к поправкам в формулировках теорем (см., напр., замечание 14). Диссертант "зажевал" доказательство уже упоминавшейся очень хорошей теоремы 2.20 (замечания 48–57), которая, впрочем, не заявляется среди основных результатов работы. Возможно, диссертанту следовало бы также более развернуто изложить историческую часть Введения.

Все мои недоумения, возникшие при чтении текста диссертации и отраженные в замечаниях, оперативно разрешались диссертантом при личном общении.

Указанные замечания не умаляют значимости результатов диссертации. Они новые, интересные и в большинстве своем нетривиальные. При всей разноплановости затронутых в диссертации сюжетов, она производит очень цельное впечатление. Все основные теоремы и алгоритмы опубликованы А.И. Осинским в рецензируемых журналах, неоднократно докладывались на профильных семинарах и конференциях. Результаты из совместных работ, включенные в диссертацию, получены лично диссертантом. Доказанные теоремы, разработанные алгоритмы и методы, введенные понятия и конструкции примеров могут быть использованы для разработки прикладных программных пакетов, проведения теоретических исследований и чтения спецкурсов специалистами в Институте вычислительной математики имени Г.И. Марчука РАН, МГУ имени М.В. Ломоносова, МИАН имени В.А. Стеклова, Московском физико-техническом институте.

Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.6 Вычислительная математика (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1 – 2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова. Диссертация оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Считаю, что соискатель Осинский Александр Игоревич заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.6 Вычислительная математика.

Официальный оппонент,
профессор кафедры теории функций
и функционального анализа
механико-математического факультета
ФГБОУ ВО “Московский государственный
университет имени М.В. Ломоносова”,
доктор физ.-матем. наук, доцент П.А. Бородин

16.04.2025

Контактные данные:
тел.: +7 (495) 939-36-80, e-mail: pborodin@inbox.ru
Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация:
01.01.01 Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Адрес места работы:
119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы МГУ, д. 1, Главное здание ФГБОУ ВО “Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”
Механико-математический факультет
Тел.: +7 (495) 939-36-80; e-mail: pborodin@inbox.ru

Подпись сотрудника механико-математического факультета
ФГБОУ ВО “Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”
П.А. Бородина удостоверяю:

Декан механико-математического ф-та
МГУ имени М.В. Ломоносова,
чл.-корр. РАН, профессор А.И. Шафаревич