

Отзыв
официального оппонента на диссертацию
Жилиной Светланы Александровны
на тему «Комбинаторные свойства бинарных отношений
на вещественных алгебрах Кэли–Диксона»,
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 1.1.5 «Математическая логика,
алгебра, теория чисел и дискретная математика»
(01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел»)

Представленная диссертационная работа посвящена актуальной задаче современной алгебры — исследованию (неассоциативных) алгебр серии Кэли–Диксона, включающей кватернионы, октонионы, седенионы и пр. Задачи проведенного исследования касаются строения графов, ассоциированных с данными алгебрами. В работе рассматриваются графы коммутативности, графы ортогональности и ориентированные графы делителей нуля. Эти структуры и их применение в алгебре хорошо известны, их исследованию посвящены работы Бека, Андерсона, Ливингстона, Мюлэя и др. Одним из наиболее важных приложений графов, построенных по тому или иному отношению на алгебраической системе, является описание отображений, сохраняющих данное отношение, поскольку такие отображения индуцируют гомоморфизмы соответствующих графов. Это обстоятельство придает важность изучению таких структур на графах, характеристики которых сохраняются или контролируемо изменяются при морфизмах. Такими структурами являются, например, циклы, компоненты связности, клики и другие подграфы специального вида.

Основные результаты диссертации заключаются в следующем:

- 1) Описаны структуры, образованные в графах ортогональности и делителей нуля произвольной вещественной алгебры Кэли–Диксона такими делителями нуля, компоненты которых удовлетворяют дополнительным условиям на норму и альтернативность. Получен явный вид таблицы умножения вершин двойного шестиугольника в графе ортогональности произвольной алгебры главной последовательности.
- 2) Полностью описаны компоненты связности графа ортогональности алгебры седенионов. Доказано, что в графе коммутативности седенионов делители нуля образуют компоненту связности, диаметр которой заключён между 3 и 4.
- 3) Установлены свойства таких дважды альтернативных делителей нуля в вещественных алгебрах Кэли–Диксона, компоненты которых имеют ненулевую норму. Получен явный вид их аннуляторов и ортогонализатора, соотношение между централизатором и ортогонализатором.

4) Установлена взаимосвязь между графами коммутативности и графами ортогональности контр-алгебр Кэли–Диксона малых размерностей, описаны графы ортогональности и делителей нуля этих алгебр в терминах диаметров и клик.

5) Решена проблема изоморфизма для графов ортогональности вещественных алгебр Кэли–Диксона на парах базисных элементов.

Полученные результаты являются новыми, они обобщают ранее полученные результаты работ ряда авторов, в том числе Брауна, де Маре, Морено, Бисса, Даггера и Исаксена.

Эти результаты с полными доказательствами опубликованы в ряде работ автора: как совместных с научным руководителем (А.Э. Гутерманом)

[1] Контралгебры Кэли–Диксона: дважды альтернативные делители нуля и графы отношений, *Фундамент. и прикл. матем.*, 2020, том 23, выпуск 3, страницы 95–129;

[2] Графы отношений алгебры седенионов, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2020, том 496, страницы 61–86;

[3] Графы отношений вещественных алгебр Кэли–Диксона, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2018, том 472, страницы 44–75;

так и с единоличным авторством

[4] Графы отношений алгебры контрседенионов, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2019, том 482, страницы 87–113;

[5] Orthogonality graphs of real Cayley–Dickson algebras. Part I: Doubly alternative zero divisors and their hexagons, *Int. J. Algebra Comput.*, 2021, 31(4), 663–689;

[6] Orthogonality graphs of real Cayley–Dickson algebras. Part II: The subgraph on pairs of basis elements, *Int. J. Algebra Comput.*, 2021, 31(4), 691–725.

Результаты работы имеют теоретическое значение и могут использоваться для дальнейшего изучения неассоциативных алгебр и дополнительных структур на них, а также в комбинаторике и теории графов.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы, изложена на 135 страницах. Первая глава носит вводный характер. Во второй главе изучаются свойства таких элементов в алгебрах Кэли–Диксона, компоненты которых альтернируют между собой. Отдельный интерес представляют подалгебры, порожденные строго альтернирующими элементами, а также свойства дважды альтернативных делителей нуля, компоненты которых имеют ненулевую норму. В главе 3 полученные результаты применяются для описания графов ортогональности алгебр Кэли–Диксона главной последовательности (кватернионы, октонионы, седенионы и т. д.). Случай алгебры седенионов рассмотрен отдельно, установлен ряд

свойств для графов отношений этой алгебры. Глава 4 посвящена аналогичным задачам для контр-алгебр, соответствующих расщепляемому набору параметров в процессе Кэли–Диксона. В главе 5 рассматривается задача восстановления параметров процесса Кэли–Диксона по графам отношений.

К работе имеются следующие замечания:

- 1) Понятие центра алгебры (на стр. 19) нуждается в уточнении. В неассоциативных алгебрах (см., например, [46, гл. 7]) часто разделяют коммутативный центр, который имеется в виду в данной работе, и центр (без дополнительного определения) как ассоциативно-коммутативный центр.
- 2) Определение 4.4.4 композиционной алгебры на стр. 75 является не совсем уместным — это понятие уже всюду использовалось в предыдущих главах.

За исключением упомянутых выше незначительных замечаний работа написана очень аккуратно, хорошим математическим языком, имеет единую выверенную систему обозначений и является цельным исследованием на выбранную тему. Автореферат верно и полно отражает основные результаты диссертационной работы.

Считаю, что диссертационная работа С.А. Жилиной «Комбинаторные свойства бинарных отношений на вещественных алгебрах Кэли-Диксона» соответствует критериям, определенным пп. 2.1–2.5 «Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова», и оформлена согласно приложениям № 5, 6 «Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова». По моему мнению, автор диссертации заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5 «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика» (01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел»).

Доктор физико-математических наук,
профессор РАН, ведущий научный сотрудник
лаборатории алгебры Института математики
им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН

 П.С. Колесников

Подпись Павла Сергеевича Колесникова подтверждаю:

