МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Мосолова Юлия Михайловна

Стабилизация переключаемых систем в условиях неопределённости

1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2024

Диссертация подготовлена на кафедре нелинейных динамических систем и процессов управления факультета Вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель **Фурсов Андрей Серафимович**
доктор физико-математических наук

Официальные оппоненты: **Асеев Сергей Миронович**
член корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, Математический институт имени В. А. Стеклова Российской академии наук, отдел дифференциальных уравнений, заведующий отделом, главный научный сотрудник

Четвериков Владимир Николаевич
доктор физико-математических наук, доцент, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, факультет фундаментальных наук, кафедра математического моделирования, профессор

Быков Владимир Владиславович
доктор физико-математических наук, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра дифференциальных уравнений, доцент

Защита состоится «6» ноября 2024 г. в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета *МГУ.011.8* Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: *Российская Федерация, 119234, Москва, Ленинские горы, д.1, главное здание МГУ, ауд. 16-10.*

E-mail: ast.diffiety@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале:
https://dissovet.msu.ru/dissertation/3115

Автореферат разослан «27» сентября 2024 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.8,
д.ф.-м.н., профессор Чечкин Григорий Александрович

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень её разработанности. Диссертация является исследованием в одном из активно развивающихся направлений современной теории автоматического управления — теории переключаемых систем. Под переключаемой системой понимают многорежимную динамическую систему, определяемую семейством непрерывных или дискретных по времени подсистем и правилами, задающими переключения между ними. Математическими моделями таких систем являются системы дифференциальных или разностных уравнений с "скачкообразно" изменяющимися правыми частями. Отметим, что подобные системы являются центральным объектом исследований одной из фундаментальных теорий, посвященных проблеме стабилизации динамических систем в условиях неопределенности, теории систем с переменной структурой (см., например, С. В. Емельянов[1]).

Приложения переключаемых систем достаточно разнообразны. Например, переключаемые системы используют для моделирования реальных управляемых технических объектов или процессов, которые либо по своей специфике являются многорежимными, либо работают в условиях действующих параметрических возмущений (см. D. Liberzon[2], M. S. Mahmoud[3], О. А. Шпилевая и К. Ю. Котов[4], С. Н. Васильев и А. И. Маликов[5]). Также с помощью переключаемых линейных систем можно аппроксимировать поведение нелинейных систем дифференциальных уравнений в заданных областях пространства состояний

[1] Емельянов С. В. Системы автоматического управления с переменной структурой // — М. : Наука, — 1967.

[2] Liberzon D. Switching in Systems and Control. — Basel. — 2003.

[3] Mahmoud M. S. Switched time-delay systems: Stability and control // Springer Science & Business Media, LCC. — 2010.

[4] Шпилевая О. А., Котов К. Ю. Переключаемые системы: устойчивость и проектирование (обзор) // Автометрия. — 2008. — Т. 44, № 5. — С. 71–87.

[5] Васильев С. Н., Маликов А. И. О некоторых результатах по устойчивости переключаемых и гибридных систем // Сборник статей «Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН». Казань: Фолиант. — 2011. — Т.1. — С. 23–81.

(см. M. Rewienski и J. White[6], M. Johansson[7]). Переключаемые системы находят также применение и при моделировании нечетких систем управления (см., например, Z. Sun и S. S. Ge[8]). Особый класс переключаемых систем представляют переключаемые системы с режимами различных динамических порядков и импульсными эффектами (см., например, В. Р. Барсегян[9]). Некоторые управляемые физические процессы могут демонстрировать в процессе своего функционирования скачкообразное изменение не только параметров системы, но и структуры (размерности вектора состояния). В связи с чем, актуальной задачей автора является стабилизация переключаемых систем, для которых режимы могут иметь различные динамические порядки. Эти системы характеризуются разрывными траекториями в пространстве состояний и удобны при описании реальных процессов, при которых может происходить либо упрощение, либо усложнение математической модели. Отметим, что в известной нам литературе рассматривается только случай конечного числа переключений, при которых меняется динамический порядок подсистем переключаемой системы.

В связи с тем, что при построении математических моделей реальных процессов или технических устройств практически неизбежны ошибки в расчетах параметров этих моделей, то при построении регулятора, решающего какую-либо задачу управления для реального динамического объекта, необходимо обеспечить робастность такого регулятора, то есть его работоспособность при возможных вариациях параметров соответствующей математической модели, причем эти вариации не обязательно малые. Для того чтобы учесть указанный аспект, автору целесообразно рассматривать математические модели объектов с параметрической неопределенностью, в частности, с интервальной неопреде-

---

[6] Rewienski M., White J. Model order reduction for nonlinear dynamical systems based on trajectory piecewise-linear approximations // Linear Algebra and its Applications. — 2006. — Vol. 415. — P. 426-454.

[7] Johansson M. Piecewise Linear Control Systems. A Computational Approach // Springer. — 2003.

[8] Sun Z., Ge S. S. Stability theory of switched dynamical systems // Springer-Verlag London Limited. — 2011.

[9] Барсегян В. Р. Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями // — М. — 2016.

ленностью (см., например, Л. Т. Ащепков, Д. В. Давыдов[10]).

Одной из важнейших проблем теории переключаемых систем является проблема устойчивости и стабилизации движения таких систем. Указанной тематике посвящено достаточно много публикаций российских и иностранных исследователей. Например, в работах W. P. M. H. Heemels, B. Schutter, J. Lunze, M. Lazar[11], J. P. Hespanha[12] и монографиях[2,3,7,8,9] представлены весьма обширные библиографические списки публикаций по проблемам устойчивости и стабилизации переключаемых систем. При этом стоит заметить, что предлагаемые в этих работах алгоритмы стабилизации, как правило, основаны на методе функций Ляпунова и решении линейных матричных неравенств (см., например, Д. В. Баландин и М. М. Коган[13]).

Можно выделить два основных подхода к решению задачи стабилизации переключаемой системы. Первый подход состоит в построении универсального регулятора, одновременно стабилизирующего (см., например, V. Blondel[14]) конечное семейство режимов такой системы, то есть обеспечивающего асимптотическую устойчивость каждого замкнутого режима стабилизируемой переключаемой системы. Однако, одной лишь устойчивости замкнутых режимов еще недостаточно, чтобы гарантировать равномерную асимптотическую устойчивость соответствующей переключаемой системы. Этот факт связан с наличием у асимптотически устойчивых линейных систем так называемого "начального всплеска" нормы решения, проявляющегося в ее резком возрастании на некотором начальном промежутке времени. И если моменты переключения устой-

[10] Ащепков Л. Т., Давыдов Д. В. Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления // — М. — 2006.

[11] Heemels W. P. M. H., Schutter B., Lunze J., Lazar M. Stability analysis and controller synthesis for hybrid dynamical systems // Phil. Trans. R. Soc. A. — 2010. — Vol. 368. — P. 4937-4960.

[12] Hespanha J. P. Uniform stability of switched linear systems: extensions of LaSalle's Invariance Principle // Automatic Control, IEEE Transactions. — 2004. — Vol. 49, no 4. — P. 470-482.

[13] Баландин Д. В., Коган М. М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств // — М. — 2007.

[14] Blondel V. Simultaneous stabilization of linear systems // Springer-Verlag. — 1994.

чивых подсистем будут совпадать с точками возрастания норм решений отдельных подсистем, то, в результате, можно получить неограниченную траекторию[2]. В связи с этим, необходимо наложить дополнительные условия на устойчивые режимы или на множество переключающих сигналов, которые обеспечили бы устойчивость переключаемой системы. Что касается условия на множество переключающих сигналов, то оно основано, главным образом, на том факте[2], что для переключаемой линейной системы с устойчивыми режимами всегда существует такое положительное число τ (*время задержки*), что данная система будет равномерно асимптотически устойчивой, если для любого переключающего сигнала минимальное время между переключениями не меньше τ. Таким образом, если универсальный регулятор обеспечивает асимптотическую устойчивость каждого режима замкнутой системы, то для гарантированной стабилизируемости переключаемой системы достаточно каким-либо способом оценить для нее соответствующее время задержки. При этом заметим, что в настоящее время можно предложить несколько подходов к решению данной задачи (см. Б. Т. Поляк, М. В. Хлебников, Л. Б. Рапопорт[15] и Б. П. Демидович[16]), однако не существует какого-либо единого метода получения наилучшей оценки времени задержки для произвольной переключаемой системы с устойчивыми режимами.

Второй подход к стабилизации заключается в построении переключаемого регулятора (регулятора переменной структуры), моменты переключения которого синхронизированы с переключениями стабилизируемой системы. Построение такого регулятора предполагает решение следующих задач: построение стабилизирующего регулятора для каждого режима исходной системы в отдельности (что существенно проще, чем поиск универсального регулятора в рамках первого подхода), обеспечение за счет выбора регуляторов одного из до-

[15] Поляк Б. Т., Хлебников М. В., Рапопорт Л. Б. Математическая теория автоматического управления: учебное пособие // — М.: ЛЕНАНД. — 2019.

[16] Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости // —М. — 1967.

статочных условий устойчивости переключаемой системы с устойчивыми режимами либо оценка надлежащего времени задержки (последняя подзадача значительно проще первой) и, наконец, обеспечение синхронности переключений регулятора и стабилизируемой системы. Последняя задача является достаточно простой в случае, когда значение переключающего сигнала известно в каждый момент времени. Однако, её сложность резко возрастает, когда переключающий сигнал ненаблюдаемый, что является достаточно частым предположением при решении задачи стабилизации таких систем. Но тогда возникает вопрос, как настроить переключения регулятора переменной структуры? В этой ситуации автору необходимо построение наблюдателя активных режимов, который по известной информации о системе (вектор состояния, выход и др.) формировал бы номер активного режима. В качестве такого наблюдателя может выступать, например, искусственная нейронная сеть.

Отметим, что в настоящее время в связи с бурным развитием вычислительной техники, в частности повышения её производительности и быстродействия, в подавляющем большинстве современных автоматических системах управления используются в качестве регуляторов вычислительные устройства (микроконтроллеры). В связи с этим, в представленной работе весьма актуальной является задача разработки конструктивных алгоритмов построения цифровых (дискретных) регуляторов (см. К. Ю. Поляков[17]) для непрерывных переключаемых систем. К сожалению, такие исследования практически не отражены в современной научной литературе по теории автоматического управления.

Диссертационное исследование опирается на цикл работ, посвящённых проблеме построения стабилизирующих регуляторов для переключаемых линейных систем при различных предположениях относительно этих переключаемых систем и регуляторов. В работе А. С. Фурсова и Э. Ф. Хусаинова[18] для

---

[17] Поляков К. Ю. Основы теории цифровых систем управления. — СПб. — 2002.

[18] Фурсов А. С., Хусаинов Э. Ф. К вопросу о стабилизации переключаемых линейных систем // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 7. — С. 1522—1533.

скалярной переключаемой линейной системы рассмотрены общие постановки задач о стабилизации по состоянию и по выходу в предположении о ненаблюдаемости переключающего сигнала. Для стабилизации по состоянию предложен алгоритм, предполагающий построение такого стабилизирующего регулятора, который обеспечивает устойчивость замкнутой переключаемой системы при произвольных переключающих сигналах. Для стабилизации по выходу предложен алгоритм, предполагающий описание режимов переключаемой системы через передаточные функции с последующим построением такой стабилизирующей динамической обратной связи по выходу, которая обеспечивает устойчивость каждого режима в отдельности. Поскольку при этом, в общем случае, не гарантируется устойчивость замкнутой переключаемой системы, то в работе А. С. Фурсова и Э. Ф. Хусаинова[18] предложен алгоритм расчёта времени задержки для режимов переключаемой системы, при которой построенный регулятор будет обеспечивать устойчивость замкнутой системы. В работе А. С. Фурсова и И. В. Капалина[19] приводится алгоритм построения стабилизирующего регулятора переменной структуры, обеспечивающего возникновение в замкнутой системе асимптотически устойчивого скользящего движения вдоль некоторой гиперповерхности в пространстве состояний, инвариантного относительно параметрической и координатной неопределённостей. В статье А. С. Фурсова, С. И. Миняева и Э. А. Исхакова[20] исследуется задача о построении цифрового стабилизатора по выходу для скалярной переключаемой линейной системы. В работе А. С. Фурсова, И. В. Капалина и Х. Хоншан[21] рассматривается задача о стабилизации по состоянию векторной по входу переключаемой линейной системы,

[19] Фурсов А. С., Капалин И. В. Стабилизация переключаемых линейных систем регулятором переменной структуры // Дифференциальные уравнения. — 2016. — Т. 52, № 8. — С. 1109—1120.

[20] Фурсов А. С., Миняев С. И., Исхаков Э. А. Построение цифрового стабилизатора для переключаемой линейной системы // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 8. — С. 1121—1127.

[21] Фурсов А. С., Капалин И. В., Хоншан Х. Стабилизация векторных по входу переключаемых линейных систем регулятором переменной структу ры // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 11. — С. 1532— 1542.

а в публикации А. С. Фурсова, С. И. Миняева и В. С. Гусевой[22] предлагается метод для решения задачи о цифровой стабилизации по выходу скалярной переключаемой линейной системы с запаздыванием в управлении. В работе А. С. Фурсова, С. В. Емельянова, И. В. Капалина и Е. С. Сагадиновой[23] рассмотрена задача о стабилизации векторных по входу переключаемых линейных систем с режимами различных динамических порядков.

Цели и задачи диссертационной работы. Целью диссертационной работы является разработка методов построения стабилизаторов, в том числе цифровых, для переключаемых систем, функционирующих в условиях параметрической неопределённости.

В диссертации автором решены следующие задачи:

1. Построение цифрового (дискретного) регулятора по выходу, стабилизирующего непрерывную переключаемую систему, режимы функционирования которой являются интервальными линейными системами.

2. Построение цифрового (дискретного) регулятора по состоянию, сверхстабилизирующего непрерывную переключаемую систему, режимы функционирования которой являются интервальными линейными системами.

3. Стабилизация по состоянию скалярных по входу переключаемых интервальных линейных систем, режимы функционирования которых имеют различные динамические порядки с возможным бесконечным числом их переключений.

4. Разработка метода построения стабилизирующего регулятора переменной структуры в условиях ненаблюдаемых переключающих сигналов.

Научная новизна. Все результаты диссертационной работы автора яв-

[22] Фурсов А. С., Миняев С. И., Гусева В. С. Построение цифрового стабилизатора для переключаемой линейной системы с запаздыванием в управлении // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 8. — С. 1132–1141.

[23] Стабилизация векторных по входу переключаемых линейных систем с режимами различных динамических порядков / А. С. Фурсов [и др.] // Диф ференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 11. — С. 1540-1546.

ляются новыми и состоят в следующем.

1. Впервые предложен метод построения цифрового (дискретного) регулятора по выходу, стабилизирующего непрерывную переключаемую систему, режимы функционирования которой являются интервальными линейными системами. Предлагаемый подход к стабилизации включает в себя построение непрерывно-дискретной замкнутой системы с цифровым регулятором, переход к ее дискретной модели и построение одновременно стабилизирующего регулятора для конечного семейства интервальных дискретных систем (режимов дискретной модели).

2. Предложен новый метод построения цифрового (дискретного) регулятора по состоянию, сверхстабилизирующего непрерывную переключаемую систему, режимы функционирования которой являются интервальными линейными системами. Предлагаемый подход к стабилизации включает в себя построение непрерывно-дискретной замкнутой системы с цифровым регулятором, переход к ее дискретной модели и построение одновременно сверхстабилизирующего регулятора для конечного семейства интервальных дискретных систем (режимов дискретной модели).

3. Предложен новый метод стабилизации по состоянию скалярных по входу переключаемых интервальных линейных систем, режимы функционирования которых могут иметь различные динамические порядки с возможным бесконечным числом их переключений. Для решения этой задачи предлагается подход к построению стабилизирующего регулятора, основанный на методе расширения динамического порядка и решении систем линейных матричных неравенств.

4. Впервые предложен метод построения регулятора переменной структуры на основе данных неидеального наблюдателя.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа имеет преимущественно теоретический характер. Представленные результаты могут быть использованы при решении прикладных задач управления переключаемыми системами в условиях, когда параметры этих систем (коэффициенты дифференциальных уравнений, описывающих режимы переключаемой системы) известны лишь приближенно. В этом случае, приближенно известные коэффициенты режимов переключаемой системы можно заменить интервальными числами и, таким образом, перейти к переключаемой интервальной системе.

Методология и методы исследования. Для решения поставленных задач используются метод дискретизации непрерывных систем, методы теории одновременной стабилизации, метод линейных матричных неравенств, метод сверхстабилизации, методы робастного управления, которые доказали свою применимость и эффективность для переключаемых систем.

Положения, выносимые на защиту.

1. Метод построения цифрового (дискретного) регулятора по выходу для переключаемой линейной интервальной системы.

2. Метод построения цифрового (дискретного) сверхстабилизатора по состоянию для переключаемой линейной интервальной системы.

3. Метод решения задачи стабилизации переключаемой линейной интервальной системы с режимами различных динамических порядков.

4. Достаточное условие существования стабилизирующего регулятора в форме статической обратной связи по состоянию для переключаемой линейной интервальной системы.

5. Достаточное условие существования стабилизирующего регулятора в форме динамической обратной связи по выходу для переключаемой линейной интервальной системы.

6. Метод построения регулятора переменной структуры для стабилизации переключаемых линейных интервальных систем в случае ненаблюдаемых переключающих сигналов.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность результатов диссертационного исследования гарантируется следующими фактами: все результаты диссертации имеют законченный характер и снабжены строгими математическими доказательствами; все результаты диссертации являются новыми, а результаты других авторов, упомянутые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками; результаты диссертации являются достоверными и прошли апробацию на научных семинарах и конференциях; основные результаты диссертации опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.2. — «Дифференциальные уравнения и математическая физика» (физико-математические науки).

Основные результаты диссертации и отдельные её части докладывались и обсуждались на следующих международных и всероссийских **конференциях**:

1. Международная конференция «Ломоносовские чтения - 2023» (Москва, МГУ, 4-14 апреля 2023г.);

2. Международная конференция «Теория оптимального управления и приложения (OCTA 2022)» (Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 27 июня - 1 июля 2022г.);

3. Международная конференция «Ломоносовские чтения - 2022» (Москва, МГУ, 14-22 апреля 2022г.);

4. XII Международная научная конференция «Интеллектуальные системы и компьютерные науки» (Москва, МГУ, 29 ноября - 3 декабря 2021г.);

5. Международная конференция «Ломоносовские чтения - 2021» (Москва, МГУ, 20-29 апреля 2021г.);

6. Всероссийская научная конференция «Тихоновские чтения 2020» (Москва, МГУ, 26-31 октября 2020г.);

7. XV Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого)(Москва, ИПУ РАН, 3-5 июня 2020г.);

8. Международная конференция «Ломоносовские чтения - 2019» (Москва, МГУ, 15-25 апреля 2019г.).

Результаты диссертации также докладывались и обсуждались на всероссийском **семинаре**:

1. Научно-исследовательский семинар «Нелинейная динамика и управление» факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М. В. Ломоносова (руководитель профессор В.В. Фомичев) (Москва, МГУ, 20 мая 2024г.).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 16 печатных работах, из них 7 статей в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ, индексируемых в базе ядра РИНЦ “eLibrary Science Index”, при этом переводные версии 6 статей опубликованы в журналах, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus.

Личный вклад автора. Основные положения диссертации, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Основные результаты, представленные в диссертации, получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, списка литературы, 2 приложений. Общий объем диссертации составляет 170 страниц текста, включая 5 иллюстраций. Список литературы содержит 113 наименований.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, рассмотрена краткая история развития вопроса, сформулированы цели и аргументирована научная новизна исследований, изложены основные результаты автора.

Глава 1 посвящена задаче цифровой стабилизации непрерывной переключаемой системы по выходу нулевого положения равновесия переключаемой линейной системы, функционирующей в условиях параметрической неопределенности. При этом предполагается интервальный тип параметрической неопределенности.

В этой главе представлен подход к построению динамического цифрового регулятора по выходу, стабилизирующего переключаемую интервальную линейную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = [A_\sigma]x + [b_\sigma]u, \\ y = [c_\sigma]x, \end{cases} \qquad \sigma \in P, \quad \sigma(\cdot) \in I, \tag{1}$$

где $\sigma : \overline{\mathbb{R}}_+ \to I = \{1, \ldots, m\}$ — кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал) с конечным числом разрывов (переключений) на любом конечном промежутке; $\overline{\mathbb{R}}_+$ — множество неотрицательных действительных чисел; P — некоторое множество допустимых переключающих сигналов σ; $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $y \in \mathbb{R}$ — измеряемый скалярный выход; $u \in \mathbb{R}$ —управляющий вход; $[A_\sigma] = [A] \circ \sigma$ — композиция отображения $[A] : I \to \{[A_1], \ldots, [A_m]\}$ и переключающего сигнала σ; $[b_\sigma] = [b] \circ \sigma$ и $[c_\sigma] = [c] \circ \sigma$ — аналогичные композиции для отображений $[b] : I \to \{[b_1], \ldots, [b_m]\}$, $[c] : I \to \{[c_1], \ldots, [c_m]\}$.

В **разделе 1.1** вводятся основные определения и обозначения, используемые на протяжении всего текста.

Определение 1.1. Решением уравнения состояния системы (1) при фиксированных режимах (c_i, A_i, b_i) ($c_i \in [c_i]$, $A_i \in [A_i]$, $b_i \in [b_i]$, $i = 1, \ldots, m$), заданном управлении $u = u_0 \in PC(\mathbb{R}_+)$ (класс кусочно-непрерывных функций), переключающем сигнале $\sigma \in P$ и начальном условии $x(0) = x_0$ будем называть абсолютно непрерывную функцию $x(t)$, являющуюся решением линейной нестационарной системы

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x + b_{\sigma(t)}u_0, \quad x(0) = x_0. \tag{2}$$

Определение 1.2. Переключаемая линейная система (1) *равномерно асимптотически устойчива по состоянию* (РАУ), если при $u \equiv 0$ существуют константа $\delta > 0$ и KL-функция $\beta(r, s)$ такие, что для любого переключающего сигнала $\sigma \in P$, начального условия $x(0)$ такого, что $||x(0)|| < \delta$, соответствующее решение уравнения состояния системы (1) удовлетворяет следующему неравенству

$$||x(t)|| \leq \beta(||x(0)||, t) \quad t \geq 0. \tag{3}$$

Для переключаемых линейных систем условие (3) эквивалентно условию $||x(t)|| \to 0$ при $t \to \infty$.

В **разделе 1.2** формулируется задача стабилизации по выходу системы (1) цифровым динамическим регулятором, который можно задать: периодом квантования по времени $T > 0$, дискретным регулятором вида

$$\begin{cases} v[(l+1)T] = Qv[lT] + qy[lT] \\ u[lT] = Hv[lT] + hy[lT], \quad v[0] = v_0 \end{cases} \tag{4}$$

и формирующим элементом (в форме фиксатора нулевого порядка)

$$u(t) = \sum_{j=0}^{\infty} u[jT]S(t - jT), \quad S(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, T), \\ 0, & t \notin [0, T). \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $Q \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $q \in \mathbb{R}^{r \times 1}$, $H \in \mathbb{R}^{1 \times r}$, $h \in \mathbb{R}$ (r — порядок регулятора), $u[\cdot]$, $y[\cdot]$, $v[\cdot]$ — дискретные функции, определенные на последовательности $\{lT\}_{l=0}^{\infty}$ ($l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$).

Задача 1.1 Для переключаемой интервальной линейной системы (1) построить цифровой регулятор вида (4), обеспечивающий глобальную равномерную асимптотическую устойчивость (ГРАУ) замкнутой непрерывно-дискретной системы

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A_\sigma]x(t) + [b_\sigma] \sum_{j=0}^{l} \left(Hv[jT] + h[c_\sigma]x(jT)\right) S(t - jT), \\ v[(l+1)T] = Qv[lT] + q[c_\sigma]x(lT), \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma}, \quad \sigma(\cdot) \in I, \end{cases} \tag{6}$$

где $S_{\tau,\gamma}$— множество переключающих сигналов σ, точки разрыва которых принадлежат множеству $\{l\gamma\}$, где γ— некоторое положительное число, а $l = 0, 1, 2, \ldots$ При этом, расстояние между двумя соседними промежутками не превосходит τ, где $\tau = \mu\gamma$, $\mu \in \mathbb{N}$. Далее считаем, что $\gamma = \rho T$, $\rho \in \mathbb{N}$ (отсюда, в частности, следует, что $T < \tau$).

В **разделе 1.3** предлагается подход к решению задачи 1.1, заключающийся в переходе от исходной непрерывной переключаемой системы к её дискретной модели с помощью метода точной дискретизации и последующем поиске стабилизирующего дискретного регулятора для полученной дискретной системы.

Определение 1.4. Дискретную переключаемую параметрически неопределённую систему

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = \{A_\sigma^*\}x[lT] + \{b_\sigma^*\}u[lT] \\ y[lT] = [c_\sigma]x[lT], \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma},\ \sigma(\cdot) \in I, \end{cases} \tag{7}$$

где

$$\{A_i^*\} = \{e^{A_i T} \mid A_i \in [A_i]\}, \quad \{b_i^*\} = \{\int\limits_0^T e^{A_i \xi}\, d\xi b_i :\ A_i \in [A_i], b_i \in [b_i]\} \tag{8}$$

будем называть *точной дискретной моделью* системы (1) при условии, что на её входе будет использоваться фиксатор нулевого порядка (5).

Теорема 1.2. Непрерывно-дискретная переключаемая интервальная система (6) ГРАУ тогда и только тогда, когда ГРАУ дискретная переключаемая система

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = (\{A_\sigma^*\} + \{b_\sigma^*\}h[c_\sigma])x[lT] + \{b_\sigma^*\}Hv[lT], \\ v[(l+1)T] = q[c_\sigma]x[lT] + Qv[lT], \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma}. \end{cases} \tag{9}$$

В **разделе 1.4** вместо задачи стабилизации системы (7) решается задача стабилизации другой системы, являющейся ее интервальным расширением ввиду того, что затруднительно описать семейства матриц $\{A_i^*\}$, $\{b_i^*\}$ для системы (7).

Определение 1.6. Дискретную переключаемую интервальную систему вида

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = [\Lambda_\sigma^*]x[lT] + [\mu_\sigma^*]u[lT] \\ y[lT] = [c_\sigma]x[lT], \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma},\ \sigma(\cdot) \in I \end{cases} \tag{10}$$

будем называть *интервальным расширением* системы (7), если для неё выполнены условия

$$\{A_i^*\} \subseteq [\Lambda_i^*], \quad \{b_i^*\} \subseteq [\mu_i^*], \quad \text{при каждом } i \in \{1, \ldots, m\}. \tag{11}$$

Теорема 1.3. Пусть дискретная переключаемая замкнутая система

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = ([\Lambda^*_\sigma] + [\mu^*_\sigma]h[\rho_\sigma])x[lT] + [\mu^*_\sigma]Hv[lT], \\ v[(l+1)T] = q[c_\sigma]x[lT] + Qv[lT], \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma}. \end{cases} \tag{12}$$

является интервальным расширением системы (9) и при этом является ГРАУ. Тогда глобально равномерно асимптотически устойчива и дискретная переключаемая система (9).

В **разделе 1.5** сформулировано конструктивное достаточное условие устойчивости непрерывной переключаемой интервальной системы, замкнутой цифровым регулятором.

Теорема 1.5. Пусть

$$\tilde{x}[(l+1)T] = \{\tilde{A}^*_\sigma\}\tilde{x}[lT], \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma} \tag{13}$$

— точная дискретная модель вида (9) системы (1), замкнутой некоторым регулятором R^* вида (4). Далее, пусть

$$\tilde{x}[(l+1)T] = [\tilde{\Lambda}_\sigma]\tilde{x}[lT], \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma} \tag{14}$$

— некоторое интервальное расширение системы (13).

Тогда, если система матричных неравенств

$$\begin{cases} L \succ 0, \\ \tilde{\Lambda}_i^\top(q^{(\nu)}_{[\tilde{\Lambda}_i]})L\tilde{\Lambda}_i(q^{(\nu)}_{[\tilde{\Lambda}_i]}) - L \prec 0, \\ \tilde{\Lambda}_i^\top(q^{(\nu)}_{[\tilde{\Lambda}_i]})L\tilde{\Lambda}_i(q^{(\eta)}_{[\tilde{\Lambda}_i]}) + \tilde{\Lambda}_i^\top(q^{(\eta)}_{[\tilde{\Lambda}_i]})L\tilde{\Lambda}_i(q^{(\nu)}_{[\tilde{\Lambda}_i]}) - 2L \prec 0, \; i = 1,\ldots,m, \; q^{(\nu)}_{[\tilde{\Lambda}_i]} \in G([\tilde{\Lambda}_i]). \end{cases} \tag{15}$$

совместна, то регулятор R^* стабилизирует переключаемую интервальную линейную систему (1) при переключениях $\sigma \in S_{\tau,\gamma}$.

Регулятор, удовлетворяющий теореме 1.5, фактически предполагает существование общей квадратичной функции Ляпунова для всех элементов семейства (13). При этом, требование разрешимости системы матричных неравенств (15) является весьма жестким.

В **разделе 1.6** приводится менее жёсткое достаточное условие устойчивости, чем задаваемое теоремой 1.5 **раздела 1.5**. При этом, данное условие предполагает существование единой функции Ляпунова для каждого режима рассматриваемой переключаемой системы в отдельности.

Теорема 1.8. Пусть

$$\tilde{x}[(l+1)T] = \{\tilde{A}^*_\sigma\}\tilde{x}[lT], \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma} \tag{16}$$

— точная дискретизация вида (9) системы (1), замкнутой некоторым регулятором R^* вида (4) и

$$\tilde{x}[(l+1)T] = [\tilde{\Lambda}_\sigma]\tilde{x}[lT], \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma} \tag{17}$$

— некоторое интервальное расширение системы (16).

Пусть для каждого $i = 1, \ldots, m$ матрица L_i является решением соответствующей системы матричных неравенств

$$\begin{cases} L_i \succ 0, \\ \tilde{\Lambda}_i^\top(q^{(\nu)}_{[\tilde{\Lambda}_i]})L_i\tilde{\Lambda}_i(q^{(\nu)}_{[\tilde{\Lambda}_i]}) - L \prec 0, \\ \tilde{\Lambda}_i^\top(q^{(\nu)}_{[\tilde{\Lambda}_i]})L_i\tilde{\Lambda}_i(q^{(\eta)}_{[\tilde{\Lambda}_i]}) + \tilde{\Lambda}_i^\top(q^{(\eta)}_{[\tilde{\Lambda}_i]})L_i\tilde{\Lambda}_i(q^{(\nu)}_{[\tilde{\Lambda}_i]}) - 2L \prec 0, \quad q^{(\nu)}_{[\tilde{\Lambda}_i]} \in G([\tilde{\Lambda}_i]). \end{cases} \tag{18}$$

Тогда регулятор R^* стабилизирует переключаемую интервальную линейную систему (1) при любом $\tau = l_0T$, где

$$l_0 \geq \left[\log_{\zeta_*} \frac{1}{(C_*)^2}\right] + 1. \tag{19}$$

Здесь $[\cdot]$ — целая часть числа,

$$C_* = \max\{C_{L_1}, \ldots, C_{L_m}\}\ (C_* \geq 1), \quad \zeta_* = \max\{\zeta_{[\tilde{\Lambda}_1],L_1}, \ldots, \zeta_{[\tilde{\Lambda}_m],L_m}\}\ (0 < \zeta_* < 1),$$

где константы C_i, ζ_i определяются по матрицам замкнутых режимов.

В **разделе 2** сформулировано достаточное условие существования стабилизирующего регулятора для системы (10) (а, следовательно и для системы (1)) в случае, когда вектор c_σ "точечный", т.е. $[c_i] = c_i$ для всех $i = \overline{1, m}$. Данное условие сформулировано на языке матричных неравенств.

Теорема 1.10. Пусть для интервальной расширенной системы

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = [\Lambda_\sigma^*]x[lT] + [\mu_\sigma^*]u[lT] \\ y[lT] = c_\sigma x[lT], \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma} \end{cases} \tag{20}$$

система матричных неравенств

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} G^{-1} & A_{0,i}^{(l)} + B_{0,i}^{(l)}\Theta C_{0,i} \\ (A_{0,i}^{(l)})^T + C_{0,i}^T(\Theta)^T(B_{0,i}^{(l)})^T & G \end{pmatrix} > 0 \\ G > 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad l = \overline{1,2^{n^2+n}} \end{cases} \tag{21}$$

имеет решение (G_0, Θ_0). Тогда регулятор

$$\begin{cases} z[(l+1)T] = Q_0 z[lT] + q_0 y[lT] \\ u[lT] = H_0 z[lT] + h_0 y[lT], \end{cases}$$

где $\begin{pmatrix} Q_0 & q_0 \\ H_0 & h_0 \end{pmatrix} = \Theta_0$, стабилизирует систему

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = [A_\sigma]x[lT] + [b_\sigma]u[lT] \\ y[lT] = c_\sigma x[lT], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u, y \in \mathbb{R}^1. \end{cases}$$

Завершает **главу 1 раздел 3**, в котором изложены выводы по основным полученным результатам данной главы.

Результаты **главы 1** опубликованы в работах [0].

Глава 2 посвящена задаче цифровой сверхстабилизации нулевого положения равновесия переключаемой линейной системы, функционирующей в условиях параметрической неопределенности. При этом предполагается интервальный тип параметрической неопределенности.

В **разделе 1.1** ставится задача стабилизации статическим регулятором по состоянию.

Задача 2.1. Для переключаемой линейной системы

$$\dot{x} = [A_\sigma]x + [b_\sigma]u \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma}, \quad \sigma(\cdot) \in I, \tag{22}$$

необходимо построить дискретный регулятор по состоянию

$$u[lT] = -k^T x[lT], \tag{23}$$

обеспечивающий *глобальную равномерную асимптотическую устойчивость* соответствующей замкнутой непрерывно-дискретной системы

$$\dot{x}(t) = [A_\sigma]x(t) + [b_\sigma]\sum_{j=0}^{\infty}\left(-k^T x(jT)\right)S(t-jT), \quad \sigma \in S_{\tau,\gamma}, \quad \sigma(\cdot) \in I. \tag{24}$$

В **разделах 1.2 и 1.3** по аналогии с **разделами 1.3 и 1.4 главы 1** изложены основные шаги решения поставленной задачи, а именно переход к точной дискретной модели переключаемой интервальной системы (22) и переход к её интервальному расширению.

Дискретная система $x[(l+1)T] = Ax[(l+1)T]$ является *сверхустойчивой*, если ее матрица удовлетворяет следующему условию $||A||_1 < 1$. Здесь $||A||_1 = \max_{p=1,\ldots,n}\sum_{j=1}^{n}|a_{pj}|$.

Теорема 2.3. Пусть регулятор (23) обеспечивает робастную сверхустойчивость дискретных интервальных объектов

$$x[(l+1)T] = ([\Lambda_i^*] - [\mu_i^*]k^T)x[lT], \quad i = 1,\ldots m, \tag{25}$$

т.е. решает задачу одновременной сверхстабилизации[24] для семейства

$$x[(l+1)T] = [\Lambda_i^*]x[lT] + [\mu_i^*]u[lT], \quad i = 1,\ldots m. \tag{26}$$

Тогда этот регулятор обеспечивает ГРАУ замкнутой непрерывно-дискретной системы (24).

Поиск вектора k сверхстабилизирующей обратной связи сводится к решению задачи линейного программирования.

В **разделе 1.3** сформулирована теорема, содержащая конструктивное достаточное условие существования дискретного регулятора (23), обеспечивающего ГРАУ непрерывно-дискретной переключаемой интервальной системы (24),

[24] Фурсов А. С. Одновременная стабилизация: теория построения универсального регулятора для семейства динамических объектов // М.: АРГАМАК-МЕДИА. — 2016.

заключающаяся в существовании решения соответствующей задачи линейного программирования.

В **разделе 2** предлагается описание численной реализации алгоритма построения регулятора для переключаемой интервальной системы в пакете прикладной математики Matlab.

В **разделе 2.1** описаны основные шаги алгоритма поиска сверхстабилизирующего регулятора и представлен разработанный програмный модуль SFMCS (Stabilizing Feedback and Modeling Closed System) для расчета стабилизирующей линейной статической обратной связи для переключаемых интервальных системы второго порядка с двумя режимами.

В **разделе 2.2** представлены полученные результаты работы программного модуля SFMCS, а именно: рассчитанные коэффициенты вектора обратной связи $k^T = (k_1,\ k_2)$, графики нормы решения замкнутой переключающей системы и переключающего сигнала.

Завершает **главу 2 раздел 2.3**, в котором описана актуальность предложенного метода и перспективность дальнейших исследований, связанных с тематикой данной главы.

Результаты **главы 2** опубликованы в работах [0].

В главе 3 рассматривается задача стабилизации по состоянию скалярных по входу переключаемых интервальных линейных систем, режимы функционирования которых имеют различные динамические порядки.

В **разделе 1** вводятся основные определения и постановка задачи.

Рассматривается переключаемая интервальная линейная система

$$\dot{x}^{(\sigma)} = [A_\sigma]x^{(\sigma)} + [b_\sigma]u, \quad \sigma \in S, \quad Z(\Omega) = \{Z_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j} : (ij) \in \Omega\}, \tag{27}$$

где $\Omega = \{(ij)\} \subseteq I \times I$ — множество, определяющее допустимые переключения между режимами, т.е. если пара индексов (ij) принадлежит множеству Ω, то возможно переключение с j-го на i-й режим функционирования; $S(\Omega)$ — множество всех допустимых переключающих сигналов; $x^{(i)} = (x_{j_1}, \dots, x_{j_{n_i}}) \in$

$\mathbb{R}^{n_i}$, $j_1 < \ldots < j_{n_i}$, $\{j_1, \ldots, j_{n_i}\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, где $n = \max\{j_{n_1}, \ldots, j_{n_m}\}$. Таким образом, $\mathbb{R}^{n_i} \subseteq \mathbb{R}^n$ для каждого $i = 1, \ldots, m$. Обозначим упорядоченный набор индексов $\{j_1, \ldots, j_{n_i}\}$ через Γ_i, а множество $\{1, \ldots, n\}$ через Γ. Далее будем обозначать через $\tilde{x}^{(i)}$ вектор из $\mathbb{R}^n$, все компоненты которого с индексами из множества $\Gamma \setminus \Gamma_i$ равны нулю. Согласование начальных условий различных режимов задает множество $Z(\Omega)$, являющееся множеством матриц преемственности $Z_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$, $(ij) \in \Omega$.

Определение 3.1. Решением системы (27) при фиксированных режимах (A_i,b_i) ($A_i \in [A_i]$, $b_i \in [b_i]$, $i = 1, \ldots, m$), заданном управлении u, переключающем сигнале $\sigma \in S(\Omega)$ и начальном условии $x^{(\sigma(0))}(0) \in \mathbb{R}^{n_{\sigma(0)}}$ будем называть кусочно-дифференцируемую вектор-функцию $x(t) \in \mathbb{R}^n$, терпящую потерю дифференцируемости и непрерывности разве что в моменты переключения режимов и совпадающую на каждом промежутке активности i-го режима ($i \in I$) с вектор-функцией $\tilde{x}^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^n$.

Задача 3.1. Для переключаемой интервальной линейной системы (27) требуется построить регулятор в виде $u = -k^T x$ ($x \in \mathbb{R}^n, u(0) = 0$), обеспечивающий ГРАУ соответствующей замкнутой системы.

В **разделе 2** описан подход к решению поставленной задачи на основе перехода к единому динамическому порядку переключаемой интервальной системы (27) с помощью метода расширения динамического порядка[24].

Динамическим расширением системы (27) будем называть переключаемую интервальную линейную систему порядка n

$$\dot{x} = [\tilde{A}_\sigma]x + [\tilde{b}_\sigma]u, \quad \sigma \in S(\Omega), \quad \tilde{Z}(\Omega) = \{\tilde{Z}_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n} : (ij) \in \Omega\}, x \in \mathbb{R}^n, \quad (28)$$

для которой режимы функционирования задаются уравнениями

$$\dot{x} = [\tilde{A}_i]x + [\tilde{b}_i]u, \quad i = 1, \ldots, m. \quad (29)$$

$$[\tilde{A}_i] = T_i[A_i]T_i^\top + \hat{T}_i\hat{A}_i\hat{T}_i^\top, \quad [\tilde{b}_i] = T_i[b_i], \quad \tilde{Z}_{ij} = T_iZ_{ij}T_j^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}. \quad (30)$$

Здесь $\hat{A}_i$ — некоторые фиксированные устойчивые матрицы порядка $n-n_i$,

$T_i \in \mathbb{R}^{n\times n_i}$ — матрица, содержащая $n-n_i$ нулевых строк и n_i строк с одной единицей, при этом единицы расположены только в позициях (j_k, k), $k = 1, \ldots, n_i$, $j_k \in \Gamma_{n_i}$, $\hat{T}_i \in \mathbb{R}^{n\times(n-n_i)}$ — матрица, содержащая n_i нулевых строк и $n-n_i$ строк с одной единицей, при этом единицы расположены только в позициях (j_k, k), $k = 1, \ldots, n_i$, $j_k \in \Gamma\backslash\Gamma_i$.

Лемма 3.2. Пусть линейная стационарная обратная связь $u = -k^T x$ ($k \in \mathbb{R}^n$) обеспечивает ГРАУ расширенной и замкнутой этой обратной связью системы

$$\dot{x} = ([\tilde{A}_\sigma] - [\tilde{b}_\sigma]k^T)x, \quad \sigma \in S(\Omega), \quad \tilde{Z}(\Omega) = \{\tilde{Z}_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n} : (ij) \in \Omega\}, x \in \mathbb{R}^n. \tag{31}$$

Тогда эта же обратная связь будет обеспечивать глобальную равномерную асимптотическую устойчивость и для исходной системы (27).

Лемма 3.2 позволяет свести задачу стабилизации системы (27) к задаче стабилизации соответствующей расширенной системы (28).

В **разделе 3** сформулированы условия на вектор k, обеспечивающие ГРАУ системы (31).

Теорема 3.1. Пусть

1) при некотором векторе $k \in \mathbb{R}^n$ существует единая функция Ляпунова $V(x) = x^\top Hx$ ($H \succ 0$) для семейства систем

$$\dot{x} = Q_l^{(i)}x, \quad i = 1, \ldots, m, \; l = 1, \ldots, 2^{n^2}, \tag{32}$$

где $Q_l^{(i)}$ — вершинные матрицы i-го режима соответствующей системы (31);

2) для матриц преемственности из множества $\tilde{Z}(\Omega)$ системы (31) выполняются неравенства

$$H - \tilde{Z}_{ij}^T H\tilde{Z}_{ij} \succeq 0, \quad (ij) \in \Omega \tag{33}$$

Тогда система (31) является ГРАУ.

Лемма 3.2 **раздела 2** и теорема 3.1 **раздела 3**, фактически, дают конструктивный алгоритм для проверки, является ли данная обратная связь $u =$

$k^T x$ ($k \in \mathbb{R}^n$) стабилизирующей для системы (27). Указанный алгоритм позволяет разрабатывать различные численные процедуры поиска вектора k стабилизирующей обратной связи для системы (27). Это могут быть либо обычные сеточные методы поиска либо методы интеллектуального поиска на множестве параметров обратной связи.

В разделе 4 исследуется вопрос об аналитическом алгоритме поиска вектора k стабилизирующей обратной связи.

В разделе 4.1 рассматривается случай, когда для всех векторов $[b_i]$, определяющих режимы системы (27) выполняются условия $\underline{b_i} = \overline{b_i}$, то есть когда эти векторы являются "точечными". В этом случае поиск вектора параметров k стабилизирующей обратной связи на основе теоремы 3.1 **раздела 3** сводится к решению системы линейных матричных неравенств.

Теорема 3.2. Пусть для системы (27) вида

$$\dot{x}^{(\sigma)} = [A_\sigma]x^{(\sigma)} + b_\sigma u, \quad \sigma \in S(\Omega), \quad Z(\Omega) = \{Z_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j} : (ij) \in \Omega\}, \tag{34}$$

разрешима система линейных матричных неравенств

$$\begin{cases} \hat{H}(\tilde{A}_i^l)^T + \tilde{A}_i^l \hat{H} - (\hat{k}\tilde{b}_i^T + \tilde{b}_i \hat{k}^T) \prec 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ \hat{H} \succ 0, \quad l = 1, \ldots, 2^{n^2}, \\ \begin{pmatrix} \hat{H} & \tilde{Z}_{ij}\hat{H} \\ \hat{H}\tilde{Z}_{ij}^T & \hat{H} \end{pmatrix} \succeq 0. \end{cases} \tag{35}$$

относительно матрицы $\hat{H}$ и вектора $\hat{k}$ ($\tilde{A}_i^{(l)}$ — вершинные матрицы для $[\tilde{A}_i]$, $\hat{H} = H^{-1}$).

Тогда обратная связь $u = -k^T x$ является стабилизирующей для системы (34), где $k^T = \hat{k}_*^T \hat{H}_*^{-1}$ (пара ($\hat{k}_*$, $\hat{H}_*$)— решение (35)).

В разделе 4.2 предлагается конструктивный алгоритм поиска стабилизирующего регулятора вида $u = -k^T x$ для общего случая ($[b_i]$—интервальные) переключаемой интервальной системы (28).

Теорема 3.5. Пусть для системы (28) разрешима система линейных матричных неравенств

$$\begin{cases} P(F_i^{(l)})^T + F_i^{(l)}P + z(h_i^{(l)})^T + h_i^{(l)}z^T < 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad l = \overline{1,2^{n^2+n}}, \\ P > 0, \\ \begin{pmatrix} P & \tilde{Z}_{ij}P \\ P\tilde{Z}_{ij}^T & P \end{pmatrix} \geq 0, \quad (i,j) \in \Omega, \end{cases} \tag{36}$$

где матрицы $F_i^{(l)}$ и вектор-столбцы $h_i^{(l)}$ таковы, что $\Psi_i^{(l)}(k) = F_i^{(l)} - h_i^{(l)}k^T$.

Тогда, если пара (z_0, P_0) — решение системы (36), то обратная связь $u = -k^T x$, где $k^T = -z_0^T P_0^{-1}$, является стабилизирующей для системы (28).

Завершает **главу 3 раздел 5**, в котором изложены выводы по основным полученным результатам данной главы.

Результаты **главы 3** опубликованы в работах [0].

Глава 4 посвящена задаче поиску регулятора переменной структуры для стабилизации переключаемой линейной интервальной системы с медленными переключениями (при $\tau > 0$), недоступными для наблюдения.

В **разделе 1**, в рамках предварительного исследования, изложены теоретические основы для построения регулятора переменнной структуры для переключаемых линейных систем без интервальной неопределённости.

В **разделе 1.1** формулируется постановка задачи для непрерывной скалярной переключаемой линейной системы

$$\dot{x} = A_\sigma x + b_\sigma u, \quad \sigma \in S_\tau, \tag{37}$$

где S_τ — множество всех переключающих сигналов σ, для которых время между любыми двумя соседними переключениями не меньше τ ($\tau > 0$).

Задача 4.1. Требуется стабилизировать систему (37) в нулевом положении равновесия регулятором переменной структуры вида

$$u = -k_{\hat{\sigma}}^T x, \tag{38}$$

обеспечивающего равномерную асимптотическую устойчивость соответствующей замкнутой системы. Здесь $\hat{\sigma}[l\varepsilon_p] = \mathcal{N}_{\varepsilon_p}(l\varepsilon_p, x)$ — оценка переключающего сигнала ($\hat{\sigma}[l\varepsilon_p] \in \{1, \ldots, m\}$), ε_p достаточно малая положительная константа ($\varepsilon_p = \frac{\tau}{p}$, $p \in \mathbb{N}$) и векторы $k_i \in \mathbb{R}^n$ выбираются исходя из условий устойчивости систем $\dot{x} = (A_i - b_i k_i^T)x$.

Ввиду того, что переключающий сигнал σ не доступен для измерения, для решения данной проблемы необходимо построение наблюдателя $\mathcal{N}_{\varepsilon_p}$ для активных режимов замкнутой системы.

В **разделе 1.2** подробно изложена процедура построения такого наблюдателя, в качестве которого используется искусственная нейронная сеть.

Система (37), замкнутая регулятором (38) может быть представлена как переключаемая система следующего вида

$$\dot{x} = (A_\sigma - b_\sigma k_{\hat{\sigma}}^T)x, \quad \sigma \in S_\tau, \ \hat{\sigma} \in S_{\varepsilon_p, \varepsilon_p}, \tag{39}$$

где $S_{\varepsilon_p, \varepsilon_p}$ — множество переключающих сигналов, для которых моменты переключения принадлежат множеству $\{l\varepsilon_p\}$, $l = 0, 1, 2...$

Дискретная ошибка оценивания $e_\sigma[l\tau]$ ($l = 0, 1, 2...$) сигнала $\sigma(t)$ определяется следующим образом:

$$e_\sigma[l\tau] = \max_{i=\overline{0,l-1}} \mu_{i\tau}^{(i+1)\tau},$$

где $\mu_{i\tau}^{(i+1)\tau}$ — количество промежутков вида $[j\varepsilon_p, (j+1)\varepsilon_p) \subset [i\tau, (i+1)\tau]$, для которых $\sigma(t) \not\equiv \hat{\sigma}(j\varepsilon_p)$. Заметим, что введённая ошибка оценивания не обязана стремиться к нулю на бесконечности, в связи с чем, подобный наблюдатель называем неидеальным.

В **разделе 1.3** описан первый шаг к построению стабилизирующего регулятора переменной структуры, а именно построение стабилизаторов для каждого режима системы (37) в отдельности.

В **разделе 1.4** сформулировано и доказано достаточное условие устойчивости замкнутой системы (39).

Теорема 4.1. Пусть для замкнутой системы (39) при любом переключающем сигнале $\sigma \in S_\tau$ и любом начальном условии $x(0) \in \mathbb{R}^n$ наблюдатель $\mathcal{N}_{\varepsilon_p}$ генерирует оценку $\hat{\sigma} \in S_{\varepsilon_p}$ с ошибкой, удовлетворяющей условию

$$e_\sigma[l\tau] \leq \theta, \quad l = 1, 2, \ldots$$

для некоторого $\theta \in \mathbb{N}$, $1 \leq \theta \leq [p/2]$.

Тогда, если

$$\tau > \frac{2}{\alpha} \ln \frac{1}{h},$$

где $h = c^{\theta+2}\beta^\theta P^\theta(\varepsilon_p)e^{(\rho-\alpha)\theta\varepsilon_p}$, то для любого начального условия $x(0) \in \mathbb{R}^n$ и любого переключающего сигнала $\sigma \in S_\tau$ норма соответствующего решения системы (39) стремится к нулю

$$||x(t)|| \to 0, \quad t \to \infty.$$

В **разделе 1.5** на основе результатов **раздела 1.4** получена оценка нормы решения устойчивой замкнутой системы (39).

В **разделе 1.6** описан метод формирования обучающей выборки для нейросети.

Раздел 2 данной главы посвящён теоретическим аспектам нейросетевого подхода к стабилизации переключаемых интервальных систем.

В **разделе 2.1** рассматривается непрерывная скалярная переключаемая интервальная линейная система

$$\dot{x} = [A_\sigma]x + [b_\sigma]u, \quad \sigma \in S_\tau. \tag{40}$$

Задача 4.2. Требуется стабилизировать систему (40) в нулевом положении равновесия, т.е. построить обратную связь в виде регулятора переменной структуры вида (38) такую, что для любых $x(0) \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in S_\tau$ и любых наборов $\{A_1, \ldots, A_m\}$ ($A_i \in [A_i]$), $\{b_1, \ldots, b_m\}$ ($b_i \in [b_i]$) норма $||x(t)||$ соответствующего решения системы (40), замкнутой этой обратной связью, стремится к нулю при $t \to \infty$.

В данном разделе для решения задачи 4.2 предлагается использовать подход аналогичный изложенному в **разделе 1** данной главы.

В **разделе 2.2** задача поиска стабилизирующей обратной связи для каждого интервального режима сводится к решению системы линейных матричных неравенств, а для решения задачи устойчивости замкнутой системы

$$\dot{x} = [A_\sigma]x - [b_\sigma]k_\sigma^T x, \quad \sigma \in S_\tau. \tag{41}$$

предложена методика получения оценок времени задержки τ для обеспечения устойчивости переключаемой интервальной системы с устойчивыми режимами.

Теорема 4.3. Пусть для переключаемой интервальной линейной системы (40) при любом $i \in I$ совместна система линейных матричных неравенств

$$\begin{cases} P_i F_{l,i}^T + F_{l,i} P_i + z_i g_{l,i}^T + g_{l,i} z_i^T < 0 \\ P_i > 0, \quad l = \overline{1, 2^{n^2+n}}. \end{cases}$$

и (z_i, P_i) — соответствующее ее решение. Тогда переключаемый регулятор

$$u = -k_\sigma^T x, \quad k_i^T = -z_i^T P_i^{-1}, \quad \sigma \in S_\tau \tag{42}$$

стабилизирует систему (40) при $\tau > \dfrac{2 \ln c}{|\alpha|}$, где константы c и α строятся по матрицам P_i.

Для того чтобы обеспечить синхронность переключений самой системы и регулятора в **разделах 2.3. и 2.4** как и в **разделе 1** данной главы описан метод построения неидеального наблюдателя, который формирует в каждый момент времени оценку переключающего сигнала $\sigma(t)$.

В **разделе 2.4** сформулировано достаточное условие устойчивости замкнутой системы

$$\dot{x} = ([A_\sigma] - [b_\sigma]k_{\hat{\sigma}}^T)x, \quad \sigma \in S_\tau, \ \hat{\sigma} \in S_{\varepsilon_p, \varepsilon_p}. \tag{43}$$

Теорема 4.4. Пусть для замкнутой системы (43) при любом переключающем сигнале $\sigma \in S_\tau$ и любом начальном условии $x(0) \in \mathbb{R}^n$ наблюдатель $\mathcal{N}_{\varepsilon_p}$

генерирует оценку $\hat{\sigma} \in S_{\varepsilon_p,\varepsilon_p}$ с ошибкой, удовлетворяющей условию

$$e_\sigma[l\tau] \leq \theta$$

для некоторого $\theta \in \mathbb{N}$, $0 \leq \theta \leq [p/2]$.

Тогда, если

$$\tau > \frac{2\ln h}{|\alpha|}, \tag{44}$$

где $h = c^{\theta+2}\beta^\theta P^\theta(\varepsilon_p)e^{(\rho-\alpha)\theta\varepsilon_p}$, то для любого начального условия $x(0) \in \mathbb{R}^n$ и любого переключающего сигнала $\sigma \in S_\tau$ норма соответствующего решения системы (43) стремится к нулю

$$||x(t)|| \to 0, \quad t \to \infty.$$

Здесь $P(t) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{t^k}{k!}$, β и r рассчитываются по интервальным матрицам режимов переключаемой системы.

Завершает **главу 4 раздел 3**, в котором изложены выводы по основным полученным результатам данной главы.

Результаты **главы 4** опубликованы в работах [0].

В **заключении** диссертационной работы подводятся итоги полученных в **главах 1, 2, 3 и 4** результатов и устанавливаются возможные дальнейшие направления исследования.

Заключение

1. Разработан метод построения цифрового (дискретного) регулятора по выходу для переключаемой линейной интервальной системы.

2. Разработан метод построения цифрового (дискретного) сверхстабилизатора по состоянию для переключаемой линейной интервальной системы.

3. Разработан метод решения задачи стабилизации переключаемой линейной интервальной системы с режимами различных динамических порядков.

4. Сформулировано и доказано достаточное условие существования стабилизирующего регулятора в форме статической обратной связи по состоянию для переключаемой линейной интервальной системы.

5. Сформулировано и доказано достаточное условие существования стабилизирующего регулятора в форме динамической обратной связи по выходу для переключаемой линейной интервальной системы.

6. Разработан метод построения регулятора переменной структуры для стабилизации переключаемых линейных интервальных систем в случае ненаблюдаемых переключающих сигналов.

Полученные теоретические результаты имеют значимость в рамках современной теории автоматического управления, теории переключаемых систем и аналитической теории дифференциальных уравнений.

Необходимо отметить, что интерес к задачам управления переключаемыми системами в настоящее время остается достаточно высоким, что подтверждается большим количеством работ, публикуемых по данному направлению. При этом, несмотря на большое количество исследований, в рамках рассматриваемой тематики продолжают возникать новые постановки задач, многие из которых остаются открытыми.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико–математических наук Фурсову Андрею Серафимовичу за постановку задачи и внимание к работе, профессорско–преподавательскому составу факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова за полученное образование, а также всем сотрудникам кафедры Нелинейных динамических систем и процессов управления факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова за поддержку и внимание к диссертационной работе.

Публикации автора по теме диссертации

Основные публикации автора по теме диссертации в журналах, индексируемых Web of Science, Scopus, RSCI, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ:

1. Фурсов А. С., Миняев С. И., Мосолова Ю. М. Синтез цифрового стабилизатора по выходу для переключаемой интервальной линейной системы // Дифференциальные уравнения. — 2019. — Т. 55, № 11. — С. 1545—1559. — (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0,855). Перевод:

   Fursov A.S., Minyaev S.I., Mosolova Yu M. Synthesis of a digital output controller for a switched interval linear system // Differential Equations. — 2019. — Vol. 55, no. 11. — P. 1503–1517. — (RSCI, Web of Science, Scopus, Five Year Impact Factor 2022 — 0.6, SJR — 0.57).

   Работа опубликована в открытой печати. Автором разработаны методы решения задач и получены все основные результаты. Научным руководителем, профессором А.С. Фурсовым и С.И. Миняевым поставлены задачи и намечены направления их решения.

2. Фурсов А.С., Мосолова Ю.М., Миняев С.И. Цифровая сверхстабилизация переключаемой интервальной линейной системы // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т. 56, № 11. — С. 1516–1527. — (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0,855). Перевод:

   Fursov A.S., Mosolova Yu M., Minyaev S.I. Digital superstabilization of a switched interval linear system // Differential Equations. — 2020. — Vol. 56, no. 11. — P. 1524–1535. — (RSCI, Web of Science, Scopus, Five Year Impact Factor 2022 — 0.6, SJR — 0.57).

   Работа опубликована в открытой печати. Автором разработаны методы решения задач и получены все основные результаты. Научным руководителем, профессором А.С. Фурсовым и С.И. Миняевым поставлены задачи и намечены направления их решения.

3. Фурсов А.С., Мосолова Ю.М. Построение систем стабилизации для переключаемых интервальных объектов с режимами различных порядков // Дифференциальные уравнения. — 2021. — Т. 57, № 11. — С. 1555–1563. — (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0,855). Перевод:

   Fursov A.S., Mosolova Yu M. Construction of stabilization systems for switched interval plants with modes of different orders // Differential Equations. — 2021. — Vol. 57, no. 11. — P. 1536–1544. — (RSCI, Web of Science, Scopus, Five Year Impact Factor 2022 — 0.6, SJR — 0.57).

   Работа опубликована в открытой печати. Автором разработаны методы решения задач и получены все основные результаты. Научным руководителем, профессором А.С. Фурсовым поставлены задачи и намечены направления их решения.

4. Фурсов А.С., Мосолова Ю.М. Достаточные условия существования стабилизирующих регуляторов для переключаемых интервальных систем // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т. 58, № 4. — С. 534–544. — (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0,855). Перевод:

   Fursov A.S., Mosolova Yu M. Sufficient conditions for the existence of stabilizing controllers for switched interval systems // Differential Equations. — 2022. — Vol. 58, no. 4. — P. 535–545. — (RSCI, Web of Science, Scopus, Five Year Impact Factor 2022 — 0.6, SJR — 0.57).

   Работа опубликована в открытой печати. Автором разработаны методы решения задач и получены все основные результаты. Научным руководителем, профессором А.С. Фурсовым поставлены задачи и намечены направления их решения.

5. Фурсов А.С., Мосолова Ю.М. Теоретические аспекты построения нейрорегулятора для переключаемых систем // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т. 58, № 11. — С. 1548–1556. — (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0,855). Перевод:
   Fursov A.S., Mosolova Yu M. Theoretical aspects of constructing a neurocontroller for switched systems // Differential Equations. — 2022. — Vol. 58, no. 11. — P. 1549–1557. — (RSCI, Web of Science, Scopus, Five Year Impact Factor 2022 — 0.6, SJR — 0.57).
   Работа опубликована в открытой печати. Автором разработаны методы решения задач и получены все основные результаты. Научным руководителем, профессором А.С. Фурсовым поставлены задачи и намечены направления их решения.

6. Мосолова Ю.М. Численная реализация алгоритма поиска сверхстабилизатора для переключаемых интервальных систем // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. — 2023, — Т. 1, — С. 42-53.— (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, импакт-фактор РИНЦ 2021: 0,077). Перевод:
   Mosolova Yu. M. Numerical Implementation of an Algorithm for Searching for a Superstabilizer for Switched Interval Systems // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. — 2023, — Vol. 47. — P. 33-44. — (RSCI).
   Работа опубликована в открытой печати.

7. Фурсов А.С., Мосолова Ю.М. Некоторые теоретические аспекты нейросетевого подхода к стабилизации переключаемых интервальных систем // Дифференциальные уравнения. — 2023. — Т. 59, № 10. — С. 1425–1432. — (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, двухлетний импакт-фактор РИНЦ: 0,855). Перевод:
   Mosolova Yu M., Fursov A.S. Some theoretical aspects of the neural network approach to stabilization of switched interval systems // Differential Equations.

— 2023. — Vol. 59, no. 10. — P. 1425–1432. — (RSCI, Web of Science, Scopus, Five Year Impact Factor 2022 — 0.6, SJR — 0.57).

Работа опубликована в открытой печати. Автором разработаны методы решения задач и получены все основные результаты. Научным руководителем, профессором А.С. Фурсовым поставлены задачи и намечены направления их решения.

Иные публикации автора по теме диссертации

8. Мосолова Ю. М., Фурсов А. С. Стабилизация переключаемой интервальной линейной системы цифровым регулятором // Ломоносовские чтения--2019: научная конференция, факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова. Тезисы докладов. — Москва : ООО "МАКС Пресс". — 2019. — С. 109–111.

9. Фурсов А. С., Мосолова Ю. М. Стабилизация переключаемой линейной системы в условиях параметрической неопределенности // Материалы XV Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». — ИПУ РАН Москва. — 2020. — С. 439–442.

10. Fursov A., Mosolova Y. Switched linear system stabilization under parametric uncertainty // IEEE Xplore: 15th International Conference on Stability and Oscillation of Nonlinear Control Systems. — Moscow. — 2020.

11. Фурсов А. С., Мосолова Ю. М., Османов А. Особенности численной реализации алгоритма построения цифрового стабилизатора для параметрически неопределенной переключаемой системы (О семинаре по проблемам нелинейной динамики и управления при Московском государственном университете) // Дифференциальные уравнения. — 2021. — Т. 57, № 2. — С. 286–288.

12. Фурсов А. С., Мосолова Ю. М. Некоторые подходы к стабилизации переключаемых интервальных систем // Интеллектуальные системы. Теория и приложения (ранее: Интеллектуальные системы по 2014, № 2, ISSN 2075-9460). — 2021. — Т. 25, № 4. — С. 297–300.

13. Фурсов А. С., Мосолова Ю. М. К вопросу о стабилизации переключаемых интервальных систем с режимами различных динамических порядков // Ломоносовские чтения-2021: научная конференция, факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова. Тезисы докладов. — Изд-во Моск. ун-та. — 2021. — С. 153–155.

14. Фурсов А. С., Мосолова Ю. М. Перспективы использования нейрорегуляторов для стабилизации переключаемых систем (О семинаре по проблемам нелинейной динамики и управления при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова) // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т. 58, № 2. — С. 280–281.

15. Фурсов А. С., Мосолова Ю. М. К вопросу о существовании стабилизирующей обратной связи для переключаемых интервальных систем // Ломоносовские чтения-2022: научная конференция, факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова. Тезисы докладов. — Москва : ООО "МАКС Пресс". — 2022. — С. 92–94.

16. Фурсов А. С., Мосолова Ю. М. Некоторые вопросы применения нейросетевого подхода в задаче стабилизации переключаемых интервальных систем // Ломоносовские чтения-2023: научная конференция, факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова. Тезисы докладов. —Москва : ООО "МАКС Пресс". — 2023. — С. 89–90.

Научное издание

Мосолова Юлия Михайловна

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук на тему:

Стабилизация переключаемых систем в условиях неопределённости