

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Селиванов Иван Алексеевич

**Аэроупругие колебания ортотропной прямоугольной пластинки со
смешанными граничными условиями**

Специальность 1.1.8 Механика деформируемого твердого тела

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
доктор физико-математических наук,
профессор, профессор РАН
Георгиевский Дмитрий Владимирович

доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Алгазин Сергей Дмитриевич

Москва — 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1 СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ	16
1.1 Собственные колебания ортотропной защемленной пластинки	16
1.1.1 Уравнение собственных колебаний ортотропной пластинки	17
1.1.2 Дискретизация	18
1.1.3 Построение производных элементов интерполяционной формулы....	19
1.1.4 Результаты численных расчетов.....	22
1.2 Собственные колебания пластинки со смешанными граничными условиями..	26
1.2.1 Постановка задачи.....	26
1.2.2 Построение решения.....	28
1.2.3 Получение приближенного первого собственного значения	33
1.2.4 Программная реализация и результаты расчетов	34
2 КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНОЙ ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПЛАСТИНКИ	41
2.1 Постановка задачи.....	41
2.2 Дискретизация	44
2.3 Вычислительные эксперименты	46
3 КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНКИ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ	57
3.1 Колебания изотропной пластинки.....	57
3.1.1 Постановка задачи.....	57
3.1.2 Дискретизация	60
3.2 Колебания ортотропной пластинки.....	62
3.2.1 Постановка задачи.....	62

3.2.2 Дискретизация	64
3.3 Вычислительные эксперименты	67
3.3.1 Изотропная пластинка	67
3.3.2 Ортотропная пластинка	77
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	88
ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ	90
СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ	91
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	92
СПИСОК ИЛЛЮСТРАТИВНОГО МАТЕРИАЛА	102
ПРИЛОЖЕНИЕ А	105

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы

При проектировании летательных аппаратов особое внимание всегда уделяется флаттеру, как одному из основных явлений аэроупругости — раздела механики сплошной среды, включающего в себя, но не ограничивающегося, теориями упругости и вязкоупругости, гидродинамикой и аэродинамикой. Изначально, когда разработка самолетов и ракет дошла до того, что скорости полета стали превышать некоторые критические значения, значительная часть проблем была связана именно с задачей взаимодействия конструкции и набегающего потока газа, которая была недостаточно изучена в то время. Необходимость максимально облегчить вес летательного аппарата и при этом обеспечить жесткость конструкции привела к использованию концепций монококов — состоящих из тонкостенных элементов оболочек, в которых нагрузки частично распределяются при помощи армирующих конструкций, таких как лонжероны и шпангоуты, а сами оболочки служат внешней обшивкой. Такое решение применялось, например, в конструкции ступени S-IVB ракеты-носителя Сатурн 5 (Saturn V) (Saturn V) [1]. Взаимодействие элементов конструкции с аэродинамическими силами приводит к колебаниям этих элементов. При скоростях потока, меньше некоторой величины, колебания элементов малы и практически не влияют на аэродинамические и прочностные характеристики летательного аппарата. Когда скорость потока достигает некоторого критического значения, взаимодействие обтекаемого элемента с потоком приводит или к резкому возрастанию деформации элемента в квазистатическом режиме или к возникновению самовозбуждающихся колебаний. Эти явления потери динамической устойчивости называются дивергенцией в первом случае и флаттером — во втором, а критическое значение скорости — критической скоростью флаттера [2]. Панельным флаттером называют задачи анализа устойчивости таких элементов как пластинки. Их еще

часто называют флаттером пластинок. Так, распад ракет Фау-2 (V-2, или А-4) во время Второй мировой войны в середине полета был вызван не проблемами с навигацией, как первоначально предполагалось, а из-за флаттера панелей [3]. В 1950-х годах американские военные потеряли несколько самолетов из-за повреждения электропроводки, прикрепленной к колеблющимся элементам обшивки [3]. Решение проблем, связанных с флаттером панелей, стало наиболее актуальным в 1960-х годах при разработке ракет Атлас–Центавр (Atlas–Centaur) [4] и Сатурн 5 [5]. Все большему аналитическому, численному и экспериментальному изучению флаттера пластинок способствовало как разрушение аппаратов Х-15 и Х-20 [6, 7], так и многие другие случаи, описанные в работах [3, 7].

Проблема флаттера отражается и в отечественных нормативных документах. Согласно требованиям авиационных правил «Часть 23. Нормы летной годности гражданских легких самолетов», 2014 г. [8], и «Часть 25. Нормы летной годности самолетов транспортной категории», 2015 г. [9], утвержденных Межгосударственным авиационным комитетом, самолет должен быть спроектирован таким образом, чтобы для всех его конфигураций и при всех расчетных условиях не возникало аэроупругой неустойчивости, то есть была исключена возможность возникновения флаттера, дивергенции, а также любой нежелательной потери устойчивости и управления из-за деформаций конструкции. Соответствие требованиям показывается при помощи расчетов, испытаний

в аэродинамических трубах, различных наземных и летных испытаний. Таким образом, разработка и, как следствие, сертификация воздушных судов в соответствии с приказом Министерства транспорта Российской Федерации от 17.06.2019 № 184 «Об утверждении Федеральных авиационных правил «Сертификация авиационной техники, организаций разработчиков и изготовителей. Часть 21» не может проходить без исследований, позволяющих повысить качество численных расчетов аэроупругой неустойчивости [10].

Определение критической скорости флаттера представляет собой решение задачи об устойчивости процесса обтекания газом поверхности упруго деформируемого тела, деформация которого влияет на характеристики набегающего потока. При этом, обтекание тела, которое происходит при отсутствии деформаций тела, считается стационарным [11].

Флаттеру прямоугольных пластинок были посвящены работы [12, 13]. Считаемися классическими, эти результаты основаны на законе плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей, сформулированном А. А. Ильюшиным в 1947 г. [14], и его следствии — локальной формулы поршневой теории для избыточного давления газа на колеблющуюся пластинку, что сводит задачу к проблеме собственных значений несамосопряженного оператора [15]. Закон плоских сечений говорит о том, что при установившихся и неустановившихся движениях тонких твердых тел с большими сверхзвуковыми скоростями в различных средах, эти тела вызывают в окружающей среде только поперечные возмущения, если поперечные скорости точек тела порядка не более εU , U — вектор скорости точки тела, а также дает оценку точности расчета давления в любой точки поверхности тела по этому закону. Далее, на основании этого закона, задача расчета крыла при установившемся и неустановившемся движениях сводится к задаче о движении поршня в трубе постоянного сечения. Далее, для случаев, когда энтропию газа можно считать постоянной, можно получить, что избыточное давление на любой площадке поверхности тела будет равно давлению в неподвижном воздухе, умноженному на отношение нормальной составляющей вектора скорости площадки к скорости звука в невозмущенном потоке и на показатель политропы газа [14].

А. А. Мовчан также ввел понятие параболы устойчивости, которое получило широкое применение при решении подобных задач. Им же был представлен метод точного решения задач о колебаниях прямоугольных пластинок, у которых два края, направленные вдоль набегающего потока, имеют граничные условия шарнирного опирания, а два других края имеют произвольные граничные условия [12, 13, 16, 17]. Исследования аэроупругих колебаний пластин

продолжались как отечественными, так и зарубежными авторами: В. В. Болотин [11, 18–21], Г. Е. Багдасарян [22–24], А. С. Вольмир [25–29], А. А. Ильющин [14, 30–32], И. А. Кийко [33], А. А. Мовчан [34], П. М. Огибалов [35, 36], Я. Г. Пановко и И. И. Губанова [37], Г. В. Фершинг [38], Я. Ц. Фын [39], Н. Ashley [40, 41], E. H. Dowel [7, 42–47], J. W. Sawyer [48, 49], M. D. Olson [50], M. Holt [51, 52]. Это лишь небольшая часть из них.

В настоящее время численному исследованию флаттера пластинок посвящаются как отечественные, так и зарубежные работы и диссертации. Так, большой объем работ по флаттеру пластинок принадлежит В. В. Веденееву [53–58].

Флаттеру заземленной ортотропной пластины посвящена работа С. О. Папкина [59], сравнение с результатами которой проводится во второй главе настоящей работы. В статье рассматривается ортотропная пластинка, предполагается наличие в плоскости пластины сжимающих сил, направленных вдоль координатных осей x и y . Для давления аэродинамического воздействия набегающего потока с пластинкой применяется формула поршневой теории. Для решения задачи применяется метод Бубнова–Галеркина.

Стоит также отметить работы М. В. Белубеяна, например, [60], в которой рассматривается пластинка, имеющая один свободный край, на которой набегающий поток, а оставшиеся края шарнирно закреплены. В работе применяется формула поршневой теории для давления со стороны обтекающей пластинку потока газа. Постановка задачи сводится к задаче на собственные значения несамосопряженного оператора.

А также диссертацию М. Adler [61], в которой рассматривается вопрос о влиянии турбулентных пограничных слоев на аэроупругие свойства тонкостенных оболочек при больших дозвуковых и малых сверхзвуковых скоростях. В работе оценивается количественное влияние явлений вязкого течения на границу аэроупругой устойчивости плоских оболочек, шарнирно закрепленных или плотно зажатых со всех сторон. При помощи конечно-элементного комплекса Nastran автор реализует и проверяет подход

к многоуровневому решению объединенных уравнений структурно-динамической модели и уравнений Навье–Стокса, осредненных по Рейнольдсу. В контексте одномодового флаттера получено, что демпфирующее влияние пограничного слоя объясняется выраженным дозвуковым характером распределения возмущений, вызванных движением в сверхзвуковых потоках. Путем численного решения уравнений Навье–Стокса автор доказывает, что этот дозвуковой характер существенно зависит от локального распределения скоростей в пограничном слое.

В части этих работ зачастую рассматриваются классические постановки задач при направлении потока, параллельным одной из осей, например, [62]. Теоретические основы флаттера, практические вопросы, а также вопросы моделирования флаттера подробно описаны в работе [63]. При этом большой интерес также представляют собой постановки задач флаттера, которые позволяли бы учитывать направление набегающего потока в плоскости пластинки. Рассмотрению таких задач посвящены, например, работы [64–73], в некоторых из которых также рассматриваются ортотропные пластинки.

Довольно часто, особенно в ранние годы исследований, для решения задач панельного флаттера применяется метод Бубнова–Галеркина. Однако, для сложных граничных условий довольно проблематично подобрать систему координатных функций, поэтому этот метод чаще применяется в задачах о колебаниях прямоугольных пластин. В последнее время широко распространенным методом можно назвать метод конечных элементов, который требует значительных мощностей вычислительных устройств, однако хорошо зарекомендовавшего себя при решении задач [74–78]. Такой подход приводит к алгоритму с насыщением [79], что снижает его эффективность. Этот эффект обычно нивелируют тем, что применяют схемы с высоким порядком точности. Однако, при таком подходе следует учитывать следующее. Для метода конечных элементов для самосопряжённого оператора имеем следующую оценку собственных значений [80]: $0 \leq \lambda_l^h - \lambda_l \leq c_l \|u_l^h - u_l\|_S^2$, где u_l^h — приближенная

собственная функция, λ_n^l — приближенное собственное значение, $\|\cdot\|_S$ — норма в пространстве Соболева W_2^S , а квадратичная зависимость $\|u_l^h - u_l\|_S^2$ нарушается для несамосопряженных задач на собственные значения и, следовательно, основное преимущество этого метода теряется. При этом необходимо отметить, что постановка задачи панельного флаттера с учетом формулы поршневой теории, учитывающая направление вектора скорости потока в плоскости пластинки, сводится к несамосопряженной задаче на собственные значения.

Вместе с этим следует заметить, что большинство этих задач описывается уравнениями эллиптического типа, которые имеют гладкие решения. Поэтому для таких задач представляется целесообразным использовать алгоритмы, которые учитывали бы эту гладкость [81]. В отличие от классических разностных методов и метода конечных элементов, где зависимость скорости сходимости от шага сетки степенная, для алгоритмов, учитывающих гладкость, имеем экспоненциальное убывание погрешности на аналитических решениях [15]. Такие алгоритмы получили название численных алгоритмов без насыщения [79]. Особенность применения таких алгоритмов заключается в том, что они дают возможность производить решение на сетках с малым числом узлов, поскольку такие алгоритмы автоматически реагируют на гладкость решения рассматриваемой задачи и *a priori* ее знать не нужно [15, 82–89].

Таким образом, учитывая все вышесказанное, представляется **актуальным** разработать численный алгоритм без насыщения для решения задач о флаттере ортотропных пластинок в постановке, позволяющей учитывать направление вектора скорости набегающего потока в плоскости пластинки, на что и нацелена настоящая работа. При этом не малый научный и практический интерес представляет собой параметрическое исследование критической скорости флаттера при изменении направления потока от различных параметров задачи, которое можно провести, воспользовавшись эффективностью численного метода без насыщения. Такое исследование позволило бы определить характерные

зависимости, которые могли бы быть крайне полезны при проектировании летательных аппаратов.

Степень разработанности

Решение задач об аэроупругих колебаниях пластинок в потоке газа уже многие десятилетия является актуальной и исследуемой темой. Были предложены различные постановки задач и методы их аналитического и численного решения. Однако не всегда постановки позволяют учитывать направление вектора потока в плоскости пластинки или ортотропию материала пластинки, а решение задач для определенных типов граничных условий является слабо изученной проблемой. Кроме того, часто применяемый метод конечных элементов для численного решения спектральных задач теряет свое основное преимущество (квадратичную сходимость) для несамосопряженных операторов.

Методология и методы исследования

В работе рассматривается постановка задачи панельного флаттера А. А. Ильюшина И. А. Кийко, основанная на теории тонких пластинок Кирхгофа, поршневой теории Ильюшина для давления аэродинамического взаимодействия потока с колеблющейся пластинкой и учитывающая направление вектора скорости набегающего потока в плоскости пластинки [15]. Такая постановка сводится к несамосопряженной задаче на собственные значения для эллиптического уравнения в частных производных, а внутри рассматриваемой области решение гладкое исходя из традиционной теории дифференциальных уравнений [15]. При этом, разностные методы, применяемые для численного решения задач и дающие для самосопряженных операторов степенное убывание погрешности с уменьшением шага сетки, для несамосопряженных операторов теряют свое основное преимущество — квадратичная зависимость $\|u_l^h - u_l\|_S^2$ в оценке собственных значений $0 \leq \lambda_l^h - \lambda_l \leq c_l \|u_l^h - u_l\|_S^2$ (где u_l^h — приближенная собственная функция, λ_l^h — приближенное собственное значение, $\|\cdot\|_S$ — норма в пространстве Соболева W_2^S) нарушается [80]. Поэтому для рассматриваемой задачи целесообразно разработать численный алгоритм без насыщения

(по К. И. Бабенко [79]), для которого *a priori* не требовалось бы знать гладкость задачи, потому что такой метод автоматически под нее подстраивается и имеет экспоненциальное убывание погрешности на аналитических решениях. При этом решение строится на неравномерной сетке, узлы которой сгущаются к особенностям в углах области. Такой алгоритм позволяет получать достоверные результаты на сетке с малым числом узлов с высокой точностью и скоростью вычислений.

Цель работы

Целью работы является разработка численного алгоритма без насыщения для решения задач о флаттере прямоугольных пластинок в постановках, позволяющих учитывать направление вектора скорости набегающего потока в плоскости пластинки и проведение параметрического исследования критической скорости флаттера при изменении направления вектора скорости потока от параметров соотношения сторон пластинки и жесткостей пластинки вдоль направлений.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Провести апробацию численного алгоритма при помощи решения задач о собственных колебаниях прямоугольных пластинок: ортотропной и изотропной пластинок с граничными условиями защемления, а также смешанными граничными условиями. Провести сравнение результатов с известными результатами других авторов.

2. Разработать численный алгоритм без насыщения для решения задачи о колебаниях ортотропной защемленной пластинки в постановке, учитывающей направление вектора скорости потока в плоскости пластинки. Провести исследование зависимости критической скорости флаттера при изменении направления вектора скорости потока от направления с большей жесткостью к направлению с меньшей жесткостью пластинки. Провести исследование изменения зависимости критической скорости флаттера от направления вектора скорости потока при изменении длины пластинки вдоль направления с меньшей

жесткостью. Провести сравнение получаемых разработанным алгоритмом результатов с результатами других авторов.

3. Разработать эффективный численный алгоритм без насыщения для решения задачи о колебаниях прямоугольной изотропной пластинки со смешанными граничными условиями.

4. Разработать эффективный численный алгоритм без насыщения для решения задачи о колебаниях прямоугольной ортотропной пластинки со смешанными граничными условиями.

5. Для изотропной пластинки со смешанными граничными условиями в постановке, учитывающей направление вектора скорости потока в плоскости пластинки, провести исследование зависимости критической скорости флаттера при изменении направления вектора скорости потока от стороны со свободным опиранием до защемленной стороны.

6. Для ортотропной пластинки со смешанными граничными условиями в постановке, учитывающей направление вектора скорости потока в плоскости пластинки, провести исследование зависимости критической скорости флаттера при изменении направления потока от направления с большей жесткостью пластинки к направлению с меньшей жесткостью пластинки и исследование изменения зависимости критической скорости флаттера от направления вектора скорости потока при изменении длины пластинки вдоль направления с меньшей жесткостью.

Научная новизна работы

1. Получены решения задач о флаттере прямоугольных пластинок в постановке, позволяющей учитывать направление вектора скорости набегающего потока в плоскости пластинки при помощи построенного эффективного численного алгоритма без насыщения: колебания изотропной защемленной пластинки, колебания изотропной и ортотропной пластинок со смешанными граничными условиями. Эффективный численный алгоритм без насыщения автоматически подстраивается под гладкость рассматриваемой

задачи и позволяет получить достоверные результаты на сетке с малым числом узлов с высокой точностью и скоростью вычислений.

2. Проведено исследование зависимости критической скорости флаттера при изменении направления вектора скорости потока от параметров соотношения сторон пластинки и жесткостей пластинки вдоль направлений и на основании полученных результатов выявлены характерные зависимости.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие новые результаты, полученные в диссертации:

1. Разработанный численный алгоритм без насыщения дает возможность рассчитывать критическую скорость флаттера прямоугольных изотропной и ортотропной пластинок с учетом направления вектора скорости потока в плоскости пластинки со смешанными граничными условиями (тип SCSC) и граничными условиями заземления (тип CCCC) с высокой точностью. Эффективный численный алгоритм позволил провести многопараметрический анализ зависимости критической скорости флаттера при изменении направления вектора скорости потока от параметров соотношения сторон пластинки и жесткостей пластинки вдоль направлений.

2. Проведенный многопараметрический анализ позволил выявить, что для квадратных ортотропных пластинок со смешанными граничными условиями (тип SCSC) характер зависимости критической скорости флаттера от направления вектора потока (при повороте вектора скорости потока от стороны со свободным опиранием и большей жесткостью до заземленной стороны с меньшей жесткостью) отличается от характера зависимости для изотропных пластинок — рост критической скорости флаттера в области до 45 градусов отсутствует, критическая скорость флаттера убывает нелинейно.

3. Проведенный анализ для удлиненных изотропных и ортотропных пластинок со смешанными граничными условиями (тип SCSC) дает основание сделать вывод о небольшом росте критической скорости флаттера, который

сопровождается переходом номера собственного значения, на котором она достигается, от первого к более высоким.

Практическая значимость

Представленный метод позволяет вычислять критическую скорость флаттера для пластинок, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа с учетом направления потока в плоскости пластинки. Представленные решения задач дают возможность проводить расчеты, результаты которых позволяют оценить возможность возникновения неустойчивых колебаний в рассматриваемой системе, а также их влияние на прочность и управляемость летательных аппаратов и других конструкций, в которых применяются пластинки. В результате многопараметрического анализа получены зависимости критической скорости флаттера от различных параметров задачи: направления вектора скорости потока, размеров пластинки и жесткостей ортотропной пластинки. Данные результаты могут найти эффективное применение в научно-исследовательских организациях и конструкторских бюро, специализирующихся на проектировании и расчетах конструкций летательных аппаратов.

Достоверность результатов

Достоверность полученных результатов обусловлена использованием классических методов механики сплошных сред и корректностью используемых методов исследования. При проведении численных расчетов проверена сходимость на разных сетках и установлена согласованность решений тестовых задач с решениями других исследователей.

Апробация работы

Результаты исследования были доложены на Международных конференциях: «Авиация и космонавтика» 2021 г. Москва, «Моделирование нелинейных процессов и систем (MNPS — 2020)» 2020 г. Москва. Кроме того, полученные результаты обсуждались на ежегодных аспирантских и научно-исследовательских семинарах имени А. А. Ильюшина кафедры теории

упругости механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. Д. В. Георгиевского (2018 — 2022 гг.).

Публикации

Основные результаты диссертации изложены в **7** публикациях [90–96], в том числе в статьях [90, 92, 95] из журналов, индексируемых в базах Web of Science, Scopus, RSCI.

Личный вклад автора

В диссертации приведены результаты, полученные лично автором. Во всех опубликованных работах вклад автора является определяющим. Автор принимал активное участие в выборе граничных условий для рассматриваемых задач, разработке метода численного решения задачи, проведении численных исследований, планировании и обсуждении результатов численных исследований. Дискретизация, применяемая для численного решения задачи о колебаниях пластины со смешанными граничными условиями, разработана лично автором. Численный алгоритм был реализован в программном коде лично автором. Все результаты и их анализ, графики, таблицы, представленные в диссертации, автор выполнил лично. При этом необходимо отметить следующее. Диссертация подготовлена автором на основе работ, опубликованных совместно с С. Д. Алгазиным [90–96], который предложил разработать для решения задачи численный алгоритм без насыщения, участвовал в обсуждении разработанного алгоритма, выбора граничных условий, характеристик рассматриваемых пластин и результатов численных исследований. Положения, выносимые на защиту, получены лично автором.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и заключения. Объем работы — **105** страниц, включая **32** рисунка и **26** таблиц. Список литературы содержит **110** наименований.

Нумерация формул, таблиц и рисунков даются в пределах раздела. При ссылке на формулу, таблицу или рисунок из другого раздела перед номером ставится номер главы, далее — номер раздела.

1 СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

1.1 Собственные колебания ортотропной защемленной пластинки

Свободные, или собственные, колебания представляют собой колебания элементов конструкции или всего летательного аппарата, которые возникают вследствие внешнего однократного воздействия и протекают в изолированной системе [62, 97]. Различного рода элементы конструкции летательного аппарата представляют собой прямоугольные ортотропные пластинки, для которых требуется определять собственные частоты и собственные формы колебаний.

Подобные задачи не раз рассматривались различными авторами, которые представляли различные формы решений [98]. Ключевой особенностью при этом является необходимость точного вычисления собственных значений задачи. Получать аналитические формы для любых комбинаций граничных условий не всегда возможно, поэтому требуется строить такие решения, которые позволяют получать точное собственное значение при малых затратах.

Более подробно эти вопросы рассмотрены в работе [98], кроме того, в ней предлагается форма для поиска решения через комбинацию тригонометрических и аналитических функций, требующая определения восьми различных коэффициентов.

Решению таких задач посвящена книга [99], в которой построение решения основывается на методе суперпозиции и решении Леви [100]. Рассматриваемые задачи разделяются на подзадачи, которые решаются отдельно. При этом решение задачи строится таким образом, что поиск собственного значения приходится выполнять перебором.

Ключевой особенностью представляемых решений является то, что они не учитывают гладкость решения получаемых задач. В настоящем разделе приводится пример построения численного алгоритма без насыщения для задачи

о собственных колебаниях ортотропной пластинки, для дальнейшего применения подобное решение к задаче об аэроупругих колебаниях пластинки.

Материалы главы содержатся в публикациях [90, 91, 93].

1.1.1 Уравнение собственных колебаний ортотропной пластинки

Общий вид пластинки представлен на рисунке 1.1.1.

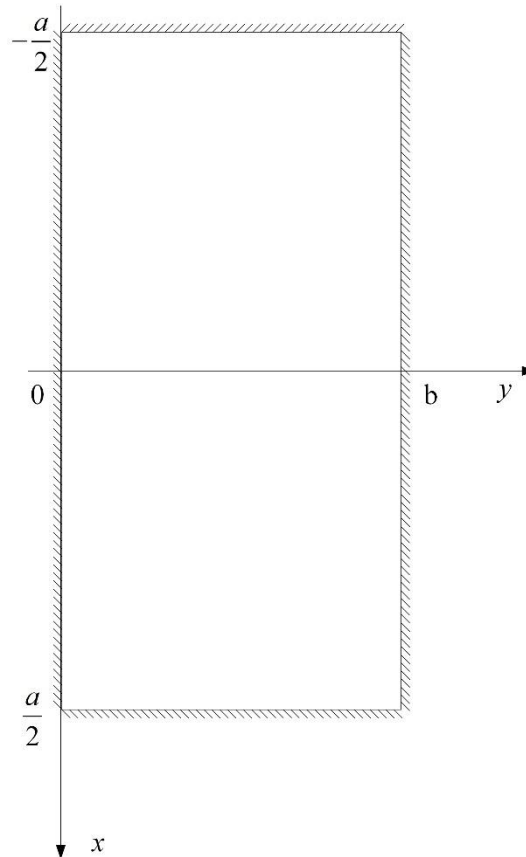


Рисунок 1.1.1 — Общий вид пластинки

Уравнение колебаний ортотропной пластинки имеет следующий вид [101]:

$$D'_x \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^4} + 2D'_{xy} \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + D'_y \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4} + \rho' h' \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1.1)$$

$$D'_x = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}, \quad D'_y = \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}, \quad D'_{xy} = D'_x \nu_y + 2 \frac{G_{xy}}{12} h^3,$$

где E_x и E_y — модули Юнга вдоль координатных осей;

G_{xy} — модуль сдвига;

ν_x, ν_y — коэффициенты Пуассона вдоль координатных осей;

h' — толщина пластинки.

Решение задачи (1) разыскивается в виде [102]

$$w(x, y, t) = w(x, y)e^{i\omega t}.$$

Таким образом получается задача на собственные значения:

$$D'_x \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2D'_{xy} \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + D'_y \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} - \rho' h' \omega^2 w(x, y) = 0. \quad (1.1.2)$$

К уравнению (1.1.2) необходимо добавить краевые условия. В качестве краевых условий выбираются условия защемления на сторонах прямоугольной пластинки:

$$w(x, y, t) = 0, \quad \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial n} = 0,$$

где n — нормаль к контуру пластинки.

Таким условиям закрепления соответствует обозначение СССС [62].

1.1.2 Дискретизация

Для уравнения (1.1.2) с краевыми условиями защемления необходимо провести процедуру дискретизации. Для этого необходимо применить для функции $w = w(x, y)$ в прямоугольнике интерполяционную формулу

$$w(x, y) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m M_{i_0}(z) L_{j_0}(x) w(x_j, y_i), \quad (1.1.3)$$

где

$$y = bz, \quad z \in [-1, 1], \quad x \in [-1, 1],$$

$$L_{j0}(x) = \frac{l(x)}{l'(x_j)(x - x_j)}, \quad l(x) = (x^2 - 1)^2 T_n(x), \quad T_n(x) = \cos(n \arccos x),$$

$$x_j = \cos \vartheta_j, \quad \vartheta_j = \frac{(2j-1)\pi}{2n}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$M_{i0}(z) = \frac{M(z)}{M'(z_i)(z - z_i)}, \quad M(z) = (z^2 - 1)^2 T_m(z),$$

$$z_i = \cos \vartheta_i, \quad \vartheta_i = \frac{(2i-1)\pi}{2m}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где $T_n(z) = \cos(n \arccos z)$ — многочлены Чебышева.

Формула (1.1.3), удовлетворяет краевым условиям заземления. Для получения матрицы дискретного бигармонического оператора H требуется применить бигармонический оператор к интерполяционной формуле (1.1.3), то есть четыре раза дифференцировать по x и y формулу (1.1.3). В результате получается несимметричная матрица H размера $N \times N$, $N = mn$. Узлы нумеруются в прямоугольнике (x_i, y_i) сначала по y , потом по x , то есть сверху вниз, справа налево. В результате получается, что $\Delta^2 w$ приближенно заменяется соотношением Hw , где w — вектор значений функции $w = w(x, y)$ в узлах сетки.

1.1.3 Построение производных элементов интерполяционной формулы

Применение бигармонического оператора к интерполяционной формуле представляет собой отдельную вычислительную задачу.

Так, производные от функций типа $M_{i0}(z)$ будут иметь следующий вид:

$$M'_{io}(z) = T'_m(z)(z^2 - 1)^2 + 4(z^2 - 1)zT_m(z),$$

$$M''_{io}(z) = 8z^2T_m(z) + 8(z^2 - 1)zT'_m(z) + 4(z^2 - 1)T_m(z) + (z^2 - 1)^2T''_m(z),$$

$$M'''_{io}(z) = 24z^2T'_m(z) + 24zT_m(z) + 12(z^2 - 1)zT''_m(z) + 12(z^2 - 1)T'_m(z) + (z^2 - 1)^2T'''_m(z),$$

$$M''''_{io}(z) = 48z^2T''_m(z) + 96zT'_m(z) + 24T_m(z) + 16(z^2 - 1)zT'''_m(z) + \\ + 24(z^2 - 1)T''_m(z) + (z^2 - 1)^2T''''_m(z).$$

Производные от функций $l(x)$ записываются аналогично.

В свою очередь, полиномы Чебышева и их производные, вплоть до четвертой, могут быть вычислены по следующим рекуррентным соотношениям:

$$T_0(z) = 1, T_1(z) = z, T_{k+1}(z) = 2zT_k(z) - T_{k-1}(z),$$

$$T'_0(z) = 0, T'_1(z) = 1, T'_{k+1}(z) = 2T_k(z) + 2zT'_k(z) - T'_{k-1}(z),$$

$$T''_0(z) = 0, T''_1(z) = 0, T''_{k+1}(z) = 4T'_k(z) + 2zT''_k(z) - T''_{k-1}(z),$$

$$T'''_0(z) = 0, T'''_1(z) = 0, T'''_{k+1}(z) = 6T''_k(z) + 2zT'''_k(z) - T'''_{k-1}(z),$$

$$T''''_0(z) = 0, T''''_1(z) = 0, T''''_{k+1}(z) = 4T'''_k(z) + 2zT''''_k(z) - T''''_{k-1}(z),$$

где $k = 1, m$ или $k = 1, n$.

Получение производных от функций типа $M_{io}(z)$ и $L_{jo}(x)$ может быть выполнено при помощи приближенного выражения.

Выражение, например, для $M_{io}(z)$ переписывается в следующем виде

$$M_{io}(z) = \frac{(z^2 - 1)^2 T_m(z)}{(z_i^2 - 1)^2 T'_m(z_i)(z - z_i)}. \quad (1.1.4)$$

В свою очередь, в выражении (1.1.4) вводится следующее приближение

$$\frac{T_m(z)}{T_m'(z_i)(z-z_i)} = \sum_{k=0}^{m-1} 'a_k^m(z_i) T_k(z), \quad (1.1.5)$$

$$a_k^m(z_i) = \frac{2}{m} T_k(z_i) = \frac{2}{m} \cos(k \cdot \theta_i), \quad \theta_i = \frac{2i-1}{2m} \pi.$$

Знак ' около суммы в выражении (1.1.5) означает, что первый член берется с коэффициентом $\frac{1}{2}$.

Таким образом, с учетом замены (1.1.5) выражение (1.1.4) принимает следующий вид:

$$M_{i_0}(z) = \sum_{k=0}^{m-1} 'a_k^m(z_i) T_k(z) \frac{(z^2-1)^2}{(z_i^2-1)^2}. \quad (1.1.6)$$

Формула для $L_{j_0}(x)$ выглядит аналогично.

Определение производных от выражения (1.1.6) не представляет труда и сводится к вычислению производных от интерполяционных полиномов Чебышева по рекуррентным соотношениям.

Так, первая производная от $M_{i_0}(z)$ будет иметь следующий вид:

$$M_{i_0}'(z) = \frac{4z(z^2-1)}{(z_i^2-1)^2} \sum_{k=0}^{m-1} 'a_k^{(m)} T_k(z) + \frac{(z^2-1)^2}{(z_i^2-1)} \sum_{k=0}^{m-1} 'a_k^{(m)} T_k'(z).$$

В дополнение стоит отметить, что интерполяционная формула должна удовлетворять определенным условиям в узлах сетки.

Из самого смысла интерполяционной формулы следует, что при $x = x_j$ и $y = y_i$, то есть, когда рассматривается значение в узле сетке, фундаментальная функция интерполяции должна быть равна единице в узле сетке, и нулю в остальных узлах. Таким образом, из всей суммы в интерполяционной формуле

остается только одно слагаемое. В данном утверждении не трудно убедиться, если рассмотреть формулы для расчета $M_{i0}(z)$ и $L_{j0}(x)$.

При расчете необходимо будет учесть нули интерполяционных полиномов Чебышева, то есть точки, в которых полиномы обращаются в ноль. То есть для интерполяционного полинома

$$T_m(z) = \cos(m \arccos z)$$

узлы выбираются так, чтобы $T_m(z_i) = 0$, тогда

$$z_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2m} \pi\right).$$

Представленные формулы позволяют выполнить программную реализацию и провести расчет собственных значений и построить собственные формы.

1.1.4 Результаты численных расчетов

Конкретные расчеты проводятся для следующих значений упругих констант и геометрических параметров пластинки: $|x'| \leq 1$ м, $|y'| \leq 2.4$ м, $h' = 0.1$ м, $E_x = 3.0 \cdot 10^4$ МПа, $E_y = 2.0 \cdot 10^4$ МПа, $G_{xy} = 1.5 \cdot 10^4$ МПа, $\rho = 1750$ кг/м³.

На печать выводится 10 безразмерных частот λ , результаты представлены в таблицах 1.1.1 — 1.1.4, где

$$\lambda = a \cdot \sqrt[4]{\frac{\rho' h'}{D'_x}}.$$

Программная реализация решения задачи была выполнена на языке Fortran. Поиск решения проводился для различных m и n .

Таблица 1.1.1 — Безразмерные собственные частоты, $n = m = 7$, слева направо, сверху вниз

0.48733886130·10	0.52904454932·10	0.59827282856·10
0.72097393239·10	0.78395650528·10	0.79614151745·10
0.82503397489·10	0.88408750149·10	0.99573829222·10
0.10087450383·10 ²		

Таблица 1.1.2 — Безразмерные собственные частоты, $n = m = 17$, слева направо, сверху вниз

0.48740586303·10	0.52924517831·10	0.59403950411·10
0.67549298325·10	0.76802682027·10	0.79554614050·10
0.82519823229·10	0.86776001770·10	0.87170148319·10
0.93194186743·10		

Таблица 1.1.3 — Безразмерные собственные частоты, $n = m = 27$, слева направо, сверху вниз

0.48740586376·10	0.52924518147·10	0.59403949338·10
0.67549295629·10	0.76802671786·10	0.79554613638·10
0.82519820591·10	0.86775890573·10	0.87170144468·10
0.93194174896·10		

Таблица 1.1.4 — Безразмерные собственные частоты, $n = m = 37$, слева направо, сверху вниз

0.48740586385·10	0.52924518162·10	0.59403949383·10
0.67549295698·10	0.76802671880·10	0.79554613650·10
0.82519820649·10	0.86775890688·10	0.87170144571·10
0.93194175070·10		

В [103] получены методом конечных элементов безразмерные собственные значения: Finite element method (FEM) 4.81, 5.10, 5.70, 6.57, 7.62, 7.90, 8.04, 8.32, 8.75, 8.77. Погрешность определения собственного значения в сравнении с методом конечных элементов не превосходит 6%.

Собственные формы колебаний пластинки представлены на рисунках 1.1.2 — 1.1.6.

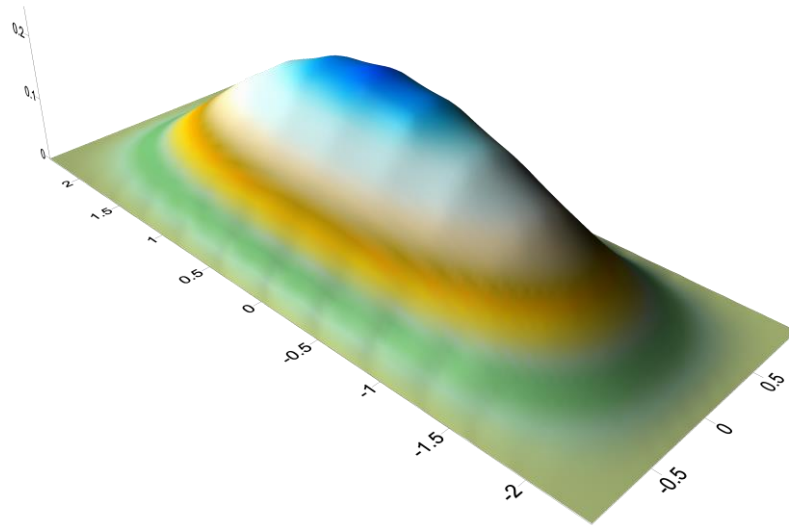


Рисунок 1.1.2 — Собственная форма, $\lambda=4.8740586385$

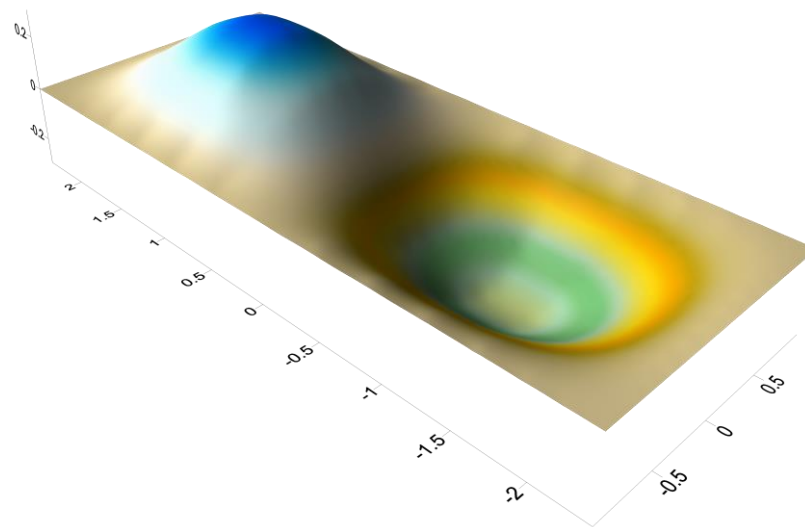


Рисунок 1.1.3 — Собственная форма, $\lambda=5.2924518162$

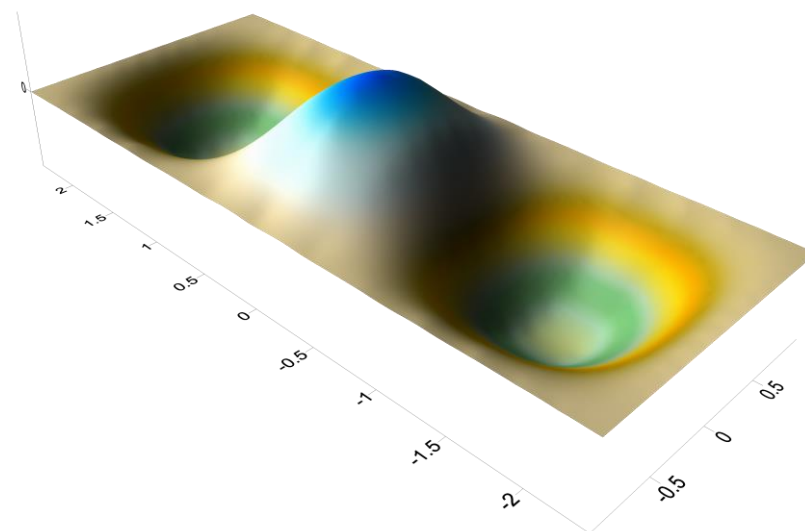


Рисунок 1.1.4 — Собственная форма, $\lambda=5.9403949383$

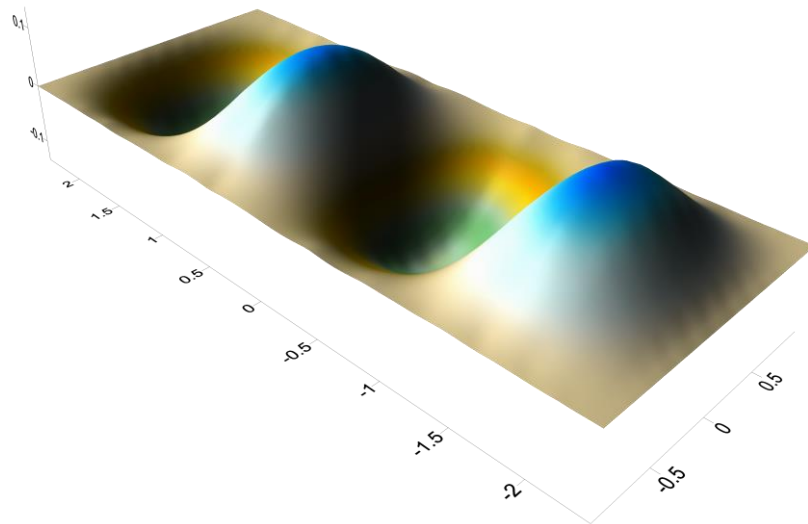


Рисунок 1.1.5 — Собственная форма, $\lambda=6.7549295698$

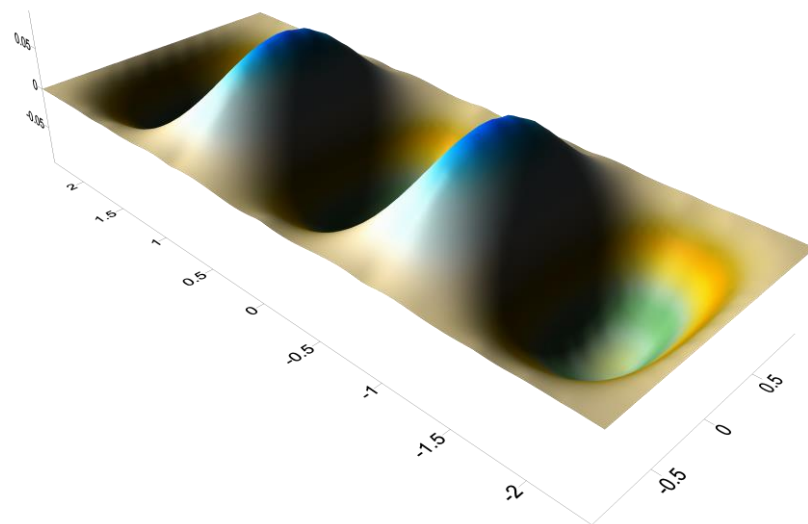


Рисунок 1.1.6 — Собственная форма, $\lambda=7.6802671880$

Из представленных результатов расчетов можно сделать вывод о том, что собственные колебания ортотропной пластинки осуществляется вдоль оси с меньшей жесткостью.

Собственные формы могут быть построены и для других собственных значений. Метод также позволять получать больше собственных значений, не ограничиваясь первыми 10 значениями, приведенными в таблицах выше.

1.2 Собственные колебания пластинки со смешанными граничными условиями

В разделе рассматривается постановка задачи о собственных колебаниях прямоугольной пластинки, жестко закрепленной по противоположным краям и свободно опертой по двум другим. Таким условиям закрепления соответствует обозначение SCSC [62].

1.2.1 Постановка задачи

Общий вид пластинки представлен на рисунке 1.2.1.

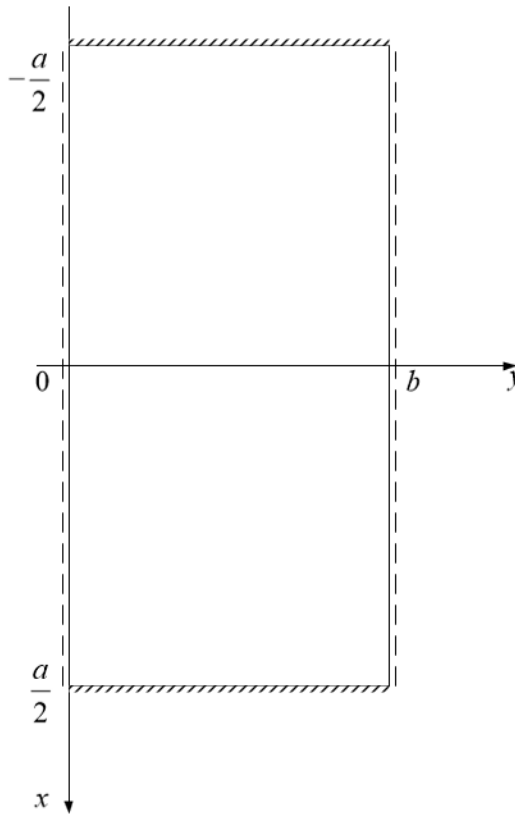


Рисунок 1.2.1 — Общий вид пластинки

Уравнение собственных колебаний и соответствующие граничные условия записываются следующим образом [97, 102, 104, 105]

$$D' \left(\frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4} \right) + \rho' h' \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = 0,$$

или [98]

$$D'\nabla^4 w(x, y, t) + \rho'h' \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial^2 t} = 0, \quad (1.2.1)$$

$$w(x, y, t)\Big|_{|x|=\frac{a}{2}} = 0, \quad \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x}\Big|_{|x|=\frac{a}{2}} = 0, \quad (1.2.2)$$

$$w(x, y, t)\Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial^2 y}\Big|_{y=0} = 0, \quad (1.2.3)$$

где $w(x, y, t)$ — прогиб пластинки;

$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$, $\nabla^2 = \partial^2 / \partial^2 x + \partial^2 / \partial^2 y$ — бигармонический дифференциальный оператор в прямоугольных координатах;

$$D' = \frac{Eh'^3}{12(1-\nu^2)} \text{ — цилиндрическая жесткость пластинки, Н} \cdot \text{м;}$$

ρ' — плотность материала пластинки, кг/м³;

h' — толщина пластинки, м;

E — модуль Юнга, Па;

ν — коэффициент Пуассона.

Решение возможно представить в следующем виде [102]

$$w(x, y, t) = w(x, y) e^{i\omega t} \quad (1.2.4)$$

Таким образом, задача (1.2.1) с учетом допущения (1.2.4) принимает вид

$$\nabla^4 w(x, y) = \lambda w(x, y)$$

где $\lambda = \frac{\rho'h'\omega^2}{D'}$ — имеет размерность 1/м⁴, а для получения безразмерного

собственного значения необходимо выводить $b^2 \sqrt{\lambda}$.

1.2.2 Построение решения

Для пластинок, у которых два противоположных края свободно оперты, примем решение в виде ряда (см., например, [104])

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{m_x} \sum_{n=1}^{m_y} U_m(x) \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad m = 1, 3, 5, \dots, m_x, \quad n = 1, 2, 3, \dots, m_y, \quad (1.2.5)$$

который, очевидно, удовлетворяет граничным условиям (1.2.3).

Рассматривая только симметричные относительно оси y колебания (получая только четные собственные формы), функции $U_m(x)$ возьмем в следующем виде

$$U_m(x) = \frac{4}{\pi^5 m^5} + A_m \cosh \frac{m\pi x}{b} + B_m \frac{m\pi x}{b} \sinh \frac{m\pi x}{b}, \quad (1.2.6)$$

где A_m, B_m — константы, определяемые из граничных условий (1.2.2),

$$A_m = -\frac{4}{m^5 \pi^5} \frac{am\pi \cosh \frac{m\pi a}{2b} + 2b \sinh \frac{m\pi a}{2b}}{am\pi \cosh \left(\frac{m\pi a}{2b} \right)^2 - am\pi \sinh \left(\frac{m\pi a}{2b} \right)^2 + 2b \cosh \frac{m\pi a}{2b} \sinh \frac{m\pi a}{2b}},$$

$$B_m = \frac{8}{m^5 \pi^5} \frac{b \sinh \frac{m\pi a}{2b}}{am\pi \cosh \left(\frac{m\pi a}{2b} \right)^2 - am\pi \sinh \left(\frac{m\pi a}{2b} \right)^2 + 2b \cosh \frac{m\pi a}{2b} \sinh \frac{m\pi a}{2b}}.$$

Для удобства дальнейшего изложения введем обозначение $V_n(y) = \sin \frac{n\pi y}{b}$,

таким образом, выражение (1.2.5) принимает вид

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{m_x} \sum_{n=1}^{m_y} U_m(x) V_n(y). \quad (1.2.7)$$

Согласно методу Бубнова — Галеркина ищем решение в виде [106]

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{m_x} \sum_{n=1}^{m_y} a_m U_m(x) b_n V_n(y), \quad (1.2.8)$$

где a_m , b_n — произвольно выбранные постоянные, которые определяются из условия ортогональности базисных функций к невязке

$$\int_0^b \int_{-a/2}^{a/2} \sum_{m=1}^{m_x} \sum_{n=1}^{m_y} \left[\nabla^4 (a_m U_m(x) b_n V_n(y)) - \lambda (a_m U_m(x) b_n V_n(y)) \right] U_p(x) V_q(y) dx dy = 0. \quad (1.2.9)$$

Перепишем (1.2.9) в более удобном виде

$$\begin{aligned} & \int_0^b \int_{-a/2}^{a/2} \sum_{m=1}^{m_x} \sum_{n=1}^{m_y} a_m b_n \left[\nabla^4 (U_m(x) V_n(y)) U_p(x) V_q(y) \right] dx dy = \\ & = \lambda \int_0^b \int_{-a/2}^{a/2} \sum_{m=1}^{m_x} \sum_{n=1}^{m_y} a_m b_n \left[(U_m(x) V_n(y)) U_p(x) V_q(y) \right] dx dy \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

Рассмотрим левую часть (1.2.10). Во-первых, выражение в квадратных скобках можно представить следующим образом

$$\nabla^4 (U_m(x) V_n(y)) U_p(x) V_q(y) = \nabla^2 (U_m(x) V_n(y)) \nabla^2 (U_p(x) V_q(y)). \quad (1.2.11)$$

Во-вторых, расписывая (1.2.11), подставляя в левую часть (1.2.10) и вводя матрицу A размера $p \cdot q$, $m \cdot n$, получаем для элемента матрицы $pqmn$

$$\begin{aligned} A_{pqmn} = & \int_{-a/2}^{a/2} U_m'' U_p'' dx \cdot \int_0^b V_n V_q dy + \int_{-a/2}^{a/2} U_m U_p dx \cdot \int_0^b V_n'' V_q'' dy + \\ & + \int_{-a/2}^{a/2} U_m U_p'' dx \cdot \int_0^b V_n'' V_q dy + \int_{-a/2}^{a/2} U_m'' U_p dx \cdot \int_0^b V_n V_q'' dy. \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Для правой части (1.2.10) вводим матрицу B того же размера что и A , для элемента $pqmn$ получаем выражение

$$B_{pqmn} = \int_{-a/2}^{a/2} U_m U_p dx \cdot \int_0^b V_n V_q dy. \quad (1.2.13)$$

Рассмотрим, далее, вычисление интегралов. Учтем, что

$$V_n'' = \frac{\partial^2}{\partial^2 y} \sin \frac{n\pi y}{b} = -\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin \frac{n\pi y}{b} \text{ и } V_q = \delta_{nq} V_n, \quad (1.2.14)$$

$$U_m''(x) = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 A_m \cosh \frac{m\pi x}{b} + 2\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 B_m \cosh \frac{m\pi x}{b} + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^3 B_m x \sinh \frac{m\pi x}{b}, \quad (1.2.15)$$

где δ_{nq} — символ Кронекера.

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^b V_n'' V_q dy &= \int_0^b V_n V_q'' dy = -\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \int_0^b V_n^2 dy = \delta_{nq} \frac{1}{2} \frac{n\pi}{b} (\cos(n\pi) \sin(n\pi) - n\pi), \\ \int_0^b V_n V_q dy &= -\delta_{nq} \frac{b}{2n\pi} (\cos(n\pi) \sin(n\pi) - n\pi), \\ \int_0^b V_n'' V_q dy &= -\delta_{nq} \frac{1}{2} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^3 (\cos(n\pi) \sin(n\pi) - n\pi). \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

Таким образом, интегралы (1.2.16) являются не нулевыми только при $n = q$.

Интегралы «по x » могут быть вычислены двумя способами: аналитически или же численно. При этом, при $m = p$ удобно выписать аналитическую формулу, а для $m \neq p$ выполнить вычисление численно по квадратурным формулам

$$\int_{-a/2}^{a/2} f(x) dx = \sum_{k=1}^{m_x} C_k f(x_k), \quad (1.2.17)$$

$$C_k = \frac{a}{m_x} \left(1 + \sum_{l=2(2)}^{m_x-1} \frac{2}{1-l^2} \cos l \theta_k \right),$$

$$\theta_k = \frac{a}{2} \frac{2k-1}{2m_x} \pi, \quad x_k = \cos \frac{a}{2} \frac{2k-1}{2m_x} \pi.$$

Аналитические формы интегралов «по икс» для $m = p$:

$$\begin{aligned} \int_{-a/2}^{a/2} U_m'' U_m'' dx = & \frac{1}{24b^6} \left(m^3 \pi^3 \left(6B_m^2 \sinh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right) \cosh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right) a^2 b m^2 \pi^2 - B_m^2 a^3 m^3 \pi^3 + \right. \right. \\ & + 24A_m B_m \cos\left(\frac{m\pi a}{2b}\right)^2 ab^2 m\pi + 36B_m^2 \cosh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right)^2 ab^2 m\pi + \\ & + 24A_m^2 \sinh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right) \cosh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right) b^3 + \\ & + 12A_m^2 ab^2 m\pi + 72A_m B_m \sinh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right) \cosh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right) b^3 + \\ & \left. \left. + 36A_m B_m ab^2 m\pi + 60B_m^2 \sinh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right) \cosh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right) b^3 + 30B_m^2 ab^2 m\pi \right) \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-a/2}^{a/2} U_m'' U_m dx = & \frac{1}{24b^4 m^4 \pi^4} \left(6B_m^2 \sinh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right) \cosh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right) a^2 b m^7 \pi^7 - B_m^2 a^3 m^8 \pi^8 + \right. \\
& + 24A_m B_m \cos\left(\frac{m\pi a}{2b}\right)^2 ab^2 m^6 \pi^6 + 12B_m^2 \cosh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right)^2 ab^2 m^6 \pi^6 + \\
& + 24A_m^2 \sinh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right) \cosh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right) b^3 m^5 \pi^5 + 12A_m^2 ab^2 m^6 \pi^6 + \\
& + 24A_m B_m \sinh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right) \cosh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right) b^3 m^5 \pi^5 + 12A_m B_m ab^2 m^6 \pi^6 - \\
& - 12B_m^2 \sinh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right) \cosh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right) b^3 m^5 \pi^5 - 6B_m^2 ab^2 m^6 \pi^6 + \\
& + 96B_m \cosh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right) ab^2 m \pi + 192A_m \sinh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right) b^3 + \\
& \left. + 192B_m \sinh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right) b^3 \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-a/2}^{a/2} U_m U_m dx = & \frac{1}{24b^4 m^{10} \pi^{10}} \left(6B_m^2 \sinh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right) \cosh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right) a^2 b m^{11} \pi^{11} - B_m^2 a^3 m^{12} \pi^{12} + \right. \\
& + 24A_m B_m \cos\left(\frac{m\pi a}{2b}\right)^2 ab^2 m^{10} \pi^{10} - 12B_m^2 \cosh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right)^2 ab^2 m^{10} \pi^{10} + \\
& + 24A_m^2 \sinh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right) \cosh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right) b^3 m^9 \pi^9 + 12A_m^2 ab^2 m^{10} \pi^{10} - \\
& - 24A_m B_m \sinh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right) \cosh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right) b^3 m^9 \pi^9 - 12A_m B_m ab^2 m^{10} \pi^{10} + \\
& + 12B_m^2 \sinh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right) \cosh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right) b^3 m^9 \pi^9 + 6B_m^2 ab^2 m^{10} \pi^{10} + \\
& + 192B_m \cosh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right) ab^2 m^5 \pi^5 + 384A_m \sinh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right) b^3 m^4 \pi^4 - \\
& \left. - 384B_m \sinh\left(\frac{m\pi a}{2b}\right) b^3 m^4 \pi^4 + 384ab^2 \right).
\end{aligned}$$

В результате, исходная задача (1.2.9) записывается в виде

$$\sum_{m,p=1}^{m_x} \sum_{n,q=1}^{m_y} a_m b_n A_{pqmn} = \lambda \sum_{m,p=1}^{m_x} \sum_{n,q=1}^{m_y} a_m b_n B_{pqmn}, \quad (1.2.18)$$

где суммирование по m, p и n, q ведется отдельно.

Матрица B при этом получается недиагональной, а матрица A — симметричной.

Задача, таким образом, сводится к определению собственных значений системы линейных алгебраических уравнений (1.2.18), которые вычисляются следующим образом

$$B^{-1}A = \lambda E. \quad (1.2.19)$$

Для получения собственных значений λ необходимо вычислить собственные значения матрицы $B^{-1}A$. Для получения безразмерных собственных значений необходимо их представлять в виде $b^2\sqrt{\lambda}$.

1.2.3 Получение приближенного первого собственного значения

Если рассмотреть решение, при котором $m_x = m_y = 1$, то есть $m = n = p = q = 1$, то из матричной формы выражение (1.2.19) представится в виде уравнения, решение которого будет являться приближенным первым собственным значением задачи. В таблице 1.2.1 представлены результаты решения задачи для различных пластинок $\phi = a/b$ (1.0, 1.5, 0.4, 2/3), результаты точного расчета из работы [98] (в работе необходимо рассматривать результаты для $1/\phi$) и оценки погрешностей.

Таблица 1.2.1 — Результаты расчета приближенных собственных значений для разных пластинок и сравнение с известными точными значениями

Соотношение $\phi, 1/\phi$	Приближенное, $b^2\sqrt{\lambda}$	Точное	Погрешность, %
1.0	29.08717122	28.9509	0.47
1.5, 2/3	17.49105739	17.3730	0.68
0.4, 2.5	146.0063534	145.4839	0.36
2/3, 1.5	56.56937081	56.3481	0.39

Численное решение не представляет труда и может быть выполнено, например, при помощи пакета Maple. Соответствующий программный код представлен в приложении А.

1.2.4 Программная реализация и результаты расчетов

Программная реализация решения задачи была выполнена на языке Fortran. Поиск решения проводился для различных a и b . В таблицах 1.2.2, 1.2.3, 1.2.5 — 1.2.10 приведены вычисленные собственные значения для $\phi = a/b$ (1.0, 1.5, 2.0, 1.25). Результаты работы [97] приведены в таблице 1.2.4. На рисунках 1.2.2 — 1.2.4 приведены собственные формы для квадратной пластинки.

Таблица 1.2.2 — Собственные значения для сетки 13x13, $a = b = 2$, $\phi = 1$

28.965543333	54.773571506	102.24878855	133.17194413
158.57725253	170.38560619	203.25216297	258.66691642
268.31721400	354.04437861	366.91018811	377.86357220
403.56659258	447.69398642	460.42536754	495.17537163
511.46444492	588.85912361	595.99855330	642.59363258
703.70719786	731.92242295	778.42251841	805.53167494
805.53167494	810.35629864	899.20830156	957.30134211
997.80901458	1086.0360855	1125.8756217	1205.0134559
1238.3578124	1292.7277847	1312.2740028	1431.9853915
1495.8013349	1518.2159395	1519.3628197	1537.4642077

Таблица 1.2.3 — Собственные значения для сетки 25x25, $a = b = 2$, $\phi = 1$

28.951910528	54.743212672	102.21548381	128.81781986
154.58848123	170.34570521	199.69986947	255.72496099
258.61325403	265.13266897	271.51058328	299.53523522
310.85877801	328.42855661	348.36778622	351.07676802
366.81655130	376.32110519	443.27474670	457.41915747
494.86870852	519.74569030	529.58311583	584.00091672
585.24268877	619.08338244	635.57379837	637.31517972
642.72686084	674.62517838	704.56076579	730.69266151
746.91592143	751.08179837	761.54034036	800.62990670
810.36880615	848.43335894	887.56733556	896.86252652

Таблица 1.2.4 — Собственные значения из [97], фрагмент таблицы EV-2

$a = b = 2, \phi = 1$						$\phi = 1.25$					
M	N	1	3	5	7	M	N	1	3	5	7
1		28.95	129.1	307.3	564.2	1		21.34	85.63	199.9	364.4
3		102.2	199.8	379.3	637.4	3		96.90	158.0	272.6	438.0
5		258.6	351.1	528.9	787.0	5		254.1	311.8	424.3	589.1
7		494.9	584.0	758.8	1015	7		490.6	546.5	656.8	820.2
$\phi = 1.50$						$\phi = 2.0$					
M	N	1	3	5	7	M	N	1	3	5	7
1		17.37	62.05	141.5	255.8	1		13.69	38.69	83.49	147.9
3		94.21	135.8	215.1	329.9	3		91.70	114.4	158.4	222.8
5		251.7	291.0	368.4	482.4	5		249.4	271.0	313.8	377.3
7		488.4	526.6	602.4	715.0	7		486.2	507.3	549.2	611.9

Таблица 1.2.5 — Собственные значения для сетки 13x13, $\phi = 1.5$

16.190468313	45.178107527	51.610879554	65.194852331
94.123522511	94.850135721	117.08784998	141.61311194
155.43098409	162.99826826	208.24600966	215.18553555
251.69945969	256.95432540	256.95432540	293.18473592
295.30720996	360.18653135	388.99132636	402.64520653
488.44321822	503.03468120	530.07335404	635.84653459
636.45615197	677.47161874	773.04778500	787.92448564
804.23004282	844.77243629	959.80830799	991.77506862
1031.9635554	1150.2492415	1152.3211519	1199.2915292
1239.1992789	1367.2861070	1425.5965559	1462.9063972

Таблица 1.2.6 — Собственные значения для сетки 25x25, $\phi = 1.5$

17.481586540	45.484590932	63.702743866	89.952676890
94.212032164	136.66078933	163.07248059	173.81041699
198.34215283	203.96610133	241.76398305	251.71961603
291.61540375	305.60315972	360.12700558	390.33420244
399.40736826	488.46522111	495.98826089	527.15378861
557.94169112	565.26723539	581.32992777	622.20438510
623.30070645	637.54149811	659.82175465	659.82175465
683.23076582	749.26487528	769.24902266	804.13128787
841.82431744	902.91198103	930.86435644	954.18090311
954.18090311	991.62580211	1021.3545485	1023.5639767

Таблица 1.2.7 — Собственные значения для сетки 13x13, $\phi = 2$

13.765161416	42.616967469	50.385684746	75.017868141
91.765101699	98.556587102	121.33355928	160.83600023
189.24298024	246.25136568	251.15002562	278.95648407
357.81002881	376.24531707	377.15875384	377.15875384
394.74769618	486.18097835	508.23883605	535.87161437
634.23712063	657.04190031	694.70014088	793.79390148
793.79390148	802.02118923	825.05605613	870.84653412
989.54090141	1012.6596593	1064.9449257	1087.2216495
108.72216495	1103.5821773	1103.5821773	1124.1414529
1124.1414529	1132.3723722	1132.3723722	1175.5403978

Таблица 1.2.8 — Собственные значения для сетки 17x17, $\phi = 2$

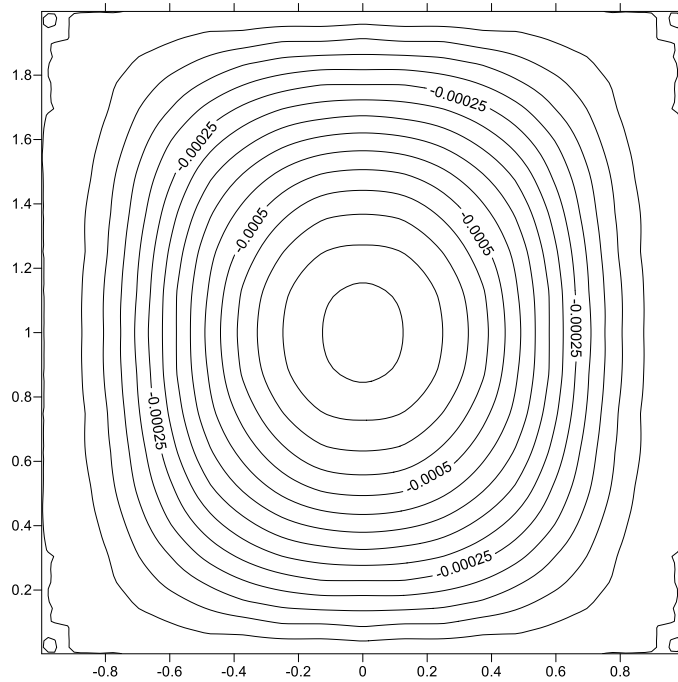
13.567112199	42.684675502	48.143638987	73.172684662
91.383089231	119.64483540	155.71980195	155.71980195
160.58588568	184.24854296	187.17985346	206.20035019
246.65847358	249.38564361	275.23785249	308.21140561
339.46590876	357.95016633	383.56719172	392.00087355
486.10105859	498.54302399	512.56536002	629.17829912
634.10666210	637.24726722	669.68969116	789.85143377
802.02262785	822.87080260	884.60206467	989.53198724
996.42848011	1008.3988437	1008.3988437	1011.4595914
1090.9470075	1196.7428959	1218.8893047	1244.1877530

Таблица 1.2.9 — Собственные значения для сетки 13x13, $\phi = 1.25$

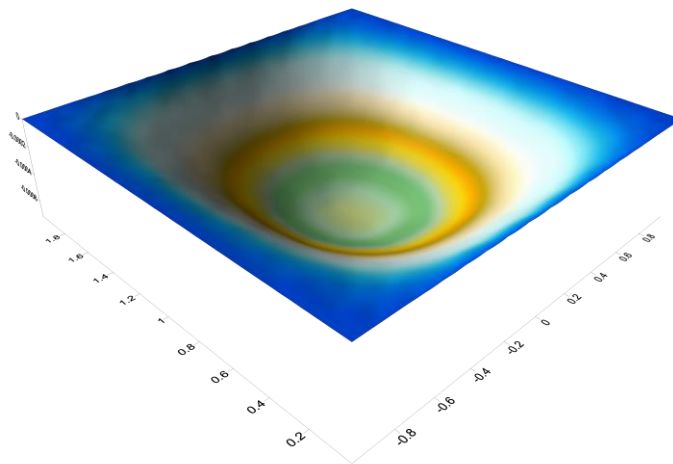
21.271038979	48.569066644	90.752248269	96.940795849
116.94725239	162.70648029	165.55991556	226.07338871
228.89739476	254.11970557	255.62924969	305.30117272
315.61857390	362.53343672	375.10334660	422.71612235
464.95357982	490.75418970	550.06624729	574.90610469
638.81520489	693.92596590	697.78493606	705.34728054
803.25093335	823.82496289	857.80933185	873.01571181
993.64863923	1042.9742120	1049.3849042	1177.3038282
1200.9588894	1256.9445807	1355.8545395	1400.1149298
1427.9598751	1483.8184685	1631.1337947	1674.6926875

Таблица 1.2.10 — Собственные значения для сетки 25x25, $\phi = 1.25$

21.316341135	48.517702057	86.970995036	96.908804415
112.93498429	158.92220372	165.50407562	225.63983198
238.63326917	254.08877718	264.01343386	268.03634359
308.97667864	313.72017995	362.42653392	376.93411122
418.30876156	479.90078250	490.62555913	508.08611369
546.30953587	556.01480697	638.57752354	658.55369046
683.03684716	693.76585926	806.28887601	810.31096859
826.68036126	861.05398209	878.50538469	912.43387084
933.68299715	979.81323616	993.76147078	1048.4866221
1057.6152165	1132.3411407	1145.9125582	1152.5547614

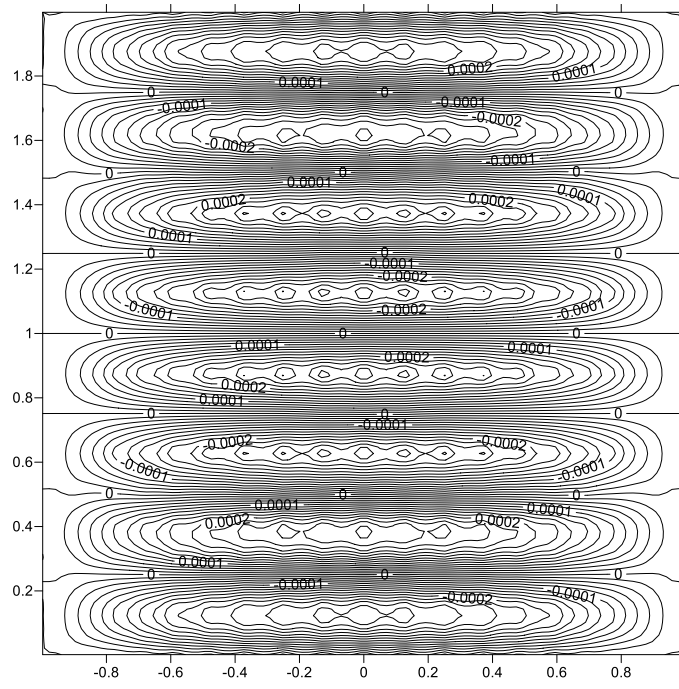


а

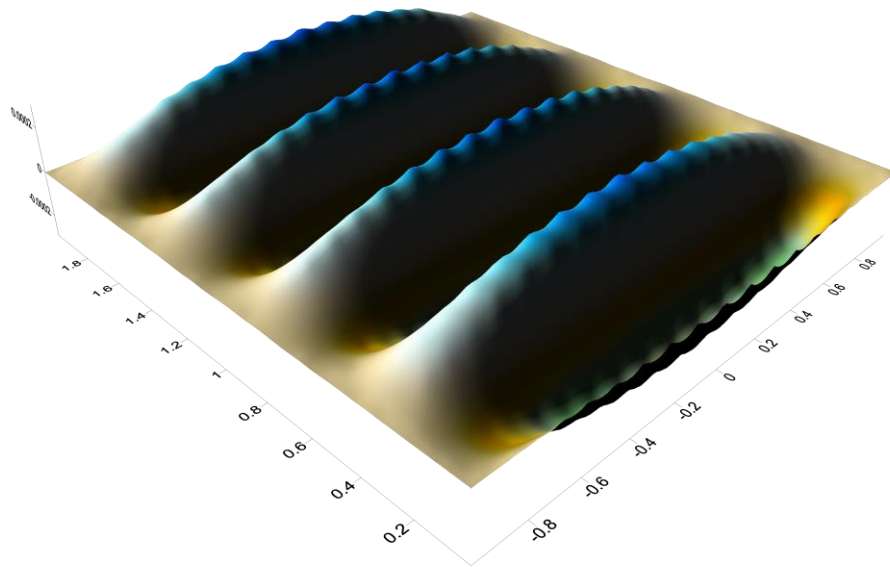


б

Рисунок 1.2.2 — Собственная форма, $a = b = 2$, $\lambda = 28.951910528$

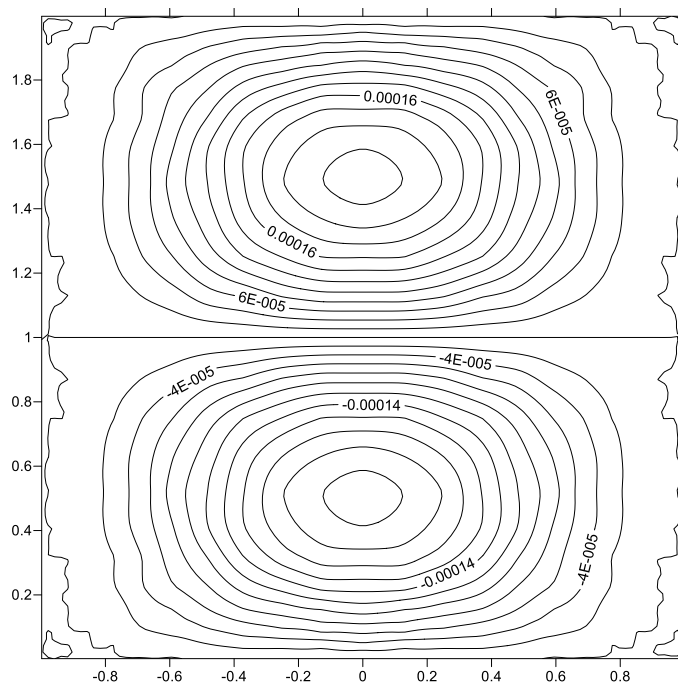


а

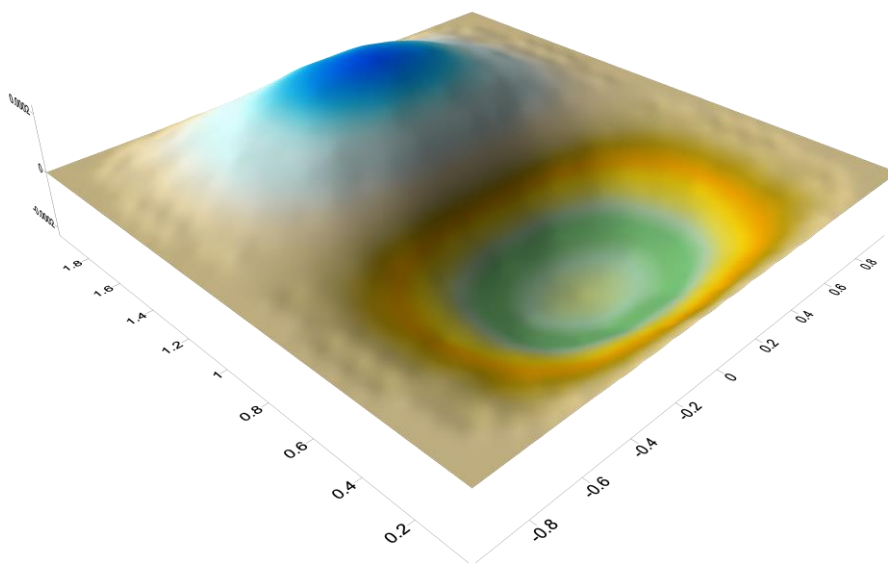


б

Рисунок 1.2.3 — Собственная форма, $a = b = 2$, $\lambda = 642.72686084$



а



б

Рисунок 1.2.4 — Собственная форма, $a = b = 2$, $\lambda = 154.58848123$

Представленные результаты показывают, что точность получаемых собственных значений, в сравнении с собственными значениями, полученными в работе [97], удовлетворительная.

При этом матрица B в правой части получается плохо обусловленной, что приводит к возникновению ошибок при обращении матрицы. Применение

процедуры итерационного уточнения [107] не оказывает особого эффекта на точность вычисления собственных значений.

2 КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНОЙ ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПЛАСТИНКИ

В главе рассматривается решение задачи об аэроупругих колебаниях ортотропной пластинки, полностью жестко защемленной по контуру, то есть случай СССС. Пластинка занимает в плоскости xu область $S: \{-a'/2 \leq x \leq a'/2, -b' \leq y \leq b'\}$.

Материалы главы содержатся в публикации [94].

2.1 Постановка задачи

Уравнение колебаний пластинки с использованием формулы поршневой теории для давления аэродинамического воздействия потока с колеблющейся пластинкой имеет вид [15]:

$$L'w + \frac{kp_0}{c_0} \vec{V}' \text{grad}w + \frac{kp_0}{c_0} \frac{\partial w}{\partial t} + \rho' h' \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1.1)$$

$$L'\varphi = D'_x \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2D'_{xy} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + D'_y \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4},$$

$$D'_x = \frac{E_x h'^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}, \quad D'_y = \frac{E_y h'^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}, \quad D'_{xy} = D'_x \nu_y + 2 \frac{G_{xy}}{12} h'^3.$$

где p_0, c_0 — давление и скорость звука в невозмущенном потоке;

k — показатель политропы газа;

E_x, E_y — модули Юнга по осям x и y ;

ν_x, ν_y — коэффициенты Пуассона;

G_{xy} — модуль сдвига;

h' — толщина пластинки;

\vec{V}' — вектор набегающего потока;

ρ' — плотность материала пластинки.

Если задать $w = \varphi' \exp(\omega't)$, и ввести собственное число λ' в виде $\rho'h'\omega'^2 + \omega'kp_0/c_0 + \lambda' = 0$, то, дополнив уравнение колебаний (2.1.1) соответствующими граничными условиями, получается задача на собственные значения.

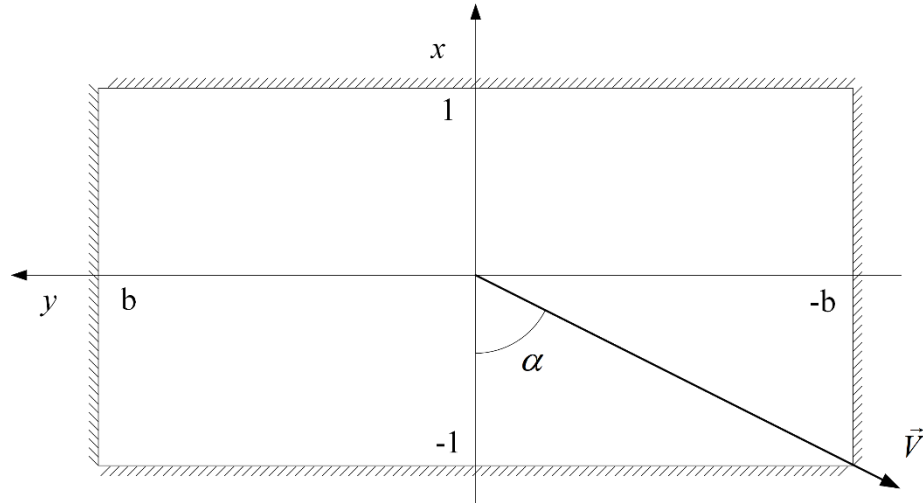


Рисунок 2.1.1 — Общий вид пластинки

Безразмерные параметры вводятся так же, как и в [82]. За характерный размер принимается половина длины в направлении x , то есть $a = a'/2$, $b = b'/a$ (рисунок 2.1.1). За характерные параметры — p_0, c_0 . Здесь \vec{V} — вектор набегающего потока, отнесенной к скорости звука в нем.

Получается задача на собственные значения в области $S: \{-1 \leq x \leq 1, -b \leq y \leq b\}$ [30]:

$$\begin{aligned} L\varphi + k\vec{V}\text{grad}\varphi &= \lambda\varphi, \\ \rho h\omega^2 + k\omega + \lambda &= 0, \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

$$\varphi(x, y)|_{|x|=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x} \right|_{|x|=1} = 0, \quad \varphi(x, y)|_{|y|=b} = 0, \quad \left. \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y} \right|_{|y|=b} = 0, \quad (2.1.3)$$

$$\vec{V} = (V_x, V_y), \quad L\varphi = D_x \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + 2D_{xy} \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} + D_y \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4},$$

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12(1-\nu_x \nu_y) p_0}, \quad D_y = \frac{E_y h^3}{12(1-\nu_x \nu_y) p_0}, \quad D_{xy} = D_x \nu_y + 2 \frac{G_{xy}}{12 p_0} h^3.$$

где h — толщина пластинки, отнесенная к a ;

$\omega = \omega' a / c_0$ — безразмерная частота;

$\lambda = \lambda' a / p_0$ — безразмерное собственное значение;

$\varphi = \varphi(x, y) = \varphi' / a$ — безразмерное амплитудное значение прогиба.

Собственное число λ связано с частотой колебаний соотношением

$$\lambda = -\rho h \omega^2 - k \omega,$$

где ρ — безразмерная плотность материала пластинки, отнесенная к параметру p_0 / c_0^2 .

Задача (2.1.1) сводится к задаче на собственные значения (2.1.2). Постановка такова, что решение ищется в виде комплексной функции $\varphi e^{i\omega t}$. Колебания пластинки будут устойчивыми или нет в зависимости от того, будет ли действительная часть ω больше нуля, то есть $\text{Re} \omega < 0$, или меньше нуля, то есть $\text{Re} \omega > 0$. При $\text{Re} \omega > 0$ получаются быстро растущие решения, то есть имеет место неустойчивость. Если $\lambda_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$ — наименьшее по модулю собственное значение, то выписанным неравенствам соответствуют $F(\alpha_1, \beta_1) > 0$ или $F(\alpha_1, \beta_1) < 0$, где $F(\alpha_1, \beta_1) = \alpha_1 k^2 - \rho h \beta_1^2$. Уравнение $F(\alpha_1, \beta_1) = 0$ определяет нейтральную кривую, называемую параболой устойчивости, и соответствующую ей критическую скорость флаттера. Речь идет, следовательно, о нахождении нулей функции $F(\alpha_1(V), \beta_1 = \beta_1(V))$ при заданном направлении вектора скорости потока. Подробнее процедура описана в работе [13]. Колебания пластины будут устойчивыми или нет в зависимости от того, находятся ли собственные значения

λ рассматриваемой спектральной задачи внутри параболы $y^2 = \frac{k^2}{\rho h} x$ или нет.

Поиск решения происходит по следующему алгоритму: при фиксированном направлении \vec{V} определяется v_{crit} по первому собственному значению, далее проводится анализ устойчивости по другим комплексным собственным значениям. Если появляется комплексное значение λ вне параболы устойчивости, то по этому собственному значению вычисляется v_{crit} . Из всех определенных v_{crit} выбирается наименьшая [82]. Схема представленного решения приведена на рисунке 2.1.2.

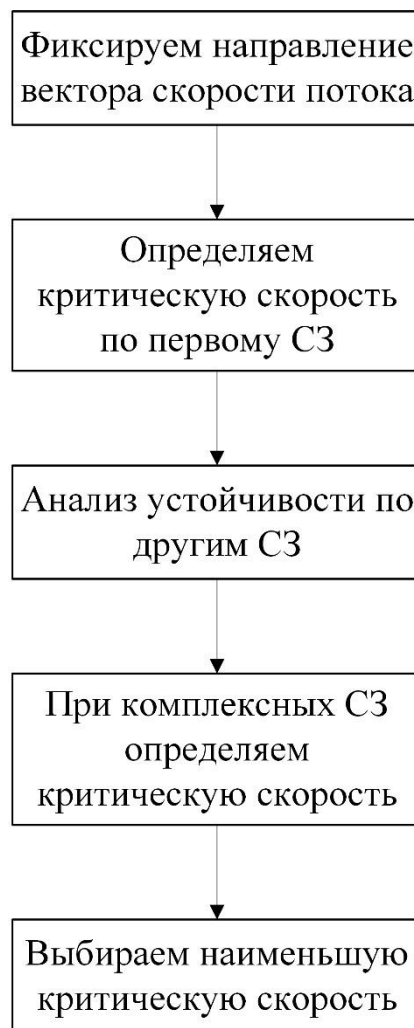


Рисунок 2.1.2 — Схема решения

2.2 Дискретизация

Интерполяционная формула, удовлетворяющая краевым условиям заземления из (2.1.3), для функции $\varphi = \varphi(x, y)$ имеет вид:

$$\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m M_{i0}(z) L_{j0}(x) \varphi(x_j, y_i), \quad (2.1.4)$$

$$y = bz, \quad z \in [-1, 1], \quad x \in [-1, 1],$$

$$L_{j0}(x) = \frac{l(x)}{l'(x_j)(x - x_j)}, \quad l(x) = (x^2 - 1)^2 T_n(x), \quad T_n(x) = \cos(n \arccos x),$$

$$x_j = \cos \vartheta_j, \quad \vartheta_j = \frac{(2j-1)\pi}{2n}, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$M_{i0}(z) = \frac{M(z)}{M'(z_i)(z - z_i)}, \quad M(z) = (z^2 - 1)^2 T_m(z),$$

$$z_i = \cos \vartheta_i, \quad \vartheta_i = \frac{(2i-1)\pi}{2m}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где $T_n(z) = \cos(n \arccos z)$ — многочлены Чебышева.

Далее необходимо воспользоваться процедурой, описанной в работе [82]. Для получения матрицы дискретного оператора L требуется применить этот оператор к интерполяционной формуле (2.1.4). В результате получается несимметричная матрица H размера $N \times N$, $N = mn$. Пронумеровав узлы в прямоугольнике (x_j, y_i) сначала по y , потом по x , то есть сверху вниз, справа налево, в результате получается, что $L\varphi$ приближенно заменяется соотношением $H\varphi$, где φ — вектор значений функции $\varphi = \varphi(x, y)$ в узлах сетки. Интерполяционную формулу необходимо подставить в уравнение (2.1.2), а x и y взять в узлах сетки как указано выше. Тогда исходное уравнение преобразуется в алгебраическую задачу на собственные значения. Решая полученную задачу в соответствии с предложенным ранее алгоритмом и получаются значения критической скорости флаттера.

Применяемая дискретизация реагирует на гладкость отыскиваемого решения и её точность тем выше, чем большим условием гладкости удовлетворяет отыскиваемое решение по x и по y . При этом *a priori* гладкость

знать не нужно, метод сам настраивается под неё. Численные методы, обладающие таким свойством, К. И. Бабенко предложил называть численными алгоритмами без насыщения [79].

2.3 Вычислительные эксперименты

Расчеты критической скорости флаттера проводились для следующих значений упругих констант и геометрических параметров пластинки: $E_x = 3.06 \cdot 10^4$ МПа, $E_y = 2.448 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_x = 0.15$, $\nu_y = 0.12$, $G_{xy} = 1.5 \cdot 10^4$ МПа, $\rho' = 2750$ кг/м³, $|x| \leq 1$, $h = 0.015$, $k = 1.4$, $p_0 = 1.0333$ Н/м², $c_0 = 331.26$ м/с, при изменении направления потока от 0 до $\pi/2$. При этом рассматривались пластинки с различным $|y|$, от $|y| \leq 1$, то есть квадратная пластинка, до $|y| \leq 2.4$.

Исследование зависимости критической скорости флаттера от направления потока

Для квадратной пластинки полученные результаты расчета при изменении направления потока с шагом в $5/180$ представлены в таблице 2.1.1 и на рисунке 2.1.3. В таблице также представлены результаты на двух сетках — 9×9 и 21×21 .

Таблица 2.1.1 — Результаты расчета для квадратной пластинки при различных направлениях вектора скорости потока

$\alpha \cdot \pi / 180$	v_{crit}		i
	9×9	21×21	
0	6.32345	6.32711	1
5	6.31374	6.31995	1
10	6.29586	6.29865	1
15	6.26235	6.26372	1
20	6.21473	6.21612	1
25	6.15745	6.15733	1
30	6.08234	6.08941	1
35	6.01744	6.01483	1
40	5.93624	5.93644	1
45	5.85473	5.85711	1
50	5.77753	5.77958	1
55	5.70235	5.70629	1

Продолжение таблицы 2.1.1

60	5.63376	5.63931	1
65	5.58856	5.58026	1
70	5.53347	5.53047	1
75	5.49375	5.49088	1
80	5.46386	5.46216	1
85	5.44745	5.44475	1
90	5.43864	5.43893	1

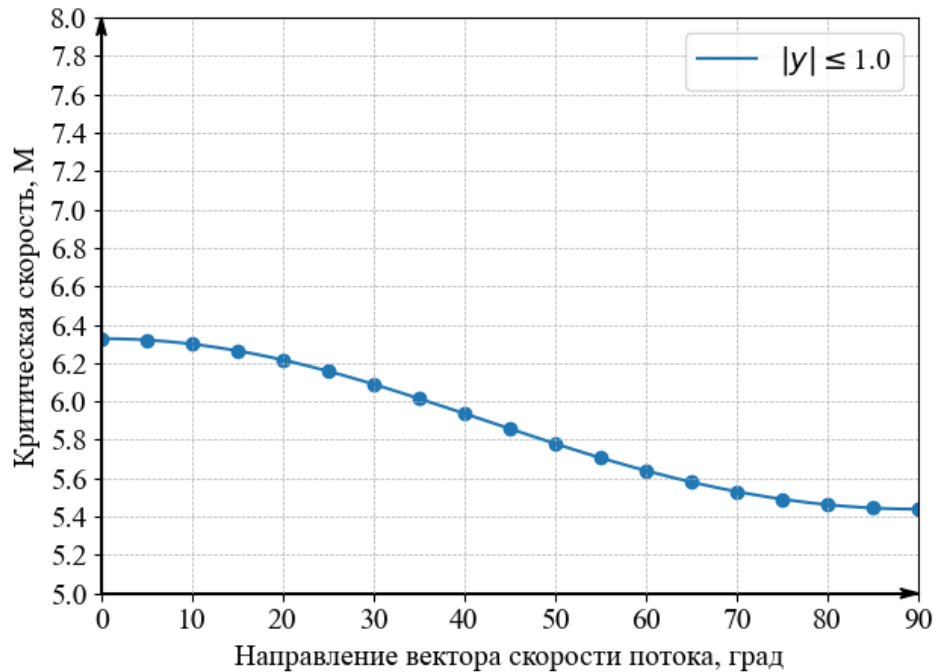


Рисунок 2.1.3 — График критической скорости от направления потока для квадратной пластинки

Из результатов и рисунка видно, что критическая скорость флаттера для квадратной ортотропной защемленной пластинки при повороте вектора скорости потока от направления с большей жесткостью пластинки к направлению с меньшей жесткостью нелинейно убывает. Стоит отметить, что результаты на двух различных сетках отличаются незначительно, что свидетельствует об устойчивости решения.

Далее, в таблице 2.1.2 и на рисунке 2.1.4 приведены результаты расчета критической скорости флаттера при изменении $|y|$ от 1 до 2. В нижнем индексе у значения критической скорости указан номер собственного значения, на котором она достигается. Представленные результаты получены на сетке 21x21.

Таблица 2.1.2 — Результаты расчета при различных направлениях вектора скорости потока

$\alpha \cdot \pi$	V_{crit} (номер СЗ)						
	$ y \leq 1$	$ y \leq 1.1$	$ y \leq 1.2$	$ y \leq 1.5$	$ y \leq 1.8$	$ y \leq 1.9$	$ y \leq 2$
180							
0	6.32711 ₍₁₎	6.01359 ₍₁₎	5.78061 ₍₁₎	5.35602 ₍₂₎	5.07634 ₍₃₎	5.02598 ₍₃₎	4.99776 ₍₃₎
1	6.32682 ₍₁₎	6.01265 ₍₁₎	5.77832 ₍₁₎	5.35838 ₍₂₎	5.07421 ₍₃₎	5.02626 ₍₃₎	4.99829 ₍₃₎
2	6.32596 ₍₁₎	6.00984 ₍₁₎	5.77149 ₍₁₎	5.36554 ₍₂₎	5.06893 ₍₃₎	5.02711 ₍₃₎	4.99988 ₍₃₎
3	6.32452 ₍₁₎	6.00519 ₍₁₎	5.76025 ₍₁₎	5.37766 ₍₂₎	5.06253 ₍₃₎	5.02849 ₍₃₎	5.00246 ₍₃₎
4	6.32252 ₍₁₎	5.99871 ₍₁₎	5.74491 ₍₁₎	5.27609 ₍₁₎	5.05645 ₍₂₎	5.03041 ₍₃₎	5.00592 ₍₃₎
5	6.31995 ₍₁₎	5.99046 ₍₁₎	5.72588 ₍₁₎	5.12975 ₍₁₎	5.05141 ₍₂₎	5.03288 ₍₂₎	5.01016 ₍₂₎
6	6.31681 ₍₁₎	5.98047 ₍₁₎	5.70359 ₍₁₎	5.03831 ₍₁₎	4.71389 ₍₁₎	4.68391 ₍₁₎	4.66851 ₍₁₎
7	6.31311 ₍₁₎	5.96882 ₍₁₎	5.67848 ₍₁₎	4.95701 ₍₁₎	4.55194 ₍₁₎	4.48313 ₍₁₎	4.43571 ₍₁₎
8	6.30884 ₍₁₎	5.95555 ₍₁₎	5.65088 ₍₁₎	4.88029 ₍₁₎	4.42721 ₍₁₎	4.34147 ₍₁₎	4.27932 ₍₁₎
9	6.30402 ₍₁₎	5.94075 ₍₁₎	5.62113 ₍₁₎	4.80628 ₍₁₎	4.31784 ₍₁₎	4.22096 ₍₁₎	4.14891 ₍₁₎
10	6.29865 ₍₁₎	5.92451 ₍₁₎	5.58951 ₍₁₎	4.73417 ₍₁₎	4.21759 ₍₁₎	4.11241 ₍₁₎	4.03293 ₍₁₎
11	6.29273 ₍₁₎	5.90685 ₍₁₎	5.55625 ₍₁₎	4.66359 ₍₁₎	4.12375 ₍₁₎	4.01203 ₍₁₎	3.92668 ₍₁₎
12	6.28627 ₍₁₎	5.88791 ₍₁₎	5.52159 ₍₁₎	4.59436 ₍₁₎	4.03486 ₍₁₎	3.91784 ₍₁₎	3.82776 ₍₁₎
13	6.27928 ₍₁₎	5.86774 ₍₁₎	5.48571 ₍₁₎	4.52638 ₍₁₎	3.95011 ₍₁₎	3.82871 ₍₁₎	3.73473 ₍₁₎
14	6.27176 ₍₁₎	5.84643 ₍₁₎	5.44877 ₍₁₎	4.45963 ₍₁₎	3.86892 ₍₁₎	3.74391 ₍₁₎	3.64669 ₍₁₎
15	6.26372 ₍₁₎	5.82406 ₍₁₎	5.41096 ₍₁₎	4.39411 ₍₁₎	3.79094 ₍₁₎	3.66291 ₍₁₎	3.56301 ₍₁₎
16	6.25517 ₍₁₎	5.80072 ₍₁₎	5.37242 ₍₁₎	4.32979 ₍₁₎	3.71592 ₍₁₎	3.58536 ₍₁₎	3.48323 ₍₁₎
17	6.24613 ₍₁₎	5.77647 ₍₁₎	5.33327 ₍₁₎	4.26673 ₍₁₎	3.64363 ₍₁₎	3.51098 ₍₁₎	3.40701 ₍₁₎
18	6.23661 ₍₁₎	5.75141 ₍₁₎	5.29364 ₍₁₎	4.20493 ₍₁₎	3.57393 ₍₁₎	3.43955 ₍₁₎	3.33405 ₍₁₎
19	6.22659 ₍₁₎	5.72561 ₍₁₎	5.25365 ₍₁₎	4.14441 ₍₁₎	3.50667 ₍₁₎	3.37088 ₍₁₎	3.26414 ₍₁₎
20	6.21612 ₍₁₎	5.69913 ₍₁₎	5.21339 ₍₁₎	4.08515 ₍₁₎	3.44175 ₍₁₎	3.30483 ₍₁₎	3.19711 ₍₁₎
21	6.20521 ₍₁₎	5.67206 ₍₁₎	5.17296 ₍₁₎	4.02721 ₍₁₎	3.37907 ₍₁₎	3.24125 ₍₁₎	3.13274 ₍₁₎
22	6.19385 ₍₁₎	5.64447 ₍₁₎	5.13245 ₍₁₎	3.97056 ₍₁₎	3.31853 ₍₁₎	3.18004 ₍₁₎	3.07093 ₍₁₎
23	6.18207 ₍₁₎	5.61642 ₍₁₎	5.09195 ₍₁₎	3.91523 ₍₁₎	3.26006 ₍₁₎	3.12108 ₍₁₎	3.01154 ₍₁₎
24	6.16991 ₍₁₎	5.58799 ₍₁₎	5.05152 ₍₁₎	3.86121 ₍₁₎	3.20359 ₍₁₎	3.06428 ₍₁₎	2.95445 ₍₁₎
25	6.15733 ₍₁₎	5.55922 ₍₁₎	5.01123 ₍₁₎	3.80849 ₍₁₎	3.14904 ₍₁₎	3.00954 ₍₁₎	2.89955 ₍₁₎
26	6.14441 ₍₁₎	5.53021 ₍₁₎	4.97114 ₍₁₎	3.75708 ₍₁₎	3.09634 ₍₁₎	2.95678 ₍₁₎	2.84675 ₍₁₎
27	6.13113 ₍₁₎	5.50096 ₍₁₎	4.93132 ₍₁₎	3.70697 ₍₁₎	3.04543 ₍₁₎	2.90593 ₍₁₎	2.79594 ₍₁₎
28	6.11752 ₍₁₎	5.47157 ₍₁₎	4.89182 ₍₁₎	3.65814 ₍₁₎	2.99626 ₍₁₎	2.85691 ₍₁₎	2.74705 ₍₁₎
29	6.10361 ₍₁₎	5.44209 ₍₁₎	4.85268 ₍₁₎	3.61059 ₍₁₎	2.94876 ₍₁₎	2.80966 ₍₁₎	2.69999 ₍₁₎
30	6.08941 ₍₁₎	5.41256 ₍₁₎	4.81394 ₍₁₎	3.56431 ₍₁₎	2.90288 ₍₁₎	2.76409 ₍₁₎	2.65469 ₍₁₎
31	6.07493 ₍₁₎	5.38303 ₍₁₎	4.77565 ₍₁₎	3.51925 ₍₁₎	2.85856 ₍₁₎	2.72016 ₍₁₎	2.61108 ₍₁₎
32	6.06022 ₍₁₎	5.35354 ₍₁₎	4.73784 ₍₁₎	3.47543 ₍₁₎	2.81576 ₍₁₎	2.67781 ₍₁₎	2.56909 ₍₁₎
33	6.04528 ₍₁₎	5.32415 ₍₁₎	4.70054 ₍₁₎	3.43282 ₍₁₎	2.77442 ₍₁₎	2.63695 ₍₁₎	2.52865 ₍₁₎
34	6.03014 ₍₁₎	5.29488 ₍₁₎	4.66378 ₍₁₎	3.39141 ₍₁₎	2.73449 ₍₁₎	2.59756 ₍₁₎	2.48971 ₍₁₎
35	6.01483 ₍₁₎	5.26578 ₍₁₎	4.62759 ₍₁₎	3.35117 ₍₁₎	2.69594 ₍₁₎	2.55957 ₍₁₎	2.45219 ₍₁₎
36	5.99937 ₍₁₎	5.23689 ₍₁₎	4.59199 ₍₁₎	3.31208 ₍₁₎	2.65871 ₍₁₎	2.52294 ₍₁₎	2.41607 ₍₁₎
37	5.98377 ₍₁₎	5.20823 ₍₁₎	4.55701 ₍₁₎	3.27412 ₍₁₎	2.62277 ₍₁₎	2.48762 ₍₁₎	2.38127 ₍₁₎
38	5.96807 ₍₁₎	5.17984 ₍₁₎	4.52263 ₍₁₎	3.23727 ₍₁₎	2.58806 ₍₁₎	2.45357 ₍₁₎	2.34775 ₍₁₎
39	5.95229 ₍₁₎	5.15174 ₍₁₎	4.48891 ₍₁₎	3.20152 ₍₁₎	2.55456 ₍₁₎	2.42073 ₍₁₎	2.31546 ₍₁₎
40	5.93644 ₍₁₎	5.12397 ₍₁₎	4.45584 ₍₁₎	3.16683 ₍₁₎	2.52222 ₍₁₎	2.38906 ₍₁₎	2.28436 ₍₁₎
41	5.92056 ₍₁₎	5.09655 ₍₁₎	4.42344 ₍₁₎	3.13319 ₍₁₎	2.49101 ₍₁₎	2.35853 ₍₁₎	2.25441 ₍₁₎

Продолжение таблицы 2.1.2

42	5.90466 ₍₁₎	5.06951 ₍₁₎	4.39171 ₍₁₎	3.10058 ₍₁₎	2.46088 ₍₁₎	2.32911 ₍₁₎	2.22554 ₍₁₎
43	5.88878 ₍₁₎	5.04285 ₍₁₎	4.36067 ₍₁₎	3.06897 ₍₁₎	2.43181 ₍₁₎	2.30073 ₍₁₎	2.19775 ₍₁₎
44	5.87292 ₍₁₎	5.01661 ₍₁₎	4.33032 ₍₁₎	3.03835 ₍₁₎	2.40377 ₍₁₎	2.27339 ₍₁₎	2.17098 ₍₁₎
45	5.85711 ₍₁₎	4.99081 ₍₁₎	4.30066 ₍₁₎	3.00869 ₍₁₎	2.37672 ₍₁₎	2.24704 ₍₁₎	2.14521 ₍₁₎
46	5.84138 ₍₁₎	4.96545 ₍₁₎	4.27171 ₍₁₎	2.97998 ₍₁₎	2.35063 ₍₁₎	2.22164 ₍₁₎	2.12039 ₍₁₎
47	5.82574 ₍₁₎	4.94056 ₍₁₎	4.24346 ₍₁₎	2.95219 ₍₁₎	2.32547 ₍₁₎	2.19718 ₍₁₎	2.09649 ₍₁₎
48	5.81021 ₍₁₎	4.91615 ₍₁₎	4.21592 ₍₁₎	2.92531 ₍₁₎	2.30122 ₍₁₎	2.17361 ₍₁₎	2.07349 ₍₁₎
49	5.79482 ₍₁₎	4.89223 ₍₁₎	4.18908 ₍₁₎	2.89931 ₍₁₎	2.27785 ₍₁₎	2.15092 ₍₁₎	2.05135 ₍₁₎
50	5.77958 ₍₁₎	4.86882 ₍₁₎	4.16295 ₍₁₎	2.87416 ₍₁₎	2.25533 ₍₁₎	2.12907 ₍₁₎	2.03005 ₍₁₎
51	5.76451 ₍₁₎	4.84592 ₍₁₎	4.13753 ₍₁₎	2.84988 ₍₁₎	2.23364 ₍₁₎	2.10804 ₍₁₎	2.00956 ₍₁₎
52	5.74963 ₍₁₎	4.82355 ₍₁₎	4.11281 ₍₁₎	2.82642 ₍₁₎	2.21275 ₍₁₎	2.08781 ₍₁₎	1.98986 ₍₁₎
53	5.73495 ₍₁₎	4.80171 ₍₁₎	4.08881 ₍₁₎	2.80378 ₍₁₎	2.19265 ₍₁₎	2.06833 ₍₁₎	1.97091 ₍₁₎
54	5.72051 ₍₁₎	4.78041 ₍₁₎	4.06549 ₍₁₎	2.78193 ₍₁₎	2.17331 ₍₁₎	2.04962 ₍₁₎	1.95271 ₍₁₎
55	5.70629 ₍₁₎	4.75967 ₍₁₎	4.04288 ₍₁₎	2.76086 ₍₁₎	2.15471 ₍₁₎	2.03162 ₍₁₎	1.93521 ₍₁₎
56	5.69233 ₍₁₎	4.73947 ₍₁₎	4.02096 ₍₁₎	2.74056 ₍₁₎	2.13682 ₍₁₎	2.01434 ₍₁₎	1.91841 ₍₁₎
57	5.67863 ₍₁₎	4.71984 ₍₁₎	3.99975 ₍₁₎	2.72101 ₍₁₎	2.11964 ₍₁₎	1.99774 ₍₁₎	1.90229 ₍₁₎
58	5.66522 ₍₁₎	4.70077 ₍₁₎	3.97922 ₍₁₎	2.70218 ₍₁₎	2.10314 ₍₁₎	1.98181 ₍₁₎	1.88683 ₍₁₎
59	5.65211 ₍₁₎	4.68228 ₍₁₎	3.95938 ₍₁₎	2.68408 ₍₁₎	2.08731 ₍₁₎	1.96653 ₍₁₎	1.87201 ₍₁₎
60	5.63931 ₍₁₎	4.66435 ₍₁₎	3.94022 ₍₁₎	2.66669 ₍₁₎	2.07213 ₍₁₎	1.95189 ₍₁₎	1.85779 ₍₁₎
61	5.62681 ₍₁₎	4.64701 ₍₁₎	3.92174 ₍₁₎	2.64999 ₍₁₎	2.05758 ₍₁₎	1.93786 ₍₁₎	1.84419 ₍₁₎
62	5.61465 ₍₁₎	4.63024 ₍₁₎	3.90394 ₍₁₎	2.63397 ₍₁₎	2.04365 ₍₁₎	1.92444 ₍₁₎	1.83118 ₍₁₎
63	5.60283 ₍₁₎	4.61405 ₍₁₎	3.88681 ₍₁₎	2.61861 ₍₁₎	2.03033 ₍₁₎	1.91161 ₍₁₎	1.81874 ₍₁₎
64	5.59137 ₍₁₎	4.59845 ₍₁₎	3.87034 ₍₁₎	2.60392 ₍₁₎	2.01761 ₍₁₎	1.89935 ₍₁₎	1.80686 ₍₁₎
65	5.58026 ₍₁₎	4.58344 ₍₁₎	3.85454 ₍₁₎	2.58986 ₍₁₎	2.00545 ₍₁₎	1.88765 ₍₁₎	1.79554 ₍₁₎
66	5.56953 ₍₁₎	4.56901 ₍₁₎	3.83941 ₍₁₎	2.57644 ₍₁₎	1.99386 ₍₁₎	1.87651 ₍₁₎	1.78474 ₍₁₎
67	5.55918 ₍₁₎	4.55517 ₍₁₎	3.82491 ₍₁₎	2.56365 ₍₁₎	1.98284 ₍₁₎	1.86589 ₍₁₎	1.77447 ₍₁₎
68	5.54921 ₍₁₎	4.54192 ₍₁₎	3.81107 ₍₁₎	2.55147 ₍₁₎	1.97235 ₍₁₎	1.85581 ₍₁₎	1.76472 ₍₁₎
69	5.53964 ₍₁₎	4.52926 ₍₁₎	3.79788 ₍₁₎	2.53989 ₍₁₎	1.96241 ₍₁₎	1.84625 ₍₁₎	1.75546 ₍₁₎
70	5.53047 ₍₁₎	4.51719 ₍₁₎	3.78533 ₍₁₎	2.52891 ₍₁₎	1.95298 ₍₁₎	1.83719 ₍₁₎	1.74671 ₍₁₎
71	5.52171 ₍₁₎	4.50571 ₍₁₎	3.77342 ₍₁₎	2.51852 ₍₁₎	1.94407 ₍₁₎	1.82863 ₍₁₎	1.73842 ₍₁₎
72	5.51337 ₍₁₎	4.49483 ₍₁₎	3.76214 ₍₁₎	2.50871 ₍₁₎	1.93567 ₍₁₎	1.82055 ₍₁₎	1.73062 ₍₁₎
73	5.50544 ₍₁₎	4.48453 ₍₁₎	3.75151 ₍₁₎	2.49947 ₍₁₎	1.92776 ₍₁₎	1.81296 ₍₁₎	1.72328 ₍₁₎
74	5.49794 ₍₁₎	4.47482 ₍₁₎	3.74148 ₍₁₎	2.49079 ₍₁₎	1.92035 ₍₁₎	1.80584 ₍₁₎	1.71641 ₍₁₎
75	5.49088 ₍₁₎	4.46571 ₍₁₎	3.73209 ₍₁₎	2.48267 ₍₁₎	1.91342 ₍₁₎	1.79919 ₍₁₎	1.70997 ₍₁₎
76	5.48424 ₍₁₎	4.45718 ₍₁₎	3.72332 ₍₁₎	2.47511 ₍₁₎	1.90696 ₍₁₎	1.79301 ₍₁₎	1.70399 ₍₁₎
77	5.47805 ₍₁₎	4.44924 ₍₁₎	3.71517 ₍₁₎	2.46809 ₍₁₎	1.90098 ₍₁₎	1.78726 ₍₁₎	1.69844 ₍₁₎
78	5.47231 ₍₁₎	4.44191 ₍₁₎	3.70763 ₍₁₎	2.46161 ₍₁₎	1.89547 ₍₁₎	1.78196 ₍₁₎	1.69333 ₍₁₎
79	5.46701 ₍₁₎	4.43514 ₍₁₎	3.70071 ₍₁₎	2.45567 ₍₁₎	1.89041 ₍₁₎	1.77711 ₍₁₎	1.68865 ₍₁₎
80	5.46216 ₍₁₎	4.42897 ₍₁₎	3.69439 ₍₁₎	2.45026 ₍₁₎	1.88581 ₍₁₎	1.77271 ₍₁₎	1.68439 ₍₁₎
81	5.45776 ₍₁₎	4.42339 ₍₁₎	3.68868 ₍₁₎	2.44538 ₍₁₎	1.88166 ₍₁₎	1.76872 ₍₁₎	1.68054 ₍₁₎
82	5.45382 ₍₁₎	4.41840 ₍₁₎	3.68358 ₍₁₎	2.44102 ₍₁₎	1.87796 ₍₁₎	1.76517 ₍₁₎	1.67712 ₍₁₎
83	5.45034 ₍₁₎	4.41401 ₍₁₎	3.67909 ₍₁₎	2.43718 ₍₁₎	1.87471 ₍₁₎	1.76205 ₍₁₎	1.67411 ₍₁₎
84	5.44731 ₍₁₎	4.41019 ₍₁₎	3.67521 ₍₁₎	2.43386 ₍₁₎	1.87188 ₍₁₎	1.75934 ₍₁₎	1.67149 ₍₁₎
85	5.44475 ₍₁₎	4.40696 ₍₁₎	3.67191 ₍₁₎	2.43105 ₍₁₎	1.86951 ₍₁₎	1.75706 ₍₁₎	1.66929 ₍₁₎
86	5.44266 ₍₁₎	4.40432 ₍₁₎	3.66921 ₍₁₎	2.42876 ₍₁₎	1.86755 ₍₁₎	1.75521 ₍₁₎	1.66749 ₍₁₎
87	5.44103 ₍₁₎	4.40227 ₍₁₎	3.66712 ₍₁₎	2.42698 ₍₁₎	1.86604 ₍₁₎	1.75375 ₍₁₎	1.66609 ₍₁₎
88	5.43986 ₍₁₎	4.40081 ₍₁₎	3.66563 ₍₁₎	2.42571 ₍₁₎	1.86496 ₍₁₎	1.75272 ₍₁₎	1.66509 ₍₁₎
89	5.43916 ₍₁₎	4.39992 ₍₁₎	3.66473 ₍₁₎	2.42495 ₍₁₎	1.86432 ₍₁₎	1.75211 ₍₁₎	1.66451 ₍₁₎
90	5.43893 ₍₁₎	4.39963 ₍₁₎	3.66443 ₍₁₎	2.42469 ₍₁₎	1.86411 ₍₁₎	1.75189 ₍₁₎	1.66431 ₍₁₎

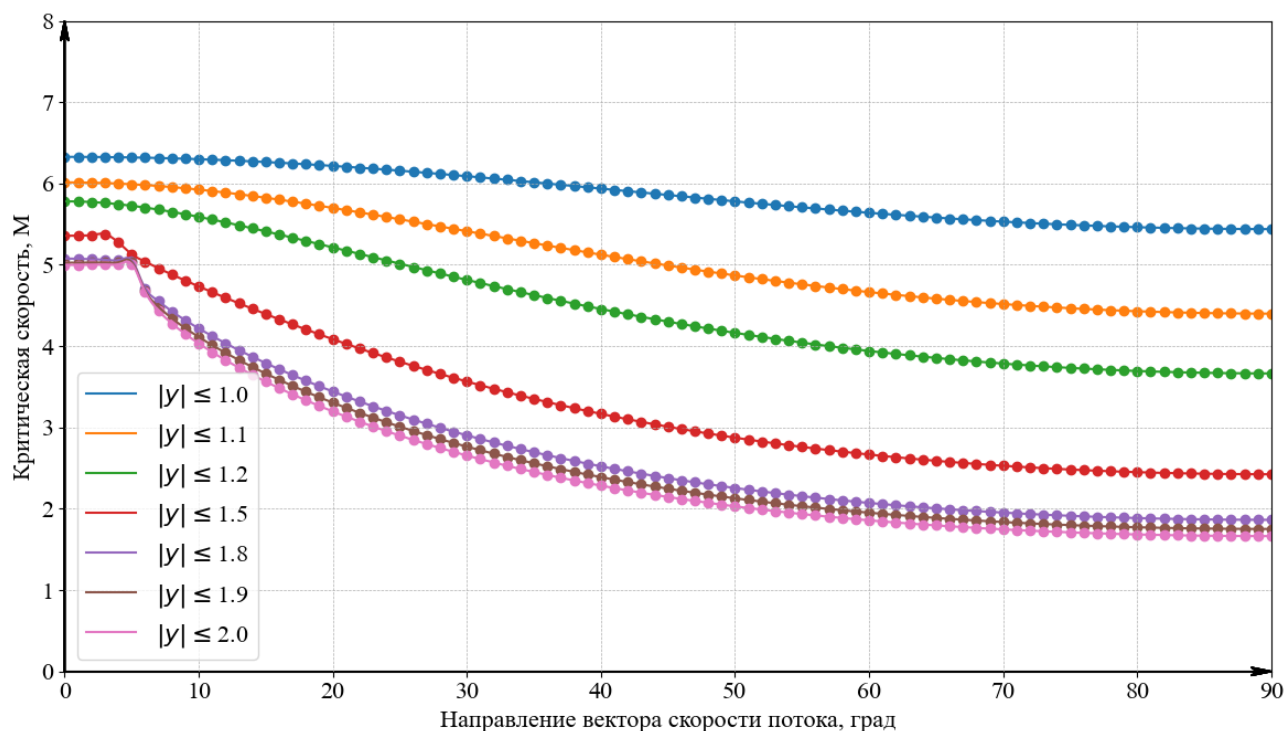


Рисунок 2.1.4 — Графики критической скорости от направления потока при различных $|y|$

Из представленных результатов для ортотропной защемленной квадратной и удлиненной пластинок могут быть сделаны следующие выводы:

- критическая скорость флаттера при повороте вектора скорости потока от направления с большей жесткостью пластинки к направлению с меньшей жесткостью нелинейно убывает, а для удлиненной пластинки, при соотношении сторон более 1.5, зависимость становится немонотонной, при изменении направления потока в области до 10 градусов ($|\alpha| \leq 10\pi/180$), наблюдается небольшой рост критической скорости флаттера, сопровождающийся переходом номера собственного значения, на котором она достигается, от первого к более высоким. При дальнейшем изменении угла поворота критическая скорость флаттера падает;

- увеличение размера пластинки, в направлении, перпендикулярном потоку, сопровождается уменьшением критической скорости;

- уменьшение жесткости пластинки в направлении, перпендикулярном потоку, сопровождается уменьшением критической скорости;

— для удлиненной пластинки критическая скорость флаттера может достигаться не обязательно на первом собственном значении.

Рост критической скорости флаттера в области до 10 градусов угла поворота вектора потока был также замечен в случае изотропной пластинки с граничными условиями шарнирного опирания как для поршневой теории, так и для линеаризованной потенциальной теории сверхзвукового обтекания в работе [109].

Исходя из полученных результатов можно получить аппроксимационную зависимость критической скорости флаттера от направления вектора скорости потока (от 0 до $\pi/2$):

$$v_{crit} = c_1 + c_2\alpha + c_3\alpha^2 + c_4\alpha^3 + c_5\alpha^4,$$

где константы принимают следующие значения для пластинки с $|y| \leq 2.4$:

$$c_1 = 2.9505743, \quad c_2 = -0.015154321, \quad c_3 = -0.0018534046, \quad c_4 = 4.07579 \cdot 10^{-5}, \\ c_5 = -2.3278158 \cdot 10^{-7}.$$

Погрешность расчета по аппроксимационной формуле по критерию средней процентной ошибки (MAE) составляет менее 1%.

Предложенная аппроксимационная формула для зависимости критической скорости флаттера от направления вектора потока позволяет, подобрав константы, быстро и с высокой точностью получать критическую скорость без необходимости выполнять решение всей конкретной задачи каждый раз.

Далее на рисунках 2.1.5 — 2.1.7 представлены собственные формы ($Re\varphi$) для трех направлений вектора скорости потока для пластинки с $|y| \leq 2.4$.

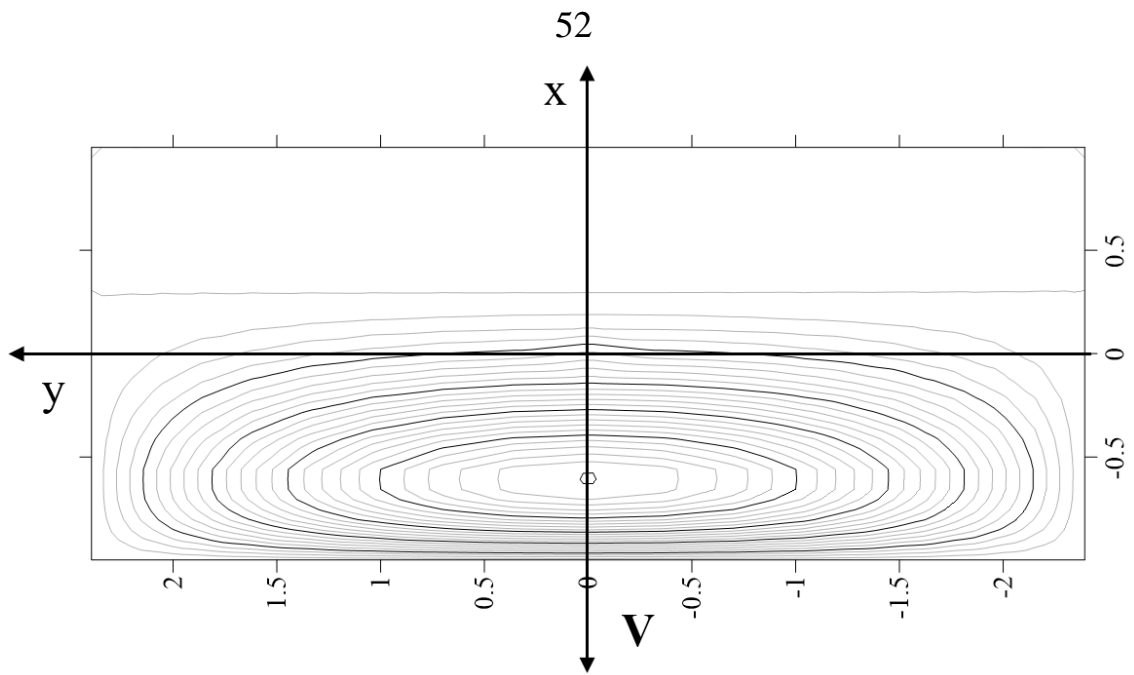


Рисунок 2.1.5 — Вид собственной формы ($\text{Re } \varphi$) при направлении вектора скорости потока 0°

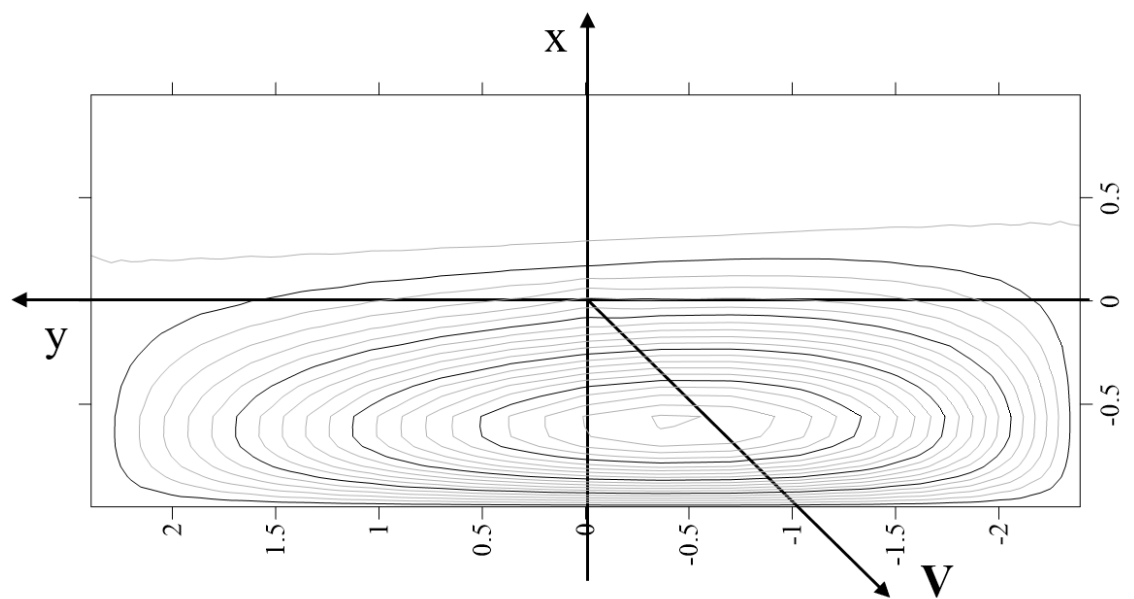


Рисунок 2.1.6 — Вид собственной формы ($\text{Re } \varphi$) при направлении вектора скорости потока 45°

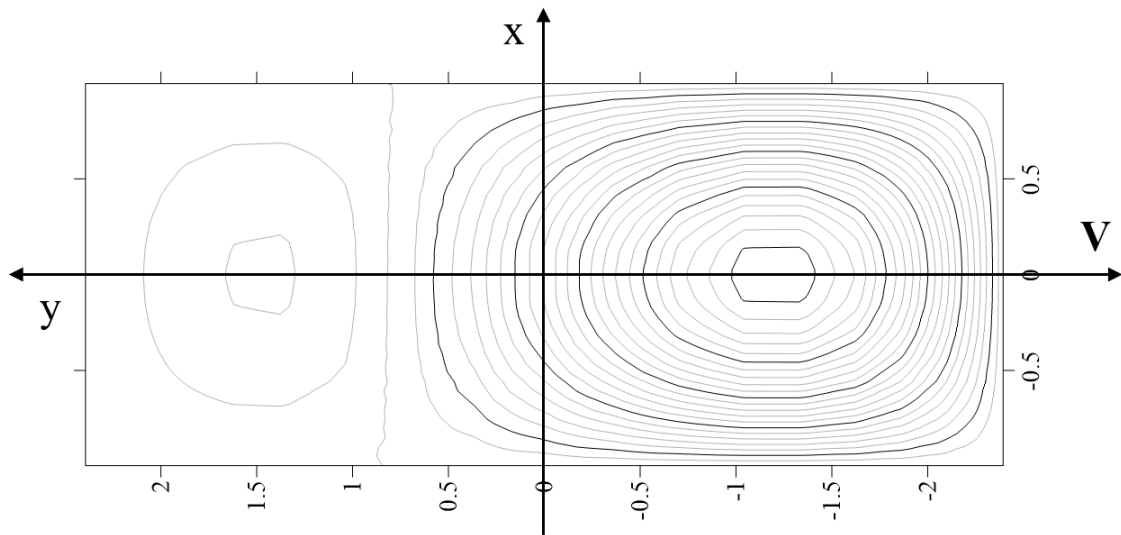


Рисунок 2.1.7 — Вид собственной формы ($\text{Re}\varphi$) при направлении вектора скорости потока 90°

Вид собственных форм ($\text{Re}\varphi$) для пластинок с другими $|y|$ совпадает. Для всех пластинок вид собственной формы, соответствующей критической скорости флаттера, содержит почти прямую линию, перпендикулярную вектору скорости потока и смещенную относительно центра симметрии навстречу потоку. При этом линия поворачивается вместе с направлением потока. Собственная форма, разделенная этой линией, имеет увеличенные значения на той своей части, что дальше от края, на который набегаёт поток, по сравнению с другой частью.

Сравнение с известными результатами

Для верификации разработанного алгоритма проводится сравнение значений критического динамического давления для квадратной изотропной полностью заземленной по контуру пластинки

$$\lambda_{кр} = \frac{\rho_0 a^3 V^2}{D \sqrt{M^2 - 1}},$$

где M — число Маха;

D — жесткость пластины;

ρ_0 — плотность газа;

a — длина пластинки в направлении x .

Сравнение с известными результатами из работ [66, 67, 110], обобщенными в работе [65], а также из работы [59], представлено в таблице 2.1.3. Результаты показывают, что получаемые по представленному в работе алгоритму на сетке 21×21 узел удовлетворительно совпадают с данными по методу Релея–Ритца [66] с погрешностью не более 2.4% (для $\alpha = 45^\circ$), методу конечных элементов [67] с погрешностью не более 4% (для $\alpha = 45^\circ$) и Бубнова–Галеркина [59] с погрешностью 6% (для $\alpha = 0^\circ$).

Таблица 2.1.3 — Сравнение значений критического динамического давления для пластины СССР. Durvasula [66], метод Релея–Ритца, 16 членов, балочные функции. Kornechi [110], метод Галеркина, 4 члена, функции Iguchi. Sander [67], метод конечных элементов, SQ конформные четырехсторонние кубические элементы, сетка 4×4 . Папков [59], метод Бубнова–Галеркина

α°	Durvasula [66]	Kornechi [110]	Sander [67]	Папков [59]	Автор
0	838	616	859	883	830
15	852		865		835
30	843		882		847
45	875		890		854
60			882		847
75			865		835
90			859		830

Полученные результаты критической скорости удается сравнить с работой [59]. В этой работе автор предполагает наличие в плоскости пластинки сил, направленных вдоль соответствующих координатных осей. Для давления аэродинамического воздействия набегающего потока с пластинкой применяется формула поршневой теории, а для решения задачи применяется метод Бубнова–Галеркина.

Учитывая, что автором рассматривается постановка задачи, в которой направление вектора потока параллельно одной из осей, следующие выводы, сделанные по результатам расчета в настоящем разделе и работой [59], совпадают:

— увеличение размера пластинки, в направлении, перпендикулярном потоку, сопровождается уменьшением критической скорости;

- уменьшение жесткости пластинки в направлении, перпендикулярном потоку, сопровождается уменьшением критической скорости;
- для удлиненной панели флаттер может достигаться не обязательно на первой моде.

При этом автор приводит результаты определения критической скорости флаттера для изотропной квадратной пластинки при увеличении толщины пластинки h со следующими характеристиками: $E = 1.9982 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0.3$, $\rho' = 7.8 \cdot 10^3$ кг/м³, $|x| = 1.0$, $|y| = 1.0$, $k = 1.4$, $p_0 = 1.0333$ Н/м², $c_0 = 331.26$ м/с.

В таблице 2.1.4 представлено сравнение результатов, полученных Мовчаном А. А. [82] для свободно опертой пластинки (SSSS), результатов Папкова С. О. для защемленной пластинки (CCCC) с результатами, полученными на основе описанного в настоящей главе алгоритма на сетке 21x21.

Таблица 2.1.4 — Значения критической скорости, полученные для пластинок SSSS [82] и CCCC [59].

h	v_{crit} из [82] для SSSS	v_{crit} из [59] для CCCC	v_{crit} для CCCC
0.005	1.0615	1.7327	1.6733
0.0063	2.0991	3.4351	3.3136
0.0072	3.1324	5.1578	4.9326
0.0079	4.1523	6.8417	6.5078
0.0085	5.1805	8.5419	8.1004

Полученные результаты удовлетворительно совпадают с результатами из работы [59] с погрешностью не более 5.2%.

Кроме того, собственные формы потери динамической устойчивости, приводимые Папковым, имеют схожий характер для всех результатов. Собственные формы потери динамической устойчивости короткой и длинной пластин из работы [59] представлены на рисунках 2.1.8.

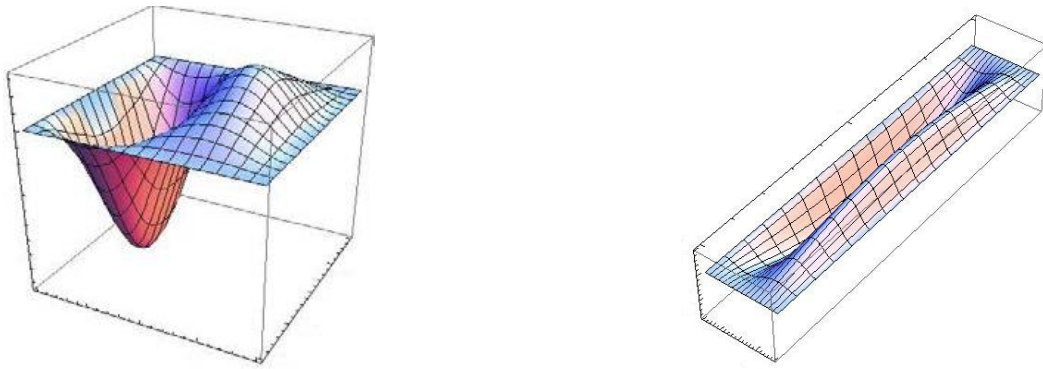


Рисунок 2.1.8 — Собственные формы потери динамической устойчивости короткой и длинной пластин из работы [59]
Полученные результаты в совокупности со сравнением с известными расчетами создают основу для построения решения задачи о колебаниях ортотропной прямоугольной пластинки со смешанными граничными условиями.

3 КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНКИ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В этой главе рассматриваются решения задач об аэроупругих колебаниях изотропной и ортотропной пластинок со смешанными граничными условиями.

Материалы главы содержатся в публикациях [94, 96].

3.1 Колебания изотропной пластинки

В первом разделе рассматривается изотропная пластинка, которая в плоскости xu занимает область $S: \{-a'/2 \leq x \leq a'/2, -b' \leq y \leq b'\}$, и жестко закреплена по противоположным краям и свободно опирается по двум другим, то есть случай SCSC.

3.1.1 Постановка задачи

Уравнение колебаний пластинки с использованием формулы поршневой теории для давления аэродинамического воздействия потока с колеблющейся пластинкой имеет вид [15]:

$$\frac{Eh'^3}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 w + \frac{kp_0}{c_0} \vec{V}' \cdot \text{grad} w + \frac{kp_0}{c_0} \frac{\partial w}{\partial t} + \rho' h' \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (3.1.1)$$

где p_0, c_0 — давление и скорость звука в невозмущенном потоке;

k — показатель политропы газа;

E — модуль Юнга;

ν — коэффициент Пуассона;

h' — толщина пластинки;

\vec{V}' — вектор набегающего потока;

ρ' — плотность материала пластинки.

Задав $w = \varphi' \exp(\omega't)$, и введя собственное число λ' в виде $\rho'h'\omega'^2 + \omega'kp_0/c_0 + \lambda' = 0$, то, дополнив уравнение колебаний (3.1.1) соответствующими граничными условиями, можно получить задачу на собственные значения [30].

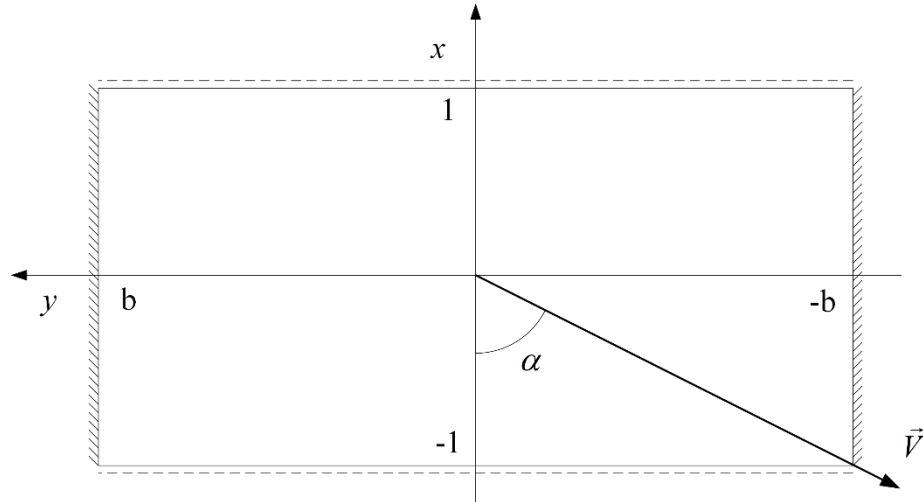


Рисунок 3.1.1 — Общий вид пластинки

Безразмерные параметры вводятся так же, как и в предыдущей главе. За характерный размер принимается половина длины в направлении x , то есть $a = a'/2$, $b = b'/a$ (рисунок 3.1.1). За характерные параметры — p_0 , c_0 . Здесь \vec{V} — вектор набегающего потока, отнесенной к скорости звука в нем.

Получается задача на собственные значения в области $S: \{-1 \leq x \leq 1, -b \leq y \leq b\}$:

$$L\varphi + k\vec{V} \cdot \text{grad}\varphi = \lambda\varphi, \quad \rho h \omega^2 + k\omega + \lambda = 0, \quad \vec{V} = (V_x, V_y), \quad (3.1.2)$$

$$L\varphi = D \left(\frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial y^4} \right),$$

$$\varphi(x, y)|_{|x|=1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \Big|_{|x|=1} = 0, \quad \varphi(x, y)|_{|y|=b} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial^2 y} \Big|_{|y|=b} = 0, \quad (3.1.3)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)p_0}$ — безразмерная жесткость пластинки;

h — толщина пластинки, отнесенная к a ;

$\omega = \omega' a/c_0$ — безразмерная частота;

$\lambda = \lambda' a/p_0$ — безразмерное собственное значение;

$\varphi = \varphi(x, y) = \varphi'/a$ — безразмерное амплитудное значение прогиба.

Собственное число λ связано с частотой колебаний соотношением

$$\lambda = -\rho h \omega^2 - k \omega, \quad (3.1.4)$$

где ρ — безразмерная плотность материала пластинки, отнесенная к параметру p_0/c_0^2 .

Задача, как и в предыдущей главе, сводится к несамосопряженной задаче на собственные значения. Постановка такова, что решение ищется в виде комплексной функции $\varphi e^{\omega t}$. Колебания пластинки будут устойчивыми или нет в зависимости от того, будет ли действительная часть ω больше нуля, то есть $\text{Re } \omega < 0$, или меньше нуля, то есть $\text{Re } \omega > 0$. При $\text{Re } \omega > 0$ получаются быстро растущие решения, то есть имеет место неустойчивость. Если $\lambda_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$ — наименьшее по модулю собственное значение, то, вследствие (3.1.4), выписанным неравенствам соответствуют $F(\alpha_1, \beta_1) > 0$ или $F(\alpha_1, \beta_1) < 0$, где $F(\alpha_1, \beta_1) = \alpha_1 k^2 - \rho h \beta_1^2$. Поскольку $\alpha_1 = \alpha_1(\vec{V})$, $\beta_1 = \beta_1(\vec{V})$ уравнение $F(\alpha_1, \beta_1) = 0$ определяет нейтральную кривую (параболу устойчивости) и соответствующую ей критическую скорость флаттера. Речь идет, следовательно, о нахождении нулей функции $F(\alpha_1(V), \beta_1 = \beta_1(V))$ при заданном направлении вектора скорости потока. Подробнее процедура описана в работе [13].

Поиск решения происходит по следующему алгоритму: при фиксированном направлении \vec{V} определяется v_{crit} по первому собственному значению, далее проводится анализ устойчивости по другим комплексным собственным

значениям. Если появляется комплексное значение λ вне параболы устойчивости, то по этому собственному значению вычисляется v_{crit} . Из всех определенных v_{crit} выбирается наименьшая [82].

3.1.2 Дискретизация

Для функции $\varphi = \varphi(x, y)$ в прямоугольнике применяется интерполяционная формула

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (M_{i0}(z) + l_1 \cdot y \cdot M(z) + l_2 \cdot M(z)) L_{j0}(x) \varphi(x_j, y_i) \quad (3.1.5)$$

$$bz_2 = y, z \in [-1, 1], \quad x \in [-1, 1],$$

где

$$L_{j0}(x) = \frac{l(x)}{l'(x_j)(x - x_j)}, \quad l(x) = (x^2 - 1)^2 T_n(x), \quad T_n(x) = \cos(n \arccos x),$$

$$x_j = \cos \theta_j, \quad \theta_j = (2j - 1)\pi / (2n), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$M_{i0}(z) = \frac{M(z)}{M'(z_i)(z - z_i)}, \quad M(z) = (z^2 - 1)^2 T_m(z), \quad T_m(z) = \cos(m \arccos z),$$

$$z_i = \cos \theta_i, \quad \theta_i = (2i - 1)\pi / (2m), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где $T_n(z) = \cos(n \arccos z)$ — многочлены Чебышева.

Для получения матрицы дискретного оператора L требуется применить этот оператор к интерполяционной формуле (3.1.5). Коэффициенты l_1 и l_2 определяются исходя из граничных условий задачи. Граничные условия на защемленном крае удовлетворяются автоматически. В результате получаем несимметричную матрицу H размера $N \times N$, $N = mn$. Пронумеровав узлы в прямоугольнике (x_j, y_i) сначала по y , потом по x , то есть сверху вниз, справа

налево, в результате получается, что $L\varphi$ приближенно заменяется соотношением $H\varphi$, где φ — вектор значений функции $\varphi = \varphi(x, y)$ в узлах сетки.

Далее требуется получить необходимые коэффициенты для граничных условий по оси y . Для этого рассматривается граничное условие с учетом интерполяционной формулы

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \right|_{|z|=1} = 0 :$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{b^2} M''_{io} \varphi(x_j, y_i) + l_1 \left(\frac{2}{b} M'(z) + \frac{1}{b} M''(z) \cdot y \right) \varphi(x_j, y_i) + l_2 \frac{1}{b^2} M''(z) \varphi(x_j, y_i) = 0.$$

Подставив $z = \pm 1$ в формулу выше, получается система из двух уравнений. Из нее определяются коэффициенты:

$$l_1 = \frac{1}{d} \left[-\frac{1}{b^2} M''(-1) \sum_{i=1}^m \frac{1}{b^2} M''_{io}(1) + \frac{1}{b^2} M''(1) \sum_{i=1}^m \frac{1}{b^2} M''_{io}(-1) \right],$$

$$l_2 = \frac{1}{d} \left[\left(\frac{2}{b} M'(-1) - \frac{1}{b} M''(-1) \right) \sum_{i=1}^m \frac{1}{b^2} M''_{io}(1) - \left(\frac{2}{b} M'(1) + \frac{1}{b} M''(1) \right) \sum_{i=1}^m \frac{1}{b^2} M''_{io}(-1) \right],$$

$$\text{где } d = \frac{1}{b^2} M''(-1) \left(\frac{2}{b} M'(1) + \frac{1}{b} M''(1) \right) - \frac{1}{b^2} M''(1) \left(\frac{2}{b} M'(-1) - \frac{1}{b} M''(-1) \right).$$

Далее приводятся выражения для M_{io} и M''_{io} . Первый член сумм идет с коэффициентом $1/2$.

$$M_{io}(z) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k^{(m)} T_k(z) \frac{z^2 - 1}{z_i^2 - 1}, \quad a_k^{(m)} = \frac{2}{m} T_k(z_i) = \frac{2}{m} \cos(k \cdot \theta_i), \quad \theta_i = \frac{2i-1}{2m} \pi,$$

$$M''_{io} = \frac{1}{b} \sum_{k=0}^{m-1} a_k^{(m)} T_k(z) \frac{2}{z_i^2 - 1} + \frac{1}{b} \frac{4z}{z_i^2 - 1} \sum_{k=0}^{m-1} a_k^{(m)} T'_k(z) + \frac{z^2 - 1}{z_i^2 - 1} \sum_{k=0}^{m-1} a_k^{(m)} T''_k(z).$$

Далее необходимо провести дифференцирование интерполяционной формулы четыре раза для получения всех необходимых производных.

Дальнейшее решение выполняется аналогично предыдущей задаче.

3.2 Колебания ортотропной пластинки

Во втором разделе рассматривается ортотропная пластинка, которая в плоскости xu занимает область $S: \{-a'/2 \leq x \leq a'/2, -b' \leq y \leq b'\}$, и жестко закреплена по противоположным краям и свободно опирается по двум другим, то есть случай SCSC.

3.2.1 Постановка задачи

Уравнение колебаний пластинки с использованием формулы поршневой теории для давления аэродинамического воздействия потока с колеблющейся пластинкой имеет вид [15]:

$$L'w + \frac{kp_0}{c_0} \vec{V}' \text{grad} w + \frac{kp_0}{c_0} \frac{\partial w}{\partial t} + \rho' h' \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

$$L'\varphi = D'_x \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2D'_{xy} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + D'_y \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4},$$

$$D'_x = \frac{E_x h'^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}, \quad D'_y = \frac{E_y h'^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}, \quad D'_{xy} = D'_x \nu_y + 2 \frac{G_{xy}}{12} h'^3.$$

где p_0, c_0 — давление и скорость звука в невозмущенном потоке;

k — показатель политропы газа;

E_x, E_y — модули Юнга по осям x и y ;

ν_x, ν_y — коэффициенты Пуассона;

G_{xy} — модуль сдвига;

h' — толщина пластинки;

\vec{V}' — вектор набегающего потока;

ρ' — плотность материала пластинки.

Если задать $w = \varphi' \exp(\omega' t)$, и ввести собственное число λ' в виде $\rho' h' \omega'^2 + \omega' k p_0 / c_0 + \lambda' = 0$, то, дополнив уравнение колебаний соответствующими граничными условиями, получается задачу на собственные значения [30].

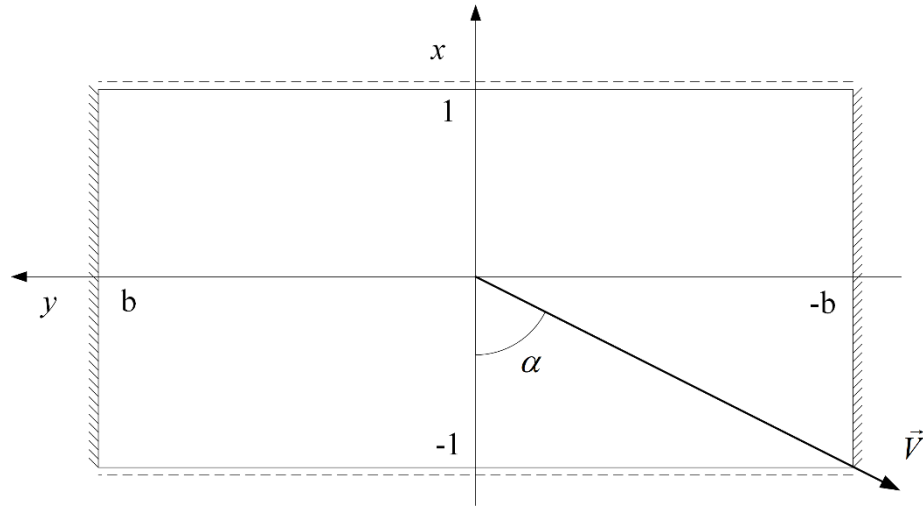


Рисунок 3.2.1 — Общий вид пластинки

Безразмерные параметры вводятся аналогично предыдущим разделам. За характерный размер принимается половина длины в направлении x , то есть $a = a' / 2$, $b = b' / a$ (рисунок 3.2.1). За характерные параметры — p_0, c_0 . Здесь \vec{V} — вектор набегающего потока, отнесенной к скорости звука в нем.

Получается задачу на собственные значения в области $S: \{-1 \leq x \leq 1, -b \leq y \leq b\}$ [30]:

$$L\varphi + k\vec{V}\text{grad}\varphi = \lambda\varphi, \quad \rho h\omega^2 + k\omega + \lambda = 0, \quad \vec{V} = (V_x, V_y),$$

$$\varphi(x, y)|_{|x|=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x} \right|_{|x|=1} = 0, \quad \varphi(x, y)|_{|y|=b} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2\varphi(x, y)}{\partial^2 y} \right|_{|y|=b} = 0,$$

$$L\varphi = D_x \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + 2D_{xy} \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} + D_y \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4},$$

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y) p_0}, \quad D_y = \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y) p_0}, \quad D_{xy} = D_x \nu_y + 2 \frac{G_{xy}}{12 p_0} h^3.$$

где h — толщина пластинки, отнесенная к a ;

$\omega = \omega' a / c_0$ — безразмерная частота;

$\lambda = \lambda' a / p_0$ — безразмерное собственное значение;

$\varphi = \varphi(x, y) = \varphi' / a$ — безразмерное амплитудное значение прогиба.

Собственное число λ связано с частотой колебаний соотношением

$$\lambda = -\rho h \omega^2 - k \omega,$$

где ρ — безразмерная плотность материала пластинки, отнесенная к параметру p_0 / c_0^2 .

Задача, как и ранее, сводится к несамосопряженной задаче на собственные значения. Поиск решения происходит аналогично.

3.2.2 Дискретизация

Для функции $\varphi = \varphi(x, y)$ в прямоугольнике применяется интерполяционная формула:

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (M_{i0}(z) + l_1 \cdot y \cdot M(z) + l_2 \cdot M(z)) L_{j0}(x) \varphi(x_j, y_i) \quad (3.2.1)$$

$$bz_2 = y, z \in [-1, 1], \quad x \in [-1, 1],$$

где

$$L_{j0}(x) = \frac{l(x)}{l'(x_j)(x - x_j)}, \quad l(x) = (x^2 - 1)^2 T_n(x), \quad T_n(x) = \cos(n \arccos x),$$

$$x_j = \cos \theta_j, \quad \theta_j = (2j - 1)\pi / (2n), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$M_{i0}(z) = \frac{M(z)}{M'(z_i)(z - z_i)}, \quad M(z) = (z^2 - 1)^2 T_m(z), \quad T_m(z) = \cos(m \arccos z),$$

$$z_i = \cos \theta_i, \quad \theta_i = (2i - 1)\pi / (2m), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где $T_n(z) = \cos(n \arccos z)$ — многочлены Чебышева.

Для получения матрицы дискретного оператора L требуется применить этот оператор к интерполяционной формуле (3.2.1). Коэффициенты l_1 и l_2 определяются исходя из граничных условий задачи. Граничные условия на заземленном крае удовлетворяются автоматически. В результате получается несимметричная матрица H размера $N \times N$, $N = mn$. Пронумеровав узлы в прямоугольнике (x_j, y_i) сначала по y , потом по x , то есть сверху вниз, справа налево, можно получить, что $L\varphi$ приближенно заменяется соотношением $H\varphi$, где φ — вектор значений функции $\varphi = \varphi(x, y)$ в узлах сетки.

Необходимые коэффициенты для граничных условий по оси y можно получить, рассмотрев граничное условие с учетом интерполяционной формулы:

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \right|_{|z|=1} = 0 :$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{b^2} M''_{io} \varphi(x_j, y_i) + l_1 \left(\frac{2}{b} M'(z) + \frac{1}{b} M''(z) \cdot y \right) \varphi(x_j, y_i) + l_2 \frac{1}{b^2} M''(z) \varphi(x_j, y_i) = 0.$$

Если подставить $z = \pm 1$ в формулу выше, то получится система из двух уравнений. Из нее определяются коэффициенты:

$$l_1 = \frac{1}{d} \left[-\frac{1}{b^2} M''(-1) \sum_{i=1}^m \frac{1}{b^2} M''_{io}(1) + \frac{1}{b^2} M''(1) \sum_{i=1}^m \frac{1}{b^2} M''_{io}(-1) \right],$$

$$l_2 = \frac{1}{d} \left[\left(\frac{2}{b} M'(-1) - \frac{1}{b} M''(-1) \right) \sum_{i=1}^m \frac{1}{b^2} M''_{io}(1) - \left(\frac{2}{b} M'(1) + \frac{1}{b} M''(1) \right) \sum_{i=1}^m \frac{1}{b^2} M''_{io}(-1) \right],$$

$$\text{где } d = \frac{1}{b^2} M''(-1) \left(\frac{2}{b} M'(1) + \frac{1}{b} M''(1) \right) - \frac{1}{b^2} M''(1) \left(\frac{2}{b} M'(-1) - \frac{1}{b} M''(-1) \right).$$

Выражения для M_{io} и M''_{io} представлены ниже. Первый член сумм идет с коэффициентом $1/2$.

$$M_{io}(z) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k^{(m)} T_k(z) \frac{z^2 - 1}{z_i^2 - 1}, \quad a_k^{(m)} = \frac{2}{m} T_k(z_i) = \frac{2}{m} \cos(k \cdot \theta_i), \quad \theta_i = \frac{2i-1}{2m} \pi,$$

$$M_{io}'' = \frac{1}{b} \sum_{k=0}^{m-1} a_k^{(m)} T_k(z) \frac{2}{z_i^2 - 1} + \frac{1}{b} \frac{4z}{z_i^2 - 1} \sum_{k=0}^{m-1} a_k^{(m)} T_k'(z) + \frac{z^2 - 1}{z_i^2 - 1} \sum_{k=0}^{m-1} a_k^{(m)} T_k''(z).$$

Далее необходимо провести дифференцирование интерполяционной формулы четыре раза для получения всех необходимых производных.

3.3 Вычислительные эксперименты

3.3.1 Изотропная пластинка

Рассматривалась изотропная пластинка со следующими параметрами: $E = 3.06 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0.15$, $\rho' = 2750 \text{ кг/м}^3$, $h = 0.0187$, $k = 1.4$, $p_0 = 1.0333 \text{ Н/м}^2$, $c_0 = 331.26 \text{ м/с}$, $|x| \leq 1$. Далее проводился расчет критической скорости флаттера при изменении направления потока от 0 до $\pi/2$. При этом рассматривались пластинки с различным $|y|$, от $|y| \leq 1$, то есть квадратная пластинка, до $|y| \leq 2$.

Исследование зависимости критической скорости флаттера от направления потока

Для квадратной пластинки полученные результаты расчета при изменении направления потока с шагом в $1/180$ представлены в таблице 3.3.1 и на рисунке 3.3.1. В таблице также представлены результаты на двух сетках — 9×9 и 19×19 .
Таблица 3.3.1 — Результаты расчета для квадратной пластинки при различных направлениях вектора скорости потока

$\alpha \cdot \pi / 180$	v_{crit}		i
	9x9	19x19	
0	7.57852	7.57864	1
1	7.57874	7.57886	1
2	7.57942	7.57952	1
3	7.58074	7.58061	1
4	7.58225	7.58213	1
5	7.58463	7.58407	1
6	7.58685	7.58644	1
7	7.58935	7.58921	1
8	7.59202	7.59239	1
9	7.59512	7.59595	1
10	7.59921	7.59991	1
11	7.60462	7.60421	1
12	7.60884	7.60886	1
13	7.61325	7.61384	1
14	7.61937	7.61914	1

Продолжение таблицы 3.3.1

15	7.62484	7.62473	1
16	7.63067	7.63058	1
17	7.63662	7.63668	1
18	7.64334	7.64311	1
19	7.64985	7.64951	1
20	7.65623	7.65621	1
21	7.66326	7.66302	1
22	7.66972	7.66995	1
23	7.67683	7.67694	1
24	7.68326	7.68398	1
25	7.69138	7.69103	1
26	7.69826	7.69805	1
27	7.70548	7.70511	1
28	7.71162	7.71186	1
29	7.71884	7.71857	1
30	7.72526	7.72511	1
31	7.73148	7.73143	1
32	7.73796	7.73751	1
33	7.74334	7.74329	1
34	7.74885	7.74875	1
35	7.75325	7.75385	1
36	7.75874	7.75855	1
37	7.76285	7.76283	1
38	7.76612	7.76665	1
39	7.76927	7.76996	1
40	7.77237	7.77277	1
41	7.77594	7.77503	1
42	7.77638	7.77671	1
43	7.77795	7.77781	1
44	7.77838	7.77826	1
45	7.77859	7.77808	1
46	7.77739	7.77723	1
47	7.77531	7.77571	1
48	7.77364	7.77345	1
49	7.77074	7.77045	1
50	7.76685	7.76667	1
51	7.76237	7.76208	1
52	7.75684	7.75665	1
53	7.75085	7.75029	1
54	7.74337	7.74311	1
55	7.73484	7.73469	1
56	7.72536	7.72531	1

Продолжение таблицы 3.3.1

57	7.71445	7.71482	1
58	7.70358	7.70317	1
59	7.69034	7.69036	1
60	7.67639	7.67641	1
61	7.66135	7.66135	1
62	7.64559	7.64536	1
63	7.62837	7.62857	1
64	7.61125	7.61124	1
65	7.59347	7.59365	1
66	7.57669	7.57607	1
67	7.55825	7.55881	1
68	7.54225	7.54213	1
69	7.52653	7.52623	1
70	7.51136	7.51127	1
71	7.49773	7.49735	1
72	7.48458	7.48451	1
73	7.47226	7.47275	1
74	7.46212	7.46203	1
75	7.45273	7.45231	1
76	7.44325	7.44351	1
77	7.43548	7.43556	1
78	7.42852	7.42842	1
79	7.42263	7.42211	1
80	7.41625	7.41628	1
81	7.41137	7.41119	1
82	7.40685	7.40672	1
83	7.40296	7.40281	1
84	7.39952	7.39945	1
85	7.39658	7.39661	1
86	7.39483	7.39431	1
87	7.39237	7.39247	1
88	7.39196	7.39114	1
89	7.39036	7.39028	1
90	7.38985	7.38988	1

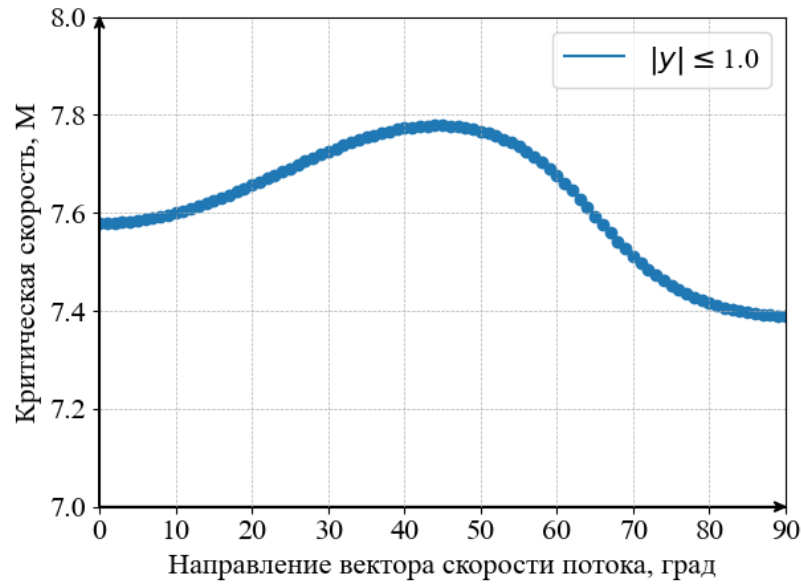


Рисунок 3.3.1 — График критической скорости от направления потока для квадратной пластинки

Из результатов и рисунка видно, что критическая скорость флаттера для квадратной изотропной пластинки со смешанными граничными условиями при повороте вектора скорости потока от стороны со свободным опиранием до заземленной стороны немонотонно убывает — сначала возрастает, при угле до 45 градусов, а затем убывает до значения, меньшего изначального.

Стоит отметить, что результаты на двух различных сетках отличаются незначительно, что свидетельствует об устойчивости решения.

Далее, в таблице 3.3.2 и на рисунке 3.3.2 приведены результаты расчета критической скорости флаттера при изменении $|y|$ от 1 до 2. В нижнем индексе у значения критической скорости указан номер собственного значения, на котором она достигается. Представленные результаты получены на сетке 19x19.

Таблица 3.3.2 — Результаты расчета при различных направлениях вектора скорости потока

$\frac{\alpha \cdot \pi}{180}$	V_{crit} (номер СЗ)						
	$ y \leq 1$	$ y \leq 1.1$	$ y \leq 1.2$	$ y \leq 1.5$	$ y \leq 1.8$	$ y \leq 1.9$	$ y \leq 2$
0	7.57864 ₍₁₎	7.12792 ₍₁₎	6.78968 ₍₁₎	6.16015 ₍₂₎	5.82436 ₍₂₎	5.74678 ₍₂₎	5.68073 ₍₂₎
1	7.57886 ₍₁₎	7.12779 ₍₁₎	6.78898 ₍₁₎	6.16293 ₍₂₎	5.82595 ₍₂₎	5.74821 ₍₂₎	5.68205 ₍₂₎
2	7.57952 ₍₁₎	7.12741 ₍₁₎	6.78689 ₍₁₎	6.16977 ₍₂₎	5.83076 ₍₂₎	5.75253 ₍₂₎	5.68604 ₍₂₎
3	7.58061 ₍₁₎	7.12676 ₍₁₎	6.78341 ₍₁₎	6.12806 ₍₁₎	5.83891 ₍₂₎	5.75986 ₍₂₎	5.69281 ₍₂₎
4	7.58213 ₍₁₎	7.12586 ₍₁₎	6.77855 ₍₁₎	6.06481 ₍₁₎	5.85061 ₍₂₎	5.77037 ₍₂₎	5.70256 ₍₂₎

Продолжение таблицы 3.3.2

5	7.58407 ₍₁₎	7.12468 ₍₁₎	6.77233 ₍₁₎	6.01006 ₍₁₎	5.86618 ₍₂₎	5.78438 ₍₂₎	5.71562 ₍₂₎
6	7.58644 ₍₁₎	7.12322 ₍₁₎	6.76477 ₍₁₎	5.95713 ₍₁₎	5.42474 ₍₁₎	5.32707 ₍₁₎	5.29231 ₍₁₎
7	7.58921 ₍₁₎	7.12147 ₍₁₎	6.75589 ₍₁₎	5.90444 ₍₁₎	5.31289 ₍₁₎	5.18246 ₍₁₎	5.08425 ₍₁₎
8	7.59239 ₍₁₎	7.11942 ₍₁₎	6.74572 ₍₁₎	5.85147 ₍₁₎	5.21719 ₍₁₎	5.07056 ₍₁₎	4.95331 ₍₁₎
9	7.59595 ₍₁₎	7.11704 ₍₁₎	6.73427 ₍₁₎	5.79803 ₍₁₎	5.12881 ₍₁₎	4.97085 ₍₁₎	4.84167 ₍₁₎
10	7.59991 ₍₁₎	7.11433 ₍₁₎	6.72159 ₍₁₎	5.74407 ₍₁₎	5.04471 ₍₁₎	4.87788 ₍₁₎	4.73982 ₍₁₎
11	7.60421 ₍₁₎	7.11127 ₍₁₎	6.70771 ₍₁₎	5.68963 ₍₁₎	4.96357 ₍₁₎	4.78939 ₍₁₎	4.64421 ₍₁₎
12	7.60886 ₍₁₎	7.10783 ₍₁₎	6.69262 ₍₁₎	5.63476 ₍₁₎	4.88467 ₍₁₎	4.70423 ₍₁₎	4.55314 ₍₁₎
13	7.61384 ₍₁₎	7.10411 ₍₁₎	6.67641 ₍₁₎	5.57953 ₍₁₎	4.80764 ₍₁₎	4.62178 ₍₁₎	4.46568 ₍₁₎
14	7.61914 ₍₁₎	7.09975 ₍₁₎	6.65906 ₍₁₎	5.52403 ₍₁₎	4.73228 ₍₁₎	4.54167 ₍₁₎	4.38127 ₍₁₎
15	7.62473 ₍₁₎	7.09508 ₍₁₎	6.64064 ₍₁₎	5.46834 ₍₁₎	4.65844 ₍₁₎	4.46369 ₍₁₎	4.29957 ₍₁₎
16	7.63058 ₍₁₎	7.08994 ₍₁₎	6.62117 ₍₁₎	5.41256 ₍₁₎	4.58608 ₍₁₎	4.38768 ₍₁₎	4.22035 ₍₁₎
17	7.63668 ₍₁₎	7.08433 ₍₁₎	6.60071 ₍₁₎	5.35677 ₍₁₎	4.51516 ₍₁₎	4.31356 ₍₁₎	4.14345 ₍₁₎
18	7.64311 ₍₁₎	7.07822 ₍₁₎	6.57925 ₍₁₎	5.30106 ₍₁₎	4.44565 ₍₁₎	4.24126 ₍₁₎	4.06878 ₍₁₎
19	7.64951 ₍₁₎	7.07159 ₍₁₎	6.55685 ₍₁₎	5.24551 ₍₁₎	4.37757 ₍₁₎	4.17076 ₍₁₎	3.99624 ₍₁₎
20	7.65621 ₍₁₎	7.06443 ₍₁₎	6.53357 ₍₁₎	5.19017 ₍₁₎	4.31091 ₍₁₎	4.10201 ₍₁₎	3.92577 ₍₁₎
21	7.66302 ₍₁₎	7.05671 ₍₁₎	6.50944 ₍₁₎	5.13516 ₍₁₎	4.24568 ₍₁₎	4.03499 ₍₁₎	3.85731 ₍₁₎
22	7.66995 ₍₁₎	7.04841 ₍₁₎	6.48451 ₍₁₎	5.08054 ₍₁₎	4.18191 ₍₁₎	3.96969 ₍₁₎	3.79082 ₍₁₎
23	7.67694 ₍₁₎	7.03952 ₍₁₎	6.45881 ₍₁₎	5.02637 ₍₁₎	4.11956 ₍₁₎	3.90611 ₍₁₎	3.72628 ₍₁₎
24	7.68398 ₍₁₎	7.03004 ₍₁₎	6.43238 ₍₁₎	4.97271 ₍₁₎	4.05867 ₍₁₎	3.84421 ₍₁₎	3.66362 ₍₁₎
25	7.69103 ₍₁₎	7.01995 ₍₁₎	6.40531 ₍₁₎	4.91961 ₍₁₎	3.99924 ₍₁₎	3.78396 ₍₁₎	3.60283 ₍₁₎
26	7.69805 ₍₁₎	7.00924 ₍₁₎	6.37759 ₍₁₎	4.86715 ₍₁₎	3.94124 ₍₁₎	3.72536 ₍₁₎	3.54385 ₍₁₎
27	7.70511 ₍₁₎	6.99791 ₍₁₎	6.34931 ₍₁₎	4.81535 ₍₁₎	3.88471 ₍₁₎	3.66841 ₍₁₎	3.48666 ₍₁₎
28	7.71186 ₍₁₎	6.98593 ₍₁₎	6.32052 ₍₁₎	4.76428 ₍₁₎	3.82961 ₍₁₎	3.61305 ₍₁₎	3.43121 ₍₁₎
29	7.71857 ₍₁₎	6.97335 ₍₁₎	6.29126 ₍₁₎	4.71396 ₍₁₎	3.77595 ₍₁₎	3.55927 ₍₁₎	3.37747 ₍₁₎
30	7.72511 ₍₁₎	6.96015 ₍₁₎	6.26158 ₍₁₎	4.66443 ₍₁₎	3.72372 ₍₁₎	3.50705 ₍₁₎	3.32541 ₍₁₎
31	7.73143 ₍₁₎	6.94633 ₍₁₎	6.23156 ₍₁₎	4.61573 ₍₁₎	3.67289 ₍₁₎	3.45637 ₍₁₎	3.27499 ₍₁₎
32	7.73751 ₍₁₎	6.93191 ₍₁₎	6.20121 ₍₁₎	4.56788 ₍₁₎	3.62346 ₍₁₎	3.40721 ₍₁₎	3.22616 ₍₁₎
33	7.74329 ₍₁₎	6.91691 ₍₁₎	6.17061 ₍₁₎	4.52091 ₍₁₎	3.57541 ₍₁₎	3.35951 ₍₁₎	3.17888 ₍₁₎
34	7.74875 ₍₁₎	6.90133 ₍₁₎	6.13981 ₍₁₎	4.47483 ₍₁₎	3.52872 ₍₁₎	3.31325 ₍₁₎	3.13313 ₍₁₎
35	7.75385 ₍₁₎	6.88522 ₍₁₎	6.10885 ₍₁₎	4.42968 ₍₁₎	3.48337 ₍₁₎	3.26841 ₍₁₎	3.08886 ₍₁₎
36	7.75855 ₍₁₎	6.86857 ₍₁₎	6.07778 ₍₁₎	4.38544 ₍₁₎	3.43933 ₍₁₎	3.22497 ₍₁₎	3.04603 ₍₁₎
37	7.76283 ₍₁₎	6.85142 ₍₁₎	6.04665 ₍₁₎	4.34215 ₍₁₎	3.39659 ₍₁₎	3.18289 ₍₁₎	3.00461 ₍₁₎
38	7.76665 ₍₁₎	6.83381 ₍₁₎	6.01552 ₍₁₎	4.29981 ₍₁₎	3.35512 ₍₁₎	3.14212 ₍₁₎	2.96454 ₍₁₎
39	7.76996 ₍₁₎	6.81573 ₍₁₎	5.98442 ₍₁₎	4.25841 ₍₁₎	3.31489 ₍₁₎	3.10264 ₍₁₎	2.92581 ₍₁₎
40	7.77277 ₍₁₎	6.79725 ₍₁₎	5.95339 ₍₁₎	4.21797 ₍₁₎	3.27589 ₍₁₎	3.06444 ₍₁₎	2.88836 ₍₁₎
41	7.77503 ₍₁₎	6.77837 ₍₁₎	5.92248 ₍₁₎	4.17849 ₍₁₎	3.23807 ₍₁₎	3.02745 ₍₁₎	2.85218 ₍₁₎
42	7.77671 ₍₁₎	6.75915 ₍₁₎	5.89171 ₍₁₎	4.13995 ₍₁₎	3.20142 ₍₁₎	2.99166 ₍₁₎	2.81721 ₍₁₎
43	7.77781 ₍₁₎	6.73961 ₍₁₎	5.86113 ₍₁₎	4.10236 ₍₁₎	3.16591 ₍₁₎	2.95702 ₍₁₎	2.78341 ₍₁₎
44	7.77826 ₍₁₎	6.71975 ₍₁₎	5.83076 ₍₁₎	4.06572 ₍₁₎	3.13149 ₍₁₎	2.92352 ₍₁₎	2.75073 ₍₁₎
45	7.77808 ₍₁₎	6.69963 ₍₁₎	5.80062 ₍₁₎	4.02998 ₍₁₎	3.09817 ₍₁₎	2.89111 ₍₁₎	2.71918 ₍₁₎
46	7.77723 ₍₁₎	6.67926 ₍₁₎	5.77075 ₍₁₎	3.99517 ₍₁₎	3.06587 ₍₁₎	2.85975 ₍₁₎	2.68868 ₍₁₎
47	7.77571 ₍₁₎	6.65867 ₍₁₎	5.74115 ₍₁₎	3.96124 ₍₁₎	3.03461 ₍₁₎	2.82941 ₍₁₎	2.65921 ₍₁₎
48	7.77345 ₍₁₎	6.63785 ₍₁₎	5.71182 ₍₁₎	3.92819 ₍₁₎	3.00431 ₍₁₎	2.80007 ₍₁₎	2.63073 ₍₁₎
49	7.77045 ₍₁₎	6.61683 ₍₁₎	5.68279 ₍₁₎	3.89598 ₍₁₎	2.97495 ₍₁₎	2.77166 ₍₁₎	2.60319 ₍₁₎
50	7.76667 ₍₁₎	6.59562 ₍₁₎	5.65404 ₍₁₎	3.86459 ₍₁₎	2.94649 ₍₁₎	2.74417 ₍₁₎	2.57656 ₍₁₎
51	7.76208 ₍₁₎	6.57421 ₍₁₎	5.62556 ₍₁₎	3.83399 ₍₁₎	2.91891 ₍₁₎	2.71754 ₍₁₎	2.55081 ₍₁₎
52	7.75665 ₍₁₎	6.55255 ₍₁₎	5.59733 ₍₁₎	3.80414 ₍₁₎	2.89214 ₍₁₎	2.69174 ₍₁₎	2.52586 ₍₁₎
53	7.75029 ₍₁₎	6.53068 ₍₁₎	5.56933 ₍₁₎	3.77511 ₍₁₎	2.86615 ₍₁₎	2.66671 ₍₁₎	2.50169 ₍₁₎

Продолжение таблицы 3.3.2

54	7.74311 ₍₁₎	6.50854 ₍₁₎	5.54153 ₍₁₎	3.74652 ₍₁₎	2.84089 ₍₁₎	2.64241 ₍₁₎	2.47825 ₍₁₎
55	7.73469 ₍₁₎	6.48611 ₍₁₎	5.51391 ₍₁₎	3.71867 ₍₁₎	2.81631 ₍₁₎	2.61881 ₍₁₎	2.45551 ₍₁₎
56	7.72531 ₍₁₎	6.46333 ₍₁₎	5.48638 ₍₁₎	3.69138 ₍₁₎	2.79237 ₍₁₎	2.59583 ₍₁₎	2.43337 ₍₁₎
57	7.71482 ₍₁₎	6.44021 ₍₁₎	5.45894 ₍₁₎	3.66462 ₍₁₎	2.76902 ₍₁₎	2.57344 ₍₁₎	2.41185 ₍₁₎
58	7.70317 ₍₁₎	6.41667 ₍₁₎	5.43156 ₍₁₎	3.63835 ₍₁₎	2.74623 ₍₁₎	2.55162 ₍₁₎	2.39089 ₍₁₎
59	7.69036 ₍₁₎	6.39274 ₍₁₎	5.40422 ₍₁₎	3.61253 ₍₁₎	2.72395 ₍₁₎	2.53032 ₍₁₎	2.37044 ₍₁₎
60	7.67641 ₍₁₎	6.36844 ₍₁₎	5.37691 ₍₁₎	3.58716 ₍₁₎	2.70218 ₍₁₎	2.50953 ₍₁₎	2.35049 ₍₁₎
61	7.66135 ₍₁₎	6.34381 ₍₁₎	5.34968 ₍₁₎	3.56224 ₍₁₎	2.68091 ₍₁₎	2.48924 ₍₁₎	2.33105 ₍₁₎
62	7.64536 ₍₁₎	6.31895 ₍₁₎	5.32261 ₍₁₎	3.53781 ₍₁₎	2.66016 ₍₁₎	2.46946 ₍₁₎	2.31212 ₍₁₎
63	7.62857 ₍₁₎	6.29402 ₍₁₎	5.29579 ₍₁₎	3.51392 ₍₁₎	2.63997 ₍₁₎	2.45023 ₍₁₎	2.29373 ₍₁₎
64	7.61124 ₍₁₎	6.26917 ₍₁₎	5.26939 ₍₁₎	3.49066 ₍₁₎	2.62037 ₍₁₎	2.43161 ₍₁₎	2.27591 ₍₁₎
65	7.59365 ₍₁₎	6.24465 ₍₁₎	5.24356 ₍₁₎	3.46812 ₍₁₎	2.60147 ₍₁₎	2.41362 ₍₁₎	2.25874 ₍₁₎
66	7.57607 ₍₁₎	6.22069 ₍₁₎	5.21849 ₍₁₎	3.44642 ₍₁₎	2.58331 ₍₁₎	2.39637 ₍₁₎	2.24228 ₍₁₎
67	7.55881 ₍₁₎	6.19751 ₍₁₎	5.19437 ₍₁₎	3.42565 ₍₁₎	2.56597 ₍₁₎	2.37991 ₍₁₎	2.22657 ₍₁₎
68	7.54213 ₍₁₎	6.17528 ₍₁₎	5.17135 ₍₁₎	3.40591 ₍₁₎	2.54952 ₍₁₎	2.36429 ₍₁₎	2.21166 ₍₁₎
69	7.52623 ₍₁₎	6.15422 ₍₁₎	5.14955 ₍₁₎	3.38725 ₍₁₎	2.53399 ₍₁₎	2.34955 ₍₁₎	2.19761 ₍₁₎
70	7.51127 ₍₁₎	6.13439 ₍₁₎	5.12905 ₍₁₎	3.36974 ₍₁₎	2.51941 ₍₁₎	2.33572 ₍₁₎	2.18443 ₍₁₎
71	7.49735 ₍₁₎	6.11588 ₍₁₎	5.10989 ₍₁₎	3.35337 ₍₁₎	2.50581 ₍₁₎	2.32281 ₍₁₎	2.17211 ₍₁₎
72	7.48451 ₍₁₎	6.09869 ₍₁₎	5.09211 ₍₁₎	3.33814 ₍₁₎	2.49313 ₍₁₎	2.31079 ₍₁₎	2.16065 ₍₁₎
73	7.47275 ₍₁₎	6.08283 ₍₁₎	5.07562 ₍₁₎	3.32403 ₍₁₎	2.48139 ₍₁₎	2.29965 ₍₁₎	2.15002 ₍₁₎
74	7.46203 ₍₁₎	6.06824 ₍₁₎	5.06045 ₍₁₎	3.31111 ₍₁₎	2.47055 ₍₁₎	2.28936 ₍₁₎	2.14022 ₍₁₎
75	7.45231 ₍₁₎	6.05488 ₍₁₎	5.04651 ₍₁₎	3.29901 ₍₁₎	2.46055 ₍₁₎	2.27988 ₍₁₎	2.13117 ₍₁₎
76	7.44351 ₍₁₎	6.04267 ₍₁₎	5.03374 ₍₁₎	3.28801 ₍₁₎	2.45139 ₍₁₎	2.27118 ₍₁₎	2.12288 ₍₁₎
77	7.43556 ₍₁₎	6.03155 ₍₁₎	5.02209 ₍₁₎	3.27794 ₍₁₎	2.44299 ₍₁₎	2.26321 ₍₁₎	2.11528 ₍₁₎
78	7.42842 ₍₁₎	6.02146 ₍₁₎	5.01151 ₍₁₎	3.26878 ₍₁₎	2.43535 ₍₁₎	2.25596 ₍₁₎	2.10836 ₍₁₎
79	7.42211 ₍₁₎	6.01235 ₍₁₎	5.00191 ₍₁₎	3.26046 ₍₁₎	2.42842 ₍₁₎	2.24938 ₍₁₎	2.10209 ₍₁₎
80	7.41628 ₍₁₎	6.00415 ₍₁₎	4.99326 ₍₁₎	3.25297 ₍₁₎	2.42216 ₍₁₎	2.24344 ₍₁₎	2.09643 ₍₁₎
81	7.41119 ₍₁₎	5.99684 ₍₁₎	4.98555 ₍₁₎	3.24627 ₍₁₎	2.41657 ₍₁₎	2.23813 ₍₁₎	2.09135 ₍₁₎
82	7.40672 ₍₁₎	5.99037 ₍₁₎	4.97872 ₍₁₎	3.24033 ₍₁₎	2.41161 ₍₁₎	2.23342 ₍₁₎	2.08687 ₍₁₎
83	7.40281 ₍₁₎	5.98471 ₍₁₎	4.97273 ₍₁₎	3.23514 ₍₁₎	2.40726 ₍₁₎	2.22931 ₍₁₎	2.08294 ₍₁₎
84	7.39945 ₍₁₎	5.97983 ₍₁₎	4.96758 ₍₁₎	3.23066 ₍₁₎	2.40353 ₍₁₎	2.22575 ₍₁₎	2.07955 ₍₁₎
85	7.39661 ₍₁₎	5.97573 ₍₁₎	4.96325 ₍₁₎	3.22689 ₍₁₎	2.40039 ₍₁₎	2.22277 ₍₁₎	2.07671 ₍₁₎
86	7.39431 ₍₁₎	5.97238 ₍₁₎	4.95971 ₍₁₎	3.22381 ₍₁₎	2.39781 ₍₁₎	2.22033 ₍₁₎	2.07438 ₍₁₎
87	7.39247 ₍₁₎	5.96975 ₍₁₎	4.95694 ₍₁₎	3.22141 ₍₁₎	2.39581 ₍₁₎	2.21843 ₍₁₎	2.07256 ₍₁₎
88	7.39114 ₍₁₎	5.96785 ₍₁₎	4.95494 ₍₁₎	3.21968 ₍₁₎	2.39437 ₍₁₎	2.21706 ₍₁₎	2.07126 ₍₁₎
89	7.39028 ₍₁₎	5.96667 ₍₁₎	4.95371 ₍₁₎	3.21862 ₍₁₎	2.39349 ₍₁₎	2.21623 ₍₁₎	2.07047 ₍₁₎
90	7.38988 ₍₁₎	5.96619 ₍₁₎	4.95323 ₍₁₎	3.21822 ₍₁₎	2.39316 ₍₁₎	2.21592 ₍₁₎	2.07017 ₍₁₎

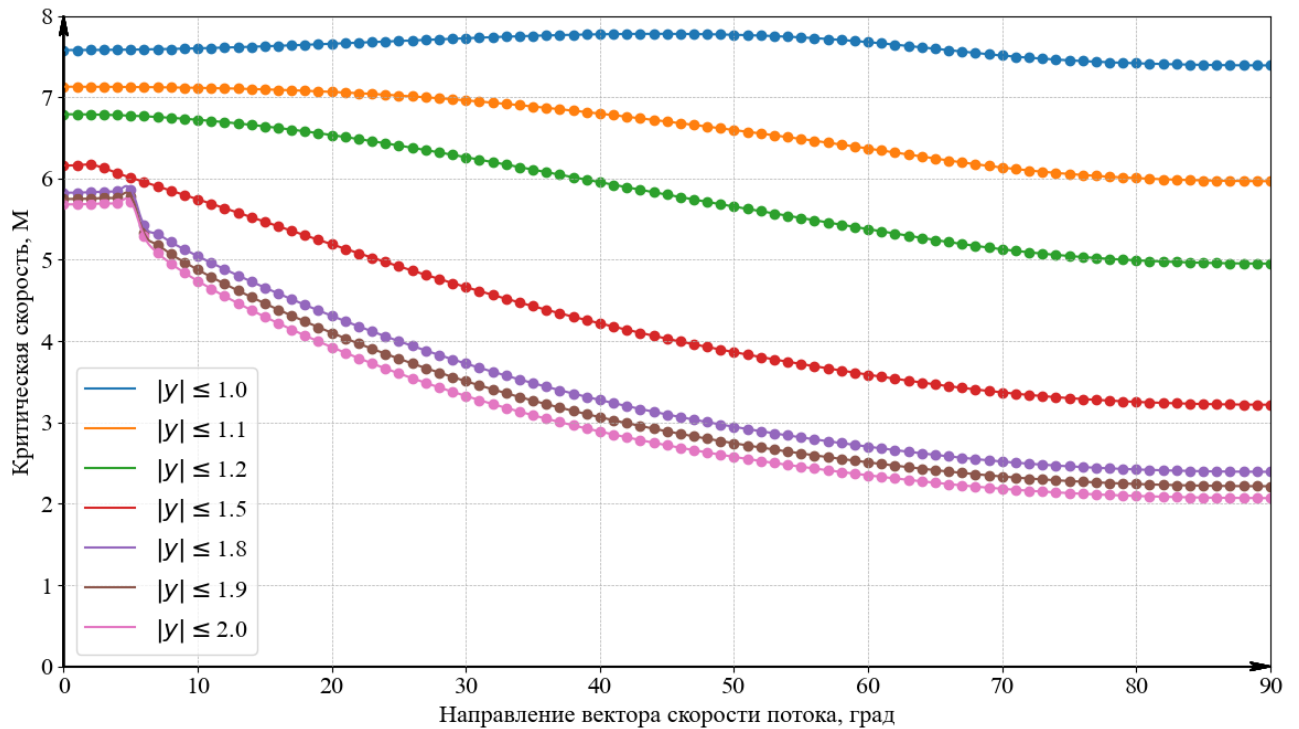


Рисунок 3.3.2 — Графики критической скорости от направления потока при различных $|y|$

Из представленных результатов для изотропной квадратной и удлиненной пластинок могут быть сделаны следующие выводы:

- критическая скорость флаттера при повороте вектора скорости потока от направления со свободным краем пластинки к направлению с заземленным краем немонотонно убывает, до 45 градусов поворота вектора скорости потока наблюдается рост критической скорости флаттера;

- увеличение размера пластинки, в направлении, перпендикулярном потоку, сопровождается уменьшением критической скорости;

- для удлиненной пластинки критическая скорость флаттера может достигаться не обязательно на первом собственном значении;

- с увеличением длины пластинки рост критической скорости до 45 градусов поворота вектора потока быстро пропадает, убывание скорости становится нелинейным, при соотношении сторон более 1.5, зависимость становится немонотонной, при изменении направления потока в области до 10 градусов ($|\alpha| \leq 10\pi/180$) наблюдается небольшой рост критической

скорости флаттера, сопровождающийся переходом номера собственного значения, на котором она достигается, от первого к более высоким. При дальнейшем изменении угла поворота критическая скорость флаттера падает.

Эффект роста критической скорости флаттера в области до 10 градусов угла поворота вектора скорости потока по характеру совпадает с выявленным во второй части работы для ортотропной защемленной пластинки. Образование этой особенности хорошо видно на рисунке 3.3.3.

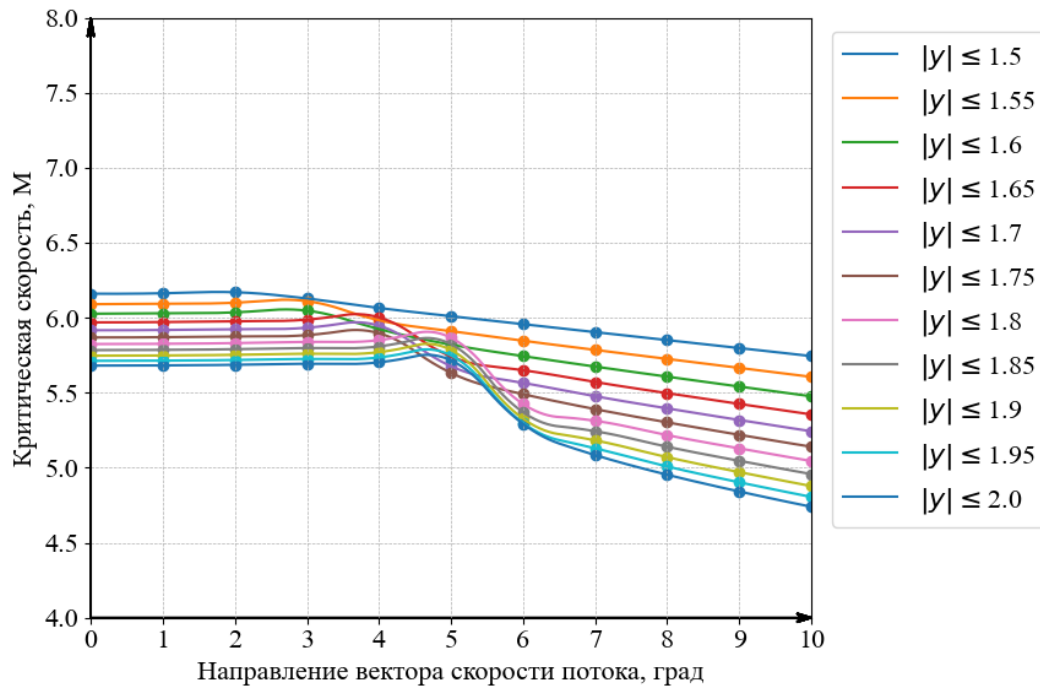


Рисунок 3.3.3 — Графики критической скорости от направления потока при различных $|y|$

Исследование зависимости критической скорости флаттера от безразмерной скорости звука в пластине и безразмерной толщины

Рассматривалась квадратная пластинка, занимающая в плоскости xu область $\{|x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ из 4 материалов с $h = 0,01$. Характеристики материалов приведены в таблице 3.3.4. Здесь c_2 — скорость звука в пластине, отнесенная к c_0 (далее — безразмерная скорость звука в пластине).

Таблица 3.3.4 — Характеристики материалов пластинки

Материал	Е, МПа	ρ' , кг/м ³	c_2	ν
Материал 1	107873.15	$4.50 \cdot 10^3$	14.777	0.32
Материал 2	196133	$7.80 \cdot 10^3$	15.131	0.3
Материал 3	68646.55	$2.70 \cdot 10^3$	15.214	0.33
Материал 4	71588.54	$2.80 \cdot 10^3$	15.257	0.31

Дальнейшее моделирование выполнялось для двух направлений вектора скорости потока при изменении h для тех же материалов (Таблица 3.3.5). В скобках указано собственное значение, соответствующее критической скорости флаттера.

Таблица 3.3.5 — Критическая скорость при изменении толщины пластинки

Материал 1			Материал 2		
h	0	$\pi/4$	h	0°	$\pi/4$
	v_{crit}			v_{crit}	
0.01	4.54903 (1)	4.67023 (1)	0.01	8.12760 (1)	8.34390 (1)
0.009	3.32587 (1)	3.41455 (1)	0.009	5.93058 (1)	6.08845 (1)
0.008	2.34768 (1)	2.41037 (1)	0.008	4.17206 (1)	4.28318 (1)
Материал 3			Материал 4		
h	0	$\pi/4$	h	0°	$\pi/4$
	v_{crit}			v_{crit}	
0.01	2.94178 (1)	3.02035 (1)	0.01	3.02173 (1)	3.10242 (1)
0.009	2.16057 (1)	2.21839 (1)	0.009	2.21829 (1)	2.27763 (1)
0.008	1.53708 (1)	1.57836 (1)	0.008	1.57693 (1)	1.61925 (1)

Полученные результаты показывают, что при увеличении толщины критическая скорость флаттера возрастает.

Ниже также представлены собственные формы $Re(\varphi)$ соответствующие критической скорости флаттера для материала 1 (рисунки 3.3.4 — 3.3.5). Для всех рассматриваемых материалов соответствующие собственные формы схожи.

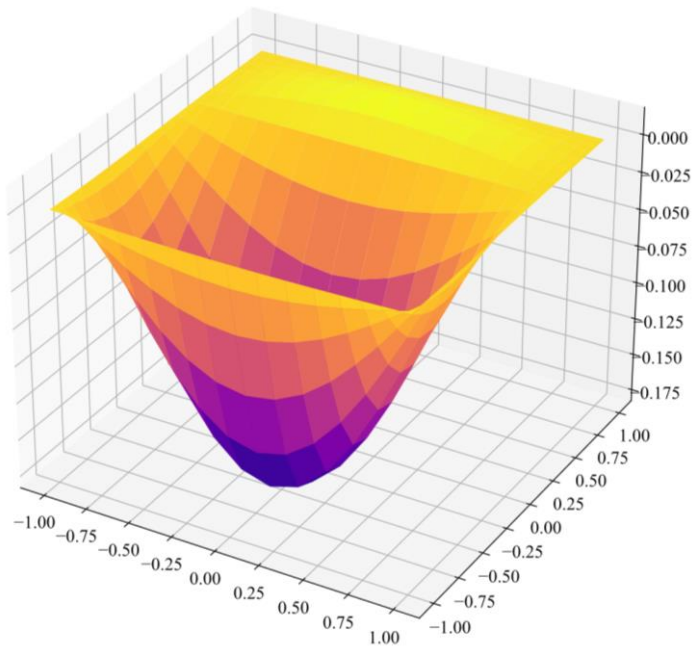


Рисунок 3.3.4 — $\text{Re}(\varphi)$, материал 1, $\alpha = 0$

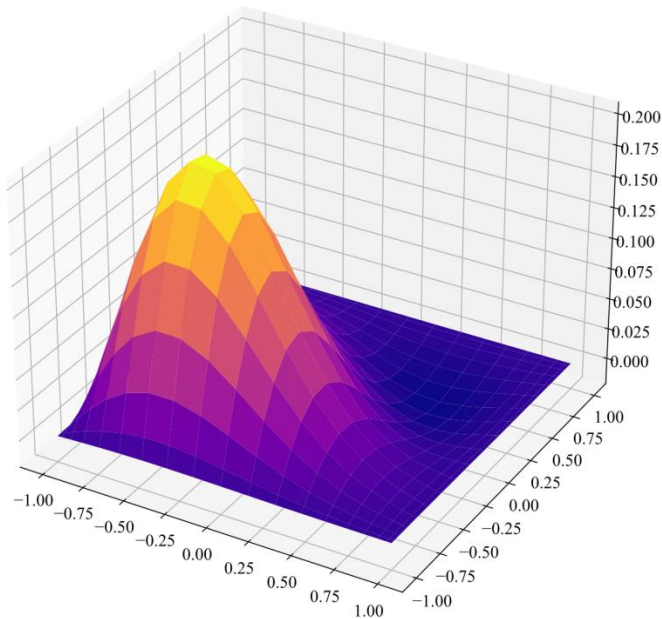


Рисунок 3.3.5 — $\text{Re}(\varphi)$, материал 1, $\alpha = \pi/4$

Из рисунков можно сделать следующий вывод: собственная форма одногорбая, при повороте потока на $\pi/4$ собственная форма также поворачивается.

По результатам численных расчетов подбиралась аппроксимационная зависимость критической скорости флаттера от двух безразмерных параметров: $x = c_2$ — безразмерная скорость звука в пластине и $y = h \cdot 10^3$ — безразмерная толщина пластинки. В результате было получено:

$$v_{crit} = \frac{C_1 + C_2x + C_3y + C_4y^2 + C_5y^3}{1 + C_6x + C_7x^2 + C_8y + C_9y^2},$$

где $C_1 = -0.0013821068$, $C_2 = 7.7827615 \cdot 10^{-5}$, $C_3 = 9.4691519 \cdot 10^{-5}$,
 $C_4 = -1.2649537 \cdot 10^{-5}$, $C_5 = 1.14134679 \cdot 10^{-6}$, $C_6 = -0.13350215$, $C_7 = 0.0044560314$,
 $C_8 = -1.3745723 \cdot 10^5$, $C_9 = 7.1868247 \cdot 10^{-7}$.

Погрешность расчета по аппроксимационной формуле по критерию средней процентной ошибки составляет менее 3%.

Полученная аппроксимационная зависимость отличается от предложенной в [83]: $v_{crit} = a + bx + cy^3$ для заземленной по контуру пластинки (случай СССС). Таким образом, можно сделать вывод о том, что при выборе аппроксимационной зависимости необходимо учитывать условия закрепления.

3.3.2 Ортотропная пластинка

Рассматривалась пластинка со следующими параметрами:
 $E_x = 3.06 \cdot 10^4$ МПа, $E_y = 2.448 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_x = 0.15$, $\nu_y = 0.12$, $G_{xy} = 1.5 \cdot 10^4$ МПа,
 $\rho' = 2750$ кг/м³, $|x| \leq 1$, $h = 0.0187$, $k = 1.4$, $p_0 = 1.0333$ Н/м², $c_0 = 331.26$ м/с.
 Далее проводился расчет критической скорости флаттера при изменении направления потока от 0 до $\pi/2$. При этом рассматривались пластинки с различным $|y|$, от $|y| \leq 1$, то есть квадратная пластинка, до $|y| \leq 2.4$.

Исследование зависимости критической скорости флаттера от направления потока

Для квадратной пластинки полученные результаты расчета при изменении направления потока с шагом в 1/180 представлены в таблице 3.3.6 и на рисунке 3.3.6. В таблице также представлены результаты на двух сетках — 9x9 и 19x19.

Таблица 3.3.6 — Результаты расчета для квадратной пластинки при различных направлениях вектора скорости потока

$\alpha \cdot \pi / 180$	v_{crit}		i
	9x9	19x19	
0	7.54412	7.54402	1
1	7.52763	7.52751	1
2	7.51175	7.51145	1
3	7.49535	7.49581	1
4	7.48075	7.48059	1
5	7.46525	7.46578	1
6	7.45175	7.45137	1
7	7.43789	7.43737	1
8	7.42335	7.42373	1
9	7.41027	7.41047	1
10	7.39786	7.39755	1
11	7.38413	7.38497	1
12	7.37274	7.37271	1
13	7.36023	7.36074	1
14	7.34973	7.34906	1
15	7.33752	7.33763	1
16	7.32612	7.32644	1
17	7.31563	7.31545	1
18	7.30485	7.30465	1
19	7.29424	7.29411	1
20	7.28364	7.28349	1
21	7.27378	7.27308	1
22	7.26227	7.26273	1
23	7.25251	7.25243	1
24	7.24295	7.24214	1
25	7.23174	7.23181	1
26	7.22195	7.22143	1
27	7.21029	7.21096	1
28	7.20054	7.20037	1
29	7.18925	7.18962	1
30	7.17875	7.17866	1
31	7.16749	7.16749	1
32	7.15623	7.15606	1
33	7.14462	7.14432	1
34	7.13287	7.13228	1
35	7.11968	7.11986	1
36	7.10707	7.10707	1
37	7.09354	7.09387	1

Продолжение таблицы 3.3.6

38	7.08023	7.08023	1
39	7.06653	7.06612	1
40	7.05126	7.05152	1
41	7.03674	7.03643	1
42	7.02085	7.02081	1
43	7.00423	7.00462	1
44	6.98763	6.98788	1
45	6.97047	6.97057	1
46	6.95258	6.95266	1
47	6.93469	6.93413	1
48	6.91473	6.91498	1
49	6.89525	6.89518	1
50	6.87474	6.87469	1
51	6.85369	6.85352	1
52	6.83126	6.83161	1
53	6.80858	6.80892	1
54	6.78536	6.78543	1
55	6.76126	6.76109	1
56	6.73584	6.73586	1
57	6.70925	6.70969	1
58	6.68258	6.68257	1
59	6.65438	6.65451	1
60	6.62539	6.62548	1
61	6.59549	6.59561	1
62	6.56422	6.56496	1
63	6.53324	6.53372	1
64	6.50252	6.50209	1
65	6.47063	6.47031	1
66	6.43827	6.43863	1
67	6.40746	6.40729	1
68	6.37627	6.37651	1
69	6.34663	6.34646	1
70	6.31774	6.31728	1
71	6.28925	6.28904	1
72	6.26125	6.26176	1
73	6.23537	6.23544	1
74	6.21047	6.21004	1
75	6.18584	6.18551	1
76	6.16125	6.16178	1
77	6.13863	6.13881	1
78	6.11647	6.11652	1
79	6.09485	6.09487	1

Продолжение таблицы 3.3.6

80	6.07325	6.07381	1
81	6.05312	6.05331	1
82	6.03341	6.03331	1
83	6.01315	6.01379	1
84	5.99425	5.99474	1
85	5.97663	5.97613	1
86	5.95774	5.95795	1
87	5.94084	5.94017	1
88	5.92258	5.92281	1
89	5.90596	5.90581	1
90	5.88960	5.88921	1

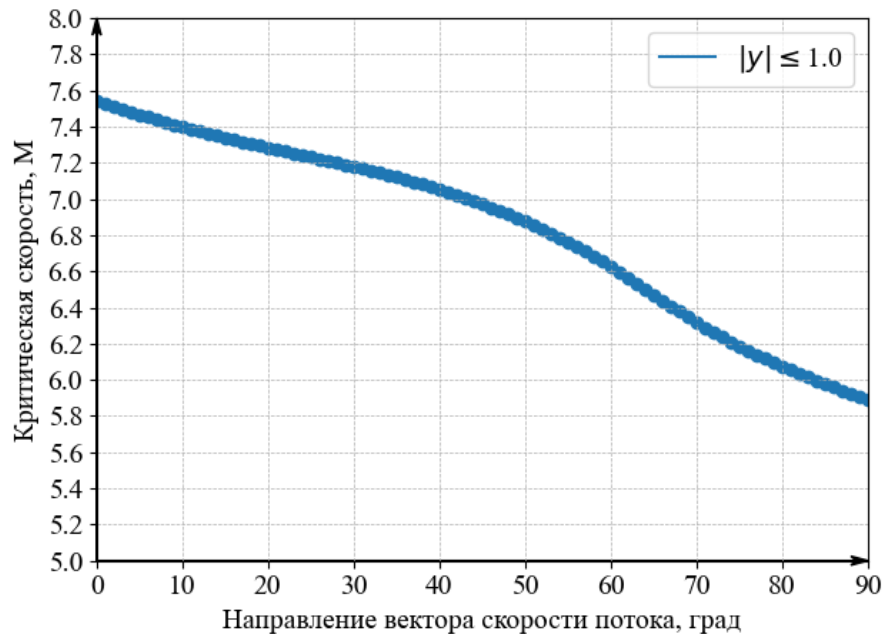


Рисунок 3.3.6 — График критической скорости от направления потока для квадратной пластинки

Из результатов и рисунка видно, что критическая скорость флаттера для квадратной ортотропной пластинки со смешанными граничными условиями при повороте вектора скорости потока от стороны со свободным опиранием до заземленной стороны нелинейно убывает.

Стоит отметить, что результаты на двух различных сетках отличаются незначительно, что свидетельствует об устойчивости решения.

Далее, в таблице 3.3.7 и на рисунке 3.3.7 приведены результаты расчета критической скорости флаттера при изменении $|y|$ от 1 до 2. В нижнем индексе

у значения критической скорости указан номер собственного значения, на котором она достигается. Представленные результаты получены на сетке 19x19.

Таблица 3.3.7 — Результаты расчета при различных направлениях вектора скорости потока

$\frac{\alpha \cdot \pi}{180}$	V_{crit} (номер СЗ)						
	$ y \leq 1$	$ y \leq 1.1$	$ y \leq 1.2$	$ y \leq 1.5$	$ y \leq 1.8$	$ y \leq 1.9$	$ y \leq 2$
0	7.54402 ₍₁₎	7.09535 ₍₁₎	6.75866 ₍₁₎	6.13201 ₍₂₎	5.79775 ₍₂₎	5.72052 ₍₂₎	5.65478 ₍₂₎
1	7.52751 ₍₁₎	7.07951 ₍₁₎	6.74299 ₍₁₎	6.12118 ₍₂₎	5.78649 ₍₂₎	5.70927 ₍₂₎	5.64356 ₍₂₎
2	7.51145 ₍₁₎	7.06341 ₍₁₎	6.72594 ₍₁₎	6.11435 ₍₂₎	5.77841 ₍₂₎	5.70089 ₍₂₎	5.63498 ₍₂₎
3	7.49581 ₍₁₎	7.04705 ₍₁₎	6.70754 ₍₁₎	6.06068 ₍₁₎	5.77361 ₍₂₎	5.69544 ₍₂₎	5.62914 ₍₂₎
4	7.48059 ₍₁₎	7.03044 ₍₁₎	6.68779 ₍₁₎	5.98483 ₍₁₎	5.77225 ₍₂₎	5.69311 ₍₂₎	5.62621 ₍₂₎
5	7.46578 ₍₁₎	7.01356 ₍₁₎	6.66672 ₍₁₎	5.91763 ₍₁₎	5.77464 ₍₂₎	5.69414 ₍₂₎	5.62647 ₍₂₎
6	7.45137 ₍₁₎	6.99642 ₍₁₎	6.64437 ₍₁₎	5.85249 ₍₁₎	5.33492 ₍₁₎	5.25979 ₍₂₎	5.22664 ₍₂₎
7	7.43737 ₍₁₎	6.97899 ₍₁₎	6.62076 ₍₁₎	5.78783 ₍₁₎	5.21204 ₍₁₎	5.08627 ₍₁₎	4.99285 ₍₁₎
8	7.42373 ₍₁₎	6.96128 ₍₁₎	6.59593 ₍₁₎	5.72312 ₍₁₎	5.10645 ₍₁₎	4.96465 ₍₁₎	4.85183 ₍₁₎
9	7.41047 ₍₁₎	6.94327 ₍₁₎	6.56991 ₍₁₎	5.65819 ₍₁₎	5.00866 ₍₁₎	4.85598 ₍₁₎	4.73151 ₍₁₎
10	7.39755 ₍₁₎	6.92493 ₍₁₎	6.54274 ₍₁₎	5.59301 ₍₁₎	4.91554 ₍₁₎	4.75448 ₍₁₎	4.62154 ₍₁₎
11	7.38497 ₍₁₎	6.90627 ₍₁₎	6.51444 ₍₁₎	5.52759 ₍₁₎	4.82569 ₍₁₎	4.65782 ₍₁₎	4.51822 ₍₁₎
12	7.37271 ₍₁₎	6.88726 ₍₁₎	6.48507 ₍₁₎	5.46199 ₍₁₎	4.73841 ₍₁₎	4.56483 ₍₁₎	4.41981 ₍₁₎
13	7.36074 ₍₁₎	6.86788 ₍₁₎	6.45466 ₍₁₎	5.39629 ₍₁₎	4.65328 ₍₁₎	4.47486 ₍₁₎	4.32531 ₍₁₎
14	7.34906 ₍₁₎	6.84813 ₍₁₎	6.42324 ₍₁₎	5.33056 ₍₁₎	4.57011 ₍₁₎	4.38751 ₍₁₎	4.23414 ₍₁₎
15	7.33763 ₍₁₎	6.82798 ₍₁₎	6.39086 ₍₁₎	5.26491 ₍₁₎	4.48874 ₍₁₎	4.30258 ₍₁₎	4.14599 ₍₁₎
16	7.32644 ₍₁₎	6.80741 ₍₁₎	6.35757 ₍₁₎	5.19941 ₍₁₎	4.40912 ₍₁₎	4.21988 ₍₁₎	4.06057 ₍₁₎
17	7.31545 ₍₁₎	6.78641 ₍₁₎	6.32339 ₍₁₎	5.13413 ₍₁₎	4.33119 ₍₁₎	4.13933 ₍₁₎	3.97774 ₍₁₎
18	7.30465 ₍₁₎	6.76495 ₍₁₎	6.28837 ₍₁₎	5.06917 ₍₁₎	4.25493 ₍₁₎	4.06085 ₍₁₎	3.89737 ₍₁₎
19	7.29411 ₍₁₎	6.74304 ₍₁₎	6.25256 ₍₁₎	5.00461 ₍₁₎	4.18033 ₍₁₎	3.98439 ₍₁₎	3.81935 ₍₁₎
20	7.28349 ₍₁₎	6.72064 ₍₁₎	6.21611 ₍₁₎	4.94052 ₍₁₎	4.10738 ₍₁₎	3.90991 ₍₁₎	3.74362 ₍₁₎
21	7.27308 ₍₁₎	6.69774 ₍₁₎	6.17873 ₍₁₎	4.87696 ₍₁₎	4.03608 ₍₁₎	3.83738 ₍₁₎	3.67012 ₍₁₎
22	7.26273 ₍₁₎	6.67434 ₍₁₎	6.14081 ₍₁₎	4.81401 ₍₁₎	3.96643 ₍₁₎	3.76677 ₍₁₎	3.59878 ₍₁₎
23	7.25243 ₍₁₎	6.65041 ₍₁₎	6.10228 ₍₁₎	4.75172 ₍₁₎	3.89842 ₍₁₎	3.69804 ₍₁₎	3.52954 ₍₁₎
24	7.24214 ₍₁₎	6.62597 ₍₁₎	6.06318 ₍₁₎	4.69015 ₍₁₎	3.83205 ₍₁₎	3.63119 ₍₁₎	3.46239 ₍₁₎
25	7.23181 ₍₁₎	6.60099 ₍₁₎	6.02357 ₍₁₎	4.62935 ₍₁₎	3.76731 ₍₁₎	3.56617 ₍₁₎	3.39724 ₍₁₎
26	7.22143 ₍₁₎	6.57548 ₍₁₎	5.98351 ₍₁₎	4.56937 ₍₁₎	3.70418 ₍₁₎	3.50296 ₍₁₎	3.33407 ₍₁₎
27	7.21096 ₍₁₎	6.54943 ₍₁₎	5.94303 ₍₁₎	4.51024 ₍₁₎	3.64266 ₍₁₎	3.44152 ₍₁₎	3.27282 ₍₁₎
28	7.20037 ₍₁₎	6.52285 ₍₁₎	5.90219 ₍₁₎	4.45201 ₍₁₎	3.58274 ₍₁₎	3.38183 ₍₁₎	3.21346 ₍₁₎
29	7.18962 ₍₁₎	6.49575 ₍₁₎	5.86105 ₍₁₎	4.39471 ₍₁₎	3.52439 ₍₁₎	3.32386 ₍₁₎	3.15593 ₍₁₎
30	7.17866 ₍₁₎	6.46812 ₍₁₎	5.81965 ₍₁₎	4.33836 ₍₁₎	3.46761 ₍₁₎	3.26757 ₍₁₎	3.10019 ₍₁₎
31	7.16749 ₍₁₎	6.43998 ₍₁₎	5.77805 ₍₁₎	4.28299 ₍₁₎	3.41235 ₍₁₎	3.21293 ₍₁₎	3.04619 ₍₁₎
32	7.15606 ₍₁₎	6.41135 ₍₁₎	5.73631 ₍₁₎	4.22863 ₍₁₎	3.35861 ₍₁₎	3.15991 ₍₁₎	2.99389 ₍₁₎
33	7.14432 ₍₁₎	6.38225 ₍₁₎	5.69444 ₍₁₎	4.17528 ₍₁₎	3.30636 ₍₁₎	3.10846 ₍₁₎	2.94323 ₍₁₎
34	7.13228 ₍₁₎	6.35268 ₍₁₎	5.65252 ₍₁₎	4.12296 ₍₁₎	3.25556 ₍₁₎	3.05855 ₍₁₎	2.89418 ₍₁₎
35	7.11986 ₍₁₎	6.32269 ₍₁₎	5.61061 ₍₁₎	4.07169 ₍₁₎	3.20621 ₍₁₎	3.01015 ₍₁₎	2.84671 ₍₁₎
36	7.10707 ₍₁₎	6.29228 ₍₁₎	5.56872 ₍₁₎	4.02147 ₍₁₎	3.15825 ₍₁₎	2.96322 ₍₁₎	2.80072 ₍₁₎

Продолжение таблицы 3.3.7

37	7.09387 ₍₁₎	6.26149 ₍₁₎	5.52692 ₍₁₎	3.97229 ₍₁₎	3.11167 ₍₁₎	2.91771 ₍₁₎	2.75621 ₍₁₎
38	7.08023 ₍₁₎	6.23034 ₍₁₎	5.48525 ₍₁₎	3.92417 ₍₁₎	3.06643 ₍₁₎	2.87359 ₍₁₎	2.71314 ₍₁₎
39	7.06612 ₍₁₎	6.19887 ₍₁₎	5.44374 ₍₁₎	3.87711 ₍₁₎	3.02252 ₍₁₎	2.83083 ₍₁₎	2.67145 ₍₁₎
40	7.05152 ₍₁₎	6.16711 ₍₁₎	5.40244 ₍₁₎	3.83107 ₍₁₎	2.97988 ₍₁₎	2.78938 ₍₁₎	2.63109 ₍₁₎
41	7.03643 ₍₁₎	6.13506 ₍₁₎	5.36137 ₍₁₎	3.78609 ₍₁₎	2.93849 ₍₁₎	2.74922 ₍₁₎	2.59204 ₍₁₎
42	7.02081 ₍₁₎	6.10278 ₍₁₎	5.32058 ₍₁₎	3.74213 ₍₁₎	2.89832 ₍₁₎	2.71029 ₍₁₎	2.55424 ₍₁₎
43	7.00462 ₍₁₎	6.07029 ₍₁₎	5.28008 ₍₁₎	3.69921 ₍₁₎	2.85933 ₍₁₎	2.67256 ₍₁₎	2.51765 ₍₁₎
44	6.98788 ₍₁₎	6.03762 ₍₁₎	5.23991 ₍₁₎	3.65727 ₍₁₎	2.82151 ₍₁₎	2.63601 ₍₁₎	2.48224 ₍₁₎
45	6.97057 ₍₁₎	6.00481 ₍₁₎	5.20008 ₍₁₎	3.61633 ₍₁₎	2.78478 ₍₁₎	2.60057 ₍₁₎	2.44795 ₍₁₎
46	6.95266 ₍₁₎	5.97184 ₍₁₎	5.16062 ₍₁₎	3.57636 ₍₁₎	2.74914 ₍₁₎	2.56622 ₍₁₎	2.41476 ₍₁₎
47	6.93413 ₍₁₎	5.93876 ₍₁₎	5.12152 ₍₁₎	3.53735 ₍₁₎	2.71454 ₍₁₎	2.53293 ₍₁₎	2.38262 ₍₁₎
48	6.91498 ₍₁₎	5.90559 ₍₁₎	5.08281 ₍₁₎	3.49926 ₍₁₎	2.68095 ₍₁₎	2.50064 ₍₁₎	2.35148 ₍₁₎
49	6.89518 ₍₁₎	5.87233 ₍₁₎	5.04449 ₍₁₎	3.46205 ₍₁₎	2.64833 ₍₁₎	2.46932 ₍₁₎	2.32131 ₍₁₎
50	6.87469 ₍₁₎	5.83897 ₍₁₎	5.00654 ₍₁₎	3.42573 ₍₁₎	2.61665 ₍₁₎	2.43893 ₍₁₎	2.29207 ₍₁₎
51	6.85352 ₍₁₎	5.80554 ₍₁₎	4.96896 ₍₁₎	3.39023 ₍₁₎	2.58584 ₍₁₎	2.40943 ₍₁₎	2.26371 ₍₁₎
52	6.83161 ₍₁₎	5.77201 ₍₁₎	4.93172 ₍₁₎	3.35552 ₍₁₎	2.55588 ₍₁₎	2.38077 ₍₁₎	2.23617 ₍₁₎
53	6.80892 ₍₁₎	5.73836 ₍₁₎	4.89481 ₍₁₎	3.32157 ₍₁₎	2.52673 ₍₁₎	2.35291 ₍₁₎	2.20944 ₍₁₎
54	6.78543 ₍₁₎	5.70457 ₍₁₎	4.85821 ₍₁₎	3.28834 ₍₁₎	2.49833 ₍₁₎	2.32579 ₍₁₎	2.18345 ₍₁₎
55	6.76109 ₍₁₎	5.67063 ₍₁₎	4.82184 ₍₁₎	3.25576 ₍₁₎	2.47063 ₍₁₎	2.29939 ₍₁₎	2.15816 ₍₁₎
56	6.73586 ₍₁₎	5.63649 ₍₁₎	4.78572 ₍₁₎	3.22381 ₍₁₎	2.44361 ₍₁₎	2.27364 ₍₁₎	2.13353 ₍₁₎
57	6.70969 ₍₁₎	5.60213 ₍₁₎	4.74979 ₍₁₎	3.19244 ₍₁₎	2.41719 ₍₁₎	2.24851 ₍₁₎	2.10951 ₍₁₎
58	6.68257 ₍₁₎	5.56754 ₍₁₎	4.71403 ₍₁₎	3.16161 ₍₁₎	2.39136 ₍₁₎	2.22397 ₍₁₎	2.08607 ₍₁₎
59	6.65451 ₍₁₎	5.53271 ₍₁₎	4.67841 ₍₁₎	3.13128 ₍₁₎	2.36609 ₍₁₎	2.19997 ₍₁₎	2.06317 ₍₁₎
60	6.62548 ₍₁₎	5.49765 ₍₁₎	4.64295 ₍₁₎	3.10145 ₍₁₎	2.34135 ₍₁₎	2.17651 ₍₁₎	2.04081 ₍₁₎
61	6.59561 ₍₁₎	5.46241 ₍₁₎	4.60768 ₍₁₎	3.07213 ₍₁₎	2.31713 ₍₁₎	2.15356 ₍₁₎	2.01894 ₍₁₎
62	6.56496 ₍₁₎	5.42709 ₍₁₎	4.57265 ₍₁₎	3.04333 ₍₁₎	2.29346 ₍₁₎	2.13115 ₍₁₎	1.99762 ₍₁₎
63	6.53372 ₍₁₎	5.39181 ₍₁₎	4.53796 ₍₁₎	3.01511 ₍₁₎	2.27034 ₍₁₎	2.10931 ₍₁₎	1.97683 ₍₁₎
64	6.50209 ₍₁₎	5.35673 ₍₁₎	4.50375 ₍₁₎	2.98752 ₍₁₎	2.24785 ₍₁₎	2.08804 ₍₁₎	1.95663 ₍₁₎
65	6.47031 ₍₁₎	5.32203 ₍₁₎	4.47014 ₍₁₎	2.96066 ₍₁₎	2.22601 ₍₁₎	2.06742 ₍₁₎	1.93706 ₍₁₎
66	6.43863 ₍₁₎	5.28791 ₍₁₎	4.43731 ₍₁₎	2.93461 ₍₁₎	2.20491 ₍₁₎	2.04751 ₍₁₎	1.91815 ₍₁₎
67	6.40729 ₍₁₎	5.25454 ₍₁₎	4.40537 ₍₁₎	2.90943 ₍₁₎	2.18456 ₍₁₎	2.02834 ₍₁₎	1.89996 ₍₁₎
68	6.37651 ₍₁₎	5.22211 ₍₁₎	4.37447 ₍₁₎	2.88523 ₍₁₎	2.16506 ₍₁₎	2.00995 ₍₁₎	1.88253 ₍₁₎
69	6.34646 ₍₁₎	5.19073 ₍₁₎	4.34471 ₍₁₎	2.86203 ₍₁₎	2.14641 ₍₁₎	1.99238 ₍₁₎	1.86588 ₍₁₎
70	6.31728 ₍₁₎	5.16049 ₍₁₎	4.31613 ₍₁₎	2.83987 ₍₁₎	2.12862 ₍₁₎	1.97564 ₍₁₎	1.85004 ₍₁₎
71	6.28904 ₍₁₎	5.13145 ₍₁₎	4.28877 ₍₁₎	2.81875 ₍₁₎	2.11171 ₍₁₎	1.95973 ₍₁₎	1.83497 ₍₁₎
72	6.26176 ₍₁₎	5.10361 ₍₁₎	4.26264 ₍₁₎	2.79866 ₍₁₎	2.09566 ₍₁₎	1.94464 ₍₁₎	1.82069 ₍₁₎
73	6.23544 ₍₁₎	5.07694 ₍₁₎	4.23769 ₍₁₎	2.77957 ₍₁₎	2.08044 ₍₁₎	1.93033 ₍₁₎	1.80716 ₍₁₎
74	6.21004 ₍₁₎	5.05139 ₍₁₎	4.21389 ₍₁₎	2.76145 ₍₁₎	2.06602 ₍₁₎	1.91679 ₍₁₎	1.79435 ₍₁₎
75	6.18551 ₍₁₎	5.02693 ₍₁₎	4.19118 ₍₁₎	2.74425 ₍₁₎	2.05236 ₍₁₎	1.90396 ₍₁₎	1.78223 ₍₁₎
76	6.16178 ₍₁₎	5.00348 ₍₁₎	4.16951 ₍₁₎	2.72791 ₍₁₎	2.03943 ₍₁₎	1.89182 ₍₁₎	1.77077 ₍₁₎
77	6.13881 ₍₁₎	4.98099 ₍₁₎	4.14881 ₍₁₎	2.71241 ₍₁₎	2.02718 ₍₁₎	1.88034 ₍₁₎	1.75993 ₍₁₎
78	6.11652 ₍₁₎	4.95939 ₍₁₎	4.12903 ₍₁₎	2.69768 ₍₁₎	2.01559 ₍₁₎	1.86948 ₍₁₎	1.74968 ₍₁₎
79	6.09487 ₍₁₎	4.93864 ₍₁₎	4.11013 ₍₁₎	2.68371 ₍₁₎	2.00461 ₍₁₎	1.85921 ₍₁₎	1.74001 ₍₁₎
80	6.07381 ₍₁₎	4.91869 ₍₁₎	4.09205 ₍₁₎	2.67044 ₍₁₎	1.99423 ₍₁₎	1.84949 ₍₁₎	1.73085 ₍₁₎
81	6.05331 ₍₁₎	4.89949 ₍₁₎	4.07476 ₍₁₎	2.65785 ₍₁₎	1.98442 ₍₁₎	1.84032 ₍₁₎	1.72222 ₍₁₎
82	6.03331 ₍₁₎	4.88111 ₍₁₎	4.05823 ₍₁₎	2.64591 ₍₁₎	1.97514 ₍₁₎	1.83166 ₍₁₎	1.71407 ₍₁₎
83	6.01379 ₍₁₎	4.86322 ₍₁₎	4.04242 ₍₁₎	2.63461 ₍₁₎	1.96641 ₍₁₎	1.82351 ₍₁₎	1.70641 ₍₁₎
84	5.99474 ₍₁₎	4.84609 ₍₁₎	4.02731 ₍₁₎	2.62391 ₍₁₎	1.95817 ₍₁₎	1.81584 ₍₁₎	1.69922 ₍₁₎
85	5.97613 ₍₁₎	4.82959 ₍₁₎	4.01288 ₍₁₎	2.61379 ₍₁₎	1.95043 ₍₁₎	1.80864 ₍₁₎	1.69247 ₍₁₎

Продолжение таблицы 3.3.7

86	5.95795 ₍₁₎	4.81372 ₍₁₎	3.99911 ₍₁₎	2.60427 ₍₁₎	1.94318 ₍₁₎	1.80189 ₍₁₎	1.68617 ₍₁₎
87	5.94017 ₍₁₎	4.79846 ₍₁₎	3.98597 ₍₁₎	2.59531 ₍₁₎	1.93641 ₍₁₎	1.79561 ₍₁₎	1.68029 ₍₁₎
88	5.92281 ₍₁₎	4.78378 ₍₁₎	3.97346 ₍₁₎	2.58689 ₍₁₎	1.93008 ₍₁₎	1.78975 ₍₁₎	1.67483 ₍₁₎
89	5.90581 ₍₁₎	4.76971 ₍₁₎	3.96158 ₍₁₎	2.57901 ₍₁₎	1.92421 ₍₁₎	1.78434 ₍₁₎	1.66978 ₍₁₎
90	5.88921 ₍₁₎	4.75618 ₍₁₎	3.95031 ₍₁₎	2.57166 ₍₁₎	1.91881 ₍₁₎	1.77935 ₍₁₎	1.66515 ₍₁₎

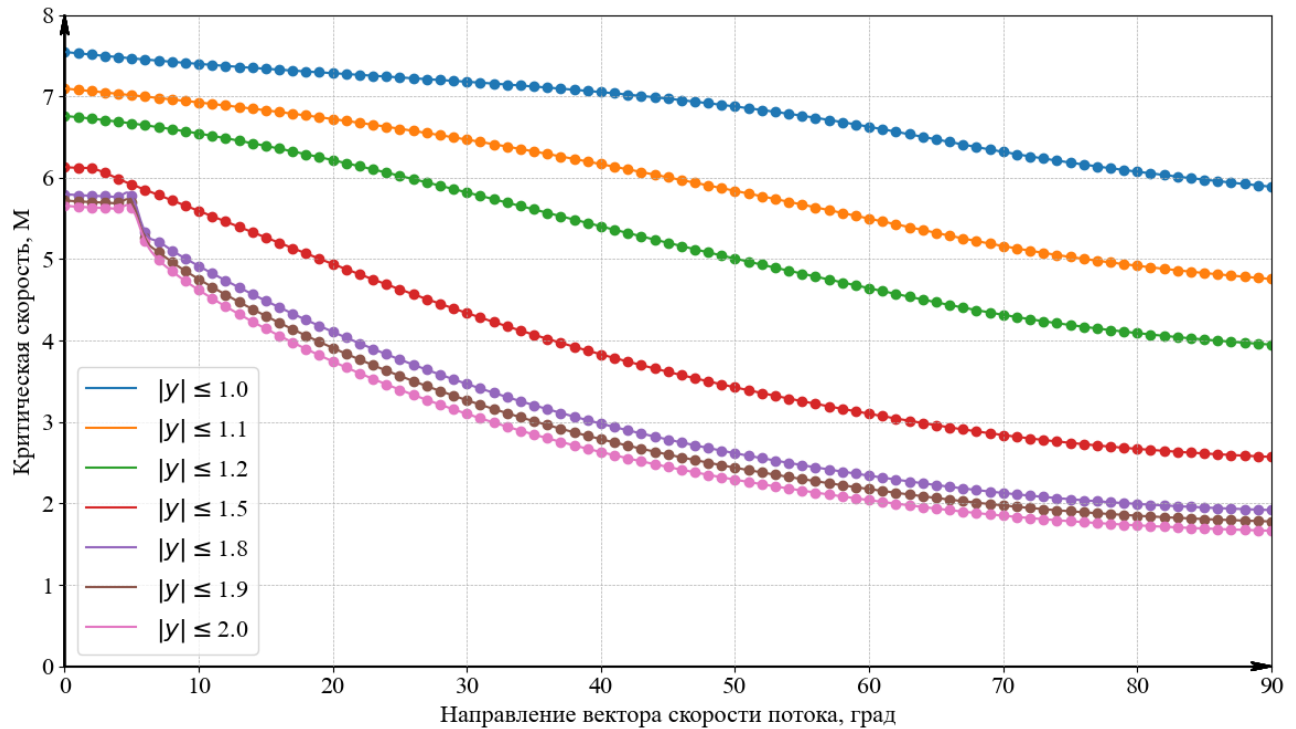


Рисунок 3.3.7 — Графики критической скорости от направления потока при различных $|y|$

Из представленных результатов для ортотропной квадратной и удлиненной пластинок могут быть сделаны следующие выводы:

— критическая скорость флаттера при повороте вектора скорости потока от направления со свободным краем пластинки к направлению с заземленным краем нелинейно убывает, с увеличением длины пластинки убывание становится немонотонным, при соотношении сторон пластинки более 1.5, при изменении направления потока в области до 10 градусов ($|\alpha| \leq 10\pi/180$), наблюдается небольшой рост критической скорости флаттера, сопровождающийся переходом номера собственного значения, на котором она достигается, от первого к более высоким. При дальнейшем изменении угла поворота критическая скорость флаттера падает;

- увеличение размера пластинки, в направлении, перпендикулярном потоку, сопровождается уменьшением критической скорости;
- для удлиненной пластинки критическая скорость флаттера может достигаться не обязательно на первом собственном значении.

Эффект роста критической скорости флаттера в области до 10 градусов угла поворота вектора скорости потока по характеру совпадает с выявленным ранее для изотропной пластинки. Образование этой особенности для ортотропной пластинки представлено на рисунке 3.3.8.

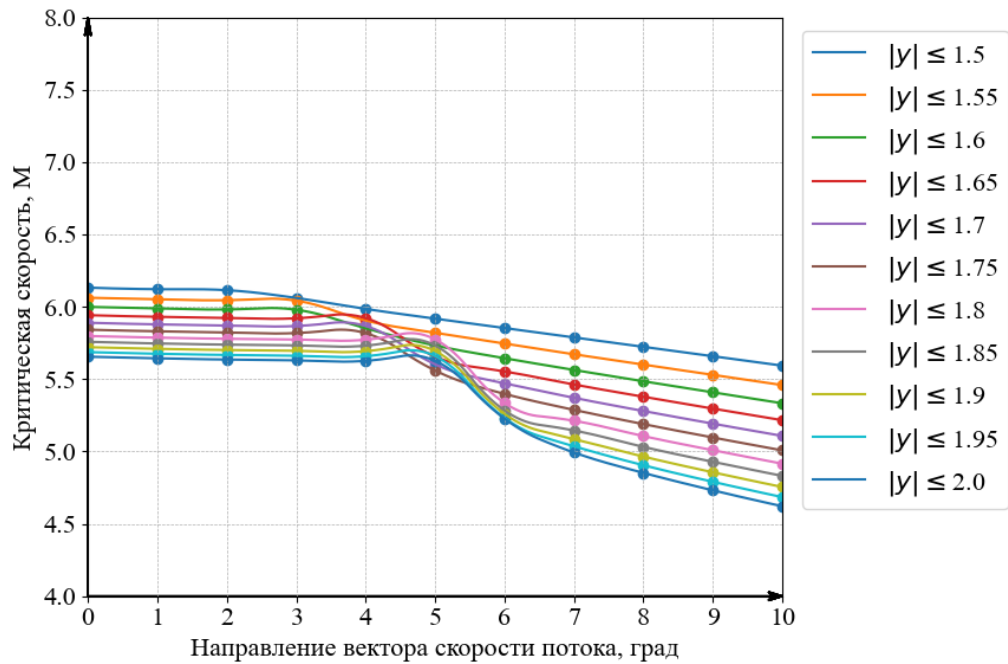


Рисунок 3.3.8 — Графики критической скорости от направления потока при различных $|y|$

На рисунках 3.3.9, 3.3.10 представлены собственные формы $\text{Re}(\varphi)$ соответствующие критической скорости флаттера для двух направлений вектора скорости потока.

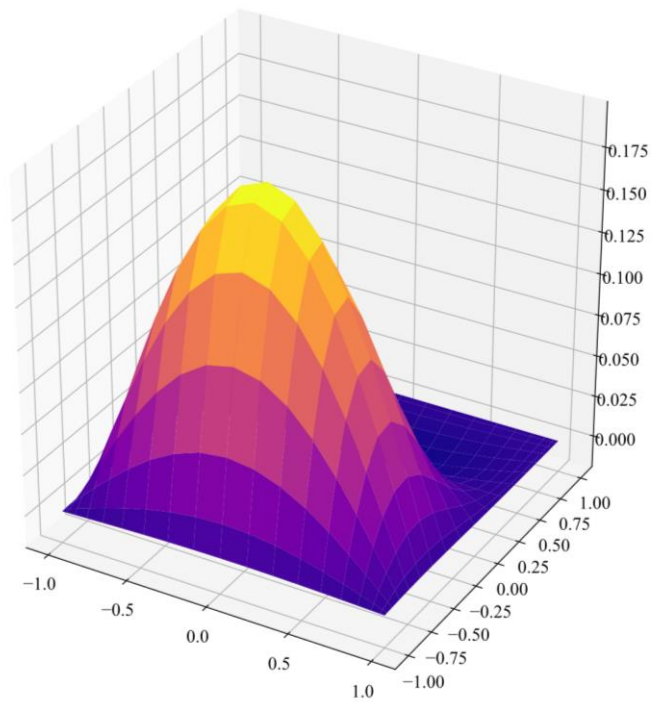


Рисунок 3.3.9 — Собственная форма $\text{Re}(\varphi)$, $\alpha = \pi/2$

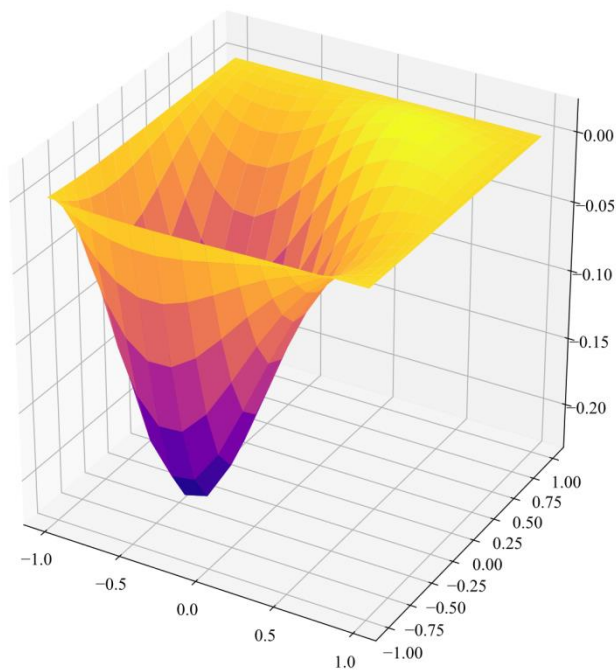


Рисунок 3.3.10 — Собственная форма $\text{Re}(\varphi)$, $\alpha = \pi/4$

На рисунках 3.3.11, 3.3.12 представлены собственные формы $\text{Re}(\varphi)$ соответствующие критической скорости флаттера для двух направлений вектора скорости потока.

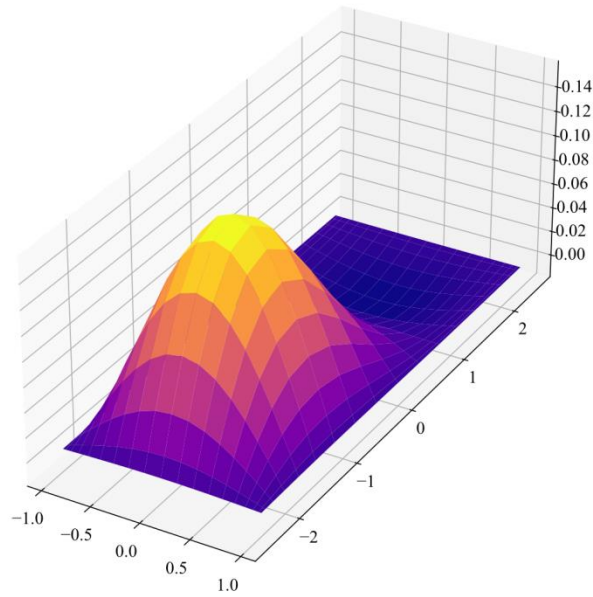


Рисунок 3.3.11 — Собственная форма $\text{Re}(\varphi)$, $\alpha = \pi/2$

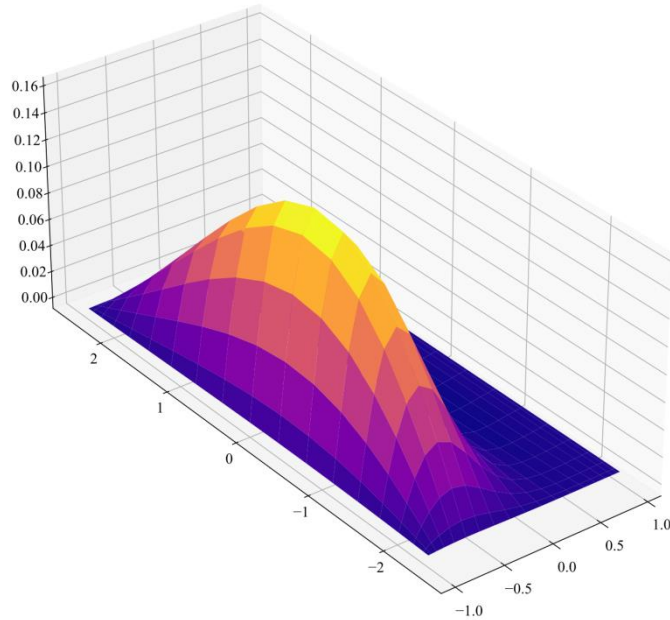


Рисунок 3.3.12 — Собственная форма $\text{Re}(\varphi)$, $\alpha = \pi/4$

Исследование зависимости критической скорости флаттера от толщины пластинки

Дальнейшее моделирование выполнялось для двух пластинок для двух направлений вектора скорости потока при изменении h . Результаты представлены в таблицах 3.3.8 и 3.3.9. В скобках указано собственное значение, соответствующее критической скорости флаттера.

Таблица 3.3.8 — Критическая скорость при изменении толщины пластинки,
 $|x| \leq 1, |y| \leq 1$

h	0		h	$\pi/4$	
	9x9	19x19		9x9	19x19
0.0184	7.188 (1)	7.18812 (1)	0.0184	7.377 (1)	7.37730 (1)
0.0185	7.305 (1)	7.30547 (1)	0.0185	7.497 (1)	7.49773 (1)
0.0186	7.424 (1)	7.42410 (1)	0.0186	7.619 (1)	7.61947 (1)
0.0187	7.544 (1)	7.54401 (1)	0.0187	7.742 (1)	7.74254 (1)

Таблица 3.3.9 — Критическая скорость при изменении толщины пластинки,
 $|x| \leq 1, |y| \leq 2$

h	0		h	$\pi/4$	
	9x9	19x19		9x9	19x19
0.0184	5.388 (2)	5.38809 (2)	0.0184	2.586 (1)	2.58630 (1)
0.0185	5.476 (2)	5.47603 (2)	0.0185	2.626 (1)	2.62616 (1)
0.0186	5.564 (2)	5.56491 (2)	0.0186	2.666 (1)	2.66648 (1)
0.0187	5.654 (2)	5.65477 (2)	0.0187	2.707 (1)	2.70724 (1)

Полученные результаты показывают, что критическая скорость флаттера возрастает с увеличением толщины пластинки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Проанализировано современное состояние проблемы флаттера пластинок.

2. Сформулирована постановка задачи об аэроупругих колебаниях прямоугольной ортотропной пластинки, учитывающая направление вектора скорости набегающего потока в плоскости пластинки, со смешанными граничными условиями, когда два противоположных края пластинки защемлены, а два других края свободно оперты. Также рассмотрены защемленная по контуру и изотропная пластинки.

3. Математическая модель флаттера пластинки основана на теории тонких пластинок Кирхгофа, поршневой теории Ильюшина для давления аэродинамического воздействия потока с колеблющейся пластинкой в постановке задачи А. А. Ильюшина, И. А. Кийко, учитывающей направление вектора скорости набегающего потока в плоскости пластинки. Критическая скорость флаттера определяется из решения несамосопряженной задачи на собственные значения для эллиптического уравнения в частных производных. Решение ищется в виде комплексной функции.

4. Решение задачи на собственные значения получается путем применения дискретизации с подбором коэффициентов, удовлетворяющих рассматриваемым граничным условиям, на неравномерной сетке по узлам, расположенным в нулях, получаемых из нулей многочленов Чебышева линейным преобразованием.

7. Разработан численный алгоритм без насыщения для решения задачи о колебаниях ортотропной защемленной пластинки в постановке, учитывающей направление вектора скорости потока в плоскости пластинки.

8. Проведено численное исследование зависимости критической скорости флаттера при изменении направления потока от направления с большей жесткостью пластинки к направлению с меньшей жесткостью пластинки

и исследование изменения зависимости критической скорости флаттера от направления вектора скорости потока при изменении длины пластинки вдоль направления с меньшей жесткостью для заземленной ортотропной пластинки. Проведено сравнение получаемых результатов по представленному алгоритму с результатами других авторов для квадратной изотропной заземленной пластинки и показано, что результаты удовлетворительно совпадают.

9. Разработан численный алгоритм без насыщения для решения задачи о колебаниях изотропной и ортотропной пластинок со смешанными граничными условиями (типа SCSC) в постановке, учитывающей направление вектора скорости потока в плоскости пластинки.

10. Проведено исследование зависимости критической скорости флаттера при изменении направления вектора скорости потока от стороны со свободным опиранием до заземленной стороны при изменении длины пластинки вдоль направления со свободным опиранием и установлено, что:

— для квадратной изотропной пластинки со смешанными граничными условиями при повороте вектора скорости потока от стороны со свободным опиранием до заземленной стороны критическая скорость флаттера немонотонно убывает — сначала возрастает, при угле до 45 градусов, а затем убывает до значения, меньшего изначального;

— для квадратной ортотропной пластинки со смешанными граничными условиями критическая скорость флаттера при повороте вектора скорости потока от стороны со свободным опиранием и большей жесткостью до заземленной стороны с меньшей жесткостью нелинейно убывает;

— для удлиненной изотропной и ортотропных пластинок со смешанными граничными условиями (тип SCSC), при соотношении сторон более 1.5, при изменении направления потока в области до 10 градусов ($|\alpha| \leq 10\pi / 180$) наблюдается небольшой рост критической скорости флаттера, сопровождающийся переходом номера собственного значения, на котором она достигается, от первого к более высоким. При дальнейшем изменении угла поворота критическая скорость флаттера падает.

ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

В настоящей работе применяются следующие сокращения и обозначения.

p_0 — давление в невозмущенном потоке

c_0 — скорость звука в невозмущенном потоке

k — показатель политропы газа;

E — модуль Юнга;

ν — коэффициент Пуассона;

h' — толщина пластинки;

\vec{V}' — вектор набегающего потока;

ρ' — плотность материала пластинки.

D — безразмерная цилиндрическая жесткость пластинки

D' — цилиндрическая жесткость пластинки

h — толщина пластинки, отнесенная к a ;

ω — безразмерная частота;

λ — безразмерное собственное значение;

φ — безразмерное амплитудное значение прогиба.

ρ — безразмерная плотность материала пластинки

$T_n(z)$ — многочлены Чебышева.

c_2 — скорость звука в пластине, отнесенная к c_0 (безразмерная скорость звука в пластине).

v_{crit} — критическая скорость флаттера

E_x и E_y — модули Юнга вдоль координатных осей;

G_{xy} — модуль сдвига;

ν_x, ν_y — коэффициенты Пуассона вдоль координатных осей;

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ

1. Алгазин С. Д., Селиванов И. А. Собственные колебания прямоугольной пластины со смешанными краевыми условиями (SCSC). 2020. 20 с. (Препринт / ИПРИМ РАН; Серия: Численные алгоритмы классической матфизики; № 1187). ISBN: 978-5-91741-251-1.
2. Алгазин С. Д., Селиванов И. А. Колебания ортотропной защемленной прямоугольной пластины. М.: Научный вестник ГосНИИ ГА, 2020. Т. 32. С. 140–148.
3. Алгазин С. Д., Селиванов И. А. Численное исследование флаттера пластины в сверхзвуковом потоке газа. 2021. 28 с. (Препринт / ИПРИМ РАН; Серия: Численные алгоритмы классической матфизики; № 1194). ISBN: 978-5-91741-272-6.
4. Алгазин С. Д., Селиванов И. А. Задача о собственных колебаниях прямоугольной пластины со смешанными краевыми условиями // ПМТФ. 2021. Т. 62. Вып. 2(366). С. 70–76.
5. Селиванов И. А., Алгазин С. Д. Флаттер пластины со смешанными граничными условиями / Авиация и космонавтика: Тезисы 20-ой Международной конференции. 22–26 ноября 2021. М.: Издательство Перо, 2021. С. 460–461
6. Алгазин С. Д., Селиванов И. А. Свободные колебания ортотропной конической оболочки. М.: Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 2022. № 5. С. 39–44. EDN MCUIKR.
7. Алгазин С. Д., Селиванов И. А. Задача о флаттере пластины при смешанных граничных условиях // ПМТФ. 2022. Т. 63. № 5(375). С. 160–167. DOI 10.15372/PMTF20220516

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. NASA/Marshall Space Flight Center. Third Stage Fact Sheet // Saturn V News Reference. 1968.
2. Исаулова Т. Н. Устойчивость консольно заземленной неоднородной пластинки в сверхзвуковом потоке газа: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. Тульский гос. университет, Тула, 2009. 124 с.
3. Garrick I. E., Reed W. H. Historical Development of Aircraft Flutter // Journal of Aircraft. 1981. V. 18. I. 11. P. 897–912.
4. Lall T. R. Interstage Adapter Panel Flutter on Atlas-Centaur AC-2, AC-3, and AC-4 Vehicles // NASA TM-X-1179. 1965.
5. Nichols J. J. Saturn V, S-IVB Panel Flutter Qualification Test // NASA TN-D-5439. 1969.
6. Bohon H. L. Panel Flutter Tests on Full-Scale X-15 Lower Vertical Stabilizer at Mach Number of 3.0 // NASA TN-D-1385. 1962.
7. Dowell E. H. Panel flutter // NASA Aeroelasticity Handbook. 2006. V. 2: Design Guides. P. 19.1–19.23.
8. Авиационные правила. Часть 23. Нормы летной годности гражданских легких самолетов. 2014. URL: <https://favt.gov.ru> (дата обращения: 04.09.2022).
9. Авиационные правила. Часть 25. Нормы летной годности самолетов транспортной категории. 2015. URL: <https://favt.gov.ru> (дата обращения 04.09.2022).
10. Приказ Министерства транспорта Российской Федерации от 17.06.2019 № 184 «Об утверждении Федеральных авиационных правил «Сертификация авиационной техники, организаций разработчиков и изготовителей. Часть 21». 2019. 84 с.
11. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: ГИФМЛ, 1961. 339 с.
12. Мовчан А. А. Поведение комплексных собственных значений в задаче о флаттере панели // Инж. сб. 1960. Вып. 27. С. 70–76.

13. Мовчан А. А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 2. С. 231–243.
14. Ильюшин А. А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 6. С. 733–755.
15. Алгазин С. Д., Кийко И. А. Флаттер пластин и оболочек. М.: ЛЕНАНД, 2017. 264 с.
16. Мовчан А. А. Устойчивость лопатки движущейся в газе // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 5. С. 700–706.
17. Мовчан А. А. Об устойчивости панели, движущейся в газе // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 2. С. 231–243.
18. Болотин В. В. Колебания и устойчивость упругой цилиндрической оболочки в потоке сжимаемой жидкости // Инженерный сб. 1956. Т. 24. С. 3–16.
19. Болотин В. В. О критических скоростях в нелинейной теории аэроупругости // Научн. докл. высшей школы. 1958. № 3.
20. Болотин В. В., Гаврилов О. В., Макаров Б. П., Швейко О. Ю. Нелинейные задачи устойчивости плоских панелей при больших сверхзвуковых скоростях. // Изв. АН СССР. 1959. № 3.
21. Болотин В. В. Нелинейный флаттер пластин и оболочек // Инженерный сб. 1960. Т. 28. С. 55–75.
22. Багдасарян Г. Е. Об устойчивости упругих пластин в потоке проводящего газа при наличии магнитного поля // Изв. АН АрмССР. Механика. 1975. Т. 28. № 4. С. 27–39.
23. Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Колебания и устойчивость цилиндрической оболочки в потоке проводящего газа при наличии магнитного поля. Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. М.: Наука, 1966. С. 120–125.
24. Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Флаттер цилиндрической оболочки в потоке сжимаемой проводящей жидкости в присутствии магнитного поля // Инженерный ж. Мех. твёрд. тела. 1966. № 6. С. 52–56.

25. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
26. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости. М.: Наука, 1976. 416 с.
27. Вольмир А. С., Медведева С. В. Исследование флаттера цилиндрической панели в сверхзвуковом потоке газа // Докл. АН СССР. 1972. Т. 207. № 4. С. 811–813.
28. Вольмир А. С., Понамарёв А. Т. Аэротермоупругость пластинок и цилиндрических панелей при переходном режиме в потоке газа // Изв. АН АрмССР. Механика. 1975. Т. 28. № 5. С. 57–66.
29. Вольмир А. С., Скурлатов Э. Д. Флаттер оболочек в кратковременном потоке газа // В сб. Теория пластин и оболочек. М.: Наука. 1971. С. 29–33.
30. Ильюшин А. А., Кийко И. А. Новая постановка задачи о флаттере полой оболочки // Прикл. матем. и механ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 167–171.
31. Ильюшин А.А., Кийко И. А. Колебания прямоугольной пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1994. № 4. С. 40–44.
32. Ильюшин А. А., Кийко И. А. Закон плоских сечений в сверхзвуковой аэродинамике и проблема панельного флаттера // Изв. АН. МТТ. 1995. № 6. С. 138–142.
33. Кийко И. А. Флаттер вязкоупругой пластины // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 1. С. 172–175.
34. Мовчан А. А. Об одном критерии по Ляпунову в задаче о сверхзвуковом флаттере прямоугольных панелей // В сб. Упругость и неупругость. М.: Моск. ун-т. 1971. Вып. 1. С. 261.
35. Огибалов П. М., Колтунов М. А. Оболочки и пластины. М.: Моск. ун-т. 1969. 695 с.
36. Огибалов П. М. Вопросы динамики и устойчивости оболочек. Изд-во МГУ, 1963, 419 с.

37. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука. 1964. 336 с.
38. Фершинг Г. Основы аэроупругости. М.: Машиностроение, 1984, 600 с.
39. Фын Я.Ц. Введение в теорию аэроупругости / Перевод с англ. под ред. Э. И. Григолюка. М.: Гос. изд. физ-мат лит., 1959. 523 с.
40. Ashley H. Aeroelasticity // *Appl. Mech. Revs.* 1970. V. 23. № 2. P. 119–129.
41. Ashley H., Zartarian G. Piston theory — a new aerodynamic tool for the aeroelastician // *J. Aeronaut. Sci.* 1956. V. 23. № 12. P. 1109 – 1118.
42. Dowell E. H. Nonlinear oscillations of fluttering plate // *AIAA Journal.* 1966. V. 4. N 7. P. 1267–1275.
43. Dowell E. H. Flutter infinitely long plates and shells. Part I. Plate. Part II. Cylindrical shell // *AIAA Journal.* 1966. V. 4. N 8. P. 1370–1377.
44. Dowell E. H. On the flutter of multilay panels at low supersonic speeds // *AIAA Journal.* 1967. V. 5. № 5. P. 1032–1033.
45. Dowell E. H. Nonlinear oscillations of a fluttering plate II // *AIAA Journal.* 1967. V. 5. № 10. P. 1856–1862.
46. Dowell E. H. Generalized aerodynamic forces on a flexible plate undergoing transient motion // *Quart. Appl. Math.*, 1967. V. 24. № 4. P. 331–338.
47. Dowell E. H. Theoretical-experimental correlation plate flutter boundaries at low supersonic speeds // *AIAA Journal.* 1968. V. 6. № 9. P. 1810–1811.
48. Sawyer J. W. Flutter and buckling of general laminated plates // *J. Aircraft,* 1977. V. 14. № 4. P. 387–393.
49. Sawyer J. W. Flutter and bucking of general laminated plates // *Proc. AIAA/ASME/SAE 17th Stuct., Struct. Dyn. and Mater Conf. King Prussia, Pa,* 1976. V. 51. P. 105–112.
50. Olson M. D. Finite elements applied to panel flutter // *AIAA Journal,* 1967. V. 5. № 12. P. 2267–2270.
51. Holt M., Lee T. M. First-order frequency effects in supersonic panel of finite cylindrical shells // *Trans. ASME,* 1973. E40. № 2. P. 464–470.

52. Holt M., Strack S. L. Supersonic panel flutter of a cylindrical shell of finite length // J. Aeronaut. Sci., 1961. V. 28. № 3. P. 197–208.

53. Веденеев В. В. Связанный флаттер упругой пластины в потоке газа с пограничным слоем // Труды МИАН. 2013. Т. 281. С. 149–161.

54. Веденеев В. В. Одномодовый флаттер пластины с учётом пограничного слоя // Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 3. С. 147–160.

55. Веденеев В. В. Флаттер пластины в потоке газа при низких сверхзвуковых скоростях // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4(3). С. 680–682.

56. Веденеев В. В. Численное исследование сверхзвукового флаттера пластины с использованием точной аэродинамической теории // Изв. РАН. МЖГ. 2009. № 2. С. 169–178.

57. Веденеев В. В., Гувернюк С. В., Зубков А. Ф., Колотников М. Е. Экспериментальное наблюдение одномодового панельного флаттера в сверхзвуковом потоке газа // ДАН. 2009. Т. 427. № 6. С. 768–770.

58. Веденеев В. В. Исследование одномодового флаттера прямоугольной пластины в случае переменного усиления собственной моды вдоль пластины // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 4. С. 163–174.

59. Папков С. О. Флаттер защемленной ортотропной прямоугольной пластины // Вычислительная механика сплошных сред. 2017. Т. 10. Вып. 4. С. 361–374.

60. Белубекян М. В., Мартиросян С. Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край // Известия национальной академии наук Армении. 2014. Т. 67. Вып. 2. С. 14–44.

61. Adler M. Einfluss turbulenter Grenzschichten auf die aeroelastische Stabilität dünnwandiger Schalen : zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Dissertation / Adler Marko; Hamburg, 2020. 190 p.

62. Eisenberger M., Deutsch A. Solution of thin rectangular plate vibrations for all combinations of boundary conditions // *Journal of Sound and Vibration*. 2019. V. 452. P. 1–12.

63. *Аэроупругость* // под ред. П. Г. Карклэ. М.: Инновационное машиностроение, 2019. 652 с.

64. Bohon H.L., Flutter of flat rectangular orthotropic panels with biaxial loading and arbitrary flow direction // *NASA TN D-1949*, 1963. 34 pp.

65. Bismarck-Nasr M.N. Finite element analysis of aeroelasticity of plates and shells // *Appl. Mech. Rev.* 1992. V. 42, № 12. P. 461–482. DOI: 10.1115/1.3119783.

66. Durvasula S. Flutter of clamped skew panels with mid-plane forces in supersonic flow // *Journal of the Indian institute of science*. 1970. V.52, №4. P. 192–208.

67. Sander, G., Bon, C., & Geradin, M. Finite element analysis of Supersonic panel flutter. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1973. 7(3). P. 379–394. doi:10.1002/nme.1620070313.

68. Abdel-Motaglay K. , Chen R., Mei C. Nonlinear flutter of composite panels under yawed supersonic flow using finite elements // *AIAA Journal*. 1999. V. 37. № 9. 8 pp.

69. Mei C., Abdel-Motagaly K., Chen R. Review of nonlinear panel flutter at supersonic and hypersonic speeds // *ASME Reprint AMR278 Appl. Mech. Rev.*, 1999. V. 52, № 10. 12 pp.

70. Cheng G., Mei C., Lee Y. Y. Flow angle, temperature and aerodynamic damping on supersonic panel flutter stability boundary // *AIAA Journal*. 2002. № 1285. 11 pp.

71. Duan B., Abdel-Motagaly K., Guo X., Mei C. Suppression of supersonic panel flutter and thermal deflection using shape memory alloy // *AIAA Journal*. 2003. № 1513. 10 pp.

72. Abdukhakimov F. A., Vedeneev V. V., Effect of yaw angle on flutter of rectangular plates at low supersonic speeds // *AIAA Journal*. 2022. V. 60. № 7. 11 pp.

73. Shyprykevich P. Experimental investigation of orthotropic panel flutter at arbitrary yaw angles, and comparison with theory // *NASA CR-2265*. 1973. 36 pp.

74. Бочкарёв С. А. Исследование панельного флаттера многослойных оболочек вращения методом конечных элементов // *Численные методы механики сплошной Среды. Тезисы докладов III Всесоюзной Школы молодых учёных*. Красноярск. 1989. С. 115–116.

75. Xue D. Y., Mei C. Finite element nonlinear panel flutter with arbitrary temperatures in supersonic flow // *AIAA Dyn. Spec. Conf.*, Dallas, Tex., Apr. 16-17, 1992; *Collect. Techn. Pap. Washington (D. C.)*, 1992. P. 478–491.

76. Zhou R. C., Xue D. Y., Meiz C. Finite element time domain-model formulation for nonlinear flutter of composite panels // *AIAA Journal*. 1994. V. 32. № 10. P. 2044–2052.

77. Gray C. E., Mei C. Large-amplitude finite element flutter analysis of composite panels in hypersonic flow // *AIAA Dyn. Spec. Conf.*, Dallas, Tex., Apr. 16-17, 1992; *Collect. Techn. Pap. Washington (D. C.)*, 1992. P. 492–512.

78. Gray C. E., Mei C. Large-amplitude finite element flutter analysis of composite panels in hypersonic flow // *AIAA Journal*. 1993. V. 31. № 6. P. 1090–1099.

79. Бабенко К. И. Основы численного анализа. Москва-Ижевск: РХД, 2002. 847 с.

80. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977.

81. Алгазин С. Д. Численное исследование свободных колебаний упругого тела вращения // *Известия Тульского гос. ун-та*. 2013. № 1. С. 56–66.

82. Алгазин С. Д., Кийко И. А. Численное исследование флаттера прямоугольной пластины // *ПМТФ*. 2003. Т. 44. Вып. 4. С. 35–42.

83. Алгазин С. Д. Вычислительный эксперимент в задаче о флаттере прямоугольной пластины. М.: Математическое моделирование. Т. 33. Вып. 6. С. 107–116.

84. Алгазин С. Д., Бабенко К. И., Косоруков А. Л. О численном решении задачи на собственные значения. 1975. 57 с. (Препринт / ИПМатем.; № 108).

85. Алгазин С. Д., Бабенко К. И. Об одном численном алгоритме решения задачи на собственные значения для линейных дифференциальных операторов. 1978. 80 с. (Препринт / ИПМатем.; № 46).

86. Алгазин С. Д., Бабенко К. И. Численное решение задачи об изгибе и свободных колебаниях пластинки // Прикл. матем. и мех. 1982. Т. 46. Вып. 6. С. 1011–1015.

87. Алгазин С. Д. О дискретизации оператора Лапласа // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 3. С. 521–525.

88. Алгазин С. Д., Кийко И. А. Численно-аналитическое исследование флаттера пластины произвольной формы в плане // ПММ. 1997. Т. 60. Вып. 1. С. 171–174.

89. Алгазин С. Д., Кийко И. А. Исследование собственных значений оператора в задачах панельного флаттера // Изв. АН. МТТ. 1999. № 1. С. 170–176.

90. Алгазин С. Д., Селиванов И. А. Задача о собственных колебаниях прямоугольной пластины со смешанными краевыми условиями // ПМТФ. 2021. Т. 62. Вып. 2(366). С. 70–76.

91. Алгазин С. Д., Селиванов И. А. Колебания ортотропной защемленной прямоугольной пластины. М.: Научный вестник ГосНИИ ГА, 2020. Т. 32. С. 140–148.

92. Алгазин С. Д., Селиванов И. А. Свободные колебания ортотропной конической оболочки. М.: Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 2022. № 5. С. 39–44. EDN MCUIKR.

93. Алгазин С. Д., Селиванов И. А. Собственные колебания прямоугольной пластины со смешанными краевыми условиями (SCSC). 2020. 20 с. (Препринт /

ИПРИМ РАН; Серия: Численные алгоритмы классической матфизики; № 1187). ISBN: 978-5-91741-251-1.

94. Алгазин С. Д., Селиванов И. А. Численное исследование флаттера пластины в сверхзвуковом потоке газа. 2021. 28 с. (Препринт / ИПРИМ РАН; Серия: Численные алгоритмы классической матфизики; № 1194). ISBN: 978-5-91741-272-6.

95. Алгазин С. Д., Селиванов И. А. Задача о флаттере пластины при смешанных граничных условиях // ПМТФ. 2022. Т. 63. № 5(375). С. 160–167. DOI 10.15372/PMTF20220516.

96. Селиванов И. А., Алгазин С. Д. Флаттер пластины со смешанными граничными условиями / Авиация и космонавтика: Тезисы 20-ой Международной конференции. 22 – 26 ноября 2021. М.: Издательство Перо, 2021. С. 460–461.

97. Gorman D. J. Free vibration analysis of rectangular plates // Elsevier North Holland, Inc. 1982. 324 p.

98. Leissa A. W. The free vibration of rectangular plates // Journal of Sound and Vibration. 1973. V. 31. I. 3. P. 257–293.

99. Комаров А. А., Кудинов А. А., Зинченко В. И. Конструкция и эксплуатация воздушных судов. М.: Транспорт, 1986. 343 с.

100. Житомерский Г. И. Конструкция самолетов. М.: Машиностроение, 1992. 406 с.

101. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1947. 355 с.

102. Germain S. Recherches sur la theorie des surfaces elastiques. Paris: M.me v.e Courcier ..., 1921. 118 p.

103. Xing Y. F., Liu B. New exact solutions for free vibrations of thin orthotropic rectangular plates // Composite Structures 89. 2009. P. 567 – 574.

104. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Издание второе, стереотипное / Пер. с англ. Контовта В.И. М.: Наука, глав. ред. физ.-мат. лит., 1966. 636 с.

105. Барашков В. Н., Смолина И. Ю., Путеева Л. Е., Песцов Д. Н. Основы теории упругости: учеб. пособие. Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2012. 184 с.

106. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. 2-е изд. Томск: Наука, глав. ред. физ.-мат. лит., 1970. 512 с.

107. Фадеев Д. К., Фадеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М: Физматгиз, 1963. 656 с.

108. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. М.: Гостехтеориздат, 1954. 328 с.

109. Лунев А. В. Колебания и устойчивость упругой пластины в рамках линеаризованной теории сверхзвукового обтекания // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2010. № 2. С. 101–103.

110. Kornecki, A. A Note on the Supersonic Panel Flutter of Oblique Clamped Plates // Journal of the Royal Aeronautical Society. 1970. 68(640). P. 270–271. doi:10.1017/s0001924000060929.

СПИСОК ИЛЛЮСТРАТИВНОГО МАТЕРИАЛА

Список рисунков

1.1.1 Общий вид пластинки.....	17
1.1.2 Собственная форма, $\lambda=4.8740586385$	24
1.1.3 Собственная форма, $\lambda=5.2924518162$	24
1.1.4 Собственная форма, $\lambda=5.9403949383$	24
1.1.5 Собственная форма, $\lambda=6.7549295698$	25
1.1.6 Собственная форма, $\lambda=7.6802671880$	25
1.2.1 Общий вид пластинки.....	26
1.2.2 Собственная форма, $a = b = 2$, $\lambda = 28.951910528$	37
1.2.3 Собственная форма, $a = b = 2$, $\lambda = 642.72686084$	38
1.2.4 Собственная форма, $a = b = 2$, $\lambda = 154.58848123$	39
2.1.1 Общий вид пластинки.....	42
2.1.2 Схема решения	44
2.1.3 График критической скорости от направления потока для квадратной пластинки	47
2.1.4 Графики критической скорости от направления потока при различных $ y $.	50
2.1.5 Вид собственной формы при направлении вектора скорости потока 0°	52
2.1.6 Вид собственной формы при направлении вектора скорости потока 45°	52
2.1.7 Вид собственной формы при направлении вектора скорости потока 90°	53
2.1.8 Собственные формы потери динамической устойчивости короткой и длинной пластин из работы [59].....	56
3.1.1 Общий вид пластинки.....	59
3.2.1 Общий вид пластинки.....	63
3.3.1 График критической скорости от направления потока для квадратной пластинки	70
3.3.2 Графики критической скорости от направления потока при различных $ y $.	73
3.3.3 Графики критической скорости от направления потока при различных $ y $.	74

3.3.4 $\text{Re}(\varphi)$, Материал 1, $\alpha = 0$	76
3.3.5 $\text{Re}(\varphi)$, Материал 1, $\alpha = \pi/4$	76
3.3.6 График критической скорости от направления потока для квадратной пластинки	80
3.3.7 Графики критической скорости от направления потока при различных $ y $.	83
3.3.8 Графики критической скорости от направления потока при различных $ y $.	84
3.3.9 Собственная форма $\text{Re}(\varphi)$, $\alpha = \pi/2$	85
3.3.10 Собственная форма $\text{Re}(\varphi)$, $\alpha = \pi/4$	85
3.3.11 Собственная форма $\text{Re}(\varphi)$, $\alpha = \pi/2$	86
3.3.12 Собственная форма $\text{Re}(\varphi)$, $\alpha = \pi/4$	86

Список таблиц

1.1.1 Безразмерные собственные частоты, $n = m = 7$, слева направо, сверху вниз	23
1.1.2 Безразмерные собственные частоты, $n = m = 17$, слева направо, сверху вниз.	23
1.1.3 Безразмерные собственные частоты, $n = m = 27$, слева направо, сверху вниз.	23
1.1.4 Безразмерные собственные частоты, $n = m = 37$, слева направо, сверху вниз..	23
1.2.1 Результаты расчета приближенных собственных значений для разных пластинок и сравнение с известными точными значениями.....	33
1.2.2 Собственные значения для сетки 13×13 , $a = b = 2$, $\phi = 1$	34
1.2.3 Собственные значения для сетки 25×25 , $a = b = 2$, $\phi = 1$	34
1.2.4 Собственные значения из [80], фрагмент таблицы EV-2.....	35
1.2.5 Собственные значения для сетки 13×13 , $\phi = 1.5$	35
1.2.6 Собственные значения для сетки 25×25 , $\phi = 1.5$	35
1.2.7 Собственные значения для сетки 13×13 , $\phi = 2$	36
1.2.8 Собственные значения для сетки 17×17 , $\phi = 2$	36
1.2.9 Собственные значения для сетки 13×13 , $\phi = 1.25$	36
1.2.10 Собственные значения для сетки 25×25 , $\phi = 1.25$	37

2.1.1 Результаты расчета для квадратной пластинки при различных направлениях вектора скорости потока.....	46
2.1.2 Результаты расчета при различных направлениях вектора скорости потока	48
2.1.3 Сравнение значений критического динамического давления для пластины СССР. Durvasula [66], метод Релея–Ритца, 16 членов, балочные функции. Kornechi [110], метод Галеркина, 4 члена, функции Iguchi. Sander [67], метод конечных элементов, CQ конформные четырехсторонние кубические элементы, сетка 4x4. Папков [59], метод Бубнова–Галеркина	54
2.1.4 Значения критической скорости, полученные для пластинок SSSS [82] и СССР [59].....	55
3.3.1 Результаты расчета для квадратной пластинки при различных направлениях вектора скорости потока.....	67
3.3.2 Результаты расчета при различных направлениях вектора скорости потока	70
3.3.4 Характеристики материалов пластинки	75
3.3.5 Критическая скорость при изменении толщины пластинки	75
3.3.6 Результаты расчета для квадратной пластинки при различных направлениях вектора скорости потока.....	78
3.3.7 Результаты расчета при различных направлениях вектора скорости потока	81
3.3.8 Критическая скорость при изменении толщины пластинки, $ x \leq 1, y \leq 1$	87
3.3.9 Критическая скорость при изменении толщины пластинки, $ x \leq 1, y \leq 2$...	87

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Программный код для численного решения задачи о собственных колебаниях прямоугольной пластинки со смешанными граничными условиями в пакете Maple:

```
Up := 4/(m*pi)^5 + A*cosh(m*pi*x/b) + B*m*pi*x*sinh(m*pi*x/b)/b;
A := 4*(cosh(m*pi*a/(2*b))*a*m*pi + 2 * sinh(m*pi*a/(2*b))*b) /
((m*pi*sinh(m*pi*a/(2*b)))^2*a - cosh(m*pi*a/(2*b))^2*a*m*pi -
2*cosh(m*pi*a/(2*b))*sinh(m*pi*a/(2*b))*b)*m^5*pi^5);
B := -8*sinh(m*pi*a/(2*b))*b/((m*pi*sinh(m*pi*a/(2*b)))^2*a -
cosh(m*pi*a/(2*b))^2*a*m*pi -
2*cosh(m*pi*a/(2*b))*sinh(m*pi*a/(2*b))*b)*m^5*pi^5);
```

Выбор размера пластинки:

```
a := 2;
b := 2;
m := 1;
pi := 3.141592653589793238462643;
dd_Up := diff(Up, [x $ 2]);
Yp := sin(m*pi*y/b);
dd_Yp := diff(Yp, [y $ 2]);
I22 := integrate(dd_Up*dd_Up, x = -a/2 .. a/2);
I00 := integrate(Up*Up, x = -a/2 .. a/2);
I02 := integrate(Up*dd_Up, x = -a/2 .. a/2);
J00 := integrate(Yp*Yp, y = 0 .. b);
J22 := integrate(dd_Yp*dd_Yp, y = 0 .. b);
J02 := integrate(Yp*dd_Yp, y = 0 .. b);
AA := (I00*J22 + I02*J02 + I22*J00) + I02*J02;
BB := I00*J00;
BA := 4*(AA/BB)^(1/2);
```